

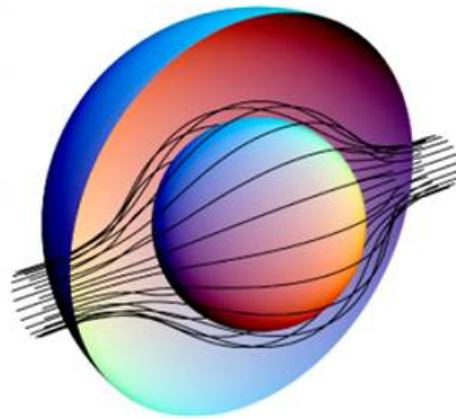


ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología



Universidad del País Vasco Euskal Herriko
Unibertsitatea

IKUSEZINTASUNERANTZ: EREMU ELEKTROMAGNETIKOEN KONTROLA METAMATERIALEN BIDEZ



Egilea: Ivan Manso

Gainbegiralea: Nerea Zabala

Leioa, 2014ko Ekaina

AURKIBIDEA:

Laburpena	1
1. Sarrera	1
2. Metamaterialak eta estalketa	5
2.1. Errefrakzio-indize negatibodun materialak	6
2.2. Estalketa	8
3. Transformazioaren optika	11
4. Estalki esferikoa	14
4.1. Simulazioak MATLAB programarekin	21
4.2. Simulazioa COMSOL programarekin	26
5. Elipsoide-estalkia	27
6. Ondorioak	31
Erreferentziak	33
Irudiak	34
Eranskinak	35
A eranskina	35

B	eranskina	35
C	eranskina	36
D	eranskina	37
E	eranskina	37
F	eranskina	37

LABURPENA:

Historian zehar, greziar mitologiatik gaur egun arte, gizakiak ikusezin izatearekin amestu du. Hala ere, duela urte gutxi arte ez da benetan zientifikoki azaldu nola gauzatu amets hori. Tachi-ren lanetik [1] hasita, non transparentzia birtual bat lortzen den, metamaterialen mundura pasatzen da argi-izpiak nahi eran desbideratuz eta modu honetan ikusezintasuna lortuz. Metamaterialak artifiziarki sortutako materialak dira, laborategietan diseinatuak eta guk behar ditugun propietateez esleituak. Hauen bidez, ingurune baten permitibitate elektrikoa eta iragazkortasun magnetikoa, eta ondorioz handik pasatzen diren uhin elektromagnetikoak kontrolatzea lortzen da. Horrela, argiaren desbiderapen kontrolatua lortu nahi da, eta fenomeno hori deskribatzen duen formalismoari transformazioaren optika deritzo. Honi esker, esaterako, ikusezintasun-estalki esferiko batek, modu teoriko batean nola funtzionatuko lukeen kalkulatu eta simula daiteke.

Hala ere, ikusezintasunaren zientziak hasi besterik ez du egin eta oraindik lan handia dago egiteko arlo honen inguruan, oraindik ez baita begi bistaz antzematen den objekturik ikusezin bihurtu.

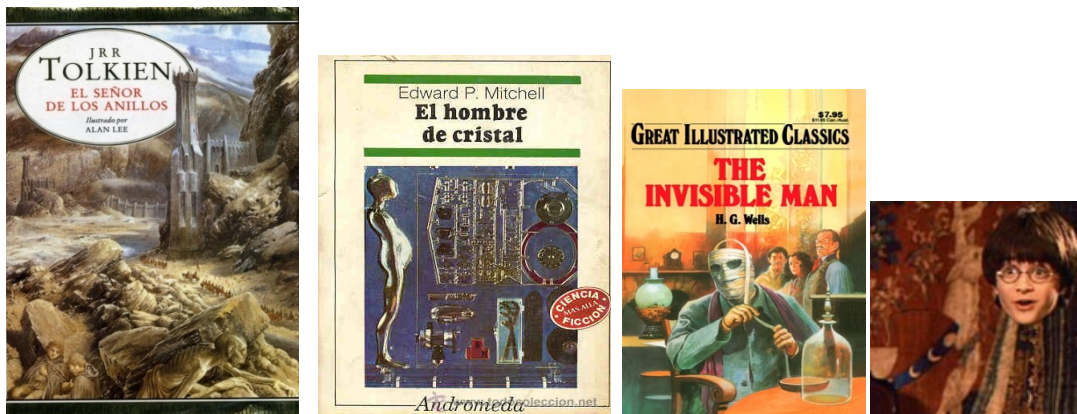
1- SARRERA:

Urte askotan zehar, gizakiak hainbat gauzekin amestu du: hegan egitearekin, ur azpian arnastearrekin, espaziora joatearekin, munduko beste puntan dagoen beste pertsona batekin komunikatzearekin.... Zientziak eta zientzialariek hori nolabait ahalbidetu dute orain arte, hegazkinen bitartez, parapenteaz, oxigeno bonbonaz, espazio-ontziez, telefono edota ordenagailu bitartez, eta abar. Baina zer gertatzen da ikusezin izatearekin? Nork ez du noizbait pentsatu ikusezin izatea? Edo zer egingo luke ikusezin izango balitz? Milaka fantasia eta amets egon dira gai honen inguruan historian zehar, greziar mitologiatik hasita (non Athena, Zeusen alabak, ikusezintasun estalki bat asmatu zuen bere anai Aresengatik ezkutatzeko), gaur egungo zientzia fikziozko filmetaraino.

Aipatu behar da denboran zehar egon direla ikusezintasuna ikuspuntu “zientifiko” batetik hartu eta tratatu dituzten eleberri eta liburuak. XIX. mendearen bukaeran ikusezintasuna gai literario bilakatu zen: “Kristalezko Gizona” Edward Page Mitchell (1881), ”Gizon Ikusezina” H.G.Wells (1897) eta “Itzala eta Flasha” Jack London (1903) beste askoren artean. Star Trek seriean bertan (1966) ikusezintasun-sistema bat erabiltzen zen haien espazio-ontzia kamuflatzeko.

Gaur egun ezagunenak diren kasuei aipamen bat egitearren XX. mendean, J.R.R Tolkien-en “Eraztunen Erregea” famatua dugu, non ikusezintasun-eraztun bat (boterearen eraztuna) agertzen den, zeinak eraztunaren eramailea usteldu eta galdarazten

duen; edota “Harry Potter” saga famatua, non ikusezintasun-kapa bat lortzen duen mago gazteak gaizkileak garaitu ahal izateko.



1. irudia: “Eraztunen Erregea”, “Kristalezko Gizona” eta “Gizon Ikusezina” liburuen azalak, eta Harry Potter gaztea ikusezintasun-kapaz jantzita, burua izan ezik.

Azkenean, aipatu ditudan azken erreferentzietan ikusezintasuna lortzeko dauden fikziozko metodo guztiek, nolabait benetako zentzu zientifiko bat eraiki dute ikusezintasuna lortzerako orduan. Adibidez, “Kristalezko Gizona” liburuan bi protagonistak garden bihurtzen dira zientziaren bitartez, gorputzaren errefrakzio-indizea airearenaren berdina eginez. Baita ere, “Itzala eta Flash” delakoan, Itzala den pertsonaia, pertsonai iluna da (ikusezin gardena den Flashen kontrakoa) argi guztia zurgatzen duen pigmentu batez estalita dagoelako, eta badakigu dena zurgatzen badu ez duela ezer islatzen, beraz ez zaigu berarengandik argirik iritsiko eta itzal beltza izango da.

Fikzioa alde batera utzita, mundu errealean benetako ikusezintasunak ere baditu bere haziak [2]. Honen hasiera, historiaren momentu konkretu bati ematearren, soldaduek uniforme deigarriak eramateari utzi zutenean izan zen, arerioengandik ikusiak ez izateko noski. Adibidez, tropa britainiarrek, kaki kolorezko tonuak erabiltzen hasi ziren 1848. urtean. Beranduago, mende horretan, EEBB-ko Abbott Henderson Thayer artistak, bi metodo ezberdin bereizi zituen gauzak bere ingurune propiotik ezkutatzeko: lehenik eta behin nahasketa, non objektua bera bere atzealdearekin bereiztezin egiten zuten, eta gero hausketak, non kolore indartsuek gure objektua nabar-ezina egiten zuten.

Idea hauek lehen mundu-gudan erabiliak izan ziren, eta orain arte edozein gatazketan erabili dira bai uniformeetan, bai tanke, itsasontzi edota hegazkinetan ere. Baina benetako ikusezintasunerako hurbilketan aurrera, airearen bidezko guden bitartez egin zen. Erradar batekin guda-hegazkin baten aurka bidalitako irrati-uhinak ($\lambda < 180m$) detektatzen ziren, eta gero detektatutako seinalea aztertuz beste hegazkina non zegoen jakiten zen. Egia esan, hau oso eraginkorra zen hegazkinen metalezko gainazaleko irrati-uhinen islapen handiagatik eta haien eiteari esker.

Hala ere, hegazkin baten erradarraren detekzioa minimiza daiteke haren forma aldatuz uhin islatuen sakabanaketa minimoa eginez. 1960eko hamarkadan, geometria konplexuko sakabanaketak aztertzeko metodoak garatu ziren Pyotr Ufimtsev zientzialari sobietarraren eskutik [3]. 1975ean, ingeniariak, aipatutako metodoak erabiliz F-117 hegazkina sortu zuten, detekzio-sekzioa erradar batean 20cm^2 -koa izatea lortuz. Hala ere, ez zen batere aerodinamikoa eta erabat ezegonkorra zen hegaldian. Egia da ere, horrelako hegazkinak, erradarren uhinak zurgatzeko material batez zeudela eginda, baina horrek hegazkinak berotzen zituen eta erradar infragorriek erraz detektatzen zituzten. Horregatik, misilen aurrean ez zuten hainbeste egiterik. Azkenaldian, gai honen inguruan egin diren aurrerapenei esker lortu da zeharkako sekzioa golfeko pilota batena bezalakoa izatea edota intsektu handi batena bezalakoa, arerioen detekzioa nabarmenki zailduz.



2. irudia: F-117 hegazkina (Nighthawk izenekoa).

Baina zer gertatzen da ikusezintasunarekin? Bazirudien ez zegoela inongo aurrerapenik guk hainbeste idealizatuta dugun ikusezintasunaren arloan, hau da, eguneroko objektuak ikusezin egitearekin. Orduan, 2003. urtean, Susumu Tachi izeneko zientzialariak gidatutako taldeak, Tokyo-ko unibertsitatean, gardentasun birtual antzeko zerbait sortu zuen “kamuflaje optiko” izenekoa [1]. Honetan datza: demagun eszenatoki erreal baten erdian objektu bat dugula. Gure helburua objektu hori kamuflatzea da bere inguruarekin, atzean dagoen eszenatokia edo irudia objektuan proiektatuz, gardena izango balitz bezala. Horretarako, lehenik eta behin, kamuflatu nahi dugun objektua, material atzeraislatzaile batez estalia egon behar da, zeinaren eraginez, objektua erasotzen duten argi-izpiak etorri diren bidetik (norabide beretik eta kontrako noranzkotik) bueltatuko diren, edozein izanda ere eraso-angelua. Gero, bideo-kamera digital batez, objektuaren atzean dagoen eszenatokia grabatzen da eta grabazio edota irudi hau, ordenagailu batera bidaltzen da. Ordenagailuak, irudia behar den bezala doitzen du errealitatera (proiektatzen den momenturako). Beraz, proiektagailu batera bidaltzen du irudi edo eszena, eta honek objektua eta ikuslearen artean dagoen ispilu batera proiektatzen du. Ispilu honek, berezia izan behar du dena funtzionatu dadin, izan ere, argiaren erdia islatu eta beste erdia pasatu behar dugu eta hori da ispilu honek egiten duena, hau da, partzialki transmititzen du. Beraz, irudia ispiluan islatu eta objekturantz zuzentzen da (ispilua orientatzen da, hau horrela gerta dadin), eta nola objektua material atzeraislatzaileaz estalita dagoen, irudi hau bera, objektuaren irudiarekin gainezarrita etorri den bidetik itzuliko da ispilurantz. Orduan, ispiluak islatzeaz gain partzialki transmititzen duenez, irudiak ispilua zeharkatu eta behatzailearengana iritsiko da. Irudia, esan bezala, objektuaren eta proiektatutakoaren

gainezarmena da, eta beraz behatzaileak ikusiko ditu bai objektua eta bai bere atzean dagoena aldi berean, gardentasun-sentsazioa emanez.

Tachi-ren taldeak, baita ere, “transparent cockpit” izenekoa garatu du Keyo-ko unibertsitatean. Honen bidez, kotxeen gidariek, autoan zehar ikus dezakete, beraien inguruan dagoen guztia antzemanaz. Hau egokia da toki estuetatik joateko edota lurreko seinaleez konturatzeko adibidez. Teknika hau ere helikopteroetara hedatu nahi da, benetan ezer gabe hegan egitearen sentsazioa izateko.



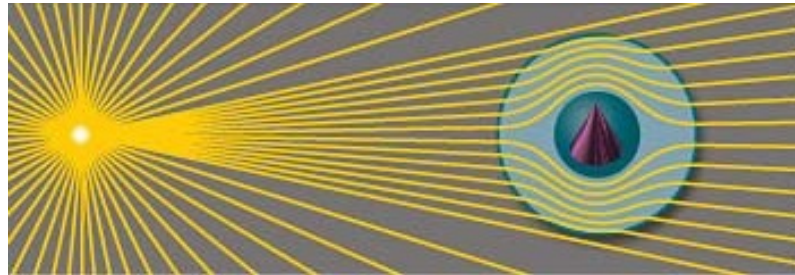
3a. irudia: Ezkerreko irudian argi ikusten da zer gertatzen den argiak gainazal atzeraislatzaile bat erasotzen duenean: etorri den bidetik bueltatzen da. Eskuinekoan, Tachi-k garatutako muntaketaren eskema dugu.



3b. irudia: Ezkerrean, Tachi-ren taldeak lortutako gardentasun efektuaren adibide bat dugu, eta eskuinean kotxearen barnetik kanpoaldea nola ikusten den.

Orain arte, ikusezintasuna lortzeko denboran zehar egindako aurrerapenak aipatu ditut, hala ere, esan behar da hori ez dela benetako ikusezintasuna. Benetako ikusezintasuna lortzen saiatu dira gaur egun zientzialariak eta hau lortzeko bidea ikusi da, nahiz eta begi bistaz objekturik ikusezin egitea ez lortu. Ideia orokorra objektu bat ikusezin

bihurtu nahi bada, honi erasotzen dioten argi-izpiak manipulatzeko (desbideratzea) da, objektua bera inguratu dezaten, ondoren etorri diren norabide berean jarraitzeko, korrontedun ibai batean harri bat jarriko bagenu bezala. Horretarako, objektua metamaterialez estaliko dugu, argi-izpiak nahieran manipulatzeko. Honi, “cloaking” edo estaltzearen teoria deitzen zaio.



4. irudia: Metamaterialez estalitako kono morea (objektua). Ezkerreko argi-iturritik datozen izpiak desbideratzen dira metamaterialean zehar, korrontedun ibai batean harri bat jarriko bagenu bezala.

Hurrengo ataletan zehar, aurreko ideian oinarritzen den benetako ikusezintasunaren hastapenak eta oinarri matematikoa aurkeztuko ditugu, metamaterialak deskribatuz eta transformazioaren optika azalduz. Gero, bi kasu konkretu aztertuko ditugu: estalki esferikoa eta elipsoide-estalkia hain zuzen ere, argiaren (eremu elektromagnetikoen) jokabidea kasu bakoitzean nolakoa den deskribatuz eta hauen irudiak lortuz COMSOL eta MATLAB programen bitartez.

2- METAMATERIALAK ETA ESTALKETA

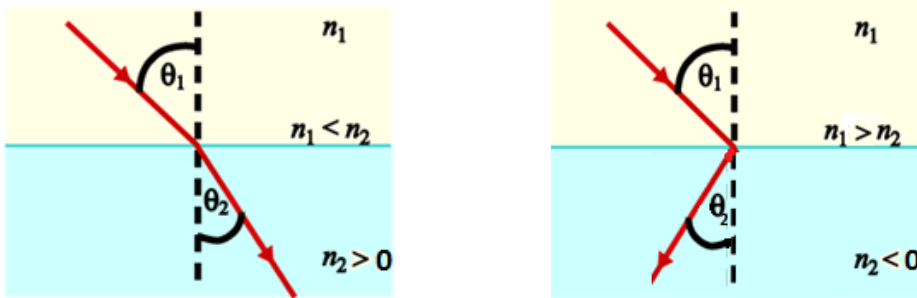
Metamaterialak material artifizialak dira, laborategietan sortuak, guk nahi bezalakoak eta behar ditugun propietateak izan ditzaten diseinatuak. Hitzak berak esaten duen moduan, “meta” terminoak ematen dion zentzua material normalak baino hareago doazen materialena da. Horrela, artifizialki diseinatutako egitura periodiko bat ematen zaie (kristal bat balitz bezala), guk nahi ditugun eta naturan agertzen ez diren propietate elektromagnetikoak lortzeko.

1968an, Victor Veselago zientzialari errusiarrak, errefrakzio-indize negatiboa zuten materialen inguruko lan teorikoa argitaratu zuen [4], baina ideia hauek ez ziren 2000. urtea arte garatu modu esperimentalean. Urte horretan, John Pendry fisikari britainiarrak errefrakzio-indize negatibodun materialen diseinua azaldu zuen [5].

