Relación de problemas resueltos de exámenes de la asignatura Matemáticas II para Economistas de las Licenciaturas de Economía y Administración y Dirección de Empresas

economista
matemáticas

Henar Diez
José Miguel Echarri
Esther Gutiérrez
José Manuel Zarzuelo

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

www.argitalpenak.ehu.es
ISBN: 978-84-9860-456-6

ISBN: 978-84-9860-456-6

INTRODUCCIÓN:

La asignatura Matemáticas II aporta los conocimientos básicos de Análisis y Optimización clásica que son necesarios en los estudios en Economía (L.E.) y Administración y Dirección de Empresas (L.A.D.E.). En éstas, como en las demás Matemáticas de ambas licenciaturas se proporcionan al estudiante los conocimientos básicos, manteniendo un adecuado equilibrio conceptual/práctico.

Esta publicación recoge los problemas planteados en los exámenes de Matemáticas II en las distintas convocatorias comprendidas entre los años 2006 y 2010.

TEMARIO:

1. TOPOLOGÍA DE R^n. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES.

1.1.- Distancia euclídea en R^n. Bolas abiertas. Conjuntos abiertos, cerrados, acotados y compactos.

1.2.- Función real de varias variables reales. Gráfico de una función. Curvas de nivel. Límites y continuidad de una función. Propiedades. Funciones continuas elementales. Composición de funciones continuas.

2. CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES.

2.1.-Derivadas parciales. Interpretación geométrica. Función derivable. Propiedades. Derivadas parciales de orden superior. Teorema de Schwartz. Derivabilidad de funciones compuestas. Regla de la cadena.

2.2.- La diferencial. Interpretación geométrica. Función diferenciable. Funciones de clase C^k. Relaciones entre diferenciabilidad, derivabilidad y continuidad. Aproximación del valor de la función mediante la diferencial.

2.3.- Fórmula de Taylor. Aproximación del valor de la función mediante la fórmula de Taylor.

3. OPTIMIZACIÓN ClÁSICA DE FUNCIONES REALES DE UNA Ó DOS VARIABLES REALES.

3.1.- Extremos locales y globales de una función. Condiciones necesarias y suficientes para la determinación de extremos locales incondicionados. Condiciones necesarias y suficientes para la determinación de extremos locales condicionados. Multiplicadores de Lagrange.

3.2.- Extremos locales y globales de una función relativos a un conjunto.

4. FUNCIONES IMPLÍCITAS Y HOMOGÉNEAS.

4.1.- Función definida implícitamente. Interpretación geométrica. Función implícita global y local. Teorema de la función implícita. Derivabilidad de la función implícita.

4.2.- Función homogénea. Propiedades. Teorema de Euler.

REFERENCIAS BIOGRÁFICAS BÁSICAS:

"Matemáticas para el Análisis Económico". Sydsaeter y Hammond, Ed. Prentice Hall, 1991.

REFERENCIAS BIOGRÁFICAS BÁSICAS COMPLEMENTARIAS:

"Matemáticas para Economistas". Grafe, J, Ed. Mc Graw-Hill, 1991.

OBSERVACIONES:

Es fundamental en primer lugar que el estudiante adquiera los conocimientos conceptuales sobre la asignatura para poder realizar posteriormente los exámenes que aquí se recogen. Una vez realizado este trabajo práctico, el estudiante podrá comparar sus respuestas a las diferentes preguntas con las soluciones que a continuación se le ofrecen.

Como recomendación se le sugiere al estudiante que trabaje por temas.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.

ECONOMÍA. JUNIO DE 2006

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$.

i) Hallar y representar D, el dominio de f.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

iii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de f en el punto (1,2).

2.- Sabiendo que $f\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z=\sqrt[3]{\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}}$.

ii) $z=\cos(2^e xy+\mathrm{e}^{x^2y^2})$.

iii) $z=\dfrac{2}{y^2+1}g\left(\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)+f(x^2+3y,y^3)$.

3.- Sea $h=\dfrac{g(x^2y)}{x-y}$ donde g es una función homogénea de grado 2 y $g\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$.

i) ¿Es h una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(4)=2$ y $g'(4)=1$, ¿para qué valores de k define la ecuación $h(x,y)-k=0$ implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,1)? Para esos valores de k calcular $\varphi'(2)$.

4.- Se considera la función $f(x,y)=x-y^2$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 9,\ \ x\le 1\}.$$

i) Calcular los extremos locales de f relativos a int(A), fr(A) y A.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de f relativos a A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.
ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2006

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{x}+\dfrac{2}{y}$.

i) Hallar y representar D, el dominio de f.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de f en el punto (0,1).

iii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de f en el punto (1,2).

2.- Sabiendo que $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z=x^2y\ln(2+x^2+y^2)$.

ii) $z=f(xy^2,\sin(xy))+f(x^2,y)$.

iii) $z=\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}$, donde $f(x,y)\geq 0\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3.-

i) Calcular $a\in\mathbb{R}$ para que la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^a}\,g\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ sea homogénea sabiendo que , $g\in C^1(\mathbb{R})$ es una función homogénea de grado 2. Con el valor encontrado de a ¿cuál es el grado de homogeneidad de f?

ii) Se considera la función $f(x,y)=(y-2x)(x+y)(y-3)$

a) ¿Define la ecuación $f(x,y)=0$ una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno a los puntos (0,0) y (-3,3)?

b) Encontrar un punto (x_0,y_0) tal que la ecuación $f(x,y)=0$ defina una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (x_0,y_0). Razonar la respuesta.

4.- Se considera la función $f(x,y)=x+y$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ 1\leq x^2+y^2\leq 4\}.$$

i) Calcular los extremos locales de f relativos a int(A), fr(A) y A.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de f relativos a A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.

ECONOMÍA. JUNIO DE 2007

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$.

i) Hallar y representar el dominio de *f*.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en los puntos (0,0) y (1,0).

iii) Calcular el valor aproximado de $f(0'97, 0'02)-f(1,0)$ a través de la diferencial de *f* en (1,0).

2.- Sabiendo que $f\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z=\sin(xy-\mathrm{e}^{xy^2})$.

ii) $z=x^3y^2+\sqrt{x^2+y}$.

iii) $z=\ln(f(x^3y^2, x^2+y))$.

3.- Sea $f(x,y)=g(x,y)+xy^3$ donde $g\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ es una función homogénea de grado 4

i) ¿Es *f* una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(2,1)=g_1(2,1)=-2$,¿ define la ecuación $f(x,y)=0$ implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,1)? En caso afirmativo calcular $\varphi'(2)$.

4.- Se considera la función $f(x,y)=xy$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\le -y^2+1,\ \ x+y\ge 1\}.$$

i) Calcular los extremos locales de *f* relativos a A.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de *f* relativos a A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.

ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2007

1.- Sea $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{y-x^2}}$.

i) Calcular y representar el dominio de f ¿Es abierto?, ¿cerrado?, ¿acotado? y ¿compacto?.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en los puntos (0,0) y (0,1).

iii) Calcular el valor aproximado de $f(0'02, 0'98) - f(0,1)$ a través de la diferencial de *f* en (0,1).

2.- Sabiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = (x^2 + 3xy + 5y)e^{x^3y^2}$.

ii) $z = \cos(\sqrt[3]{x^2 - y}) + \ln(x + y^2)$.

iii) $z = f(x^2 + y^2, y^3) + g(x^3y + 3x^2)$.

3.- Sea $f(x,y) = x^2 g(x,y)$ donde $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ es una función homogénea de grado 2.

i) ¿Es *f* una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(1,0) = 0$ y $g_2(1,0) = 7$, ¿ define la ecuación $f(x,y) = 0$ implicitamente una función $y = \varphi(x)$ en torno al punto (2,0)? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(2)$.

4.- Se considera la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 - 1, \;\; y \leq 3\} .$$

i) Calcular los extremos locales de *f* relativos a *A*.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de *f* relativos a *A*.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II.

ECONOMÍA. JUNIO DE 2008

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x-y}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función.

ii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (0,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z=x^2y\cos(x-y^2)$

ii) $z=\ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

iii) $z=\dfrac{x+y}{2y}h(x^2,(x-y)^3)$, siendo $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

3.- Se considera la función $f(x,y)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2-x\le 1,\ y^2+x\le 1\}.$$

Calcula todos los extremos locales de *f* en *A*. Calcula, si existen, $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ y $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$.

4.- Sea $f(x,y)=x^2g(x^2,xy)$, donde $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

i) Si la función *g* es homogénea de grado 1, ¿es *f* homogénea?, ¿de que grado?

ii) Sabiendo que $g(1,2)=0$ y $g_2(2,4)=2$, ¿podemos asegurar que la ecuación $f(x,y)=0$ define una función implícita $\varphi(x)=y$ en torno al punto (1,2)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II
ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2008

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x-y}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función. ¿Es abierto?

ii) ¿Es f continua, derivable, diferenciable en (1,1)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

iii) ¿Es f continua, derivable, diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z=x^2+\dfrac{1}{y}+\sin(\ln(x))$.

ii) $z=\ln\left(\sqrt{x^2+y}\right)$.

iii) $z=\mathrm{e}^{x^2y}f(x^2,x^3-y^2)$, siendo $f\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3.- Sean la función $f(x,y)=y-x^2$ y el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+(y-1)^2\le 1,\ x\le y,\ x\ge -y\}$. Calcula todos los extremos locales de f en A. Calcula, si existen, los extremos globales de f en A.

4.- Sea $f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}+g(x,y)$, donde $g\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, g es homogénea de grado 3 y $g(0,1)=-1$, $g_1(0,2)=4$. ¿Define la ecuación $f(x,y)=0$ una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (0,1)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(0)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2009

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x(x-y)}}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función; ¿es abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,-1)? En caso afirmativo, calcula la diferencial en dicho punto y el valor aproximado de $f(0'99,-0'98)$.

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y})$.

ii) $z=(x^2-3y^2)\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

iii) $z=f((f(x,y))^2,y)$, siendo $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

3.- Sea $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 4,\ x\leq -y+2\}$ y $f(x,y)=-xy$.

i) Calcula los extremos locales de *f* en *A*.

ii) Calcula los extremos globales de *f* en *A*.

4.– Sea $h(x,y)=\dfrac{f(xy,2x^2)}{y}$, donde $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ es homogénea de grado 2.

i) ¿Es la función h homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que $f(1,2)=1$ y $f_2(1,2)=1$, calcula $k\in\mathbb{R}$ para que la ecuación $h(x,y)-k=0$ defina una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (1,1). Para el valor de k encontrado, calcula $\varphi'(1)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2009

1.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{y+2}$.

ii) $z = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

iii) $z = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$, siendo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2.- Sea la función $f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función; ¿es abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudia la continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad y la existencia del límite de la función *f* en los puntos (0,2) y (0,1).

iii) Calcula, si existe, $df(0,1)(h_1, h_2)$.

3.- Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y\}$ y $f(x,y) = y - x^2$. Calcula los extremos locales y globales de *f* en *A*.

4.– Sea $h(x,y) = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$, donde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

i) Si *f* es homogénea de grado 3, ¿es la función h homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que *f*(0,2)=8 y $f_1(0,2) = 24$, ¿define la ecuación $h(x,y) - 1 = 0$ una función implícita $y = \varphi(x)$ en torno al punto (1,0)? Calcula, si existe, $\varphi'(1)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II
ECONOMÍA. JUNIO DE 2010

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{x-y}$

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en (0,0).

iii) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en (-2,2).

iv) Calcular el valor aproximado de f(-1'98,1'99) a través de la diferencial de f en el punto (-2,2).

2.- Sean $f\left(x,y\right)=x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2$, $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 / x^2\leq y, 1\leq y\leq 4\right\}$. Calcular los extremos locales y globales de f relativos al conjunto A.

3.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z=\ln\sqrt{xy+y^2}$

ii) $z=sen(y^2x-3xy)$

iii) $z=f\left(x^3-y^2,x^3y^2\right)g\left(x\sqrt{y}\right)$ donde $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g\in C^1(\mathbb{R})$.

4.-

i) Sea la función $f(x,y)=y^2-2$. Define la ecuación $f(x,y)=0$ una función implícita de la forma $y=\varphi(x)$ en torno al punto $\left(1,\sqrt{2}\right)$. En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

ii) Sea la función $f(x,y)=x^2h\left(\dfrac{y^3}{x},\dfrac{x^3}{y}\right)$ con $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ y homogénea de grado 2. ¿Es f una función homogénea? Si la respuesta es afirmativa, indica su grado.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. FEBRERO DE 2006

1.- Sea la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{(x-1)y}}{x-y}$$

i) Calcular y representar D, el dominio de f.

ii) Indicar razonadamente si D es abierto, cerrado o compacto.

iii) Estudiar la existencia de límite, continuidad y derivabilidad de f en los puntos (1,1) y (2,1).

iv) ¿Es f diferenciable en (2,1)? En caso afirmativo, aproximar el valor de f(2'05,0'9) – f(2,1).

2.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}g\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, siendo $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ homogénea de grado 3 y $g(2)=2$.

i) ¿Es f homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcular $g'(2)$ aplicando la fórmula de Euler a la función f en el punto (2,2).

iii) Comprobar que la ecuación $f(x,y)=4$ define implícitamente alrededor del punto (2,2) la función $y=\varphi(x)$; calcular $\varphi'(2)$.

3.- Sean $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y^2-x\le 1;\, y^2+x\le 1\right\}$ y $f(x,y)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2$. Calcular los extremos locales de f en el conjunto A; calcular asimismo los extremos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2006

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)(x^2+y)}$.

i) Hallar el dominio de f y representarlo. ¿Es este dominio cerrado?, ¿y abierto?, ¿y compacto?

ii) Estudiar la continuidad de f en (1,1). Hallar $f_1(1,1)$.

iii) Estudiar la existencia de límite y la continuidad de f en (0,0).

2.- Hallar las derivadas de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)}$

ii) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^3-y^2x}\right)$

iii) $z=g(x-y,x^3y)$, donde $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3.- Sea $F(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, donde f, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, f y g son homogéneas de grado 3 y 2 respectivamente, y $g(x,y)\neq 0$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

i) Aplicando la definición, probar que F es homogénea y decir su grado.

ii) Sabiendo que $f(1,1)=0$ y $f_1(1,1)=5$, ¿define la ecuación $F(x,y)=0$ a la variable y como función implícita de x ($y=\varphi(x)$) en torno al punto (2,2)? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(2)$.

4.- Sean $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 2, (x-1)^2+y^2\ge 2\right\}$ y la función $f(x,y)=x-y$.

Calcular los extremos locales de la función f en el conjunto A; calcular asimismo los extremos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. ENERO DE 2007

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x-1}{(y-1)\sqrt{y-1+x^2}}$.

i) Halla el dominio de la función f y represéntalo. ¿Es abierto?

ii) Estudia la existencia del límite de f en (1,1).

iii) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en (1,2). Aproxima, si es posible, el valor de f(1'01,1'98).

2.- Calcula las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y)=\operatorname{sen}\left((x-y)\mathrm{e}^x\right)$.

ii) $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2}\cos y+y^2\ln y$.

iii) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

iv) $z=f(x+3,y-2)g(xy^2)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3.- Sea $F(x,y)=xy^3+f(x^2-y^2,xy)$, donde $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que f es una función homogénea de grado 2 y que $f(0,1)=1$, $f_1(0,1)=0$ y $f_2(0,1)=2$.

i) ¿Es F homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcula $F(2,2)$ y $F_2(2,2)$.

iii) Sea $G(x,y)=F(x,y)-k$. ¿Para qué valores de k define la ecuación $G(x,y)=0$ a y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto (1,1)? Para esos valores de k calcula $\varphi'(1)$.

4.- Sean el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2\le y, x-y\ge -2\}$ y la función $f(x,y)=(x-1)^2+y$.

i) Calcula los extremos locales de f en A.

ii) Calcula los extremos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2007.

1.-Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-y^2}}{x^2+y}$.

i) Halla el dominio de la función *f* y represéntalo. ¿Es abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudia la existencia del límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de *f* en (0,0) y (2,1).

iii) Aproxima, si es posible, *f*(1'98,1'05) por medio de la diferencial de *f* en (2,1).

$$f(1'98,1'05)\cong\frac{1}{5}+\frac{0'06}{50}-\frac{0'3}{25}=\frac{9'46}{50}$$

2.-Calcula las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y)=\sqrt{y^2x-1}$

ii) $f(x,y)=\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{y}\right)$

iii) $f(x,y)=\ln\sqrt[3]{1+x^2+y^2}$

iv) $z=f(y^2,x^2)g(y^2)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3.-Sea $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ homogénea de grado 2 donde $g(1)\neq0$. Sea la siguiente función

$$f(x,y)=yg\left(\frac{x}{y}\right)-xg\left(\frac{y}{x}\right).$$

i) ¿Es *f* homogénea?, ¿de qué grado?

ii) ¿Define la ecuación $f(x,y)-g(x)+g(y)=0$ a la variable y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto (1,1)? Calcula $\varphi'(1)$.

4.- Sean el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x+y\geq1,x^2+y^2\leq1\}$ y la función $f(x,y)=xy^2$.

i) Calcula los extremos locales de *f* en *A*.

ii) Calcula los extremos globales de *f* en *A*.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. FEBRERO DE 2008

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-y}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en (2,0). Hallar $f_y(2,0)$.

iii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en (2,4).

iv) Sea $f(x,y)=\sqrt{4x^2+5y^2}$. ¿Es f derivable en (0,0)?

2.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\dfrac{\operatorname{sen} xy}{\cos y^2}$.

ii) $z=\ln\left(x\sqrt{y}\right)$.

iii) $z=e^{xf(2y)}+2yg\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, siendo $f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

iv) $z=f(xy^2,h(x^2))$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3.- Sea $F(x,y)=xy^2+g\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, donde $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ es homogénea de grado 3 y $g(1)=-1$, $g'(1)=-3$.

i) ¿Es F homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcular $F(1,1)$ y $F(2,2)$.

ii) ¿Define la ecuación $F(x,y)=0$ una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (1,1)? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(1)$.

4.- Sea $f(x,y)=xy^2$. Si $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1,\ y^2+2x\ge 1\}$,

i) Hallar los extremos locales de f en A.

ii) Hallar los extremos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2008

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{2-x^2-y^2}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en $(1,1)$. Hallar, si existen, $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$.

iii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en $(0,4)$. Hallar, si existen, $f_x(0,4)$ y $f_y(0,4)$.

iv) Aproximar, si es posible, el valor de $f(0'02,3'99)$.

2.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\dfrac{x^2}{y\cos x^2}$.

ii) $z=\ln\sqrt{x+2y}$.

iii) $z=(x-2y)\mathrm{e}^{xy^2}$.

iv) $z=f\left(\dfrac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+g\left(\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3.- Sea $g(x,y)=\dfrac{f\left(xy,\,y^2-x^2\right)}{x}$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ homogénea de grado 3.

i) ¿Es g homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $f(1,0)=0$ y $f_2(1,0)=0$, ¿define la ecuación $g(x,y)=0$ a la variable y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto $(1,1)$? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(1)$.

4.- Sea $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ junto con $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\leq y,\ x-y\geq -2\}$.

i) Hallar los extremos locales de f en A.

ii) Hallar los extremos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS
LADE. FEBRERO DE 2009

1.- Sea $f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}}$.

a) Hallar y representar el domino D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado o compacto?

b) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $\left(0,0\right)$.

c) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $\left(2,1\right)$.

2.- Sea $g(x,y)=h\left(2xy-y^2,\dfrac{x^3+y^3}{3y-x}\right)$, donde $h\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ es una función homogénea de grado 2.

a) ¿Es g homogénea?, ¿de qué grado?

b) Existe algún valor para $h\left(1,1\right)$, de manera que la ecuación $g(x,y)-x^2-y^2=0$ defina una función implícita en un entorno del punto (1,1)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

3.- Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\ln\sqrt[5]{2xy+y^2}$.

ii) $z=\sin\left(\dfrac{x^3y^2}{2x+1}\right)$.

iii) $z=y^2f\left(x-y,3x\right)$, donde $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

iv) $z=f\left(x^3+2y,g\left(x^2y\right)\right)$, donde $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

4.- Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x,y)=xy$, relativamente al conjunto $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y\le 6, x+y\ge 0\right\}$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. JUNIO DE 2009

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x-1}{y\sqrt{x}}$

a) Hallar y representar el domino D de la función. ¿ Es D abierto, cerrado acotado o compacto?

b) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $(1,0)$.

c) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $(2,1)$.

d) Calcular el valor aproximado de $f(1.98,1.03)$ a través de la diferencial de f en el punto $(2,1)$.

2.- Sea $g(x,y)$ una función homogénea de grado 2 tal que $g\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g(1,3)=2$, y $g_x(1,3)=5$. Calcula $g(3,9)$, $g_x(3,9)$, y $g_y(3,9)$.

a) ¿Es g homogénea?, ¿de qué grado?

b) Sea $f(x,y)=\dfrac{(x-y)(y^2-1)}{\mathrm{e}^2}$. Estudiar si la ecuación $f(x,y)=0$ define a y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en un entorno de $(1,1)$ y de $(0,0)$. Calcula si existen $\varphi'(1)$ y $\varphi'(0)$.

3.- Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}\right)$.

ii) $z=\cos^2\left(x^3+3xy^2\right)$.

iii) $z=f\left(x^2y,5e^{3x}\right)$, donde $f\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

iv) $z=g\left(x^3-2y\right)h\left(y^3x\right)$, donde $g\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $h\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

4.- Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x,y)=(x-2)^2+y^2$, relativamente al conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 3,\ 2x\le 3y,\ 3x\ge y^2\right\}$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. FEBRERO DE 2010

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-2}}{x-y}$.

i) Hallar y representar el dominio *D* de la función. ¿Es *D* un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) ¿Existe el límite de *f* en (1,1)?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (0,2)?

2.- Sea la función $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Estudiar la derivabilidad de *f* en el punto (0,0).

3.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z=\ln\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

ii) $z=\operatorname{sen}^2(xe^y)$

iii) $z=x^3y^2g\left(y/x\right)$, siendo $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

iv) $z=f\left(xy,g\left(x^2,y^2\right)\right)$, siendo $f,g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

4.- Sean $f(x,y)=xy$, y el conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y^2\le 1,\ \ x-y+1\ge 0\right\}$. Hallar los extremos locales y globales de *f* relativamente al conjunto *A*.

5.- Sea $f(x,y)=x(x^2+y^2-4)$, Estudiar si la ecuación $f(x,y)=0$ define a *y* como función implícita de *x*, $y=\varphi(x)$, en torno a los puntos $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, (0,2) y (2,0). Calcular, si es posible, $\varphi'\left(\sqrt{2}\right)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. JUNIO DE 2010

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{y\sqrt{x}}{(x-y)^2}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la existencia del límite de f en el punto (0,0).

iii) ¿Es f continua, derivable, o diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f\left(x,y\right)=\cos^2\left(\dfrac{2y}{x^2}\right)$.

ii) $f\left(x,y\right)=\ln\left(2xy^4\right)$.

iii) $z=\left(g\left(\mathrm{e}^{xy}\right)\right)^3$, siendo $g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$.

iv) $z=y^2 f\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

3.- Hallar los máximos y mínimos locales y globales de $f\left(x,y\right)=x^2+\left(y-2\right)^2$ en el conjunto $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : y\le 4x,\ y\le 2,\ y\ge x\right\}$.

4.- Sea $f\left(x,y\right)=g\left(x,y\right)x^3$, donde $g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ es una función homogénea de grado 2.

i) ¿Es f homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que $f\left(2,4\right)=64$, hallar $f\left(1,2\right)$.

iii) Comprobar que f cumple el Teorema de Euler.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2006

1.- Sea $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$.

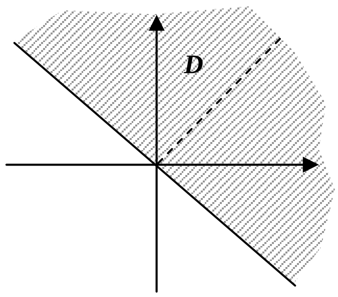
i) Hallar y representar *D*, el dominio de *f*.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en el punto (0,0).

iii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en el punto (1,2).

<u>Solución</u>:

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq -y, \;\; x \neq y\}$



ii) El punto $(0,0) \notin D$, lo cual implica que *f* no es continua ni diferenciable en el punto (0,0).

El limite lo estudiaremos mediante sucesiones.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \text{ y } \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$$

luego no existe el limite de *f* en el punto (0,0).

Nota: la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \notin D$ por lo tanto no puede ser utilizada para el estudio.

iii) $(1,2) \in \text{int}(D)$.

Continuidad de f en el punto (1,2): dado que la función f es el cociente de dos funciones continuas en el punto (1,2) y el denominador es distinto de cero en ese punto, podemos concluir que la función f es continua el punto (1,2).

Limite de f en el punto (1,2): al ser f continua en el punto (1,2) entonces existe el limite en dicho punto y además coincide con el valor de la función en el mismo, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = -\sqrt{3}\,.$$

Diferenciabilidad de f en el punto (1,2): realizamos el cálculo de las funciones derivadas parciales de f en un entorno del punto (1,2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{x-y}{2\sqrt{x+y}} - \sqrt{x+y}}{(x-y)^2} = \frac{-x-3y}{2(x-y)^2\sqrt{x+y}}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{x-y}{2\sqrt{x+y}} + \sqrt{x+y}}{(x-y)^2} = \frac{3x+y}{2(x-y)^2\sqrt{x+y}}\,.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en el punto (1,2) por ser el cociente de funciones continuas en ese punto con denominador distinto de cero. Por lo tanto se satisface la condición suficiente que nos permite afirmar que la función f es diferenciable en el punto(1,2).

2.- Sabiendo que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = \sqrt[3]{\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}}$.

ii) $z = \cos(2^e xy + e^{x^2y^2})$.

iii) $z = \dfrac{2}{y^2+1}\, g\left(\dfrac{x-2}{e^x}\right) + f(x^2+3y, y^3)$.

<u>Solución</u>:

i) $z = \sqrt[3]{\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{\dfrac{2(x^2+y^2+1)-2x(2x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}=\frac{-2x^2+2y^2+2xy+2}{3(x^2+y^2+1)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{\dfrac{-(x^2+y^2+1)-2y(2x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}=\frac{-x^2+y^2-4xy-1}{3(x^2+y^2+1)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}.$$

ii) $z=\cos(2^e xy+\mathrm{e}^{x^2y^2})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-(2^e y+2xy^2\mathrm{e}^{x^2y^2})\sin(2^e xy+\mathrm{e}^{x^2y^2}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-(2^e x+2x^2y\mathrm{e}^{x^2y^2})\sin(2^e xy+\mathrm{e}^{x^2+y^2}).$$

iii) $z=\dfrac{2}{y^2+1}g\left(\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)+f(x^2+3y,y^3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{2}{y^2+1}g'\left(\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x(x-2)}{\mathrm{e}^{2x}}\right)+f_1(x^2+3y,y^3)2x=$$

$$=\frac{6-2x}{\mathrm{e}^x(y^2+1)}g'\left(\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)+2xf_1(x^2+3y,y^3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{-4y}{(y^2+1)^2}g\left(\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)+3f_1(x^2+3y,y^3)+3y^2f_2(x^2+3y,y^3).$$

3.- Sea $h=\dfrac{g(x^2y)}{x-y}$ donde g es una función homogénea de grado 2 y $g\in C^1(\mathbb{R})$.

i) ¿Es h una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(4)=2$ y $g'(4)=1$, ¿para qué valores de k define la ecuación $h(x,y)-k=0$ implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,1)? Para esos valores de k calcular $\varphi'(2)$.

