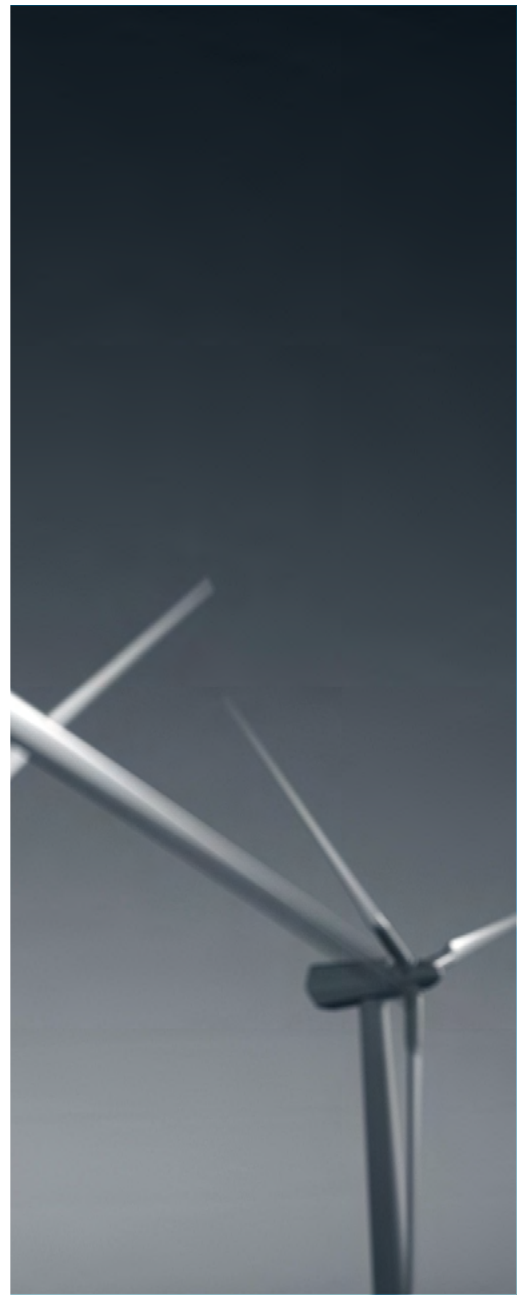


ESTATIKA ETA MATERIALEN ERRESISTENTZIA

JUAN LUIS OSA AMILIBIA



eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Osa Amilibia, Juan Luis.

Estatika eta materialen erresistentzia [Recurso electrónico] / Juan Luis Osa Amilibia. – Datos.
– Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2019]. – 1 recurso en línea : PDF (121 p.).

Modo de acceso: World Wide Web.

En port.: Gipuzkoako Ingeniaritza Eskola. Eibarko Atala.

ISBN: 978-84-1319-066-2

1. Estática. 2. Resistencia de materiales. .

(0.034) 620.17

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-1319-066-2

Gaien Aurkibidea

I. Mekanika: Estatika	1
1. Partikularen eta solido zurrunaren estatika	3
1.1. Sarrera	3
1.2. Partikularen estatika	4
1.3. Indarrak eta momentuak. Indar-sistemak	5
1.3.1. Bektoreak	5
1.3.2. Indarrak	6
1.3.3. Momentuak	9
1.3.4. Indarren konposizioa. Indar-sistema baliokideak	13
1.4. Masen geometria	15
1.4.1. Grabitate-zentroak	16
1.4.2. Inertzia-momentuak	20
1.5. Solido zurrunaren oreka	24
2. Habeak eta kableak	29
2.1. Barne-indarrak	29
2.1.1. Barne-indarrak sekzio jakin batean	33
2.2. Habeak	34
2.2.1. Indar ebakitzailen eta makurdura-momentuen diagrama	35
2.2.2. Karga banatuen, indar ebakitzailen eta makurdura-momentuen arteko erlazioa	37
2.3. Kableak	40
2.3.1. Karga bilduak dituzten kableak	40
2.3.2. Karga banatuak dituzten kableak	41
3. Egitura giltzatuak	45
3.1. Sarrera. Egitura lauak	45
3.2. Korapiloen metodoa	47
3.3. Sekzioen metodoa (Ritter)	47
II. Materialen erresistentzia	49
4. Tentsio eta deformazio kontzeptuak	51
4.1. Materialen erresistentzia	51
4.2. Sistema erreala eta kalkulu-eskema	51
4.3. Barne-indarrek sortutako tentsioak	54
4.4. Desplazamenduak eta deformazioak	57

4.5.	Tentsio normala eta deformazioa	60
4.6.	Tentsio-deformazio diagrama	61
4.7.	Elastikotasun lineala eta Hooke-ren legea	67
4.8.	Tentsio ebakitzaila eta deformazio angeluarra	69
5.	Karga axialak. Trakzioa eta konpresioa	73
5.1.	Sarrera	73
5.2.	Indar axialak eragindako luzapena	74
5.3.	Desplazamendu-diagramak	76
5.4.	Tenperatura eta aurre-deformazioen eragina	76
5.5.	Tentsio-kontzentrazioa	78
6.	Bihurdura	81
6.1.	Sarrera	81
6.2.	Bihurdura ardatz zirkularretan	81
6.3.	Bihurdura ez-uniformea	88
6.4.	Ebakidura hutsa	89
6.5.	Potentzia-transmisioa ardatzetan	89
7.	Makurdura eta gilbordura	91
7.1.	Sarrera	91
7.2.	Deformazio normalak habeetan	94
7.3.	Tentsio normalak habeetan	97
7.4.	Tentsio ebakitzailak	98
7.5.	Karga axialdun habeak: karga inklinatuak eta eszentrikoak . . .	101
7.6.	Gilbordura	104
7.6.1.	Karga kritikoa	105
7.6.2.	Eulerren formulak	105
7.6.3.	Zutabearen berma-baldintzak	107
7.6.4.	Eulerren formularen aplikazio-eremua	107

Sarrera

Testuingurua

Estatika eta Materialen Erresistentzia irakasgaia, Gipuzkoako Ingeniaritza Eskolako (Eibarko atala) Energia Berriztagarrien Ingeniaritzako Graduan 2. mailan ematen den industria-enborreko irakasgaia da. Irakasgaiak elementu mekanikoen diseinuaren oinarriak azaltzen ditu. Edukia energia berriztagarrien aplikazioetara moldatua dago, haize-, ur-, olatu- eta eguzki-energiak sortzeko instalazioak adibidetzat ipiniz. Irakasgaiak Ingeniaritza Mekanikoan garrantzia handia eta tradizio luzea duten bi irakasgaien batura da: alde batetik, *Mekanika* irakasgaiaren *Estatika* zatia (*fisika aplikatua*), eta bestetik, *Elastikotasuna eta Materialen Erresistentzia* (*ingurune jarraituen mekanika*). Lehenengoak solidoak zurruntzat hartzen ditu indarren oreka-baldintzak aztertzeko; bigarrenak, berriz, solidoak elastikotzat eta deformagarritzat hartzen ditu, barne-tentsioen eta deformazioen azterketa ahalbidetuz. Biak dira osagarriak, bata bestearen jarraipena.

Irakasgaiaren helburua, elementu mekanikoen diseinuaren oinarriak ikastea da. Piezaren dimentsioak, materialaren propietate mekanikoak eta kargak ezaugututa, elementuaren dimentsioen egokitasuna, kargak jasateko gaitasuna eta segurtasun-tartea ebaluatzen dira. Horretarako, aztertu nahi den elementu mekanikoa parte den mekanismotik edo egituratik isolatu ondoren, kanpo-indarrak eta ingurune-baldintzak aplikatuz, solido askearen diagrama lortzen ikasiko da. Solidoa zurruntzat hartuz, indarren eta momentuen oreka aplikatuz lortzen da. Materialen erresistentziak elementuak indar horiek sortutako tentsioak jasateko gai den ebaluatzen du. Hiru karga mota daude: karga axialak (trakzioa eta konpresioa), bihurtura eta makurdura. Bakoitzak bere moduan eragiten du solidoaren tentsioetan. Tentsioak elementuaren materialen propietate mekanikoekin konparatuz, elementu horren dimentsioak balioztatu eta segurtasun-koefizientea definitzen da. Gilbordura kasu berezia da (konpresioak sortzen duen desoreka), eta hori ere landuko da. Irakasgaia, materialen propietate mekanikoak zehazteko oinarrizko saiakuntzekin osatzen da laborategiko praktiketan.

Horrela, elementu mekanikoen diseinuaren ikuspegi orokorra lortzen da, kanpo-indarretatik abiatuz, gorputzaren dimentsioen funtzioan barne-indarrak aztertzen dira, eta horiek materialaren propietate mekanikoekin alderatzen dira eta diseinuaren egokitasuna zehazten da.

Ikasleak ikasturtea bukatzean, honako irakaskuntza-emaitez lortuko ditu:

- IE1: Egitura edo mekanismo baten elementu bat isolatu eta solido askearen diagrama marrazten du.



1. irudia: Eroritako sorgailu eolikoa (iturria: EDF)

- IE2: Solido deformagarrien elastikotasun/zurruntasun kontzeptuak eza-
gutzen ditu.
- IE3: Elementu mekanikoen duten lan egiteko eraren arabera (karga axial,
bihurdura, makurdura), kargen sortutako tentsioak kalkulatu ditu.
- IE4: Pieza mekaniko bat diseina dezake: elementuaren eskakizunak iden-
tifikatu, eta materialaren propietate mekanikoen arabera kanpo-indarrak
jasateko gai den ebaluatu du.
- IE5: Taldean lan egiten badaki.

Adibidea

Ekaitz baten ondoren Britainian dorre eoliko bat erori da. Dorrea oinarritik tolestu da (1. ir.). Zergatik?