2.1- ERREFRAKZIO-INDIZE NEGATIBODUN MATERIALAK

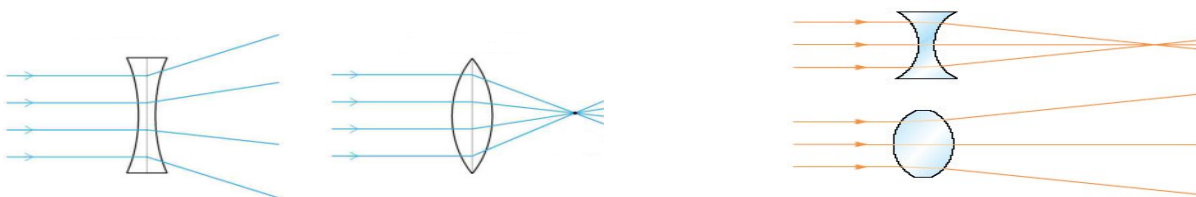
Veselagok, teoria bat garatu zuen ingurune batean hedatzen diren uhin elektromagnetikoei buruz, non inguruneek, garai horretan entzun gabe zegoen propietate bat zuten: errefrakzio-indize negatiboa. Dakigunez, n errefrakzio-indizea, hutsean zehar doan argiaren abiaduraren (c) eta gure ingurunean argiak duen abiaduraren (v) ratioa adierazten du: $n = \frac{c}{v}$. Gogoratu $v \leq c$ dela, beraz, $n \geq 1$ izango da. Baina Veselagok, n negatiboa izan zitekeela frogatu zuen ingurunearen permitibitate elektrikoa (ϵ) eta iragazkortasun magnetikoa (μ) aldi berean negatibo izanda.

Ezaguna den Snell-en errefrakzio-legeari jarraituz: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ dugu. Angeluak, 5. irudian ikusten den bezala, bi inguruneen mugen arteko normalarekin argi-izpi erasotzaileak eta errefraktatuak osatzen dituztenak dira, eta n_1 eta n_2 , mugan dauden bi inguruneen errefrakzio-indizeak. Argi ikusten da n negatiboen kasuan, argi-izpia kontrako aldera errefraktatzen dela.



5. irudia: Snell-en legea errefrakzio-indize positiboen (ezkerrean) eta negatiboen (eskuinean) kasuan.

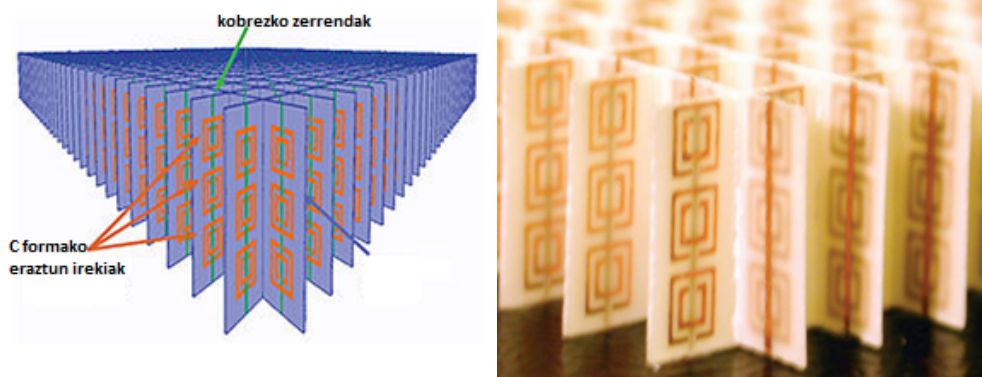
Errefrakzio-indize negatiboei esker, optika ere aldatzen da. Izan ere, leiarrak alderantzikatzen dira. Hau da, leiar ahur batek izpiak fokalizatuko lituzke, eta leiar ganbil batek dibergitu.



6.irudia: Ezkerreko irudian, errefrakzio-indize positibodun leiarraren kasua dugu, non leiar ahurak izpiak dibergitzen dituen, eta ganbilak fokalizatu. Eskuinekoan, errefrakzio-indize negatibodunei dagozkien leiarrak ditugu, non leiar ahurak izpiak fokalizatzen dituen, eta ganbilak dibergitu.

Material hauen aplikazio bat superleiarrak dira, zeinei esker orain arte baino erresoluzio handiagoak lortu diren. Hauek, aplikazio askori bidea eman diete. Esaterako, zirkuituak egiterakoan, txip-etan gauza gehiago sar daitezke, gailuak asko hobetuz (ordenagailuak...); mikroskopia hobeak lor daitezke....[5,10].

Naturan, posible da ϵ negatibo duten materialak aurkitzea (metalak maiztasun tarte bateko eremuekin erasotzean), baina μ negatibo dutenak aurkitzea askoz zailagoa da (ez daude). Horregatik, hori lortzeko material artifizialen beharra ikusi zen, eta horrela sortu ziren metamaterialak. Aipatu bezala, honen diseinua Pendry-k proposatu zuen [5] eta 2000. urtean Kaliforniako Unibertsitateko ikertzaileek errefrakzio-indize negatiboa lortzea ahalbidetzen zuen metamaterial bat eraiki zuten [11], (ikusi 7. irudia). Hau, milimetro neurriko ehunka unitatez eginda zegoen, zeinak patroia bati jarraituz kokatu ziren, atomoak kristal batean bezala. Bi unitate mota zeuden, kobrezko zerrendak, non elektroi kopuru handi baten ekintzak $\epsilon < 0$ izatea ekartzen zuen; eta C eiteko kobrezko eraztun erresonante irekiak, metalezko hari-sare batekin konbinatuak, non argi erasotzaileak (bere eremu elektromagnetikoa dakarrelarik) induzitutako korroneek efektu magnetikoak sortzen zituzten, $\mu < 0$ eginez. Mikrouhin erasotzaile batentzat ($\lambda = 3\text{cm}$ -koa), errefrakzio-indizea $n = -2.7$ izatea lortu zen metamaterial honekin.

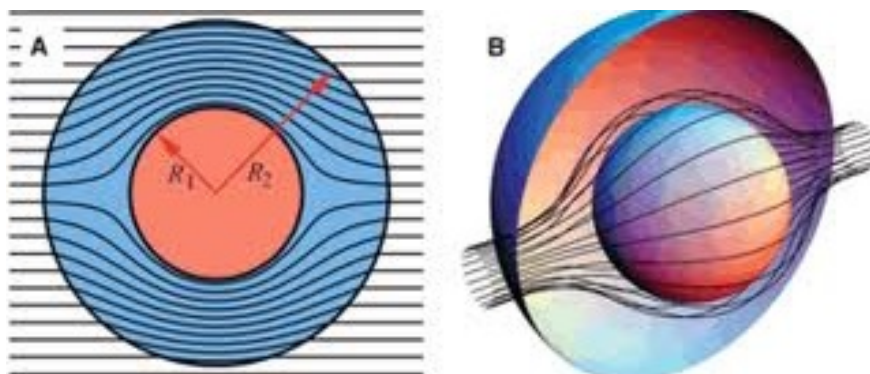


7. irudia: Ezkerrean kaliforniako unibertsitatean 2000. urtean egindako metamaterialaren egitura. Kolore laranja-duna, C eiteko eraztun irekiak dira, binaka jarrita eta bata bestearen barnean. Kolore berdea, kobrezko zerrendak dira. Eskuinean benetako metamaterialaren argazkia dago.

Aipatzekoa da, nola material ez magnetikoen (kobrea edo zilarra esterako) mikroegituren bidez, eskala makroskopikoan erantzun magnetiko bat izatea lortzen den, μ eraginkor bat lortuz eta argi erasotzailearen maiztasun-tarte jakin batzuentzat negatiboa eginez. Baina esan behar da, aipatutako metamaterialaren mikroegitura hau, argi erasotzailearen erradiazio elektromagnetikoaren λ uhin-luzera baino eskala askoz txikiagoetan eraiki behar dela: $a \ll \lambda$, non 'a' metamaterial periodikoaren gelaxkaren dimentsioa den. Hau beteko ez balitz, mikroegiturak argia difraktatu eta errefraktatuko luke, egindako kalkulu eta helburuak apurtuz, argia ez litzatekeelako nahi genukeen eran manipulatu izango.

2.2- ESTALKETA:

2006. urtean, “cloaking” inguruko teoria aldi berean argitaratu zuten Ulf Leonhardt-ek St.Andrews-eko unibertsitatean [6] eta John Pendryk Londreseko Imperial College delakoan, David Smith eta David Schuring-en laguntzarekin [7] (hauek Duke-eko unibertsitatekoak, EEBBtan). Azken talde honek, gainazal esferiko huts baten errefrakzio-indizearen profila kalkulatu zuen. Horrelako esfera batez estalitako objektua ikusezin egingo litzateke (teorikoki), argi-izpiak lehen azaldutako moduan desbideratuz (erreka bateko korronteak harri baten inguruan bezala, gero, hasierako norabide bera mantenduz).

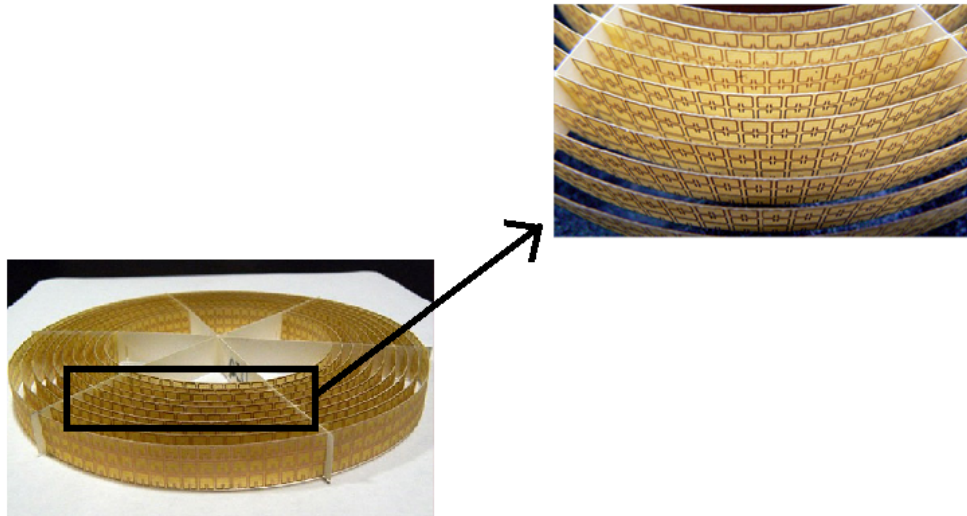


8. irudia: (A) estalki esferikoaren kanpo eta barne erradioak ikusten dira bi dimentsiotan. (B) Estalki esferikoaren eragina hiru dimentsiotan.

Urte berean, Smith-en taldeak, Pendry, Schuring eta beste lankide gehiagorekin, teoria hau erabiliz metamaterialezko lehen ikusezintasun-estalkia eraiki zuten. Metamaterial hori, 5.4 – 11.8 cm tarteko diametroko 10 eraztun zentrokidez osatua zegoen (9. irudian ikusten den moduan), non bakoitzean kobrezko milaka eraztun erresonatzaile ireki zeuden, bakoitzaren tamaina aldakorra zelarik espazioko gune bakoitzean kalkulaturako errefrakzio-indizea egon zedin. Disko-itxura zuen eta soilik ezaugarri bidimentsionalak zituen.

Adibidez, 5cm-ko lodierako kobrezko zilindro bat, $\lambda = 3.5$ cm-ko mikrouhinez erasotua izatean, uhin hauen sakabanaketaren detekzio nabarmena eman zen, beraz, esan daiteke ez zegoela ikusezintasunik, sakabanaturako izpiak ondo detektatu zirelako. Baina objektu hau, estalkiaren barnean (zentroan) kokatzean, uhinetan eragindako sakabanaketaren detekzioa ia nulua izan zen. Estalkiak espero bezala jokatu zuen: mikrouhinak sartu ziren estalkian eta zentroaren inguruan pasatu ziren, azkenik etorri ziren norabide berdinez ateratzeko (gogoratu sarrerako 4. irudia).

Arrakasta honen ondorioz, jende askoren interesa piztu zen gai honen inguruan. Interes zientifikoak gora egin zuten, eta ikertzaileek, lan hau askotan aipatu dute haien argitalpenetan. Albisteak Harry Potter-en estalkia 5 urtetan lortuko zela esaten hasi ziren, baina gauzak ez dira hain errazak eta hori lortzetik oraindik urrun gaude.

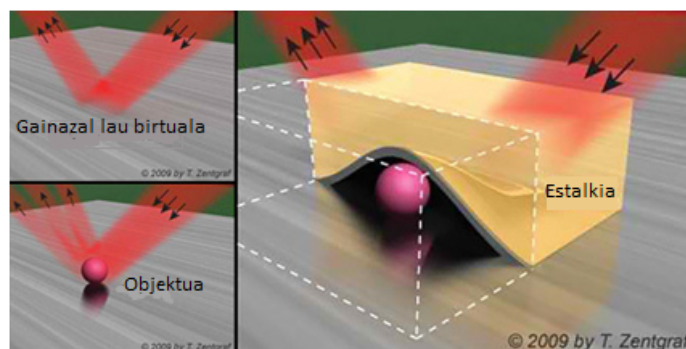


9. irudia: Lehen metamaterialezko estalkia, 2006an David Smith-en taldeak, Duke-ko unibertsitatean eraikia. Argi ikusten dira C eiteko eraztun irekiak (bata bestearen parean daude).

Orain, ikusezintasuna, espektroko argi ikusgaira hedatzea planteatu da ($\lambda = 380 \text{ nm} - 780 \text{ nm}$). Lan hau ez da batere erraza, izan ere hainbat faktore eduki behar dira kontuan: kobrea, uhin-luzera horietarako oso xurgatzailea denez, estalkiak ez luke guk nahi eran funtzionatuko eta ez genuke ikusezintasuna edukiko, estalkia nabarituko baitzen. Kontuan hartu beharreko beste baldintza bat, metamaterialaren osagaiak eta mikroegitura uhin-luzera erasotzailea baino txikiagoak izatea da, aurretik azaldu ditugun arrazoiengatik (argiaren difrakzioa eta errefrakzioa, eta ondorioz argia nahi dugun bezala ezin manipulatzeko). Beraz, argi ikusgaiarako, nanoegituraz osatutako metamateriala behar dugu oraingoan, uhin erasotzailea mikrouhina zenean, egitura milimetroko neurrikoa zenean bezala. Honek gauzak zailtzen ditu metamaterial hauen lorpena oso konplexua baita, nanoteknologiaren beharra baitugu. Beste gauza bat nanoegituraren eraztunen irekidura da, izan ere, $\mu < 0$ izatea lortzen dutenak, uhin-luzera jakin batzuentzako dira. Kontuan izan behar da baita ere metamaterialak zer materialekin egiten diren, erasotako izpiak haien gainean dituzten efektuengatik. Beraz, ez da erraza ikusezintasuna lortzea espektro elektromagnetikoko zati guztientzat, zati ikusgaia (guri interesatzen zaiguna) haren zati delarik.

Argi dago, metamaterial-estalkiek bi propietate garrantzitsu izan behar dituztela: anisotropokoak izatea, hau da, inguruneak ezberdin jokatuko duela norabide batean edo bestean, eta inhomogeneoak izatea, hau da, ingurunearen parametroak aldakorak izatea. Horrela, puntu bakoitzean behar den errefrakzio-indizea izango dugu, eta argia nahi eran manipulatu ahal izango dugu.

2008an, Pendry-k eta Li-k aurrerakuntza berri bat egin zuten ikusezintasunaren optikan, “carpet cloak” (alfonbra-estalkia) delakoa asmatuz [8]. Honen ideia, argi-izpiek objektua inguratzearen antzekoa da, baina oraingoan argi-izpiak lurrian islatuko balira bezala desbideratu behar dira. Honek, hutsune edo konkorr bat laua dela iruditzea dakar, eta horretarako, soilik n errefrakzio-indize aldakorreko metamaterial simple bat behar da, eraztun erresonanterik gabea, gure hutsune edo konkorraren gainean.



10. irudia: “Carpet cloak” delakoaren funtzionamenduaren eskema.

2011. urtea arte, ikusezintasun-estalkiek disko itxura zuten, eta ikusezintasuna bi dimentsiotarako lortzen zuten. Nahiz eta kalkuluaren bitartez modu teoriko batez hiru dimentsiotako estalkiak sortu, haien errefrakzio-indizea puntu bakoitzeko kalkulatu eta argi-izpiak nola desbideratu behar direneko kalkuluak eta abar eginez, ez zegoen inolako prototiporik. Duela lau urte, Texas-eko unibertsitatean, Andrea Alu-ren taldeak, hiru dimentsiotako lehen estalkia eraiki zuen [9].



11. irudia: Ezkerrean zilindro dielektrikoa dugu, eta eskuinean zilindroaren sekzio bat ikusi daiteke, non kapa plasmonikoak zilindroa inguratzen duen.

Horretarako, kapa plasmoniko* bat egin zuten metamaterialen bidez. Esperimentu honetan, 18cm-ko luzerako eta aipatutako kapaz inguratutako zilindro dielektriko bat ikusezin egitea lortu zuten. Baina estalki honek ez du balio gizaki bat edo eguneroko objektu normal bat ezkutatzeko, izan ere, bere funtzionamendua ez da zehazki argi-izpiak desbideratzearena. Beraz, aurrerapen bat izan arren, ez da oraingoz baliagarria, eta gainera mikrouhinentzat dago egina, beraz, zilindroa ez da begi bistatik desagertzen.

* Plasmoia: Solido batean karga askeak ditugunean eta kanpo eremu elektriko bat aplikatzean, polarizazio efektuak gertatzen dira. Kanpo eremua oszilakorra denean, solidoko kargak ere oszilatuak dute. Oszilazio horien erresonantzia-maiztasun jakin batzuk, plasmoi-maiztasunak, solidoari ezaugarri jakin batzuk ematen dizkiote. Beraz, maiztasun horretako oszilazioak uhinak bezala hedatuko dira solidotik eta uhin horien kuantuei, uhin-partikula izaeraren ikuspuntutik, plasmoi izena ematen zaie. Hortaz, material plasmoniko bat, metal bat kanpo eremu aldakorren aurrean jartzean horrelako uhinak sortzen eta ezaugarri jakin batzuk lortzen dituzten materialak dira.