<u>**Solución**</u>**:**

i) El dominio de la función h es $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq y\}$, D es un cono.

$$h(tx,ty)=\frac{g(t^2x^2ty)}{tx-ty}=\frac{g(t^3x^2y)}{t(x-y)}=\frac{t^6g(x^2y)}{t(x-y)}=\frac{t^5g(x^2y)}{x-y}=t^5h(x,y)\ \ \forall t>0\,.$$

Entonces, la función h es homogénea de grado $\alpha=5$.

ii) Definimos la función $H(x,y)=h(x,y)-k$ y aplicamos el Teorema de la Función Implicita a la función H en el punto (2,1), veamos si se satisfacen las condiciones suficientes.

a) $H(2,1)=h(2,1)-k=\dfrac{g(4)}{1}-k=2-k$, entonces $H(2,1)=0\Leftrightarrow k=2$.

Por lo tanto a partir de ahora para que se cumpla el primer apartado $H(x,y)=h(x,y)-2$.

b) Veamos si $H(x,y)=h(x,y)-2\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(2,1))$.

Examinemos sus derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\frac{2xyg'(x^2y)(x-y)-g(x^2y)}{(x-y)^2}.$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2g'(x^2y)(x-y)+g(x^2y)}{(x-y)^2}.$$

Las derivadas parciales de primer orden de la función H son continuas en un entorno del punto (2,1) porque están formadas por operaciones con funciones continuas y el denominador no se anula.

Por lo tanto podemos concluir que $H(x,y)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(2,1))$.

c) $\dfrac{\partial H}{\partial y}(2,1)=\dfrac{4g'(4)+g(4)}{1}=6\neq 0$

Concluyendo que para $k=2$ la ecuación $h(x,y)-k=0$ define una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,1).

Además se cumple:

$$\varphi'(2)=-\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}(2,1)}{\dfrac{\partial H}{\partial y}(2,1)}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

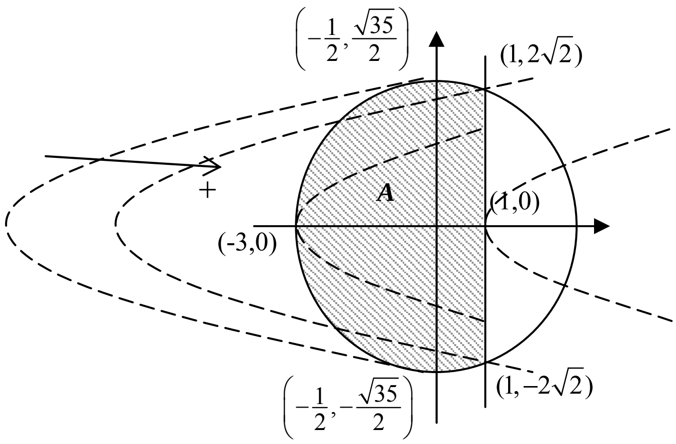
4.- Se considera la función $f(x,y)=x-y^2$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 9,\ \ x\le 1\}.$$

i) Calcular los extremos locales de f relativos a int(A), fr(A) y A.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de f relativos a A.

<u>Solución</u>:



i) <u>Extremos locales de f relativos al interior de A:</u>

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1\ne 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2y \end{array}\right\}$ al no cumplirse las condiciones necesarias podemos concluir que no existen extremos locales de f relativos a int(A).

<u>Extremos locales de f relativos a fr(A):</u>

$$\mathrm{fr}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=9,\,-3\le x<1\}\cup$$
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=1,\,-2\sqrt{2}<y<2\sqrt{2}\}\cup\{(1,-2\sqrt{2}),(1,-2\sqrt{2})\}=T_1\cup T_2\cup T_3.$$

• En el tramo de circunferencia $T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=9,\,-3\le x<1\}$

$g(x,y)=x^2+y^2-9$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x-y^2+\lambda(x^2+y^2-9)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-9=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(3,0)\notin A,\ \ \lambda=\frac{-1}{6}.\\ (-3,0)\in A,\ \ \lambda=\frac{1}{6}.\\ \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\in A,\ \ \lambda=1.\\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\in A,\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

como el punto $(3,0)$ no pertenece a la frontera lo rechazamos por lo tanto los candidatos en este tramo son $(-3,0,\frac{1}{6})$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta(-3,0,\frac{1}{6})=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x\\ 0 & -2+2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}_{(-3,0,\frac{1}{6})}=\begin{vmatrix}2/6 & 0 & -6\\ 0 & -10/6 & 0\\ -6 & 0 & 0\end{vmatrix}=60>0\,.$$

Luego $(-3,0)$ es un máximo local relativo a fr(A).

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x\\ 0 & -2+2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}_{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \sqrt{35}\\ -1 & \sqrt{35} & 0\end{vmatrix}=-70<0$$

Luego $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ es un mínimo local relativo a fr(A).

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x\\ 0 & -2+2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}_{\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\sqrt{35}\\ -1 & -\sqrt{35} & 0\end{vmatrix}=-70<0$$

Luego $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ es un mínimo local relativo a fr(A).

• En el tramo de la recta $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1, -2\sqrt{2} < y < 2\sqrt{2}\}$

$g(x,y) = x - 1$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x - y^2 + \lambda(x-1)$

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -2y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0) \in A, \quad \lambda = -1$$

el único candidato en este tramo es $(1,0,-1)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta(1,0,-1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(1,0,-1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0 .$$

Luego $(1,0)$ es un máximo local relativo a fr(A).

• En los puntos de corte $T_3 = \{(1,-2\sqrt{2}),(1,-2\sqrt{2})\}$

Estos puntos hay que estudiarlos por curvas de nivel.

Mediante las curvas de nivel $f(x,y) = k \Leftrightarrow x - y^2 = k$ concluimos que los puntos $(1,-2\sqrt{2}),(1,-2\sqrt{2})$ no son extremos relativos a la fr(A).

<u>Extremos locales de *f* relativos a A</u>:

Tenemos que ver utilizando las curvas de nivel si los extremos relativos a la fr(A) son también extremos relativos a A.

Concluyendo que $(1,0)$ es un máximo local relativo a A, $(-3,0)$ no es extremo relativo a A, $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ son mínimos locales relativos a A.

ii) Como *f* es una función continua y A es un conjunto compacto, sabemos que existen los extremos globales de *f* en A y, como los extremos globales son extremos locales, y dado que:

$$f(-3,0)=-3,\ f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)=-\frac{37}{4},\ f(1,0)=1$$

Podemos deducir que:

$(1,0)$ es un máximo global de *f* en A y $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ son mínimos globales de *f* en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2006

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{x}+\dfrac{2}{y}$.

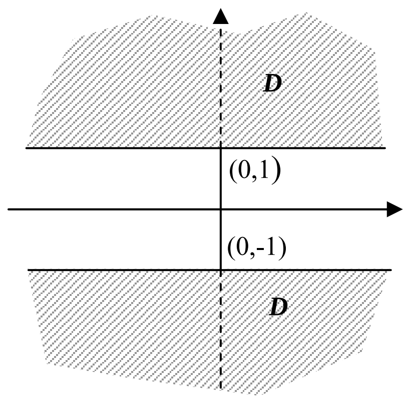
i) Hallar y representar *D*, el dominio de *f*.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en el punto (0,1).

iii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en el punto (1,2).

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\neq 0,\ |y|\geq 1\}$.



ii) $(0,1)\notin D$ lo cual implica que *f* no es continua ni diferenciable en el punto (0,1). Veamos la existencia del limite mediante sucesiones.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,1)\ \text{y}$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}}{\frac{1}{n}}+\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\sqrt{2n+1}+\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty.$$

luego no existe el limite de f en el punto (0,1).

iii) $(1,2) \in \text{int}(D)$.

Continuidad de f en el punto (1,2): dado que la función f está formada por operaciones con funciones continuas cuyos denominadores no se anulan en el punto (1,2), podemos concluir que la función f es continua el punto (1,2).

Limite de f en el punto (1,2): al ser f continua en el punto (1,2) entonces existe el limite en dicho punto y además coincide con el valor de la función en el mismo, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = \sqrt{3}+1.$$

Diferenciabilidad de f en el punto (1,2): realizamos el cálculo de las funciones derivadas parciales de primer orden de f en un entorno del punto (1,2).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\sqrt{y^2-1}}{x^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}x}{x^2} - \frac{2}{y^2} = \frac{y}{x\sqrt{y^2-1}} - \frac{2}{y^2}.$$

Como existen las derivadas parciales de primer orden de la función f en el punto (1,2), podemos concluir que f es derivable en ese punto. Además las derivadas parciales de f son continuas en un entorno del punto (1,2), por estar formadas por operaciones de funciones continuas con denominadores distintos de cero, pudiendo concluir que f es diferenciable en el punto (1,2).

2.- Sabiendo que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = x^2 y \ln(2 + x^2 + y^2)$.

ii) $z = f(xy^2, \sin(xy)) + f(x^2, y)$.

iii) $z = \sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}$, donde $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

i) $z = x^2 y \ln(2 + x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2xy \ln(2 + x^2 + y^2) + \frac{2x}{2 + x^2 + y^2}(x^2 y) = 2xy\left(\ln(2 + x^2 + y^2) + \frac{x^2}{2 + x^2 + y^2}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = x^2 \ln(2 + x^2 + y^2) + \frac{2y}{2 + x^2 + y^2}(x^2 y) = x^2\left(\ln(2 + x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{2 + x^2 + y^2}\right).$$

ii) $z = f(xy^2, \sin(xy)) + f(x^2, y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = f_1(xy^2, \sin(xy))y^2 + f_2(xy^2, \sin(xy))y\cos(xy) + f_1(x^2, y)2x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = f_1(xy^2, \sin(xy))2yx + f_2(xy^2, \sin(xy))x\cos(xy) + f_2(x^2, y).$$

iii) $z = \sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{2xf_1(x^2 - y^2, 2xy) + 2yf_2(x^2 - y^2, 2xy)}{2\sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}} = \frac{xf_1(x^2 - y^2, 2xy) + yf_2(x^2 - y^2, 2xy)}{\sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{-2yf_1(x^2 - y^2, 2xy) + 2xf_2(x^2 - y^2, 2xy)}{2\sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}} = \frac{-yf_1(x^2 - y^2, 2xy) + xf_2(x^2 - y^2, 2xy)}{\sqrt{f(x^2 - y^2, 2xy)}}.$$

3.-

i) Calcular $a \in \mathbb{R}$ para que la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^a}\, g\left(\frac{1}{xy}\right)$ sea homogénea sabiendo que , $g \in C^1(\mathbb{R})$ es una función homogénea de grado 2. Con el valor encontrado de *a* ¿cuál es el grado de homogeneidad de *f*?

ii) Se considera la función $f(x, y) = (y - 2x)(x + y)(y - 3)$

a) ¿Define la ecuación $f(x, y) = 0$ una función implicita $y = \varphi(x)$ en torno a los puntos (0,0) y (-3,3)?

b) Encontrar un punto (x_0, y_0) tal que la ecuación $f(x,y)=0$ defina una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (x_0, y_0). Razonar la respuesta.

Solución:

i) En primer lugar debemos examinar el valor de a para que se cumpla $f(tx,ty)=t^{\alpha} f(x,y) \ \ \forall t>0$.

$f(tx,ty)=\sqrt{t^2x^2+t^a y^a}\, g\left(\dfrac{1}{txty}\right)$.

Si $a=2$ y teniendo en cuenta que *g* es homogenéa de grado 2 tenemos:

$$f(tx,ty)=\sqrt{t^2(x^2+y^2)}\,g\left(\frac{1}{t^2xy}\right)=t\sqrt{(x^2+y^2)}t^{-4}g\left(\frac{1}{xy}\right)=t^{-3}\sqrt{(x^2+y^2)}\,g\left(\frac{1}{xy}\right)=t^{-3}f(x,y)$$

Luego para $a=2$ *f* es homogenéa de grado $\alpha=-3$

ii.a) Aplicamos el Teorema de la Función Implicita a la función *f* en los puntos $(0,0)$ y $(-3,3)$.

- $f(0,0)=0$.

$f(-3,3)=0$.

- Veamos si $f(x,y)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(0,0))$ y $f(x,y)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(-3,3))$.

Examinemos las derivadas parciales de primer orden de la función *f*.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2(x+y)(y-3)+(y-2x)(y-3).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x+y)(y-3)+(y-2x)(y-3)+(y-2x)(x+y).$$

Tanto la función *f* como sus derivadas parciales de primer orden son funciones polinómicas por lo tanto son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y particularmente en $\mathrm{B}(0,0)$ y en $\mathrm{B}(-3,3)$, concluyendo que $f(x,y)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(0,0))$ y $f(x,y)\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(-3,3))$.

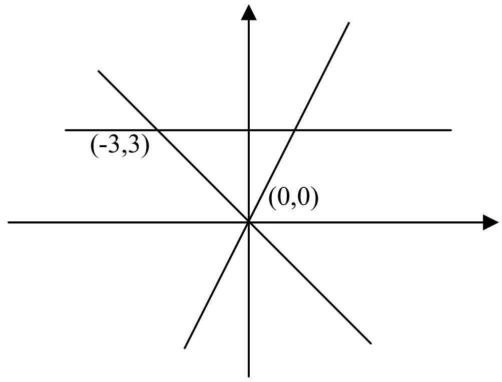
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(-3,3)=0$.

No se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implicita, por lo tanto en principio no se sabe si la ecuación $f(x,y)=0$ define una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno a los puntos (0,0) y (-3,3).

Haremos un análisis gráfico, considerando la curva de nivel cero de la función f.

$f_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=2x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=-x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=3\}$.



En el punto (0,0): $\nexists$ B(0) y B(0) / $\forall\ x\in$ B(0) $\exists!\, y\in$ B(0) satisfaciendo $f(x,y)=0$, por tanto la ecuación $f(x,y)=0$ no define una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (0,0).

En el punto (-3,3): $\nexists$ B(−3) y B(3) / $\forall\ x\in$ B(−3) $\exists!\, y\in$ B(3) satisfaciendo $f(x,y)=0$, por tanto la ecuación $f(x,y)=0$ no define una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (-3,3).

ii.b) Para que la ecuación $f(x,y)=0$ defina una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (x_0,y_0) tiene que ocurrir : $\forall x\in \mathrm{B}(x_0,\varepsilon)\ \ \exists!\, y\in B(y_0,\varepsilon) / f(x,y)=0$.

Para cualquier punto (x_0,y_0) que cumpla $f(x_0,y_0)=0$ excepto los puntos $(0,0)$, $(-3,3)$ y $\left(\frac{3}{2},3\right)$, para los que vemos graficamente que la ecuación $f(x,y)=0$ no define una función implicita $y=\varphi(x)$ en torno a esos puntos, se satisfacen las condiciones del Teorema de la Función Implicita.

Luego como respuesta nos servirá por ejemplo el punto (1,3).

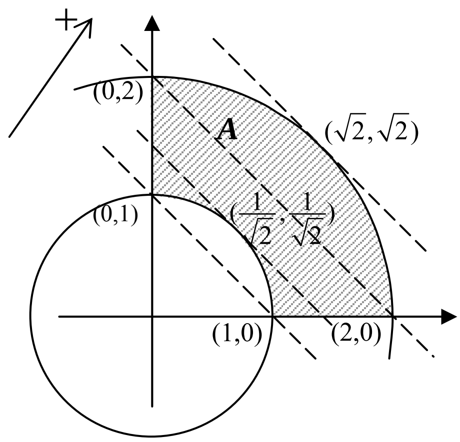
4.- Se considera la función $f(x,y) = x + y$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

i) Calcular los extremos locales de *f* relativos a int(*A*), fr(*A*) y *A*.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de *f* relativos a *A*.

Solución:



i) Extremos locales de *f* relativos al interior de *A*:

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 1 \neq 0 \\ f_2(x,y) = 1 \neq 0 \end{array}\right\}$ al no cumplirse las condiciones necesarias podemos concluir que no existen extremos locales de *f* relativos a int(*A*).

Extremos locales de *f* relativos a fr(*A*):

$$\begin{aligned} \text{fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0,\ 1 < y < 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0,\ 1 < x < 2\} \cup \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \cup \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\} \cup \\ \cup \{(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\} = \\ = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5. \end{aligned}$$

• En el tramo $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0,\ 1 < y < 2\}$

$g(x,y) = x$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no se cumplen las condiciones necesarias}.$$

Luego, no existen extremos relativos a la fr(A) en este tramo.

• En el tramo $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0,\ \ 1 < x < 2\}$

$g(x,y) = y$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(y)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 \neq 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{no se cumplen las condiciones necesarias}$$

Luego, no existen extremos relativos a la fr(A) en este tramo.

• En el tramo de circunferencia $T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in A,\ \ \lambda = \frac{-\sqrt{2}}{2}. \\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \notin A. \end{array}\right.$$

como el punto $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ no pertenece a la frontera lo rechazamos, por lo tanto el único candidato a extremo en este tramo es el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left|\begin{array}{ccc} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{array}\right|_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)} = \left|\begin{array}{ccc} -\sqrt{2} & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right| = 4\sqrt{2} > 0\,.$$

Luego $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un máximo local relativo a fr(A).

• En el tramo de circunferencia $T_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4,\ \ 0 < x < 2,\ \ 0 < y < 2\}$

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2},\sqrt{2}) \in A, \;\; \lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \notin A. \end{cases}$$

el punto $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ no pertenece a la frontera, luego lo rechazamos como candidato a extremo, por lo tanto el único candidato en este tramo es el punto $\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Condiciones suficientes:

$$\Delta\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}_{\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 8\sqrt{2} > 0$$

Luego $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ es un máximo local relativo a fr(A).

- En los puntos de corte $T_5 = \{(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\}$

Los puntos de corte hay que estudiarlos gráficamente con curvas de nivel.

Mediante las curvas de nivel $f(x,y) = k \Leftrightarrow x + y = k$ concluimos que los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos locales relativos a la fr(A) y los puntos (2,0) y (0,2) no son extremos relativos a la fr(A).

<u>Extremos locales de *f* relativos a A</u>:

Utilizando nuevamente las curvas de nivel tenemos que averiguar si los extremos locales relativos a la fr(A) son también extremos locales relativos a A.

Observando el gráfico concluimos que los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos locales relativos a A, el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ es un máximo local relativo A y el punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ no es extremo relativo a A.

ii) Como f es una función continua y A es un conjunto compacto, sabemos que existen los extremos globales de f en A y, como los extremos globales son extremos locales, deducimos del apartado anterior que:

El punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ es un máximo global de f en A.

Los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos globales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2007

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$.

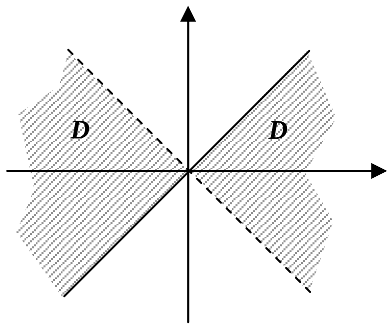
i) Hallar y representar el dominio de *f*.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en los puntos (0,0) y (1,0).

iii) Calcular el valor aproximado de $f(0'97,0'02)-f(1,0)$ a través de la diferencial de *f* en (1,0).

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\geq y^2,\ \ x\neq -y\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|\geq|y|,\ \ x\neq -y\}$.



ii) El punto (0,0)$\notin$*D*, lo cual implica que *f* no es continua ni diferenciable en el punto (0,0).

El limite lo estudiaremos mediante sucesiones.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0) \qquad \text{y} \qquad \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{1\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1.$$

Tomando la sucesión:

$$\left\{\left(-\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)$$

tenemos:

$$\left\{f\left(-\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{-1\}_{n\in\mathbb{N}}\to -1.$$

Luego, no existe el limite de f en el punto (0,0).

$(1,0)\in \operatorname{int}(D)$.

Continuidad de f en el punto (1,0): f es una función continua en el punto (1,0) porque está formada por el cociente de dos funciones continuas en un entorno del punto (1,0) con el denominador distinto de cero.

Limite de f en el punto (1,0): al ser f continua en el punto (1,0) entonces existe el limite en dicho punto y además coincide con el valor de la función en el mismo, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=1.$$

Diferenciabilidad de f en el punto (1,0): realizamos el cálculo de las funciones derivadas parciales de f en un entorno del punto (1,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\frac{2x(x+y)}{2\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-y^2}}{\left(x+y\right)^2}=\frac{xy+y^2}{(x+y)^2\sqrt{x^2-y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\frac{-2y(x+y)}{2\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-y^2}}{\left(x+y\right)^2}=\frac{-yx-x^2}{(x+y)^2\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Ambas derivadas parciales son continuas en el punto (1,0), por ser el cociente de funciones continuas en ese punto con denominador distinto de cero, por lo tanto se satisface la condición suficiente que nos permite afirmar que la función f es diferenciable en el punto (1,0).

iii) Dado que f es diferenciable en el punto (1,0) se satisface:

$$df_{(1,0)}(h,k)=h\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+k\frac{\partial f}{\partial y}(1,0).$$

Luego, considerando $(h,k)=(0'97,0'02)-(1,0)=(-0'03,0'02)$ tenemos que

$f(0'97,0'02)-f(1,0)\simeq df_{(1,0)}(-0'03,0'02)=$

$$= -0'03\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 0'02\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -0'03(0) + 0'02(-1) = -0'02.$$

2.- Sabiendo que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = \sin(xy - \mathrm{e}^{xy^2})$.

ii) $z = x^3y^2 + \sqrt{x^2 + y}$.

iii) $z = \ln(f(x^3y^2, x^2 + y))$.

Solución:

i) $z = \sin(xy - \mathrm{e}^{xy^2})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = (y - y^2\mathrm{e}^{xy^2})\cos(xy - \mathrm{e}^{xy^2}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = (x - 2xy\mathrm{e}^{xy^2})\cos(xy - \mathrm{e}^{xy^2}).$$

ii) $z = x^3y^2 + \sqrt{x^2 + y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2x^3y + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y}}.$$

iii) $z = \ln(f(x^3y^2, x^2 + y))$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{f_1(x^3y^2, x^2 + y)3x^2y^2 + f_2(x^3y^2, x^2 + y)2x}{f(x^3y^2, x^2 + y)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{f_1(x^3y^2, x^2 + y)2x^3y + f_2(x^3y^2, x^2 + y)}{f(x^3y^2, x^2 + y)}.$$

3.- Sea $f(x,y)=g(x,y)+xy^3$ donde $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ es una función homogénea de grado 4

i) ¿Es *f* una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(2,1)=g_1(2,1)=-2$, ¿ define la ecuación $f(x,y)=0$ implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,1)? En caso afirmativo calcular $\varphi'(2)$.

Solución:

i) $f(tx,ty)=g(tx,ty)+t^4xy^3=t^4g(x,y)+t^4xy^3=t^4(g(x,y)+xy^3)=t^4f(x,y)\ \ \forall t>0$.

Luego, la función *f* es homogénea de grado $\alpha=4$.

ii) Veamos si se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implicita para la función *f* en el punto (2,1):

a) $f(2,1)=g(2,1)+2=-2+2=0$.

b) Veamos si $f\in C^1(B(2,1))$.

Examinemos sus derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g_1(x,y)+y^3.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g_2(x,y)+3xy^2.$$

Como $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ sus derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, luego por operaciones con funciones continuas, también $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, por lo tanto $f\in C^1(B(2,1))$.

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=g_2(2,1)+6$.

Para calcular $g_2(2,1)$, aplicamos el Teorema de Euler:

$2g_1(2,1)+1g_2(2,1)=4g(2,1)=-8$.

$-4+g_2(2,1)=-8$

$g_2(2,1)=-4$.

Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=g_2(2,1)+6=2\neq 0$.

Se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implicita, con lo la ecuación $f(x,y)=0$ si define implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto

(2,1). Además, como la función *f* es diferenciable en el punto (2,1) entonces la función φ también lo es en el punto $x = 2$ y se cumple:

$$\varphi'(2) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Siendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = g_1(2,1) + 1 = -2 + 1 = -1$.

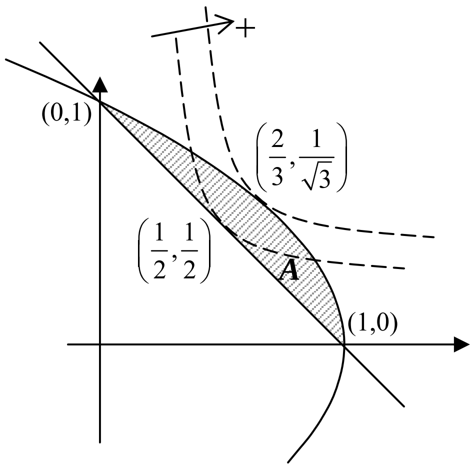
4.- Se considera la función $f(x, y) = xy$ y el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \le -y^2 + 1, \ \ x + y \ge 1\}.$$

i) Calcular los extremos locales de *f* relativos a *A*.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de *f* relativos a *A*.

<u>**Solución**</u> **:**



i) <u>Extremos locales de *f* relativos al interior de *A*:</u>

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{l} f_1(x, y) = y = 0 \\ f_2(x, y) = x = 0 \end{array}\right\} \ (0,0) \notin A$.

Entonces podemos concluir que no existen extremos locales de *f* relativos a int(*A*).

<u>Extremos locales de *f* relativos a fr(*A*):</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{fr}(A) = {} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y^2 + 1, \ \ 0 \le x \le 1\} \cup \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 1, \ \ 0 \le x \le 1\} \cup \{(1,0), (0,1)\} = T_1 \cup T_2 \cup T_3. \end{aligned}$$

• En el tramo $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = -y^2 + 1,\ \ 0 \le x \le 1\}$

$g(x,y) = x + y^2 - 1 = 0$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y^2 - 1)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= x + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in A, \ \ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \\ \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \notin A. \end{cases}$$

• En el tramo $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 1,\ \ 0 \le x \le 1\}$

$g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x + y - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A, \ \ \lambda = -\frac{1}{2}.$$

• Puntos de corte $T_3 = \{(1,0),(0,1)\}$

<u>Extremos locales de *f* relativos a A</u>:

Teniendo en cuenta las curvas de nivel obtenemos:

Los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos locales relativos a A.

El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ no es extremo local relativo a A.

El punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es un máximo local relativo a A.

ii) Como *f* es una función continua y A es un conjunto compacto, sabemos que existen los extremos globales de *f* en A y, como los extremos globales son extremos locales, *y* además:

$$f(1,0) = f(0,1) = 0\,,\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ \text{ y } \ f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{4}.$$

Entonces, podemos concluir que en los puntos (1,0) y (0,1) se alcanza el mínimo global de f en A y el punto $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ se alcanza el máximo global de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2007

1.- Sea $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{y - x^2}}$.

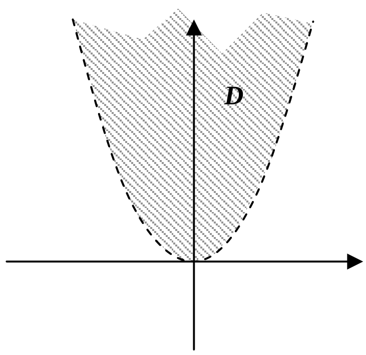
i) Calcular y representar el dominio de f ¿Es abierto?, ¿cerrado?, ¿acotado? y ¿compacto?.

ii) Estudiar la continuidad, existencia de limite y diferenciabilidad de *f* en los puntos (0,0) y (0,1).

iii) Calcular el valor aproximado de $f(0'02, 0'98) - f(0,1)$ a través de la diferencial de *f* en (0,1).

<u>Solución:</u>

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > x^2\}$.



$\mathrm{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x^2\}$, $\mathrm{fr}(D) \cap D \neq \varnothing$ luego, *D* es un conjunto abierto y no cerrado.