Ekaitza haize bortitzekin etorri da. Horiek dorreko palak tinpla (haize-
orratz) posizioan ipinazitu ditu dorrearen segurtasuna bermatzeko. Hala ere,
haizeak paletan eta dorrean eragindako presioak oinarrian makurdura-momen-
tua sortu du, momentuak barne-tentsioak (trakzioa eta konpresioa alde bakoit-
zean), eta barne-tentsioek materialaren (altzairua) erresistentzia gainditzean
jausi da egitura.

Dorre osoari oinarrian eusten zaio, hantxe baitaude zimenduak. Horregatik
bertan biltzen dira karga guztiak. Gune hori bereziki indartua dago: bertan ez
da tolestu, pixka bat gorago baizik.

Berez, erresistentzia gainditzeagatik ez du hutsegini. Konpresioak hodiko pa-
reta mehean eragin duen alboko gilborduragatik tolestu da konpresioaren
aldean. Hots, egitura desorekatu egin da.

Ikasturtearen bukaeran ikasleak elementu mekaniko bat diseinatzen (dimen-
sio egokiak, kargak identifikatzea, materialaren propietate arteko konparazioa eta
segurtasun-tartearen definizioa) eta hutsegiteak aurreikusten jakingo du.

Baliabideak

Agustin Carvajal irakasleak zioen bezala, *libururik txarrena apunte onenak baino hobea da*. Eta horixe dira apunte hauek, klaseak arin jarraitu ahal izateko erreferentzia. Ulermena lantzeko eta edukietan sakontzeko liburuak hobeak dira: hobeto azaltzen dituzte kasuak, ariketa ebatziekin. Apunte hauek, eta irakasgai osoa, oro har, bi liburutan oinarritzen dira:

- Estatikako zatia Beer-en eta Johnston-en *Ingeniarientzako Mekanika Bektoriala* [1] liburuan oinarritzen da.
- Materialen erresistentzia zatia, berriz, egile horien *Mecánica de Materiales* [2] liburuari jarraitzen dio.

Liburu horiek mundu mailan ingeniaritza mekanikoko oinarritzko erreferentzia liburuen parte dira. Apunte hauetan, berariaz zehaztuak ez dauden ia irudi guztien iturri dira bi liburu horiek. Liburuek, gainera, ariketa ebatziak dakartzate eta proposatzen dituzten ariketen artean ikasleek egiteko aukeratutako ariketa-sorta ere zehazten da *eGelan*. Horrela, ikasleak bere kasa ikasteko eta bere ulermen-maila maila ezagutzeko aukera edukiko du.

Materialen erresistentziaren arloan, Ansolak euskarazko liburua aurkeztu du [3]. Liburu horren edukiak irakasgaiaren helburuak gainditzen ditu. Hala ere, euskaraz dagoen erreferentzia nagusia da.

Beste hainbat liburu interesgarri ere aurkitu ditzakezue bibliotekan. Besteak beste, Lardner-en, Timoshenko-ren eta Riley-en liburuak [4, 5, 6].

Klase magistralak, apunte hauetaz eta bibliografian adierazitako bi erreferentziako liburuez gainera, *eGelan* eskegitako apunteetan sustengatzen dira. Atazak eta webgune interesgarrien estekak ere *eGelan* argitaratuko dira.

Eskainitako materialaren barruan, irakasgaiaren irakaskuntza-gida ere gehitu da, irakasgaiaren gai-zerrenda, metodologia, ebaluazio-sistema eta erreferentziak zehazten dituena. Ebaluazio hezitzailearen kontzeptuari jarraituz, ezagutu beharreko kontzeptuen *check lista* ere eskegita dago *eGelan*. Horrela ikasleek duten ikasketa-maila beren kabuz egiaztatu dezakete.

I. Atala

Mekanika: Estatika

1. gaia

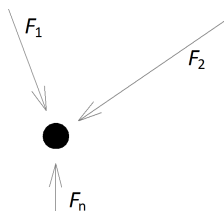
Partikularen eta solido zurrunaren estatika

1.1. Sarrera

Mekanika, indarren ondorioz gorputzen atsedean eta mugimendu egoerak deskribatzen eta aurreikusten dituen zientzia da. Mekanika bi zatitan banatzen da: estatikan gorputzak atsedenean daude eta dinamikan, berriz, mugimenduan. Irakasgai honetan estatikaz arduratuko gara. Kasuaren arabera, hipotesi egoikiak aukeratuz, fenomeno errearen eredu matematikoak konplexutasun-maila ezberdinekin azter daiteke zehaztasunik galdu gabe:

- *Partikula* da gorputz bat aztergai hartzeko erarik errazena. Dimentsio errealak ez dira kontuan hartzen, eta gorputzaren masa guztia espazio-ko puntu batean kontzentratuz idealizatzen da. Hainbat fenomeno fisiko aztertzeko nahikoa izaten da; adibidez translazioa.
- Gorputza *solido zurruntzat* hartuz, ereduak kontuan hartzen ditu solidoaren tamaina eta forma erreala. Gorputza osatzen duten puntuen arteko distantziak aldatu gabe mantentzen dira, sistema jarraitua osatuz. Eredu honek gorputzaren errotazioak kontuan har ditzake, solidoak duen orientazioa aintzat hartuz.
- Azkenik, errealtatera gehiago hurbiltzen gara *solidoa deformagarritzat* hartzen badugu.

Gai honetan, kanpo-indarrek partikuletan eta solido zurrunetan sortzen dituzten eraginak aztertzen dira. Indar eta momentu kontzeptuak aurkeztu ondoren, indar batek edo hainbatek partikulan edo solidoan efektu berdina sortzen duen indar-sistema baliokide batez ordezkatzen ikasten da. Indar-sistema baliokideak erlazioa dauka masen geometriarekin (grabitate-zentroa eta inertiamentua). Ondoren, inguruko elementuekin dituen interakzioak kontutan hartuz, partikularen edo solidoaren oreka egoera aztertzen da erreakzioak definitzeko. Horrela, gai honetan elementua isolatzen eta berarengan eragina duten kanpo-indar guztiak zehazten ikasiko da.



1.1. irudia: Kanpo-indarren oreka partikulan

Solido deformatzarrien eredu irakasgaiaren bigarren zatian, Materialen Erresistentzian, jorratuko da. Hala ere, solido deformatzarria pasatu aurretik, beharrezkoa da lehendabizi solidoa zurruntzat hartuz aztertzea.

1.2. Partikularen estatika

Matematikoki, partikula da masa duen espazioko puntua. Mekanikan horrek ez du esan nahi partikulatzat hartuko diren gorputzek dimentsio txikiak dituztenik, gorputzen formek eta dimentsioek garrantzirik ez dutela baizik.

Gorputz bat partikulatzat hartuz gero, indar guztiak puntu batean aplikatzen direla joko da.

Partikularen oreka

Newtonen lehen legeak dioenez, partikula batean diharduten indarren erresultantea nulua denean, partikulak bere egoera mekanikoa mantentzen du. Hau da, pausagunean badago pausagunean jarraitzen du, eta higitzen ari bada abiadura lineal konstantez higitzen jarraituko du. Partikula *orekan* dagoela esaten da.

Partikula orekan mantentzeko, bertan eragina duten indarren erresultanteak zero izan behar du (1.1. ir.):

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$$

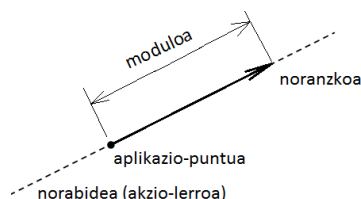
Ekuazio bektorial batek espazioan hiru ekuazio eskalar adierazten ditu, eta planoan bi:

- Espazioan: $(OXYZ) \Sigma \vec{F}_x = 0; \Sigma \vec{F}_y = 0; \Sigma \vec{F}_z = 0$
- Planoan: $(OXY) \Sigma \vec{F}_x = 0; \Sigma \vec{F}_y = 0$

Solido askearen diagrama

Gorputzen interakzioek elkarren artean indarrak eragiten dituzte. Oreka-baldintza aplikatu ahal izateko, inguruko eraginak egiten dituzten indarrez ordezkatu behar dira.

Modu honetan, gorputzen arteko elkarrekintza indarren bidez adieraziz, aztertutako partikula (gorputza ordezkatzeko duena) isolaturik gelditzen da. Partikulan eragina duten indar guztiak gurutzatzen direnez, ez du momenturik jasaten.



1.2. irudia: Bektoreen definizioa

1.3. Indarrak eta momentuak. Indar-sistemak

1.3.1. Bektoreak

Zenbaki batez definitu daitezkeen magnitude fisikoak eskalarrak dira (luzera (m), denbora (s), temperatura (K, °C) ...). *Moduluz gain, norabidea, noranzkoa eta sorrera* ere definitu behar direnean magnitude bektorialak erabiltzen dira. Bektoreak dira *gezien* bidez adierazten diren erreminta matematikoak.

Honako ezaugarri hauek dituzte (1.2. ir.):

- Moduloa: segmentuaren luzeraren balioa da; definitzen duen magnitudearen balioa ematen du.
- Norabidea: segmentuaren akzio-lerroa definitzen duena.
- Noranzkoa: bektorea definitzen duen geziaren muturrak definitzen duena.
- Aplikazio-puntua: bektorearen *jatorria* da; ezaugarri honen arabera, magnitude bektorialak sailka daitezke:
 - Bektore finakoak: aplikazio-puntua definituta dago.
 - Bektore labainkorak: jatorria, akzio-lerroko edozein puntutan egon daiteke; aurrerago ikusiko da indarrak bektore labainkorak direla.
 - Bektore askeak: jatorria espazioko edozein puntutan egon daiteke; aurrerago ikusiko da momentuak bektore askeak direla.

