eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco · Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

# Ecuaciones integrales en el contexto de espacios de Hilbert

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Marta Landa Fernández

Trabajo dirigido por
Pedro Alegría Ezquerra

Leioa, 23 de junio de 2015

# Índice general

# Resumen

Las ideas básicas de la teoría de los espacios de Hilbert tienen como origen diversos problemas del análisis funcional, entre los cuales podemos citar los relativos a ciertas ecuaciones integrales lineales.

Concretamente, un precedente de los métodos de la teoría espectral de operadores fue precisamente el enfoque de I. Fredholm de resolución de ciertas ecuaciones integrales mediante la teoría de matrices y determinantes infinitos utilizando el método de coeficientes indeterminados. Imitando la técnica de von Koch para desarrollar determinantes infinitos, Fredholm desarrolló su famoso teorema de alternativa en la resolución de las ecuaciones que llevan su nombre.

Algunos tipos de ecuaciones integrales lineales están relacionados con operadores acotados completamente continuos y la teoría espectral para esta clase de operadores se podrá aplicar en la resolución de estas ecuaciones.

En esta memoria se estudian distintos aspectos de estas y otras ecuaciones integrales.

En el capítulo 1 se definen los conceptos básicos necesarios para el seguimiento de la misma, como es la de operador lineal y sus propiedades. Se distingue una clase importante de operadores, los compactos. Y se demuestra que todo operador integral pertenece a esta clase de operadores.

En los capítulos 2 y 3 se introduce el concepto de ecuación integral, diferenciando las de Fredholm de las de Volterra, y se estudian diferentes técnicas de resolución de dichas ecuaciones, como son el teorema de alternativa, el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos, ecuaciones integrales con núcleos degenerados y resolución por el método de aproximaciones sucesivas.

Para finalizar, en el apéndice se resuelven algunos ejercicios utilizando los diferentes métodos estudiados.

# Introducción

**Jean Dieudonné** definió así el Análisis Funcional:

> *"Estudio de los espacios vectoriales topológicos y de las aplicaciones definidas entre subconjuntos de los mismos, sujetas a distintas condiciones algebraicas y topológicas."*

Ya en el comienzo del Cálculo Diferencial se ve la necesidad de definir conjuntos cuyos elementos sean funciones, y este es el origen del Análisis Funcional: estudiar *espacios funcionales*, es decir, conjuntos formados por funciones en los cuales se permite realizar gran parte de las operaciones del Análisis (límite de sucesiones, continuidad de funciones, ...).

En el Análisis Funcional se tiende a la algebrización del Análisis, pues de aquí surge la necesidad de pasar de espacios de dimensión finita a espacios de dimensión infinita. Bien se sabe que los métodos algebraicos en conjuntos finitos son más sencillos, de modo que los analistas consideraron las ecuaciones funcionales como casos límites de ecuaciones algebraicas, cuya solución es más sencilla. Dos son las líneas fundamentales de evolución de la teoría al paso de espacios de dimensión infinita: los sistemas infinitos de ecuaciones lineales y las ecuaciones integrales.

Las ecuaciones integrales motivaron el interés de los matemáticos por los espacios de dimensión infinita, espacios de Hilbert y, posteriormente, por los espacios de Banach. Es curioso que la atención prestada a las ecuaciones integrales fuera posterior a la de las ecuaciones diferenciales, a pesar de que la teoría de éstas es considerablemente más complicada que la de las primeras. A lo largo del siglo XIX se habían planteado algunas ecuaciones integrales relacionadas habitualmente con la Física.

En 1823, **Niels Abel** había resuelto la ecuación

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$$

relacionada con el problema de la tautócrona. Este es un ejemplo de las que, según la notación de Hilbert, se llaman *ecuaciones integrales de primera especie*.

Un ejemplo de *ecuación integral de segunda especie*, donde la función incógnita aparece tanto dentro como fuera de la integral, vino dado por el método de Beer-Neumann para la solución del problema de Dirichlet. Beer y Neumann redujeron el problema de Dirichlet en un dominio regular a la resolución de una ecuación integral de segunda especie.

Fue en 1888 cuando **Paul du Bois-Reymond** sugirió el nombre de ecuaciones integrales para designar este tipo de problemas, y propuso una teoría general de tales ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones diferenciales. Los primeros resultados generales en este campo los obtuvieron **J.M. Le Roux** y **Vito Volterra**. Ambos establecieron teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones del tipo

$$f(x) + \int_a^x k(x,t)f(t)\,dt = g(x)$$

mediante hipótesis adecuadas sobre el núcleo $k$.

El trabajo de Volterra tuvo mayor influencia ya que observó la semejanza de las ecuaciones integrales con los sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes fuera triangular (sustituyendo la integral por sus sumas de Riemann).

Esta observación de Volterra influyó en el trabajo de **Fredholm** sobre ecuaciones integrales. La intención de Fredholm era dar un nuevo método de resolución del problema de Dirichlet. Para ello, consideró el método de Beer-Neumann y trató de resolver la ecuación integral, introduciendo un parámetro complejo $\lambda$ (según una idea de Poincaré). Así escribió la ecuación

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt = g(x)$$

para estudiar las propiedades de la solución en función de $\lambda$, mediante la teoría de matrices y determinantes infinitos utilizando el método de coeficientes indeterminados.

La potencia de los resultados de Fredholm sobre este tema causaron un profundo impacto, poniendo la teoría de ecuaciones integrales en el centro de interés de los matemáticos.

Uno de los matemáticos que se interesó vivamente por el tema fue **David Hilbert**. Publicó seis artículos y en cuatro de los cuales desarrolló una teoría completa de las ecuaciones integrales al modo clásico y estudió las ecuaciones integrales de núcleo continuo y simétrico, es decir $k(x,t) = k(t,x)$.

Demostró también que toda función de la forma

$$g(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt \qquad (f \text{ continua})$$

tenía un desarrollo en serie de autofunciones $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \psi_n\rangle\, \psi_n(x)$ absoluta y uniformemente convergente, lo que permitió abordar la resolución de la ecuación integral de parámetro $\lambda$. La validez de este resultado para toda función continua fue probada por **Erhard Schmidt** (uno de los mejores discípulos de Hilbert).

Hilbert introdujo también la noción de *sistema ortogonal completo de funciones* como una sucesión $(\psi_n)$ de funciones continuas en $[a, b]$ tal que $\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \delta_{nm}$ y que cumple la "relación de completitud" siguiente:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \langle g, \psi_n \rangle$$

para $f$ y $g$ continuas.

En esta memoria se estudian y resuelven algunas ecuaciones integrales lineales de los tipos mencionados anteriormente. A continuación, haremos un resumen sobre la memoria.

En primer lugar, al no haber podido cursar la asignatura Análisis Funcional, en el capítulo 1 se pretende rellenar ese hueco introduciendo los conceptos y resultados necesarios sobre el tema que vamos a tratar. Comenzaremos dando la definición de espacio normado para poder hablar de operadores lineales en dichos espacios. Definiremos los conceptos de operador invertible, operador adjunto (únicamente para el caso de operadores en espacios pre-Hilbert) y dedicaremos una sección al estudio de los operadores compactos, pues son una clase importante de operadores, y demostraremos que incluyen a los operadores integrales. Terminaremos el primer capítulo haciendo una pequeña introducción a la teoría espectral de operadores, especialmente para los compactos y autoadjuntos.

El capítulo 2 lo dedicaremos al estudio de las ecuaciones integrales de Fredholm y el capítulo 3 a las ecuaciones integrales de Volterra, a pesar de ser estas un caso particular de las anteriores. En primer lugar, daremos la definición de ecuación integral y distinguiremos dos tipos: las ecuaciones integrales de Fredholm, tanto de primera especie como de segunda especie, y las de Volterra. Dividiremos el estudio según los operadores sean o no autoadjuntos, ya que en el caso de ser autoadjunto obtendremos información más detallada a través de sus autovalores y autofunciones.

Para el caso de operadores lineales, acotados y compactos estudiaremos el famoso teorema de alternativa de Fredholm, adaptado a las ecuaciones integrales, el cual nos permite saber si existe o no solución de la ecuación. A diferencia de estos, cuando el operador también es autoadjunto, el teorema espectral de operadores compactos y autoadjuntos nos permite, además, obtener la solución de la ecuación.

Para finalizar este capítulo, estudiaremos las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie con núcleos degenerados.

El capítulo 3, como ya hemos mencionado, lo dedicaremos a las ecuaciones integrales de Volterra de primera y segunda especie. Estudiaremos, en primer lugar, la relación que hay entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra. También estudiaremos, para las ecuaciones de segunda especie, el método de las aproximaciones sucesivas y veremos cómo transformar las de primera especie en las de segunda especie, ya que las primeras suelen ser más difíciles de manejar. Aun así, resolveremos la ecuación de Abel, que es un ejemplo de ecuación de primera especie, sin la necesidad de ser transformada.

Por último, añadiremos un apéndice con algunos ejercicios que hemos resuelto a lo largo de la realización de la memoria así como una bibliografía donde se enumeran algunos libros clásicos sobre las ecuaciones integrales y otros libros que se han utilizado como material de referencia para la elaboración de esta memoria.

# Capítulo 1

# Fundamentos teóricos

En este primer capítulo vamos a introducir los conceptos básicos del Análisis Funcional necesarios para la resolución de ecuaciones integrales. Recordaremos las definiciones de norma y producto escalar en espacios vectoriales así como la de operador lineal y acotado sobre espacios normados y pre-Hilbert. También definiremos los operadores compactos y los operadores autoadjuntos y estudiaremos las propiedades básicas de los mismos. En la bibliografía citamos algunos textos consultados, como por ejemplo [GG].

## 1.1. Espacios normados

**Definición 1.1.1.** Dado un espacio vectorial $X$ sobre el cuerpo $E$ (que será $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), se dice que una aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es una *norma* cuando verifica:

(i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$.

(ii) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \quad \forall \alpha \in E,\ x \in X$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$ (desigualdad triangular).

Al par $(X, \|\cdot\|)$ se llama *espacio normado*.

Todo espacio normado es también espacio métrico pues se comprueba fácilmente que la aplicación $d(x, y) = \|x-y\|$ verifica los axiomas de métrica:

(i) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in X$.

(ii) $d(x, x) = 0, \quad \forall x \in X$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$.

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$.

**Observación 1.1.1.** El recíproco de esta propiedad no es cierto, es decir, no todo espacio métrico es normado. Por ejemplo, la aplicación

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y, \end{cases}$$

es una distancia, llamada *distancia trivial*, pero $\|x\| = d(x,0)$ no es una norma ya que no verifica la condición (iii).

**Definición 1.1.2.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $d(x,y) = \|x-y\|$ su métrica asociada, se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach* cuando $(X,d)$ es un *espacio completo*, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy en $X$ es convergente.

**Proposición 1.1.1.** *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $M$ un subespacio de $X$, entonces $M$ es de Banach si y sólo si $M$ es cerrado.*

**Ejemplos.** Algunos ejemplos básicos de espacios normados son los siguientes.

(i) Sea $p$ un número real tal que $1 \leq p < \infty$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

son normas en $\mathbb{R}^n$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

(ii) Dado un número real $p$ tal que $1 \leq p < \infty$, definimos los espacios

$$\ell_p = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\},$$
$$\ell_\infty = \{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : x \text{ acotada}\}$$

Entonces las aplicaciones

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \ (x \in \ell_p), \quad \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n| \ (x \in \ell_\infty)$$

verifican los axiomas de norma y $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ son espacios de Banach.

(iii) Si llamamos $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$ y definimos $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ $(f \in C[a,b])$, entonces $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach. Sin embargo, si definimos $\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$ $(1 \leq p < \infty)$, entonces $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ es normado pero no completo.

(iv) Dado cualquier $p$, con $1 \leq p < \infty$, se define el espacio vectorial $\mathcal{L}^p[a,b]$ como
$$\mathcal{L}^p[a,b] = \{f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}} : \int_a^b |f(x)|^p\, dx < \infty\}.$$
La norma natural para definir en estos espacios sería
$$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$
Sin embargo, falla la segunda condición de norma porque si $f = 0$ c.s., entonces $\|f\|_p = 0$.

Así, para conseguir una norma a partir de la aplicación anterior, se define sobre $\mathcal{L}^p[a,b]$ la relación de equivalencia:
$$f \sim g \quad \text{cuando } f = g \quad \text{c.s.}$$
Se prueba que efectivamente es una relación de equivalencia y se define el espacio cociente
$$L^p[a,b] = \mathcal{L}^p[a,b]/\sim,$$
y así $(L^p[a,b], \|\cdot\|_p)$ es un espacio normado. Además, $L^p[a,b]$ es un espacio de Banach.

Análogamente, se define el espacio $\mathcal{L}^\infty[a,b]$ de funciones acotadas en $[a,b]$, así como $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. El correspondiente espacio cociente $(L^\infty[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ es también un espacio de Banach.

**Definición 1.1.3.** Dado un espacio vectorial $X$ sobre el cuerpo $E$, se dice que una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ es un *producto escalar* cuando verifica las siguientes condiciones:

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle, \quad \forall x, y, z \in X.$

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \quad \forall \alpha \in E,\ x, y \in X.$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}, \quad \forall x, y \in X.$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in X$ y $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Al par $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se llama *espacio pre-Hilbert.*

Todo producto escalar induce una norma sobre el espacio en el que está definido, dada por $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Por lo que todo espacio pre-Hilbert es normado.
Si además es completo con respecto a la métrica asociada, se dice que es un *espacio de Hilbert.*

**Ejemplos.** Los ejemplos básicos que nos van a interesar son los siguientes:

(i) $\ell_2$ es un espacio de Hilbert si se define el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}.$$

(ii) $L^2[a,b]$ es un espacio de Hilbert, cuyo producto escalar está definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

**Definición 1.1.4.** Sea $X$ un espacio pre-Hilbert.

(i) Decimos que dos vectores $x, y \in X$ son *ortogonales*, y lo denotamos por $x \perp y$, cuando $\langle x, y\rangle = 0$.

(ii) Un conjunto $N \subset X$ se dice *ortogonal* si para todo $x, y \in N$ $(x \neq y)$, se cumple $\langle x, y\rangle = 0$.

(iii) Dado un subconjunto $M \subset X$, llamamos *complemento ortogonal de* $M$, al conjunto $M^{\perp} = \{y \in X : \langle x, y\rangle = 0,\ \forall x \in X\}$.

**Proposición 1.1.2.** *Si $x \perp y$, entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Además, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de vectores ortogonales dos a dos y $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, entonces $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \cdot \|e_i\|^2$.*

**Proposición 1.1.3.** *Dado $M \subset X$, el complemento ortogonal $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de $X$.*

**Proposición 1.1.4.** *Todo conjunto ortogonal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es linealmente independiente en cualquier espacio $X$ pre-Hilbert. En particular, si $X$ es de dimensión $k$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es un conjunto ortonormal, $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base de $X$ y cualquier vector $x \in X$ se puede expresar de la siguiente forma:*

$$x = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Al conjunto $\{e_1, \ldots, e_k\}$ se le llama *base ortonormal* y las componentes $\langle x, e_n\rangle$ son los coeficientes de Fourier de $x$ respecto de dicha base.

**Teorema 1.1.5** (desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

*Se da la igualdad si y sólo si $x$ e $y$ son linealmente dependientes.*

## 1.2. Operadores en espacios normados

A lo largo de esta sección vamos a considerar que $X, Y$ son espacios normados arbitrarios.

**Definición 1.2.1.** Una aplicación $K : X \to Y$ se llama *operador lineal* si

(i) $K(x+y) = K(x) + K(y), \quad \forall x, y \in X.$

(ii) $K(\alpha x) = \alpha K(x), \quad \forall \alpha \in E,\ x \in X.$

**Definición 1.2.2.** Un operador lineal $K : X \to Y$ se dice *acotado* si existe $m \in \mathbb{R} : \|Kx\| \leq m \cdot \|x\|, \forall x \in X$.