Además $\nexists\ \varepsilon > 0 \,/\, D \subset \mathrm{B}\big((0,0),\varepsilon\big)$ luego, *D* no es acotado.

Concluyendo también que *D* no es compacto por ser abierto y no acotado.

ii) El punto $(0,0) \notin D$, lo cual implica que *f* no es continua,derivable ni diferenciable en el punto (0,0).

El limite lo estudiaremos mediante sucesiones.

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \text{ y } \left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{e^0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty .$$

Luego, no existe el limite de *f* en el punto (0,0).

$(0,1) \in \operatorname{int}(D)$.

Continuidad de f en el punto (0,1): f es una función continua en el punto (0,1) porque está formada por el cociente de dos funciones continuas en un entorno del punto (0,1) con el denominador distinto de cero.

Limite de f en el punto (0,1): al ser f continua en el punto (0,1) entonces existe el limite en dicho punto y además coincide con el valor de la función en el mismo, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = 1 .$$

Diferenciabilidad de f en el punto (0,1): realizamos el cálculo de las funciones derivadas parciales de f en un entorno del punto (0,1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\mathrm{e}^{xy}\sqrt{y-x^2} + \dfrac{2x}{2\sqrt{y-x^2}}\mathrm{e}^{xy}}{y-x^2} = \frac{y\mathrm{e}^{xy}(y-x^2)+x\mathrm{e}^{xy}}{(y-x^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\mathrm{e}^{xy}\sqrt{y-x^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{y-x^2}}\mathrm{e}^{xy}}{y-x^2} = \frac{2x\mathrm{e}^{xy}(y-x^2)-\mathrm{e}^{xy}}{2(y-x^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -\frac{1}{2} .$$

Luego, f es derivable en el punto (0,1) y las derivadas parciales de primer orden son funciones continuas en un entorno del punto (0,1), por ser el cociente de funciones continuas en ese punto con denominador distinto de cero, por tanto se satisfacen las condiciónes suficientes que nos permite afirmar que la función f es diferenciable en el punto (0,1).

iii) $f(0'02, 0'98) - f(0,1) \simeq df_{(0,1)}(0'02, -0'02) =$

$$= 0'02\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) - 0'02\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0'02(1) - 0'02\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 0'03 .$$

2.- Sabiendo que $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$, hallar las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = (x^2 + 3xy + 5y)\mathrm{e}^{x^3y^2}$.

ii) $z = \cos(\sqrt[3]{x^2 - y}) + \ln(x + y^2)$.

iii) $z = f(x^2 + y^2, y^3) + g(x^3y + 3x^2)$.

<u>Solución:</u>

i) $z = (x^2 + 3xy + 5y)\mathrm{e}^{x^3y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = (2x + 3y)\mathrm{e}^{x^3y^2} + 3x^2y^2\mathrm{e}^{x^3y^2}(x \ \ + 3xy + 5y) =$$
$$= \mathrm{e}^{x^3y^2}(2x + 3y + 3x^2y^2(x^2 + 3xy + 5y)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = (3x+5)\mathrm{e}^{x^3y^2} + 2yx^3\mathrm{e}^{x^3y^2}(x^2 + 3xy + 5y) = \mathrm{e}^{x^3y^2}(3x + 5 + 2yx^3(x^2 + 3xy + 5y)).$$

ii) $z = \cos(\sqrt[3]{x^2 - y}) + \ln(x + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\sin(\sqrt[3]{x^2 - y})\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-y)^2}} + \frac{1}{x + y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \sin(\sqrt[3]{x^2 - y})\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-y)^2}} + \frac{2y}{x + y^2}.$$

iii) $z = f(x^2 + y^2, y^3) + g(x^3y + 3x^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = f_1(x^2 + y^2, y^3)2x + g'(x^3y + 3x^2)(3x^2y + 6x).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = f_1(x^2 + y^2, y^3)2y + f_2(x^2 + y^2, y^2)3y^2 + g'(x^3y + 3x^2)x^3.$$

3.- Sea $f(x,y) = x^2g(x,y)$ donde $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ es una función homogénea de grado 2.

i) ¿Es *f* una función homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $g(1,0) = 0$ y $g_2(1,0) = 7$, ¿ define la ecuación $f(x,y) = 0$ implicitamente una función $y = \varphi(x)$ en torno al punto (2,0)? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(2)$.

Solución :

i) $\forall t>0$: $f(tx,ty)=t^2x^2g(tx,ty)=t^2x^2t^2g(x,y)=t^4x^2g(x,y)=t^4f(x,y)$.

Luego, *f* es una función homogénea de grado $\alpha=4$.

ii) Veamos si se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implicita para la función *f* en el punto (2,0):

a) $f(2,0)=f(2(1,0))=2^4f(1,0)=16(1g(1,0))=0$.

b) Veamos si $f\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(2,0))$.

Examinemos sus derivadas parciales de primer orden.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xg(x,y)+g_1(x,y)x^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=g_2(x,y)x^2.$$

Como $g\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$ sus derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, luego por operaciones con funciones continuas, también $f\in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, por lo tanto $f\in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(2,0))$

c) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=4g_2(2,0)$.

Para calcular $g_2(2,0)$, aplicamos que, como *g* es homogenéa de grado 2, entonces g_2 es homogenéa de grado 1, por tanto:

$g_2(2,0)=g_2(2(1,0))=4g_2(1,0)=14$.

Luego, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=4g_2(2,0)=56\neq 0$

Se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implicita, con lo la ecuación $f(x,y)=0$ si define implicitamente una función $y=\varphi(x)$ en torno al punto (2,0). Además, como la función *f* es diferenciable en el punto (2,0) entonces la función φ también lo es en el punto $x=2$ y se cumple:

$$\varphi'(2)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)}.$$

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)$ aplicamos el Teorema de Euler:

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)+0\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)=4f(2,0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)=0\,.$$

Por tanto $\varphi'(2)=-\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)}=0$.

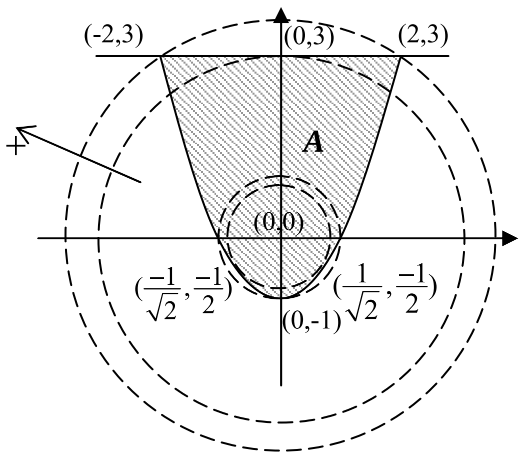
4.- Se considera la función $f(x,y)=x^2+y^2$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y\geq x^2-1,\quad y\leq 3\}\,.$$

i) Calcular los extremos locales de *f* relativos a *A*.

ii) Calcular, si existen, los extremos globales de *f* relativos a *A*.

Solución :



i) Extremos locales de *f* relativos al interior de *A*:

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=2y=0 \\ f_y(x,y)=2x=0 \end{array}\right\}$ $(0,0)\in\operatorname{int}(A)$.

Condiciones suficientes:

$f_{xx}(x,y)=2$.

$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=0$.

$f_{yy}(x,y)=2$.

$$H_f(0,0)=\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4>0$$ y $f_{xx}(0,0)=2>0$ luego el punto (0,0) es un mínimo local de *f* relativo a *A*.

<u>Extremos locales de *f* relativos a fr(*A*):</u>

$$\begin{aligned} \mathrm{fr}(A) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=x^2-1,\ -2\le x\le 2\}\cup \\ &\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=3,\ -2\le x\le 2\}\cup\{(-2,3),(2,3)\}=T_1\cup T_2\cup T_3. \end{aligned}$$

• En el tramo $T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=x^2-1,\ -2\le x\le 2\}$

$g(x,y)=y-x^2+1=0$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(y-x^2+1)$.

condiciones necesarias:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2\lambda x=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y-x^2+1=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases} (0,-1)\in A,\ \ \lambda=2. \\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\right)\in A,\ \ \lambda=1. \\ \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2}\right)\in A,\ \ \lambda=1. \end{cases}$$

• En el tramo $T_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y=3,\ -2\le x\le 2\}$

$g(x,y)=y-3=0$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(y-3)$.

Condiciones necesarias:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y-3=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow (0,3)\in A,\ \ \lambda=-6.$$

• En los puntos de corte tramo $T_3=\{(-2,3),(2,3)\}$

<u>Extremos locales de *f* relativos a A</u>:

Analizamos todos estos candidatos según el grafico de las curvas de nivel:

En el punto (0,-1) la función *f* alcanza un máximo local relativo a A.

Los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ no son extremos (ni máximo ni mínimo) locales de *f* relativos a A.

El punto (0,3) tampoco es un extremo local relativo a A.

Los puntos (-2,3) y (2,3) son máximos locales de *f* relativos a A.

ii) Como *f* es una función continua y A es un conjunto compacto, sabemos que existen los extremos globales de *f* en A y, como los extremos globales son extremos locales, *y* además:

$$f(0,-1)=1,\; f(-2,3)=13,\; f(2,3)=13,\; f(0,0)=0.$$

Entonces, podemos concluir que en los puntos (-2,3) y (2,3) se alcanza el máximo global de *f* en A y en el punto (0,0) se alcanza el mínimo global de *f* en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2008

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x-y}$.

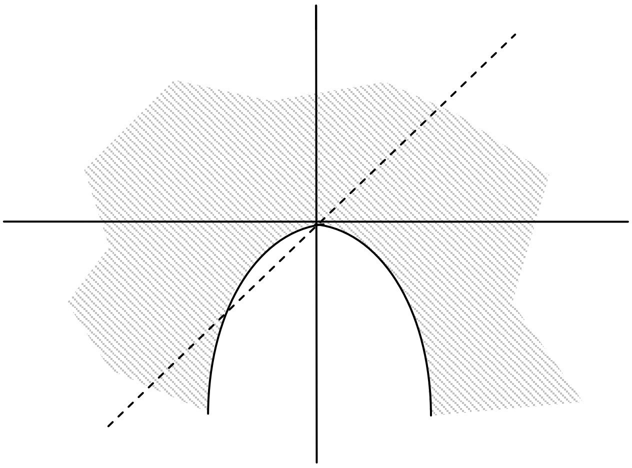
i) Encuentra y representa el dominio de la función.

ii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (0,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

Solución:

i) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y\geq 0 \wedge x\neq y\right\}$



ii) Como $(0,0)\notin$ D, no tiene sentido estudiar la continuidad, la derivabilidad ni la diferenciabilidad en (0,0). Pero $(0,0)\in \text{fr}(D)$, podemos estudiar la existencia de límite:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\subset D,\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\to(0,0)\ \text{ y }\ f\left(\frac{1}{n},0\right)=\frac{1/n}{1/n}=1\to 1$$

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}\subset D, \left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}\to(0,0)\ \text{ y }\ f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{1/n}}{-1/n}=\frac{-n}{\sqrt{n}}=-\sqrt{n}\to-\infty$$

Por tanto, no existe el límite de *f* en (0,0).

Nota: La sucesión $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ no está en el dominio, por lo tanto no puede ser utilizada para el estudio.

iii) $(1,0)\in \operatorname{int} D$.

Diferenciabilidad de *f* en el punto (1,0): calculamos las derivadas parciales

$$f_x(x,y)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y}}(x-y)-\sqrt{x^2+y}}{(x-y)^2}=\frac{-xy-y}{\sqrt{x^2+y}\,(x-y)^2} \qquad \text{para } x\neq y, x^2+y>0$$

$$f_y(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}(x-y)-\sqrt{x^2+y}\,(-1)}{(x-y)^2}=\frac{x+y+2x^2}{2\sqrt{x^2+y}\,(x-y)^2} \qquad \text{para}$$

$x\neq y, x^2+y>0$

Luego, existe un entorno del punto (1,0) en el cual las derivadas parciales f_x y f_y existen y son continuas (por operaciones con funciones continuas y los denominadores no se anulan en el entorno), luego *f* es diferenciable en el punto (1,0) y, por tanto, también es derivable y continua en (1,0) y, por ser continua:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=1$$

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z=x^2y\cos(x-y^2)$

ii) $z=\ln\left(\frac{1}{xy}\right)$

iii) $z=\frac{x+y}{2y}h(x^2,(x-y)^3)$, siendo $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

<u>Solución:</u>

En los tres casos, el ejercicio pide una aplicación sencilla de la *Regla de la Cadena*

i) $z = x^2 y \cos(x - y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy\cos(x - y^2) - x^2 y \sin(x - y^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(x - y^2) + 2x^2 y^2 \sin(x - y^2).$$

ii) $z = \ln\left(\frac{1}{xy}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xy\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}.$$

iii) $z = \frac{x+y}{2y} h(x^2, (x-y)^3)$, donde $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2y} h(x^2, (x-y)^3) + \frac{x+y}{2y}\left(2xh_1(x^2, (x-y)^3) + 3(x-y)^2 h_2(x^2, (x-y)^3)\right).$$

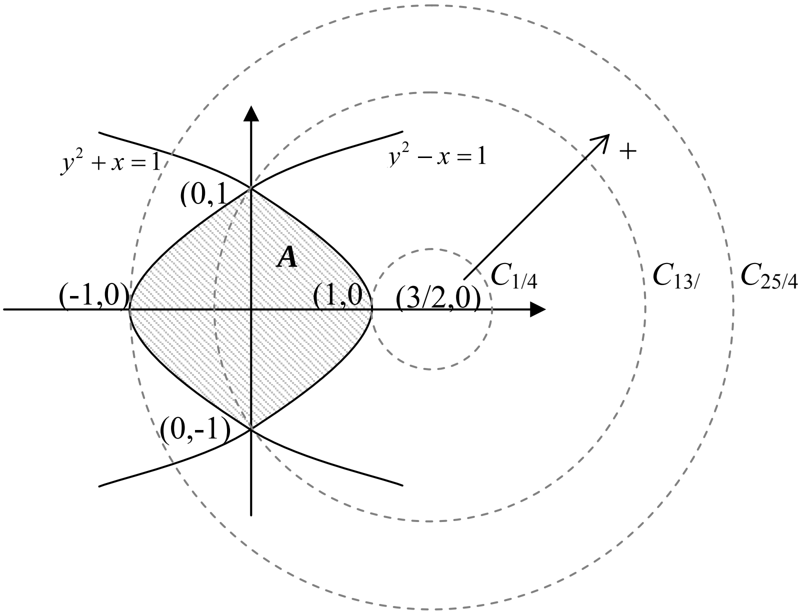
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{2y^2} h(x^2, (x-y)^3) + \frac{x+y}{2y}\left(-3(x-y)^2 h_2(x^2, (x-y)^3)\right).$$

3.- Se considera la función $f(x,y)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2$ y el conjunto

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y^2-x\le 1,\ y^2+x\le 1\}\ .$$

Calcula todos los extremos locales de *f* en *A*. Calcula, si existen, $\max\limits_{x\in A} f(x)$ y $\min\limits_{x\in A} f(x)$.

Solución:



(empezamos por dibujar el recinto, que es fundamental para resolver el problema)

Extremos locales de *f* relativos al interior de *A*:

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y=0\end{array}\right\}(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},0\right)\notin A$.

Puesto que (ver dibujo), el punto no está en el recinto, luego podemos concluir que *f* no posee extremos en el interior de *A*.

Extremos locales de *f* relativos a fr(*A*):

- En el tramo de frontera (de *A)* de ecuación: $g^1(x,y)=y^2-x-1=0$

Construímos la *función lagrangiana* siguiente y buscaremos los puntos que anulan las dos derivadas de ésta y que, claro está, se encuentran sobre este tramo de frontera.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+\lambda(y^2-x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-3-\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y^2-x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(-1,0)\in A,\lambda=-5\\ \left(1,\sqrt{2}\right)\notin A\\ \left(1,-\sqrt{2}\right)\notin A\end{cases}$$

Retiramos los puntos $\left(1,\sqrt{2}\right)$ y $\left(1,-\sqrt{2}\right)$ de nuestro estudio por no encontrarse en el recinto. Viendo la trayectoria de las curvas de nivel (dibujo al empezar el problema donde se ven dibujadas las circunferencias) se puede concluir que, en el punto (-1,0), la función alcanza un máximo local relativo a *A*.

• En el tramo de frontera (de *A)* de ecuación $g^2(x,y)=y^2+x-1=0$

De nuevo, construímos la *función lagrangiana* correspondiente y buscaremos los puntos que anulan las dos derivadas de ésta y que, además, se encuentran sobre este segundo tramo de frontera.

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+\lambda(y^2+x-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-3+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y^2+x-1=0\end{array}\right\}(1,0)\in A,\lambda=1$$

Una vez más, viendo la trayectoria de las curvas de nivel se puede concluir que, en el punto (1,0), la función alcanza un mínimo local relativo a *A*.

• En los puntos de corte de los dos tramos de frontera: (0,1) y (0,-1).

Observando que las curvas de nivel de la función *f* son circunferencias centradas en el punto (3/2,0) y que están asociadas a valores cada vez mayores según se incrementa el radio de éstas, es claro que en los puntos (0,1) y (0,-1) no se alcanza ningún valor extremo local relativo a *A* (la curva de nivel que los contiene a ambos establece dos “zonas” dentro del conjunto en cualquier entorno de los puntos: una donde la función toma valores mayores que en ellos y otra donde toma valores menores).

Extremos globales de f en A:

La función es continua y el recinto es acotado y cerrado (es decir, compacto). Por lo tanto, tenemos la seguridad de que existen en el recinto puntos donde la función alcanza su máximo valor y puntos donde alcanza su mínimo valor (éstos, globales). Los puntos(-1,0) y (1,0) que hemos encontrado como máximo y mínimo local respectivamente, son los únicos candidatos a tener en cuenta como extremos globales. Por lo tanto:

$$\max_{x\in A} f(x) = f(-1,0) = \frac{25}{4}$$

$$\min_{x\in A} f(x) = f(1,0) = \frac{1}{4}.$$

4.- Sea $f(x,y) = x^2 g(x^2, xy)$, donde $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

i) Si la función g es homogénea de grado 1, ¿es f homogénea?, ¿de que grado?

ii) Sabiendo que $g(1,2)=0$ y $g_2(2,4)=2$, ¿podemos asegurar que la ecuación $f(x,y)=0$ define una función implícita $\varphi(x)=y$ en torno al punto (1,2)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

Solución:

i) $\forall t>0$:

$$f(tx,ty) = (tx)^2 g\left((tx)^2, txty\right) = t^2x^2 g\left(t^2x^2, t^2xy\right) = t^2x^2t^2 g\left(x^2, xy\right) = t^4 f(x,y).$$

Luego, f es homogénea de grado 4.

ii) Veamos si se cumplen las condiciones del Teorema de la Función Implícita:

a) $f(1,2)=g(1,2)=0$

b) Las derivadas parciales de f son:

$$f_1(x,y) = 2xg(x^2,xy) + x^2\left[2xg_1(x^2,xy) + yg_2(x^2,xy)\right]$$
$$f_2(x,y) = x^3 g_2(x^2,xy)$$

Como $g \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, sus derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2$, luego, por operaciones con funciones continuas, también $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

c) $f_2(1,2) = g_2(1,2)$

Para calcular $g_2(1,2)$, aplicamos que, como g es homogénea de grado 1, entonces g_2 es homogénea de grado 0, por tanto:

$g_2(2,4) = 2^0 g_2(1,2) = g_2(1,2)$

Luego, $f_2(1,2) = g_2(2,4) = 2 \neq 0$

Se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita, con lo cual la ecuación $f(x,y) = 0$ sí define implícitamente una función $y = \varphi(x)$ en torno al punto (1,2). Además:

$$\varphi'(1) = -\frac{f_1(1,2)}{f_2(1,2)}$$

Para calcular $f_1(1,2)$ aplicamos el teorema de Euler:

$f_1(1,2) + 2f_2(1,2) = 4f(1,2) = 0 \quad \Rightarrow \; f_1(1,2) = -2f_2(1,2) = -4$

Por tanto:

$$\varphi'(1) = -\frac{f_1(1,2)}{f_2(1,2)} = -\frac{-4}{2} = 2$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II
ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2008

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x-y}$.

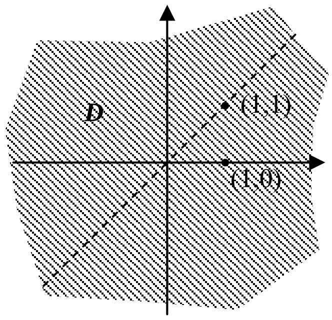
i) Encuentra y representa el dominio de la función. ¿Es abierto?

ii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,1)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

<u>Solución:</u>

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\neq y\}$.



Como la frontera de D es la recta $x=y$ ($\text{fr}(D)\cap D=\varnothing$), entonces D es abierto.

ii) $(1,1)\notin$D, por tanto, en este punto no tiene sentido estudiar la continuidad, derivabilidad ni diferenciabilidad. Sólo podemos estudiar la existencia de límite:

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)$$

$$\left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n}+2}{1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to 2$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)$$

$$\left\{ f\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1$$

Por tanto, no existe el límite de la función en el punto (1,1).

iii) $(1,0)\in\operatorname{int}(D)$. Calculamos las funciones derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2-y}{(x-y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2+x-2xy}{(x-y)^2}.$$

Ambas son cocientes de polinomios y los denominadores no se anulan en un entorno del punto (1,0), luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son continuas en un entorno de (1,0), con lo cual, *f* es diferenciable en (1,0) y, por tanto, *f* es continua y derivable en (1,0). Por ser continua en (1,0):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = 1.$$

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z = x^2 + \frac{1}{y} + \sin(\ln(x))$.

ii) $z = \ln\left(\sqrt{x^2+y}\right)$.

iii) $z = e^{x^2y} f(x^2, x^3-y^2)$, siendo $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Solución:

i) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}.$$

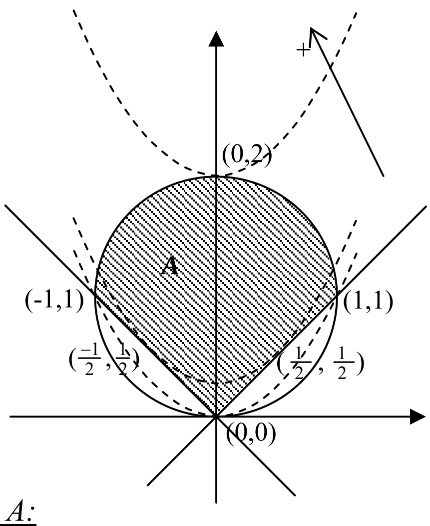
ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2 + y}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2(x^2 + y)}$.

iii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xye^{x^2y} f(x^2, x^3 - y^2) + e^{x^2y}\left[2xf_1(x^2, x^3 - y^2) + 3x^2 f_2(x^2, x^3 - y^2)\right]$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{x^2y} f(x^2, x^3 - y^2) - e^{x^2y} 2yf_2(x^2, x^3 - y^2)$.

3.- Sean la función $f(x, y) = y - x^2$ y el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y-1)^2 \leq 1, x \leq y, x \geq -y\}$. Calcula todos los extremos locales de *f* en *A*. Calcula, si existen, los extremos globales de *f* en *A*.



Extremos locales en el interior de *A:*

Condición necesaria:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1 \neq 0 \end{aligned}\right\}$$

Por tanto, no existen extremos en el interior de *A*.

Extremos locales en la frontera de *A:*

Tenemos 3 tramos de frontera:

$g^1(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$

$g^2(x,y) = x - y = 0$

$g^3(x,y) = x + y = 0$

y los puntos de corte: (0,0), (-1,1) y (1,1).

• Tramo $g^1(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x^2 + (y-1)^2 - 1)$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda(y-1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \in A. \\ (0,2) \in A. \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \notin A. \\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \notin A. \end{cases}$$

• Tramo $g^2(x,y) = x - y = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x - y)$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

• Tramo $g^3(x,y) = x + y = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x + y)$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

Por tanto, los candidatos a extremos en la frontera son: (0,0), (0,2), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (-1,1) y (1,1).

Teniendo en cuenta las curvas de nivel, se deduce que (0,0), (-1,1) y (1,1) son mínimos locales, (0,2) es máximo local, y $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ no son extremos de *f* en *A*.

Como *f* es continua y *A* es compacto, sabemos que existen los extremos globales de *f* en *A*. Por tanto, como sólo existe un máximo local, (0,2) es el máximo global:

$$\max_{x\in A} f(x) = f(0,2) = 2.$$

Y, como en los tres mínimos locales la función vale lo mismo, todos serán mínimos globales:

$$\min_{x\in A} f(x) = f(0,0) = f(1,1) = f(-1,1) = 0.$$

4.- Sea $f(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + g(x,y)$, donde $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, *g* es homogénea de grado 3 y $g(0,1) = -1$, $g_1(0,2) = 4$. ¿Define la ecuación $f(x,y) = 0$ una función implícita $y = \varphi(x)$ en torno al punto (0,1)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(0)$.

Solución:

Aplicamos el teorema de la función implícita:

1- $f(0,1) = \mathrm{e}^0 + g(0,1) = 1 - 1 = 0$.

2- $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{B}(0,1))$. Calculamos las derivadas parciales de *f*:

$f_1(x,y) = y\mathrm{e}^{xy} + g_1(x,y)$

$f_2(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} + g_2(x,y)$

como $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$, también $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3- $f_2(0,1) = g_2(0,1) = -3 \neq 0$.

Aplicamos el toerema de Euler a la función *g*:

$$3g(0,1) = 0g_1(0,1) + 1g_2(0,1) \Rightarrow g_2(0,1) = -3.$$

Como se cumplen las condiciones del teorema, podemos afirmar que la ecuación $f(x,y) = 0$ sí define una función implícita $y = \varphi(x)$ en torno al punto (0,1). Además,

$$\varphi'(0) = -\frac{f_1(0,1)}{f_2(0,1)} = \frac{2}{3}.$$

$f_1(x,y) = ye^{xy} + g_1(x,y)$

$f_1(0,1) = 1 + g_1(0,1)$ =1+1=2.

Como g es homogénea de grado 3, g_1 es de grado 2, luego:

$$g_1(0,2) = g_1(2(0,1)) = 2^2 g_1(0,1)$$
$$4 = 4g_1(0,1) \Rightarrow g_1(0,1) = 1$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2009

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x(x-y)}}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función; ¿es abierto, cerrado, acotado, compacto?

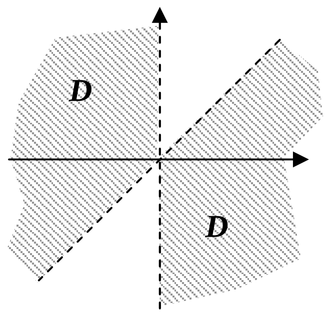
ii) ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (1,-1)? En caso afirmativo, calcula la diferencial en dicho punto y el valor aproximado de $f(0'99,-0'98)$.