Modulu, norabide eta noranzko bera duten bektoreei *ekipolenteak* deritze.

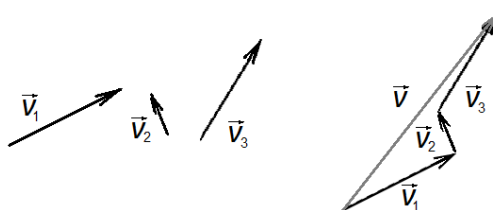
Bektoreen batuketa

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ bektoreak batzeko, bektoreen sorrerak aurreko bektoreen bukaerarekin lotzen dira (1.3. ir.). Batura-bektorea da hasierako eta bukaerako puntuak elkartzen dituen.

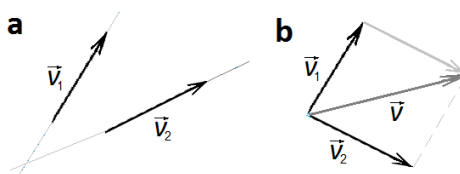
Bektore labainkorak batzeko bete behar den baldintza da, labaintze-lerroak moztea (plano berean egotea eta paraleloak ez izatea; 1.4.(a) ir.).

Bektore finakoak batu ahal izateko, bektore guztiek sorrera berdina izan behar dute, eta bektore askeen antzera batzen dira (1.4.(b) ir.).

Oharra: *zuen kontura erreparatu bektoreen arteko beste eragiketak: biderketa eskalarra, biderketa bektoriala, biderketa nahasiak eta bektoreen deskonposaketa.*



1.3. irudia: Bektoreen batuketa



1.4. irudia: (a) Bektore labainkorren eta (b) finkoen arteko batura

1.3.2. Indarrak

Fisikoki, *indarra* da zerbaiten gainean eragiten den ekintza. Bi kontzeptu horiek mundu errealean existitzen dira, eta Fisika arduratzen da matematikoki deskribatzeaz.

Definizioa. Gorputz material baten higidura-egoera aldatzeko joera duen ekintzari *indar* deritzo (pausagunea ere higidura-egoera bat da). Higidura-egoera aldatzeko joera izan arren, horrek ez du esan nahi egingo duenik. Tinko finkatuta dagoen gorputz solido baten gainean indar bat eragiten badugu, nahiz eta mugitzeko joera izan, pausagunean geldituko da.

Indarra magnitude bektoriala da. Horregatik, indarra definitzeko, honako ezaugarri hauek ezagutu behar dira (1.2. ir.):

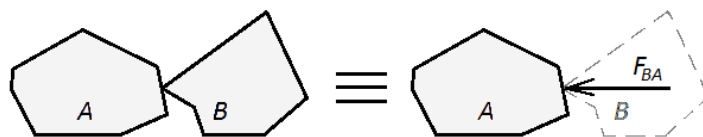
- Aplikazio-puntua: akzioa *non* eragiten duen.
- Norabidea eta noranzkoa: *norantz* seinalatzen duen.
- Modulua: *zenbat* balio duen.

Erreakzioa, bi gorputzen arteko interakzioaren ondorioa

A eta *B* gorputzek elkarri eragiten diotenean, batak bestean sortzen duen ekintzari edo indarrari *erreakzio* esaten zaio. Horrela, sistema mekanikoaren portaera aztertzean, gorputzetako bat indar batek ordezkari dezake bere portaera aldatu gabe. Adibidez 1.5. irudian, *B* gorputzak *A* gorputzean duen eragina.

Akzio-erreakzio printzipioa

Beti existitzen da akzio guztientzat, berdina eta kontrakoa den erreakzioa. Bi gorputzek, *A* eta *B*, elkar eragiten dutenean, bakoitzak bestean indar bat sortzen du. Indar horiek, tamaina (modulua) eta norabide berdina dute, baina noranzko ezberdina. Hau da, $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$. Akzio batek beti bere erreakzioa izango du.



1.5. irudia: Gorputzen arteko interakzioak erreakzio-indarrengatik ordezkatu daiteke solidoa isolatzean



1.6. irudia: Indarren transmisibilitate printzipioa

Transmisibilitate printzipioa

Indarrak bektore labainkortzat har ditzakegu; hau da, errealitatean bere aplikazio-puntua izan arren, mekanikaren ikuspegitik indar hori bere akzio-lerroko beste puntu batean kokatzen bada, gorputzean duen eragina ez da aldatzen (1.6. ir.).

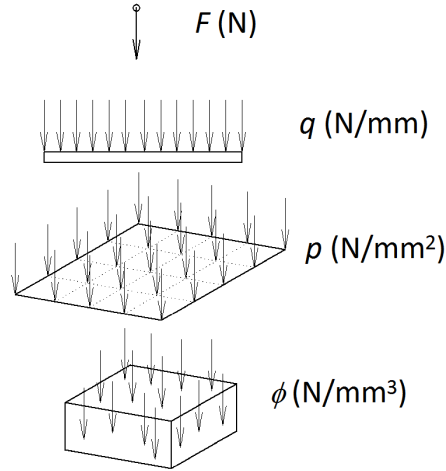
Indarren sailkapena

Indarrak hainbat irizpideren arabera sailka daitezke. Indarrak banatuta dauden eraren arabera (1.7. ir.):

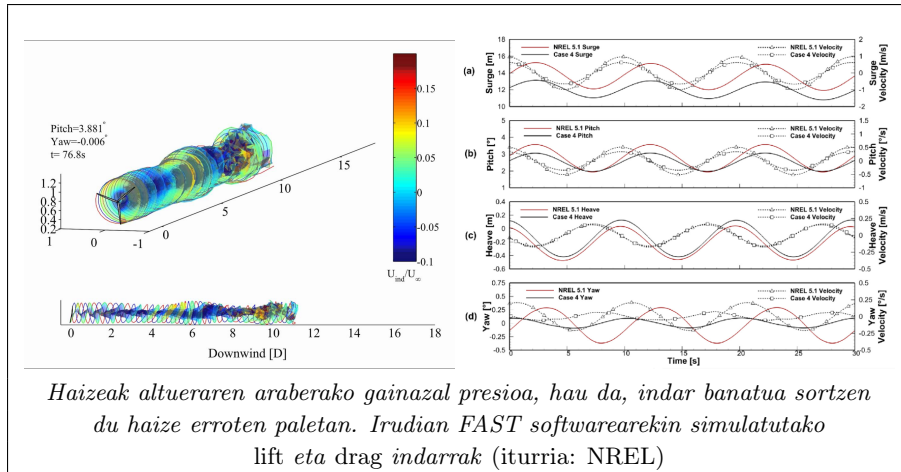
- Indar puntualak: indarra puntu batean kontzentratu dago. Indarraren unitateak ohikoak izango dira, newton (N) nazioarteko unitate-sisteman (SI).
- Indar banatuak.
 - Lerroan (N/m)
 - Azaleran (N/m²)
 - Bolumenean (N/m³)

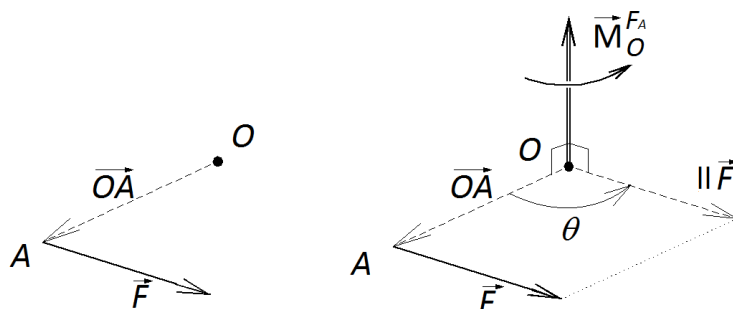
Indarrak sailkatzeko beste ikuspuntu bat, aplikazio-puntua da. Horren arabera, indarrak honela sailka ditzakegu:

- Aplikatua. Indar hauek zuzenean sistema mekanikoaren gainean aplikatuta daude eta, normalean, ezagunak dira.
- Lotura-indarrak edo erreakzio-indarrak. Sistema mekanikoetan, solidoak elkarrekin lotuta edo kontaktuan daude. Beraz, hauei karga bat aplikatzen zaienean, indar horiek solido batetik bestera transmititzen dira loturen bitartez. Erreakzio-indarrak ezagutzeko, gorputzak era isolatuan aztertu behar dira.



1.7. irudia: Indarren sailkapena banaketa eraren arabera



1.8. irudia: O puntuarekiko F indarrak sortutako momentua

- Barne-indarrak edo esfortzuak. Era berean, aplikatu ditugun kargak, solidoaren barnetik transmititzen dira. Hauek ezagutzeko, solidoa birtualki zatitu behar da eta zatietako batean oreka aztertu behar da.

Indar aplikatuek eta lotura-indarrek sortzen duten taldeari *kanpo-indarrak* esaten zaio. *Kanpo-* eta *barne-indarrek* sortzen dutenari, aldiz, *indar partehartzaileak*.

1.3.3. Momentuak

Indar baten momentuak indarrak puntu baten inguruan bira eragiteko duen joera adierazten du.

Puntu batekiko indar baten momentua

Izan bitez:

- A puntuan aplikatuta dagoen F indarra.
- O puntua.