Se denota por $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de operadores lineales y acotados de $X$ en $Y$, es decir,

$$\mathcal{L}(X,Y) = \{K : X \to Y,\ K \text{ es lineal y acotado}\}.$$

En particular, si $X = Y$, se escribe $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

**Proposición 1.2.1.** $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ *es un espacio vectorial normado si se define*

$$\|K\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Kx\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Kx\|}{\|x\|}, \quad \forall K \in \mathcal{L}(X,Y).$$

*Además,* $\mathcal{L}(X,Y)$ *es de Banach si y sólo si* $Y$ *es de Banach.*

Algunas propiedades elementales de los operadores lineales y acotados se resumen en el siguiente resultado.

**Proposición 1.2.2.** *Sean* $X, Y, Z$ *espacios normados.*

(i) $\|K + T\| \leq \|K\| + \|T\|$, *si* $K, T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(ii) $\|\alpha K\| = |\alpha| \cdot \|K\|$, *si* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $CK \in L(X,Z)$ *y* $\|CK\| \leq \|C\| \cdot \|K\|$, *si* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, $C \in \mathcal{L}(Y,Z)$.

En la resolución de ecuaciones que involucren operadores lineales, es importante el concepto de operador invertible.

**Definición 1.2.3.** Un operador $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ se dice *invertible* si existe otro operador $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ tal que $KT = I_Y$, $TK = I_X$. En este caso, se dice que $T$ es el *inverso* de $K$ y se denota por $K^{-1}$.

Es evidente que, si $K$ es invertible, su inverso es único.

**Lema 1.2.3.** *Si* $K \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y,X)$ *son operadores invertibles, entonces* $TK$ *es también invertible, cuyo inverso es* $(TK)^{-1} = K^{-1}T^{-1}$.

También es importante el concepto de operador adjunto y aquí daremos únicamente la definición para el caso de operadores en espacios pre-Hilbert.

**Teorema 1.2.4.** *Sean $H_1$, $H_2$ espacios pre-Hilbert y sea $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Existe un único operador $K^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ tal que*

$$\langle Kx, y \rangle = \langle x, K^* y \rangle, \ \forall x \in H_1, \, y \in H_2.$$

*Además, se tiene que $\|K\| = \|K^*\|$.*

**Definición 1.2.4.** Sea $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. El operador $K^*$ construido en el teorema anterior se llama *adjunto de $K$*.

Gracias a la unicidad del operador adjunto, si encontramos un operador $T$ que cumple $\langle Kx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ para todo $x \in H_1$, $y \in H_2$, entonces se tiene que $T = K^*$.

**Observación 1.2.1.** El concepto de operador adjunto generaliza el de matriz adjunta porque, si $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es el operador lineal dado por la matriz $A = (a_{i,j})$, entonces su adjunto es el operador dado por la matriz $A^* = (\overline{a_{j,i}})$.

**Proposición 1.2.5.** *Si $K, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) $(K + T)^* = K^* + T^*$.

(ii) $(aK)^* = \overline{a} K^*$.

(iii) $K^{**} = K$.

(iv) $(CK)^* = K^* C^*$.

(v) *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es invertible entonces $A^*$ es también invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

**Definición 1.2.5.** Un operador $K \in \mathcal{L}(H)$ se llama *autoadjunto* si se cumple $K^* = K$.

**Proposición 1.2.6.** *Si $K \in \mathcal{L}(H)$, entonces $K^* K$ y $KK^*$ son autoadjuntos.*

**Definición 1.2.6.** Se dice que $K \in \mathcal{L}(H)$ es un *operador normal* si se cumple $KK^* = K^* K$.

## 1.3. Operadores compactos

Una clase importante de operadores, que incluyen precisamente a los operadores integrales, es la de los operadores compactos o completamente continuos, que definiremos en esta sección. Mientras no se especifique lo contrario, $X$ e $Y$ denotarán espacios normados.

**Definición 1.3.1.** Dados dos espacios normados $X$ e $Y$, se dice que un operador $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es *compacto* si para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}$ en $X$, la sucesión $\{Kx_n\}$ en $Y$ posee una subsucesión convergente.

El siguiente resultado muestra que todo operador lineal en espacios de dimensión finita es compacto. Esto significa que los operadores compactos generalizan a los operadores en espacios de dimensión finita.

**Proposición 1.3.1.** *Sea $K \in \mathcal{L}(X, Y)$. Si $\dim X < \infty$ ó $\dim Y < \infty$, entonces $K$ es compacto.*

Los operadores compactos incluyen también a los operadores de rango finito, cuyas características fundamentales enunciamos a continuación.

**Definición 1.3.2.** Dado un operador $K : X \to Y$, si denotamos por $\Im K = \{Kx : x \in X\}$ a la imagen de $K$, decimos que $K$ es un *operador de rango finito* cuando la dimensión de $\Im K$ es finita y llamamos *rango de* $K$ a $r(K) = \dim \Im K$.

**Proposición 1.3.2.** *Si $H_1$ y $H_2$ son espacios pre-Hilbert, $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ y $r(K) = n < \infty$, entonces existen dos familias de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset H_1$ y $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset H_2$, tales que $Kx = \sum_{i=1}^{n} \langle x, v_i \rangle \varphi_i$, para todo $x \in H_1$.*

En particular, la forma general de un operador $K \in \mathcal{L}(L^2[a, b])$ de rango $n$ está dada por

$$Kf(t) = \sum_{j=1}^{n} w_j(t) \int_a^b f(s)\overline{v_j(s)}\, ds$$

donde $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\} \subset L^2[a, b]$.

**Proposición 1.3.3.** *Si $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ es un operador de rango finito, entonces $K$ es compacto.*

Las propiedades de los operadores compactos que nos van a interesar son las que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.3.4.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $K, T \in \mathcal{L}(H)$.*

*a) Si $K$ y $T$ son compactos, entonces $K + T$ es compacto.*

*b) Si $K$ es compacto, entonces $KT$ y $TK$ son compactos.*

*c) $K$ es compacto si y sólo si $K^*$ es compacto.*

La clase de operadores compactos que nos interesa especialmente es la de los operadores integrales, que definimos a continuación.

**Definición 1.3.3.** Sea el espacio normado $L^p[a,b]$ con $1 \leq p \leq \infty$. Si $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, se define *operador integral* de núcleo $k$ a la aplicación lineal $K : L^p[a,b] \to L^p[a,b]$ dada por

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

**Teorema 1.3.5.** *Si $k \in C([a,b] \times [a,b])$, entonces el operador integral $K : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ dado por*

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt$$

*es acotado.*

*Demostración.* Como $k(x,t)$ es continuo en un conjunto compacto, está acotado. Por tanto, existe $M > 0$ tal que $|k(x,t)| \leq M$, $\forall x, t \in [a,b]$. Entonces, si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz (proposición 1.1.5),

$$|Kf(x)| \leq M \int_a^b |f(t)|\,dt \leq M \left( (b-a) \int_a^b |f(t)|^2\,dt \right)^{1/2} = M\sqrt{b-a} \cdot \|f\|,$$

de donde

$$\|Kf\| = \left( \int_a^b |Kf(x)|^2\,dx \right)^{1/2} \leq M(b-a)\|f\|.$$

En definitiva, $\|K\| \leq M(b-a)$. □

Observamos que, si el intervalo $[a,b]$ es infinito, el operador integral puede no ser acotado. Sin embargo, el siguiente resultado es válido incluso cuando el intervalo $[a,b]$ es infinito.

**Teorema 1.3.6.** *Si $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$, entonces el operador integral $K : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ dado por*

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt, \ x \in [a,b]$$

*es acotado.*

*Demostración.* Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\,dx\,dt = M^2 < \infty,$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|Kf(x)| \leq \left( \int_a^b |k(x,t)|^2\,dt \cdot \int_a^b |f(t)|^2\,dt \right)^{1/2}.$$

Entonces

$$\|Kf\| \leq \left( \|f\|^2 \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} = M\|f\|.$$

Así pues, $\|K\| \leq M$. □

El adjunto de un operador integral es fácil de calcular teniendo en cuenta el siguiente resultado.

**Proposición 1.3.7.** *Si $K : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ es el operador integral dado por*

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,t) f(t) \, dt, \text{ para todo } x \in [a,b],$$

*entonces*

$$K^* f(x) = \int_a^b \overline{k(t,x)} f(t) \, dt, \text{ para todo } x \in [a,b].$$

*Demostración.* Debemos verificar la condición

$$\langle Kf, g \rangle = \langle f, K^* g \rangle \text{ para todo } f, g \in L^2[a,b].$$

Por una parte,

$$\langle Kf, g \rangle = \int_a^b \int_a^b k(x,t) f(t) \overline{g(x)} \, dt \, dx,$$

y cambiando el orden de integración,

$$\langle Kf, g \rangle = \int_a^b f(t) \, dt \int_a^b k(x,t) \overline{g(x)} \, dx = \int_a^b f(t) \, dt \overline{\int_a^b \overline{k(x,t)} g(x) \, dx}.$$

De aquí se deduce que

$$K^* g(t) = \int_a^b \overline{k(x,t)} g(x) \, dx$$

con lo que queda demostrada la proposición. □

En consecuencia, cuando $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ para todo $x, t \in [a,b]$ tenemos que $K = K^*$, o equivalentemente

$$\langle Kf, g \rangle = \langle f, Kg \rangle$$

en cuyo caso el operador integral es autoadjunto.

**Proposición 1.3.8.** *Si $k \in C([0,1] \times [0,1])$, entonces el operador integral $K : C[0,1] \to C[0,1]$, definido por $Kf(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t) dt$, es compacto.*

*Demostración.* Sea $M \subset C[0,1]$ un conjunto acotado. Probemos que $K(M)$ es relativamente compacto en la métrica de $C[0,1]$.

Por hipótesis, existe $c > 0$ tal que $\|f\|_\infty \le c$, $\forall f \in M$.

• Veamos que $Kf$ es una función uniformemente acotada, $\forall f \in M$:

Si $\lambda = \max_{0 \le x,t \le 1} |k(x,t)|$, entonces $|Kf(x)| \le \int_0^1 |k(x,t)| \cdot |f(t)|\, dt \le \lambda \cdot c$.

• Veamos además que $Kf$ es equicontinua, $\forall f \in M$:

Sea para ello $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $k$ es uniformemente continuo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|k(x_1,t) - k(x_2,t)| < \varepsilon/c, \text{ si } |x_1 - x_2| < \delta, \ \forall t \in [0,1].$$

Entonces

$$|Kf(x_1) - Kf(x_2)| \le \int_0^1 |k(x_1,t) - k(x_2,t)| \cdot |f(t)| dt < \varepsilon$$

si $|x_1 - x_2| < \delta$.

Aplicando ahora el teorema de Ascoli-Arzelá, deducimos que el conjunto $K(M)$ es relativamente compacto. □

**Proposición 1.3.9.** *Si $k \in C([0,1] \times [0,1])$, entonces el operador integral $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, definido por $Kf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)dt$, es compacto.*

*Demostración.* Para comprobarlo, veamos que $\overline{K(B_1)}$ es compacto, donde $B_1$ es la bola unidad en $X$.

Es claro que si $f \in B_1$, $Kf \in C[0,1]$ y

$$\|Kf\|_\infty \le \|k\|_\infty \int_0^1 |f(t)| dt \le \|k\|_\infty \cdot \|f\|_2 \le \|k\|_\infty$$

de modo que $K(B_1)$ es un conjunto acotado de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Además $K(B_1)$ es un conjunto equicontinuo. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por ser $k$ uniformemente continuo en $[0,1] \times [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|k(x_1,t) - k(x_2,t)| < \varepsilon, \ \forall t \in [0,1], \ |x_1 - x_2| < \delta.$$

Por tanto, para todo $f \in B_1$,

$$\begin{aligned} |Kf(x_1) - Kf(x_2)| &\le \int_0^1 |k(x_1,t) - k(x_2,t)| \cdot |f(t)|\, dt \\ &< \varepsilon \int_0^1 |f(t)| dt \le \varepsilon \|f\|_2 \le \varepsilon. \end{aligned}$$

Por el teorema de Ascoli-Arzelá, $\overline{K(B_1)}$ es compacto en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Entonces, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_1$, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $f \in C[0,1]$ tales que $\|Kf_{n_k} - f\|_\infty \to 0$, de donde $\|Kf_{n_k} - f\|_2 \to 0$ lo que prueba la compacidad de $K$. □

Incluso si $k \in L^2([0,1] \times [0,1])$, el operador integral arriba definido es compacto. Así por ejemplo, el operador $K$ origina la ecuación integral $(K - \lambda I)f(x) = g(x)$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$, es un parámetro, $g, k$ son funciones dadas y $f$ es la función incógnita. Hilbert probó que la solubilidad de la ecuación no depende de la existencia de la representación integral de $K$ sino de que $K$ es un operador compacto.

**Proposición 1.3.10.** *El operador integral* $K : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ *definido por* $Kf(x) = \displaystyle\int_0^1 k(x,t)f(t)dt$*, donde* $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 k^2(x,t)dxdt < \infty$*, es compacto.*

*Demostración.* Consideramos una sucesión $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de núcleos continuos convergente a $k$ en $L^2([0,1]\times[0,1])$. Si definimos $K_n f(x) = \displaystyle\int_0^1 k_n(x,t)f(t)dt$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\|Kf - K_n f\|^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 [k(x,t) - k_n(x,t)]f(t)dt \right|^2 dx \\
&\le \int_0^1 \left| \Big( \int_0^1 |k(x,t) - k_n(x,t)|^2 dt \Big) \cdot \Big( \int_0^1 |f(t)|^2 dt \Big) \right| dx \\
&= \|f\|_2^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 |k(x,t) - k_n(x,t)|^2 dtdx.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\|K - K_n\| \le \left( \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 |k(x,t) - k_n(x,t)|^2 \, dxdt \right)^{1/2}$ y, en consecuencia, que $K_n \to K$. Por el teorema anterior se deduce que $K$ es compacto. $\square$

## 1.4. Introducción a la teoría espectral

En esta sección enunciaremos los conceptos fundamentales y los resultados básicos de la teoría espectral, con especial atención a los operadores compactos y autoadjuntos. Estos resultados son los que utilizaremos en los siguientes capítulos para resolver los diferentes tipos de ecuaciones integrales lineales.

A grandes rasgos, se puede decir que el teorema espectral de operadores es una generalización del teorema de diagonalización de matrices. El punto de partida será el siguiente resultado de álgebra lineal.

**Proposición 1.4.1.** *Sea* $X$ *un espacio vectorial de dimensión finita y* $K : X \to X$ *un operador lineal. Si* $(a_{ij})$ *es la matriz correspondiente a* $K$*, la ecuación* $(K - \lambda I)x = y$ *tiene una única solución para todo* $y \in X$ *si y sólo si* $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) \neq 0$.

Además, como $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij})$ es un polinomio con coeficientes complejos, la ecuación $\det(a_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ tiene un número finito de soluciones, es decir $K - \lambda I$ es invertible salvo para un conjunto finito de valores $\lambda$.

En el caso de que $X$ sea un espacio de Banach de dimensión infinita, el conjunto de $\lambda$ para los cuales $K - \lambda I$ no es invertible suele ser difícil de determinar.

**Definición 1.4.1.** Dado el operador $K \in \mathcal{L}(X)$, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *punto regular* de $K$ si existe $(K - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Al conjunto de puntos regulares se le llama *resolvente de* $K$ y se denota mediante $\rho(K)$.