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x(\ x-y)>0\}=$

$$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x>0,\ x-y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x<0,\ x-y<0\}$$



$$fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x=y\}$$

El dominio es un conjunto abierto, no cerrado (no contiene a ningún punto de la frontera), no acotado y no compacto.

ii) Calculamos el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ por sucesiones, ya que el punto $(0,0)\notin D$:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0) \text{ pero no es válida porque } \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\not\subset D.$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \text{ y } f\left(\frac{1}{n},0\right)=0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

$$\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \text{ y } f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como hemos encontrado dos sucesiones que convergen al punto (0,0) cuyas imágenes convergen a números diferentes, entonces no existe el límite de f en el punto (0,0).

iii) El punto $(1,-1)\in \operatorname{int}(D)$ y podemos calcular las derivadas parciales:

$$f_1(x,y)=-\frac{(2x-y)y}{2x(x-y)\sqrt{x(x-y)}}$$

$$f_2(x,y)=\frac{\sqrt{x(x-y)}+\dfrac{xy}{2\sqrt{x(x-y)}}}{x(x-y)}=\frac{2x-y}{2(x-y)\sqrt{x(x-y)}}$$

En el punto (1,–1):

$$f_1(1,-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

$$f_2(1,-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}$$

Como existen ambas derivadas parciales en (1,-1), entonces f es derivable en el punto (1,–1). Además, en los puntos de D las funciones $f_1(x,y)$ y $f_2(x,y)$ son continuas porque están formadas por operaciones con funciones continuas y el denominador no se anula, por tanto, f es diferenciable en (1,–1), luego también continua en (1,-1). Por último,

$$df(1,-1)(h_1,h_2)=f_1(1,-1)h_1+f_2(1,-1)h_2=\frac{3}{4\sqrt{2}}h_1+\frac{3}{4\sqrt{2}}h_2,$$

$$f(0'99,-0'98)-f(1,-1)\cong df(1,-1)(-0'01,0'02)=\frac{0'03}{4\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$f(0'99,-0'98)\cong\frac{0'03}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3'97}{4\sqrt{2}}=-0'7018.$$

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 - y})$.

ii) $z = (x^2 - 3y^2)\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

iii) $z = f((f(x,y))^2, y)$, siendo $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

<u>Solución:</u>

i) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y}}}{x + \sqrt{x^2 - y}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2\sqrt{x^2 - y}\left(x + \sqrt{x^2 - y}\right)}.$$

ii) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(\frac{x}{y}\right) - (x^2 - 3y^2)\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y\cos\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 - 3y^2)\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}.$$

iii) $$\frac{\partial z}{\partial x} = 2f_1((f(x,y))^2, y)f(x,y)f_1(x,y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2f_1((f(x,y))^2, y)f(x,y)f_2(x,y) + f_2((f(x,y))^2, y).$$

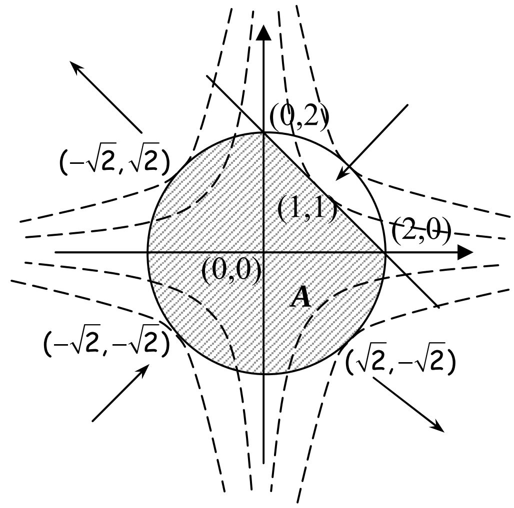
3.- Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 4,\ x \le -y + 2\}$ y $f(x,y) = -xy$.

i) Calcula los extremos locales de *f* en *A*.

ii) Calcula los extremos globales de *f* en *A*.

Solución:

i) Notar que se satisfacen las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para extremos locales condicionados e incondicionados ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$).



Extremos locales de *f* en el interior de *A*:

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = -y = 0 \\ f_2(x,y) = -x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \in \operatorname{int}(A).$

Condiciones suficientes: $H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

Por tanto, el punto (0,0) no es un extremo local de *f*.

Extremos locales de *f* en la frontera de *A*:

•Tramo $x^2 + y^2 - 4 = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -x + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2},\sqrt{2}) \notin A. \\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in A. \\ (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \in A. \\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in A. \end{cases}$$

• Tramo $x + y - 2 = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -xy + \lambda(x+y-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,1) \in A.$$

Por tanto, los puntos candidatos a extremos locales de f en A son $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, (1,1), (2,0) y (0,2).

Realizando el estudio de las curvas de nivel de la función, podemos concluir que los puntos (2,0) y (0,2) no son extremos de f en A; $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ son máximos locales relativos a A y $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y (1,1) son mínimos locales relativos a A.

ii) Como f es una función continua y A es compacto, existen los extremos globales de f en A.

El máximos global se alcanza en los puntos $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, siendo $\max\limits_{x\in A} f(x) = 2$; y el mínimo global se alcanza en el punto $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, siendo $\min\limits_{x\in A} f(x) = -2$.

4.- Sea $h(x,y) = \dfrac{f(xy,2x^2)}{y}$, donde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ es homogénea de grado 2.

i) ¿Es la función h homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que $f(1,2)=1$ y $f_2(1,2)=1$, calcula $k \in \mathbb{R}$ para que la ecuación $h(x,y) - k = 0$ defina una función implícita $y = \varphi(x)$ en torno al punto (1,1). Para el valor de k encontrado, calcula $\varphi'(1)$.

<u>Solución:</u>

i) $\forall t > 0 : h(tx,ty) = \dfrac{f(t^2xy, t^2 2x^2)}{ty} = \dfrac{t^4 f(xy,2x^2)}{ty} = t^3 h(x,y)$,

luego, h es homogénea de grado 3.

ii) Sea $H(x,y)=h(x,y)-k$. Aplicamos el teorema de la función implícita a la función *H*(*x,y)* en el punto (1,1):

1.- $H(1,1)=h(1,1)-k=f(1,2)-k=1-k=0 \Rightarrow k=1$.

2.- Calculamos las derivadas parciales de *H*:

$$H_1(x,y)=h_1(x,y)=\frac{yf_1(xy,2x^2)+4xf_2(xy,2x^2)}{y}.$$

$$H_2(x,y)=h_2(x,y)=\frac{xyf_1(xy,2x^2)-f(xy,2x^2)}{y^2}.$$

Como $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, las funciones $H_1(x,y)$ y $H_2(x,y)$ son continuas en un entorno del punto (1,1) porque están formadas por operaciones con funciones continuas y el denominador no se anula, por tanto, $H\in C^1(B(1,1))$.

3.- $H_2(1,1)=h_2(1,1)=f_1(1,2)-f(1,2)$.

Como *f* es homogénea de grado 2, aplicando el teorema de Euler:

$$2f(1,2)=f_1(1,2)+2f_2(1,2)\Rightarrow 2=f_1(1,2)+2\Rightarrow f_1(1,2)=0.$$

Luego, $H_2(1,1)=f_1(1,2)-f(1,2)=-1\neq 0$.

Por tanto, para *k*=1 la ecuación $h(x,y)-k=0$ define una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (1,1). Para calcular $\varphi'(1)$:

$$\varphi'(1)=-\frac{H_1(1,1)}{H_2(1,1)}==-\frac{h_1(1,1)}{h_2(1,1)}=4, \quad \text{ya que} \quad h_1(1,1)=f_1(1,2)+4f_2(1,2)=4.$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. SEPTIEMBRE DE 2009

1.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

i) $z = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{y+2}$.

ii) $z = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

iii) $z = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$, siendo $f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Solución:

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2}{3(y+2)\sqrt[3]{x-1}}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(y+2)^2}$.

ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2x}{(y-x^2)(y-2)}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\dfrac{y-2}{y-x^2} - \ln(y-x^2)}{(y-2)^2}$.

iii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right) + xf_2\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)\dfrac{x(x-2y)}{(x-y)^2}$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = x\left(f_1\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right) + f_2\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right)$.

2.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

i) Encuentra y representa el dominio de la función; ¿es abierto, cerrado, acotado, compacto?

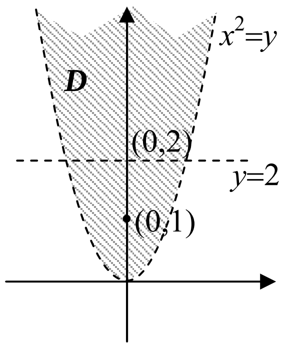
ii) Estudia la continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad y la existencia del límite de la función *f* en los puntos (0,2) y (0,1).

iii) Calcula, si existe, $df(0,1)(h_1,h_2)$.

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y-x^2>0,\ y\neq 2\}$.

D es abierto (no contiene a ningún punto de su frontera), no es cerrado, no es acotado y, por tanto, no es compacto.



ii) El punto $(0,2)\notin D$ y, por tanto, la función no es continua, derivable ni diferenciable en este punto. Sólo se puede estudiar la existencia del límite de la función:

$\left\{\left(\dfrac{1}{n},2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\not\subset D$, luego esta sucesión no es válida.

$\left\{\left(0,2+\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,2)$ y

$$\left\{f\left(0,2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{1}{n}-2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{n\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty$$

Por tanto, no existe el límite de la función *f* en el punto (0,2).

El punto $(0,1) \in \mathrm{int}D$, podemos calcular las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(y-x^2)(y-2)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{y-2}{y-x^2} - \ln(y-x^2)}{(y-2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1$$

Luego, f es derivable en (0,1).

Además, en los puntos de D las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ son funciones continuas porque están formadas por operaciones con funciones continuas y el denominador no se anula en D. Por tanto, f es diferenciable en el punto (0,1) y, como consecuencia, también es continua en (0,1) y existe el límite de f en (0,1) y vale

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = 0.$$

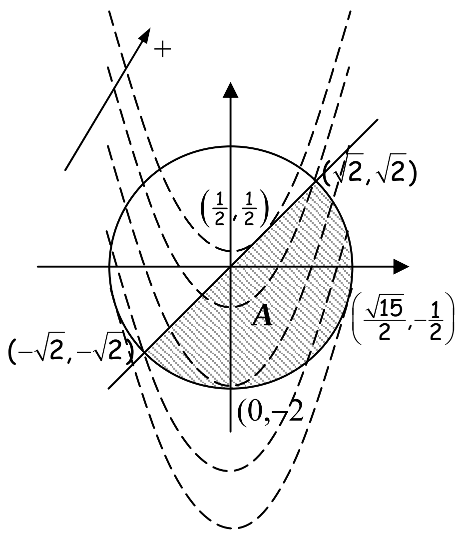
iii) Como f es diferenciable en (0,1), existe $df(0,1)(h_1,h_2)$ y es:

$$df(0,1)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)h_2 = -h_2.$$

3.- Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4,\, x \geq y\}$ y $f(x,y) = y - x^2$. Calcula los extremos locales y globales de f en A.

<u>Solución:</u>

Notar que se satisfacen las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para extremos locales condicionados e incondicionados ($f \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}^2)$).



<u>Extremos locales de f en el interior de A:</u>

Condiciones necesarias: $\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \neq 0\end{array}\right\}$

Luego, la función no tiene extremos en el interior de A.

<u>Extremos locales de f en la frontera de A:</u>

•Tramo $g^1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow 2x(-1+\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \pm 2. \\ \lambda = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}, x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Los puntos que se obtienen son: } \begin{cases} (0,2) \notin A. \\ (0,-2) \in A. \\ \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in A. \\ \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \notin A. \end{cases}$$

•Tramo $g^2(x,y) = x - y = 0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x-y)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

Luego, los candidatos a extremos locales son los puntos: (0,–2), $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y los puntos de corte $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Por el estudio de las curvas de nivel, podemos concluir que (0,–2) y $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ no son extremos locales de *f* en *A*. El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un máximo local y los puntos $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ son mínimos locales de *f* en *A*.

Como *f* es continua en *A* conjunto compacto, entonces existen el máximo y el mínimo global de *f* en *A*. Como sólo existe un máximo local, el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el máximo global, es decir,

$$\max_{x \in A} f(x) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Como hay dos mínimos locales, calculamos las imágenes:

$f\left(\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{2}\right)=-\frac{17}{4}$=-4.25 y $f(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=-\sqrt{2}-2$=-3.414,

luego el punto $\left(\frac{\sqrt{15}}{2},-\frac{1}{2}\right)$ es el mínimo global.

4.- Sea $h(x,y)=xf\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)$, donde $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$.

i) Si *f* es homogénea de grado 3, ¿es la función h homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que *f*(0,2)=8 y $f_1(0,2)=24$, ¿define la ecuación $h(x,y)-1=0$ una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto (1,0)? Calcula, si existe, $\varphi'(1)$.

Solución:

i) $\forall t>0: h(tx,ty)=txf\left(ty,\frac{t^2x^2}{tx-ty}\right)=txf\left(ty,t\frac{x^2}{x-y}\right)=t^4xf\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)=t^4h(x,y)$.

Luego, *h* es homogénea de grado 4.

ii) Aplicamos el teorema de la función implícita a la función definida por $G(x,y)=h(x,y)-1$ en el punto (1,0):

1.- $G(1,0)=h(1,0)-1=f(0,1)-1=0$.

Para calcular *f*(0,1), como *f* es homogénea de grado 3 :

$8=f(0,2)=2^3 f(0,1)=8f(0,1)\Rightarrow f(0,1)=1$.

2.- $G(x,y)=h(x,y)-1\in C^1(B(1,0))$. Calculemos las derivadas parciales de *G* y estudiemos la continuidad de sus derivadas en un entorno de (1,0):

$$G_1(x,y)=h_1(x,y)=f\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)+xf_2\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x(x-2y)}{(x-y)^2}.$$

$$G_2(x,y)=h_2(x,y)=x\left(f_1\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)+f_2\left(y,\frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x^2}{(x-y)^2}\right).$$

Como $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, la función G posee derivadas parciales continuas en un entorno del punto (1,0), ya que son operaciones con funciones continuas y el denominador no se anula en un entorno de (1,0) .

3.- $G_2(1,0) = h_2(1,0) = f_1(0,1) + f_2(0,1)$.

Para calcular $f_1(0,1)$, como f es homogénea de grado 3, entonces f_1 es homogénea de grado 2 :

$24 = f_1(0,2) = 2^2 f_1(0,1) = 4 f_1(0,1) \Rightarrow f_1(0,1) = 6$.

Ahora, por el teorema de Euler:

$xf_1(x,y) + yf_2(x,y) = 3f(x,y) \;\Rightarrow\; f_2(0,1) = 3f(0,1) = 3$.

Luego, $G_2(1,0) = h_2(1,0) = f_1(0,1) + f_2(0,1) = 9 \neq 0$.

Por tanto, la ecuación $G(x,y) = h(x,y) - 1 = 0$ sí define una función implícita $y = \varphi(x)$ en torno al punto (1,0). Además,

$$\varphi'(1) = -\frac{G_1(1,0)}{G_2(1,0)} = -\frac{h_1(1,0)}{h_2(1,0)} = -\frac{4}{9}.$$

Para calcular $G_1(1,0)$: $G_1(1,0) = h_1(1,0) = f(0,1) + f_2(0,1) = 1 + 3 = 4$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

ECONOMÍA. JUNIO DE 2010

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{x-y}$

i) Hallar y representar el dominio *D* de la función. ¿Es *D* abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de *f* en (0,0).

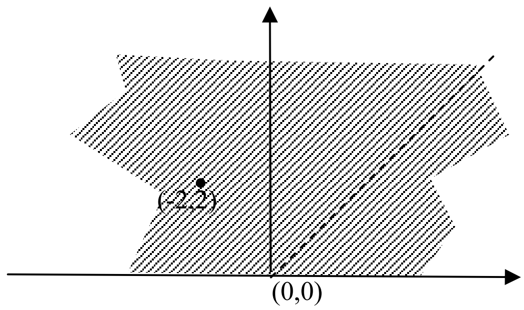
iii) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de *f* en (-2,2).

iv) Calcular el valor aproximado de f(-1'98,1'99) a través de la diferencial de *f* en el punto (-2,2).

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 0; x-y\neq 0\}$

D no es cerrado, puesto que los puntos del tramo de frontera $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=y, y\geq 0\}$ no pertenecen a *D*. Por lo tanto, tampoco es compacto.
D no es abierto (por ejemplo (1,0) es un punto de la frontera que pertenece al conjunto).
Además, *D* tampoco es acotado.



ii) $(0,0)\notin D$, por tanto, en este punto no tiene sentido estudiar la continuidad, derivabilidad ni diferenciabilidad. Sólo podemos estudiar la existencia de límite,

$\{(0,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)$, $\{(0,1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D$ y

$$\left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{-\sqrt{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty$$

Por tanto, no existe el límite de la función en el punto (0,0).

iii) $(-2,2)\in\operatorname{int}(D)$. Calculamos las derivadas parciales:

$$f_x(x,y)=\frac{-\sqrt{y}}{(x-y)^2}$$

$$f_y(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x-y)+\sqrt{y}}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{2\sqrt{y}\left(x-y\right)^2}$$

Luego, existe un entorno del punto (-2,2) en el cual las funciones derivadas parciales f_x y f_y existen y son continuas (por operaciones con funciones continuas y los denominadores no se anulan en el entorno), luego *f* es diferenciable en el punto $(-2,2)$ y, por tanto, también es derivable y continua en $(-2,2)$. Por ser continua en $(-2,2)$:

$$\lim_{(x,y)\to(-2,2)} f(x,y)=f(-2,2)=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

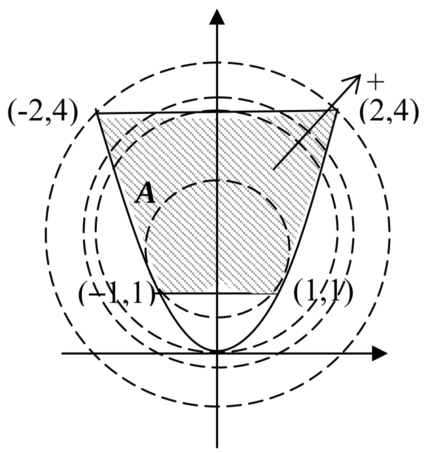
iv) $f(-1'98,1'99)\cong f(-2,2)+df_{(-2,2)}(0'02,-0'01)$,

$$df_{(-2,2)}(0'02,-0'01)=0'02f_x(-2,2)-0'01f_y(-2,2)=\frac{-0'01\sqrt{2}}{8},$$

$$f(-1'98,1'99)\cong f(-2,2)+df_{(-2,2)}(0'02,-0'01)=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{0'01\sqrt{2}}{8}=\frac{-2'01\sqrt{2}}{4}.$$

2.- Sean $f\left(x,y\right)=x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2$, $A=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 / x^2\leq y, 1\leq y\leq 4\right\}$. Calcular los extremos locales y globales de *f* relativos al conjunto *A*.

<u>Solución:</u>



Notar que se satisfacen las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para extremos locales condicionados e incondicionados ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$).

Extremos locales de *f* en el interior de *A*:

Condiciones necesarias: $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\left(y - \dfrac{3}{2}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right) \in A$$

Condiciones suficientes: $H_f(0,3/2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ y $f_{11}(0,3/2) = 2 > 0$

Por tanto, el punto (0,3/2) es un mínimo local de *f* en *A*.

Extremos locales de *f* en la frontera de *A*:

•Tramo $g^1(x,y) = y - x^2 = 0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(y - x^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2\left(y - \dfrac{3}{2}\right) + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0. \\ \lambda = 1 \Rightarrow y = 1, x = \pm 1. \end{cases}$$

Los puntos que se obtienen son: $\begin{cases} (0,0) \notin A. \\ (-1,1) \in A. \\ (1,1) \in A. \end{cases}$

•Tramo $g^1(x,y) = y - 1 = 0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(y - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2\left(y - \dfrac{3}{2}\right) + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1) \in A$$

•Tramo $g^1(x,y) = y - 4 = 0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(y-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2\left(y - \dfrac{3}{2}\right) + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,4) \in A$$

Por tanto, los puntos candidatos a extremos locales de *f* son (0,1), (0,4) y los vértices (-1,1), (1,1), (-2,4) y (2,4).

Mediante el estudio de las curvas de nivel, podemos concluir que los puntos (0,1), (0,4), (-1,1) y (1,1) no son extremos de *f* relativos a *A*. Los puntos (-2,4) y (2,4) son máximos locales de *f* relativos a *A*.

Como *f* es continua en *A* conjunto compacto, entonces existen el máximo y el mínimo global de *f* en *A*. Como sólo existe un mínimo local, el punto (0,3/2) es el mínimo global de *f* en *A*, es decir,

$$\min_{x \in A} f(x) = f\left(0, \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Como hay dos máximos locales, calculamos las imágenes:

$$f(-2,4) = \frac{41}{4} = f(2,4)$$

Luego, los dos puntos (-2,4) y (2,4) son máximos globales de *f* en *A*.

3.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = \ln\sqrt{xy + y^2}$

ii) $z = sen(y^2x - 3xy)$

iii) $z = f\left(x^3 - y^2, x^3y^2\right) g\left(x\sqrt{y}\right)$ donde $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$.

Solución:

i)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{y}{2\sqrt{xy+y^2}}}{\sqrt{xy+y^2}}=\frac{1}{2(x+y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\dfrac{x+2y}{2\sqrt{xy+y^2}}}{\sqrt{xy+y^2}}=\frac{x+2y}{2(xy+y^2)}$$

ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(y^2-3y)\cos(y^2x-3xy)$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2xy-3x)\cos(y^2x-3xy)$$

iii)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[3x^2f_1(x^3-y^2,x^3y^2)+3x^2y^2f_2(x^3-y^2,x^3y^2)\right]g\left(x\sqrt{y}\right)+$$
$$+\sqrt{y}g'\left(x\sqrt{y}\right)f(x^3-y^2,x^3y^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[-2yf_1(x^3-y^2,x^3y^2)+2x^3yf_2(x^3-y^2,x^3y^2)\right]g\left(x\sqrt{y}\right)+$$
$$+\frac{x}{2\sqrt{y}}g'\left(x\sqrt{y}\right)f(x^3-y^2,x^3y^2)$$

4.-

i) Sea la función $f(x,y)=y^2-2$. Define la ecuación $f(x,y)=0$ una función implícita de la forma $y=\varphi(x)$ en torno al punto $\left(1,\sqrt{2}\right)$. En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

ii) Sea la función $f(x,y)=x^2 h\left(\frac{y^3}{x},\frac{x^3}{y}\right)$ con $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ y homogénea de grado 2.

¿Es *f* una función homogénea? Si la respuesta es afirmativa, indica su grado.

Solución:

i) Aplicamos el teorema de la función implícita a la función *f* en el punto $\left(1,\sqrt{2}\right)$:

1.- $f\left(1,\sqrt{2}\right)$=2-2=0.

2.- $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, porque es una función polinómica.

3.- $f_2\left(1,\sqrt{2}\right)\neq 0$?

Derivando: $f_2(x,y)=2y\Rightarrow f_2\left(1,\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\neq 0$.

Por tanto, la ecuación $f(x,y)=0$ sí define una función implícita de la forma $y=\varphi(x)$ en torno al punto $\left(1,\sqrt{2}\right)$. Además,

$$\varphi'(1)=-\frac{f_1(1,\sqrt{2})}{f_2(1,\sqrt{2})}=-\frac{0}{2\sqrt{2}}=0$$

ya que $f_1(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

ii)

$$\forall t>0: f(tx,ty)=t^2x^2h\left(\frac{t^3y^3}{tx},\frac{t^3x^3}{ty}\right)=t^2x^2h\left(t^2\frac{y^3}{x},t^2\frac{x^3}{y}\right)=$$

$$=t^2x^2\left(t^2\right)^2h\left(\frac{y^3}{x},\frac{x^3}{y}\right)=t^6x^2h\left(\frac{y^3}{x},\frac{x^3}{y}\right)=t^6f(x,y).$$

Por tanto, *f* es homogénea de grado 6.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. FEBRERO DE 2006

1.- Sea la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{(x-1)y}}{x-y}$$

i) Calcular y representar *D*, el dominio de *f*.

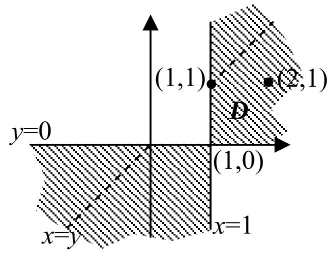
ii) Indicar razonadamente si *D* es abierto, cerrado o compacto.

iii) Estudiar la existencia de límite, continuidad y derivabilidad de *f* en los puntos (1,1) y (2,1).

iv) ¿Es *f* diferenciable en (2,1)? En caso afirmativo, aproximar el valor de *f*(2'05,0'9) – *f*(2,1).

Solución:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ (x-1)y\geq 0,\ x-y\neq 0\}$



ii) $\mathrm{fr}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y=0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x=y, x\notin[0,1]\right\}$.

D no es un conjunto abierto porque contiene puntos de la frontera y tampoco es cerrado porque no contiene a todos los puntos de fr(*D*).

D no es acotado porque no existe una bola de radio finito, que contenga a *D* y por lo tanto tampoco es compacto por no ser acotado (o por no ser cerrado).

iii) (1,1) es punto de acumulación del dominio, por lo tanto tiene sentido preguntarse por el límite en dicho punto:

Consideremos por ejemplo la sucesión dentro del dominio $\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)$

y veamos su imagen:

$$\left\{f\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sqrt{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$$

Como no existe el límite de la sucesión imagen, el límite de f en el punto (1,1) no existe.

$(1,1)\notin D$, lo que quiere decir que f no es continua, derivable y diferenciable en (1,1).

Punto (2,1):

$\sqrt{(x-1)y}$ es continua en el punto (2,1) por ser composición de funciones continuas, donde la cantidad subradical es no negativa en dicho punto.

Al ser f un cociente de funciones continuas con denominador no nulo en el punto (1,2), f es continua en dicho punto.

La continuidad de f en (1,2) implica que

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = f(2,1) = 1\,.$$

Aplicando las reglas del cálculo diferencial se tiene,

$$f_1(x,y) = \frac{\frac{y(x-y)}{2\sqrt{(x-1)y}} - \sqrt{(x-1)y}}{(x-y)^2} \quad \text{y} \quad f_1(2,1) = -\frac{1}{2}\,.$$

$$f_2(x,y) = \frac{\frac{(x-1)(x-y)}{2\sqrt{(x-1)y}} + \sqrt{(x-1)y}}{(x-y)^2} \quad \text{y} \quad f_2(2,1) = \frac{3}{2}\,.$$

Lo cual quiere decir que f es derivable en el punto (2,1), es decir, existen las derivads parciales de f en el punto (1,2).

iv) $f \in \mathcal{C}^1(B(2,1))$, lo que quiere decir que f posee derivadas parciales continuas en un entorno del punto (2,1) (una bola por ejemplo). Por tanto f es diferenciable en (1,2) y tiene sentido hablar de la diferencial en este punto:

$$df(2,1)(h_1,h_2) = f_1(2,1)h_1 + f_2(2,1)h_2 = -\frac{1}{2}h_1 + \frac{3}{2}h_2 .$$

$f(2+h_1,1+h_2) - f(2,1) \simeq df(2,1)(h_1,h_2)$, de donde:

$$f(2'05,0'9) - f(2,1) \simeq -\frac{0'05}{2} + \frac{3(-0'1)}{2} = -0,175 .$$

2.- Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y} g\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, siendo $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ homogénea de grado 3 y $g(2)=2$.

i) ¿Es f homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcular $g'(2)$ aplicando la fórmula de Euler a la función f en el punto (2,2).

iv) Comprobar que la ecuación $f(x,y)=4$ define implícitamente alrededor del punto (2,2) la función $y=\varphi(x)$; calcular $\varphi'(2)$.