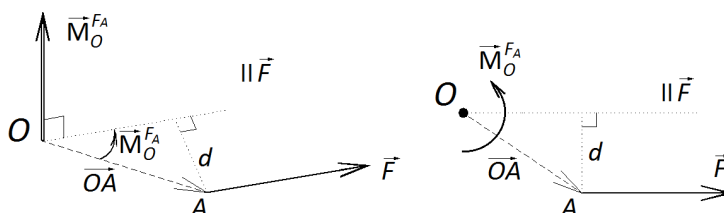
F indarraren O puntuarekiko momentua da \vec{OA} -ren eta \vec{F} -ren arteko biderketa bektoriala (1.8. ir.):

$$\vec{M}_O^{F_A} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Biderketa bektorialaren ezaugarriak ditu (1.8. ir.):

- *Norabidea* bi bektoreek (\vec{OA} eta \vec{F}) osatzen duten planoarekiko perpendikularra da.
- *Noranzkoa* torloju hariztatu batek izango lukeen higidurak zehazten du.
- *Modulua* $F \cdot OA \cdot \sin \theta$ izango da, θ angelua \vec{OA} eta \vec{F} bektoreek osatzen dutena izanik.

Horrela, indar baten momentuak aztertzen du indarrak gorputz baten puntu baten inguruan biraketa eragiteko duen joera.

1.9. irudia: Momentuaren besoa, d

- Momentuaren moduluak biraketa sortzeko joeraren magnitudea adierazten du.
- Norabideak biraketaren ardatza zehazten du.
- Noranzkoa bat dator eskuineko eskuaren legearekin, eta biraketaren noranzkoa ematen du.

Biraketa sortzeko joera ez da beti gauzatzen, gorputza orekan egon baitaiteke edo higidura eragotzita eduki baitezake.

Momentua indar eta posizio bektore baten biderketa denez, bere unitatea (Nm) da SI.n.

Momentu baten besoa

O puntutik \vec{F} indarraren akzio-lerroa dagoen d distantzia *momentuaren besoa* da (1.9. ir.): $d = OA \sin \theta$

Eta momentuaren moduluak: $M_O^{FA} = F \cdot d$

Gainera, momentuaren besoa aplikazio-puntuarekiko independentea dela frogatu daiteke eta, beraz, momentua ere bai.

Momentuaren teorema

Momentuaren teorema indar batek sortzen dituen momentuak erlazionatzen ditu bi puntu ezberdinekiko.

Izan bitez A puntuan aplikatuta dagoen \vec{F} indarra eta O eta B puntuak (1.10. ir.):

$$\vec{M}_O^{FA} = \vec{OA} \wedge \vec{F} \quad \vec{M}_B^{FA} = \vec{BA} \wedge \vec{F} \quad \text{eta} \quad \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} \quad \text{betetzen da,}$$

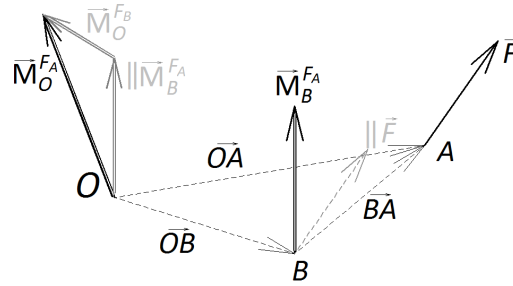
$$\text{orduan,} \quad \vec{M}_O^{FA} = (\vec{OB} + \vec{BA}) \wedge \vec{F} = (\vec{OB} \wedge \vec{F}) + (\vec{BA} \wedge \vec{F})$$

$$\text{Beraz,} \quad \vec{M}_O^{FA} = \vec{M}_B^{FA} + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

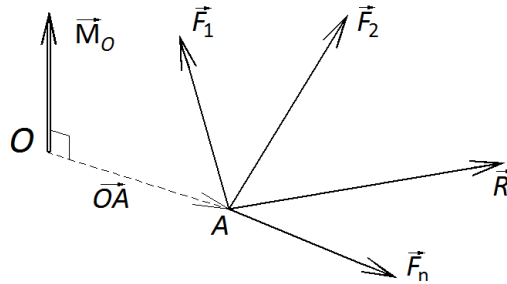
A puntuan aplikatuta dagoen \vec{F} indarraren momentua O puntuarekiko honako bi batugai hauekin kalkula daiteke: lehenengoa indarrak espazioko B puntuarekiko sortzen duen momentua; eta bigarrena, \vec{F} indarrak B puntuan aplikatuta O puntuarekiko sortuko lukeen momentua.

Varignonen teorema

Izan bitez, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ A puntuan aplikatutako indarrak, non $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ (1.11. ir.).



1.10. irudia: Momentuaren teorema



1.11. irudia: Varignonen teorema, puntu berdinean aplikatuta dauden indarrek sortutako momentua

Berdinak dira puntu berdinean aplikatuta dauden indarrek O puntuarekiko sortzen dituzten momentuen batuketa eta indar hauen guztien indar ordezkariak O puntuarekiko sortzen duen momentua.

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= \vec{M}_O^{F_1} + \vec{M}_O^{F_2} + \dots + \vec{M}_O^{F_n} = \vec{OA} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_2 + \dots + \vec{OA} \wedge \vec{F}_n = \\ &= \vec{OA} \wedge (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) = \vec{OA} \wedge \vec{R}\end{aligned}$$

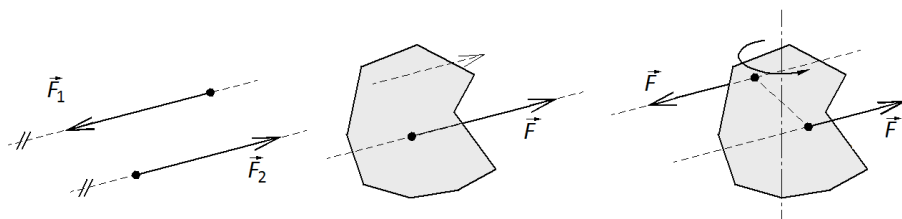
Teorema hau beste era batera ere uler daiteke: indar bat zenbait norabidetan banatzen badugu berdinak izango lirakeke, indar horiek guztiek sortzen dituzten momentuen batuketa eta indar horrek sortzen duen momentua.

Indar pare baten momentua

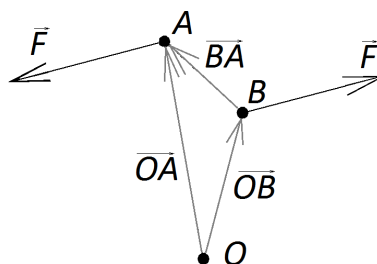
Indar bik indar pare bat osatzen dute, indar horiek (\vec{F}_1 eta \vec{F}_2) modulu berdina (F), akzio-lerro paraleloak eta kontrako noranzkoa ($\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$) dituztenean (1.12. ir.).

Gorputz batean indar pare batek eragiten duenean, indar horien erresultantea nulua da, bien noranzkoa aurkakoa baita. Beraz, solidoak ez dauka desplazatzeko joerarik. Halere, indar horiek solidoa birarazteko joera dute (1.12. ir.).

Indar pare baten momentuak O puntuarekiko independentzia dauka. Izan bitez A eta B aplikazio-puntuak eta edozein O puntu (1.13. ir.):



1.12. irudia: Ezkerrean, indar parearen definizioa; erdian, indar soil baten translazio akzioa; eskuinean, indar parearen biraketa akzioa



1.13. irudia: Indar parea bektore librea da

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O^F + \vec{M}_O^{-F} = \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge (-\vec{F}) = (\vec{OA} - \vec{OB}) \wedge \vec{F}$$

$$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} \quad \text{denez, orduan} \quad \vec{M} = \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

Ondorioz, indar parea *bektore askea* da, eta bektore hori beste edozein puntutan aplikatu daiteke. Beraz, indar pareak O' puntuan sortzen duen momentua aurrekoaren parekoa izango da.

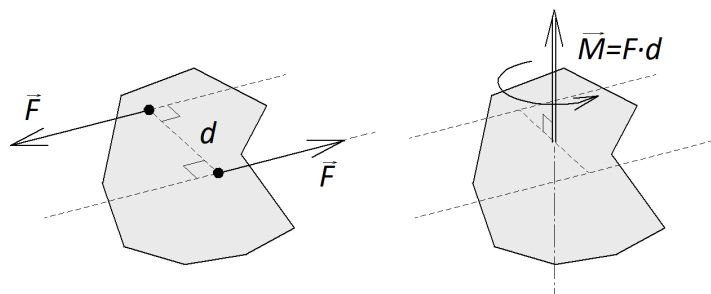
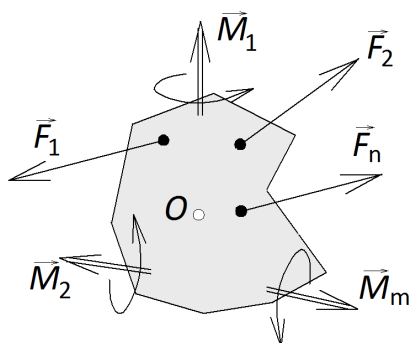
$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} = \vec{M}$$

Hori dela eta, indar-bare baten momentua indar horien balioaren eta euren arteko posizio erlatiboaren arabera da.

Izan bedi d bi indar hauen akzio-lerroen arteko distantzia (perpendikularra). Indar pareak sortzen duen momentuak honako ezaugarri hauek izango ditu (1.14. ir.):

- Modulua, $M = F \cdot d$
- Norabidea: bi indarrak dituen planoarekiko elkarzut.
- Noranzkoa: bi indarrek sortzen duten biraketaren norabidea eskuineko eskuaren legea jarraituz.

Indar parearen indar erresultantea nulua da eta, bere biraketa joera kontutan hartzeko, zuzenean indar parearen sortzen duen momentuarekin ordezkatzen da.