**Definición 1.4.2.** El *espectro de* $K$ está definido por $\sigma(K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : K - \lambda I \text{ no tiene inverso acotado}\}$. Por tanto, $\sigma(K) = \mathbb{C} \setminus \rho(K)$.

**Definición 1.4.3.** Se dice que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de $K \in \mathcal{L}(X)$ si existe un vector $x \neq 0$ en $X$, llamado *autovector* asociado a $\lambda$, tal que $Kx = \lambda \cdot x$. Recibe el nombre de *espectro puntual de* $K$, y se denota por $\sigma_p(K)$, al conjunto de autovalores del operador $K$.

Es evidente que $\sigma_p(K) \subset \sigma(K)$ porque si $\lambda \in \sigma_p(K)$, entonces existe $x \in X$ no nulo tal que $(K - \lambda I)x = 0$ con lo que $K - \lambda I$ no es inyectiva. Sin embargo, a diferencia del caso finito, la igualdad no es necesariamente cierta.

El número de autovectores linealmente independientes asociados a un autovalor $\lambda$ recibe el nombre de *multiplicidad de* $\lambda$. Así pues, si $k$ es la multiplicidad de un autovalor $\lambda$, entonces $k = \dim \ker(K - \lambda I)$.

La siguiente proposición permite calcular el espectro de los operadores adjunto e inverso a partir del espectro de un operador lineal acotado.

**Proposición 1.4.2.** *Sea* $K \in \mathcal{L}(X)$.

(i) $\sigma(K^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(K)\}$.

(ii) *Si* $K$ *es invertible,* $\sigma(K^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(K)\}$.

El espectro de los operadores compactos tiene unas características especialmente simples.

**Teorema 1.4.3.** *Sea* $X$ *un espacio de Banach y* $K \in \mathcal{L}(X)$ *un operador compacto. El espectro de* $K$ *está formado por el cero y un conjunto finito o infinito, pero numerable,* $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ *de autovalores que cumplen:*

(i) *Si* $\lambda_i \neq 0$*, entonces tiene multiplicidad finita.*

(ii) *El único posible punto de acumulación de* $\{\lambda_i\}$ *es el cero.*

Como algunas de las ecuaciones integrales que estudiaremos corresponden a operadores compactos y autoadjuntos, estudiaremos el espectro de este tipo de operadores.

**Teorema 1.4.4.** *Si $H$ es un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(H)$ es compacto y autoadjunto, entonces alguno de los números $\|K\|$ ó $-\|K\|$ es un autovalor de $K$.*

**Teorema 1.4.5.** *Si $K$ es compacto y autoadjunto, el conjunto de autovalores no nulos de $K$ es no vacío. Además, es finito o está formado por una sucesión que tiende a cero. Cada autovalor no nulo es real y tiene multiplicidad finita.*

**Proposición 1.4.6.** *Si $K$ es autoadjunto, $\lambda, \mu$ autovalores, $\lambda \neq \mu$ y $x, y$ autovectores asociados, $Kx = \lambda \cdot x, Ky = \mu \cdot y$, entonces $x \perp y$.*

*Demostración.* $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Kx, y\rangle = \langle x, Ky\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \overline{\mu}\langle x, y\rangle \Longrightarrow (\lambda - \overline{\mu})\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow \langle x, y\rangle = 0.$ □

**Teorema 1.4.7.** *Si $\lambda$ es un autovalor de $K \in \mathcal{L}(H)$ entonces $|\lambda| \leq \|K\|$.*

El último resultado del capítulo es el teorema espectral de operadores compactos y autoadjuntos, que permite descomponer la imagen de cualquier elemento como combinación lineal de autovectores.

**Teorema 1.4.8** (espectral de operadores compactos autoadjuntos)**.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existen*

(i) *una sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de autovalores con $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ finita o infinita numerable, en cuyo caso converge a cero,*

(ii) *un conjunto ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Im(K)}$ de autovectores asociados a los anteriores autovalores,*

*tales que, para todo $x \in H$:*

$$x = x_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n\rangle e_n, \quad \textit{con } x_0 \in \ker(K) \tag{1.1}$$

$$Kx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{1.2}$$

*Demostración.* Si llamamos $H_1 = H$, $K_1 = K$, sabemos por la proposición 1.4.4 que existe $\lambda_1 \in \sigma_p(K_1)$ tal que $|\lambda_1| = \|K_1\|$. Por tanto, existe $e_1 \in H_1$ tal que $\|e_1\| = 1$ y $K_1 e_1 = \lambda_1 e_1$.

Si llamamos ahora $H_2 = \operatorname{span}\{e_1\}^\perp$ y $K_2 = K|_{H_2}$, de nuevo existe $\lambda_2 \in \sigma_p(K_2)$ tal que $|\lambda_2| = \|K_2\|$ y también existe $e_2 \in H_2$ tal que $\|e_2\| = 1$ y $K_2 e_2 = \lambda_2 e_2$.

Podemos continuar el proceso hasta que

a) o bien existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $K_m = 0$, en cuyo caso, dado cualquier $x \in H$, $y = x - \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, e_j \rangle e_j \in H_m$. Entonces

$$0 = K_m y = Ky = Kx - \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, e_j \rangle K e_j \Longrightarrow Kx = \sum_{j=1}^{m-1} \langle x, e_j \rangle \lambda_j e_j;$$

b) o bien $K_n x \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para cualquier $x \in H$, $y_n = x - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x, e_j \rangle e_j \in H_n$. Por el teorema 1.1.2,

$$\|x\|^2 = \|y_n\|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} |\langle x, e_j \rangle|^2 \Longrightarrow \|y_n\| \leq \|x\|.$$

Además, $\|Ky_n\| = \|K_n y_n\| \leq \|K_n\| \cdot \|y_n\| \leq |\lambda_n| \cdot \|x\|$, es decir

$$\|Kx - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j\|^2 = \|Ky_n\|^2 \leq |\lambda_n|^2 \cdot \|x\|^2.$$

Como $\lambda_n \to 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j = Kx$.

En ambos casos, se llega al resultado deseado. $\square$

# Capítulo 2

# Ecuaciones integrales de Fredholm

En este capítulo vamos a introducir el concepto de ecuación integral. En primer lugar, clasificaremos las ecuaciones integrales en dos tipos, ecuaciones de Fredholm y de Volterra y, en este capítulo, estudiaremos algún método de resolución de las ecuaciones integrales de Fredholm. Dedicaremos el siguiente capítulo a la resolución de las ecuaciones de Volterra.

Para resolver las ecuaciones integrales lineales las vamos a interpretar como ecuaciones de operadores integrales utilizando la descomposición espectral de dichos operadores. Una de las claves fundamentales es que estos operadores son compactos.

En el caso de los operadores compactos autoadjuntos podemos obtener información más detallada a través de sus autovalores y autofunciones. Por lo tanto, dividiremos el estudio en dos casos, según que los operadores sean o no autoadjuntos.

## 2.1. Definiciones previas

Una *ecuación integral* es una ecuación que contiene la función incógnita bajo el signo integral. Distinguimos dos tipos de ecuaciones integrales lineales:

(i) Las *ecuaciones integrales de Fredholm*:

Estudiamos dos tipos de ecuaciones integrales de Fredholm, las de primera especie y las de segunda especie, según la función incógnita aparezca solamente dentro de la integral o tanto dentro como fuera de ella.

Son de la forma

$$\int_a^b k(x,t)f(t)\,dt = g(x) \text{ y } \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x),$$

respectivamente, donde $\lambda$ es un parámetro complejo no nulo y el núcleo $k(x,t)$ (continuo) y la función $g(x)$ son conocidas.

Si definimos el operador $K$ como

$$Kf(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)\,dt,$$

ambas ecuaciones se pueden escribir en forma de operador como

$$Kf = g \qquad \text{y} \qquad (K - \lambda I)f = g.$$

Por tanto, resolver la ecuación equivale a encontrar los operadores inversos $K^{-1}$ y $(K-\lambda I)^{-1}$, respectivamente.

(ii) Las *ecuaciones integrales de Volterra*:

Al igual que con las de Fredholm, estudiamos dos tipos de ecuaciones integrales de Volterra: las de primera especie y las de segunda especie.

La diferencia con las anteriores es que, en estas ecuaciones, el límite superior de la integral es variable.

Son de la forma

$$\int_a^x k(x,t)f(t)\,dt = g(x) \text{ y } \int_a^x k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x),$$

respectivamente, donde $\lambda$ es un parámetro complejo no nulo y el núcleo $k(x,t)$ (continuo) y la función $g(x)$ son conocidas.

Si definimos el operador $K$ como

$$Kf(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)\,dt,$$

ambas ecuaciones se pueden escribir en forma de operador como

$$Kf = g \quad \text{y} \quad (K - \lambda I)f = g.$$

**Observación 2.1.1.** En algunos casos, plantearemos las ecuaciones de la forma $(K-\lambda I)f = g$, pero en otros casos las ecuaciones estarán expresadas de la forma $(I - \lambda K)f = g$. Sin embargo, salvo para el caso $\lambda = 0$, ambas ecuaciones son equivalentes, como veremos a continuación.

Teniendo en cuenta que,

$$(K-\lambda I)f = -(\lambda I - K)f = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}K)f = -\frac{1}{\mu}(I-\mu K)f,$$

resulta que

$$(K-\lambda I)f = g \Longleftrightarrow (I-\mu K)(-\frac{f}{\mu}) = g,$$

donde $\mu = 1/\lambda$, con $\lambda, \mu \neq 0$.

## 2.2. Ecuaciones integrales en espacios normados

Nos vamos a centrar en el espacio normado $X = L^p[a,b]$ con $1 \leq p \leq \infty$.

Para el caso de operadores lineales, acotados y compactos vamos a estudiar el llamado teorema de alternativa de Fredholm.

**Teorema 2.2.1** (Teorema de alternativa)**.** *Sea $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ un núcleo continuo y $f$, $g \in C[a,b]$. Consideramos las ecuaciones integrales*

$$\int_a^b k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x), \tag{2.1}$$

$$\int_a^b k(t,x)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x), \tag{2.2}$$

$$\int_a^b k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = 0, \tag{2.3}$$

$$\int_a^b k(t,x)f(t)\,dt - \lambda f(x) = 0. \tag{2.4}$$

*Entonces, una y sólo una de las siguientes alternativas va a ser cierta:*

(i) *las ecuaciones (2.1) y (2.2) tienen soluciones únicas. En este caso, (2.3) y (2.4) sólo tienen la solución trivial.*

(ii) *las ecuaciones (2.3) y (2.4) tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes. En este caso, (2.1) tiene solución si y sólo si $\int_a^b g(x)h(x)\,dx = 0$, $\forall h$ solución de (2.4) y (2.2) tiene solución si y sólo si $\int_a^b g(x)h(x)\,dx = 0$, $\forall h$ solución de (2.3) .*

A continuación, vamos a ver algunos ejemplos en los que se aplica el teorema anterior.

**Ejemplos.** (1) **Encontrar la solución de la ecuación**

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(t-x)h(t)\,dt = \lambda h(x).$$

Como $\mathrm{sen}(t-x) = \mathrm{sen}\,t\cos x - \cos t\,\mathrm{sen}\,x$, descomponemos la integral en dos sumandos:

$$\cos x \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,t\,h(t)\,dt - \mathrm{sen}\,x \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,h(t)\,dt = \lambda h(x)$$

Llamamos $a = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,t\,h(t)\,dt$ y $b = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos t\,h(t)\,dt$, ya que son constantes. Entonces, tenemos que resolver la ecuación

$$a\cos x - b\,\mathrm{sen}\,x = \lambda h(x).$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $\operatorname{sen} x$ y por $\cos x$ e integramos respecto de $x$ en $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, (a \cos x - b \operatorname{sen} x) \, dx = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, h(x) \, dx \quad \Longrightarrow -\pi b = \lambda a,$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, (a \cos x - b \operatorname{sen} x) \, dx = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, h(x) \, dx \quad \Longrightarrow \pi a = \lambda b.$$

El sistema anterior puede escribirse así:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \pi \\ \pi & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (AX = 0)$$

Primero suponemos que $\lambda \neq 0$ y luego estudiamos el caso $\lambda = 0$.

Tiene solución única (trivial) si y sólo si $\det A \neq 0$ (pues $a = b = 0$ y volviendo a la ecuación $a \cos x - b \operatorname{sen} x = \lambda h(x)$ obtenemos $0 = \lambda h(x)$, luego $h = 0$ y, entonces, $\lambda$ no es autovalor).

Por tanto, para que exista solución no trivial, necesariamente $\det A = 0$. Igualamos a cero el determinante de la matriz $A$ y así obtenemos los autovalores.

$$\begin{vmatrix} \lambda & \pi \\ \pi & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 - \pi^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm \pi i \text{ son autovalores.}$$

Para hallar la solución distinguimos tres casos:

*a*) Si $\lambda \neq \pm \pi i \Longrightarrow a = b = 0 \Longrightarrow h(x) = 0$.

*b*) Si $\lambda = \pi i$, entonces, el determinante del sistema es nulo, por lo que tiene infinitas soluciones.
Cogemos la primera ecuación del sistema para hallar $h(x)$:

$$\lambda a + \pi b = 0 \Longrightarrow \pi i a + \pi b = 0 \Longrightarrow b = -ia$$

Volviendo a la ecuación $a \cos x - b \operatorname{sen} x = \lambda h(x)$, obtenemos que la solución es

$$h(x) = \frac{a}{\pi i} (\cos x + i \operatorname{sen} x).$$

*c*) Si $\lambda = -\pi i$, entonces, el determinante del sistema es nulo, por lo que tiene infinitas soluciones.
Cogemos la primera ecuación del sistema para hallar $h(x)$:

$$\lambda a + \pi b = 0 \Longrightarrow -\pi i a + \pi b = 0 \Longrightarrow b = ia$$

Volviendo a la ecuación $a \cos x - b \operatorname{sen} x = \lambda h(x)$, obtenemos que la solución es

$$h(x) = -\frac{a}{\pi i} (\cos x - i \operatorname{sen} x).$$

Ahora, si $\lambda = 0$:

Se tiene que $a\cos x - b\,\mathrm{sen}\, x = 0$ y como $\{\mathrm{sen}\, x, \cos x\}$ es un conjunto linealmente independiente, necesariamente $a = b = 0$. Por tanto, cualquier función $h(x)$ que verifique

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\, t\, h(t)\, dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\, h(t)\, dt = 0$$

será autofunción asociada a $\lambda = 0$.

En resumen,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \pm\pi i \\ \frac{a}{\pi i}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x) & \text{si } \lambda = \pi i \\ -\frac{a}{\pi i}(\cos x - i\,\mathrm{sen}\, x) & \text{si } \lambda = -\pi i \end{cases}$$

Y si $\lambda = 0$, es solución cualquier $h(x)$ que sea ortogonal a $\mathrm{sen}\, x$ y a $\cos x$.

(2) **Decidir si existe solución en $\boldsymbol{L^p[-\pi,\pi]}$ de la ecuación**

$$\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(x-t)\, f(t)\, dt - \lambda f(x) = 1.}$$

Sea $T$ el operador definido por

$$Tf(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}(x-t) f(t)\, dt.$$

Como su núcleo $k(x,t) = \mathrm{sen}(x-t)$ es continuo en $L^p([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, el operador $T$ es compacto.

Por tanto, podemos utilizar el teorema de alternativa.

Para saber si la ecuación dada tiene solución necesitamos saber la solución de la ecuación homogénea cuyo núcleo es $k(t,x) = \mathrm{sen}(t-x)$, que ha sido resuelta en el ejemplo anterior.

Recordemos su solución:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq \pm\pi i \\ \frac{a}{\pi i}(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x) & \text{si } \lambda = \pi i \\ -\frac{a}{\pi i}(\cos x - i\,\mathrm{sen}\, x) & \text{si } \lambda = -\pi i \end{cases}$$

Y si $\lambda = 0$, es solución cualquier $h(x)$ que sea ortogonal a $\mathrm{sen}\, x$ y a $\cos x$.