3- TRANSFORMAZIOAREN OPTIKA:

Orain arte aipatu bezala, ikusezintasuna lortzeko argi-izpien desbiderapena modu kontrolatu batean manipulatu behar dugu. Desbiderapen hori matematikoki nolakoa izan behar den kalkulatzeko duen metodo bat garatu da, transformazioaren optika izenekoa. Gero, behin ikusita nolakoa izan behar den desbiderapena, puntu bakoitzean behar diren permitibitate elektrikoa eta iragazkortasun magnetikoa jakitea ahalbidetzen digu transformazioaren optikak, gure metamaterialaren propietateak zehazten dituelarik. Metodo hau, espazioko koordenatu-transformazio batean oinarritzen da, nahi den gunean (metamaterialak okupatzen duena) espazioa aldatuz koordenatu-transformazioaren bidez. Esaterako, gune horretatik kanpo, jatorrizko espazioan lerro zuzen bat dena, gune horretan sartzean, espazio berrian, lerro kurbatu bat izan daiteke (metrika batez definitua, erlatibitate orokorrean bezala). Berez koordenatu-transformazioa egitean, espazioa ez da aldatzen, baina metamateriala erabiltzean izpiek daukaten desbiderapena nolakoa den deskribatzeko balio digu aldaketa hori imajinatzeak. Hurrengo ataleko 11. irudian ikusten da hau dena estalki esferikoaren kasu konkretuan.

Koordenatu-transformazio honen bidez jakin daiteke baita ere nola transformatzen diren permitibitate elektrikoa eta iragazkortasun magnetikoa nahi den gunean (metamaterialak okupatzen duena), horren kanpoaldearekiko konparatuz, eta horrela, gune horren (metamaterialaren) propietateen profila (ϵ', μ') lortzen da. Beraz, modu teorikoan estalkia nolakoa izan behar den jakingo dugu eta simulazioen bidez uhin elektromagnetikoen aurrean nola erantzuten duen ikusiko dugu (modu hurbildu batean noski), benetako estalki bat eraikitzeke beharrik gabe.

Orain materialen propietate hauek benetan nola lortzen diren azalduko dugu, permitibitate elektrikoa eta iragazkortasun magnetikoa koordenatu-sistema batetik bestera (hau da, espazio batetik bestera) nola aldatzen diren ikusiz. Horretarako, notazio tentsoriala erabiliko dugu, laburragoa eta konpaktuagoa baita.

Lehenik eta behin beharrezkoak diren tentsoreak definituko ditut. Eredu elektromagnetikoaren tentsorea ondokoa dugu (SI sistema erabiliz):

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ eremu elektrikoa, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ eremu magnetikoa eta c argiaren abiadura izanik. Tentsore duala (desplazamendu elektrikoa eta eremu magnetikoa dituen tentsorea):

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -cD_x & -cD_y & -cD_z \\ cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Korronte-dentsitate tetrabektorea hauxe dugu:

$$J^\beta = \begin{pmatrix} c\rho \\ J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

ρ dentsitatea eta $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ korronte-dentsitatea izanik. Maxwellen ekuazioak tentsore hauen bidez adieraz daitezke oso era laburtuan (elektrodinamikan ikusi dugun bezala [15]):

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial F_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial G^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = J^\beta. \quad (3.5)$$

Maxwellen ekuazioak aldaezinak dira edozein koordenatu-sistematian [12]. Hau da, haien forma beti berdina da edozein dela ere hartzen dugun koordenatu-sistema.

Bestalde, jakina da desplazamendu-bektorea eremu elektrikoarekin lotuta dagoela permitibitate elektrikoaren tentsorearen bitartez ($\vec{\epsilon}$), eta eremu magnetikoa, indukzio magnetikoarekin lotuta dagoela iragazkortasun magnetikoaren tentsorearen ($\vec{\mu}$) bitartez:

$$\vec{D} = \vec{\epsilon}\vec{E}, \quad (3.6)$$

$$\vec{B} = \vec{\mu}\vec{H}. \quad (3.7)$$

Beraz $G^{\alpha\beta}$ eta $F_{\alpha\beta}$ tentsoreak haien artean erlazionatuak daude permitibitate elektrikoari eta iragazkortasun magnetikoari buruzko informazioa duen $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ tentsorearen bidez:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}C^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (3.8)$$

Maxwellen ekuazioen aldaezintasunari esker $C^{\alpha\beta\mu\nu}$ tentsorea honela transformatzen da sistema batetik bestera pasatzean:

$$C^{\alpha'\beta'\mu'\nu'} = \left| \det(\Lambda_{\alpha'}^{\alpha}) \right|^{-1} \Lambda_{\alpha'}^{\alpha} \Lambda_{\beta'}^{\beta} \Lambda_{\mu'}^{\mu} \Lambda_{\nu'}^{\nu} C^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (3.9)$$

non $\Lambda_{\alpha'}^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}$ transformazio matrize jakobiarra den.

Beraz, denborarekiko aldaezinak diren transformazioak kontuan izanda permitibitate eta iragazkortasuna tentsore indibidualak bihurtzen dira, eta honako moduan transformatzen dira [12], [13]:

$$\varepsilon^{i'j'} = \left| \det(\Lambda_i^{i'}) \right|^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \varepsilon^{ij}, \quad (3.10)$$

$$\mu^{i'j'} = \left| \det(\Lambda_i^{i'}) \right|^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \mu^{ij}, \quad (3.11)$$

non $i, i', j, j' = 1, 2, 3$ (0a ez da kontuan hartzen denbora adierazten duelako, eta esan bezala, denborarekiko aldaezinak diren transformazioak hartu ditugu kontuan), hots,

$$x^i = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z). \quad (3.12)$$

Jatorrizko ingurunea isotropoa bada, edozein norabidetan permitibitatea eta iragazkortasuna berdinak dira eta tentsoreak modu honetan idatz daitezke:

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \delta^{ij}, \quad (3.13)$$

$$\mu^{ij} = \mu \delta^{ij}. \quad (3.14)$$

Orain, metrika definituz, $g^{i'j'} = \Lambda_k^{i'} \Lambda_l^{j'} \delta^{kl}$, (3.10)-(3.11) ekuazioak horrela geratzen dira (frogapena F1 eranskinean):

$$\varepsilon^{i'j'} = \left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} g^{i'j'} \varepsilon, \quad (3.15)$$

$$\mu^{i'j'} = \left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} g^{i'j'} \mu. \quad (3.16)$$

Beraz, Maxwellen ekuazioen aldaezintasunari esker, permitibitatea eta iragazkortasuna sistema batetik bestera nola aldatzen diren badakigu. Ondorioz, ikusezintasun-estalkiaren forma jakinda, ikusiz nola desbideratu behar diren izpiak (azken finean argia diren eremuak) eta hasierako ingurunearen propietateak jakinda (ε, μ), gai izango gara transformazioaren optikak esandako koordenatu-aldaketak permitibitatean eta iragazkortasunean nola eragiten duen jakiteko. Honen guztiaren ondorioz, estalkiaren propietateak lortuko ditugu (ε', μ'), eta ondorioz behar dugun metamateriala diseinatzen has gaitezke.

Hau guztia modu errazago batean ikusteko adibide bat jarriko dut, estalki esferikoarena hain zuzen ere.

4- ESTALKI ESFERIKOA:

Estalki mota hau R_2 kanpo-erradioko geruza esferikoa dugu, R_1 erradioko hutsune esferikoa duelarik barnean, 11. irudian agertzen den bezala. Beraz, ikusezin egin nahi dugun objektua hutsune horretan jartzen dugu eta bi erradioen artean izpiak (eremuak) desbideratuak izango dira hutsunetik pasa ez daitezen, estalkitik irteteen sartzean zuten norabide berdina mantenduz. Errealitatean, kanpo- eta barne-erradioen artean noski metamateriala beharko genuke, puntu bakoitzean behar ditugun (ε', μ') bereziekin.

(3.15) eta (3.16) formulen bidez (ε', μ') lortzea da helburua, metamateriala diseinatu ahal izateko. Horretarako, metrika eta matrize jakobiarra jakin behar ditugu. Matrize jakobiarra jakiteko, hasierako eta bukaerako espazioen arteko koordenatuen erlazioa behar dugu.

Jatorrizko koordenatu-sisteman erradioa honela defini daiteke:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^i x^j \delta_{ij})^{\frac{1}{2}}, \quad (4.1)$$

eta koordenatu sistema berrian honela:

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = (x'^i x'^j \delta_{i'j'})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Kontuan izanda estalkiaren barne-erradioa $R_1 = a$ eta kanpo-erradioa $R_2 = b$ direla, jatorrizko sistema, sistema berriarekin erlazionatzeko modurik errazena, kontuan izanda estalkia esferikoa dela, honelakoa izango da:

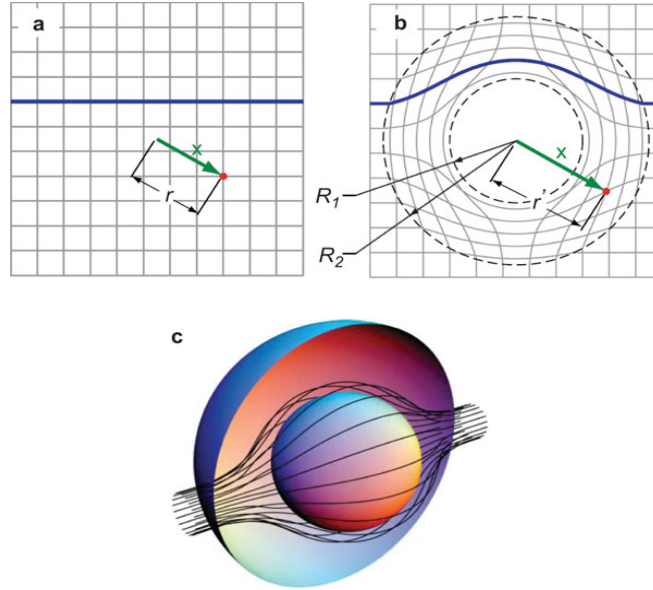
$$r' = \frac{b-a}{b} r + a. \quad (4.3)$$

Horrela, $r = 0 \rightarrow r' = a$ eta $r = b \rightarrow r' = b$ dugu, eta honek esan nahi du metamateriala erabiltzean a baino balio txikiagoetarako dagoen edozer gauza ez dela agertuko (espazio berrian gune hori ez baitago definitua), jatorria barne-erradioan ($r' = a$) egongo delako, zentroan hutsune bat irekiz. b baino balio handiagoetarako ez da ezer aldatuko, hau da, estalkitik kanpo ez dira izpiak (eremuak) desbideratuko (gune horretan $r' = r$). Beraz, $a \leq r' \leq b$ izango da. Hurrengo 12.(a) eta 12.(b) irudietan, azaldukoaren eskema bat dago bi dimentsiotan sinplifikatua, $R_1 = a$ eta $R_2 = b$ direlarik.

Bestalde, estalkitik kanpo $r' = r$ dugu.

Bektoreen norabideak mantentzen dira bi espazioetan, goiko irudietan agertzen den bezala, beraz, bektore unitarioak berdinak dira sistema batean zein bestean,

$$\frac{x^i}{r} = \frac{x'^i}{r'} \delta_i^{i'}. \quad (4.4)$$



12. irudia: (a) Bektore bat, \vec{r} , jatorrizko espazioan eta (b) bektore bera, \vec{r}' , espazio berrian, hau da, koordinatu-sistema berrian. Espazioaren deformazioa, lehen jatorrian zegoena, barne erradiora desplazatu da. Marra urdina behatuz, kontura gaitzke nola deformatu den espazioa. (c) Hiru dimentsiotako estalki esferikoa, non argi eta garbi antzematen den nola desbideratzen diren argi-izpiak (marra beltzak) kanpo-erradioaren eta barne-erradioaren tartean pasatzean (metamaterialetik pasatzean).

Hemendik, bi sistemen arteko koordinatuen erlazioa lor dezakegu (4.3) formula erabiliz:

$$\frac{x^i}{r'} = \frac{x^i}{\frac{b-a}{b}r + a} = \frac{x^i}{r} \delta_i^{i'} \rightarrow brx^i = x^i \delta_i^{i'} ((b-a)r + ab) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^i = x^i \left(\frac{b-a}{b} + \frac{a}{r} \right) \delta_i^{i'}. \quad (4.5)$$

Behin erlazio hau izanda, lehen aipatu bezala matrize jakobiarra kalkulatzeko gai gara (frogapena F2 eranskinean):

$$\Lambda_k^{i'} = \frac{r'}{r} \delta_k^{i'} - \frac{ax^s x^t \delta_{kt} \delta_s^{i'}}{r^3}. \quad (4.6)$$

Era matrizialean idatzita:

$$\Lambda_k^{i'} = \begin{pmatrix} \frac{r'}{r} - \frac{ax^2}{r^3} & -\frac{axy}{r^3} & -\frac{axz}{r^3} \\ -\frac{ayx}{r^3} & \frac{r'}{r} - \frac{ay^2}{r^3} & -\frac{ayz}{r^3} \\ -\frac{azx}{r^3} & -\frac{azy}{r^3} & \frac{r'}{r} - \frac{az^2}{r^3} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Orain, metrika eta haren determinantea lor ditzakegu, eta esan bezala, (3.15) eta (3.16) formulen bidez gure metamaterialaren (ε', μ') lortzen da. Jatorrizko ingurunea espazio askea dela suposatuz, ondokoak ditugu (frogapena F3 eranskinen):

$$\text{determinantea:} \quad \det(\Lambda_k^{i'}) = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \frac{r'-a}{r}, \quad (4.8)$$

$$\text{metrika:} \quad g^{i'j'} = \frac{r'^2}{r^2} \delta^{i'j'} - \frac{a}{r^2} \left(\frac{2}{r'} - \frac{a}{r'^2}\right) x^{i'} x^{j'}, \quad (4.9)$$

$$\text{permitibitatea eta iragazkortasuna:} \quad \varepsilon^{i'j'} = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{i'j'} - \frac{2ar'-a^2}{r'^4} x^{i'} x^{j'}\right) \varepsilon_0, \quad (4.10)$$

$$\mu^{i'j'} = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{i'j'} - \frac{2ar'-a^2}{r'^4} x^{i'} x^{j'}\right) \mu_0. \quad (4.11)$$

Honi esker, orain gure metamateriala diseinatzeko gai gara.

Permitibitate eta iragazkortasun erlatiboak kasu honetan (jatorrizko ingurunea hutsa denean) berdinak dira:

$$\varepsilon_r = \mu_r = \frac{\varepsilon^{i'j'}}{\varepsilon_0} = \frac{\mu^{i'j'}}{\mu_0} = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{i'j'} - \frac{2ar'-a^2}{r'^4} x^{i'} x^{j'}\right), \quad (4.12)$$

permitibitate eta iragazkortasun erlatiboen berdina dena hain zuzen ere.

Beraz, azkenean metamaterialaren permitibitatearen eta iragazkortasunaren adierazpenak ditugu jatorriko espazioarekiko inongo menpekotasunik gabe, eta horri esker, metamateriala erabiltzean r' -k adierazten duena estalki barneko edozein puntu da, espazioa bat datorrelarik kanpoaldekoarekin ($a \leq r' \leq b$ baita). Estalkitik kanpo $r' = r$ denez, azkenean ez du inporta gai primatuak edo ez primatuak erabiltzea espazio osorako, hau da, edozein puntu eta hango ezaugarriak adierazteko balioko dizkigute primatuak zein ez primatuak (baina bat aukeratuta denak batekoak edo bestekoak izan behar dira).

Estalki esferikoaren kasuan gaudenez, interesgarria litzake permitibitatearen eta iragazkortasunaren adierazpenak koordinatu kartesiarren ordeztuz, esferikoetan edukitzea. Hasieran, espazio batetik bestera aldaketa egitean, aldaketa erradioan sartu dugu soilik, gogoratu (4.3) formula. Beraz, koordinatu esferikoetan pentsatuz (r, θ, φ) , aldatzen den bakarra erradioa da, hortaz:

$$r' = \frac{b-a}{b} r + a, \quad (4.13)$$

$$\theta' = \theta, \quad (4.14)$$

$$\varphi' = \varphi. \quad (4.15)$$

Pentsa dezakegu permitibitateak eta iragazkortasunak soilik dependentzia erradiala dutela. Hori, permitibitatearen eta iragazkortasunaren adierazpenen ((4.10)-(4.11)

formulek emandakoak) koordenatu kartesiarretatik esferikoetarako aldaketa egiten ikus daiteke (frogapena F7 eranskinean):

$$\varepsilon_{r'} = \frac{b}{b-a} \frac{(r'-a)^2}{r'^2} \varepsilon_0, \quad (4.16)$$

$$\varepsilon_{\theta'} = \frac{b}{b-a} \varepsilon_0, \quad (4.17)$$

$$\varepsilon_{\varphi'} = \frac{b}{b-a} \varepsilon_0, \quad (4.18)$$

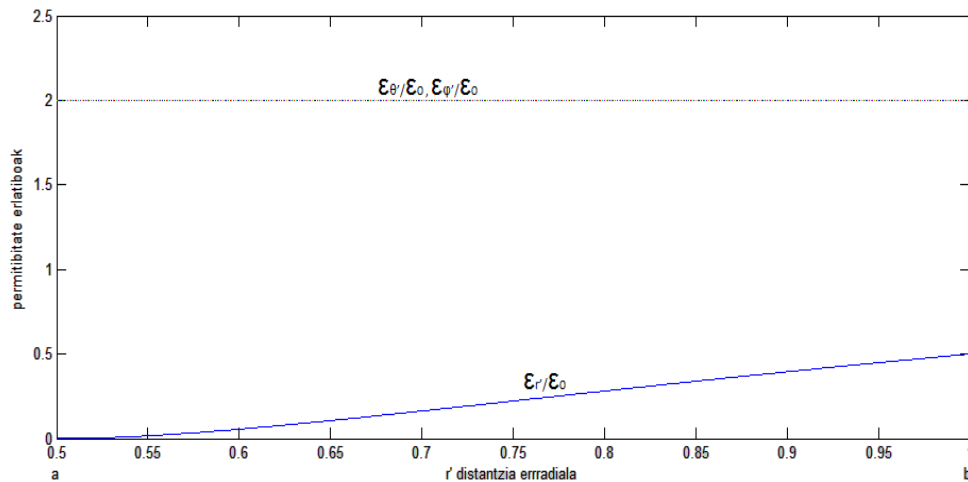
eta berdina da iragazkortasunarentzat:

$$\mu_{r'} = \frac{b}{b-a} \frac{(r'-a)^2}{r'^2} \mu_0, \quad (4.19)$$

$$\mu_{\theta'} = \frac{b}{b-a} \mu_0, \quad (4.20)$$

$$\mu_{\varphi'} = \frac{b}{b-a} \mu_0. \quad (4.21)$$

Argi ikusten da soilik menpekotasun erradiala dutela, osagai angeluarrak konstante baitira kasu guztietan. Hala ere, hobeto ikusteko begiratu 13. irudia, non permitibitate erlatiboak $\frac{\varepsilon_{r'}}{\varepsilon_0}$, $\frac{\varepsilon_{\theta'}}{\varepsilon_0}$, $\frac{\varepsilon_{\varphi'}}{\varepsilon_0}$ estalkiko barne-erradiotik, kanpo-erradiora nola aldatzen diren ikusten den.