1.14. irudia: Indar pareak sortutako M momentua

1.15. irudia: Solidoan eragiten duten indar eta momentu multzoak osatzen du indar-sistema

1.3.4. Indarren konposizioa. Indar-sistema baliokideak

Sistema mekaniko baten gainean eragiten duen ekintza multzoari *indar-sistema* deritzo. Ekintza horiek indarrak edo momentuak izan daitezke (1.15. ir.). Sistema mekanikoa solido bat, loturik dauden solido multzo bat, edo solido baten zati bat izan daiteke.

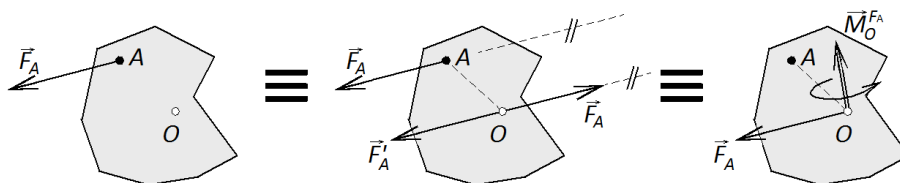
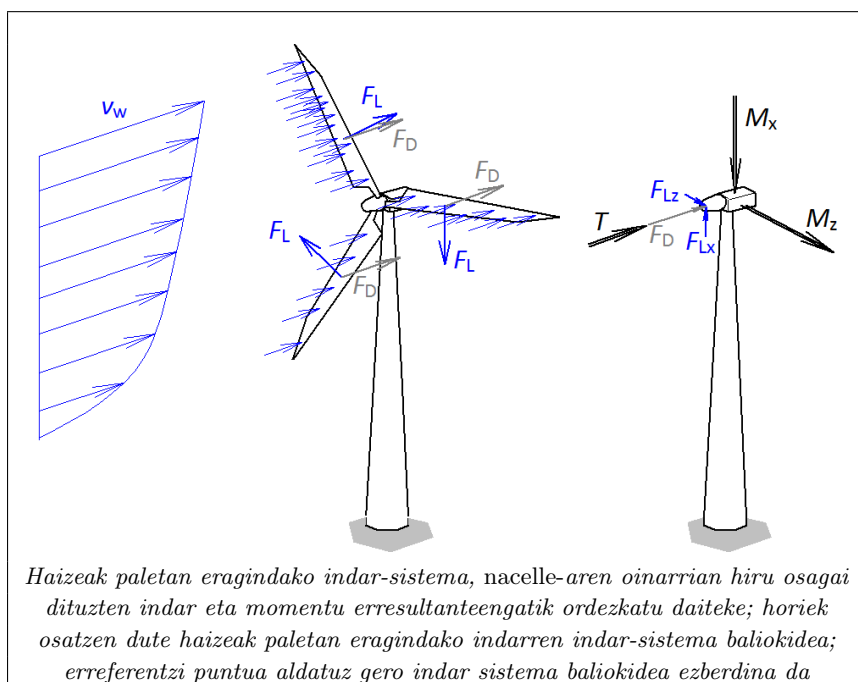
Bi indar multzok sistema mekaniko batean duten eragina berdina denean, *sistema baliokideak* direla esango dugu. Indar-sistema bat dugunean, behar izanez gero guretzat komenigarriagoa den beste indar-sistema baliokide batek ordezkatu dezakegu.

Edozein indar-sistema, oso konplexua bada ere, puntu batean aplikatuta dauden indar eta momentu batera labur daiteke.

Izan bedi $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ puntuetan aplikatuta dauden $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ indarrak eta $B_1, \dots, B_i, \dots, B_m$ puntuetan aplikatuta dauden $\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_i, \dots, \vec{M}_m$ momentuak dituen solidoa (1.15. ir.). O puntuarekiko indar-momentu sistema laburtua lortu nahi da.

Sistema mekaniko baten indar-sistema baliokidea lortzeko, lehenengo pausoa indar-sistemaren oinarria izango den puntua zehaztea da. Edozein izan daiteke, baina batzuetan ezaugarri jakin batzuk hobesten dira. Adibidean, puntu hori emanda dator: O puntua da indar-sistemaren oinarria.

Indar parte-hartzaileak, bektore labainkorrek direnez, akzio-lerroan soilik



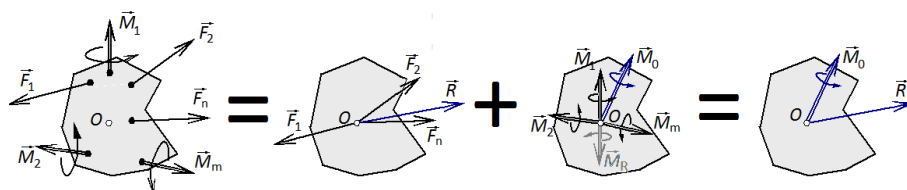
1.16. irudia: Indar baten akzioa beste puntu batera eramatea, indar berdina eta puntu horrekiko sortzen duen momentuaren bidez

mugi daitezke eragina aldatu gabe. 1.16. irudiak azaltzen du indar baten akzioa beste puntu batera eramateko prozedura, bere eragina aldatu gabe. Mugiarazteko, O puntuan \vec{F} eta $-\vec{F}$ indarrak aplikatzen dira sistema aldatu gabe. Kontrako noranzkoa duten indar pareak agertzen da, edozein puntutan aplikatu daitezkeen bektore askea den $\vec{M}_O^F = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A$ momentuaren bidez ordezkatu daitezkeena. Horrela, A puntuan zegoen \vec{F} indarra, O puntuan aplikatutako \vec{F} indarrak eta \vec{F} -k O -rekiko sortutako \vec{M}_O^F momentuak ordezkatzeko jatorrizko indarraren efektua aldatu gabe.

Beste indar guztiak gauza bera egin ondoren, indar horiek guztiak O puntuan aplikatuta egongo dira; hori dela eta, bere batuketa bektoriala egin daiteke. Horrela, indar horien \vec{R} indar erresultantea lortuko dugu:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n$$

Ezbairik gabe, indar erresultante hori sistema osoan aplikatuta dauden indarren batuketa da, eta horiek batera zuten eragin berdina izango du.



1.17. irudia: Indarrez eta momentuz osatutako indar-sistema O puntuan indar-sistema baliokidearengatik ordezka daiteke, solidoaren dinamikan eragin gabe

Momentuei dagokienez, $\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_i, \dots, \vec{M}_m$ momentuak bektore libreak direnez, euren eragina ez da egongo aplikazio-puntuen menpe, eta zuzenean $B_1, \dots, B_i, \dots, B_m$ aplikazio-puntuetatik O puntura mugitu daitezke. Era berean, indarrek sortutako momentuak O puntuan aplikatzean, bektorialki batu daitezke eta \vec{M}_R momentu erresultante bakarra lortu. Horrela, alde batetik hasieratik aplikatuta zeuden momentuak egongo dira; bestetik, $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_i, \dots, \vec{F}_n$ indarrak mugitzean sortu direnak. Guztien baturak \vec{M}_O ematen du (1.17. ir.).

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \sum_{j=1}^m \vec{M}_j + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i^{F_i} = \\ &= \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_i + \dots + \vec{M}_m + \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i + \dots + \vec{OA}_n \wedge \vec{F}_n \end{aligned}$$

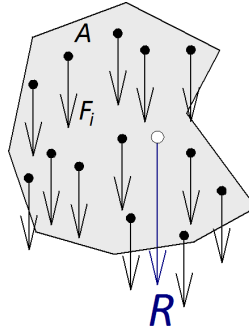
Beraz, edozein indar-sistema ordezka daiteke indar bakar batekin (aplikatuta dauden indar guztien indar erresultantea) eta momentu bakar batekin (hasieran zeuden eta O puntuarekiko indar guztien momentuen batuketara).

- \vec{R} erresultanteak indar-sistemak solidoa mugitzeko duen joera adierazten du.
- \vec{M}_O momentuak indar-sistemak O puntuaren inguruan solidoa biratzeko duen joera adierazten du.

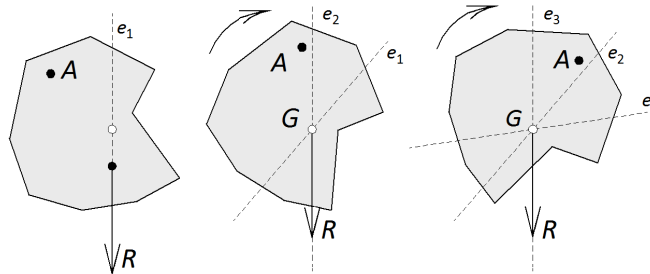
Solidoa orekan badago ($\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$), R eta M_O indar-sistema baliokidea zero da edozein O puntutan.

1.4. Masen geometria

Masen geometria da masaren banaketa sistema materialetan aztertzen duen mekanikaren zatia. Masa da sistema material baten materia kantitatea adierazten duen magnitude fisikoa eta magnitude eskalar ez-negatiboa da. Masen geometria, beraz, bi magnitude fisikoak parte hartzen dute: masak eta luzerak. Masen geometriak sistema material baten ezaugarri masikoak kalkulatzeko eta definitzeko du helburu. Batez ere, azalera-sistemen masen zentroari eta inertzia-momentuari jarriko diegu arreta, erresistentziako zatian profilen ezaugarri mekaniko garrantzitsuenak baitira zurruntasunaren definizioan.



1.18. irudia: Pisua grabitateak eragindako indar infinitesimalen erresultantea da



1.19. irudia: Grabitate-zentroaren definizioa: solidoa biratzean indar erresultantearen aplikazio-lerroak gurutzatzen diren puntuan kokatzen da GZ

1.4.1. Grabitate-zentroak

Lurrak partikula baten gainean egiten duen indarra *pisua* da. Partikula eta Lurraren erdia lotzen dituen lerroaren norabidea eta zentroranzko noranzkoa dauzka. Modulua Newton-en grabitazio unibertsalaren legeak ematen du.