Solución:

Notar que Dom f es un cono.

i) $\forall t>0$ se tiene que $f(tx,ty) = \dfrac{t^2x^2}{ty} g\left(\dfrac{t^2x^2}{ty}\right) = t\left(\dfrac{x^2}{y}\right)t^3 g\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = t^4 f(x,y)$.

f es homogénea de grado 4

ii) Calculando las derivadas parciales de f en el punto (2,2):

$$f_1(x,y) = \frac{2x}{y} g\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{2x^3}{y^2} g'\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{y} \quad f_1(2,2) = 4 + 4g'(2)$$

$$f_2(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} g\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^4}{y^3} g'\left(\frac{x^2}{y}\right) \quad \text{y} \quad f_2(2,2) = -2 - 2g'(2)$$

y aplicando Euler:

$$4\left(\frac{x^2}{y} g\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) = x\left(\frac{2x}{y} g\left(\frac{x^2}{y}\right) + \frac{2x^3}{y^2} g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) + y\left(-\frac{x^2}{y^2} g\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^4}{y^3} g'\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)$$

en el punto (2,2):

$16 = 8 + 8g'(2) - 4 - 4g'(2)$
$16 = 4 + 4g'(2)$
$g'(2) = 3.$

iii) Apliquemos el teorema de la función implicita a la función $F(x,y)=f(x,y)$-4 en torno al punto (2,2) (podemos elegir una bola B((2,2),r) , para algún r>0, por ejemplo):

a) $F(2,2)$-4=2g(2)-4=0.

b) F es continua en un entorno de (2,2) por ser suma, producto, composición y división de funciones continuas, con denominador no nulo, en un entorno del punto (2,2).

c) $F_2(x,y) = -\frac{x^2}{y^2} g\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{x^4}{y^3} g'\left(\frac{x^2}{y}\right)$ es continua en un entorno del punto (2,2), argumentando como antes (notar que g´(x) es continua en R por hipótesis).

d) $F_2(2,2) = -g(2) - 2g'(2) = -8 \neq 0$

Por tanto, la ecuación $f(x,y)=4$ en torno al punto (2,2) define a la variable y como función implicita de x . Haciendo $y=\varphi(x)$ se tiene:

$$\varphi'(2) = -\frac{F_1(2,2)}{F_2(2,2)} = -\frac{4 + 4g'(2)}{-8} = 2 .$$

3.- Sean $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 - x \leq 1; y^2 + x \leq 1\right\}$ y $f(x,y) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2$. Calcular los extremos locales de f en el conjunto A; calcular asimismo los extremos globales de f en A.

<u>Solución</u>:

Notar que se verifican las hipótesis de los teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos locales. Todas las funciones envueltas son de clase C

<u>Extremos de f en Int(A)</u>

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-3=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y=0\end{array}\right\}(x,y)=\left(\dfrac{3}{2},0\right)\notin A$$

Por tanto f no posee extremos en el Int(A).

Extremos de f en fr(A).

Buscando los extremos condicionados en cada trozo de frontera:

• $g^1(x,y)=y^2+x-1$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+\lambda\left(y^2+x-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-3+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y^2+x-1=0\end{array}\right\}(1,0)\in A,\lambda=1$$

$$\Delta(1,0,1)=\left|\begin{array}{ccc}2&0&1\\0&2+2\lambda&2y\\1&2y&0\end{array}\right|_{(1,0,1)}=\left|\begin{array}{ccc}2&0&1\\0&4&0\\1&0&0\end{array}\right|=-4$$

Así que , (1,0) es un mínimo local de f condicionado a fr(A) (o local relativa a fr(A)).

• $g^2(x,y)=y^2-x-1$:

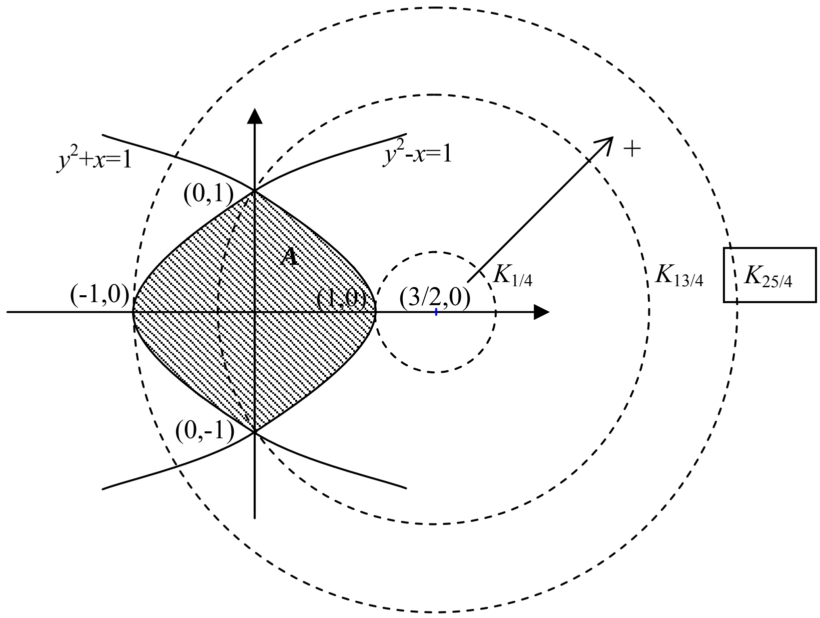
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2+\lambda\left(y^2-x-1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-3-\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y^2-x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(-1,0)\in A,\lambda=-5\\ \left(1,\sqrt{2}\right)\notin A,\left(1,-\sqrt{2}\right)\notin A\end{cases}$$

$$\Delta(-1,0,-5)=\left|\begin{array}{ccc}2&0&-1\\0&2+2\lambda&2y\\-1&2y&0\end{array}\right|_{(-1,0,-5)}=\left|\begin{array}{ccc}2&0&-1\\0&-8&0\\-1&0&0\end{array}\right|=8$$

Por tanto, (-1,0) es un máximo de f condicionadoa a fr(A).

Estudiando las curvas de nivel de f:



Podemos concluir que :

(1,0) es un mínimo local y (-1,0) es un máximo local de f relativo a A.

Al ser f una función continua y A un conjunto compacto, por el el teorema de Wierstrass, existen los extremos globales de f relativo a A y por supuesto, deben coincidir con los anteriores.

(1,0) es mínimo global , f(1,0)= 1/4 y (-1,0) es un máximo global, f(-1,0)= 25/4.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2006

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x^2+y^2)(x^2+y)}$.

i) Hallar el dominio de f y representarlo. ¿Es este dominio cerrado?, ¿y abierto?, ¿y compacto?

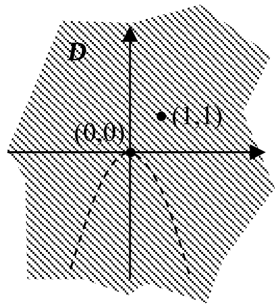
ii) Estudiar la continuidad de f en (1,1). Hallar $f_1(1,1)$.

iii) Estudiar la existencia de límite y la continuidad de f en (0,0).

<u>Solución</u>:

i)

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\neq 0 \ \wedge \ x^2+y\neq 0\right\}$$
$$=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\neq -x^2\right\}=\mathbb{R}^2-\left\{(x,y)\,/\,y=-x^2\right\}$$



$$fr(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\ x^2+y=0\right\}$$

D no es cerrado porque no contiene a todos los puntos de la frontera, es decir $fr(D)\not\subset D$

Es abierto porque no contiene puntos de la frontera, es decir $D\cap fr(D)=\varnothing$

D no es acotado porque no existe una bola de radio finito, que contenga a D y por lo tanto tampoco es compacto por no ser acotado (o por no ser cerrado).

iii) Notar que f es una función racional, (cociente de polinomios) y el punto (1,1) no anula el denominador, por lo tanto, por propiedades de las funciones continuas, se tiene que f es continua en (1,1).

Aplicando las reglas del cálculo de derivadas se tiene:

$$f_1(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x^2+y)-(x-y)\left[2x(x^2+y)+2x(x^2+y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2(x^2+y)^2} \qquad \text{y } \ f_1(1,1)=\frac{1}{4}.$$

iii) (0,0) es punto de acumulación del dominio. Por lo tanto, tiene sentido preguntarse por el límite de f en dicho punto. Para estudiar la existencia del límite en dicho punto, consideremos, por ejemplo, la sucesión $x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0)$ (dentro del dominio de f),

La imagen de la sucesión $f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \frac{1/n}{1/n^4} = n^3 \to \infty$ no converge y por lo tanto, f no tiene límite en el punto $(0,0)$.

Como el punto (0,0) no está en el dominio, f no es continua en (0,0).

2.- Hallar las derivadas de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x-y)}$

ii) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^3 - y^2 x}\right)$

iii) $z = g(x-y, x^3 y)$, donde $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

<u>Solución</u>:

Aplicando las reglas de la derivación del cálculo diferencial, se obtiene:

i) $$f_1(x,y) = \frac{\cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x-y)\sin(x+y)}{\cos^2(x-y)}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x-y)\sin(x+y)}{\cos^2(x-y)}$$

ii) $$f_1(x,y) = \frac{3x^2 - y^2}{2\left(x^3 - y^2 x\right)}$$

$$f_2(x,y) = \frac{-xy}{x^3 - y^2 x}$$

iii) $$\frac{\partial z}{\partial x} = g_1(x-y, x^3 y) + g_2(x-y, x^3 y) 3x^2 y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -g_1(x-y, x^3 y) + g_2(x-y, x^3 y) x^3$$

3.- Sea $F(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$, donde f, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, f y g son homogéneas de grado 3 y 2 respectivamente, y $g(x,y)\neq 0$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

i) Aplicando la definición, probar que F es homogénea y decir su grado.

ii) Sabiendo que $f(1,1)=0$ y $f_1(1,1)=5$, ¿define la ecuación $F(x,y)=0$ a la variable y como función implícita de x ($y=\varphi(x)$) en torno al punto (2,2)? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(2)$.

<u>Solución</u>:

i) $\forall t>0:\quad F(tx,ty)=\dfrac{f(tx,ty)}{g(tx,ty)}=\dfrac{t^3 f(x,y)}{t^2 g(x,y)}=tF(x,y)$

Así que F es homogénea de grado 1.

ii) Apliquemos el teorema de la función implicita a la función $F(x,y)=0$ en torno al punto (2,2) (podemos elegir una bola B((2,2),r) , para algún r>0, por ejemplo):

a) $F(2,2)=\dfrac{f(2,2)}{g(2,2)}=\dfrac{2^3 f(1,1)}{g(2,2)}=0$ (f es homogénea de grado 3).

b) F es continua en todo $\mathbb{R}^2$, en particular en un entorno de (2,2) por ser cociente de funciones continuas con denomiador no nulo (por hipótesis, $f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g(x,y)\neq 0$ $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$)

c) $F_2(x,y)=\dfrac{f_2(x,y)g(x,y)-g_2(x,y)f(x,y)}{g^2(x,y)}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, en particular en un entorno de (2,2), por ser operaciones aritméticas de funciones continuas con denomiador no nulo.

d) $F_2(2,2)=\dfrac{f_2(2,2)g(2,2)-g_2(2,2)f(2,2)}{g^2(2,2)}=-\dfrac{20}{g(2,2)}\neq 0$

$f(2,2)=2^3 f(1,1)=0$ (f es homogénea de grado 3).

$f_1(2,2)=2^2 f_1(1,1)=20$ (f_1 es homogénea de grado 2).

Aplicando Euler:

$3f(2,2)=2f_1(2,2)+2f_2(2,2)\Rightarrow 0=40+2f_2(2,2)\Rightarrow f_2(2,2)=-20$.

Por tanto, la ecuación $F(x,y)=0$ define a y como función implicita de x (hagamos $y=\varphi(x)$) en torno al punto (2,2) y se tiene :

$$F_1(2,2)=\frac{f_1(2,2)g(2,2)-g_1(2,2)f(2,2)}{g^2(2,2)}=\frac{20}{g(2,2)}$$

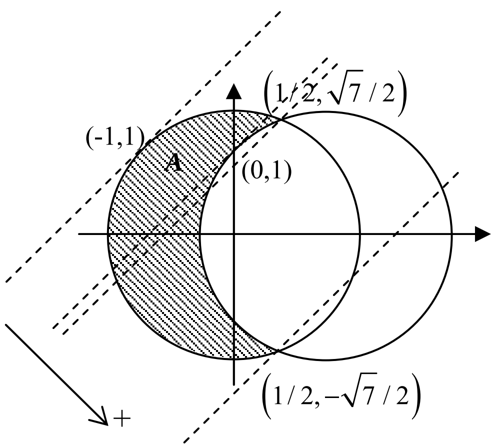
con lo cual

$$\varphi'(2)=-\frac{F_1(2,2)}{F_2(2,2)}=1$$

4.- Sean $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 2,(x-1)^2+y^2\geq 2\right\}$ y la función $f(x,y)=x\text{-}y$.

Calcular los extremos locales de la función f en el conjunto A; calcular asimismo los extremos globales de f en A.

<u>**Solución**</u>**:**



Notar que se verifican las hipótesis de los teoremas que dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos locales (condicionados e incondicionados). Todas las funciones envueltas son de clase C

i) <u>Extremos de f en Int(A)</u>:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1\neq 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-1\neq 0\end{array}\right\}$$

Por tanto f no posee extremos en el Int(A), porque las derivadas parciales de f no se anulan en Int(A).

Extremos de f en fr(A):

•En el trozo de arco sobre la circunferencia $g^1(x,y)=x^2+y^2-2=0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x-y+\lambda\left(x^2+y^2-2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-1+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(-1,1)\in A,\lambda=\dfrac{1}{2}\\ (1,-1)\notin A\end{cases}$$

$$\Delta\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x\\ 0 & 2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}_{\left(-1,1,\frac{1}{2}\right)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-8$$

Así que ,(-1,1) es mínimo local de f sobre fr(A) (o local relativo a fr(A)).

• En el trozo de arco sobre la circunferencia $g^2(x,y)=(x-1)^2+y^2-2=0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x-y+\lambda\left((x-1)^2+y^2-2\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda(x-1)=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-1+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(0,1)\in A,\lambda=\dfrac{1}{2}\\ (2,-1)\notin A\end{cases}$$

$$\Delta\left(0,1,\frac{1}{2}\right)=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x-2\\ 0 & 2\lambda & 2y\\ 2x-2 & 2y & 0\end{vmatrix}_{\left(0,1,\frac{1}{2}\right)}=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-8$$

Así que, (0,1) es mínimo local de f sobre fr(A) (o local relativo a fr(A)).

Un estudio de las curvas de nivel de f, permite concluir que:

(-1,1) es un mínimo local de f relativo a fr(A) y a A.

(0,1) es un mínimo local de f relativo a fr(A), pero no a A.

En los puntos de intersección $\left(\mathbf{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)$ **y** $\left(\mathbf{\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)$ pertenecientes a la frontera de A, son máximos locales relativo a A.

ii) Al ser f una función continua en un compacto A, existen los extremos globales de f en A (por el teorema de Wierstrass) y las curvas de nivel permiten concluir que :

$f(-1,1)=-2$ (mínimo global).

$$f\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$$ (máximo global).

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. ENERO DE 2007

1.- Sea $f(x,y) = \dfrac{x-1}{(y-1)\sqrt{y-1+x^2}}$.

i) Halla el dominio de la función f y represéntalo. ¿Es abierto?

ii) Estudia la existencia del límite de f en (1,1).

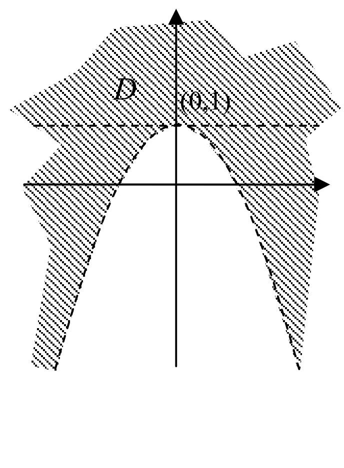
iii) Estudia la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en (1,2). Aproxima, si es posible, el valor de f(1'01,1'98).

Solución:

i) $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq 1, y-1+x^2 > 0\right\}$.

$fr(D) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 1 \text{ o } y-1+x^2 = 0\right\}$

El dominio de f está formado por los puntos del plano que no anulan el denominador y hacen la cantidad subradical positiva. Notar que D es un conjunto abierto porque coincide con su interior ó porque no contiene a ninguno de los puntos de la frontera.



ii) $(1,1) \notin D$, pero es un punto de acumulación del dominio. Consideremos, por ejemplo las siguientes sucesiones dentro del dominio y sus respectivas imágenes:

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1) \;\text{ y }\; \left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1) \;\text{ y }\; \left\{f\left(1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1$$

Como hemos encontrado dos sucesiones diferentes, de puntos del dominio, que se acercan a (1,1) y tales que sus imágenes convergen hacia números distintos, no existe el límite de f en el punto (1,1).

iii) f es una función continua en (1,2) por ser producto, composición y cociente de funciones continuas en un punto en que el denominador no se anula y la cantidad subradical se mantiene positiva.

Para ver si es derivable, calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y-1)\sqrt{y-1+x^2} - \dfrac{x(x-1)(y-1)}{\sqrt{y-1+x^2}}}{\left((y-1)\sqrt{y-1+x^2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-(x-1)\left(\sqrt{y-1+x^2} + \dfrac{y-1}{2\sqrt{y-1+x^2}}\right)}{\left((y-1)\sqrt{y-1+x^2}\right)^2}$$

Y evaluando, se obtiene $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 0$, es decir existen en el punto (1,2), luego f es derivable en ese punto. Además, las derivadas parciales son funciones continuas en un entorno del punto (1,2) (las parciales son suma, producto, composición y cociente de funciones continuas en un entorno en los que el denominador no se anula y la cantidad subradical se mantiene positiva).

Al ser f diferenciable en (1,2), podemos realizar la aproximación por la diferencial

$$df(1,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)h_2 = \frac{h_1}{\sqrt{2}}$$

Y por lo tanto

$$f(1'01,1'98) \cong f(1,2) + df(1,2)(0'01,-0'02) = \frac{0,01}{\sqrt{2}}.$$

2.- Calcula las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y)=\text{sen}\left((x-y)\text{e}^{x}\right)$.

ii) $f(x,y)=\text{e}^{x^2}\cos y+y^2\ln y$.

iii) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$.

iv) $z=f(x+3,y-2)g(xy^2)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

<u>Solución</u>:

Un cálculo con las reglas de la derivación se obtiene:

i) $f(x,y)=\sin\left((x-y)\text{e}^{x}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(\text{e}^x+(x-y)\text{e}^x)\cos((x-y)\text{e}^x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\text{e}^x\cos((x-y)\text{e}^x)$$

ii) $f(x,y)=\text{e}^{x^2}\cos y+y^2\ln y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xe^{x^2}\cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-e^{x^2}\sin y+2y\ln y+y$$

iii) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^3)^2}}$$

iv) $z=f(x+3,y-2)g(xy^2)$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=f_1(x+3,y-2)g(xy^2)+f(x+3,y-2)g'(xy^2)y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = f_2(x+3, y-2)g(xy^2) + f(x+3, y-2)g'(xy^2)2xy$$

3.- Sea $F(x,y) = xy^3 + f(x^2 - y^2, xy)$, donde $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Se sabe que f es una función homogénea de grado 2 y que $f(0,1)=1$, $f_1(0,1)=0$ y $f_2(0,1)=2$.

i) ¿Es F homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcula $F(2,2)$ y $F_2(2,2)$.

iii) Sea $G(x,y)=F(x,y)-k$. ¿Para qué valores de k define la ecuación $G(x,y)=0$ a y como función implícita de x, $y = \varphi(x)$, en torno al punto (1,1)? Para esos valores de k calcula $\varphi'(1)$.

__**Solución**__:

Notar que Dom F es $\mathbb{R}^2$, que un cono.

i) $F(tx,ty) = t^4xy^3 + f(t^2x^2 - t^2y^2, t^2xy) = t^4xy^3 + t^4 f(x^2 - y^2, xy) =$

$= t^4F(x,y)$, por tanto, F es homogenea de grado 4.

ii) $F(2,2)=16+f(0,4)$ y como f es homogenea de grado 2, $f(0,4)=4^2f(0,1)=16$; se obtiene, $F(2,2)=32$.

$$F_2(x,y) = 3xy^2 - 2yf_1(x^2 - y^2, xy) + xf_2(x^2 - y^2, xy)$$
$$F_2(2,2) = 24 - 4f_1(0,4) + 2f_2(0,4)$$

Como f_1 y f_2 son homogeneas de grado 1:

$f_1(0,4)=4f_1(0,1)=0$

$f_2(0,4)=4f_2(0,1)=8$

con lo cual $F_2(2,2) = 24 - 4f_1(0,4) + 2f_2(0,4)$=40

iii) Apliquemos el teorema de la función implicita a la función G(x,y) en torno al punto (1,1):

1- $G(1,1)=F(1,1)-k=1+f(0,1)-k=2-k=0 \Rightarrow k=2$.

2- $G(x,y)=F(x,y)-2$ es continua en un entorno del punto (1,1):

Al ser $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, que quiere decir que f posee derivadas parciales continuas en el plano, entonces f diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Y por tanto continua en $\mathbb{R}^2$. Como G es suma, producto y composición de funciones continuas en el plano, G es continua en todo $\mathbb{R}^2$, en particular en cualquier entorno del punto (1,1).

3- $G_2(x,y)=F_2(x,y)=3xy^2-2yf_1(x^2-y^2,xy)+xf_2(x^2-y^2,xy)$ es continua en un entorno del punto (1,1):

f_1(x,y) y f_2(x,y) son continuas en $\mathbb{R}^2$ porque $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Argumentando como antes, se demuestra que es continua en cualquier entorno de (1,1).

4- $G_2(1,1)=F_2(1,1)=(1/2)^3F_2(2,2)-5\neq 0$ (F_2 es homogenea de grado 3).

Por lo tanto podemos asegurar que para k-2, la ecuación G(x,y) =0 define a la variable y como función implicita de x en torno al punto (1,1), (hagamos $y=\varphi(x)$) , con lo cual se tiene:

$$\varphi'(1)=-\frac{G_1(1,1)}{G_2(1,1)}=-\frac{3}{5}$$

$$G_1(x,y)=y^3+f_1(x^2-y^2,xy)2x+f_2(x^2-y^2,xy)y$$
$$G_1(1,1)=1+2f_1(0,1)+f_2(0,1)=3$$

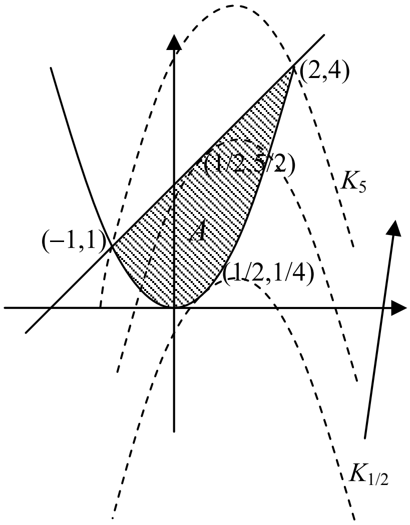
4.- Sean el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\leq y, x-y\geq -2\}$ y la función $f(x,y)=(x-1)^2+y$.

i) Calcula los extremos locales de f en A.

ii) Calcula los extremos globales de f en A.

<u>Solución</u>:

i)



Notar que se verifican las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para el cálculo de los extremos locales de f en A. De hecho $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. En el interior de A no hay extremos, como puede verse en el dibujo o usando las condiciones necesarias:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2x-2=0 \\ f_2(x,y) &= 1\neq 0 \end{aligned}$$

(no se obtienen puntos que anulen ambas derivadas parciales).

Busquemos los extremos en la frontera de A:

En el tramo parábolico ($g_1(x,y)=x^2-y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y+\lambda(x^2-y)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0\end{aligned}\right\}\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\lambda=1.$$

En el segmento ($g_2(x,y)=x-y+2\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y+\lambda(x-y+2)$$

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x-y+2=0\end{aligned}\right\}\quad \left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right),\lambda=1.$$

Del estudio de las curvas de nivel, se desprende que:

$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ minimo local y los puntos (1,1) y (2,4) son máximos locales de f en A, mientras que $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5}\right)$ no es extremo.

iii) Como f es continua y A es un compacto, por el teorema de Wierstrass, $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ y $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$, existen.

Las curvas de nivel permiten concluir que $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ es minimo global , siendo $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$ y los puntos (1,1) y (2,4) son maximos globales porque $f(1,1)=f(2,4)=5$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2007

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x-y^2}}{x^2+y}$.

i) Halla el dominio de la función *f* y represéntalo. ¿Es abierto, cerrado, acotado, compacto?

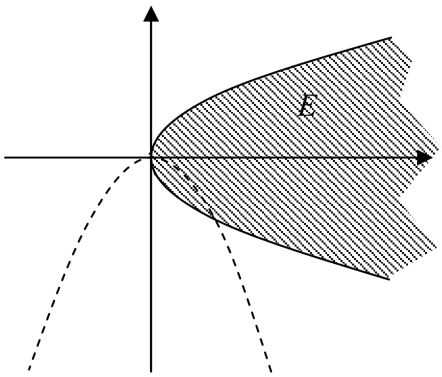
ii) Estudia la existencia del límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de *f* en (0,0) y (2,1).

iii) Aproxima, si es posible, *f*(1'98,1'05) por medio de la diferencial de *f* en (2,1).

<u>Solución</u>:

i) $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}/\,x-y^2\geq 0, x^2+y\neq 0\right\}$

$$fr(E)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\ /\ x^2+y=0,\ 0\leq x\leq 1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\ /\ x-y^2=0\right\}$$



E no es cerrado porque no contiene a todos los puntos de fr(E). Tampoco es abierto porque contiene algunos puntos de la frontera. E no es acotado porque no existe una bola de radio finito, que contenga a E y por lo tanto tampoco es compacto por no ser acotado (o por no ser cerrado).

ii) $(0,0)\notin E$, pero es un punto de acumulación de E. Por lo tanto tiene sentido preguntarse por el límite de f en (0,0). Consideremos ,por ejemplo, la sucesión dentro del dominio $\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}\xrightarrow{n\to\infty}(0,0)$ y estudiemos su imagen:

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n^2}}\right\}=\left\{\frac{n^2}{\sqrt{n}}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

La sucesión imagen no es convergente, por lo tanto no existe el límite de f en (0,0).

Como el punto (0,0) no está en el domonio de E, f no puede ser continua, derivable o diferenciable en este punto.

• f es continua en (2,1) por ser composición y cociente de funciones continuas en el punto (2,1) (la cantidad subradical es no negativa y el denomnador no se anula en dicho punto).

Aplicando las reglas de derivación, se obtiene (notar que (2,1) es punto interior de E):

$$f_x(x,y)=\frac{\frac{x^2+y}{2\sqrt{x-y^2}}-2x\sqrt{x-y^2}}{\left(x^2+y\right)^2}$$

con $f_x(2,1)=-\frac{3}{50}$

$$f_y(x,y)=\frac{-\frac{y(x^2+y)}{\sqrt{x-y^2}}-\sqrt{x-y^2}}{\left(x^2+y\right)^2}$$

con $f_y(2,1)=-\frac{6}{25}$

Como existen las derivadas parciales de f en (2,1), f es derivable en (2,1).