13. irudia: Permitibitate erlatiboak estalkiko $a = 0.5 \text{ m}$ barne-erradiotik, $b = 1 \text{ m}$ kanpo-erradiora urruntzean. Marra urdina gai erradiala da, eta beste bi gai angeluarrak gainezarrita daude lerro beltzean.

Aurreko irudian ikusten da nola handitzen den osagai erradial erlatiboa barne-estalkitik urruntzen garen heinean, eta nola osagai angeluarrak konstante mantentzen diren.

Grafiko honek, iragazkortasunarekin gertatzen dena ere berdin-berdin deskribatzen du (gogoratu (4.12) formulaz).

Orain, estalki esferikoa kanpo-eremu elektromagnetikoen aurrean nola portatzen den, hau da, argiaren aurrean nola portatzen den ikusiko dugu. Hortaz, helburua eremuak metamaterialean nolakoak diren jakitea da. Permitibitatearekin eta iragazkortasunarekin bezala, espazio transformatuan, metamaterialean azken finean, eremuak nolakoak izango diren matrize jakobiarraren bitartez jakingo dugu [12]:

$$E_{i'} = \Lambda_{i'}^i E_i, \quad (4.22)$$

$$H_{i'} = \Lambda_{i'}^i H_i, \quad (4.23)$$

non jakobiarra honakoa hau den (frogapena F4 eranskinean):

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{b}{b-a} \left(\left(1 - \frac{a}{r}\right) \delta_{i'}^i + \frac{ax^{k'}x^{l'}}{r'^3} \delta_{k'}^i \delta_{i'l'} \right). \quad (4.24)$$

Era matrizialean idatzita:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a(y'^2+z'^2)}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2+z'^2)}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2+y'^2)}{r'^3} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Behin matrize jakobiarra edukita, ikusi ahal izango dugu ea nola portatzen den estalki esferikoa y norabidean hedatzen den argi polarizatuaren aurrean. Argi hori uhin elektromagnetiko lau bat bezala hartuko dugu, non bere eremu elektrikoa linealki polarizatua dagoen x ardatzean. Eremu elektrikoa eta magnetikoa elkarrekiko perpendikularrak direnez eta argia y norabidean hedatzen denez, eremu magnetikoa z ardatzean egongo da linealki polarizatua. Esan bezala, argiaren eremu elektrikoak honako uhin lau forma izango du:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} \pm wt)}, \quad (4.26)$$

\vec{k} uhin-bektorea eta w maiztasuna izanik.

Kontuan izanda eremu elektrikoaren anplitudea $E_0 = 1 \frac{V}{m}$ bezala hartuko dugula, uhina y norabidean hedatuko dela: $\vec{k} = k\hat{j}$, denboraren independenteak diren kalkuluekin gaudela eta eremua linealki polarizatua dagoela x norabidean soilik oszilatuz: $\vec{E}_0 = E_0\hat{i}$, honela geratuko zaigu eremuaren adierazpena:

$$\vec{E} = e^{iky}\hat{i}. \quad (4.27)$$

Beraz: $E_x = e^{iky}$, $E_y = 0$, $E_z = 0$. Aldi berean, eremu magnetikoa estalkitik kanpo (hutsean) zein den jakiteko, Maxwell-en ekuazioetatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.28)$$

eginez, erraz lortzen dugu, $c = w/k$ argiaren abiadura dela gogoratzuz :

$$\vec{H} = -\frac{E_x}{c\mu_0} \hat{k} = -\frac{e^{iky}}{\eta_0} \hat{k}. \quad (4.29)$$

Beraz: $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = -\frac{e^{iky}}{\eta_0}$ da, non $\eta_0 = c\mu_0 = \mu_0 \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376.73 \Omega$ hutseango inpedantzia eta μ_0 iragazkortasun magnetikoak diren.

Orain, estalkiaren barnean eremuak nolakoak izango diren jakiteko gai gara (4.22) eta (4.25) formulen bitartez (nola egiten den ikusteko begiratu F5 eranskina) [14]:

$$E_{x'} = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} \right) e^{iky}, \quad (4.30)$$

$$E_{y'} = \frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3} e^{iky}, \quad (4.31)$$

$$E_{z'} = \frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3} e^{iky}. \quad (4.32)$$

Eremuak errealak direnez, parte errealak hartuz:

$$E_{x'} = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} \right) \cos(ky), \quad (4.33)$$

$$E_{y'} = \frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3} \cos(ky), \quad (4.34)$$

$$E_{z'} = \frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3} \cos(ky). \quad (4.35)$$

Aurreko adierazpenetan, oraindik baditugu hasierako espazioko koordenatuak. Gauza da, estalki barnean espazio berriko koordenatuak (primatuak) erabili behar ditugula eta nola kanpoan, $r > b$ denengan, $r' = r$ denez, r' erabil dezakegu espazio osoa deskribatzeko, hau da, bai barnean eta bai kanpoan ere. Orduan, $y(y')$ behar dugu, eta hori lortzeko (4.4) formulatik abiatzen gara:

$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} \rightarrow y = y(y') = \frac{r}{r'} y', \quad (4.36)$$

eta (4.3) formula erabiliz:

$$y = y(y') = \frac{r}{r'} y' = \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y'. \quad (4.37)$$

Horrela, espazio osoko eremua defini dezakegu r' -ren menpe. Behin dena aldagai primatuaren menpe dagoenean, primak kendu daitezke eta aldagai ez-primatuak erabili, berdina izango delako (permitibitatearekin eta iragazkortasunarekin bezala). Hala ere, gai primatuekin jarraituko dugu. Hortaz, gure helburua bete dugu eta eremu elektrikoaren puntu guztietan nolako den badakigu:

- $r' < a$ denean: objektua ezkututzen den gunean ez da eremurik sartzen, eremu guztiak 0 dira.
- $a \leq r' \leq b$ denean, estalki barneko eremuak ditugu:

$$E_{x'} = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} \right) \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right), \quad (4.38)$$

$$E_{y'} = \frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right), \quad (4.39)$$

$$E_{z'} = \frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right). \quad (4.40)$$

- $r' > b$ denean, estalkitik kanpo (non $r' = r$ den eta $y' = y$)

$$E_{x'} = \operatorname{Re}(e^{iky}) = \cos(ky'), \quad (4.41)$$

$$E_{y'} = 0, \quad (4.42)$$

$$E_{z'} = 0. \quad (4.43)$$

Gogoratu hasierako espazioan $r = 0$ puntua, gero transformatutako espazioan $r' = a$ dugula, horregatik ditugu eremu denak nuluak estalki barnean, tarte hori ez baitago espazioan (berrian, transformatutakoan) definitua transformazioa egin ondoren. Hau da azken finean transformazioaren optika-ren helburua.

Kontura gaitezen ere koordenatu-transformazioari esker, azken finean metamaterialari esker, eremu elektrikoaren y eta z osagaiak sortzen direla estalkian.

Eremu magnetikoarekin berdina egiten da, (4.23) eta (4.25) formulak erabiliz (F5 eranskineko eremu elektrikoarekin bezala eginez), parte erreala hartuz eta dena bigarren espazioko koordenatuen menpe utziz (hau da, primatuak, eremu elektrikoarekin egin den bezala), hauek dira estalkiko ($a \leq r' \leq b$) eremu magnetikoaren osagaiak [14]:

$$H_{x'} = \frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ax'z'}{r'^3} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right), \quad (4.44)$$

$$H_{y'} = \frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ay'z'}{r'^3} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right), \quad (4.45)$$

$$H_{z'} = \frac{-b}{(b-a)\eta_0} \left(1 - \frac{a(y'^2 + x'^2)}{r'^3} \right) \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right). \quad (4.46)$$

Kontuan izan estalki barnean ($r' < a$) eremu magnetikoa 0 izango dela eta kanpoan ($r' > b$):

$$H_{z'} = -\frac{\cos(ky')}{\eta_0}, \quad (4.47)$$

$$H_{y'} = 0, \quad (4.48)$$

$$H_{x'} = 0. \quad (4.49)$$

Eremu magnetikoaren kasuan, estalki barnean x eta y osagaiak sortzen direla aipatzekoa da, eremu elektrikoaren kasuaren antzera.

Beraz, $(\epsilon^{ij}, \mu^{ij})$ dituen metamaterial esferikoa argi polarizatu batez erasotzen denean, eremu elektriko eta magnetikoak nola portatuko diren auresan dezakegu aurreko adierazpenekin. Hauei esker, portaera horren simulazioa egin daiteke, eta hori da hurrengo atalean ikusiko duguna.

Bestalde, oso garrantzitsua den Poynting bektorea dugu, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, energiaren hedapena adierazten duena. Horrek gure estalkia ondo dabilen adieraziko digu.

4.1- SIMULAZIOAK MATLAB PROGRAMAREKIN

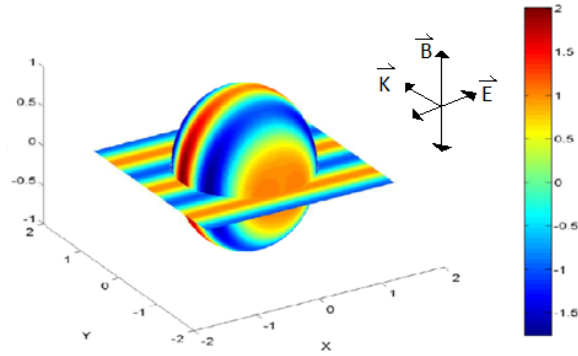
Behin eremuen adierazpenak edukita, MATLAB-en bitartez horien adierazpen grafikoak lor daitezke 3 dimentsiotan.

Programa hau erabiltzearen arrazoia, matrizeekin lan egiteko eta batez ere adierazpen grafikoak egiteko oso egokia dela da, aukera asko ematen baititu azken honetarako.

Adibide moduan, kasu konkretu bat hartzearen, barne erradioa $a = 0.5 \text{ m}$ eta kanpo erradioa $b = 1 \text{ m}$ bezalako estalki bat kontsideratuko dugu. $\nu = 300 \text{ MHz}$ maiztasuneko uhin elektromagnetiko lau batez erasotzen da, linealki polarizatua aurreko azalpenetan bezala (eta azalpeneko anplitude berdinarekin $E_0 = 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$), eta orduan $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \text{ m}^{-1} = 2\pi \text{ m}^{-1}$ eta $\lambda = 1 \text{ m}$ (irradi-uhinak) dira.

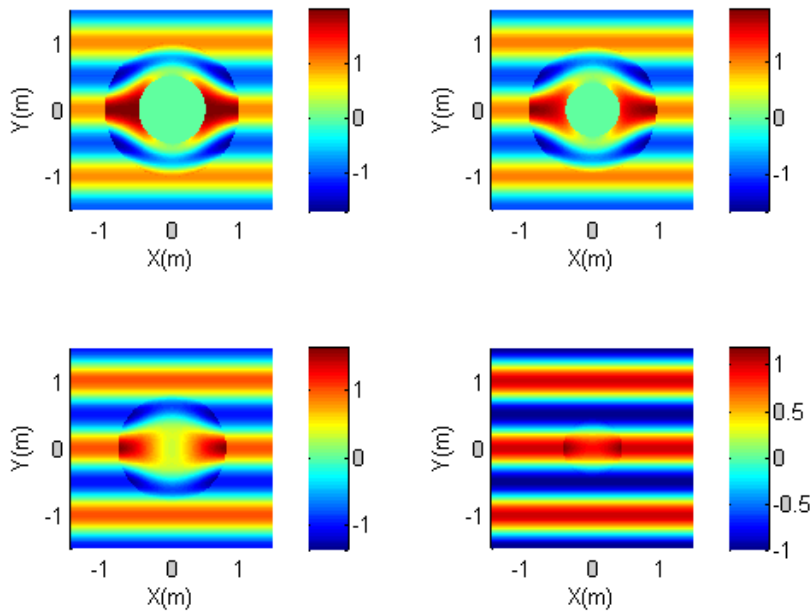
Gauzak horrela, hurrengo (14.irudia), $E_{x'}$ -ren banaketaren irudia da, non koloreak eremuaren balioa adierazten duen $\frac{\text{V}}{\text{m}}\text{-tan}$.

Aipatzekoa da, eremua ez dela jarraitua estalkiaren kanpo-mugan, eta zenbait puntutan, $(\pm 1, 0, 0)$ -n hain zuzen, bikoitza izatera iristen da.



14. irudia: $\nu = 300\text{MHz}$ -eko uhin elektromagnetikoaren E_x , osagaiaren irudia. Uhina y norabidean aurrera higitzen da, eta hasierako eremuaren anplitudea $E_0 = 1 \frac{\nu}{\text{m}}$ - da . Koloreak, eremuaren balioa adierazten du $\frac{\nu}{\text{m}}$ -tan..

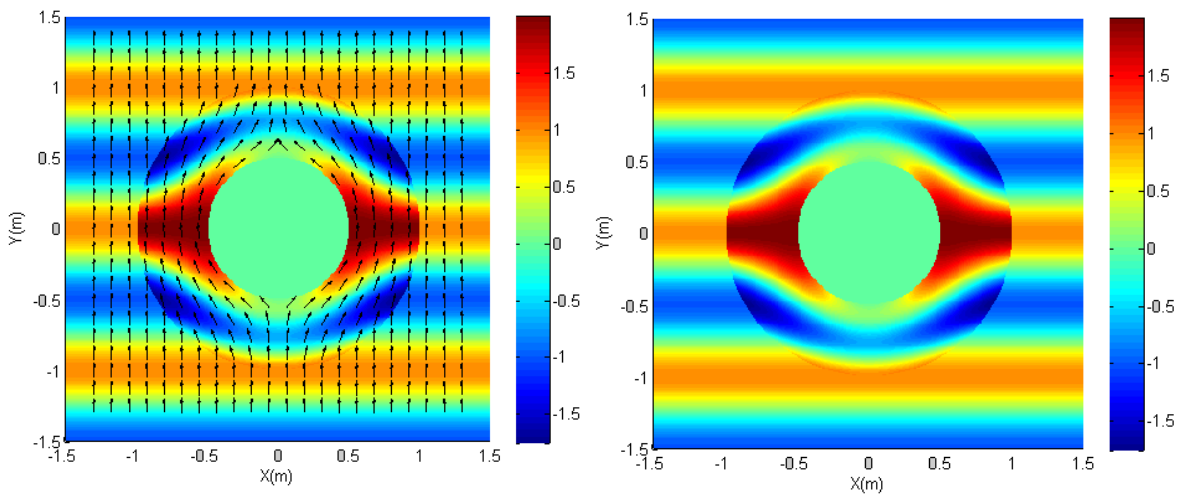
Datorren irudia (15. irudia), estalkiko zenbait ebakidura-planoetatik ikusten den eremu elektrikoaren E_x , osagaiaren irudiak dira, non ondo bereizten den estalkiaren barnean eremua 0 dela, beraz, argia ez da sartuko eta barnean dagoena ikusezina izango da. Geroz eta ebakidura-plano altuagoa izan, ikusiko den barne esferaren sekzioa txikiagoa da.



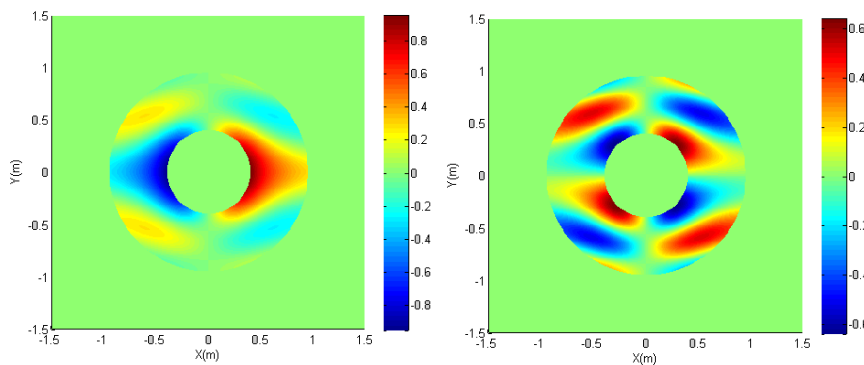
15. irudia: Eremuaren E_x , osagaia estalki esferikoaren altuera ezberdinetako $z = kte$ ebakidura-planoetan. Ezkerrekoa (goian) $z = 0 \text{ m}$ altuerako ebakidura-planoa da, eskuinekoa (goian) $z = 0.3 \text{ m}$ altuerakoa, ezkerrekoa (behean) $z = 0.6 \text{ m}$ altuerakoa eta eskuinekoa (behean) $z = 0.9 \text{ m}$ altuerakoa.