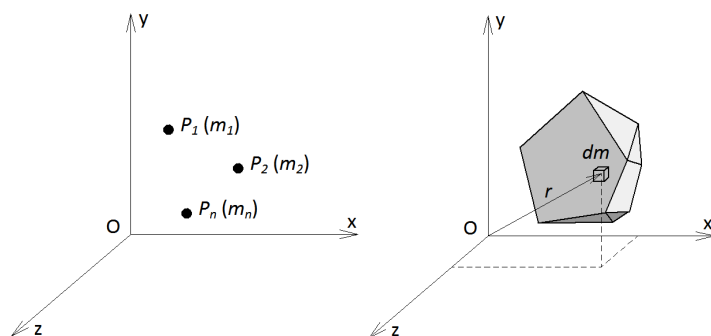
$$F = G \frac{Mm}{R^2}$$

R , M lurraren masa eta erradioa dira, m partikularen masa, eta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^{-2} \text{ kg}^{-2}$ grabitazio unibertsalaren konstantea.

Solido zurrun batean, Lurrak masa elementu diferentzial bakoitzean eragiten du (1.18. ir.). Masa infinitesimalen gaineko bektoreek lurraren zentroranzko norabidea dute, baina gorputzaren dimentsioak lurraren erradioarekin konparatuz txikiak direnez, bektore paraleloen sistema osatzen dutela esan daiteke.

Bektore paraleloen sistema bat, puntu batean kokatua dagoen erresultante bakar batera laburbil daiteke, eta erresultante hori *pisua* da (1.18. ir.).

Pisuaren aplikazio-puntua *grabitate-zentroa* (GZ) da. GZren posizioa lortzen da indarrek puntu batean sortzen duten momentuen ekuazioa aplikatuz. Gorputza hainbat orientaziotan biratuz, GZ ardatz zentralen ebaketa-puntuan kokatzen da (1.19. ir.).



1.20. irudia: Ezkerrean, partikula-sistema baten grabitate-zentroa; eskuinean, solido jarraitu baten grabitate-zentroa

Partikula-sistema baten GZ

Masak puntuetan kontzentratuta daudela joz, partikula sistema baten GZren posizioa zehazteko, lehenik O erreferentzia-puntua aukeratu behar da. O puntua edozein izan daiteke, baina posizio batzuk besteak baino erosoagoak dira. GZren posizioaren erreferentzia-puntuarekiko koordinatuak, masa eta koordinatu bakoitzaren biderkaduraren batura masa totalagatik zatituz lortzen da (1.20. ir.).

$$x_G = \frac{\sum m_i g x_i}{\sum m_i g} = \frac{g \cdot \sum m_i x_i}{g \cdot \sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Solido zurrunaren grabitate-zentroa

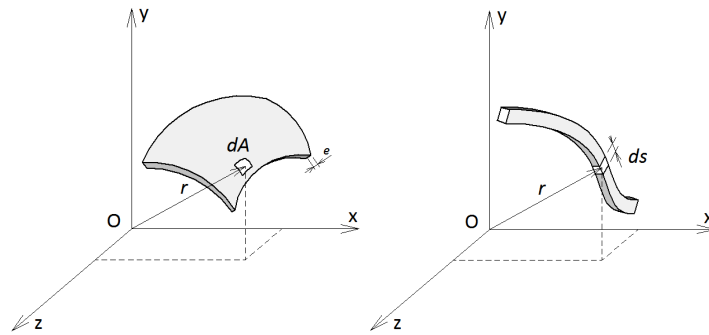
Solido zurrun bat partikula-sistema jarraitua da. Partikula-sistemarentzat emandako definizioak erabilgarriak dira batukariak integralagatik ordezkatur eta ρ dentsitatea (masa-bolumen erlazioa) kontzeptua aplikatur (1.20. ir.).

$$m_i \rightarrow dm \quad \Sigma \rightarrow \int \quad \text{dentsitatea} \rightarrow \rho = \frac{dm}{dv}$$

$$x_G = \frac{\int_M x dm}{\int_M dm} = \frac{\int_V x \rho dv}{\int_V \rho dv} = \frac{\int_V x dv}{\int_V dv} = \frac{\int_V x dv}{V}$$

$$y_G = \frac{\int_V y dv}{V}$$

$$z_G = \frac{\int_V z dv}{V}$$



1.21. irudia: Ezkerrean, t lodiera uniformeko plakaren GZ; eskuinean, sekzio konstanteko barra baten GZ

t lodiera uniformedun plakaren GZ

Solidoaren dimentsio bat konstantea da; adibidez, A azalera eta t lodiera duen xafla (1.21. ir.).

$$dv = t dA$$

$$x_G = \frac{\int_A x \rho t dA}{\int_A \rho t dA} = \frac{\int_A x dA}{A}$$

$$y_G = \frac{\int_A y dA}{A}$$

$$z_G = \frac{\int_A z dA}{A}$$

Sekzio konstanteko barra baten GZ

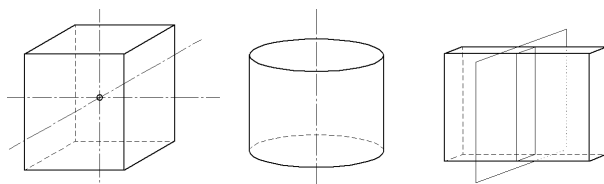
Era berean, A sekzio konstantea eta s luzera duen elementuaren GZ (1.21. ir.):

$$dv = A ds$$

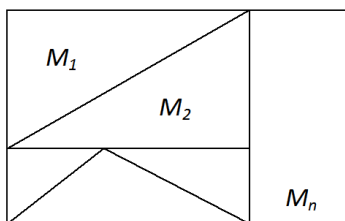
$$x_G = \frac{\int_L x \rho A ds}{\int_L \rho A ds} = \frac{\int_L x ds}{L}$$

$$y_G = \frac{\int_L y ds}{L}$$

$$z_G = \frac{\int_L z ds}{L}$$



1.22. irudia: GZ solidoaren edo azaleraren: simetria-zentroan, simetria-ardatzean edo simetria-planoan kokatzen da simetriaren arabera



1.23. irudia: Hainbat gorputz, azalera edo elementuz osatutako multzoa

Simetria

Simetria duten solidoek eta azalerek honako propietate hauek betetzen dituzte (1.22. ir.):

- Solidoak simetria-zentro bat izanez gero, hori bere GZ izango da.
- Solidoak simetria-ardatz bat izanez gero, GZ zuzen horretan egongo da.
- Solidoak simetria-planoa izanez gero, GZ bertan egongo da.

GZren koordinatuak aukeratutako ardatz-sistemaren arabekoak dira. Simetriak daudenean, komeni da ardatzak simetria elementuetan kokatzea.

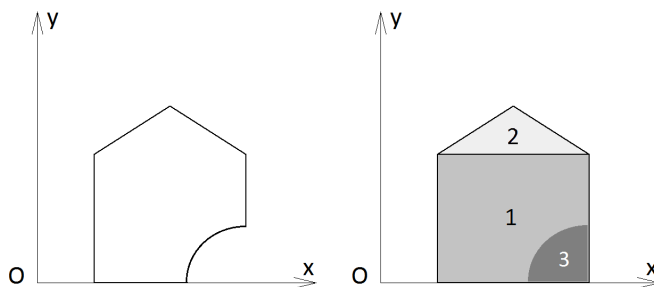
Gorputz eta azalera konposatuak

Gorputz edo azalera bat hainbat zatitan deskonposa badaiteke, zati horien GZ-ren posizioak eta masak ezagutuz, gorputz osoaren GZ aurki daiteke integralen bateragarritasuna dela medio (1.23. ir.). Prozedura partikula-sistemaren antzekoa da.

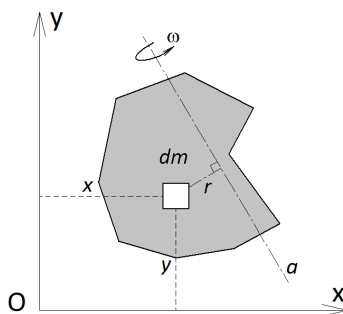
$$\int_M = \int_{M_1} + \int_{M_2} + \dots + \int_{M_n}$$

Bolumen edo azalera osoa osatzeko, zatiak batu edo ken daitezke. Adibidez, 1.24. irudiko azalera osatzeko A_1 eta A_2 azalerei A_3 -a kentzen zaie.

$$x_G = \frac{x_1 A_1 + x_2 A_2 - x_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3} \quad y_G = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 - y_3 A_3}{A_1 + A_2 - A_3}$$



1.24. irudia: Azalera oinarrizko geometrietan deskonposatuz GZ era errazean kalkulatu daiteke



1.25. irudia: a ardatzarekiko solido baten inertzia-momentua

1.4.2. Inertzia-momentuak

Errotazioa duen solido zurrun batean momentu angeluarra eta E_z energia zinetikoa kalkulatzeko, masa-banaketaren arabeko integralak sortzen dira. Integral horiek biraketa-ardatzarekiko masa-banaketa hartzen dute kontuan (1.25. ir.). Translazioak gorputzaren masak higidurari eragiten dion erresistentzia adierazten badu, inertzia-momentuak biraketarekiko erresistentzia adierazten du.

$$\begin{aligned} \text{Partikula} &\longrightarrow E_z = \frac{1}{2}mv^2 \\ \text{Solidoa} &\longrightarrow E_z = \int_M \frac{1}{2}v^2 dm \\ v = \omega r &\longrightarrow E_z = \frac{1}{2}\omega^2 \int_M r^2 dm = \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned}$$

Materialen Erresistentzian eta Hidrostatikan ere horrelako integralak agertzen dira.