Estudiemos cada caso por separado.

*a*) Si $\lambda \neq \pm\pi i$:

Como la ecuación homogénea sólo tiene la solución trivial, por el teorema de alternativa, la ecuación no homogénea tiene solución única en $L^p[-\pi,\pi]$.

*b*) Si $\lambda = \pi i$:

Como la ecuación homogénea resuelta no sólo tiene la solución trivial, necesariamente se tiene que cumplir la segunda alternativa del teorema.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)h(s)\,ds &= \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{a}{\pi i}(\cos s + i \operatorname{sen} s)\,ds \\ &= \frac{a}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\,ds + \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} s\,ds = 0\end{aligned}$$

Por el teorema de alternativa, la ecuación no homogénea tiene solución en $L^p[-\pi,\pi]$.

*c*) Si $\lambda = -\pi i$:

Como la ecuación homogénea resuelta no sólo tiene la solución trivial, necesariamente se tiene que cumplir la segunda alternativa del teorema.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)h(s)\,ds &= -\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\frac{a}{\pi i}(\cos s + i \operatorname{sen} s)\,ds \\ &= -\frac{a}{\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\cos s\,ds + \frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} s\,ds = 0\end{aligned}$$

Por el teorema de alternativa, la ecuación no homogénea tiene solución en $L^p[-\pi,\pi]$.

*d*) Si $\lambda = 0$:

Existen infinitas soluciones, por tanto, se tiene que cumplir la segunda alternativa del teorema.

No hay solución porque, por ejemplo, $h_0(t) = 1$ es solución de la homogénea pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_0(t)\cdot 1\,dt \neq 0.$$

(3) **¿Para qué funciones $g \in C[0,\pi]$ tiene solución la ecuación**

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+t) f(t)\,dt - f(x) = g(x)?$$

Definimos el operador $T$ como

$$Tf(x) = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x+t) f(t)\,dt.$$

Como el núcleo $k(x,t) = \operatorname{sen}(x+t)$ del operador integral es continuo en $L^p([0,\pi]\times[0,\pi])$, $T$ es compacto.

Por tanto, podemos utilizar el teorema de alternativa.

Debemos estudiar la ecuación homogénea de la ecuación integral que nos dan, ya que $k(x,t) = k(t,x)$ en nuestro caso.

Entonces, la ecuación homogénea que tenemos que resolver es

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+t) f(t)\,dt \\ &= \int_0^\pi (\operatorname{sen} x \cos t + \cos x \operatorname{sen} t) f(t)\,dt \\ &= \operatorname{sen} x \int_0^\pi \cos t f(t)\,dt + \cos x \int_0^\pi \operatorname{sen} t f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Vamos a utilizar el mismo método del ejemplo anterior.

Llamamos $a = \displaystyle\int_0^\pi \cos t f(t)\,dt$ y $b = \displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen} t f(t)\,dt$, ya que son constantes. Entonces, tenemos que resolver la ecuación

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x.$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $\operatorname{sen} x$ y por $\cos x$ e integramos respecto de $x$ en $[0,\pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen} x\, f(x)\,dx &= \int_0^\pi \operatorname{sen} x\,(a \operatorname{sen} x + b\cos x)\,dx \Longrightarrow b = a\pi/2, \\ \int_0^\pi \cos x\, f(x)\,dx &= \int_0^\pi \cos x\,(a \operatorname{sen} x + b\cos x)\,dx \Longrightarrow a = b\pi/2. \end{aligned}$$

El sistema anterior puede escribirse así:

$$\begin{pmatrix} \pi/2 & -1 \\ 1 & -\pi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (AX = 0)$$

Como el determinante de $A$ es siempre no nulo, el sistema tiene solución única y es la trivial. Luego, $a = b = 0$ y

$$f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x \Longrightarrow f(x) = 0.$$

Acabamos de demostrar que la ecuación homogénea sólo tiene la solución trivial, luego, por el teorema de alternativa, la ecuación integral no homogénea tiene solución única, para todo $g$.

(4) **¿Para qué valores de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tiene solución la ecuación**

$$\boldsymbol{\int_a^b e^{t-x} f(t)\, dt - \lambda f(x) = 1?}$$

Definimos el operador $T$ como

$$Tf(x) = \int_a^b e^{t-x} f(t)\, dt.$$

Como el núcleo del operador es continuo en $L^p([a,b] \times [a,b])$, $T$ es compacto.

Por tanto, podemos utilizar el teorema de alternativa.

Estudiemos la ecuación homogénea cuyo núcleo es $k(t,x) = e^{x-t}$:

$$\int_a^b e^{x-t}\, h(t)\, dt = \lambda h(x) \Longrightarrow e^x \int_a^b e^{-t}\, h(t)\, dt = \lambda h(x).$$

Llamamos $c = \displaystyle\int_a^b e^{-t}\, h(t)\, dt$, ya que es una constante. Entonces, tenemos que resolver la ecuación

$$ce^x = \lambda h(x).$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $e^{-x}$ e integramos respecto de $x$ en $[a,b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-x} ce^x\, dx = \lambda \int_a^b e^{-x} h(x)\, dx &\Longrightarrow c(b-a) = \lambda c \\ &\Longrightarrow c = 0 \text{ ó } b - a - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Estudiamos tres casos:

*a*) Si $\lambda \neq b - a$, $\lambda \neq 0$:
Entonces, necesariamente $c = 0$ y volviendo a la ecuación $ce^x = \lambda\, h(x)$ obtenemos $h(x) = 0$.
Luego, la ecuación homogénea tiene la solución trivial. Y por el teorema de alternativa, tenemos que la ecuación no homogénea dada tiene solución única.

*b*) Si $\lambda = 0$:
Volviendo a la ecuación $ce^x = \lambda\, h(x)$, necesariamente $c = 0$.
Por tanto, cualquier $h(x)$ que cumpla

$$\int_a^b e^{-x}\, h(x)\, dx = 0$$

será solución.
Existe algún $h_0(x)$ solución de de la homogénea que no verifique

$$\int_a^b 1 \cdot h_0(x)\, dx = 0,$$

por tanto, por el teorema de alternativa, la ecuación no homogénea dada no tiene solución.

*c*) Si $\lambda = b - a$:
Volviendo a la ecuación $ce^x = \lambda\, h(x)$ obtenemos

$$h(x) = \frac{c}{b-a} e^x \Longrightarrow h(x) = ke^x.$$

Veamos si $h$ es múltiplo de la exponencial para cualquier $k$. Para ello, sustituimos $h$ en la ecuación integral homogénea:

$$\int_a^b e^{x-t} ke^t\, dt = \lambda ke^x$$
$$ke^x(b-a) = (b-a)ke^x.$$

Entonces, la solución general de la ecuación homogénea es $h(x) = ke^x$.
Como no es la solución trivial, necesariamente se tiene que cumplir la segunda alternativa del teorema.

$$\int_a^b g(s)h(s)\, ds = \int_a^b 1 \cdot ke^s\, ds = k(e^b - e^a).$$

Como $e^b - e^a \neq 0$, la integral anterior no siempre se anula. Por tanto, la ecuación no homogénea no tiene solución.

## 2.3. Ecuaciones integrales en espacios de Hilbert

Veamos cómo resolver ecuaciones integrales en espacios de Hilbert interpretándolas como operadores integrales.
Nos vamos a centrar en ecuaciones de la forma

$$\int_a^b k(x,t) f(t)\, dt - \lambda f(x) = g(x)$$

en el espacio de Hilbert $L^2[a,b]$, dando por supuesto que $g(x) \in L^2[a,b]$ y el núcleo $k(x,t) \in L^2([a,b] \times [a,b])$, es decir $\displaystyle\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2\, dx\, dt < \infty$.

Como consecuencia del teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos (teorema 1.4.8), se deduce el siguiente teorema que nos permite resolver ecuaciones integrales en función de los distintos valores de $\lambda$.

**Teorema 2.3.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y autoadjunto y sean $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de autovalores y autofunciones de $K$ que verifican el teorema espectral.*

(i) *Si $\lambda \in \rho(K)$, entonces, para cada $g \in H$ la ecuación $(K-\lambda I)f = g$ tiene una única solución que viene dada por la fórmula*

$$f = -\frac{1}{\lambda}g + \frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\langle g, e_n\rangle e_n.$$

(ii) *Si $\lambda \in \sigma_p(K)$ es autovalor, entonces la ecuación $(K-\lambda I)f = g$ tiene solución si y sólo si $g \perp \ker(K-\lambda_n I)$. La solución general, en este caso, viene dada por*

$$f = \frac{1}{\lambda_n}g + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\neq n} \frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k}\langle g, e_k\rangle e_k + z,$$

*donde $z \in \ker(K-\lambda_n I)$ es arbitrario.*

(iii) *Si $\lambda = 0$, la ecuación $Kf = g$ tiene solución si y sólo si $g \perp \ker(K)$ y*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n^2}|\langle g, e_n\rangle|^2 < +\infty.$$

*En este caso, la solución viene dada por*

$$f = z + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n}\langle g, e_n\rangle e_n,$$

*donde $z \in \ker(K)$ es arbitrario.*

A continuación, vamos a ver un ejemplo en el que aplicamos el teorema anterior.

**Ejemplo 2.3.1. Sea el operador integral $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ tal que**

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt$$

**donde**

$$k(x,t) = \min\{x,t\}.$$

**Si $g(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi}{2}x$, resolver $(T-\lambda I)f = g$ según los distintos valores de $\lambda \in \mathbb{C}$.**

Como el núcleo $k(x,t)$ es continuo en $L^2([0,1]\times[0,1])$, el operador $T$ es compacto.

Además, $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ luego $T$ es también autoadjunto. Por tanto, podemos aplicar el teorema espectral de operadores compactos autoadjuntos.

Para resolver la ecuación $(T - \lambda I)f = g$ necesitamos primero calcular los autovalores y las autofunciones de $T$.

Para calcular los autovalores resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Tf(x) = \lambda f(x) &\Longrightarrow \int_0^1 \text{mín}\{x,t\} f(t)\,dt = \lambda f(x) \\ &\Longrightarrow \int_0^x t f(t)\,dt + x\int_x^1 f(t)\,dt = \lambda f(x). \end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ la única solución obtenida es la nula, por tanto el 0 no es autovalor.

Para $x = 0$ tenemos $\lambda f(0) = 0$, luego obtenemos la primera condición $f(0) = 0$.

Para obtener la segunda condición derivamos a ambos lados de la ecuación:

$$xf(x) + \int_x^1 f(t)dt - xf(x) = \lambda f'(x).$$

En este caso nos conviene escoger $x = 1$ para anular la integral y obtenemos $f'(1) = 0$.

Si volvemos a derivar obtenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$-f(x) = \lambda f''(x)$$

Por tanto, tenemos que resolver, para distintos valores de $\lambda$, la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden y coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \lambda f''(x) + f(x) = 0, \\ f(0) = 0, \\ f'(1) = 0. \end{cases}$$

El polinomio característico es $\lambda r^2 + 1 = 0$, luego las raíces son $r_1 = 1/\sqrt{-\lambda}$ y $r_2 = -1/\sqrt{-\lambda}$.

Como dependen del parámetro $\lambda$ y sabemos que es no nulo, resolvemos dependiendo si es negativo o positivo.

(i) Si $\underline{\lambda < 0}$:

Los valores de las raíces son reales por lo que el conjunto de soluciones fundamentales es $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$. Entonces la solución es de la forma

$$f(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Ahora, obligamos a que cumpla las condiciones, para ello derivamos

$$\begin{aligned} f'(x) &= C_1 r_1 e^{r_1 x} + C_2 r_2 e^{r_2 x} \\ f(0) &= C_1 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = -C_1 \\ f'(1) &= C_1 r_1 e^{r_1} + C_2 r_2 e^{r_2} = 0 \Longrightarrow C_1 r_1 (e^{r_1} + \frac{1}{e^{r_1}}) = 0, \end{aligned}$$

pero como el paréntesis y $r_1$ son no nulos, necesariamente $C_1 = C_2 = 0$.

Es decir, $f(x) = 0$ y, por tanto, los valores de $\lambda$ negativos no son autovalores.

(ii) Si $\underline{\lambda > 0}$:

Los valores de las raíces son complejos por lo que el conjunto de soluciones fundamentales es $\{\cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x, \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x\}$. Entonces la solución es de la forma

$$f(x) = C_1 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x + C_2 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} C_1 \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C_2 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x.$$

Obligamos de nuevo que cumpla las condiciones:

$$\begin{aligned} f(0) &= C_1 = 0, \\ f'(1) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} C_2 \cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ no es cero y no queremos que $C_2$ lo sea, necesariamente $\cos \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0$, de donde $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + n\pi \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{2}{(2n+1)\pi}$.

Por tanto, el conjunto de autovalores y autofunciones asociadas es

$$\lambda_n = \frac{4}{(2n+1)^2 \pi^2}, \quad \varphi_n(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Una vez hallados los autovalores y las autofunciones podemos aplicar el teorema espectral.

Estudiamos los tres casos por separado:

(i) Si $\underline{\lambda \in \rho(T)}$:

Veamos primero si las autofunciones $\varphi_n(x) = \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} x$ forman un conjunto ortonormal. Es evidente que son ortogonales, pero su norma no es 1:

$$\|\varphi_n\|^2 = \int_0^1 \left| \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} x \right|^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Para que el conjunto de autofunciones sea ortonormal, definimos $e_n = \dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x$.

Por el teorema 2.3.1, sabemos que la solución en este caso es la siguiente:

$$f = -\frac{1}{\lambda}g + \frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\langle g, e_n\rangle e_n. \tag{2.5}$$

Calculamos $\langle g, e_n\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle g, e_n\rangle &= \left\langle \sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}x, \sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x \right\rangle\\ &= \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k \left\langle \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}x, \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x \right\rangle.\end{aligned}$$

Como los $e_n$ forman un conjunto ortonormal, tenemos que:

$$\langle e_n, e_k\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k,\\ 0 & \text{si } n \neq k.\end{cases}$$

Por tanto, $\langle g, e_n\rangle = \sqrt{2}c_n\langle \operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x, \operatorname{sen}\dfrac{(2n+1)\pi}{2}x\rangle = \dfrac{\sqrt{2}}{2}c_n$.

Sustituyendo en (2.5), tenemos que la solución general es:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4 - \lambda(2n+1)^2\pi^2} c_n \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x.$$

(ii) Si $\underline{\lambda \in \sigma_p(T)}$, es decir $\lambda = \lambda_n$:

La ecuación $(T - \lambda_n I)f = g$ tiene solución si y sólo si $g \perp \ker(T - \lambda_n I)$, siendo la solución general, en este caso,

$$f = \frac{1}{\lambda_n}g + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\neq n} \frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k}\langle g, e_k\rangle e_k + z,$$

donde $z \in \ker(T - \lambda_n I)$ es arbitrario.

Observemos en primer lugar que $\ker(T - \lambda_n I) = \operatorname{span}\{\varphi_n\} = \operatorname{span}\{e_n\}$. De aquí deducimos que $g \perp \ker(T - \lambda_n I) \iff g \perp e_n$.

Antes hemos calculado que $\langle g, e_n\rangle = c_n/\sqrt{2}$, luego,

$$\langle g, e_n\rangle = 0 \iff c_n = 0.$$

Entonces, la ecuación $(T - \lambda_n I)f = g$ tiene solución si y sólo si $c_n = 0$.