Gogoratu, Poynting bektorearen bitartez energiaren hedapena nolakoa den jakin dezakegula. 16. irudian, E_x , osagaiaren banaketaz gain, energia-fluxuen banaketa nolakoa den ikus daiteke. Ondo antzematen da estalkiaren funtzionamendua ona dela, energia-fluxuak estalkiko barne erradioa behar den bezala (aurrezandako moduan) inguratzen baitu.

17. irudian, E_z , eta E_y , eremu elektrikoaren osagaiak irudikatzen dira hurrenez hurren, $z = 0.3m$ ebakidura-planotik ikusita. Hemen, ondo ikusten da estalkia erasotzen duen uhina eremu elektrikoaren x norabidean polarizatua dagoela, eta ondorioz estalkitik kanpo ez dituela osagai hauek (y, z), baina bai estalkiaren barnean, lehen teorian aurrezandako bezala.

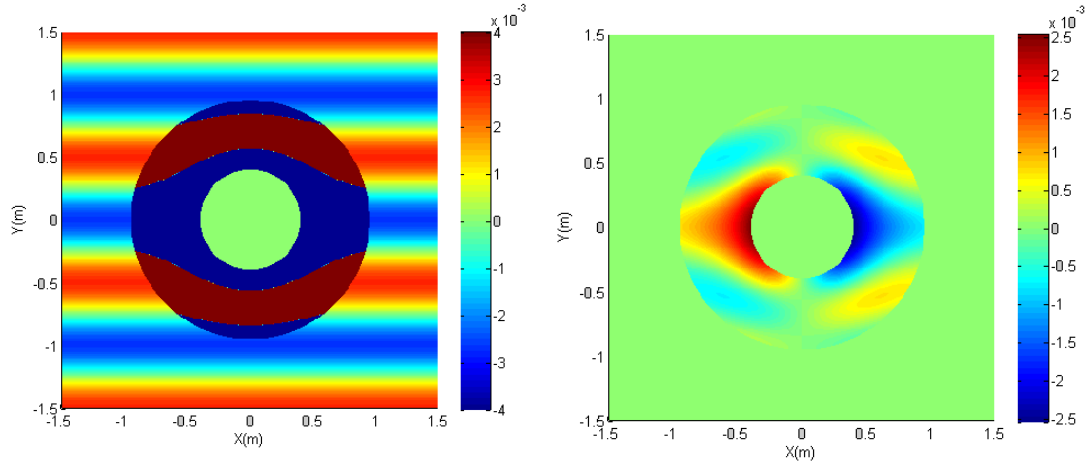


16. irudia: Eremuaren E_x , osagaia estalki esferikoaren $z = 0$ m ebakidura-planon: Ezkerrekoan Poynting bektoreak emandako energia-fluxuaren banaketa agertzen da, eta eskuinean irudi bera dugu energia-fluxua gabe.



17. irudia: Eremu elektrikoaren E_z , eta E_y , osagaien irudiak hurrenez hurren, $z = 0.3$ m altuerako ebakidura-planotik ikusita.

Eremu magnetiko erasotzaileak soilik H_z , osagaia dauka, eta aipatu beharra dago, estalkira sartzean izugarri handitzen dela 18. irudian (ezkerrean) ikus daitekeen bezala. Beste bi osagaiak (x, y) , eremu elektrikoaren antzera, estalkian sortuak izango dira. Azken hau, 18. irudian (eskuinean) H_x , osagaiaren irudiaren bidez antzeman daiteke. Eremu magnetikoaren osagai guztiak A/m unitateetan daude.



18. irudia: Eremu magnetikoaren H_z , eta H_x , osagaien irudiak hurrenez hurren, $z = 0.3$ m altuerako ebakidura-planotik ikusita.

Eremu totalaren anplitudea ere irudika daiteke. Eremu totalaren balioa hurrengo izango litzateke:

$$E' = \pm \sqrt{E_{x'}^2 + E_{y'}^2 + E_{z'}^2}, \quad (4.1.1)$$

non $E_{x'}$, $E_{y'}$, $E_{z'}$ (4.42)-(4.44) formuletakoak diren (E' -ren adierazpen osoa F6 eranskinean).

Beraz, gogoratuz eremuak uhin lau kontsideratu ditugula, parte erreal hartuz, forma orokorra hurrengo da (denbora alde batera utzita):

$$E' = A_{E'} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}), \quad (4.1.2)$$

non $A_{E'}$ anplitude totala den estalkian. Ondorioz E' -ren adierazpen osoa F6 eranskinean (f6.1) formularen behatuz (non dena osagai primatuaren funtzioan jartzen den) eta (4.1.2) formularekin alderatuz:

$$A_{E'} = \sqrt{\left(\frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3}\right)\right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3}\right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3}\right)^2}. \quad (4.1.3)$$

(baita ere $A_{E'} = |E'| = \sqrt{|E'|^2} = \sqrt{\vec{E}' \cdot \vec{E}'^*}$ bezala ikusi daiteke, emaitza bera da)

Berdina kalkula daiteke eremu magnetikoarentzat:

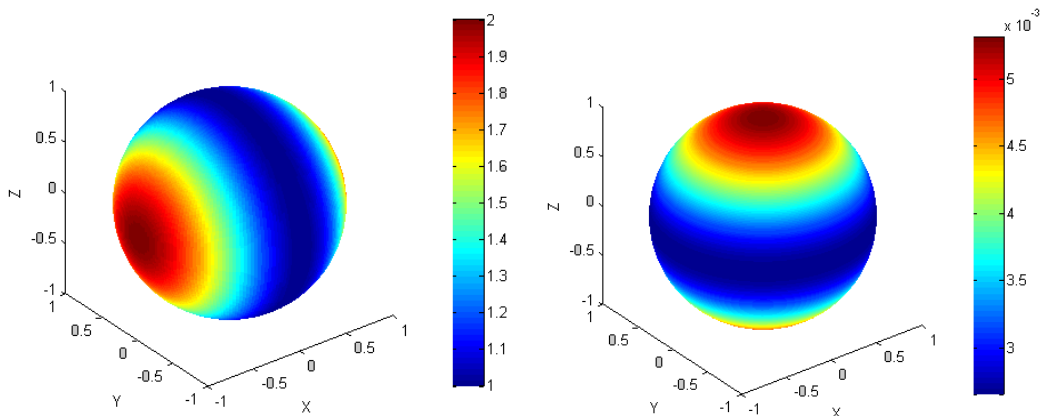
$$H' = \pm \sqrt{H_{x'}^2 + H_{y'}^2 + H_{z'}^2}, \quad (4.1.4)$$

Non $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$ eremuak (4.48)-(4.50) adierazpenetakoak diren. Beraz, (f6.2) formulatik anplitudea:

$$A_{H'} = \sqrt{\left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ax'z'}{r'^3}\right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ay'z'}{r'^3}\right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \left(1 - \frac{a(y'^2+x'^2)}{r'^3}\right)\right)^2}. \quad (4.1.5)$$

(baita ere, $A_{H'} = |H'| = \sqrt{|H'|^2} = \sqrt{\vec{H}' \cdot \vec{H}'^*}$ bezala ikusi daiteke, emaitza bera da)

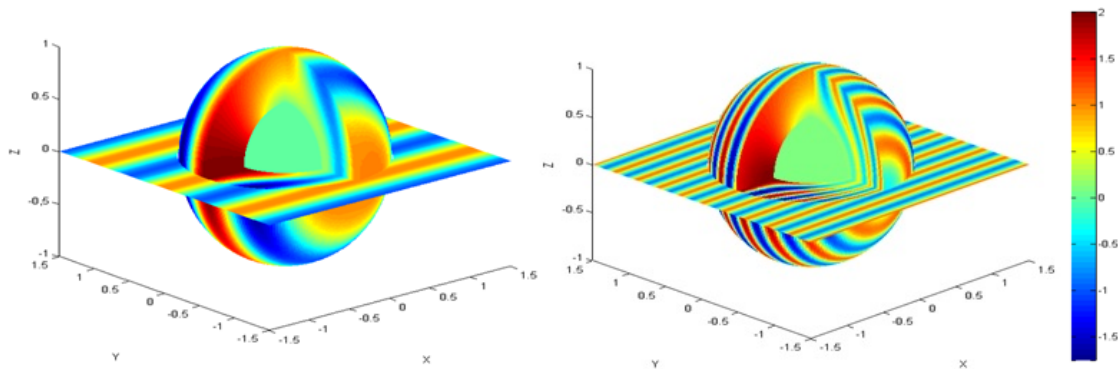
Hortaz, estalkiko kanpo geruzan ($r' = 1 \text{ m}$), eremu elektriko totalaren eta magnetikoaren anplitudeak honelakoak dira:



19. irudia: Eremu totalen anplitudeak estalkiaren kanpo geruzan ($r' = 1 \text{ m}$). Ezkerrekoa eremu elektrikoarena da eta eskuinekoa eremu magnetikoarena.

Argi dago bi irudiak konparatuz, banaketak berdinak direla 90°ko biraketarekin y ardatzaren inguruan (noski, higidura norabidearekiko (y) eta haien artean perpendikularrak baitira eremu elektrikoak eta magnetikoak).

Orain arteko irudiek, $\nu = 300 \text{ MHz}$ -ko maiztasuneko (irradi-uhina) argi polarizatuarekin (uhin elektromagnetiko lau polarizatuarekin) gertatzen dena adierazten dute. Hona hemen $\nu = 1 \text{ GHz}$ -ko maiztasun handiko ($\lambda = \frac{c}{\nu} = 0.3 \text{ m}$, mikrouhina) argi polarizatuarekin estalkia erasotzean dugun eremu elektrikoaren $E_{x'}$ osagaiaren banaketa:



20. irudia: Eremu elektrikoaren x osagaiaren banaketa. Ezkerrean, $\nu = 300\text{MHz}$ -ko argi erasotzailearen kasuan. Eskuinean, argi erasotzailea $\nu = 1\text{GHz}$ -koa denean.

Irudi guzti hauek bat datoz [14] erreferentzian datorrenarekin.

4.2. SIMULAZIOA COMSOL PROGRAMAREKIN

Estalki esferikoaren ildotik jarraituz, COMSOL Multiphysics simulazio programa komertzialaren bitartez argi-izpien ibilbidearen marrazkia simulatzea posible da. Programa konplexu honek mota askotako eredu eta simulazioak egiteko balio du material ezberdinetako egitura eta makinetan beroa nola transferitzen den simulatzeko, jariakinak makina batean nahiz bakarrik nola portatzen diren ikusteko, egitura ezberdinetan uhinen simulazioak eta bibrazioak aztertzeko, erdieroaleak simulatzeko... beste gauza askoren artean. Badago beraz metamaterialekin lotutako sail bat programa honetan, eta hori baliatuz argi-izpien portaera azter daiteke estalki esferikoaren kasuan.

Argi-izpien ibilbidea ikusi nahi dugunez, optika geometrikoa eduki behar dugu kontuan (difrakzio gabea). Izpiak partikulak izango balira bezala tratatuko ditugu. Haien higidura jakiteko, partikulen (izpien) Hamiltonen higidura-ekuazioak aztertu behar dira, eta optika geometrikoko limitean partikulen uhin-izaera kontuan izanda ekuazio hauek izpietzat berridatzi daitezke.

Hauek dira Hamiltonen higidura ekuazioak, non \vec{q} posizioa eta t denbora diren:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} ; \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} . \quad (4.2.1)$$

Uhin-izaera kontua izanda, H Hamiltondarra eta \vec{p} momentua honelakoak dira, non w maiztasuna eta \vec{k} uhin bektorea diren:

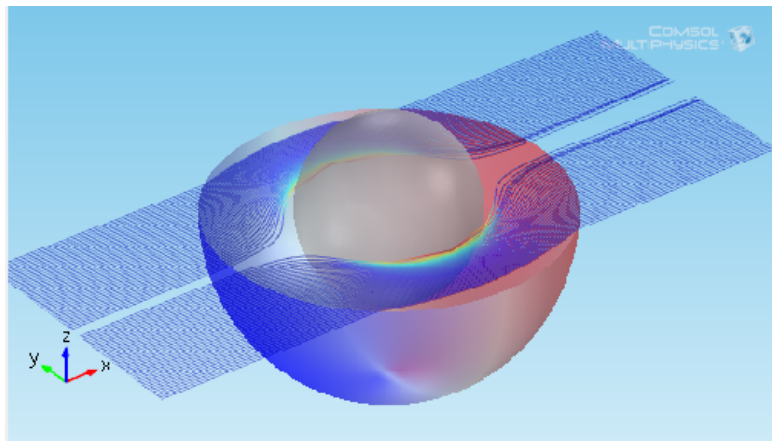
$$H = \hbar w ; \vec{p} = \hbar \vec{k} . \quad (4.2.2)$$

Azken hauek higidura-ekuazioetan ordezkatzean, nahi ditugun higidura ekuazioak lortuko ditugu:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial \vec{q}}; \frac{d\vec{q}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial \vec{k}}. \quad (4.2.3)$$

Optika geometrikoan, abiadura angeluarrak uhin zenbakiarekin eta errefrakzio-indizearekin duen menpekotasunari esker ($w = vk = ck/n$), gure estalkiaren izaera definitu ahal izango dugu errefrakzio-indizearen bitartez, eta ekuazioak programan sartuz eta hainbat doiketa egin ondoren, izpien ibilbidea lortzen da.

COMSOL programaren bidez aurreko ataleko estalki esferiko berdina simulatu dugu (barne-erradioa $R_1 = 0.5 \text{ m}$ eta kanpo-erradioa $R_2 = 1 \text{ m}$ dituen) eta emaitza 21. irudian ikus daiteke.



21. irudia: Argi-izpien ibilbidea, x norabidean (noranzko positiboan) igorriak estalki esferikoaren kasuan. Barne esferaren erradioa 0.5 m eta kanpo esferarena 1 m dira.

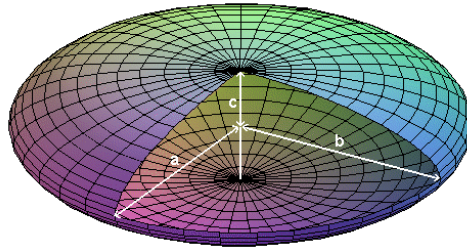
Ondo antzeman daiteke izpiak barne esferan ez direla sartzen, tarte hori ikusezin eginez, eta etorri diren bide beretik irteten direla (gure estalkitik) aurreko ataletan aipatu dugun moduan.

5- ELIPSOIDE-ESTALKIA

Aurreko atalean estalki esferikoaren kasua aztertu dugu, baina hori egiteko metodo bera erabiliz, hau da, transformazioaren optika erabiliz, beste hainbat formatako estalkiak kalkula eta simula daitezke. Atal honetan elipsoide-estalkia aztertuko dugu, haren ardatz-erdien luzerak aldatzean forma askotako elipsoideak lortu ahal direlarik. Azken

finean, estalki esferikoa, elipsoide-estalkiaren kasu konkretu bat izango da, non ardatz-erdi guztiek tamaina bera duten.

Gure estalki elipsoidala, barne-elipsoide batez eta kanpo-elipsoide batez egongo da osatua, non bien artean metamateriala egongo den argi-izpiak desbideratzeko. Estalki esferikoaren kasuan bezala barne-elipsoidearen barneko gunea, ikusezin egingo den gunea izango da. Badakigu elipsoide bat hiru ardatz-erdiz osatzen dela (begiratu 21. irudia). Gure kasuan, demagun barne-elipsoidearenak a, b, c direla x, y, z norabideetan hurrenez hurren, eta kanpo-elipsoidearenak a_1, b_1, c_1 . Demagun ere $a_1/a = b_1/b = c_1/c$ erlazioa betetzen dela, barne eta kanpo elipsoideen eitea berdina izan dadin.



22. irudia: a, b, c ardatz-erdiekin osatutako elipsoidea.