Definizioak

Plano, ardatz edo puntu batekiko *partikula* baten *inertzia-momentua* honela definitzen da:

$$I = md^2$$

m partikularen masa da, eta d , puntu/ardatz/planoarekiko distantzia.

Partikula-sistema ez-jarraitu baten kasuan:

$$I = \Sigma m_i d_i^2$$

Solido baten kasuan, partikula-sistema jarraitua denez, batukaria integral bihurtzen da:

$$I = \int d^2 dm$$

OXYZ ardatz-sistema bat aukeratuko da, eta adierazpenak emango dira plano koordinatuekiko, ardatzekiko eta sorrerarekiko.

Planoekiko (1.26. ir.):

$$1 \longrightarrow yz \text{ plano} \quad I_1 = \Sigma m_i x_i^2 \quad I_1 = \int x^2 dm$$

$$2 \longrightarrow xz \text{ plano} \quad I_2 = \Sigma m_i y_i^2 \quad I_2 = \int y^2 dm$$

$$3 \longrightarrow xy \text{ plano} \quad I_3 = \Sigma m_i z_i^2 \quad I_3 = \int z^2 dm$$

Ardatzekiko (1.26. ir.):

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm = I_2 + I_3$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm = I_1 + I_3$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = I_1 + I_2$$

Ardatz batekiko inertzia-momentua da ardatz horretan mozten diren edozein bi plano perpendikularrekiko inertzia-momentuen batura.

O puntuarekiko (inertzia-momentu polarra):

$$I_o = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = I_1 + I_2 + I_3$$

Puntu batekiko inertzia-momentua da puntu horretan mozten diren edozein hiru plano perpendikularrekiko inertzia-momentuen batura.

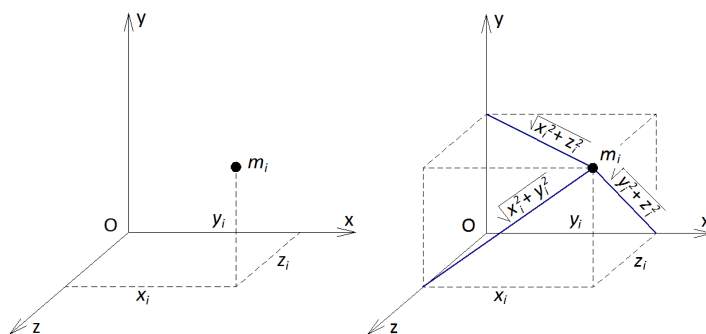
Inertzia-momentuak beti positiboak (+) dira.

Gorputz konposatuak

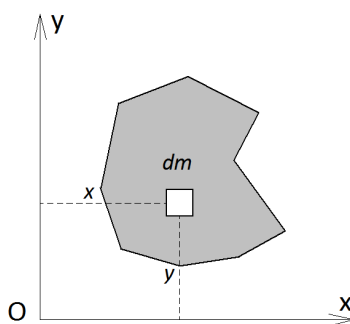
M masadun gorputz bat m_1, m_2, \dots, m_n zatietan bana badaiteke, inertzia-momentuak ere zatiketari dagozkion baturak dira.

$$I = \int_{M_1} d_1^2 dm + \int_{M_2} d_2^2 dm + \dots + \int_{M_n} d_n^2 dm = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Integralak egitean aukeratuko diren elementu diferentzialak integral bakunak emango dituztenak izango dira.



1.26. irudia: Ezkerrean, partikula baten inertzia-momentua yz , xz eta xy planoekiko; eskuinean, partikula baten inertzia-momentua x,y eta z ardatzekiko



1.27. irudia: Azalera baten inertzia momentuak x eta y ardatzekiko eta O puntuarekiko

Gainazalen inertzia-momentuak

Gainazal baten inertzia-momentua, partikularen formulak azalaren eremuan integratuz lortzen da (1.27. ir.).

$$I_x = \int y^2 dA$$

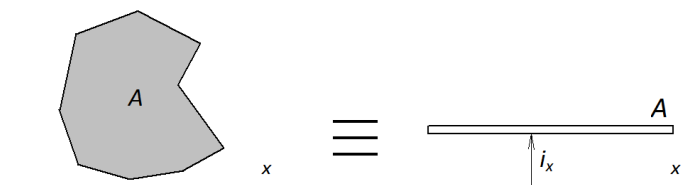
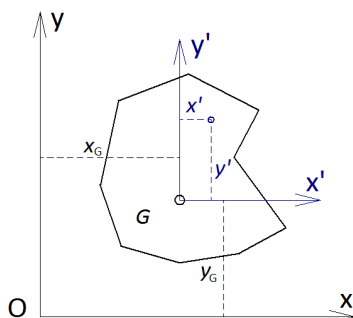
$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

Gainazal baten puntu batekiko inertzia-momentua, puntu horretan moztan diren bi ardatz perpendikularrekiko inertzia-momentuen batura da.

Gainazala N zatitan zatigarria denean, inertzia-momentua zatien inertzia-momentuen batura edo/eta kenketa da, GZrekin bezala (ikus 1.24. ir.).

$$I = \int_A d^2 dA = \int_{A_1} d_1^2 dA + \int_{A_2} d_2^2 dA + \dots + \int_{A_n} d_n^2 dA +$$

1.28. irudia: A gainazalaren x ardatzarekiko i_x biraketa-erradioa1.29. irudia: Steinerren teorema: GZ zeharkatzen duten x' , y' ardatzekiko inertzia-momentuak ezagunak dira eta x , y ardatz paraleloekiko inertzia-momentuak ezagutu nahi dira

Δ (x , y edo z) ardatzarekiko A azalera duen gainazalaren i_Δ biraketa-erradioa, azalera guztia ardatzarekiko paraleloan bilduz inertzia-momentu berdina emateko azalera bilduak gorde behar lukeen distantzia da (1.28. ir.).

$I_\Delta = Ai_\Delta^2$ (A azalera berdinarekin i_Δ distantzia inertzia-momentu berdina izateko)

Steiner-en teorema

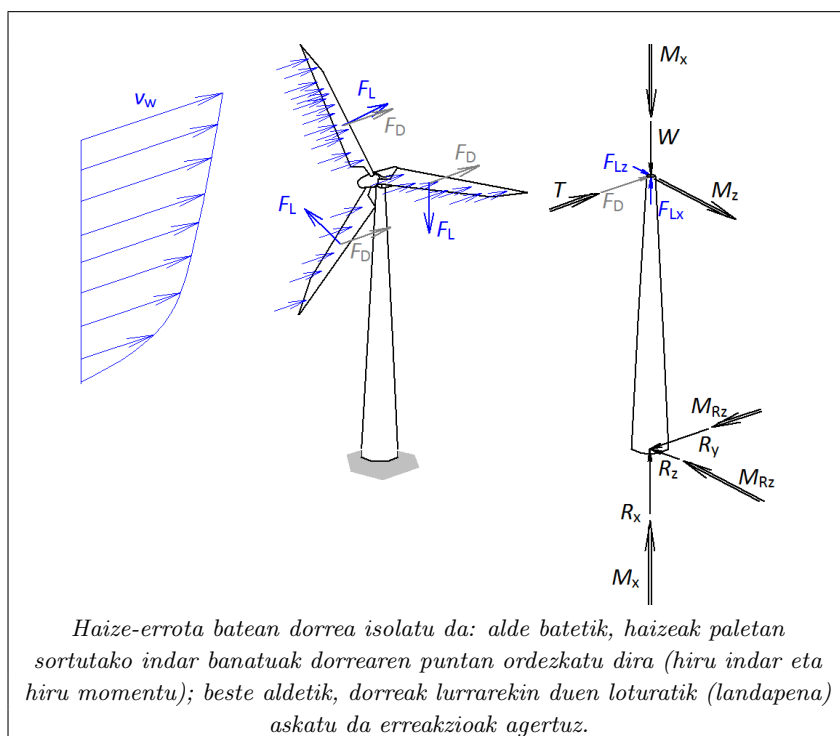
GZtik igarotzen den ardatz batekiko inertzia-momentua ezagutuz, harekiko paraleloa den beste edozein ardatzekiko inertzia-momentuak kalkulatzeko ahalbidetzen du. Horretarako, A azalera bider bi ardatzen arteko distantziaren karratuz (x_G^2 edo y_G^2) GZ zeharkatzen duen ardatzaren (I_x , I_y inertzia-momentuari gehitzen zaio (1.29. ir.).

$$I_x = I_{x'} + Ay_G^2$$

$$I_y = I_{y'} + Ax_G^2$$

$$I_o = I_G + A(x_G^2 + y_G^2)$$

Teorema hau oso erabilgarria da gainazal irregularren inertzia-momentuak kalkulatzeko, hauek oinarritzko geometrietan deskonposatuz. A Gehigarriak GZ zeharkatzen duten ardatzekiko oinarritzko geometrien inertzia-momentuen adierazpenak biltzen ditu.



$$(\text{identitateak} \rightarrow \Sigma F_z = 0; \quad \Sigma M_x = 0; \quad \Sigma M_y = 0)$$

Planoan, bigarren lerroko ekuazioak identitateak dira z ardatzean indar osagirik ez dagoelako, eta indar guztiek x eta y ardatzak mozten dituztelako edo paraleloak direlako.