Argumentando com antes (propiedades de las funciones continuas), se observa que las derivadas parciales son continuas en un entorno del punto (2,1), lo que nos permite afirmar que f es diferenciable en (2,1).

iii) Como f es diferenciable en (2,1), podemos aproximar, f(1'98,1'05) por medio de la diferencial:

$$f(x+h, y+k) \cong f(x, y) + df(x, y)(h, k)$$

$$f(2-0'02, 1+0'05) \cong f(2,1) + f_x(2,1)(-0'02) + f_y(2,1)(0'05)$$

$$f(1'98, 1'05) \cong \frac{1}{5} + \frac{0'06}{50} - \frac{0'3}{25} = \frac{9'46}{50}$$

2.– Calcula las funciones derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x, y) = \sqrt{y^2 x - 1}$

ii) $f(x, y) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)$

iii) $f(x, y) = \ln \sqrt[3]{1 + x^2 + y^2}$

iv) $z = f(y^2, x^2) g(y^2)$, siendo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solución:

Un cálculo con las reglas de la derivación se obtiene:

i) $f(x, y) = \sqrt{y^2 x - 1}$

$$f_1(x, y) = \frac{y^2}{2\sqrt{y^2 x - 1}}$$

$$f_2(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{y^2x-1}}$$

ii) $f(x,y) = \sin^2\left(\frac{x}{y}\right)$

$$f_1(x,y) = \frac{2}{y}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_2(x,y) = -\frac{2x}{y^2}\sin\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

iii) $f(x,y) = \ln\sqrt[3]{1+x^2+y^2}$

$$f_1(x,y) = \frac{\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}} = \frac{2x}{3(1+x^2+y^2)}$$

$$f_2(x,y) = \frac{\dfrac{2y}{3\sqrt[3]{(1+x^2+y^2)^2}}}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}} = \frac{2y}{3(1+x^2+y^2)}$$

iv) $z = f(y^2,x^2)g(y^2)$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$z_x = 2xf_2(y^2,x^2)g(y^2)$$

$$z_y = 2yf_1(y^2,x^2)g(y^2) + 2yf(y^2,x^2)g'(y^2)$$

3.–Sea $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ homogénea de grado 2 donde $g(1)\neq 0$. Sea la siguiente función $f(x,y) = yg\left(\frac{x}{y}\right) - xg\left(\frac{y}{x}\right)$.

i) ¿Es f homogénea?, ¿de qué grado?

ii) ¿Define la ecuación $f(x,y)$-$g(x)$+$g(y)$=0 a la variable y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto (1,1)? Calcula $\varphi'(1)$.

Solución:

Notar que Dom f, es un cono.

i) *Si t*>0 se tiene

$$f(tx,ty)=tyg\left(\frac{tx}{ty}\right)-txg\left(\frac{ty}{tx}\right)=tyg\left(\frac{x}{y}\right)-txg\left(\frac{y}{x}\right)=$$

$$=t\left(yg\left(\frac{x}{y}\right)-xg\left(\frac{y}{x}\right)\right)=tf(x,y)$$

por tanto, f es homogenea de grado 1.

ii) Hagamos $H(x,y)=f(x,y)-g(x)+g(y)=yg\left(\frac{x}{y}\right)-xg\left(\frac{y}{x}\right)-g(x)+g(y)$. Apliquemos el teorema de la función implicita a la función H(x,y) en torno al punto (1,1):

1− $H(1,1)=f(1,1)-g(1)+g(1)=g(1)-g(1)-g(1)+g(1)=0$

2− $H(x,y)=f(x,y)-g(x)+g(y)$ es continua en un entorno del punto(1,1) :

Como $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $H(x,y)$ es suma, producto y composicion de funciones continuas entorno al punto (1,1). Por propiedades de las funciones continuas, $H(x,y)$ es continua en un entorno del punto(1,1)

3− $H_2(x,y)$ es continua en un entorno de (1,1).:

$H_2(x,y)=g\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}g'\left(\frac{x}{y}\right)-g'\left(\frac{y}{x}\right)+g'(y)$ y como $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (g´(x) es continua en $\mathbb{R}$), argumentando como antes deducimos que $H_2(x,y)$ es continua en un entorno de (1,1).

4− $H_2(1,1)=g(1)-g'(1)-g'(1)+g'(1)=g(1)-g'(1)$.

g es homogénea de grado 2, por el teorema de Euler, se desprende que :

$$1 \cdot g'(1) = 2 \cdot g(1)$$

y por tanto, $H_2(1,1) = -g(1) \neq 0$.

Con lo cual, la ecuación $H(x,y)=f(x,y)-g(x)+g(y)=0$ define a la variable y como función imlicita de x en torno al punto ($y = \varphi(x)$) .

De donde, $\varphi'(1) = -\dfrac{H_1(1,1)}{H_2(1,1)} = -\dfrac{g(1)}{-g(1)} = 1$

$$H_1(x,y) = g'\left(\frac{x}{y}\right) - g\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} g'\left(\frac{y}{x}\right) - g'(x)$$

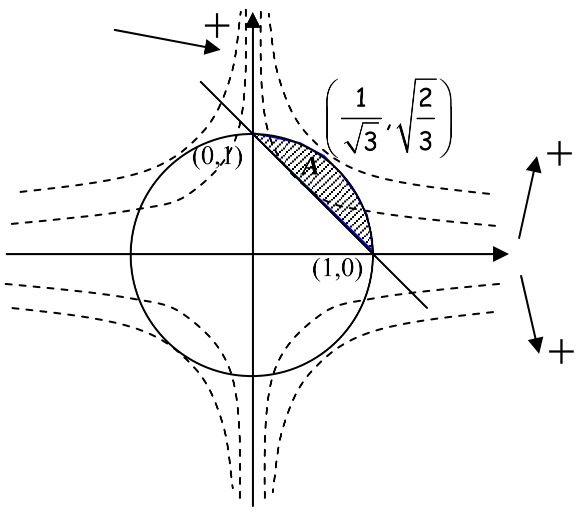
$$H_1(1,1) = g'(1) - g(1) + g'(1) - g'(1) = g'(1) - g(1) = g(1).$$

4.– Sean el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la función $f(x,y) = xy^2$.

i) Calcula los extremos locales de f en A.

ii) Calcula los extremos globales de f en A.

<u>Solución</u>:



i) Notar que se verifican las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para el cálculo de los extremos locales de f en A. De hecho $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Extremos en Int(A):

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,0) \in A \Rightarrow (1,0).$$

El único punto de la forma (x,0) en A es (1,0), pero no está en el interior de A. Por lo tanto, nohay extremos locales de f relativo a Int(A).

Extremos en fr(A) (relativo a fr(A)):

En el trozo de arco, sobre la circunferencia $g_1(x,y)=x^2+y^2-1=0$:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2xy + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} (1,0) \in A,\ (-1,0) \notin A,\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \in A,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \notin A,\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \notin A \text{ eta } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \notin A.$$

En el segmento sobre la recta $g_2(x,y)=x+y-1=0$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x + y - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y^2 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2xy + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in A, (1,0) \in A.$$

Quedándonos sólo con los puntos que están en A y utilizando las curvas de nivel, podemos concluir que :

Los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos locales relativos a fr(A) y a A.

$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. es máximo local relativo a fr(A) pero no a A.

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.es máximo local relativo a fr(A) y a A.

ii) f es una función continua en el compacto A. Por el teorema de Wierstrass existen los extremos globales de f en A:

De las curvas de nivel se desprende que los puntos (1,0) y (0,1) son mínimos globales de f ($f(1,0)=f(0,1)=0$) y un máximo global en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ con $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. FEBRERO DE 2008

1.– Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-y}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado, compacto?

ii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en (2,0). Hallar $f_y(2,0)$.

iii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en (2,4).

iv) Sea $f(x,y)=\sqrt{4x^2+5y^2}$. ¿Es f derivable en (0,0)?

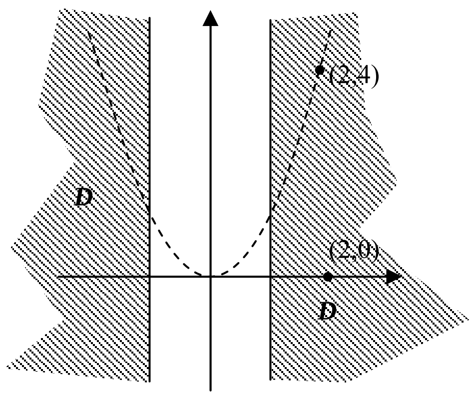
<u>Solución</u>:

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\geq 1, x^2\neq y\}$.

$fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|\geq 1 \quad \wedge \quad x^2=y\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 / x=\pm 1\}$

D está formado por los puntos de que hacen la cantidad subradical no negativa y que no anulan el denominador.

El dominio de f no es un conjunto abierto porque contiene puntos de la frontera, no es cerrado porque algunos puntos de la frnteras no portenecen al conjunto, no es acotado porque no existe una bola de radio finito que lo contenga, y no es compacto porque no es cerrado ni acotado.



ii) Nótese que f es continua en (2,0) , por ser cociente de funciones continuas, en un punto donde el denominador no se anula y la cantidad subradical es no negativa.

Notar que (2,0)$\in$int(D). Un cálculo con las reglas de derivación nos permite obtener:

$$f_x(x,y) = \frac{\dfrac{x(x^2-y)}{\sqrt{x^2-1}} - 2x\sqrt{x^2-1}}{(x^2-y)^2} \qquad \text{y} \qquad f_y(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(x^2-y)^2}$$

Ambas derivadas parciales existen en el punto (2,0). Por lo tanto f es derivable en (2,0).

Las derivadas parciales son funciones continuas en un entorno del punto (2,0), por ser suma, producto, composición y cociente de funciones continuas, no se anulan denominadores, ni las cantidades subradicales envueltas son negativas en (2,0). Esto nos permite asegurar que f es diferenciable en (2,0) y por tanto continua en (2,0), lo cual implica la existencia del límite en (2,0):

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = f(2,0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

y se tiene , $f_y(2,0) = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

iii) (2,4)$\notin$*D,* pero es punto de acumulación del dominio, por lo tanto, tiene sentido preguntarse por el límite de f en (2,4). Consideremos, por ejemplo, la sucesión $\left\{\left(2,4-\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (2,4)$ y calculemos su imagen :

$$\left\{f\left(2,4-\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4-4+\dfrac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{3}n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

La sucesión imagen es no convergente y por lo tanto el límite de f en (2,4) no existe.

Al no estar el punto (2,4) en el dominio, la función no es continua , ni derivable, ni diferenciable.

iv) Al tratar de calcular las derivadas parciales de f aplicando las reglas del cálculo diferencial, vemos que es imposible sustituir el punto (0,0) para evaluar las derivadas. Por lo tanto, esto nos dice que debemos derivar por la definición. Notar que el punto (0,0) es punto interior del dominio de f.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{4x}{\sqrt{4x^2+5y^2}}$ y es imposible sustituir el punto (0,0).

Recurriendo a la definición se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2|h|}{h}=\begin{cases} h>0,\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{2|h|}{h}=2 \\ h<0,\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{2|h|}{h}=-2 \end{cases},$$

lo que nos dice que el límite no existe y que f no es derivable en (0,0).

Similarmente para otra derivada parcial se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5}|h|}{h}=\begin{cases} h>0,\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{5}|h|}{h}=\sqrt{5} \\ h<0,\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{5}|h|}{h}=-\sqrt{5} \end{cases}$$

2.– Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\frac{\operatorname{sen} xy}{\cos y^2}$.

ii) $z=\ln\left(x\sqrt{y}\right)$.

iii) $z=e^{xf(2y)}+2yg\left(\frac{x^2}{y}\right)$, siendo $f,g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

iv) $z=f(xy^2,h(x^2))$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $h\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

<u>Solución</u>:

Aplicando las reglas de la derivación se obtiene:

i) $z = \dfrac{\sin xy}{\cos y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y \cos xy}{\cos y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x \cos xy \cos y^2 + 2y \sin y^2 \sin xy}{\cos^2 y^2}$$

ii) $z = \ln\left(x\sqrt{y}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2y}$$

iii) $z = e^{xf(2y)} + 2yg\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(2y)e^{xf(2y)} + 4xg'\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xf'(2y)e^{xf(2y)} + 2g\left(\frac{x^2}{y}\right) - \frac{2x^2}{y}g'\left(\frac{x^2}{y}\right)$$

iv) $z = f(xy^2, h(x^2))$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 f_1(xy^2, h(x^2)) + 2xh'(x^2) f_2(xy^2, h(x^2))$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2xyf_1(xy^2, h(x^2))$$

3.- Sea $F(x,y) = xy^2 + g\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$, donde $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ es homogénea de grado 3 y $g(1) = -1$, $g'(1) = -3$.

i) ¿Es F homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Calcular $F(1,1)$ y $F(2,2)$.

iv) ¿Define la ecuación $F(x,y)=0$ una función implícita $y=\varphi(x)$ en torno al punto $(1,1)$? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(1)$.

<u>Solución</u>:

Notar que Dom F es un cono.

i) Si $t>0$, entonces $F(tx,ty)=t^3xy^2+g\left(\frac{t^2x^2}{ty}\right)=t^3xy^2+t^3g\left(\frac{x^2}{y}\right)=t^3F(x,y)$

con lo cual F es homogénea de grado 3.

ii) $F(1,1)=1+g(1)=0$ y como F es homogenea, $F(2,2)=0$ tambien

iii) Aplicamos el teorema de la función implícita en torno al punto $(1,1)$:

1- $F(1,1)=0$.

2− $F\in C^1(\mathrm{B}(1,1))$:

Computando las derivadas parciales y por aplicar propiedades de las funciones continuas, es fácil ver que las derivadas parciales de F son funciones continuas en un entorno del punto (1,1), en particular en una bola del punto (1,1). Esto quiere decir que $F\in C^1(\mathrm{B}(1,1))$

3− $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2xy-\frac{x^2}{y^2}g'\left(\frac{x^2}{y}\right)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)=2-g'(1)=5\neq 0$.

Por lo tanto, la ecuación $F(x,y)=0$ define a la variable y como función implicita de x en torno al punto $(1,1)$. Haciendo $y=\varphi(x)$, obtiene:

$\varphi'(1)=-\frac{F_1(1,1)}{F_2(1,1)}=1$ donde hemos calculado $F_1(1,1)$ aplicando el teorema de Euler:

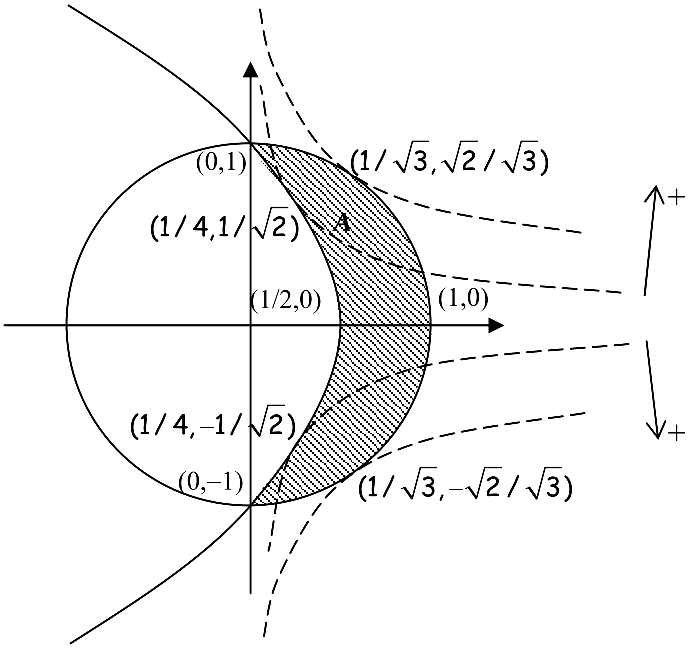
$3F(1,1)=F_1(1,1)+F_2(1,1)\Rightarrow F_1(1,1)=-F_2(1,1)=-5$.

4.– Sea $f(x,y) = xy^2$. Si $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 1,\ y^2 + 2x \ge 1\}$,

i) Hallar los extremos locales de *f* en *A*.

ii) Hallar los extremos globales de *f* en *A*.

<u>Solución</u>:



Notar que se verifican las hipótesis de los teoremas que proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para el cálculo de los extremos locales de f en A. De hecho $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

i) <u>Extremos en Int(A):</u>

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y) = y^2 = 0 \\ f_2(x,y) = 2xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 0$$

Por tanto los puntos de la forma (x,0) que pertenecen al segmento que une a los puntos (1/2,0) y (1,0) son candidatos a extremos locales relativos a Int(A) .

El hessiano no nos da información en dichos puntos, pues:

$$\left|H_f(x,y)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{12}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = -4y^2$$

se anula en los puntos de la forma (x,0) , $\left|H_f(x,y)\right| = 0$. Pero utilizando las curvas de nivel, vemos que son puntos de mínimo local y global.

<u>Extremos en fr(A) (relativos a fr(A)):</u>

• En el trozo de arco sobre la circunferencia $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$=0:

La función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y^2 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2xy + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y(x+\lambda) = 0 \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x = -\lambda \end{cases}$$

De $x = -\lambda$, sustituyendo en la primera ecuación, se obtiene $y^2 - 2x^2 = 0$, que nos conduce al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 - 2x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtienen los puntos:

$(1,0) \in A$

$(-1,0) \notin A$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \in A$

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \in A$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \notin A$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \notin A$

• Extremos sobre el trozo parabólico $g(x,y) = y^2 + 2x - 1$=0

La función Lagrangiana es:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy^2 + \lambda(y^2 + 2x - 1)$$

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y^2+2\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2xy+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y^2+2x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2y(x+\lambda)=0\left\{\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=1/2\\ x=-\lambda\end{array}\right.$$

De $x=-\lambda$, sustituyendo en la primera ecuación se obtiene $y^2-2x=0$, que nos lleva al sistema:

$$\left.\begin{array}{r}y^2-2x=0\\ y^2+2x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{1}{4}\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolviendo el sistema anterior, se obtienen los puntos:

$\left(\frac{1}{2},0\right)\in A$

$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A$

$\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A$

Un estudio de las curvas de nivel nos permite concluir que:

(1/2,0) y (1,0) son mínimos locales relativos a la frontera y a A

(0,1) y (0,−1) son mínimos relativos a la frontera y a A.

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ son máximos locales relativos a la frontera y a A

$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ son máximos relativos a la frontera, pero no a A

Los puntos de la forma (x,0) que pertenecen al segmento que une a los puntos (1/2,0) y (1,0) son mínimo locales de f en A.

ii) A es un conjunto compacto y f es continua en A. Por el teorema de Wierstarss existen los extremos globales, $\max\limits_{x\in A} f(x)$ eta $\min\limits_{x\in A} f(x)$

De nuevo, haciendo uso de las curvas de nivel, se tiene que:

. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ son máximos globales de f en A.

Todos los puntos de la forma (x,0) que pertenecen al segmento que une a los puntos (1/2,0) y (1,0), incluido los extremos son mínimos globlales de f en A.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II

LADE. JUNIO DE 2008

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{2-x^2-y^2}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado, compacto?

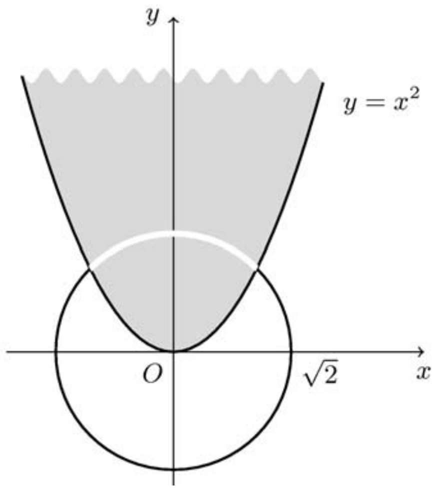
ii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en $(1,1)$. Hallar, si existen, $f_x(1,1)$ y $f_y(1,1)$.

iii) Estudiar la diferenciabilidad, derivabilidad, continuidad y existencia de límite de f en $(0,4)$. Hallar, si existen, $f_x(0,4)$ y $f_y(0,4)$.

iv) Aproximar, si es posible, el valor de $f(0'02,3'99)$.

Solución:

i) El dominio es el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2\le y,\ x^2+y^2\ne 2\right\}$ que se representa en la figura.



El interior es:

$$\operatorname{Int}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :x^2<y,\ x^2+y^2\ne 2\right\}.$$

La frontera es:

$$\operatorname{Fr}(D)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :x^2=y\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :x^2\le y,\ x^2+y^2=2\right\}.$$

El conjunto no es abierto porque hay puntos de su frontera que pertenecen al conjunto (los de la parábola). Ni es cerrado porque hay puntos de su frontera que no pertenecen al conjunto (en el gráfico los de la parte superior de la circunferencia).
Tampoco es acotado porque no se puede incluir en ninguna bola centrada en el origen. Ni es compacto porque debería ser cerrado y acotado simultáneamente.

ii) El punto $(1,1)\notin D$, luego no existe $f(1,1)$. Y por lo tanto f no es continua y tampoco derivable (luego no existen $f_x(1,1)$ ni $f_y(1,1)$), ni diferenciable en ese punto.

Como $(1,1)\in \mathrm{Fr}(D)$ examinamos si existe el límite de f en $(1,1)$.

La sucesión $\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)$. Además $\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\in D$ para cada n y se cumple

$$f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-1}}{2-1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}=\frac{n^2}{\sqrt{n}(-1-2n)}\to\infty,$$

Como este límite no es finito, entonces no existe el límite de f en $(1,1)$.

iii) El punto $(0,4)\in \mathrm{Int}(D)$, donde la función es continua (respectivamente derivable y diferenciable) ya que:

— las funciones $y\text{-}x^2$ y $2-x^2-y^2$ son polinomios luego funciones continuas (resp. derivables y diferenciables),

— la función raíz cuadrada es continua (resp. derivable y diferenciable) en puntos en los que el radicando es positivo,

— el cociente de funciones continuas (resp. derivables y diferenciables) es una función continua (resp. derivable y diferenciable) siempre que el denominador no se anula.

Además

$$\lim_{(x,y)\to(0,4)} f(x,y)=f(0,4)=\frac{2}{-14}=-\frac{1}{7}.$$

Las derivadas parciales son

$$f_x(x,y)=\frac{\dfrac{-2x\left(2-x^2-y^2\right)}{2\sqrt{y-x^2}}+2x\sqrt{y-x^2}}{\left(2-x^2-y^2\right)^2},\quad \text{luego } f_x(0,4)=0.$$

$$f_y(x,y)=\frac{\dfrac{\left(2-x^2-y^2\right)}{2\sqrt{y-x^2}}+2y\sqrt{y-x^2}}{\left(2-x^2-y^2\right)^2}, \qquad \text{luego } f_y(0,4)=25\big/392.$$

iv) Al ser la función f diferenciable en $(0,4)$ se puede calcular el valor aproximado de $f(0'02,3'99)$ mediante la diferencial

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\cong f_x(x_0,y_0)\cdot h+f_y(x_0,y_0)\cdot k.$$

En este caso

$$\begin{aligned} f(0'02,3'99) &\cong f_x(0,4)\cdot 0'02+f_y(0,4)\cdot(-0'01)+f(0,4)\\ &=0\cdot 0'02+\frac{25}{392}\cdot(-0'01)-\frac{1}{7}=-\frac{225}{1568}. \end{aligned}$$

2.- Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\dfrac{x^2}{y\cos x^2}$.

ii) $z=\ln\sqrt{x+2y}$.

iii) $z=(x-2y)e^{xy^2}$.

iv) $z=f\left(\dfrac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+g\left(\dfrac{x-2}{e^x}\right)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

__Solución:__

i) $z=\dfrac{x^2}{y\cos x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xy\cos x^2+2x^3y\operatorname{sen}x^2}{y^2\cos^2 x^2}=\frac{2x\left(\cos x^2+x^2\operatorname{sen}x^2\right)}{\cos^2 x^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2\cos x^2}.$$

ii) $z=\ln\sqrt{x+2y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x+2y}}\right)}{\sqrt{x+2y}}=\frac{1}{2\left(x+2y\right)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(\frac{2}{2\sqrt{x+2y}}\right)}{\sqrt{x+2y}}=\frac{1}{x+2y}.$$

iii) $z=(x-2y)\mathrm{e}^{xy^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy^2}+y^2\left(x-2y\right)\mathrm{e}^{xy^2}=\mathrm{e}^{xy^2}\left(1+xy^2-2y^3\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2\mathrm{e}^{xy^2}+2xy\left(x-2y\right)\mathrm{e}^{xy^2}=2\mathrm{e}^{xy^2}\left(-1+x^2y-2xy^2\right).$$

iv) $z=f\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+g\left(\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{2\left(1-y\right)}{x^3}\right)f_1\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+\left(\frac{-x+3}{\mathrm{e}^x}\right)g'\left(\frac{x-2}{\mathrm{e}^x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(-\frac{1}{x^2}\right)f_1\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)f_2\left(\frac{1-y}{x^2},\sqrt{y^2-1}\right).$$

3.- Sea $g(x,y)=\frac{f\left(xy,\,y^2-x^2\right)}{x}$, siendo $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ homogénea de grado 3.

i) ¿Es g homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Si $f\left(1,0\right)=0$ y $f_2\left(1,0\right)=0$, ¿define la ecuación $g\left(x,y\right)=0$ a la variable y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto $\left(1,1\right)$? En caso afirmativo, calcular $\varphi'(1)$.

<u>Solución:</u>

i) Para comprobar si g es homogénea hay que calcular $g\left(tx,ty\right)$:

$$
\begin{aligned}
g(tx,ty) &= \frac{f\left(tx\cdot ty,\, t^2y^2 - t^2x^2\right)}{tx} \\
&= \frac{f\left(t^2xy,\, t^2\left(y^2 - x^2\right)\right)}{tx} \\
&= \frac{\left(t^2\right)^3 f\left(xy,\, y^2 - x^2\right)}{tx} = t^5 g(x,y).
\end{aligned}
$$

Por tanto g es homogénea de grado 5 (la segunda igualdad es consecuencia de que f es homogénea de grado 3).

ii) Se comprueban las condiciones del Teorema de la función implícita.

1. El punto cumple la igualdad $g(x,y)=0$. En efecto

$$
g(1,1) = \frac{f(1,0)}{1} = 0,
$$

2. La función g es de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathrm{B}(1,1)\right)$. Ya que g es un cociente cuyo numerador y denominador son de clase $\mathcal{C}^1$, y además el denominador no se anula.

3. Queda por comprobar si $g_2(1,1)\neq 0$. Obsérvese que

$$
g_2(x,y) = \frac{x\cdot f_1\left(xy,\, y^2-x^2\right) + 2y\cdot f_2\left(xy,\, y^2-x^2\right)}{x}
$$

Luego $g_2(1,1) = f_1(1,0) + 2f_2(1,0)$.

Ahora bien se sabe que $f_2(1,0)=0$, así que sólo resta por hallar $f_1(1,0)$. Para ello se aplica el Teorema de Euler. Por hipótesis $f(1,0)=0$, y como f es homogénea de grado 3, se cumple:

$$
1\cdot f_1(1,0) + 0\cdot f_2(1,0) = 3\cdot f(1,0), \text{ luego } f_1(1,0)=0.
$$

Se puede concluir

$$
g_2(1,1) = f_1(1,0) + 2f_2(1,0) = 2 \neq 0,
$$

y por tanto asegurar que $g(x,y)=0$ define a la variable y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno al punto $(1,1)$.

La derivada de esta función implícita es $\varphi'(1) = -\dfrac{g_1(1,1)}{g_2(1,1)}$.