En este caso, la solución general es:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}}\left[\sum_{k\neq n} c_k \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}x \right.$$
$$\left. + \sum_{k\neq n} c_k \frac{\frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}}{\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2} - \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2}} \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}x\right] + A\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x.$$

Desarrollando los términos de la derecha, tenemos que la solución es:

$$f(x) = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}\sum_{k\neq n}\left[1 + \frac{(2n+1)^2}{(2k+1)^2-(2n+1)^2}\right] c_k \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}x$$
$$+ A\operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{2}x$$

(iii) Si $\underline{\lambda = 0}$:

La ecuación $Tf = g$ tiene solución si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$g \perp \ker(T),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n^2}|\langle g, e_n\rangle|^2 < +\infty.$$

En este caso, la solución viene dada por

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n}\langle g, e_n\rangle e_n + z,$$

donde $z \in \ker(T)$ es arbitrario.

Primero veamos que $g \perp \ker(T)$. Debemos probar que $\langle g, f\rangle = 0$ para todo $f \in \ker(T)$.

Cuando hemos calculado los autovalores hemos visto que, si $\lambda = 0$, entonces $f(x) = 0$. Luego, $\langle g, f\rangle = 0$ y así queda probada la primera condición.

Ahora estudiemos la segunda condición:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(\frac{4}{(2n+1)^2\pi^2})^2}\left|\frac{c_n}{\sqrt{2}}\right|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^4\pi^4}{16}\frac{c_n^2}{2} < +\infty$$
$$\iff \sum_{n\in\mathbb{N}}(2n+1)^4 c_n^2 < +\infty \iff \sum_{n\in\mathbb{N}}((2n+1)^2 c_n)^2 < +\infty$$
$$\iff \{(2n+1)^2 c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2.$$

Entonces, en el caso en el que se cumpla $\{(2n+1)^2 c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, la solución es

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} \frac{c_n}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} x \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} c_n \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{2} x, \end{aligned}$$

siendo $z(x) = 0$ ya que cuando $\lambda = 0$, $f$ es nula, luego $\ker(T) = \{0\}$.

## 2.4. Métodos particulares

Terminaremos este capítulo mostrando dos métodos de resolución de ciertos tipos de ecuaciones de Fredholm.

### 2.4.1. Método iterativo

Como ya hemos visto, resolver una ecuación de la forma $(I-K)f = g$ equivale a escribir $f = (I-K)^{-1}g$. El siguiente resultado proporciona una fórmula para $(I-K)^{-1}$ basada en la serie geométrica

$$1 + a + a^2 + \cdots = \frac{1}{1-a}, \quad 0 \le a < 1.$$

**Teorema 2.4.1.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y $K \in \mathcal{L}(H)$ con $\|K\| < 1$. Entonces, $I-K$ es invertible y para todo $g \in H$,*

$$(I-K)^{-1}g = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g.$$

*Además,*

$$\|(I-K)^{-1} - \sum_{n=0}^{n} K^n\| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

*y*

$$\|(I-K)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|K\|}.$$

La serie anterior recibe el nombre de *serie de Neumann.*

Como aplicación de esta fórmula, vamos a demostrar la siguiente propiedad.

**Proposición 2.4.2.** *Sea $K$ el operador integral definido por*

$$Kf(t) = \int_a^b k(t,s)\, f(s)\, ds.$$

*Consideramos la ecuación*

$$f(t) - \int_a^b k(t,s)f(s)\,ds = g(t). \tag{2.6}$$

*Entonces, si* $\|K\| < 1$*, existe un operador integral* $K^0$ *tal que* $(I-K)^{-1} = I + K^0$.

*Demostración.* Por el teorema anterior, sabemos que $(I-K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g$.

De la definición de $K$ y el teorema de Fubini tenemos que

$$\begin{aligned} K^2 g(t) &= \int_a^b k(t,x)Kg(x)\,dx = \int_a^b k(t,x)\left\{\int_a^b k(x,s)g(s)\,ds\right\}dx \\ &= \int_a^b g(s)\left\{\int_a^b k(t,x)k(x,s)\,dx\right\}ds = \int_a^b k_2(t,s)g(s)\,ds, \end{aligned}$$

donde $k_2(t,s) = \displaystyle\int_a^b k(t,x)k(x,s)\,dx$.

Veamos ahora que $k_2 \in L^2([a,b]\times[a,b])$.

En efecto, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|k_2(t,s)|^2 \le \left\{\int_a^b |k(t,x)|^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b |k(x,s)|^2\,dx\right\}.$$

Integramos en $[a,b]$ respecto de $s$,

$$\int_a^b |k_2(t,s)|^2\,ds \le \left\{\int_a^b |k(t,x)|^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b\int_a^b |k(x,s)|^2\,dx\,ds\right\}$$

y volvemos a integrar en $[a,b]$ pero respecto de $t$,

$$\int_a^b\int_a^b |k_2(t,s)|^2\,ds\,dt \le \left\{\int_a^b\int_a^b |k(t,x)|^2\,dx\,dt\right\}\left\{\int_a^b\int_a^b |k(x,s)|^2\,dx\,ds\right\}.$$

Como $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$ la doble integral es finita y $k_2 \in L^2([a,b]\times[a,b])$, con $\|k_2\| \le \|k\|^2$.

Procediendo de esta manera, por el método de inducción deducimos que

$$K^n g(t) = \int_a^b k_n(t,s)g(s)\,ds, \quad n = 1,2,\ldots \tag{2.7}$$

y $\|k_n\| \le \|k\|^n$, donde $k_n(t,s) = \displaystyle\int_a^b k(t,x)k_{n-1}(x,s)\,dx$, para $n > 1$.

Dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|k_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|k\|^n < \infty,$$

entonces existe $k^0 \in L^2([a,b] \times [a,b])$ dado por

$$k^0 = \sum_{n=1}^{\infty} k_n.$$

Sea $K^0$ el operador integral cuyo núcleo es $k^0$. Usando (2.7) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{p} K^n g - K^0 g \right\|^2 &= \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{p} K^n g(t) - K^0 g(t) \right|^2 dt \\
&= \int_a^b \left| \int_a^b \sum_{n=1}^{p} k_n(t,s) g(s)\, ds - \int_a^b k^0(t,s) g(s)\, ds \right|^2 dt \\
&= \int_a^b \left| \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{p} k_n(t,s) - k^0(t,s) \right) g(s)\, ds \right|^2 dt \\
&\leq \int_a^b \left( \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{p} k_n(t,s) - k^0(t,s) \right| \cdot |g(s)|\, ds \right)^2 dt \\
&\leq \int_a^b \left[ \left( \int_a^b \left| \sum_{n=1}^{p} k_n(t,s) - k^0(t,s) \right|^2 ds \right) \left( \int_a^b |g(s)|^2\, ds \right) \right] dt \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{p} k_n - k^0 \right\|^2 \cdot \|g\|^2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\| \sum_{n=1}^{p} K^n g - K^0 g \right\| \leq \left\| \sum_{n=1}^{p} k_n - k^0 \right\| \cdot \|g\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } p \to \infty.$$

Por lo tanto, $(I-K)^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g = (I + K^0) g.$ □

Como consecuencia, dada la ecuación integral (2.6), su solución es

$$f(t) = (I-K)^{-1} g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g(t) = (I+K^0) g(t) = g(t) + \int_a^b k^0(t,s) g(s)\, ds.$$

Si además

$$c = \sup_t \int_a^b |k(t,s)|^2\, ds < \infty,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} K^n g(t)$ converge absolutamente y uniformemente en $[a,b]$.

En efecto, dado cualquier $h \in L^2[a,b]$, se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que

$$|Kh(t)| \leq \|h\| \left( \int_a^b |k(t,s)|^2 \, ds \right)^{1/2} \leq \sqrt{c} \cdot \|h\|.$$

Reemplazando $h$ por $K^{n-1}g$,

$$|K^n g(t)| \leq \sqrt{c} \cdot \|K^{n-1}g\| \leq \sqrt{c} \cdot \|K\|^{n-1} \|g\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K^n g(t)| \leq \sqrt{c} \cdot \|g\| \sum_{n=1}^{\infty} \|k\|^{n-1} < \infty, \quad t \in [a,b].$$

### 2.4.2. Ecuaciones integrales con núcleos degenerados

Consideraremos en este apartado las ecuaciones de Fredholm de segunda especie con núcleos que verifican la condición

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx \, dt < \infty.$$

**Definición 2.4.1.** El núcleo $k(x,t)$ de una ecuación integral se llama *separable* o *degenerado* si se puede expresar como suma finita de productos de una función que depende sólo de $x$ y otra que depende sólo de $t$. Es decir,

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t),$$

donde $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in L^2[a,b]$ y son linealmente independientes.

Por tratarse de un caso particular de los operadores integrales que hemos estudiado, es evidente que, si $K$ es un operador integral con núcleo separable,

$$Kf(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t) f(t) \, dt,$$

entonces $K$ es compacto si $a_i$, $b_i \in L^2[a,b]$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, debido a que $K$ es entonces un operador acotado de rango finito.

Veamos a continuación que, si el núcleo $k(x,t)$ es separable, el problema de resolver una ecuación integral de segunda especie se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Sea la ecuación integral de Fredholm de segunda especie,

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t) g(t) \, dt. \tag{2.8}$$

Si el núcleo es separable, se puede escribir de la siguiente forma

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(s) \int_a^b b_i(t)g(t)\, dt. \tag{2.9}$$

Si llamamos $c_i = \displaystyle\int_a^b b_i(t)g(t)\, dt$ se tiene que $g(s) = f(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i a_i(s)$ y el problema se reduce a encontrar las constantes $c_i$.

Sustituyendo el valor de $g(s)$ en (2.9) se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(s) \left\{ c_i - \int_a^b b_i(t)[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t)]\, dt \right\} = 0$$

y teniendo en cuenta que las funciones $a_i(s)$ son linealmente independientes,

$$c_i - \int_a^b b_i(t)[f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(t)]\, dt \ = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Llamando $f_i = \displaystyle\int_a^b b_i(t)f(t)\, dt$ y $a_{ik} = \displaystyle\int_a^b b_i(t)a_k(t)\, dt$, tenemos que resolver el sistema de $n$ ecuaciones lineales:

$$c_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_k = f_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

cuyo determinante es

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & \ldots & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & \ldots & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Para los valores de $\lambda$ que cumplen $D(\lambda) = 0$ se tiene que no es resoluble o tiene infinitas soluciones. Estos valores son los autovalores del operador integral asociado.

Para todo valor de $\lambda$ que cumpla $D(\lambda) \neq 0$, el sistema tiene una única solución dada por la regla de Cramer. Consecuentemente, la ecuación integral tiene una única solución dada por

$$g(s) = f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{D_{1j} f_1 + ... + D_{nj} f_n}{D(\lambda)}\, a_j(s)$$

y la solución de la correspondiente ecuación homogénea $g(s) = \lambda \displaystyle\int_a^b k(s,t)g(t)\, dt$ es la trivial, es decir, $g(s) = 0$.

Sustituyendo los valores de $f_i$ en la solución,

$$g(s) = f(s) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left\{ \sum_{j=1}^{n} \big[D_{1j} b_1(t) + ... + D_{nj} b_n(t)\big] a_j(s) \right\} f(t)\, dt$$
$$= f(s) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} b_i(t) a_j(s) f(t)\, dt.$$

Considerando el determinante de orden $n+1$,

$$D(s,t;\lambda) = - \begin{vmatrix} 0 & a_1(s) & a_2(s) & ... & a_n(s) \\ b_1(t) & 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & ... & -\lambda a_{1n} \\ b_2(t) & -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & ... & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_n(t) & -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ... & 1-\lambda a_{nn} \end{vmatrix},$$

y desarrollándolo por los elementos de la primera fila con sus correspondientes menores, llegamos a que

$$\sum_{j=1}^{n} \big[D_{1j} b_1(t) + ... + D_{nj} b_n(t)\big] a_j(s) = D(s,t;\lambda).$$

Luego la solución se puede escribir así:

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \Gamma(s,t;\lambda) f(t)\, dt, \tag{2.10}$$

donde $\Gamma(s,t;\lambda) = \dfrac{D(s,t;\lambda)}{D(\lambda)}$ recibe el nombre de *núcleo resolvente*.

Para finalizar, vamos a ver un ejemplo en el que aplicamos el primer método mostrado.

**Ejemplo 2.4.1. Encontrar la solución en $L^2[0,1]$ de la ecuación**

$$\boldsymbol{f(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{t-s} f(s)\, ds = g(t).}$$

La ecuación se puede escribir de la forma $(I-K)f = g$ siendo $k(t,s) = \frac{1}{2}e^{t-s}$ el núcleo de $K$.

Para empezar, veamos que $\|K\| < 1$ usando la definición:

$$\begin{aligned}
\|Kf\|_2^2 &= \int_0^1 |Kf(s)|^2\,ds = \int_0^1 \left|\int_0^1 \frac{1}{2}e^{s-y}f(y)\,dy\right|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^1 e^{2s}\left(\int_0^1 |e^{-y}|\cdot|f(y)|\,dy\right)^2 ds \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\int_0^1 e^{2s}\,ds\right)\cdot\left(\int_0^1 |e^{-y}|^2\,dy\cdot\int_0^1 |f(y)|^2\,dy\right) \\
&= \frac{1}{4}\|f\|_2^2\int_0^1 e^{2s}\,ds\cdot\int_0^1 e^{-2y}\,dy.
\end{aligned}$$

Entonces, $\dfrac{\|Kf\|_2}{\|f\|_2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{(e^2+e^{-2}-2)} < 1.$

Siguiendo los pasos que acabamos de ver, tenemos que

$$\begin{aligned}
k_1(t,s) &= \lambda e^{t-s} \\
k_2(t,s) &= \int_0^1 k(t,x)k_1(x,s)dx = \int_0^1 \lambda e^{t-x}\lambda e^{x-s}dx = \lambda^2 e^{t-s} \\
k_3(t,s) &= \int_0^1 k(t,x)k_2(x,s)dx = \int_0^1 \lambda e^{t-x}\lambda^2 e^{x-s}dx = \lambda^3 e^{t-s} \\
&\dots \\
k_n(t,s) &= \lambda^n e^{t-s}.
\end{aligned}$$

Y como

$$f(t) = (I-K)^{-1}g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 k_n(t,s)g(s)\,ds,$$

la solución es

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 k_n(t,s)g(s)\,ds = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^2\int_0^1 e^{t-s}g(s)\,ds \\
&= g(t) + \frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t-s}g(s)\,ds.
\end{aligned}$$

# Capítulo 3

# Ecuaciones integrales de Volterra

Este capítulo vamos a dedicarlo a la resolución de las ecuaciones integrales de Volterra.

Recordemos que las ecuaciones integrales de Volterra son de la forma

$$\int_a^x k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x),$$

donde $\lambda$ es un parámetro complejo, la función $g(x)$ es conocida y $k(x,t)$ es el núcleo (continuo) del operador $K$.

Estas ecuaciones pueden ser consideradas como un caso particular de ecuaciones integrales de Fredholm, ya que podemos escribir el operador $K$ como

$$Kf(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)\,dt = \int_a^b k_1(x,t)f(t)\,dt,$$

donde

$$k_1(x,t) = \begin{cases} k(x,t) & \text{si } t < x, \\ 0 & \text{si } t > x. \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que, en general, el núcleo $k_1(x,t)$ no es continuo en $x = t$. Sin embargo, el operador integral de Volterra $K$ es compacto, ya que $k_1 \in L^2([a,b] \times [a,b])$.

Además, $K$ nunca va a poder ser autoadjunto, ya que

$$\overline{k_1(t,x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < x \\ \overline{k(t,x)} & \text{si } t > x \end{cases} \neq k_1(x,t).$$

Por tanto, lo visto en el capítulo anterior para ecuaciones integrales de Fredholm también es válido para este tipo de ecuaciones, salvo el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos.