Orain, gure helburua, eite honetako estalki bat kanpo-eremuen aurrean nola portatzen den ikustea da, hau da, azken finean argi-izpi erasotzaileak eremu elektromagnetikoak direnez, eremuen ikuspuntutik argia nola portatuko den ikustea. Horretarako, eremuak estalkian nolakoak diren jakin behar dugu, horrela puntu guztietan ezagunak izango direlarik. Transformazioaren optika aplikatu behar dugu oraingoan ere, koordenatu-transformazio baten bitartez espazioaren aldaketa bat imajinatuz estalkiko eremuak lortzeko. Kasu esferikoaren modu berean lortuko dira (4.26)-(4.27) formulek dioten bezala. Beraz, Λ_i^j matrize jakobiarra aurkitu behar dugu. Oraingoan jatorrizko eta espazio berrien arteko lotura honako erlazioak emango digu [14]:

$$r' = \frac{a_1 - a}{a_1} r + R(r), \quad (5.1)$$

non $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^i x^j \delta_{ij})^{\frac{1}{2}}$ eta $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = (x'^i x'^j \delta'_{ij})^{\frac{1}{2}}$ diren, eta $R(r)$ -k jatorrizko espazioko zentroaren eta barne-elipsoidearen edozein punturen arteko distantzia ematen duen (zentrotik barne geruzarainoko distantzia), bai jatorrizko espazioan, bai espazio berrian ere. Erlazio hau, kasu esferikoaren kasu orokorra da. Hiru ardatz-erdiak berdinak balira (4.3) ekuazioa berreskuratuko guke $R(r) = a$ izango baitzen (zentrotik barne geruzarainoko distantzia):

$$R(r) = \frac{abc r}{\sqrt{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2}} = \frac{abc r'}{\sqrt{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2}}. \quad (5.2)$$

Bektore unitarioak berdinak dira oraingoaren ere, eta $R(r)$ laburtzeko, $\sqrt{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2} = t$ bezala hartuko dugu: $R(r) = \frac{abc r'}{t}$. Hau dena kontuan izanda, jakobiarra hurrengo da (frogapena F8 eranskinean):

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{a_1}{a_1 - a} \left(\delta_{i'}^i - \frac{abc}{t^3} \left(t^2 \delta_{i'}^i - \left(x' b^2 c^2 x^{k'} \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{1'} + y' a^2 c^2 x^{k'} \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{2'} + z' a^2 b^2 x^{k'} \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{3'} \right) \right) \right). \quad (5.3)$$

Matrizialki idatzita:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{a_1}{a_1 - a} \begin{pmatrix} 1 - abc(t^2 - x'^2 b^2 c^2)/t^3 & a^3 b c^3 x' y'/t^3 & a^3 b^3 c x' z'/t^3 \\ ab^3 c^3 x' y'/t^3 & 1 - abc(t^2 - y'^2 a^2 c^2)/t^3 & a^3 b^3 c y' z'/t^3 \\ ab^3 c^3 x' z'/t^3 & a^3 b c^3 y' z'/t^3 & 1 - abc(t^2 - z'^2 a^2 b^2)/t^3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Orain, estalki esferikoaren kasuko uhin elektromagnetiko polarizatu berdinarekin ($\vec{E} = e^{iky} \hat{i}$, $\vec{H} = -\frac{e^{iky}}{\eta_0} \hat{k}$, non anplitudea $E_0 = 1 \frac{V}{m}$ den) gure estalkia erasoko bagenu, sortuko lirartekeen eremuak (4.26)-(4.27) formuletan oinarrituz lor daitezke. Honakoak dira eremu elektrikoak estalkian, zuzenean parte erreala hartuta eta aldagai guztiak primatuak daudelarik, hau da, espazio osorako balio dutelarik kasu esferikoan bezala (frogapena F9 eranskinean):

$$E_{x'} = \frac{a_1}{a_1 - a} (1 - abc(t^2 - x'^2 b^2 c^2)/t^3) \cos \left(k \frac{a_1}{a_1 - a} \left(1 - \frac{abc}{t} \right) y' \right), \quad (5.5)$$

$$E_{y'} = \frac{a_1}{a_1 - a} (ab^3 c^3 x' y'/t^3) \cos \left(k \frac{a_1}{a_1 - a} \left(1 - \frac{abc}{t} \right) y' \right), \quad (5.6)$$

$$E_{z'} = \frac{a_1}{a_1 - a} (ab^3 c^3 x' z'/t^3) \cos \left(k \frac{a_1}{a_1 - a} \left(1 - \frac{abc}{t} \right) y' \right). \quad (5.7)$$

Barne-estalkiaren barnean eremu guztiak 0 izango dira (transformazioaren optikari esker, espazio berrian, gune hori ez delako definitua geratuko), argia ez baita sartuko noski.

Estalkitik kanpo, soilik eremu elektrikoaren x osagaia izango dugu, argi polarizatu erasotzailearena (gogoratu estalkitik kanpo $r' = r$ eta $y' = y$ direla):

$$E_{x'} = \text{Re}(e^{iky}) = \cos(ky'), \quad (5.8)$$

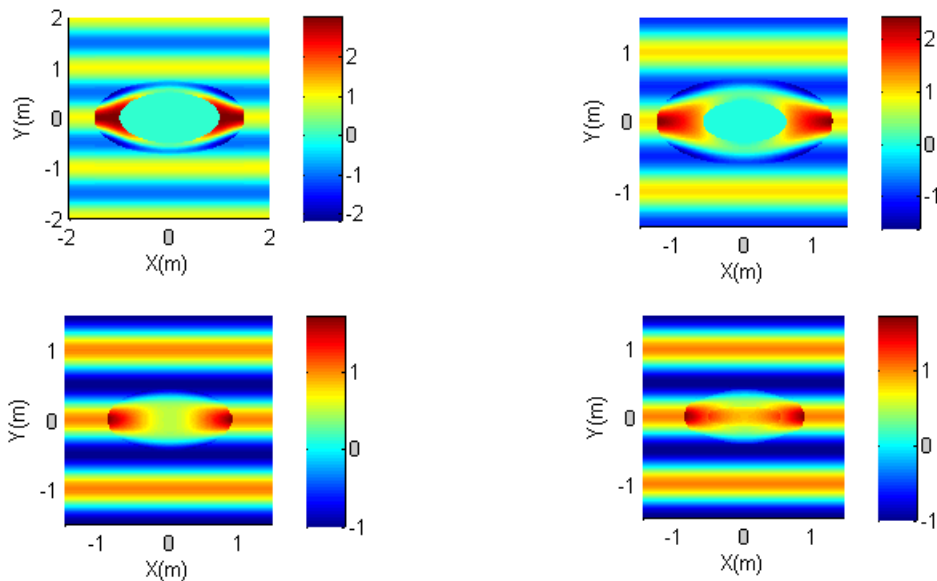
$$E_{y'} = 0, \quad (5.9)$$

$$E_{z'} = 0. \quad (5.10)$$

Hemen ere, estalkian, eremuaren y eta z osagaiak sortuko dira koordenatu-transformazioari esker, azken finean metamaterialari esker.

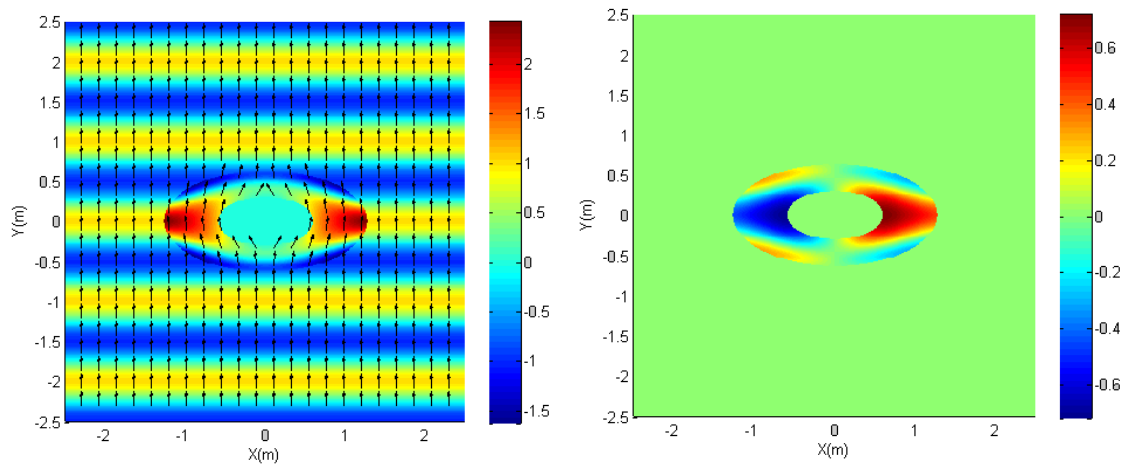
Demagun orain elipsoide-estalki konkretu bat dugula $a = 1 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $c = 0.5 \text{ m}$ eiteko barne-estalkiarekin eta $a_1 = 1.5 \text{ m}$, $b_1 = 0.75 \text{ m}$, $c_1 = 0.75$ eiteko kanpo estalkiarekin. Demagun ere aurreko azalpeneko uhin elektromagnetiko lau polarizatuaz erasotzen dugula. $\nu = 300 \text{ MHz}$ -ko maiztasuna badu, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^8} \text{ m}^{-1} = 2\pi \text{ m}^{-1}$ da.

Hurrengo irudian (22. irudia), estalkiko zenbait ebakidura-planoetatik ikusten den eremu elektrikoaren E_x' osagaiaren banaketa dugu (kasu esferikoan bezala), non ondo bereizten den estalkiaren barnean eremua 0 dela (horrek esan nahi du argia ez dela iristen). Geroz eta ebakidura-planoa altuagoa izan, ikusiko den sekzioa txikiagoa izango da:



23. irudia: Eremuaren E_x' osagaia elipsoide-estalkiaren altuera ezberdinetako $z = kte$ ebakidura-planoetan. Ezkerrekoa (goikoa) $z = 0 \text{ m}$ altuerako ebakidura-planoa da, eskuinekoa (goikoa) $z = 0.4 \text{ m}$ altuerakoa, ezkerrekoa (behekoa) $z = 0.6 \text{ m}$ altuerakoa eta eskuinekoa (behekoa) $z = 0.7 \text{ m}$ altuerakoa.

Estalki mota honetan eremuen portaera estalki esferikoko berdina da (gogoratu esfera, elipsoidearen kasu konkretua dela). Beraz, energiaren hedapena (energia-fluxua) barne estalkia inguratzen izango da ere, eta eremu elektrikoaren E_y' eta E_z' osagaiak, estalkian izango dira sortuak. Hau da 25. irudian ikusten dena.



24. irudia: Ezkerrean, E_x , osagaiaren banaketa, energiaren hedapenarekin batera (energia-fluxuarekin) $z = 0.4 \text{ m}$ altuerako ebakidura-planoan. Eskuinean, E_z , osagaiaren banaketa $z = 0.4 \text{ m}$ altuerako ebakidura-planoan.

Eremu magnetikoaren ezaugarriak estalki esferikoko berdinak dira ere (hauen adierazpenak (4.23) formulatik zuzenean ateratzen dira), horregatik H_z , osagaia asko handituko da estalkira sartzean, eta H_x , eta H_y , osagaiak estalkian bertan sortuko dira. Ikusi 18. irudia ideia bat egiteko, eite zirkularra ordez eliptikoa dugula imajinatuz.

6- ONDORIOAK

Benetako ikusezintasuna lortzea ez da batere erraza, izan ere, orain arte zegoen teknologia ez zen nahikoa honen inguruan ezerekin esperimintatzeko. Gaur egun, bere hasieretan dagoen arlo berri bat da. Metodo berriak garatzen ari dira argi ikusgaia (guk begiez antzematen duguna, $\lambda = 380\text{nm} - 780\text{nm}$ uhin luzerako tartea delarik espektro elektromagnetikoan) kontrolatu ahal izateko eta ikusezintasuna lortzeko. Honi, ikusezintasunaren zientzia izena eman diezaiokegu.

Beraz, argi dago ikusezintasunaren ametsa, historian zehar duela hainbeste urtetik nabarmen egon dena, eta literatura eta gaur egungo zinean eta beste hainbat arloetan ere agertzen dena, gaur egun benetakoa den zerbait bihurtzen ari dela zientzia eta zientzialariei esker. Ikusezintasunaren zientzia honek, nahiz eta soilik 7-8 urte izan, frogatu da posible dela eta hazten ari den zerbait dela. Dudarik gabe, garapen teknologikoei esker (nanoteknologiarekin) gai honek ezustekoak emango dizkigu etorkizun hurbilean.

Lan honetan, historikoki ikusezintasunaren inguruan zegoen “mundua” eta haren hastapenak ikusi ditugu, bai birtualki eta bai zientifikoki. Azken ikuspuntu hau sakonkiago aztertu dugu. Horretarako, metamaterialak eta transformazioaren optika azaldu ditugu, eta gero ikusezintasun-estalki esferikoaren eta elipsoide-estalkiaren adibideak garatu ditugu gauzak argitzen saiatzeko. Adibide bakoitzeko, simulazioen bidez, eremuak nola portatzen diren behatu dugu argiaren portaera esperotakoa zela baieztatuz (eremuen ikuspuntutik). Hau egiteko, MATLAB programa erabili dugu. Kasu esferikoan, COMSOL programa komertzialaren bitartez, argi-izpien ibilbidea zein den ikusi dugu ere. Nahiz eta azken programa hau oso egokia izan mota askotako simulazioak egiteko, ez dugu gehiago erabili bere zailtasun eta konplexutasun mailagatik.

Lan honen hurrengo pausua, denboraren menpeko eremuen simulazio bat egitea izango litzake (FDTD) [16]. Hau, “Yee”-ren algoritmoaren bitartez inplementatutako programen bidez egitea posible da. Berez, honen saiakuntza egin da, baina ez dira emaitza onak lortu metodoaren konplikazioagatik, denbora faltagatik eta lana gehiegi ez luzatzeagatik (hau bakarrik beste lan oso bat izan baitaiteke).

ERREFERENTZIAK

- [1] S. Tachi, Telexistence and Retro-reflective Projection Technology (RPT), Proceedings of the 5th Virtual Reality International Conference (VRIC2003) pp.69/1-69/9, [Laval Virtual 2003](#), France, May 13-18, 2003([VRIC2003.pdf\(432k\)](#))
- [2] S.Perkowitz, “Deflecting the Light and Deciving the Gods”, *Physics World*, Vol:24, No. 7, 21 (2011)
- [3] Ufimtsev, P. Ya. , “ Method of Edge Waves in the Physical Theory of Diffraction” , (1971)
- [4] V. G. Veselago (1968 (Russian text 1967)). "[The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of \$\epsilon\$ and \$\mu\$](#) ". *Sov. Phys. Usp.* **10** (4): 509–14
- [5] J.B.Pendry, “Negative Refraction Makes a Perfect Lens”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966 (2000)
- [6] U. Leonhardt, “Optical conformal mapping,” *Science* 312, 1777 (2006)
- [7] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling Electromagnetic Fields,” *Science* 312, 1780 (2006)
- [8] J. Li, J.B. Pendry, 2008, “Hiding under the Carpet: A New Strategy for Cloaking”, *Physical Review Letters*, Vol:101(20), 203901, (2008)
- [9] A.Alù, D.Rainwater, A.Kerhoff, K. Melin, “Experimental 3D Plasmonic Cloaking in Free Space”, *New Journal of Physics*, Volume 14, Issue 1, id. 013054 (2012)
- [10] P.V.Parini, W.T.Lu, P.Vodo, S.Sridhar, “Photonic Crystals: Imaging by Flat Lens Usin Negative Refraction”, *Nature* 426 (6965), 404 (2003)
- [11] Shelby, R. A.; Smith, D. R.; Schultz, S. , "Experimental Verification of a Negative Index of Refraction". *Science* **292** (5514): 77–79, (2001)
- [12] Wei Xiang Jiang, Tie Jun Cui, “Metamaterials: Theory, Design and Applications” , Ch. 2, “Optical Transformation Theory”, p.21-48, ed. Springer, (2010)
- [13] Schurig, D., Pendry, J.B., Smith, D.R.: “Calculation of material properties and ray tracing in transformation media”. *Opt. Express* **14**, 9704 (2006)
- [14] Cheng, Q., W. X. Jiang, and T. J. Cui, "Investigations of the electromagnetic properties of three-dimensional arbitrarily-shaped cloaks, " *Progress In Electromagnetics Research*”, Vol. 94, 105-117, (2009)
- [15] J.D.Jackson, “Classical Electrodynamics”, 3rd. Edition, Wiley, NY, (1999)
- [16] Maksim Siops, “Optics and Cloaking in FDTD”, PhD thesis, Ithaca College (2008)

IRUDIAK

(Irudien jatorria, nahiz eta askotan aldaketak egin PAINT programaren bitartez):

1. irudia: denak Google Irudiak-etik aterata daude
2. irudia: Google Irudiak-etik aterata, es.wikipedia.org
3. irudia: <http://science.howstuffworks.com/invisibility-cloak.htm>
4. irudia: Google Irudiak-etik aterata, www.mediateletipos.net
5. irudia: Google Irudiak-etik aterata, www.rpi.edu
6. irudia: Google Irudiak-etik aterata, lalipineirocastilla.blogspot.com eta www.madridmasd.org, hurrenez hurren.
7. irudia: Google Irudiak-etik aterata, en.wikipedia.org
8. irudia: Google Irudiak-etik aterata, www.thefullwiki.org/Metamaterial_cloaking
9. irudia: Google Irudiak-etik aterata, <http://www.comsol.com/blogs/3d-printed-cloaking-device-in-a-matter-of-hours/>
10. irudia: Google Irudiak-etik aterata, <http://news.nationalgeographic.com/news/bigphotos/95679765.html>
11. irudia: [8] erreferentziatik hartua
12. irudia: Google Irudiak-etik aterata, http://www.nature.com/lsa/journal/v1/n10/fig_tab/lsa201232f1.html
13. irudia: MATLABen *permitibitateesferiko.m* programak emandako emaitza, permitibitate erlatiboen grafika.
14. irudia: MATLABen *orokorra300.m* programak emandako emaitza da (A eranskinean dagoena)
15. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)
16. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)
17. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)
18. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)
19. irudia: MATLABen *orokorraEtotalarenanplitudea.m* eta *orokorraHtotalarenanplitudea.m* programek emandako emaitzak dira (D eranskinean azalduta daudenak).
20. irudia: MATLABen *orokorra300hutsune.m* eta *orokorra1000hutsune.m* programek emandako emaitzak dira hurrenez hurren (C eta E eranskinetan daude azalduak hurrenez hurren)
21. irudia: COMSOLen egindako kalkuluaren emaitza.
22. irudia: Google Irudiak-etik aterata, enciclopedia.us.es
23. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)
24. irudia: MATLABen *elipsesekzioak.m* programak emandako emaitza da (B eranskinean dagoena)

ERANSKINAK

A eranskina: MATLABen egindako *orokorra300.m* programa da, zeinak 12. irudia ematen digun.

```

hold on
b=1; %kanpo erradioa
a=0.5; %barne erradioa
for r=0.0:0.0125:1.5 %erradioa aldatuz doa
    if r<a %hemen eremua (Ex) 0 da
        x1,y1,z1]=sphere(200); % r erradioko esfera definituz
        x1=x1*r;y1=y1*r;z1=z1*r;
        c1=0.0+x1*0;%kolorea hautatzean
        %0 artu dut(kolorea eremua da)
        %erdikoa izan dadin,hau da 0 eremua

        surf(x1,y1,z1,c1,'edgecolor','none');
        hold on
        axis 'square'
    elseif r>a && r<=b;%estalki barnean Exprima eremua=c2
        [x2,y2,z2]=sphere(200);
        x2=x2*r;y2=y2*r;z2=z2*r;
        c2=(b/(b-a))*(1-(a*(y2.^2+z2.^2)/r^3)).*cos(2*pi*y2*(r-
            a)*b/((b-a)*r));
        surf(x2,y2,z2,c2,'edgecolor','none')
        axis 'square'
        hold on
    elseif r>=b %estalkitik kanpo
        [x3,y3]=meshgrid(-1.5:0.0125:1.5);%gainazal lau bat definituz
        z3=zeros(241); %gainazala laua denez z=0 da
        r3=sqrt(x3.^2+y3.^2+z3.^2);

        c3=cos(2*pi*y3);% =Ex=Re(exp(iky) eremua estalkitik kanpo
        %orain jatorritik hasita erradioa 1 baino txikiagoa bada, 1 erradioko %borobila ez
        marrazteko eta zulo bat agertzeko, non gero esferak han %sartuko diren

        for i=1:241
            for j=1:241
                if r3(i,j)<1
                    x3(i,j)=0/0; %NaN -ak sartuz putuak ez
                    y3(i,j)=0/0;%dira marrazten!horrela
                    %lortzen da zuloa

                end
            end
        end

        surf(x3,y3,z3,c3,'edgecolor','none')
        axis 'square'
        hold on

    end
end
end