Ya se ha probado que $g_2(1,1)=2$, Para determinar $g_1(1,1)$ se aplica el Teorema de Euler a la función g que es homogénea de grado 5.

$$5 \cdot g(1,1) = 1 \cdot g_1(1,1) + 1 \cdot g_2(1,1),$$

luego, $0 = g_1(1,1)+2$, y se deduce que $g_1(1,1)=-2$. Finalmente se concluye

$$\varphi'(1) = -\frac{g_1(1,1)}{g_2(1,1)} = 1.$$

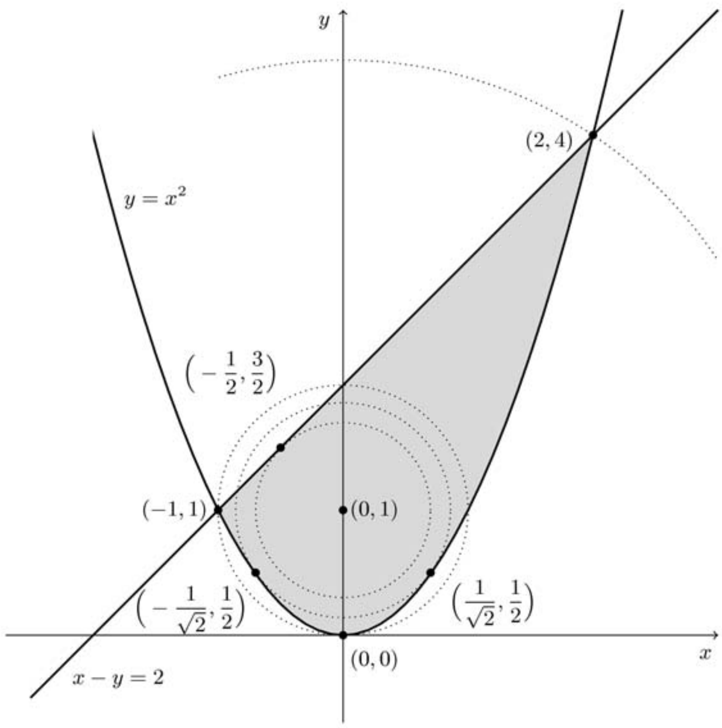
4.- Sea $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ junto con $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 \le y,\ x-y \ge -2\right\}$.

i) Hallar los extremos locales de f en A.

ii) Hallar los extremos globales de f en A.

Solución:

El conjunto A es la zona sombreada de la figura; A es compacto y la función f es continua en A, luego se puede asegurar que existen los extremos globales de f en A. Las curvas de nivel son circunferencias de centro $(0,1)$.



Examinamos el interior y la frontera del conjunto A.

A) Interior de A.

– Condiciones necesarias: Se deben anular las derivadas parciales.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= 2x = 0 \\ f_2(x,y) &= 2y-2=0 \end{aligned}, \text{ de donde } x=0,\ y{=}1.$$

Se obtiene el punto $(0,1)$ que, en efecto, está en $\operatorname{Int}(A)$.

– Condiciones suficientes: Se examina el signo de $f_{11}(x,y)$ y del hessiano

$$f_{11}(x,y)=2, \qquad f_{12}(x,y)=0, \qquad f_{22}(x,y)=2,$$

$$\left|H_f(0,1)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{12}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4>0$$

Como $f_{11}(x,y)=2>0$ y $\left|H_f(0,1)\right|=4>0$, el punto $(0,1)$ es un mínimo local de f en A.

B) Frontera de A.

Hay que examinar dos tramos: el correspondiente a la recta $x-y=-2$ y el de la parábola $y=x^2$, y además los puntos de corte de estos tramos que son $(-1,1)$ y $(2,4)$.

B1. Tramo de la recta $x-y=-2$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-1)^2+\lambda(x-y+2).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y-2-\lambda=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x-y+2=0 \end{aligned}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $\lambda=-2x=2y-2$, o sea $2x+2y=2$. Junto con la tercera ecuación se forma el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x+2y&=2 \\ x-y&=-2 \end{aligned}\right\},$$

cuya solución es $x=-1/2$, $y=3/2$; el multiplicador asociado es $\lambda=1$.

Luego se ha obtenido un candidato en este tramo, el punto $\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}\right)$. En el gráfico se observa que este punto es un mínimo local relativo a la frontera de A, pero no lo es relativo a A.

B2. Tramo de la parábola $y=x^2$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-1)^2+\lambda\left(x^2-y\right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-2-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0\end{array}\right\}$$

De la primera ecuación obtenemos $2x(1+\lambda)=0$, luego $x=0$ ó $\lambda=-1$.

Si $x=0$, por la tercera ecuación se tiene $y=0$; y de la segunda el multiplicador asociado es $\lambda=-2$.

Si $\lambda=-1$, por la segunda ecuación se tiene $y=1/2$; y por la tercera $x=\pm 1/\sqrt{2}$.

En definitiva en el tramo de la parábola se han obtenido tres puntos: $(0,0)$, $\left(1/\sqrt{2},1/2\right)$, y $\left(-1/\sqrt{2},1/2\right)$. En el gráfico se advierte que el punto $(0,0)$ es un máximo local relativo al conjunto *A*, mientras que los otros dos puntos son mínimos relativos a la frontera, pero no al conjunto.

Finalmente hay que considerar los puntos de corte. Se observa que los dos puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$ son máximos locales.

En cuanto a los extremos globales es fácil comprobar por el gráfico que el máximo global se alcanza en el punto $(2,4)$, y el mínimo global en el punto $(0,1)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. FEBRERO DE 2009

1.- Sea $f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}}$.

a) Hallar y representar el domino D de la función. ¿Es D abierto, cerrado, acotado o compacto?

b) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $\left(0,0\right)$.

c) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $\left(2,1\right)$.

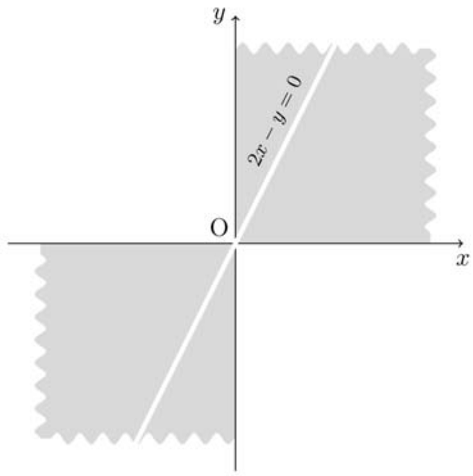
<u>Solución:</u>

a) El dominio es la zona sombreada de la figura

$D=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : xy\geq 0,\ 2x-y\neq 0\right\}$

Este conjunto no es abierto porque contiene puntos de su frontera (los puntos de los ejes excepto el origen).

Tampoco es cerrado porque no contiene a todos los puntos de su frontera (los de la recta $2x-y=0$).



Tampoco es acotado porque no se puede incluir en ninguna bola. Ni es compacto porque para ello debería ser cerrado y acotado.

b) El punto $(0,0)\notin D$, luego f no es continua en este punto, luego tampoco es diferenciable.

Sin embargo $(0,0)\in \mathrm{Fr}(D)$ luego podría existir el límite. Como $\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{0}}{0}}$ es una indeterminación, la resolvemos tomando sucesiones

$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)$, y además $\left(\frac{1}{n},0\right)\in D$ para cada n. Se cumple

$f\left(\frac{1}{n},0\right)=\mathrm{e}^0=1\to 1.$

$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)$, y además $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\in D$ para cada n. Se cumple

$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}^{\left(\frac{\sqrt{1/n^2}}{1/n}\right)}=\mathrm{e}\to \mathrm{e}.$

Como los resultados son diferentes ($1\neq \mathrm{e}$), no existe el límite de *f* en $(0,0)$.

c) En un entorno de $(2,1)$ es una función exponencial, cuyo exponente es un cociente de funciones continuas (resp. diferenciables) en ese punto y en las que el denominador no se anula, luego la función original es continua (resp. diferenciable) en este punto.

El límite en el punto $(2,1)$ existe por ser *f* una función continua y es:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(2,1)} \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{xy}}{2x-y}}=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

2.- Sea $g(x,y)=h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)$, donde $h\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ es una función homogénea de grado 2.

a) ¿Es *g* homogénea?, ¿de qué grado?

b) Existe algún valor para $h(1,1)$, de manera que la ecuación $g(x,y)-x^2-y^2=0$ defina una función implícita en un entorno del punto (1,1)? En caso afirmativo, calcula $\varphi'(1)$.

<u>Solución:</u>

a) Se calcula $g(tx,ty)$ para comprobar si *g* es una función homogénea.

$$
\begin{aligned}
g(tx,ty) &= h\left(2txty-(ty)^2,\frac{(tx)^3+(ty)^3}{3ty-tx}\right)=h\left(t^2(2xy-y^2),\frac{t^3(x^3+y^3)}{t(3y-x)}\right)\\
&= h\left(t^2(2xy-y^2),t^2\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)=\left(t^2\right)^2 h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)=t^4 g(x,y).
\end{aligned}
$$

Luego g es una función homogénea de grado 4 (la cuarta igualdad se cumple porque h es homogénea de grado 2).

b) Aplicamos el Teorema de la función implícita al punto $(1,1)$ y la ecuación

$$F(x,y)=g(x,y)-x^2-y^2=h\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)-x^2-y^2=0$$

1. El punto $(1,1)$ debe cumplir la ecuación, luego
$F\left(1,1\right)=h\left(1,1\right)-1^2-1^2=0$ o equivalentemente $h\left(1,1\right)=2$.

2. La función F debe ser de clase $\mathcal{C}^1$. Es cierto porque h es una función de clase $\mathcal{C}^1$, luego F es diferencia de funciones de clase $\mathcal{C}^1$.

3. Debe ocurrir que $F_2(x,y)\neq 0$.

$$
\begin{aligned}
F_2(x,y) &= h_1\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot(2x-2y)+\\
&\quad +h_2\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot\frac{3y^2\cdot(3y-x)-(x^3+y^3)\cdot 3}{(3y-x)^2}-2y.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo se tiene que $F_2(1,1)=h_1(1,1)\cdot 0+h_2(1,1)\cdot 0-2=-2\neq 0$.

Luego podemos concluir que si $h(1,1)=2$, entonces la ecuación define una función implícita $y=\varphi(x)$ en un entorno del punto $(1,1)$.

Calculamos $\varphi'(1)=-\dfrac{F_1\left(1,1\right)}{F_2\left(1,1\right)}$. Como $F_2(1,1)=-2$, sólo resta calcular $F_1(1,1)$.

$$
\begin{aligned}
F_1(x,y) &= h_1\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot 2y+\\
&\quad +h_2\left(2xy-y^2,\frac{x^3+y^3}{3y-x}\right)\cdot\frac{3x^2\cdot(3y-x)-(x^3+y^3)\cdot(-1)}{(3y-x)^2}-2x.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo se obtiene

$F_1(1,1)=h_1\left(1,1\right)\cdot 2+h_2\left(1,1\right)\cdot 2-2=2\left(h_1\left(1,1\right)+h_2\left(1,1\right)\right)-2$.

Ahora bien por el Teorema de Euler se cumple $h_1(1,1)+h_2(1,1)=2h(1,1)=4$. Se deduce entonces $F_1(1,1)=6$. Y como consecuencia $\varphi'(1)=3$.

3.- Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z=\ln\sqrt[5]{2xy+y^2}$.

ii) $z=\sin\left(\dfrac{x^3y^2}{2x+1}\right)$.

iii) $z=y^2f(x-y,3x)$, donde $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

iv) $z=f\left(x^3+2y,g\left(x^2y\right)\right)$, donde $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solución:

i) $z=\ln\sqrt[5]{2xy+y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[5]{2xy+y^2}}\frac{1}{5}\left(2xy+y^2\right)^{-4/5}2y=\frac{2y}{5\left(2xy+y^2\right)}=\frac{2}{10x+5y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt[5]{2xy+y^2}}\frac{1}{5}\left(2xy+y^2\right)^{-4/5}(2x+2y)=\frac{2x+2y}{5(2xy+y^2)}.$$

ii) $z=\sin\left(\dfrac{x^3y^2}{2x+1}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2y^2(2x+1)-2x^3y^2}{(2x+1)^2}\cos\left(\frac{x^3y^2}{2x+1}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2yx^3}{2x+1}\cos\left(\frac{x^3y^2}{2x+1}\right).$$

iii) $z=y^2f(x-y,3x)$, donde $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\left(f_1(x-y,3x)+3f_2(x-y,3x)\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2yf(x-y,3x)-y^2f_1(x-y,3x).$$

iv) $z = f\left(x^3 + 2y, g\left(x^2y\right)\right)$, donde $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right),\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 f_1\left(x^3 + 2y, g\left(x^2y\right)\right) + 2xy\,g'\left(x^2y\right) f_2\left(x^3 + 2y, g\left(x^2y\right)\right).$$

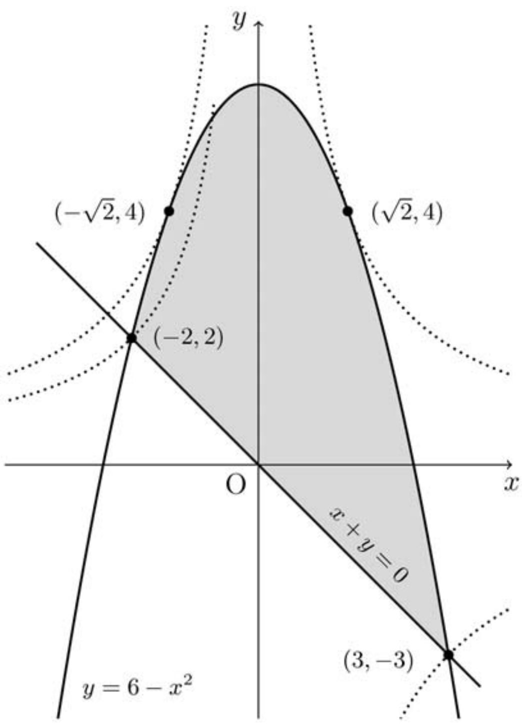
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2f_1\left(x^3 + 2y, g\left(x^2y\right)\right) + x^2 g'\left(x^2y\right) f_2\left(x^3 + 2y, g\left(x^2y\right)\right).$$

4.- Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x,y) = xy$, relativamente al conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \leq 6, x + y \geq 0\right\}$.

Solución:

El recinto y las curvas de nivel de la función se representan en el gráfico.

Las curvas de nivel son las hipérbolas $xy = K$, donde K varía. La curva de nivel 0 está formada por los ejes. Si K es positivo son las hipérbolas del primer y tercer cuadrantes, y si K es negativo son las hipérbolas del segundo y cuarto cuadrantes.



El conjunto es cerrado y acotado, luego compacto y la función continua. Por tanto se puede asegurar la existencia de extremos globales de la función.

Comprobamos separadamente el interior y la frontera del conjunto A.

A) Interior de A.

– Condiciones necesarias: Se deben anular las derivadas parciales.

$$\begin{array}{l} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}, \text{ de donde } x = 0,\ y{=}0\,.$$

Se obtiene el punto $(0,0)$ que no está en $\operatorname{Int}(A)$. Luego en el interior no hay extremos.

B) Frontera de A.

Hay que examinar dos tramos: el correspondiente a la recta $x + y = 0$ y el de la parábola $y = 6 - x^2$, y además los puntos de corte de estos tramos que son los que resuelven el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x^2 + y = 6 \end{array}\right\},$$

es decir los puntos $(-2,2)$ y $(3,-3)$

B1. Tramo de la recta $x + y = 0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $x = 0$, $y = 0$; y el multiplicador asociado es $\lambda = 0$.

El único candidato en este tramo es el punto $(0,0)$, pero en el gráfico se observa que este punto no es un extremo (ni máximo ni mínimo) local.

B2. Tramo de la parábola $y = 6 - x^2$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(x^2 + y - 6\right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\lambda = -x$; sustituyendo en la primera se llega a $y = 2x^2$. Y sustituyendo en la tercera $x = \pm\sqrt{2}$. Entonces $y = 4$, y $\lambda = \mp\sqrt{2}$.

Se han obtenido dos candidatos $\left(\sqrt{2},4\right)$ y $\left(-\sqrt{2},4\right)$. En el gráfico se observa que $\left(\sqrt{2},4\right)$ es un máximo local y $\left(-\sqrt{2},4\right)$ es un mínimo local.

Finalmente hay que considerar los puntos de corte: $(-2,2)$ y $(3,-3)$. De nuevo el gráfico nos informa de que el punto $(-2,2)$ no es extremo local, y en cambio el punto $(3,-3)$ es un mínimo local

En cuanto a los extremos globales el máximo global se alcanza en el punto $\left(\sqrt{2},4\right)$, y el mínimo global en el punto $(3,-3)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. JUNIO DE 2009

1.- Sea $f(x,y)=\dfrac{x-1}{y\sqrt{x}}$

a) Hallar y representar el domino D de la función. ¿ Es D abierto, cerrado acotado o compacto?

b) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $(1,0)$.

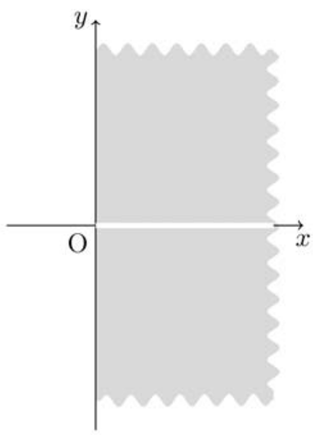
c) Estudiar la continuidad, existencia de límite y diferenciabilidad de f en $(2,1)$.

d) Calcular el valor aproximado de $f(1.98,1.03)$ a través de la diferencial de *f* en el punto $(2,1)$.

Solución:

a) El dominio es la zona sombreada de la figura

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\neq 0\}$



Este conjunto no es abierto porque contiene puntos de su frontera (los puntos del eje OY, menos el origen). Tampoco es cerrado porque no contiene a todos los puntos de su frontera (los del semieje positivo OX).

Tampoco es acotado porque no se puede incluir en ninguna bola. Ni es compacto porque debería ser cerrado y acotado.

b) El punto $(1,0)\notin D$, luego *f* no es continua en este punto, y tampoco diferenciable.

Sin embargo $(1,0)\in \mathrm{Fr}(D)$ luego podría existir el límite. Como $\dfrac{0}{0}$ es una indeterminación tomamos sucesiones

$\left\{\left(1,\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,0)$, y además $\left\{\left(1,\dfrac{1}{n}\right)\right\}\subset D$. Se cumple

$$\left\{f\left(1,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{0}{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0\}_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$$

$\left\{1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,0)$ y además $\left\{1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$. Se cumple

$$\left\{f\left(1+\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1/n}{1/n\sqrt{1+1/n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1.$$

Como los resultados son diferentes, $0 \neq 1$, entonces no existe el límite de *f* en $(1,0)$.

c) En un entorno del punto $(2,1)$ la función *f* es un cociente de funciones continuas (respectivamente diferenciables), y en las que el denominador no se anula, luego la función es continua (resp. diferenciable) en (2,1).

El límite en el punto (2,1) existe por ser *f* una función continua y es:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-1}{y\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) Al ser la función f diferenciable en $(2,1)$ se puede calcular el valor aproximado de $f(1'98,1'03)$ mediante la diferencial

$$f(1'98,1'03) \cong f_x(2,1)\cdot(-0'02) + f_y(2,1)\cdot(0'03) + f(2,1)$$

Previamente hay que calcular $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$

$$f_x(x,y) = \frac{y\sqrt{x} - \frac{y(x-1)}{2\sqrt{x}}}{y^2 x} = \frac{x+1}{2yx\sqrt{x}}, \quad \text{luego } f_x(2,1) = \frac{3}{4\sqrt{2}} \simeq 0'53;$$

$$f_y(x,y) = -\frac{(x-1)}{y^2\sqrt{x}} \quad \text{luego } f_y(2,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq -0'70.$$

Además $f(2,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0'70$. Sustituyendo estos valores $f(1'98,1'03) \cong 0'67.$

2.- Sea $g(x,y)$ una función homogénea de grado 2 tal que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g(1,3) = 2$, y $g_x(1,3) = 5$. Calcula $g(3,9)$, $g_x(3,9)$, y $g_y(3,9)$.

a) ¿Es g homogénea?, ¿de qué grado?

b) Sea $f\left(x,y\right)=\dfrac{\left(x-y\right)\left(y^2-1\right)}{\mathrm{e}^2}$. Estudiar si la ecuación $f(x,y)=0$ define a y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en un entorno de $(1,1)$ y de $(0,0)$. Calcula si existen $\varphi'(1)$ y $\varphi'(0)$.

Solución:

a) Al ser g una función homogénea de grado 2 se cumple

$$g\left(3,9\right)=g\left(3\left(1,3\right)\right)=3^2 g\left(1,3\right)=9\cdot 2=18.$$

Además si g homogénea de grado 2, entonces su derivada parcial g_x es homogénea de grado 1. Por tanto

$$g_x\left(3,9\right)=g_x\left(3\left(1,3\right)\right)=3g_x\left(1,3\right)=3\cdot 5=15$$

Para calcular $g_y\left(3,9\right)$ aplicamos el Teorema de Euler

$$xg_x\left(x,y\right)+yg_y\left(x,y\right)=\alpha g\left(x,y\right)$$

o sea en este caso

$$3g_x\left(3,9\right)+9g_y\left(3,9\right)=2g\left(3,9\right),$$

y sustituyendo $g\left(3,9\right)=18$ y $g_x\left(3,9\right)=15$, se obtiene $g_y\left(3,9\right)=-1$.

b) Aplicamos el Teorema de la función implícita en los puntos (1,1) y (0,0) a la función

$$f\left(x,y\right)=\frac{\left(x-y\right)\left(y^2-1\right)}{\mathrm{e}^2}$$

1. La función se anula en el punto (1,1) y en el (0,0)

$$f(1,1)=\frac{0\cdot 0}{\mathrm{e}^2}=0, \qquad f(0,0)=\frac{0\cdot(-1)}{\mathrm{e}^2}=0.$$

2. La función f es de clase $\mathcal{C}^1$, porque es un polinomio.

3. Debe ocurrir que $f_2(1,1)\neq 0$ y $f_2(0,0)\neq 0$.

Como $f_2(x,y)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\left(1-3y^2+2xy\right)$, entonces

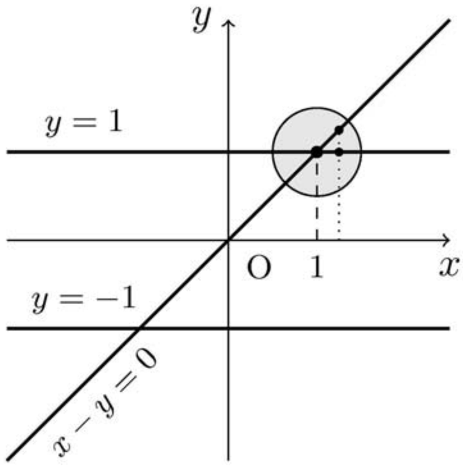
$$f_2(1,1)=0, \qquad f_2(0,0)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}\neq 0.$$

Luego por el Teorema de la función implícita podemos concluir que la ecuación define una función implícita $y=\varphi(x)$ en un entorno del punto (0,0).

Calculamos $\varphi'(0)$. Se sabe que $\varphi'(0) = -\dfrac{f_1(0,0)}{f_2(0,0)}$. Se sabe que $f_2(0,0) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ así que basta calcular $f_1(1,1)$. Ahora bien $f_1(x,y) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\left(y^2 - 1\right)$, luego $f_1(0,0) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. Concluimos que $\varphi'(0) = 1$.

Volvemos con el punto (1,1). En este punto no se cumple la tercera condición del Teorema de la función implícita, por lo cual hay que recurrir al gráfico para saber si existe o no función implícita en torno a ese punto.

La ecuación $f\left(x,y\right) = \dfrac{\left(x-y\right)\left(y^2-1\right)}{\mathrm{e}^2} = 0$, sólo se anula si $x - y = 0$, o bien $y^2 - 1 = 0$. es decir si el punto está en una de las tres rectas: $x - y = 0$, $y = 1$, ó $y = -1$.



En el gráfico se observa que en cualquier bola centrada en (1,1), a cada *x* le pueden corresponder dos imágenes, luego no existe función implícita.

3.- Calcula las derivadas parciales de las siguientes funciones:

i) $z = \ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}\right)$.

ii) $z = \cos^2\left(x^3 + 3xy^2\right)$.

iii) $z = f\left(x^2y, 5e^{3x}\right)$, donde $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

iv) $z = g\left(x^3 - 2y\right)h\left(y^3x\right)$, donde $g \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Solución:

i) $z=\ln\left(\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}}\frac{1/3}{\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2}}\left(\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{3x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}}\frac{1/3}{\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2}}\left(\frac{-2x}{y^3}\right)=-\frac{2}{3xy}.$$

ii) $z=\cos^2\left(x^3+3xy^2\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\left(3x^2+3y^2\right)\cos\left(x^3+3xy^2\right)\operatorname{sen}\left(x^3+3xy^2\right)=\left(3x^2+3y^2\right)\operatorname{sen}2\left(x^3+3xy^2\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2(6xy)\cos\left(x^3+3xy^2\right)\operatorname{sen}\left(x^3+3xy^2\right)=6xy\operatorname{sen}2\left(x^3+3xy^2\right).$$

iii) $z=f\left(x^2y,5e^{3x}\right)$, donde $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xyf_1\left(x^2y,5e^{3x}\right)+15e^{3x}f_2\left(x^2y,5e^{3x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2f_1\left(x^2y,5e^{3x}\right).$$

iv) $z=g\left(x^3-2y\right)h\left(y^3x\right)$, donde $g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $h\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$.

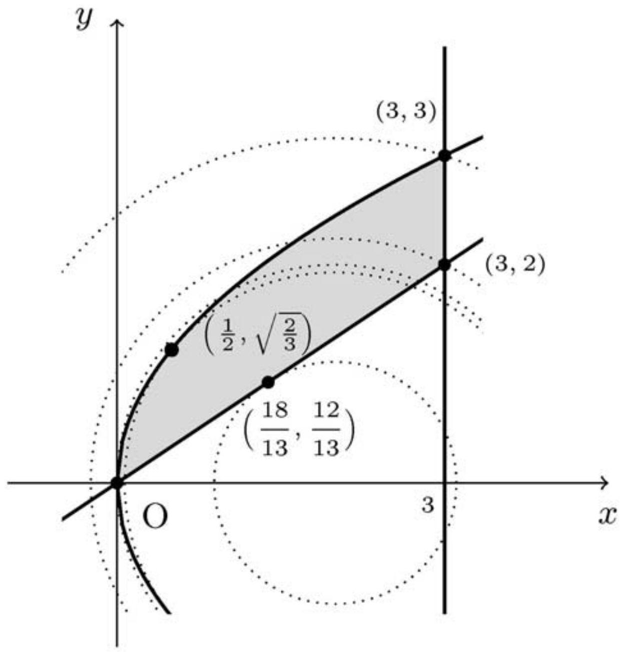
$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2g'\left(x^3-2y\right)h\left(y^3x\right)+y^3\,g\left(x^3-2y\right)h'\left(y^3x\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-2g'\left(x^3-2y\right)h\left(y^3x\right)+3y^2{}_{x}g\left(x^3-2y\right)h'\left(y^3x\right).$$

4.- Calcula los extremos locales y globales de la función $f(x,y)=(x-2)^2+y^2$, relativamente al conjunto $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :x\le 3,\,2x\le 3y,\,3x\ge y^2\right\}$.

Solución:

El recinto y las curvas de nivel de la función se representan en el gráfico.



La parábola corresponde a la ecuación $3x - y^2 = 0$. La recta tiene por ecuación $2x - 3y = 0$.

La curva de nivel K es la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = K$, centrada en (2,0) y de radio $\sqrt{K}$.

El conjunto es cerrado y acotado, luego compacto y la función continua. Por tanto se puede asegurar la existencia de extremos globales de la función.

Examinamos separadamente el Interior y la frontera del conjunto A.

A) Interior de A.

– Condiciones necesarias: Se deben anular las derivadas parciales.

$$\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2(x-2) = 0 \\ f_2(x,y) = 2y = 0 \end{array} \text{, de donde } x = 2,\ y=0.$$

Se obtiene el punto $(2,0)$ que no está en $\mathrm{Int}(A)$. Luego en el interior no hay extremos.

B) Frontera de A.