## 3.1. Relación entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales de Volterra

A continuación, vamos a ver la relación existente entre las ecuaciones diferenciales lineales y las ecuaciones integrales. Aunque sólo lo probamos para las ecuaciones integrales de Volterra también es cierto para las de Fredholm. De hecho, algunos problemas los resolveremos formulándolos como ecuaciones diferenciales.

Sea la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\, y(x) = F(x) \tag{3.1}$$

con coeficientes continuos $a_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$, y las condiciones iniciales

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \ldots, y^{n-1}(0) = c_{n-1}. \tag{3.2}$$

Su resolución puede ser reducida a la resolución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Para ello aplicaremos el siguiente resultado auxiliar.

**Lema 3.1.1.** *Si $\varphi$ es una función continua, entonces*

$$\int_0^x dx \underset{(k\ veces)}{\ldots} \int_0^x \varphi(z)\, dz = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x (x-z)^{k-1}\varphi(z)\, dz.$$

*Demostración.* Haremos la prueba por inducción.

Se comprueba de forma inmediata que la igualdad es cierta para $k = 1$. Si suponemos que es cierta para un valor de $k$ arbitrario, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^x dx \underset{(k+1\text{ veces})}{\ldots} \int_0^x \varphi(z)\, dz &= \int_0^x \left( \frac{1}{(k-1)!} \int_0^u (u-z)^{k-1}\varphi(z)\, dz \right) du \\
&= \int_0^x \left( \int_z^x \frac{1}{(k-1)!}(u-z)^{k-1}\varphi(z)\, du \right) dz \\
&= \int_0^x \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{(u-z)^k}{k}\Big|_z^x \varphi(z)\, dz \\
&= \frac{1}{k!} \int_0^x (x-z)^k \varphi(z)\, dz,
\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la hipótesis de inducción y hemos realizado un cambio del orden de integración. □

**Proposición 3.1.2.** *La ecuación (3.1), (3.2) es equivalente a la ecuación integral de Volterra*

$$\varphi(s) + \int_0^s k(s,t)\varphi(t)\, dt = f(s),$$

*de núcleo* $k(s,t) = \displaystyle\sum_{m=1}^{n} a_m(s)\frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}$ *y término independiente*

$$\begin{aligned} f(s) = F(s) - c_{n-1}a_1(s) - (c_{n-1}s + c_{n-2})a_2(s) - \dots \\ - \Big(c_{n-1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + c_1 s + c_0\Big)a_n(s). \end{aligned}$$

*Demostración.* Si llamamos $y^{(n)}(x) = \varphi(x)$, al integrar sucesivas veces tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi(z)\,dz &= y^{(n-1)}(x) - c_{n-1} \\ \int_0^x dx \int_0^x \varphi(z)\,dz &= \int_0^x y^{(n-1)}(x)\,dx - c_{n-1}x = y^{(n-2)}(x) - c_{n-2} - c_{n-1}x \\ \int_0^x dx \underset{(k \text{ veces})}{\dots} \int_0^x \varphi(z)\,dz &= y^{(n-k)}(x) - c_{n-k} - c_{n-k+1}x - \dots - c_{n-1}x^{k-1}. \end{aligned}$$

Si aplicamos el lema anterior, deducimos que

$$y^{(n-k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-z)^{k-1}\varphi(z)\,dz + c_{n-k} + c_{n-k+1}x + \dots + c_{n-1}x^{k-1}.$$

Sustituimos estos valores en la ecuación (3.1) y obtenemos

$$\begin{aligned} &\varphi(x) + a_1(x)c_{n-1} + a_2(x)(c_{n-2} + c_{n-1}x) + \dots + a_n(x)(c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}) \\ &\quad + a_1(x)\int_0^x \varphi(z)\,dz + a_2(x)\int_0^x (x-z)\varphi(z)\,dz + \dots \\ &\quad + a_n(x)\cdot\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-z)^{n-1}\varphi(z)\,dz = F(x). \end{aligned}$$

Agrupando términos, nos queda

$$\begin{aligned} &\varphi(x) + \int_0^x \left(a_1(x) + a_2(x)(x-z) + \dots + \frac{1}{(n-1)!}a_n(x)(x-z)^{n-1}\right)\varphi(z)\,dz \\ &= F(x) - a_1(x)c_{n-1} - a_2(x)(c_{n-2} + c_{n-1}x) - \dots - a_n(x)(c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}) \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

La existencia de una solución única de esta ecuación viene de la existencia de la solución del problema de Cauchy para la ecuación diferencial lineal de coeficientes continuos en un entorno del punto $x = 0$.

## 3.2. Resolución de las ecuaciones integrales de Volterra

Primero, vamos a ver dos teoremas que garantizan la existencia y unicidad de solución de una ecuación integral de Volterra de segunda especie. Y después, veremos un método de resolución de las mismas. Dicha información ha sido consultada en los libros [Tr] y [KKM].

**Teorema 3.2.1.** *Sea $g(x) \in L^2[a,b]$ y supongamos que el núcleo $k(x,t)$ es continuo para $x, y \in [a,b]$ y acotado, es decir $|k(x,t)| \leq M$. Entonces, la ecuación*

$$\int_0^x k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x)$$

*tiene una única solución $f(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ en $L^2[a,b]$.*

En el siguiente teorema vamos a exigir condiciones menos fuertes que debe de cumplir el núcleo del operador.

**Teorema 3.2.2.** *Sea $g(x) \in L^2[a,b]$ y supongamos que $k(x,t) \in L^2([a,b] \times [a,b])$. Entonces la ecuación*

$$\int_0^x k(x,t)f(t)\,dt - \lambda f(x) = g(x)$$

*tiene una única solución para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ en $L^2[a,b]$.*

### 3.2.1. Método de las aproximaciones sucesivas

Sea la ecuación de Volterra de segunda especie

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)f(t)\,dt.$$

Suponemos que $g(x)$ es continua en $[0,b]$ y el núcleo $k(x,t)$ es continuo en $0 \leq x \leq b$, $0 \leq t \leq x$.
Empezamos considerando una función $f_0(x)$ continua en $[0,b]$, y la sustituimos en el segundo miembro de la ecuación integral:

$$f_1(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)f_0(t)\,dt.$$

La función $f_1(x)$ es también continua en $[0,b]$. Si se repite el mismo proceso, se obtiene la sucesión de funciones $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ que satisfacen la relación

$$f_n(x) = g(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)f_{n-1}(t)\,dt.$$

Según las hipótesis hechas a $g(x)$ y $k(x,t)$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge cuando $n \to \infty$ hacia la solución $f(x)$ de la ecuación integral de Volterra.

En particular, si se toma $g(x)$ en vez de $f_0(x)$, entonces $f_n(x)$ será precisamente la suma parcial de la serie

$$f(x) = f_0(x) + \lambda f_1(x) + \lambda^2 f_2(x) + \cdots + \lambda^n f_n(x) + \cdots$$

que determina la solución de la ecuación integral de Volterra.

Una buena elección de la aproximación de $f_0(x)$ puede conducir a una convergencia rápida de la sucesión $\{f_n(x)\}$ hacia la solución $f(x)$ de la ecuación integral.

### 3.2.2. Ecuación integral de Volterra de primera especie

Por lo general, suele ser dificil manejar ecuaciones integrales de Volterra de primera especie, por lo que vamos a ver cómo reducirlas a las de segunda especie.

#### Método 1

Consideramos la ecuación

$$\int_0^x k(x,t) f(t)\, dt = g(x)$$

y suponemos que el núcleo y $g(x)$ son suficientemente diferenciables.

Por la fórmula de Leibniz, si derivamos a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$k(x,x) f(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} k(x,t) f(t)\, dt = g'(x)$$

Si $k(x,x) \neq 0$ podemos escribir la ecuación como una de segunda especie de la siguiente forma:

$$f(x) + \int_0^x \frac{\frac{\partial}{\partial x} k(x,t)}{k(x,x)} f(t)\, dt = \frac{g'(x)}{k(x,x)}.$$

Si el núcleo de esta última ecuación pertenece a $L^2([a,b] \times [a,b])$ y $\frac{g'(x)}{k(x,x)} \in L^2[a,b]$, por el teorema 3.2.2 visto anteriormente, sabemos que va a tener una única solución en $L^2[a,b]$.

#### Método 2

Consideramos la ecuación

$$\int_0^x k(x,t) f(t)\, dt = g(x).$$

Sea

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

y vamos a realizar integración por partes en la ecuación original. Entonces

$$k(x,x)\varphi(x) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}k(x,t)\varphi(t)\,dt = g(x)$$

y si $k(x,x) \neq 0$, podemos dividir entre $k(x,x)$ para obtener la forma de la ecuación de segunda especie

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)\,dt = \frac{g(x)}{k(x,x)}.$$

Igual que antes, sabemos que esta última ecuación va a tener una única solución en $L^2[a,b]$ si su núcleo pertenece a $L^2([a,b]\times[a,b])$ y $\frac{g(x)}{k(x,x)} \in L^2[a,b]$.

Una ecuación que se puede resolver sin la necesidad de ser transformada a otra de segunda especie es la llamada ecuación de Abel

$$\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\,dt = g(x).$$

donde $0 \leq \alpha < 1$, $g(x)$ es continua y $g(0) = 0$.

Veamos cómo resolverla:

Si denotamos por $k_\alpha(x,t)$ al núcleo de la ecuación, aplicamos a ambos lados el operador de Volterra con núcleo $k_\beta(x,t)$ y cambiamos el orden de integración en el lado de la derecha obtenemos

$$\int_0^x \left\{ \int_0^x \frac{dz}{(x-z)^\beta (z-t)^\alpha} \right\} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\beta}\,dy.$$

Si hacemos el cambio $z = t + (x-t)u$ observamos que

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dz}{(x-z)^\beta (z-t)^\alpha} &= (x-t)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1 \frac{du}{(1-u)^\beta u^\alpha} \\ &= (x-t)^{1-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

donde $\Gamma(\rho)$ es la función gamma.

Entonces, la ecuación integral toma la forma

$$\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+\beta-1}}\,dt = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^\beta}\,dt$$

En particular, si $\beta = 1 - \alpha$ tendríamos

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Si finalmente derivamos, obtenemos la solución a la ecuación:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt.$$

Para finalizar, vamos a resolver un ejercicio en el que el operador integral es de Volterra.

**Ejercicio. Sea $\boldsymbol{Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt}$, con $\boldsymbol{f \in L^2[0,1]}$ función real.**

a) **Calcular $T^*$ y $TT^*$.**

b) **Calcular $\sigma(TT^*)$ y $r_\sigma(TT^*)$. Deducir el valor de $\|T\|$.**

c) **Desarrollar $TT^*f$ según el teorema espectral.**

a) Podemos escribir el operador como

$$Tf(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt,$$

donde $k(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < x, \\ 0 & \text{si } x < t. \end{cases}$

Entonces

$$T^*f(x) = \int_0^1 \overline{k(t,x)} f(t)\,dt = \int_x^1 f(t)\,dt,$$

ya que $\overline{k(t,x)} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x < t \\ 0 & \text{si } t < x. \end{array} \right.$

Además, $TT^*f(x) = \int_0^x T^*f(t)\,dt = \int_0^x \int_t^1 f(s)\,ds\,dt$. Si cambiamos el orden de integración,

$$\begin{aligned} TT^*f(x) &= \int_0^x \int_0^s f(s)\,dt\,ds + \int_x^1 \int_0^x f(s)\,dt\,ds \\ &= \int_0^x s f(s)\,ds + x \int_x^1 f(s)\,ds \\ &= \int_0^1 \min\{x,s\} f(s)\,ds. \end{aligned}$$

b) Para empezar, observamos que el operador $TT^*$ es autoadjunto y compacto:

Es autoadjunto ya que $(TT^*)^* = T^{**}T^* = TT^*$ y compacto por ser un operador integral de Volterra.

Al ser el operador $TT^*$ autoadjunto y compacto, el espectro puntual junto con el 0 coincide con el espectro del operador $TT^*$, es decir, $\sigma(TT^*) = \sigma_p(TT^*) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$. Por tanto, calcularemos $\sigma_p(TT^*)$.

Para calcular los autovalores de $TT^*$, tenemos que resolver la siguiente ecuación:

$$TT^*f(x) = \lambda f(x).$$

Derivando a ambos lados de la ecuación con respecto a $x$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \lambda f''(x) + f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f'(1) = 0, \end{cases}$$

cuya solución hemos calculado en el ejercicio 2.3.1. El conjunto de autovalores y autofunciones asociadas es

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2}, \quad \varphi_k(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi(2k+1)}{2} x.$$

Se obtiene así que $\sigma(TT^*) = \{\frac{4}{\pi^2(2k+1)^2},\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Ahora, por ser $TT^*$ autoadjunto, $r_\sigma(TT^*)$ coincide con la norma del operador $TT^*$, que a su vez es el máximo en módulo de los autovalores. Es decir, $r_\sigma(TT^*) = \text{máx}_{\lambda \in \sigma(TT^*)} |\lambda|$.

El máximo valor se alcanza para $k = 0, -1$, siendo $|\lambda_0| = |\lambda_{-1}| = 4/\pi^2$.

Por tanto, $r_\sigma(TT^*) = 4/\pi^2$.

Por último, como $\|T\|^2 = \|TT^*\| = r_\sigma(TT^*)$, tenemos que $\|T\| = 2/\pi$.

c) En el ejercicio 2.3.1 hemos desarrollado $TT^*$ según el teorema espectral.

# Apéndice A

# Ejercicios

En este apéndice vamos a resolver una serie de ejercicios en los que usamos algunos métodos estudiados a lo largo de la memoria.

1) **Calcular los autovalores del operador $T$ definido por**

$$\boldsymbol{Tf(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s)\,ds.}$$

Como el núcleo del operador es continuo en $L^2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, $T$ es compacto. Además, $T$ es autoadjunto ya que $k(t,s) = \cos(t-s) = \cos t\cos s + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s = \cos(s-t) = \overline{k(s,t)}$.

Para calcular los autovalores resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Tf(t) = \lambda f(t) &\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t-s)f(s)\,ds = \lambda f(t) \\ &\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t\cos s + \operatorname{sen} t \operatorname{sen} s)f(s)\,ds = \lambda f(t) \\ &\Longrightarrow \cos t \int_{-\pi}^{\pi} \cos s f(s)\,ds + \operatorname{sen} t \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} s f(s)\,ds = \lambda f(t) \end{aligned}$$

Llamamos $a = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos s f(s)\,ds$ y $b = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} s f(s)\,ds$, ya que son constantes. Entonces, tenemos que resolver la ecuación

$$a\cos t + b \operatorname{sen} t = \lambda f(t).$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por $\cos t$ y por $\operatorname{sen} t$ e integramos respecto de $t$ en $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos t(a\cos t + b\operatorname{sen} t)\, dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos t f(t)\, dt \Longrightarrow a\pi = \lambda a$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t(a\cos t + b\operatorname{sen} t)\, dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t f(t)\, dt \Longrightarrow b\pi = \lambda b$$

Suponemos que $\lambda \neq 0$ y luego estudiamos el caso $\lambda = 0$.

Distinguimos dos casos:

*a*) Si $\lambda = \pi$:
Entonces $a$ y $b$ son arbitrarios y la función $f(t) = \frac{a}{\pi}\cos t + \frac{b}{\pi}\operatorname{sen} t$ es autofunción.

*b*) Si $\lambda \neq \pi$:
Necesariamente $a = b = 0$, de modo que $f(t) = 0$. Por tanto, $\lambda$ no es autovalor.

Ahora, si $\lambda = 0$:

Volviendo a la ecuación $a\cos t + b\operatorname{sen} t = \lambda f(t)$, obtenemos $a\cos t + b\operatorname{sen} t = 0$ y como el $\cos t$ y el $\operatorname{sen} t$ son linealmente independientes, necesariamente $a = b = 0$.