```

B eranskina: MATLABen egindako *elipsesekzioak.m* programa da, zeinak 15,16, 17,18 23, 24. irudiak ematen dizkigun.

```

hold on
a=0.5; %barne esferoidea ardatzerdiak
b=0.5;
c=0.5;

a1=1; %kanpo esferoidea ardatzerdi
b1=1;
c1=1;

zkte=0.4;%ebakidura-planoa
%sarearen ezaugarriak
xmax=1.5;
xmin=-xmax;
nmax=361;
dx=(xmax-xmin)/nmax;
[x,y]=meshgrid(xmin:dx:xmax);%sare handia definituz
%Eremuen kalkulua orokorki
fac=sqrt(1-zkte^2/c^2);%geroko adierazpenak errazteko
fac1=sqrt(1-zkte^2/c1^2);
az=a*fac;
bz=b*fac;
az1=a1*fac1;
bz1=b1*fac1;
z=zkte*(x./x);
for i=1:nmax
    for j=1:nmax
        yin(i,j)=bz*sqrt(1-(x(i,j)/az)^2);%elipsoidearen ekuaziotik y
        %askatuz
        yout(i,j)=bz1*sqrt(1-(x(i,j)/az1)^2);
        z(i,j)=zkte;
        if abs(x(i,j))<az && abs(y(i,j))<abs(yin(i,j));%elipsoide
            %txikiaren barnean
            ex(i,j)=0;
            ey(i,j)=0;
            ez(i,j)=0;
            hx(i,j)=0;
            hy(i,j)=0;
            hz(i,j)=0;
            exm(i,j)=0;% 'm' duten gaiak eremuaren cosinua ez dena da!
            eym(i,j)=0;
            ezm(i,j)=0;
            hxm(i,j)=0;
            hym(i,j)=0;
            hzm(i,j)=0;

            elseif abs(x(i,j))>az1 %elipsoide handiaren kanpoan
                exm(i,j)=1;% 'if' guztietan eremuak zatika egiten dira
                eym(i,j)=0;%gauza sinplekiago idzteko
                ezm(i,j)=0;
                ex(i,j)=cos(2*pi*y(i,j));
                ey(i,j)=0;
                ez(i,j)=0;
                hxm(i,j)=0;
                hym(i,j)=0;
                hzm(i,j)=-1/376.73;
                hx(i,j)=0;
                hy(i,j)=0;
                hz(i,j)=-ex(i,j)/376.73;

            elseif abs(x(i,j))<az1 && abs(y(i,j))>abs(yout(i,j))%kanpoaldeko geratzen zen gunea
                exm(i,j)=1;
                eym(i,j)=0;

```

```

ezm(i,j)=0;
ex(i,j)=cos(2*pi*y(i,j));
ey(i,j)=0;
ez(i,j)=0;
hxm(i,j)=0;
hym(i,j)=0;
hzm(i,j)=-1/376.73;
hx(i,j)=0;
hy(i,j)=0;
hz(i,j)=-ex(i,j)/376.73;

elseif abs(x(i,j))<az1 && abs(y(i,j))<abs(yout(i,j))%estalkian
if abs(x(i,j))<az && abs(y(i,j))>abs(yin(i,j))
t(i,j)=sqrt((x(i,j)*b*c)^2+(y(i,j)*a*c)^2+(z(i,j)*a*b)^2);
fosc(i,j)=cos(2*pi*y(i,j)*a1/(a1-a)*(1-a*b*c/t(i,j)));
exm(i,j)=a1/(a1-a)*(1-a*b*c*t(i,j)^2-
x(i,j)^2*b^2*c^2)/t(i,j)^3;
eym(i,j)=a1/(a1-a)*(a*(b*c)^3*x(i,j)*y(i,j)/t(i,j)^3);
ezm(i,j)=a1/(a1-a)*(a*(b*c)^3*x(i,j)*z(i,j)/t(i,j)^3);
ex(i,j)=exm(i,j)*fosc(i,j);
ey(i,j)=eym(i,j)*fosc(i,j);
ez(i,j)=ezm(i,j)*fosc(i,j);
hxm(i,j)=-a1/(a1-
a)*(a*b)^3*c*x(i,j)*z(i,j)/(t(i,j))^3/376.73;
hym(i,j)=-a1/(a1-
a)*(a*b)^3*c*y(i,j)*z(i,j)/(t(i,j))^3/376.73;
hzm(i,j)=-1+a*b*c*(t(i,j)^2-
(z(i,j)*b*c)^2)/t(i,j)^3/376.73;
hx(i,j)=hxm(i,j)*fosc(i,j);
hy(i,j)=hym(i,j)*fosc(i,j);
hz(i,j)=hzm(i,j)*fosc(i,j);

elseif abs(x(i,j))>az %estalkiko falta den beste gunea hartuz
t(i,j)=sqrt((x(i,j)*b*c)^2+(y(i,j)*a*c)^2+(z(i,j)*a*b)^2);
fosc(i,j)=cos(2*pi*y(i,j)*a1/(a1-a)*(1-a*b*c/t(i,j)));
exm(i,j)=a1/(a1-a)*(1-a*b*c*(t(i,j)^2-x(i,j)^2*b^2*c^2)/t(i,j)^3);
eym(i,j)=a1/(a1-a)*(a*(b*c)^3*x(i,j)*y(i,j)/t(i,j)^3);
ezm(i,j)=a1/(a1-a)*(a*(b*c)^3*x(i,j)*z(i,j)/t(i,j)^3);
ex(i,j)=exm(i,j)*fosc(i,j);
ey(i,j)=eym(i,j)*fosc(i,j);
ez(i,j)=ezm(i,j)*fosc(i,j);
hxm(i,j)=-a1/(a1-a)*(a*b)^3*c*x(i,j)*z(i,j)/(t(i,j))^3/376.73;
hym(i,j)=-a1/(a1-a)*(a*b)^3*c*y(i,j)*z(i,j)/(t(i,j))^3/376.73;
hzm(i,j)=-1-a*b*c*(t(i,j)^2-(z(i,j)*b*c)^2)/t(i,j)^3/376.73;
hx(i,j)=hxm(i,j)*fosc(i,j);
hy(i,j)=hym(i,j)*fosc(i,j);
hz(i,j)=hzm(i,j)*fosc(i,j);
end

end

end

%subplot(2,2,4);
% Poynting bektorearen osagaiak definituz
sx=eym.*hzm-ezm.*hym;
sy=ezm.*hxm-exm.*hzm;
sz=exm.*hym-eym.*hxm;

```

```

xlabel('X(m)');
ylabel('Y(m)');

surface(x,y,ex,'edgecolor','none');%edozein osagai irudikatu
colorbar;
axis 'square';

hold on;
%Sare txikiagoa Poynting bektorea adierazteko
nmax=21;%puntu gutxiago sare berrian
xmin=xmin+0.2;
xmax=xmax-0.2;
dx=(xmax-xmin)/nmax;
[xi,yi]=meshgrid(xmin:dx:xmax,xmin:dx:xmax);
zi=interp2(x,y,z,xl,yi);%sare berrira aurreko sareko putu bakoitzeko
%ezaugarriak interpolatzen dira

sxi = interp2(x,y,sx,xi,yi);
syi = interp2(x,y,sy,xi,yi);
szi = interp2(x,y,sz,xi,yi);
s=sqrt(sxi.^2+syi.^2+szi.^2);

%Poynting bektorearen norabidea
quiver3(xi,yi,zi+10,sxi./s,si./s,szi./s,0.6,'black');%zatiketa (/s) egiten da, estalki
kanpoko eta barneko gezien tamaina antzekoa izan dadin
%bestela estalki barnekoak askoz ere handiagoak dira
hold on

```

C eranskina: MATLABen egindako *orokorra300hutsune.m* programa da, zeinak 20. irudia ematen digun. A eranskinekoaren berdina da, baina indeterminazio batzuk ditugu oktante batean zuloa edukitzeko.

```

hold on
b=1; %kanpo erradioa
a=0.5; %barne erradioa

for r=0.0:0.0125:1.5
if r<a %hemer eremua (Ex) 0 da
[x1,y1,z1]=sphere(200);
x1=x1*r;y1=y1*r;z1=z1*r;
c1=0.0+x1*0; %eremua 0 izateko
surf(x1,y1,z1,c1,'edgecolor','none');
hold on
axis 'square'

elseif r>a && r<=b;

[x2,y2,z2]=sphere(200);
x2=x2*r;y2=y2*r;z2=z2*r;

c2=(b/(b-a))*(1-(a*(y2.^2+z2.^2)/r^3)).*cos(2*pi*y2*(r-
a)*b/((b-a)*r)); % =Exprima

for i=1:201
for j=1:201
if x2(i,j)<0 && y2(i,j)<0 && z2(i,j)>0
x2(i,j)=0/0; %oktantean zuloa izateko
y2(i,j)=0/0; %indeterminazioak sartuz
z2(i,j)=0/0;

```

```

end
end
end
surf(x2,y2,z2,c2,'edgecolor','none')
view(-41,25);
axis 'square'
hold on
elseif r>=b %estalkitik kapo
[x3,y3]=meshgrid(-1.5:0.0125:1.5);
z3=zeros(241) %gainazala laua denez z=0
r3=sqrt(x3.^2+y3.^2+z3.^2);
c3=cos(2*pi*y3); %Ex=Re(exp(iky) maiztasuna=300MHz-koa denean
for i=1:241
for j=1:241
if r3(i,j)<1
x3(i,j)=0/0;%NaN -ak sartuz lortzen da zuloa!
y3(i,j)=0/0;
end
end
end
surf(x3,y3,z3,c3,'edgecolor','none')
axis 'square'
colorbar;
hold on
end
end

```

D eranskina: MATLABen egindako *orokorraEtotalarenanplitudea.m* eta *orokorraEtotalarenanplitudea.m* programak dira hurrenez hurren, zeinak 19. irudia ematen diguten.

```

a=0.5;
b=1;
r=1;
[x2,y2,z2]=sphere(200);
x2=x2*r;y2=y2*r;z2=z2*r;
c2=(b/(b-a))*sqrt((1-(a*(y2.^2+z2.^2)/r^3)).^2+(a*(x2.*y2)/r^3).^2+(a*(x2.*z2)/r^3).^2);
%eremu elektriko totalaren anplitudea
surf(x2,y2,z2,c2,'edgecolor','none')
axis 'square'

eta
a=0.5;
b=1;
r=1;

[x2,y2,z2]=sphere(200);
x2=x2*r;y2=y2*r;z2=z2*r;
c2=(b/(376.73*(b-a)))*sqrt((1-(a*(y2.^2+x2.^2)/r^3)).^2+(a*(z2.*y2)/r^3).^2+(a*(x2.*z2)/r^3).^2);
%eremu magnetiko totalaren anplitudea
surf(x2,y2,z2,c2,'edgecolor','none')
axis 'square'

```

E eranskina: MATLABen egindako *orokorra1000hutsune.m* programa da, zeinak 20. irudia ematen digun. *Orokorra300hutsune.m-ren* ia berdina da baina maiztasuna aldatuta:

```

hold on
b=1; %kanpo erradioa
a=0.5; %barne erradioa
for r=0.0:0.0125:1.5 %erradioa aldatuz doa
if r<=a %hemen eremua (Ex) 0 da
[x1,y1,z1]=sphere(200);
x1=x1*r;y1=y1*r;z1=z1*r;
c1=0.0+x1*0
surf(x1,y1,z1,c1,'edgecolor','none');
hold on
axis 'square'
elseif r>a && r<=b
[x2,y2,z2]=sphere(200);
x2=x2*r;y2=y2*r;z2=z2*r;
c2=(b/(b-a))*sqrt((1-(a*(y2.^2+z2.^2)/r^3)).*cos(20*pi*y2*(r-a)*b/((b-a)*r^3)); %
=Exprima % orain ikusiko den hutsunea definituz
for i=1:201
for j=1:201
if x2(i,j)<0 && y2(i,j)<0 && z2(i,j)>0
x2(i,j)=0/0;
y2(i,j)=0/0;
z2(i,j)=0/0;
end
end
end
surf(x2,y2,z2,c2,'edgecolor','none')
axis 'square'
view(315,30);
hold on
elseif r>=b %estalkitik kapo
[x3,y3]=meshgrid(-1.5:0.0125:1.5);
z3=zeros(241);
r3=sqrt(x3.^2+y3.^2+z3.^2);
c3=cos(20*pi*y3/3);
for i=1:241
for j=1:241
if r3(i,j)<1
x3(i,j)=0/0;
y3(i,j)=0/0;
end
end
end
surf(x3,y3,z3,c3,'edgecolor','none')
axis 'square'
view(315,30);
hold on
end
end

```

F eranskina: Kalkulu tentsorialeko frogapenak.

F1: (3.13),(3.14) formuletatik, (3.15),(3.16) formuletarako bidea.

Jatorrizko ingurunea isotropoa bada, edozein norabidetan permitibitate eta iragazkortasunak berdinak dira eta tentsoreak modu honetan idatz daitezke (berez elementu guztiak berdinak izan behar dira, baina diagonalizatuz beheko moduan geratzeko triedroaren orientazio bat aurkitzen da):

$$\varepsilon^{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \varepsilon \delta^{ij} \quad (f1.1)$$

$$\mu^{ij} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mu \delta^{ij} \quad (f1.2)$$

Beraz, (3.10), (3.11) ekuazioak beste modu batean idatz daitezke (prozedura bera da ε eta μ -rentat):

$$\varepsilon^{i'j'} = \left| \det(\Lambda_i^{i'}) \right|^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \varepsilon^{ij} = \left| \det(\Lambda_i^{i'}) \right|^{-1} \Lambda_i^{i'} \Lambda_j^{j'} \varepsilon \delta^{ij} \quad (f1.3)$$

i eta j indize mutuak direnez, gero gauzak errazagoak izateko aldatuko ditugu k eta l -gatik:

$$\varepsilon^{i'j'} = \left| \det(\Lambda_k^i) \right|^{-1} \Lambda_k^i \Lambda_l^j \varepsilon \delta^{kl} \quad (f1.4)$$

Orain, metrika definituz, $g^{i'j'} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j \delta^{kl}$ eta hurrengoa kontuan izanda (gogoratu matrize jakobiarraren determinantea berdina dela edozein indize erabilia eta δ^{kl} identitate matrizearen determinantea 1 dela):

$$\begin{aligned} \left| \det(\Lambda_k^i) \right|^{-1} &= \left| \det(\Lambda_k^i) \right|^{-\frac{1}{2}} \left| \det(\Lambda_i^{i'}) \right|^{-\frac{1}{2}} \left| \det(\delta^{kl}) \right|^{-\frac{1}{2}} = \left| \det(\Lambda_k^i \Lambda_i^{i'} \delta^{kl}) \right|^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (f1.5)$$

Beraz, (3.10), (3.11) ekuazioak horrela geratzen dira:

$$\varepsilon^{i'j'} = \left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} g^{i'j'} \varepsilon \quad (f1.6)$$

$$\mu^{i'j'} = \left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} g^{i'j'} \mu \quad (f1.7)$$

F2: Matrize jakobiarraren lortpena, (4.5) formulatik (4.6) formularako bidea.

$$\Lambda_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \frac{b-a}{b} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \delta_k^i + \frac{a}{r} \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \delta_k^i + a x^i \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x^k} \delta_k^i = \frac{b-a}{b} \delta_k^i \delta_k^i + \frac{a}{r} \delta_k^i \delta_k^i + a x^i \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x^k} \delta_k^i = \frac{b-a}{b} \delta_k^i + \frac{a}{r} \delta_k^i + a x^i \frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x^k} \delta_k^i \quad (f2.1)$$

Hirugarren butagaiaren deribatu partziala aparte eginez:

$$\frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x^k} = \frac{\partial \left((x^i x^i)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^k} \quad (f2.2)$$

Hirugarren butaigo kanpoko x^i -ren i indizearekin ez nahasteko, azken formulako i eta j aldagai mutuak ditugunez (nahi eran aldatu ditzakegu), aldatuko ditugu k eta t -z hurrenez hurren:

$$\frac{\partial (\frac{1}{r})}{\partial x^k} = \frac{\partial \left((x^i x^i)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^k} = \frac{\partial \left((x^k x^k)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^k} = \frac{\partial \left((x^k x^k)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} \frac{2x^k \delta_{kt}}{(x^k x^k)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x^k \delta_{kt}}{r^3} \quad (f2.3)$$

Beraz, guztira:

$$\Lambda_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^k} = \left(\frac{b-a}{b} + \frac{a}{r} \right) \delta_k^i - a x^i \frac{x^k \delta_{kt}}{r^3} \delta_k^i = \frac{r'}{r} \delta_k^i - \frac{a x^i x^k \delta_{kt} \delta_k^i}{r^3} \quad (f2.4)$$

i indize mutuak denez, geroago ez nahasteko s -gatik aldatuko dugu, beraz, matrize jakobiarraren adierazpena honela geratzen da:

$$\Lambda_k^i = \frac{r'}{r} \delta_k^i - \frac{a x^i x^k \delta_{kt} \delta_k^i}{r^3} \quad (f2.5)$$

F3: Jakobiarratik abiatuz permitibitate eta iragazkortasunen lortpena estalki esferikoan.