Hay que examinar tres tramos: los correspondientes a la rectas $2x - 3y = 0$, y $x = 3$, y el de la parábola $3x - y^2 = 0$, y además los puntos de corte de estos tramos que son los puntos $(0,0)$, $(3,2)$ y $(3,3)$.

B1. Tramo de la recta $2x - 3y = 0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-2)^2+y^2+\lambda(2x-3y).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2(x-2)+2\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-3\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=2x-3y=0\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos $\lambda={}^{2y}\!/_{3}$, y al sustituir en la primera se obtiene el sistema $\left.\begin{array}{r}6(x-2)+4y=0\\ 2x-3y=0\end{array}\right\}$, cuya solución es $x={}^{18}\!/_{13}$, e $x={}^{12}\!/_{13}$. En el gráfico se observa que el punto $\left({}^{18}\!/_{13},{}^{12}\!/_{13}\right)$ corresponde a un mínimo local

B2. Tramo de la parábola $3x-y^2=0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=(x-2)^2+y^2+\lambda(3x-y^2).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2(x-2)+3\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-2y\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=3x-y^2=0\end{array}\right\}$$

De la segunda ecuación obtenemos $2y(1-\lambda)=0$; luego hay dos posibilidades: o bien $y=0$, o bien $\lambda=1$. Si $y=0$, por la tercera ecuación se obtiene $x=0$. Si $\lambda=1$, entonces de la primera ecuación se obtiene $x={}^{1}\!/_{2}$, y sustituyendo en la tercera se llega a $y=\pm\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}$. En total hay tres candidatos en este tramo: $(0,0)$, $\left({}^{1}\!/_{2},\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}\right)$ y $\left({}^{1}\!/_{2},-\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}\right)$

Examinando el gráfico se observa que el punto $\left({}^{1}\!/_{2},-\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}\right)$ no está en el recinto luego se descarta. El punto $(0,0)$ corresponde a un máximo local, y el punto $\left({}^{1}\!/_{2},\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}\right)$ es un mínimo local relativo a la parábola, pero no es extremo local relativo al conjunto porque en su entorno se pueden encontrar puntos donde la función toma valores menores.

B1. Tramo de la recta $x = 3$.

La función *lagrangiana* es en este último caso

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + y^2 + \lambda(x-3),$$

y las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 2(x-2) + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = 2y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo se obtiene $x = 3$, e $y = 0$, pero el punto $(3,0)$ no pertenece al recinto. Luego en este tramo no hay candidatos.

Finalmente hay que considerar los puntos de corte: $(3,2)$ y $(3,3)$. De nuevo el gráfico nos informa de que el punto $(3,2)$ no es extremo local, y en cambio el punto $(3,3)$ es un máximo local.

Gráficamente se observa que el máximo global se alcanza en el punto $(3,3)$, y el mínimo global en el punto $\left(18/13, 12/13\right)$.

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. FEBRERO DE 2010

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-2}}{x-y}$.

i) Hallar y representar el dominio *D* de la función. ¿Es *D* un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto?

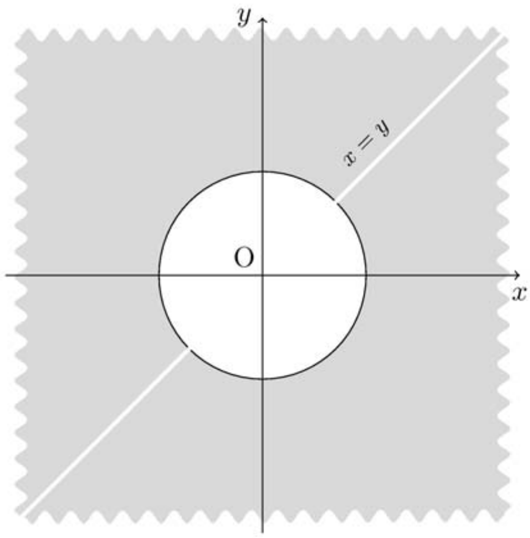
ii) ¿Existe el límite de *f* en (1,1)?

iii) ¿Es *f* continua, derivable, diferenciable en (0,2)?

Solución:

i) El dominio es la zona sombreada de la figura. Formalmente

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\neq y,\ x^2+y^2\geq 2\right\}.$$



El conjunto no es abierto, porque hay puntos de su frontera que están en el conjunto (por ejemplo, casi todos los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=2$).

Tampoco es cerrado porque hay puntos de la frontera que no pertenecen al conjunto (los puntos de la recta $x=y$ que están fuera del círculo).

Ni es acotado porque no se puede incluir en ninguna bola centrada en el origen.

Finalmente, no es compacto porque para serlo debería ser a la vez cerrado y acotado.

ii) Examinamos si existe el límite de f en $(1,1)$ mediante sucesiones.

La sucesión $\left\{\left(1,1+\dfrac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)$, y se cumple $\left(1,1+\dfrac{1}{n}\right)\in D$ para cada *n*. Además

$$f\left(1,1+\tfrac{1}{n}\right)=\frac{\sqrt{1+\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2-1}}{1-\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^2}}{-\tfrac{2}{n}-\tfrac{1}{n^2}}=\frac{(n+1)/n}{(-2n-1)/n^2}=\frac{n^2+n}{-2n-1}\to-\infty,$$

Como las imágenes de la sucesión tienden a $-\infty$, no existe el límite de f en $(1,1)$.

iii) El punto $(0,2)\in\operatorname{Int}(D)$, y la función es continua en este punto (respectivamente derivable y diferenciable) ya que:

— las funciones x^2+y^2-2 y $x-y$ son polinomios luego funciones continuas (resp. derivables y diferenciables),

— la función raíz cuadrada es continua (resp. derivable y diferenciable) en puntos en los que el radicando es positivo),

— el cociente de funciones continuas (resp. derivables y diferenciables) es una función continua (resp. derivable y diferenciable) siempre que el denominador no se anula.

2.- Sea la función $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Estudiar la derivabilidad de *f* en el punto (0,0).

Solución:

Por definición

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Sustituimos

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h^3}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1.$$

Análogamente

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Y al sustituir de nuevo se obtiene

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h^3}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1.$$

Luego existen ambas derivadas parciales, que toman el valor 1, y por consiguiente la función es derivable en el punto (0,0).

(Nota. Obsérvese que $\sqrt[3]{h^3} = h$, pero en cambio $\sqrt{h^2} = |h|$).

3.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $z = \ln\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

ii) $z = \operatorname{sen}^2(xe^y)$

iii) $z = x^3y^2g\left(y/x\right)$, siendo $g \in C^1(\mathbb{R})$.

iv) $z = f\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right)$, siendo $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

<u>Solución:</u>

i) $z = \ln\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2}\right)}{2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\right)}{\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}} = \frac{-y}{x^2-y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\dfrac{\left(\dfrac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}\right)}{2\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}}\right)}{\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}} = \frac{x}{x^2-y^2}.$$

ii) $z = \operatorname{sen}^2(xe^y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^y \cdot \cos\left(x\mathrm{e}^y\right) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(x\mathrm{e}^y\right) = \mathrm{e}^y \cdot \operatorname{sen}\left(2x\mathrm{e}^y\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\mathrm{e}^{y} \cdot \cos\left(x\mathrm{e}^{y}\right) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}\left(x\mathrm{e}^{y}\right) = x\mathrm{e}^{y} \cdot \operatorname{sen}\left(2x\mathrm{e}^{y}\right).$$

iii) $z = x^3 y^2 g\left({}^{y}\!/\!_{x}\right)$ siendo $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 g\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) - x^3y^2\left(-{}^{y}\!/\!_{x^2}\right) g'\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) = 3x^2y^2 g\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) + xy^3 g'\left({}^{y}\!/\!_{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y \cdot g\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) - x^3y^2\left({}^{1}\!/\!_{x}\right) g'\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) = 2x^3 y \cdot g\left({}^{y}\!/\!_{x}\right) + x^2y^2 g'\left({}^{y}\!/\!_{x}\right).$$

iv) $z = f\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right)$, siendo $f, g \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

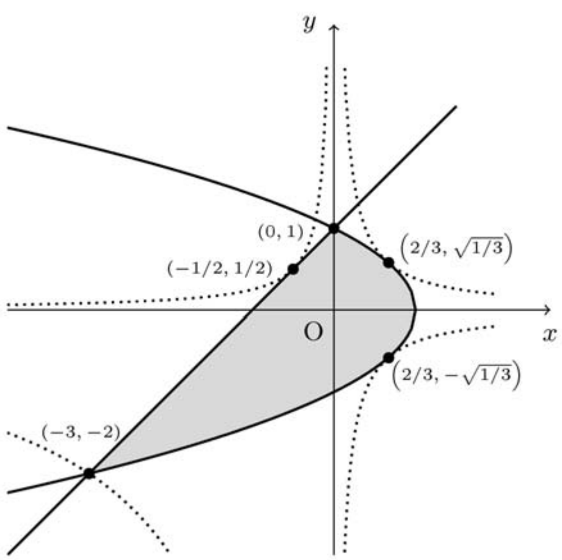
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot f_1\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right) + \left(2x \cdot g_1\left(x^2, y^2\right)\right) f_2\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot f_1\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right) + \left(2y \cdot g_2\left(x^2, y^2\right)\right) f_2\left(xy, g\left(x^2, y^2\right)\right).$$

4.- Sean $f(x,y) = xy$, y el conjunto $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \le 1,\ \ x - y + 1 \ge 0\right\}$. Hallar los extremos locales y globales de *f* relativamente al conjunto *A*.

Solución:

El conjunto A es la zona sombreada de la figura; A es compacto y la función f es continua en A, luego se puede asegurar que existen los extremos globales de f en A. Las curvas de nivel son hipérbolas que toman valores positivos en el primer y tercer cuadrantes, y valores negativos en el segundo y en el cuarto. En los ejes la función se anula.



Examinamos separadamente el interior y la frontera del conjunto A.

A) Interior de *A*.

– Condiciones necesarias: Se deben anular las derivadas parciales.

$$\begin{array}{l} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}, \text{ de donde } x = 0,\ y{=}0\,.$$

Se obtiene el punto $(0,0)$ que, en efecto, está en $\operatorname{Int}(A)$.

– Condiciones suficientes: Se examina el signo de $f_{11}(x,y)$ y del hessiano

$$f_{11}(x,y) = 0\,, \qquad f_{12}(x,y) = 1\,, \qquad f_{22}(x,y) = 0\,,$$

$$\left|H_f(0,1)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}(x,y) & f_{12}(x,y) \\ f_{12}(x,y) & f_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0\,.$$

Como $\left|H_f(0,1)\right| = -1 < 0$, no se puede asegurar con estas condiciones que el origen $(0,0)$ sea un extremo local de f en A. Sin embargo, al examinar las curvas de nivel se observa que en cualquier entorno suyo hay puntos donde la función toma valores mayores (los del primer y tercer cuadrantes), y puntos donde la función toma valores menores (los del segundo y cuarto cuadrantes), luego no es extremo local de *f* en *A*.

B) Frontera de *A*.

Hay que examinar dos tramos: el correspondiente a la recta $x - y + 1 = 0$ y el de la parábola $x + y^2 = 1$, y además los puntos de corte de estos tramos que son $(0,1)$ y $(-3,-2)$

B1. Tramo de la recta $x - y + 1 = 0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x - y + 1).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - y + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $\lambda = -y = x$, o sea $x + y = 0$. Junto con la tercera ecuación se forma el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = -1 \end{array}\right\},$$

cuya solución es $x=-\frac{1}{2}$. $y=\frac{1}{2}$; el multiplicador asociado es $\lambda=-\frac{1}{2}$. Luego en este tramo se ha obtenido un candidato $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. A la vista de las curvas de nivel en el gráfico, se advierte que es un mínimo local.

B2. Tramo de la parábola $x+y^2=1$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=xy+\lambda\left(x+y^2-1\right).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x+2y\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x+y^2-1=0\end{array}\right\}.$$

De la primera ecuación obtenemos $y=-\lambda$, que sustituyendo en la segunda lleva a $x=2y^2$. Y volviendo a sustituir en la tercera ecuación se obtiene $3y^2-1=0$. Se deduce entonces $y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, y $x=\frac{2}{3}$; y el multiplicador asociado es $\lambda=\mp\sqrt{\frac{1}{3}}$.

En definitiva en el tramo de la parábola se han obtenido dos puntos: $\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ y $\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. En el gráfico como las curvas de nivel son hipérbolas, se percibe que $\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ es un máximo local, mientras que $\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$ es un mínimo local.

Respecto a los puntos de corte $(-3,-2)$ es un máximo local y $(0,1)$ no es extremo (ni máximo ni mínimo) local.

Para determinar los extremos globales se evalúa la función *f* en los candidatos. Se tiene que

$f\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=-\sqrt{\frac{4}{27}}\approx-0,38$; $f\left(\frac{2}{3},\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt{\frac{4}{27}}\approx 0,38$;

$f(-3,-2)=6$; $f\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}=-0.25$.

Por lo tanto el máximo global es únicamente $(-3,-2)$ y el mínimo global es $\left(\frac{2}{3},-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

5.- Sea $f(x,y)=x(x^2+y^2-4)$, Estudiar si la ecuación $f(x,y)=0$ define a y como función implícita de x, $y=\varphi(x)$, en torno a los puntos $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, (0,2) y (2,0). Calcular, si es posible, $\varphi'\left(\sqrt{2}\right)$.

<u>Solución:</u>

Se comprueba si se cumplen las condiciones del teorema de la función implícita.

1) La función f se evalúa en los puntos:

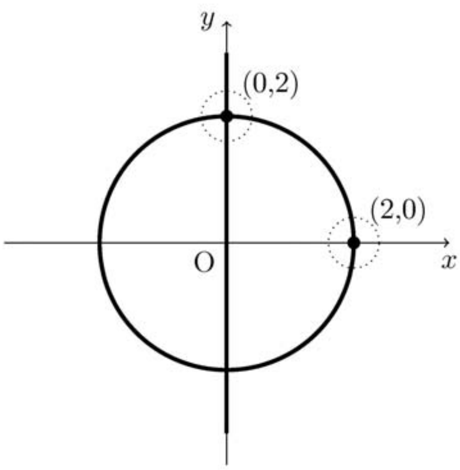
$$f(\sqrt{2},\sqrt{2})=\sqrt{2}(2+2-4)=0,$$

$$f(2,0)=\sqrt{2}(4+0-4)=0,$$

$$f(0,2)=\sqrt{0}(0+4-4)=0.$$

Luego se cumple la primera condición en los 3 puntos.

2) La función $f(x,y)=x(x^2+y^2-4)$ es un polinomio, luego tiene derivadas parciales- continuas en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,2)$ y $(2,0)$. Por tanto la segunda condición también se cumple en los 3 puntos.



3) La función $f_2(x,y)=2xy$ es un polinomio, luego es continua en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(0,2)$ y $(2,0)$. Además al evaluar $f_2(x,y)=2xy$ en los tres puntos se tiene:

$$f_2(\sqrt{2},\sqrt{2})=2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4\neq 0,$$

$$f_2(2,0)=2\cdot\sqrt{2}\cdot 0=0,$$

$$f_2(0,2)=2\cdot 0\cdot\sqrt{2}=0.$$

Luego la tercera condición únicamente se cumple en el punto $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. En este punto se puede asegurar por el teorema de la función implícita que $f(x,y)=0$ define a y como función implícita de x.

Sin embargo, en los puntos $(0,2)$ y $(2,0)$ no se puede asegurar que existe función implícita, y hay que recurrir al análisis gráfico. La curva de nivel 0 de la función $f(x,y)=x(x^2+y^2-4)$ está formada por la recta $x=0$ y la circunferencia

$x^2 + y^2 - 4 = 0$. En el gráfico se aprecia que en los puntos $(0,2)$ y $(2,0)$ no se define función implícita, pues en cualquier entorno de uno de esos puntos existen valores de x a los que correspondería más de un valor de y.

Finalmente se calcula el valor $\varphi'(\sqrt{2})$. Teniendo en cuenta que $f_1(x,y) = 3x^2 + y^2 - 4$, se tiene:

$$\varphi'(\sqrt{2}) = -\frac{f_1(\sqrt{2},\sqrt{2})}{f_2(\sqrt{2},\sqrt{2})} = -\frac{4}{4} = -1.$$

EXAMEN DE MATEMÁTICAS

LADE. JUNIO DE 2010

1.- Sea la función $f(x,y)=\dfrac{y\sqrt{x}}{(x-y)^2}$.

i) Hallar y representar el dominio D de la función. ¿Es D un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto?

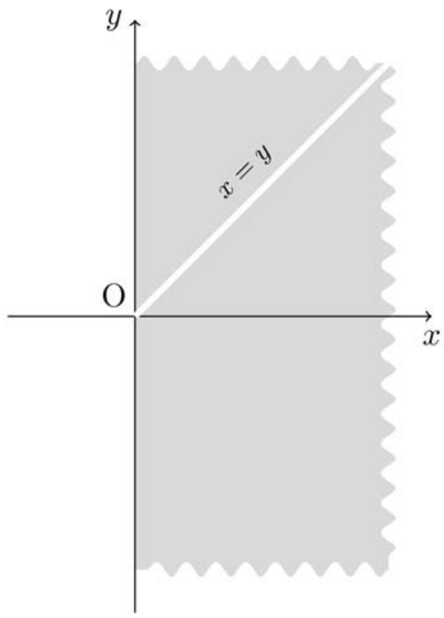
ii) Estudiar la existencia del límite de f en el punto (0,0).

iii) ¿Es f continua, derivable, o diferenciable en (1,0)?, ¿existe el límite de la función en este punto?

Solución:

i) El dominio es la zona sombreada de la figura, y formalmente es el conjunto

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0,\ x\neq y\right\}.$$



El conjunto no es abierto, porque hay puntos de su frontera que están en el conjunto (por ejemplo, todos los puntos del eje $x=0$ salvo el origen).

Tampoco es cerrado porque hay puntos de la frontera que no pertenecen al conjunto (los puntos de la recta $x=y$ que están en el primer cuadrante).

Tampoco es acotado porque no se puede incluir en ninguna bola de centro el origen.

Y, finalmente, no es compacto porque para serlo debería ser a la vez cerrado y acotado.

ii) Examinamos si existe el límite de f en $(0,0)$ a través de sucesiones.

La sucesión $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)$, y se cumple $\left(0,\frac{1}{n}\right)\in D$ para cada n. Además

$$f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\frac{0}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2}\to 0,$$

Por otra parte la sucesión $\left\{\left({}^{1}\!/_{n^2}, {}^{1}\!/_{n} \right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)$, y se cumple $\left({}^{1}\!/_{n^2}, {}^{1}\!/_{n} \right) \in D$ para cada n. Además

$$f\left({}^{1}\!/_{n^2}, {}^{1}\!/_{n} \right) = \frac{{}^{1}\!/_{n}\sqrt{{}^{1}\!/_{n^2}}}{\left({}^{1}\!/_{n^2} - {}^{1}\!/_{n} \right)^2} = \frac{{}^{1}\!/_{n^2}}{\left(1 - {}^{n}\!/_{n^2} \right)^2} = \frac{n^2}{(1-n)^2} = \frac{n^2}{1+n^2-2n} \to 1 .$$

Como estos límites no coinciden, entonces no existe el límite de f en $(0,0)$.

iii) El punto $(1,0) \in \operatorname{Int}(D)$, y la función es continua en este punto (respectivamente derivable y diferenciable) ya que:

— la función raíz cuadrada es continua (resp. derivable y diferenciable) en puntos en los que el radicando es positivo, y la función $y\sqrt{x}$ es por tanto continua (resp. derivable y diferenciable) por ser producto de funciones continuas (resp. derivables y diferenciables)

— la función $(x-y)^2$ es un polinomio luego continua (resp. derivable y diferenciable),

— el cociente de funciones continuas (resp. derivables y diferenciables) es una función continua (resp. derivable y diferenciable) siempre que el denominador no se anula. El límite existe porque la función es continua y además

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \frac{0\cdot\sqrt{1}}{(1-0)^2} = 1 .$$

2.- Calcula las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

i) $f(x,y) = \cos^2\left(\dfrac{2y}{x^2}\right)$.

ii) $f(x,y) = \ln\left(2xy^4\right)$.

iii) $z = \left(g\left(e^{xy}\right)\right)^3$, siendo $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

iv) $z = y^2 f\left(x^2, 2\sqrt{x-y}\right)$, siendo $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Solución:

i) $f(x,y)=\cos^2\left(\dfrac{2y}{x^2}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left(\frac{-4y}{x^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x^2}\right)2\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)=\left(\frac{-4y}{x^3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{4y}{x^2}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{2}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2y}{x^2}\right)2\cos\left(\frac{2y}{x^2}\right)=\left(\frac{2}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{4y}{x^2}\right).$$

ii) $f(x,y)=\ln\left(2xy^4\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2y^4}{2xy^4}=\frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{8xy^3}{2xy^4}=\frac{4}{y}.$$

iii) $z=\left(g\left(e^{xy}\right)\right)^3$, siendo $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}g'\left(e^{xy}\right)3\left(g\left(e^{xy}\right)\right)^2=3ye^{xy}g'\left(e^{xy}\right)g^2\left(e^{xy}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}3g'\left(e^{xy}\right)\left(g\left(e^{xy}\right)\right)^2=3xe^{xy}g'\left(e^{xy}\right)g^2\left(e^{xy}\right).$$

iv) $z=y^2f\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)$, siendo $f\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

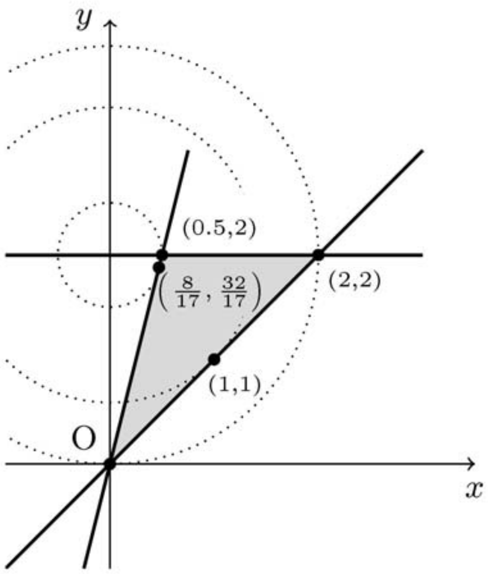
$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2\left(2x\cdot f_1\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}}\right)f_2\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\cdot f\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)+y^2\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{x-y}}\right)f_2\left(x^2,2\sqrt{x-y}\right)\right).$$

3.- Hallar los máximos y mínimos locales y globales de $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$ en el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 4x,\ y\le 2,\ y\ge x\}$.

Solución:

El conjunto A es la zona sombreada de la figura; A es compacto y la función f es continua en A, luego se puede asegurar que existen los extremos globales de f en A. Las curvas de nivel son circunferencias centradas en el punto (0,2).



Examinamos separadamente el interior y la frontera del conjunto A.

A) Interior de A.

– Condiciones necesarias: Se deben anular las derivadas parciales.

$$\begin{array}{l} f_1(x,y)=2x=0 \\ f_2(x,y)=2(y-2)=0 \end{array},\ \text{de donde } x=0,\ y=2.$$

Se obtiene el punto $(0,2)$ que no está en $\operatorname{Int}(A)$, luego no existen candidatos en el interior de A.

B) Frontera de A.

Hay que examinar tres tramos: el correspondiente a las rectas $y-4x=0$, $y-2=0$, e $y-x=0$, y además los puntos de corte de estos tramos que son $(0,0)$, $(2,2)$ y $\left(\frac{1}{2},2\right)$.

B1. Tramo de la recta $y-4x=0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-2)^2+\lambda(y-4x).$$

Las condiciones de primer orden son

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-4\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-2)+\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y-4x=0\end{array}\right\}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $\lambda=\left(\frac{1}{2}\right)x=-2(y-2)$, o sea $x=-4(y-2)$. Junto con la tercera ecuación se forma el sistema

$$\left.\begin{array}{l}x+4(y-2)=0\\ 4x-y=0\end{array}\right\},$$

cuya solución es $x=\frac{8}{17}$, $y=\frac{32}{17}$; el multiplicador asociado es $\lambda=\frac{4}{17}$. Luego en este tramo se ha obtenido un candidato: $\left(\frac{8}{17},\frac{32}{17}\right)$. Al examinar las curvas de nivel en el gráfico se observa que es un mínimo local.

B2. Tramo de la recta $y-2=0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-2)^2+\lambda(y-2).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-2)+\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y-2=0\end{array}\right\}$$

De la primera ecuación se obtiene $x=0$, y de la tercera $y=2$. Como el punto (0,2) no pertenece a *A*, en este tramo no se obtienen candidatos a extremo.

B3. Tramo de la recta $x-y=0$.

La función *lagrangiana* es

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+(y-2)^2+\lambda(x-y).$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-2)-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x-y=0\end{array}\right\}$$

De la primera ecuación y segunda ecuaciones se obtiene $2x+2(y-2)=0$. Junto con la tercera ecuación se forma el sistema

$$\left.\begin{array}{l}2x+2(y-2)=0\\ x-y=0\end{array}\right\},$$

cuya solución es $x=1$, $y=1$; el multiplicador asociado es $\lambda=-2$. Luego en este tramo se ha obtenido un candidato: $(1,1)$. Examinando el gráfico se observa que este punto es mínimo local respecto de la frontera, pero no es mínimo local respecto del conjunto.

Respecto de los puntos de corte, se tiene que el punto $\left(\frac{1}{2},2\right)$ no es extremo local, y los puntos (0,0) y (2,2) son máximos locales.

En resumen se tiene que el punto $\left(\frac{8}{17},\frac{32}{17}\right)$ es el mínimo global. Y los puntos (0,0) y (2,2) son los máximos globales (la función toma el mismo valor, 4, en ambos puntos).

4.- Sea $f(x,y)=g(x,y)x^3$, donde $g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ es una función homogénea de grado 2.

i) ¿Es *f* homogénea?, ¿de qué grado?

ii) Sabiendo que $f(2,4)=64$, hallar $f(1,2)$.

iii) Comprobar que *f* cumple el Teorema de Euler.

<u>Solución:</u>

i) Para ver si es homogénea se calcula $f(tx,ty)$. Se obtiene

$$f(tx,ty)=g(tx,ty)(tx)^3=t^2g(x,y)t^3x^3=t^5\left(g(x,y)x^3\right)=t^5f(x,y).$$

Luego *f* es homogénea de grado 5 (la segunda igualdad se debe a que *g* es homogénea de grado 2).

ii) Por ser *f* homogénea de grado 5 se cumple:

$f(2,4) = f(2 \cdot 1, 2 \cdot 2) = 2^5 \cdot f(1,2)$,

y por lo tanto $f(1,2) = \left(1/2^5 \right) \cdot f(2,4) = \left(1/32 \right) \cdot 64 = 2$.

iii) El Teorema de Euler asegura que si *f* es homogénea de grado α, se cumple:

$xf_1(x,y) + yf_2(x,y) = \alpha f(x,y)$.

Realizamos los cálculos:

$$\begin{aligned} xf_1(x,y) + yf_2(x,y) &= x\left(g_1(x,y)x^3 + 3x^2 g(x,y)\right) + y\left(g_2(x,y)x^3\right) \\ &= x^3\left(xg_1(x,y) + yg_2(x,y)\right) + 3x^3 g(x,y) \\ &= x^3\left(2g(x,y)\right) + 3x^3 g(x,y) \\ &= 5x^3 g(x,y) = 5f(x,y). \end{aligned}$$

Luego $xf_1(x,y) + yf_2(x,y) = 5f(x,y)$ como se quería probar (en la primera igualdad se han calculado las derivadas parciales; en la segunda se han agrupado los términos convenientemente para poder aplicar en la tercera igualdad el Teorema de Euler a la función *g*).