Entonces, $\lambda = 0$ es autovalor y sus autofunciones son aquellas que verifican

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos s\, f(s)\, ds = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} s\, f(s)\, ds = 0.$$

En resumen, el conjunto de autovalores del operador $T$ es $\sigma_p(T) = \{0, \pi\}$.

2) **Calcular los autovalores del operador $T$ definido por**

$$\boldsymbol{Tf(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (t-s)^2 f(s)\, ds.}$$

Como el núcleo del operador es continuo en $L^2([-\pi,\pi] \times [-\pi,\pi])$, $T$ es compacto. Además, $T$ es autoadjunto ya que $k(t,s) = (t-s)^2 = (s-t)^2 = \overline{k(s,t)}$.

Para calcular los autovalores resolvemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} Tf(t) = \lambda f(t) &\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (t-s)^2 f(s)\, ds = \lambda f(t) \\ &\Longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - 2ts + s^2) f(s)\, ds = \lambda f(t) \\ &\Longrightarrow t^2 \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds - 2t \int_{-\pi}^{\pi} s f(s)\, ds + \int_{-\pi}^{\pi} s^2 f(s)\, ds = \lambda f(t) \end{aligned}$$

Llamamos $a = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds, b = \int_{-\pi}^{\pi} sf(s)\,ds,$ y $c = \int_{-\pi}^{\pi} s^2 f(s)\,ds$, ya que son constantes. Entonces, tenemos que resolver la ecuación

$$at^2 - 2bt + c = \lambda f(t).$$

Multiplicamos a ambos lados de la ecuación por 1, $t$ y por $t^2$ e integramos respecto de $t$ en $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (at^2 - 2bt + c)\,dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt &\Longrightarrow \frac{2}{3}\pi^3 a + 2\pi c = \lambda a \\
\int_{-\pi}^{\pi} (at^3 - 2bt^2 + ct)\,dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} tf(t)\,dt &\Longrightarrow -\frac{4}{3}\pi^3 b = \lambda b \\
\int_{-\pi}^{\pi} (at^4 - 2bt^3 + ct^2)\,dt = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 f(t)\,dt &\Longrightarrow \frac{2}{5}\pi^5 a + \frac{2}{3}\pi^3 c = \lambda c
\end{aligned}$$

El sistema anterior puede escribirse así:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & 2\pi \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 0 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (AX = 0)$$

Suponemos que $\lambda \neq 0$ y luego estudiamos el caso en el que sea $\lambda = 0$.

Tiene solución única (trivial) si y sólo si $\det A \neq 0$ (pues $a = b = c = 0$ y volviendo a la ecuación $at^2 - 2bt + c = \lambda f(t)$ obtenemos $0 = \lambda f(t)$, luego $f(t) = 0$ y, entonces, $\lambda$ no es autovalor).

Por tanto, para que exista solución no trivial, necesariamente $\det A = 0$. Así, calculamos los valores de $\lambda$ para los cuales existe solución no trivial, es decir los autovalores.

De la segunda ecuación obtenemos el primer autovalor, $\lambda_1 = -\frac{4}{3}\pi^3$, para $b$ arbitrario.

Sustituyendo el valor de $\lambda_1$ en las ecuaciones restantes y obligando a que el determinante de la matriz resultante sea nula, obtenemos los valores de $a$ y $c$:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 + \frac{4}{3}\pi^3 & 2\pi \\ \frac{2}{5}\pi^5 & \frac{2}{3}\pi^3 + \frac{4}{3}\pi^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2\pi^3 & 2\pi \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 2\pi^3 \end{vmatrix} = 4\pi^6 - \frac{4}{5}\pi^6 \neq 0 \Longrightarrow a = c = 0$$

Volviendo a la ecuación $at^2 - 2bt + c = \lambda f(t)$ y sustituyendo los valores de $a$ y $c$ obtenemos $-2bt = \lambda_1 f(t)$, luego $f(t) = Ct,\ C \in \mathbb{R}$ .

Por último, tenemos que resolver el sistema formado por la primera y tercera ecuación y así obtendremos los dos autovalores restantes y sus correspondientes autofunciones.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 2\pi \\ \frac{2}{5}\pi^5 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 2\pi \\ \frac{2}{5}\pi^5 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda \end{vmatrix} = \big(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda\big)^2 - \frac{4}{5}\pi^6 = 0$$

Los autovalores son $\lambda_2 = \dfrac{10 + 6\sqrt{5}}{15}\pi^3$ y $\lambda_3 = \dfrac{10 - 6\sqrt{5}}{15}\pi^3$.

Hallamos sus autofunciones:

Para $\lambda = \lambda_2$,

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \big(\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{10 + 6\sqrt{5}}{15}\pi^3\big)a + 2\pi c = 0 \Longrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2 a$$

$$\big(-\frac{4}{3}\pi^3 - \frac{10 + 6\sqrt{5}}{15}\pi^3\big)b = 0 \Longrightarrow b = 0.$$

Sustituyendo los valores de $b$ y $c$ en la ecuación $at^2 - 2bt + c = \lambda f(t)$ obtenemos $\lambda_2 f(t) = a(t^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)$, luego $f(t) = C(t^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)$, $C \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = \lambda_3$,

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \big(\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{10 - 6\sqrt{5}}{15}\pi^3\big)a + 2\pi c = 0 \Longrightarrow c = -\frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2 a$$

$$\big(-\frac{4}{3}\pi^3 - \frac{10 - 6\sqrt{5}}{15}\pi^3\big)b = 0 \Longrightarrow b = 0.$$

Sustituyendo los valores de $b$ y $c$ en la ecuación $at^2 - 2bt + c = \lambda f(t)$ obtenemos $\lambda_2 f(t) = a(t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)$, luego $f(t) = C(t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)$, $C \in \mathbb{R}$.

Ahora, si $\lambda = 0$:

Tenemos que $at^2 - 2bt + c = 0$ y como 1, $t$ y $t^2$ son linealmente independientes, necesariamente $a = b = c = 0$.

Entonces, $\lambda = 0$ es autovalor y cualquier función que cumpla

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\,ds = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} sf(s)\,ds = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} s^2 f(s)\,ds = 0$$

será autofunción asociada a $\lambda = 0$.

En resumen, el conjunto de autovalores del operador $T$ es

$$\sigma_p(T) = \{0, -\frac{4}{3}\pi^3, \frac{10+6\sqrt{5}}{15}\pi^3, \frac{10-6\sqrt{5}}{15}\pi^3\}.$$

3) **Encontrar la solución de la ecuación**

$$\boldsymbol{\int_{-\pi}^{\pi} (s-t)^2 f(s)\,ds - \lambda f(t) = 1.}$$

El operador $T$ es compacto y autoadjunto, luego podemos aplicar el teorema espectral de operadores compactos y autoadjuntos para calcular la solución.

Por el ejercicio anterior, sabemos que el conjunto de autovalores del operador $T$ es

$$\sigma_p(T) = \{0, -\frac{4}{3}\pi^3, \frac{10+6\sqrt{5}}{15}\pi^3, \frac{10-6\sqrt{5}}{15}\pi^3\}.$$

Para poder aplicar el teorema espectral, las autofunciones deben formar un conjunto ortonormal.

Como el operador es autoadjunto, por la proposición 1.4.6 vista en el capítulo 1, las autofunciones ya son ortogonales. Basta calcular su norma.

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= \frac{f_1(t)}{\|f_1(t)\|} = \sqrt{\frac{3}{2\pi^3}}\,t \\
e_2(t) &= \frac{f_2(t)}{\|f_2(t)\|} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2 + t^2}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2 + t^2\right)^2 dt\right)^{1/2}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2 + t^2}{\sqrt{\frac{6+4\sqrt{5}}{15}\pi^5 + \frac{2}{5}\pi^3}}. \\
e_3(t) &= \frac{f_3(t)}{\|f_3(t)\|} = \frac{t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2\right)^2 dt\right)^{1/2}} = \frac{t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2}{\left(\frac{4-4\sqrt{5}}{15}\pi^5\right)^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Estudiamos los tres casos por separado:

*a*) Si $\underline{\lambda \in \rho(T)}$:

Por el teorema espectral de operadores compactos y autoadjuntos, sabemos que la solución en este caso es la siguiente:

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{\lambda}g + \frac{1}{\lambda}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}\langle g, e_n\rangle e_n \\ &= -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\Big[\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda}\langle 1, e_1\rangle e_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda}\langle 1, e_2\rangle e_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_3-\lambda}\langle 1, e_3\rangle e_3\Big]. \end{aligned}$$

Calculamos $\langle 1, e_n\rangle$, $n \in \{1,2,3\}$:

$$\langle 1, e_1\rangle = \langle 1, \sqrt{\tfrac{3}{2\pi^3}}t\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{2\pi^3}}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot t\,dt = 0.$$

$$\begin{aligned} \langle 1, e_2\rangle &= \langle 1, \frac{t^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2}{\sqrt{\frac{6+4\sqrt{5}}{15}\pi^5 + \frac{2}{5}\pi^3}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{6+4\sqrt{5}}{15}\pi^5 + \frac{2}{5}\pi^3}}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2\,dt \\ &= \frac{10+6\sqrt{5}}{15\sqrt{\frac{6+4\sqrt{5}}{15}\pi^5 + \frac{2}{5}\pi^3}}\pi^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 1, e_3\rangle &= \langle 1, \frac{t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2}{\sqrt{\frac{4-4\sqrt{5}}{15}\pi^5}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{4-4\sqrt{5}}{15}\pi^5}}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2\,dt \\ &= \frac{10-6\sqrt{5}}{15\sqrt{\frac{4-4\sqrt{5}}{15}\pi^5}}\pi^3. \end{aligned}$$

Entonces, la solución es

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{\lambda}\Big[ -1 &+ \frac{(10+6\sqrt{5})^2(t^2 + \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)\pi^3}{\big[15(10+6\sqrt{5})\pi^3 - 15^2\lambda\big]\big(\frac{6+4\sqrt{5}}{15}\pi^2 + \frac{2}{5}\big)} \\ &+ \frac{(10-6\sqrt{5})^2(t^2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\pi^2)}{(4-4\sqrt{5})\big[(10-6\sqrt{5})\pi^3 - 15\lambda\big]}\Big]. \end{aligned}$$

*b*) Si $\underline{\lambda \in \sigma(T)}$:

$(T-\lambda I)f = g$ tiene solución si y sólo si $g \perp \ker(T - \lambda_n I)$, siendo la solución general, en este caso,

$$f = \frac{1}{\lambda_n}g + \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k\neq n}\frac{\lambda_k}{\lambda_n - \lambda_k}\langle g, e_k\rangle e_k + z,$$

donde $z \in \ker(T - \lambda_n I)$ es arbitrario.

Observamos en primer lugar que $\ker(T - \lambda_n I) = \operatorname{span}\{e_n\}$, para $n \in \{1, 2, 3\}$. De aquí deducimos que $g \perp \ker(T - \lambda_n I) \iff g \perp e_n$. Antes hemos calculado que $\langle 1, e_1 \rangle = 0$ pero $\langle 1, e_2 \rangle \neq 0 \neq \langle 1, e_3 \rangle$. Por lo tanto, $(T - \lambda I)f = 1$ no tiene solución.

*c*) Si $\underline{\lambda = 0}$:

La ecuación $Tf = g$ tiene solución si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

$$g \perp \ker(T),$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle g, e_n \rangle|^2 < +\infty.$$

En este caso, la solución viene dada por

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n} \langle g, e_n \rangle e_n + z,$$

donde $z \in \ker(T)$ es arbitrario.

Primero veamos que $g \perp \ker(T)$. Debemos probar que $\langle 1, f \rangle = 0$ para todo $f \in \ker(T)$.

En el ejercicio anterior, cuando hemos calculado los autovalores, hemos visto que si $\lambda = 0$ entonces $f(x) = 0$. Luego, $\langle 1, f \rangle = 0$ y así queda probada la primera condición.

Estudiamos ahora la segunda condición:

$$\sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\lambda_n^2} |\langle 1, e_n \rangle|^2 = \frac{15}{(6 + 4\sqrt{5})\pi^5 + 6\pi^3} + \frac{15}{(4 - 4\sqrt{5})\pi^5} < +\infty.$$

Entonces, la solución es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{\lambda_n} \langle 1, e_n \rangle e_n(x) = \frac{15t^2 + 3\sqrt{5}\pi^2}{(6 + 4\sqrt{5})\pi^5 + 6\pi^3} + \frac{15t^2 - 3\sqrt{5}\pi^2}{(4 - 4\sqrt{5})\pi^5},$$

siendo $z(x) = 0$ ya que cuando $\lambda = 0$, $f$ es nula, luego $\ker(T) = \{0\}$.

4) **Encontrar la solución de la ecuación**

$$\int_{-\pi}^{\pi} (s - t)^2 f(s)\, ds - \lambda f(t) = g(t).$$

Definimos el operador $T$ como

$$Tf(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (s-t)^2 f(s)\, ds,$$

que por el ejercicio (2) sabemos que es compacto y autoadjunto.

Resolvemos la ecuación dependiendo si $\lambda$ es o no autovalor.

<u>Para $\lambda$ no autovalor</u>:

Si $\lambda$ no es autovalor siempre existe solución, ya que podemos despejar directamente $f(t)$:

$$(T-\lambda I)f(t) = g(t) \Longrightarrow f(t) = (T-\lambda I)^{-1} g(t).$$

Razonando de la misma forma que en el ejercicio anterior, tenemos

$$Tf(t) - \lambda f(t) = g(t) \Longrightarrow at^2 - 2bt + c - \lambda f(t) = g(t),$$

donde $a = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, ds$, $b = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sf(s)\, ds$ y $c = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} s^2 f(s)\, ds$.

Y multiplicando a ambos lados de la ecuación por 1, $t$ y $t^2$ e integrando respecto de $t$ en $[-\pi,\pi]$ obtenemos tres ecuaciones que se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & 2\pi \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 0 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\, dt \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\, dt \end{pmatrix}$$

Como $\lambda$ no es autovalor el determinante es distinto de cero. Por tanto, existe una única solución que se resuelve por Cramer:

$$a = \frac{(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt - 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\, dt}{\lambda^2 - \frac{4}{3}\pi^3\lambda - \frac{16}{45}\pi^6}$$

$$b = \frac{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\, dt}{-\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda}$$

$$c = \frac{(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda)\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\, dt - \frac{2}{5}\pi^5 \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt}{(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda)^2 - 2\pi\frac{2}{5}\pi^5}$$

Hemos sido capaces de calcular los valores de $a$, $b$ y $c$ en función de $g(t)$ solamente. Por tanto, volviendo a la ecuación $at^2 - 2bt + c - \lambda f(t) = g(t)$ y sustituyendo los valores calculados obtenemos la solución $f(t)$.

<u>Para $\lambda$ autovalor</u>:

Los autovalores se calculan resolviendo la ecuación homogénea, que por el ejercicio anterior sabemos que son

$$\lambda_1 = -\frac{4}{3}\pi^3, \quad \lambda_2 = \frac{10+6\sqrt{5}}{15}\pi^3 \quad \text{y } \lambda_3 = \frac{10-6\sqrt{5}}{15}\pi^3.$$

Volviendo al sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & 2\pi \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & 0 \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 0 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\,dt \\ \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\,dt \end{pmatrix},$$

al ser $\lambda$ autovalor, el rango de la matriz de coeficientes es dos. Para que exista, al menos, una solución el rango de la matriz ampliada también debe ser dos. Para ello, obligamos a que todos los menores de $3 \times 3$ sean cero y así hallar las condiciones que debe cumplir $g(t)$.