Matrize jakobiarraren determinantea modu errazago batean kalkulatzeko trikimailu bat erabiliko dugu. Jatorrizko sisteman bektore bat badugu, espazioa definitzen duen triedroa, jatorria tokiz aldatu gabe errotatu daiteke aipatutako bektorea x ardatzean gera dadin. Horrela (x^i) = ($x = r, y = 0, z = 0$) izango da eta matrize jakobiarra asko sinplifikatuko da:

$$\Lambda_k^i = \begin{pmatrix} \frac{r'}{r} - \frac{a}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r'}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r'}{r} \end{pmatrix} \quad (f3.1)$$

Beraz, determinantea:

$$\det(\Lambda_k^i) = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{r'-a}{r} \quad (f3.2)$$

Permitibitate eta iragazkortasunen (3.15), (3.16) formulak begiratu eta (f1.5) erlazioa kontuan izanda, determinanteari dagokien zatia honela geratuko da:

$$\left| \det(g^{i'j'}) \right|^{-\frac{1}{2}} = \left| \det(\Lambda_k^i) \right|^{-1} = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{r}{r'-a} \quad (f3.4)$$

Azkenik, metrika definituz:

$$g^{ij} = \Lambda_k^i \Lambda_l^j \delta^{kl} = \left(\frac{r'}{r} \delta_k^i - \frac{ax^s x^t \delta_{kl} \delta_s^i}{r^2} \right) \left(\frac{r'}{r} \delta_l^j - \frac{ax^s x^m \delta_{lm} \delta_l^j}{r^2} \right) \delta^{kl} = \frac{r'^2}{r^2} \delta_k^i \delta_l^j \delta^{kl} - \frac{r'a}{r^4} x^v x^m \delta_{lm} \delta_k^i \delta_v^j \delta^{kl} - \frac{r'a}{r^4} x^s x^t \delta_{st} \delta_k^i \delta_l^j \delta^{kl} + \frac{a^2}{r^6} x^s x^t x^v x^m \delta_{kl} \delta_s^i \delta_{lm} \delta_v^j \delta^{kl} = \frac{r'^2}{r^2} \delta^{ij} - \frac{r'a}{r^4} x^v x^m \delta_{lm} \delta_v^j \delta^{ij} - \frac{r'a}{r^4} x^s x^t \delta_s^i \delta_t^j + \frac{a^2}{r^6} x^s x^t x^v x^m \delta_s^i \delta_v^j \delta_{tm} \quad (f3.5)$$

(4.4) formulatik ondoriozta dezakegu $x^m \delta_{im}^i = \frac{r'^2}{r^2}$ dela eta (4.1)etik $x^t x^m \delta_{tm} = r^2$ dela, beraz propietate hauek aurreko formularen erabiliz:

$$g^{ij} = \frac{r'^2}{r^2} \delta^{ij} - \frac{r'a}{r^4} \frac{r^2}{r^2} x^i x^j - \frac{r'a}{r^4} \frac{r^2}{r^2} x^i x^j + \frac{a^2}{r^6} r^2 x^i x^j = \frac{r'^2}{r^2} \delta^{ij} - \frac{a}{r^2} \left(\frac{2}{r'} - \frac{a}{r'^2} \right) x^i x^j \quad (f3.6)$$

Horrela, permitibitate eta iragazkortasuna nolakoak diren jakiteko gai gara, gogoratu (3.15), (3.16) formulak. Kontuan izanda ingurunea edo jatorrizko espazioa, espazio askea dela, $\epsilon = \epsilon_0$ eta $\mu = \mu_0$ dira, eta ondorioz (3.15), (3.16) formulatiko adierazpenak berdinak dira konstante hauek izan ezik. Beraz, iragazkortasun eta permitibitateen adierazpenak hauek dira:

$$\epsilon^{ij} = |\det(g^{ij})|^{-\frac{1}{2}} g^{ij} \epsilon_0 = \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \frac{r}{r'-a} \left(\frac{r'^2}{r^2} \delta^{ij} - \frac{a}{r^2} \left(\frac{2}{r'} - \frac{a}{r'^2} \right) x^i x^j \right) \epsilon_0 = \frac{r}{(r'-a)r'^2} \left(r'^2 \delta^{ij} - \frac{a}{r^2} \left(2 - \frac{a}{r'} \right) x^i x^j \right) \epsilon_0 \quad (f3.7)$$

r eta r' -ren arteko erlazioa ezaguna denez (4.3) formulak emanda, goiko ekuazioa r' -ren menpe utzi dezakegu:

$$\epsilon^{ij} = \frac{\frac{(r'-a)b}{b-a}}{r'^2 (r' - a)} \left(r'^2 \delta^{ij} - a \left(\frac{2}{r'} - \frac{a}{r'^2} \right) x^i x^j \right) \epsilon_0 = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{ij} - \frac{a}{r'^2} \left(\frac{2}{r'} - \frac{a}{r'^2} \right) x^i x^j \right) \epsilon_0 = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{ij} - \frac{2ar' - a^2}{r'^4} x^i x^j \right) \epsilon_0$$

$$\mu^{ij} = \frac{b}{(b-a)} \left(\delta^{ij} - \frac{2ar' - a^2}{r'^4} x^i x^j \right) \mu_0 \quad (f3.8)$$

F4: Alderantziko jakobiarraren kalkulua. 4.24 formularen lorpena.

$\Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ matrize jakobiarra jakiteko, (4.4) formulatik hasiz: $x^i = \frac{r}{r'} x^{i'} \delta_{i'}^i$ da eta nola i' aldagai mutua denez, jakobiarreko zatitzaileen dagoenarekin ez nahasteko k' -gatik ordezkatuko dugu, horrela hemendik aurrera ere egingo duguna da indize mutu guztiak gainontzeko indizeekin ez nahasteko denak ezberdinak jarri. Hortaz:

$$x^i = \frac{r}{r'} x^{k'} \delta_{k'}^i \quad (f4.1)$$

(4.3) erlaziotik $\frac{r}{r'} = \frac{b}{b-a} \frac{(r'-a)}{r'}$ dela dakigunez (gogoratu b dela estaliaren kanpo erradioa eta a dela barnekoa):

$$x^i = \frac{r}{r'} x^{k'} \delta_{k'}^i = \frac{b}{b-a} \frac{(r'-a)}{r'} x^{k'} \delta_{k'}^i = \frac{b}{b-a} \left(x^{k'} \delta_{k'}^i - \frac{ax^{k'}}{r'} \delta_{k'}^i \right) \quad (f4.2)$$

Beraz:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{b}{b-a} \left(x^{k'} \delta_{k'}^i - \frac{ax^{k'}}{r'} \delta_{k'}^i \right) \right) = \frac{b}{b-a} \left(\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i'}} \delta_{k'}^i - \frac{a}{r'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^{i'}} \delta_{k'}^i - ax^{k'} \frac{\partial (\frac{1}{r'})}{\partial x^{i'}} \delta_{k'}^i \right) = \frac{b}{b-a} \left(\delta_{k'}^i \delta_{i'}^{k'} - \frac{a}{r'} \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{k'} - ax^{k'} \frac{\partial (\frac{1}{r'})}{\partial x^{i'}} \delta_{k'}^i \right) = \frac{b}{b-a} \left(\left(1 - \frac{a}{r'} \right) \delta_{i'}^i - ax^{k'} \frac{\partial (\frac{1}{r'})}{\partial x^{i'}} \delta_{k'}^i \right) \quad (f4.3)$$

Bigarren batagaiaren deribatu partziala aparte eginuz:

$$\frac{\partial (\frac{1}{r'})}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \left((x^s x^t \delta_{st}^i)^{-\frac{1}{2}} \right)}{\partial x^{i'}} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial x^s x^t \delta_{st}^i}{\partial x^{i'}} + x^s x^t \frac{\partial \delta_{st}^i}{\partial x^{i'}} \right)}{(x^s x^t \delta_{st}^i)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\delta_{i'}^s \delta_{i'}^t \delta_{st}^i + x^s \delta_{i'}^t \delta_{st}^i \right)}{(x^s x^t \delta_{st}^i)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} \frac{\left(\delta_{i'}^s \delta_{i'}^t \delta_{st}^i + x^s \delta_{i'}^t \delta_{st}^i \right)}{r'^3} = -\frac{1}{2} \frac{2x^i \delta_{i'}^i}{r'^3} = -\frac{x^i \delta_{i'}^i}{r'^3} \quad (f4.4)$$

Orduan, jakobiarrera bueltatuz:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{b}{b-a} \left(\left(1 - \frac{a}{r'} \right) \delta_{i'}^i + \frac{ax^i x^i}{r'^3} \delta_{i'}^i \delta_{i'}^i \right) \quad (f4.5)$$

Era matrizialean idatzita:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{r'} + \frac{ax'^2}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a}{r'} + \frac{ay'^2}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a}{r'} + \frac{az'^2}{r'^3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a(r'^2 - x'^2)}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a(r'^2 - y'^2)}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a(r'^2 - z'^2)}{r'^3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + y'^2)}{r'^3} \end{pmatrix} \quad (f4.6)$$

F5: Eremu elektrikoaren lorpena estalki esferikoaren barruan.

$$\begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} = \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + y'^2)}{r'^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{b}{b-a} \begin{pmatrix} 1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ax'y'}{r'^3} & \frac{ax'z'}{r'^3} \\ \frac{ay'x'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + z'^2)}{r'^3} & \frac{ay'z'}{r'^3} \\ \frac{az'x'}{r'^3} & \frac{az'y'}{r'^3} & 1 - \frac{a(x'^2 + y'^2)}{r'^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iky} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (f5.1)$$

F6: Eremu totalen adierazpen osoak estalki esferikoan.

$$E' = \pm \sqrt{E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} \right) \right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3} \right)^2} \left| \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right) \right| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{a(y'^2 + z'^2)}{r'^3} \right) \right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{ay'x'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{b}{b-a} \frac{az'x'}{r'^3} \right)^2} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right) \quad (f6.1)$$

$$H' = \sqrt{H_x'^2 + H_y'^2 + H_z'^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ax'z'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ay'z'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \left(1 - \frac{a(y'^2 + x'^2)}{r'^3} \right) \right)^2} \left| \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right) \right| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ax'z'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \frac{ay'z'}{r'^3} \right)^2 + \left(\frac{-b}{(b-a)\eta_0} \left(1 - \frac{a(y'^2 + x'^2)}{r'^3} \right) \right)^2} \cos \left(k \frac{(r'-a)b}{(b-a)r'} y' \right) \quad (f6.2)$$

F7: Permitibitatearen eta iragazkortasunaren osagai esferikoak.

Koordenatu kartesiarretatik (x, y, z) , esferikoetara (r, θ, φ) pasatzeko transformazio matrizea hurrengoa dela dakigu:

$$A = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \end{pmatrix} \quad (f7.1)$$

non koordenatuen arteko erlazioa hurrengoa den:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad (f7.2)$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \quad (f7.3)$$

$$z = r\cos\theta \quad (f7.4)$$

Beraz, batetik bestera pasatzeko hurrengo eragiketa erabiliko dugu (A^T , A matrizearen transposatua da):

$$\varepsilon_{esferiko}^{ij} = A_{kartesiar}^{ij} A^T \quad (f7.5)$$

$\varepsilon_{kartesiar}^{ij}$ tentsorearen osagaiak (4.10) adierazpenetik dakizkigu, beraz eragiketa guztiak egiten hurrengo emaitzak lortzen dira:

$$\varepsilon_r = \frac{b}{b-a} \frac{(r-a)^2}{r^2} \varepsilon_0 \quad (f7.6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{b}{b-a} \varepsilon_0 \quad (f7.7)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{b}{b-a} \varepsilon_0 \quad (f7.8)$$

Permitibitatearen tentsore esferikoan diagonaletik kanpo dauden gaiak nuluko dira, hemen lortutakoak diagonalekoak dira noski. Gero testuan, koordenatuak primatuak dira estalki osoagaiak baitira. Emaitza bera da iragazkortasunarentzat edota errefrakzio-indizearentzat (gogoratu (4.10)-(4.11) formulak).

F8: Elipsoide-estalkiaren matrize jakobiarraren lorpena.

$A_{ij}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}$ da lortu behar dena. Horretarako, posizio bektoreen osagaien arteko erlazioa behar dugu, eta bektore unitarioak bi espazioetan berdinak izaten jarraituko dutenez:

$$\frac{x^i}{r^i} = \frac{x'^i}{r'} \delta_{ij}^i \rightarrow x^i = \frac{r}{r'} x'^i \delta_{ij}^i \quad (f8.1)$$

$R(r)$ laburtzeko, $\sqrt{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2} = t$ bezala hartu dugu: $R(r) = \frac{abc r'}{t}$.

Beraz (5.1) formulaz: $\frac{r}{r'} = \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right)$ izango dugu, eta $x^i = \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) x^i \delta_{k'}^i$ izango da.

Orain, jakobiarrak kalkulatzeko gai gara:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \left(\frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) x^i \delta_{k'}^i \right)}{\partial x^{i'}} \quad (8.2)$$

i' aldagai mutua denez, k' -gatik aldatuko dugu:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \left(\frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) x^k \delta_{k'}^i \right)}{\partial x^{i'}} = \frac{a1}{a1-a} \left(\delta_{k'}^i \delta_{k'}^i - abc \frac{\partial \left(\frac{x^k}{t} \delta_{k'}^i \right)}{\partial x^{i'}} \right) = \frac{a1}{a1-a} \left(\delta_{k'}^i - abc \left(\frac{1}{t} \delta_{k'}^i \delta_{k'}^i + \frac{\partial \left(\frac{x^k}{t} \right)}{\partial x^{i'}} x^k \delta_{k'}^i \right) \right) \quad (8.3)$$

$\frac{\partial \left(\frac{x^k}{t} \right)}{\partial x^{i'}}$ gaia aparte eginuz:

$$\frac{\partial \left(\frac{x^k}{t} \right)}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \left(\frac{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2}{t^2} \right)^{-1/2}}{\partial x^{i'}} = -\frac{1}{2} \frac{((x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2)^{-3/2} \cdot 2(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2}{(x'bc)^2 + (y'ac)^2 + (z'ab)^2} = -\frac{1}{2} t^{-3} (2x'b^2c^2\delta_{i'}^{1'} + 2y'a^2c^2\delta_{i'}^{2'} + 2z'a^2b^2\delta_{i'}^{3'}) \quad (8.4)$$

Beraz, guztira:

$$\Lambda_{i'}^i = \frac{a1}{a1-a} \left(\delta_{k'}^i - abc \left(\frac{1}{t} \delta_{k'}^i - \frac{x^k \delta_{k'}^i}{2t^3} (2x'b^2c^2\delta_{i'}^{1'} + 2y'a^2c^2\delta_{i'}^{2'} + 2z'a^2b^2\delta_{i'}^{3'}) \right) \right) = \frac{a1}{a1-a} \left(\delta_{k'}^i - \frac{abc}{t^3} \left(t^2 \delta_{k'}^i - (x'b^2c^2x^k \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{1'} + y'a^2c^2x^k \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{2'} + z'a^2b^2x^k \delta_{k'}^i \delta_{i'}^{3'}) \right) \right) \quad (8.5)$$

F9: Elipsoide-estalkiaren eremu elektrikoaren adierazpenen froga.

(4.22) formula erabiliz:

$$\begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \\ E_{z'} \end{pmatrix} = \frac{a1}{a1-a} \begin{pmatrix} 1 - abc(t^2 - x'^2b^2c^2)/t^3 & a^3bc^3x'y'/t^3 & a^3b^3cx'z'/t^3 \\ ab^3c^3x'y'/t^3 & 1 - abc(t^2 - y'^2b^2c^2)/t^3 & a^3b^3cy'z'/t^3 \\ ab^3c^3x'z'/t^3 & a^3bc^3y'z'/t^3 & 1 - abc(t^2 - z'^2b^2c^2)/t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{a1}{a1-a} \begin{pmatrix} 1 - abc(t^2 - x'^2b^2c^2)/t^3 & a^3bc^3x'y'/t^3 & a^3b^3cx'z'/t^3 \\ ab^3c^3x'y'/t^3 & 1 - abc(t^2 - y'^2b^2c^2)/t^3 & a^3b^3cy'z'/t^3 \\ ab^3c^3x'z'/t^3 & a^3bc^3y'z'/t^3 & 1 - abc(t^2 - z'^2b^2c^2)/t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{iky} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Hortaz, parte erreala zuzenean hartuz:

$$E_{x'} = \frac{a1}{a1-a} (1 - abc(t^2 - x'^2b^2c^2)/t^3) \cos(ky) \quad (8.2)$$

$$E_{y'} = \frac{a1}{a1-a} (ab^3c^3x'y'/t^3) \cos(ky) \quad (8.3)$$

$$E_{z'} = \frac{a1}{a1-a} (ab^3c^3x'z'/t^3) \cos(ky) \quad (8.4)$$

Orain dena transformaturako espazioaren koordenatu primatuen menpe jarri behar da (kasu esferikoan egin dugun bezala). Bi espaziotan bektore unitarioak berdinak direnez, $\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} \rightarrow y = y(y') = \frac{r}{r'} y' = \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) y'$, beraz:

$$E_{x'} = \frac{a1}{a1-a} (1 - abc(t^2 - x'^2b^2c^2)/t^3) \cos \left(k \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) y' \right) \quad (8.5)$$

$$E_{y'} = \frac{a1}{a1-a} (ab^3c^3x'y'/t^3) \cos \left(k \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) y' \right) \quad (8.6)$$

$$E_{z'} = \frac{a1}{a1-a} (ab^3c^3x'z'/t^3) \cos \left(k \frac{a1}{a1-a} \left(1 - \frac{abc}{t}\right) y' \right) \quad (8.7)$$