Si llamamos $s = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$, $\quad t = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\,dt$, $\quad w = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\,dt$, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & 2\pi & s \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & t \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 0 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & w \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 2\pi & s \\ 0 & 0 & t \\ \frac{2}{5}\pi^5 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & w \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2\pi t \frac{2}{5}\pi^5 - t\big(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda\big)^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & s \\ 0 & -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & t \\ \frac{2}{5}\pi^5 & 0 & w \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \big(-\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda\big)\Big[\big(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda\big)w - \frac{2}{5}\pi^5 s\Big] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2\pi & s \\ -\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda & 0 & t \\ 0 & \frac{2}{3}\pi^3 - \lambda & w \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \big(-\frac{4}{3}\pi^3 - \lambda\big)\Big[\big(\frac{2}{3}\pi^3 - \lambda\big)s - 2\pi w\Big] = 0$$

Las condiciones obtenidas para los diferentes valores de $\lambda$ son las siguientes:

Para $\lambda = \lambda_1 = -\frac{4}{3}\pi^3$, se debe cumplir $t = \frac{5}{4}$ ó $t = 0$. Es decir, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\,dt = 0$ ó $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} tg(t)\,dt = \frac{5}{4}$

Para $\lambda = \lambda_2 = \frac{10+6\sqrt{5}}{15}\pi^3$, se debe cumplir $s = -\frac{\sqrt{5}}{6\pi^2}w$. Es decir, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt = -\frac{\sqrt{5}}{6\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\,dt$.

Para $\lambda = \lambda_3 = \frac{10-6\sqrt{5}}{15}\pi^3$, se debe cumplir $w = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{5}s$. Es decir, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t^2 g(t)\,dt = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{5}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$.

5) **Sea $G \in L^2[0,1]$ y suponemos que se extiende a una función 1-periódica en $\mathbb{R}$. Definimos en $L^2[0,1]$ el operador**

$$\boldsymbol{Tf(x) = \int_0^1 G(x-y)f(y)\,dy.}$$

**Probar que $T$ es normal y compacto.**

Para ver que el operador $T$ es normal tenemos que comprobar que se verifica $TT^* = T^*T$.

Calculamos por separado $T^*Tf(x)$ y $TT^*f(x)$:

$$\begin{aligned} T^*Tf(x) &= \int_0^1 G(y-x)Tf(y)\,dy \\ &= \int_0^1 G(y-x)\left\{\int_0^1 G(y-u)f(u)\,du\right\}dy \\ &= \int_0^1 f(u)\,du \int_0^1 G(y-x)G(y-u)\,dy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} TT^*f(x) &= \int_0^1 G(x-y)T^*f(y)\,dy \\ &= \int_0^1 G(x-y)\left\{\int_0^1 G(u-y)f(u)\,du\right\}dy \\ &= \int_0^1 f(u)\,du \int_0^1 G(x-y)G(u-y)\,dy \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$\int_0^1 G(y-x)G(y-u)\,dy = \int_0^1 G(x-y)G(u-y)\,dy$$

En la integral de la izquierda hacemos el cambio de variable $y-x=v$ y teniendo en cuenta que $G$ es 1-periódica obtenemos

$$\int_{-x}^{-x+1} G(v)G(v+x-u)\,dv = \int_0^1 G(v)G(v+x-u)\,dv$$

Si hacemos lo mismo con la integral de la derecha pero siendo el cambio $u-y=v$ obtenemos el mismo resultado. Así queda demostrada la igualdad y, por tanto, $T$ es normal.

Por último, como el núcleo $G(x-y)$ es continuo en $L^2([0,1]\times[0,1])$ sabemos que $T$ es compacto.

6) **Sea $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador integral defininido por**

$$\boldsymbol{Tf(x) = \int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)\,dy.}$$

a) **Probar que $T$ es autoadjunto y compacto y que $\|T\| \leq 1$.**

b) **Sea $f \in C[0,1]$ y $g = Tf$. Probar que $g \in C^{(2)}[0,1]$ y que**

$$\begin{aligned} g''(x) - g(x) = -2f(x),\ \forall x \in [0,1], \\ g(0) = g'(0),\ g(1) = -g'(1). \end{aligned}$$

c) **Recíprocamente, sea $g \in C^{(2)}[0,1]$ con $g(0) = g'(0)$, $g(1) = -g'(1)$.**

**Llamar $f(x) = -\dfrac{g''(x)-g(x)}{2}$ y probar que $g = Tf$.**

d) **Probar que $\overline{\Im(T)} = L^2[0,1]$ y deducir que $0 \notin \sigma_p(T)$. ¿Es $0 \in \sigma(T)$?**

e) **Si $f \in C[0,1]$ y $g = Tf$, probar que**

$$\boldsymbol{\langle Tf, f\rangle = \frac{1}{2}\int_0^1 (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2)\,dx + \frac{|g(1)|^2 + |g(0)|^2}{2}.}$$

**Deducir que, si $f \in L^2[0,1]$, entonces $\langle Tf, f\rangle \geq \frac{\|Tf\|^2}{2}$.**

f) **Comprobar que $\sigma(T) \subset [0,1]$.**

g) **Si** $\lambda \in (0,1]$**, sea** $a_\lambda = \sqrt{\frac{(2-\lambda)}{\lambda}}$. **Probar que**

$$\boldsymbol{\lambda \in \sigma(T) \iff (1 - a_\lambda^2)\,\mathbf{sen}\, a_\lambda + 2a_\lambda \cos a_\lambda = 0.}$$

**Deducir que** $\boldsymbol{\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$**, donde**

$$\boldsymbol{\frac{2}{1 + (\frac{\pi}{2} + n\pi)^2} < \lambda_n < \frac{2}{1 + (n\pi)^2}.}$$

a) Como el núcleo del operador es continuo en $L^2([0,1]\times[0,1])$, $T$ es compacto.
Además, $k(y,x) = e^{-|y-x|} = e^{-|x-y|} = \overline{k(x,y)}$ ya que

$$|x-y| = \begin{cases} x - y & \text{si } y < x \\ -(x-y) = y - x & \text{si } x < y \end{cases}$$

y

$$|y-x| = \begin{cases} y - x & \text{si } x < y \\ -(y-x) = x - y & \text{si } y < x \end{cases}$$

Por lo tanto, $T$ es también autoadjunto.

Veamos ahora que $\|T\| < 1$ utilizando la definición,

$$\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2}.$$

Calculamos $\|Tf\|_2^2$ para omitir las raíces y usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_2^2 &= \int_0^1 |Tf(x)|^2\,dx = \int_0^1 |\int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)\,dy|^2\,dx \\
&\leq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 e^{-|x-y|}|f(y)|\,dy \right\}^2 dx \\
&\leq \int_0^1 \left\{ \sqrt{\int_0^1 e^{-2|x-y|}\,dy} \sqrt{\int_0^1 |f(y)|^2\,dy} \right\}^2 dx \\
&= \|f\|_2^2 \int_0^1 \int_0^1 e^{-2|x-y|}\,dy\,dx \\
&= \|f\|_2^2 \int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{-2(x-y)}\,dy + \int_x^1 e^{2(x-y)}\,dy \right\} dx \\
&= \frac{1+e^{-2}}{2}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dividimos por $\|f\|_2^2$ y tomamos raíces cuadradas:

$$\frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} = \sqrt{\frac{1+e^{-2}}{2}} < 1$$

Por lo tanto, $\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} < 1$

Otra manera de comprobar que $\|T\| < 1$ sería la siguiente:

El conjunto de autovalores está contenido en la bola de centro el origen y radio la norma del operador. Gracias a que el operador es autoadjunto, su norma coincide con el máximo en módulo de los autovalores.

Por tanto, si calculamos todos los autovalores del operador $T$ y consideramos sus módulos veremos que $\|T\| < 1$.

b) Veamos que $g \in C^{(2)}[0,1]$, siendo $g = Tf(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^y f(y)\,dy + e^x \displaystyle\int_x^1 e^{-y} f(y)\,dy$:

Calculamos las dos primeras derivadas de $g(x)$:

$$g'(x) = -e^{-x}\int_0^x e^y f(y)\,dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y)\,dy$$

$$g''(x) = e^{-x}\int_0^x e^y f(y)\,dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y)\,dy - 2f(x).$$

Como $f \in C[0,1]$, ambas derivadas son continuas.

Entonces, se cumple que $g''(x) - g(x) = -2f(x)$ y

$$g(0) = \int_0^1 e^{-y} f(y)\,dy = g'(0), \quad g(1) = e^{-1}\int_0^1 e^y f(y)\,dy = -g'(1).$$

c) Calculamos $Tf$ usando integración por partes y teniendo en cuenta que $g(0) = g'(0)$, $g(1) = -g'(1)$.:

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= -\int_0^1 e^{-|x-y|}\frac{g''(y)-g(y)}{2}\,dy\\
&= \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^y g(y)\,dy + \frac{e^x}{2}\int_x^1 e^{-y}g(y)\,dy\\
&\quad - \frac{e^{-x}}{2}\int_0^x e^y g''(y)\,dy - \frac{e^x}{2}\int_x^1 e^{-y}g''(y)\,dy\\
&= \frac{e^{-x}}{2}\Big[-e^y g'(y)|_0^x + \int_0^x e^y g(y)\,dy + \int_0^x e^y g'(y)\,dy\Big]\\
&\quad + \frac{e^x}{2}\Big[-e^{-y}g'(y)|_x^1 \int_x^1 e^{-y}g(y)\,dy + \int_x^1 e^{-y}g'(y)\,dy\Big]\\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{-x}g'(0) - g'(x) + g(x) - e^{-x}g(0)\\
&\quad - e^{x-1}g'(1) + g'(x) - e^{x-1}g(1) + g(x)\Big]\\
&= g(x).
\end{aligned}$$

d) Si $f \in \ker(T)$, entonces $Tf = 0$. Sustituyendo $g$ por cero en el apartado anterior, se deduce que $f = 0$. Así pues, $\ker(T) = \{0\}$, de donde $\overline{\Im(T)} = \ker(T)^\perp = L^2[0,1]$.
Como $T$ es inyectiva, $0 \notin \sigma_p(T)$.
Por último, si $0 \in \rho(T)$, existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, en cuyo caso $I = TT^{-1}$ sería compacto, lo cual no es cierto en dimensión infinita.

e) Por el apartado (b) sabemos que $f(x) = -\frac{g''(x)-g(x)}{2}$, $g(0) = g'(0)$ y $g(1) = -g'(1)$. Por tanto, integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle Tf, f\rangle = \langle g, -\frac{g''-g}{2}\rangle &= -\frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\overline{g''(x)}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 g(x)\overline{g(x)}\,dx\\
&= -\frac{1}{2}[g(x)\overline{g'(x)}|_0^1 - \int_0^1 |g'(x)|^2\,dx] + \frac{1}{2}\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\\
&= -\frac{g(1)\overline{g'(1)}}{2} + \frac{g(0)\overline{g'(0)}}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2)\,dx\\
&= \frac{|g(1)|^2 + |g(0)|^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2)\,dx.
\end{aligned}$$

Si $f \in L^2[0,1]$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^1 (|g(x)|^2 + |g'(x)|^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 |g(x)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 |g'(x)|^2\,dx\\
&= \frac{1}{2}\|g\|_2^2 + \frac{1}{2}\|g'\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\|g\|_2^2 = \frac{1}{2}\|Tf\|_2^2.
\end{aligned}$$

Y así, $\langle Tf, f\rangle \geq \frac{\|Tf\|_2^2}{2}$.

f) Por los apartados (a) y (e), sabemos que $\|T\| < 1$ y $\langle Tf, f\rangle \geq 0$. Entonces,
$$0 \leq \inf_{\|f\|=1} \langle Tf, f\rangle \leq \sup_{\|f\|=1} \langle Tf, f\rangle \leq 1,$$
de donde $\sigma(T) \subset [0, 1]$.

g) Como $T$ es compacto, si $\lambda \in \sigma(T)$ y $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$. Por tanto, existe $f \neq 0$ tal que $Tf = \lambda f$.

Calculamos los autovalores resolviendo la ecuación $Tf = \lambda f$:
$$\int_0^1 e^{-|x-y|} f(y)\, dy = \lambda f(x)$$
Separamos el intervalo $[0, 1]$ en dos subintervalos:
$$\int_0^x e^{-(x-y)} f(y)\, dy + \int_x^1 e^{x-y} f(y)\, dy = \lambda f(x)$$
$$e^{-x} \int_0^x e^y f(y)\, dy + e^{-x} \int_x^1 e^{-y} f(y)\, dy = \lambda f(x)$$
Derivamos a ambos lados de la ecuación respecto de $x$:
$$-e^{-x} \int_0^x e^y f(y)\, dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y)\, dy = \lambda f'(x)$$
Volvemos a derivar y obtenemos
$$e^{-x} \int_0^x e^y f(y)\, dy + e^x \int_x^1 e^{-y} f(y)\, dy - 2f(x) = \lambda f''(x)$$
Restando las dos ecuaciones y evaluandolas en $x = 0$ y $x = 1$ obtenemos el siguiente problema con condiciones de contorno:
$$\begin{cases} \lambda f''(x) + (2-\lambda) f(x) = 0 \\ f(0) = f'(0) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{-y} f(y)\, dy \\ f(1) = -f'(1) = \frac{1}{\lambda e} \int_0^1 e^y f(y)\, dy, \end{cases}$$

El polinomio característico es $\lambda r^2 + (2 - \lambda) = 0$ y sus raíces son $r = \pm\sqrt{\frac{2-\lambda}{\lambda}} i = \pm a_\lambda i$.
Entonces, la solución general de la ecuación es
$$f(x) = C_1 \cos a_\lambda x + C_2 \operatorname{sen} a_\lambda x.$$
Al sustituir los datos de contorno, obtenemos
$C_1 = a_\lambda C_2$ y $a_\lambda \cos a_\lambda + \operatorname{sen} a_\lambda = a_\lambda(a_\lambda \operatorname{sen} a_\lambda - \cos a_\lambda)$.

Por tanto, habrá solución no nula cuando

$$(1 - a_\lambda^2) \operatorname{sen} a_\lambda + 2a_\lambda \cos a_\lambda = 0.$$

La ecuación anterior es equivalente a $\tan a_\lambda = \frac{2a_\lambda}{a_\lambda^2 - 1}$.
Teniendo en cuenta que $\lambda \in (0, 1]$, entonces $\tan a_\lambda > 0$, es decir $n\pi < a_\lambda < n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \geq 0$.
Despejamos $\lambda$:

$$n\pi < \sqrt{\frac{2 - \lambda}{\lambda}} < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$1 + (n\pi)^2 < \frac{2}{\lambda} < 1 + (n\pi + \frac{\pi}{2})^2$$

$$\frac{2}{1 + (n\pi + \frac{\pi}{2})^2} < \lambda < \frac{2}{1 + (n\pi)^2}.$$

# Bibliografía


[GG] **Israel Gohberg y Seymour Goldberg,** *Basic Operator Theory.* Birkhäuser, 1980.

[Ho] **Harry Hochstadt,** *Integral equations.* Wiley, 1989.

[Ka] **Ram Kanwal,** *Linear integral equations: theory and technique.* Birkhäuser, 1971.

[KKM] **M. Krasnov, A. Kiseliov y G. Makarenko,** *Ecuaciones integrales.* MIR, 1970.

[Pe] **Ivan Petrovsky,** *Lecciones de la teoría de las ecuaciones integrales.* MIR, 1971.

[Pi] **Allen Pipkin,** *A Course on integral equations.* Springer Science+Business Media, LLC, 1991.

[Po] **Witold Pogorzelski,** *Integral equations and their applications.* Pergamon, 1996.

[RY] **Bryan Rynne y Martin Youngson,** *Linear functional analysis.* Springer, 2008.

[Tr] **Francesco Tricomi,** *Integral equations.* Interscience, 1957.