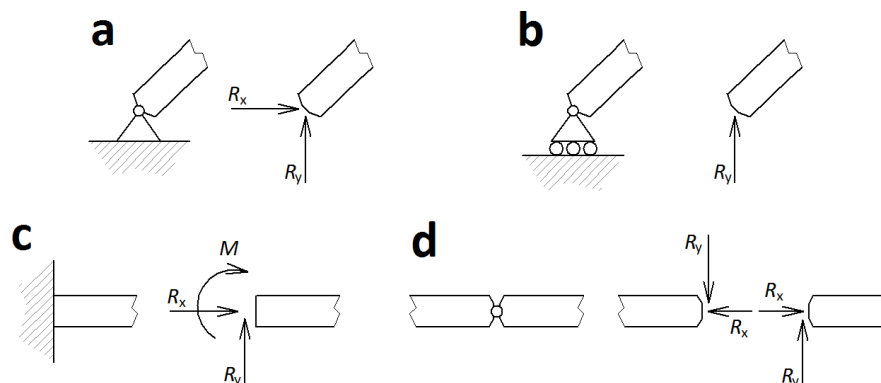
Oreka planoan aztertzean, z ardatzarekiko momentuen ordezkariak puntuetikiko momentuez hitz egingo da. Izan ere, momentuak edozein puntutan har daitezkeenez, puntu batekiko momentuak adierazten du puntu horretatik igarotzen den eta planoarekiko perpendikularra den ardatzarekiko momentua.

$$\Sigma \vec{M}_A = 0 \quad (A \text{ edozein puntu})$$

A edozein denez, momentuak beste B puntu batekiko ere har daitezke. Ekuazio berri hau aurrekoaren konbinazio lineala dela frogatu daiteke; ondorioz, hiru ekuazio soilik dira independenteak isolatutako solidoarentzat planoan.

Loturak eta erreakzioak

Solidoan oreka-baldintzetan kanpo-indarrak eta momentuak azaltzen dira. Beraz oreka aztertzean, lehendabizi *solido askearen diagrama* marraztu behar da, haren gain diharduten indar guztiak adieraziz. Gorputzek inguruko gorputzekin eta lurarekin duten interakzioa loturen bidez ematen da. Loturek higidura mugatzen dute. Lotura horiek solidotik askatzean indarrez edo/eta momentuez ordezkatu behar dira: horiek osatzen dituzte *erreakzioak*. Erreakzioak ere aztertutako gorputzean kanpo-indarrak dira.



1.31. irudia: Bermabaldintzak: (a) bermapuntu finkoa, (b) bermapuntu labainkorra, (c) landapena eta (d) giltzadura

Loturak norabide batean desplazamendua eragozten badu, indar bat jarri beharko da norabide horretan loturaren efektua kontutan hartzeko (1.31.(a), 1.31.(b), 1.31.(c) eta 1.31.(d) ir.). Loturak biraketa bat eragozten badu, momentu bat jarri behar da bera ordezkatzeko (1.31.c). 1.31. irudiak aurkezten ditu bermabaldintza nagusiak. Bermapuntuak norabide batean edo bietan eragozten du translazioa, baina biraketa eragotzi gabe. Giltzadurek translazio erlatiboa erakusten dute, eta biraketa baimentzen. Bermapuntuek eta giltzadurek «bisagra» gisa lan egiten dute. Landapenak, berriz, translazioaz gain biraketa ere eragozten du, eta erreakzioetan, indarrez gain, momentua ere agertzen da.

Solidoak lotura horietan egiten dituen indarrak *akzioak* dira.

Estatikoki zehaztu gabeko sistemak

Solido batean edo solido-sistema batean estatikako ekuazioekin ezezagun guztiak atera daitezkeenean, sistema *isostatikoa* da. Kasu hauetan, sistemak estatikoki mantentzeko behar duen lotura kopuru minimoa dauka (1.32.(a) ir.).

Ezezagun guztiak estatikako ekuazioekin askaezinak direnean, sistema *hiperestatikoa* da, estatikoki mantentzeko behar baino lotura gehiago baititu (1.32.(b) ir.).

Estatikako ekuazioak ezezagunak baino gehiago direnean, sistema ezin da estatikoki mantendu, eta mekanismo bat da (1.32.(c) ir.).

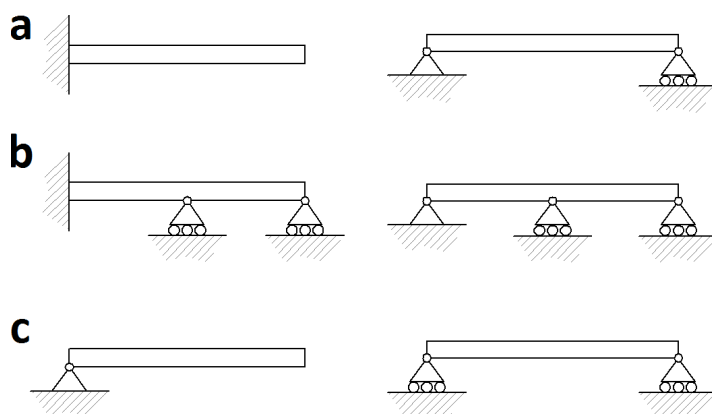
Irakasgai honetan, kasu isostatikoak bakarrik ikusiko ditugu.

Sistema hiperestatikoetan, Materialen Erresistentziak eskaintzen dituen ekuazioak erabili behar dira gorputzen deformagarritasuna kontuan hartuz.

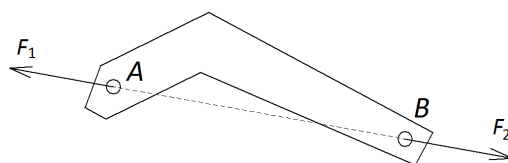
Kasu bereziak planoan

- *Bi indarren eraginpean dagoen solidoaren oreka*: kasu honetan, bi indarrek modulu eta norabide bera eta aurkako noranzkoa izan behar dute. Gainera, eragite- edo labaintze-zuzen berean egon behar dute (1.33. ir.).

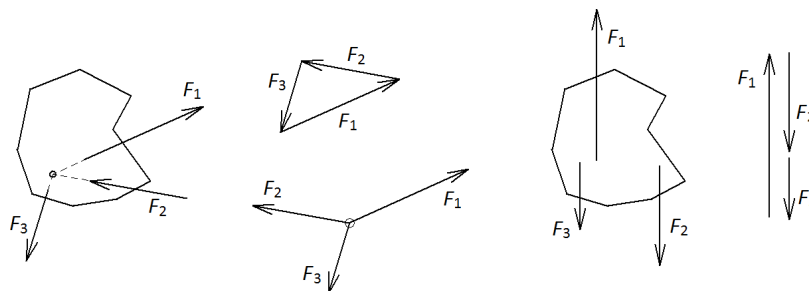
$$\vec{F}_1, \vec{F}_2 \longrightarrow \Sigma \vec{F} = 0 \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



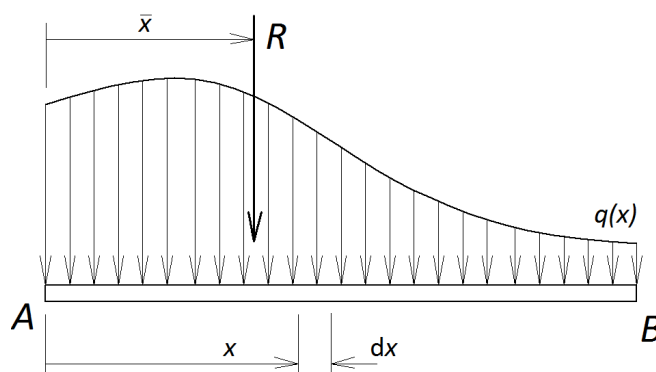
1.32. irudia: Egituren hiperestatikotasun-maila: (a) isostatikoak, (b) hiperestatikoak eta (c) mekanismoak



1.33. irudia: Bi indarren pean dagoen solidoa: indarrak lerrokatuta daude eta kontrako noranzkoa dute



1.34. irudia: Hiru indarren pean dagoen solidoa: indarrak elkargurutzatu eta hiruki itxia osatzen dute, edota hirurak elkarrekiko paraleloak dira



1.35. irudia: $q(x)$ indar banatuaren indar erresultantea

- *Hiru indarren eraginpean dagoen solidoaren oreka*: indarren oreka betetzeko, hiru indarrek osatzen duten hirukiak *itxia* izan behar du (momentuen oreka betetzeko hiru indarrek konkurrenteak izan behar dute), edo bestela paraleloak (1.34. ir.).

Indar banatuak

Irakasgai honetan luzeran banatutako indarrak aztertuko ditugu. $q(x)$, luzera-unitateko indarraren funtzioa bada, indar banatuaren indar erresultantea indar-sistemaren azalera da (1.35. ir.):

$$R = \int_A^B q(x) dx$$

Erresultantea indar banatuaren diagramaren GZn dago kokatua:

$$M_A = \left(\int q(x) dx \right) \cdot \bar{x} \longrightarrow \bar{x} = \frac{\int_A^B x q(x) dx}{\int q(x) dx} \quad (\equiv \text{GZ!})$$

2. gaia

Habeak eta kableak

Lehenengo gaian indarrak eta momentuak aurkeztu dira. Ondoren, oreka-baldintzak aztertu dira partikuletan eta solidoan. Horretarako kanpo-indarrak zehaztu behar dira, bai zuzenean aplikatutakoak, baita inguruko elementuekin dituzten interakzioak ere, solidoak haiekin dituen loturetatik askatuz. Horrela lortzen da solido askearen diagrama, azterketa mekaniko guztien oinarria eta lehen pausoa.

Bigarren gai honetan kanpo-indarren ondorioz, solidoaren barnean gertatzen dena aztertuko dugu. Gorputz osoa orekan badago, bere zati batek ere orekan egon behar du. Ondorioz, zatiaren ebaketa sekzioan barne-indarrak agertzen dira. Solidoaren puntu batetik bestera transmititzea da barne-indarren esanahi fisikoa, solidoa osatzen duten partikulen arteko kohesioa mantentzea. Barne-indarrak zehaztean, solidoa zurruntzat hartzen da.

Barne-indarrak indar-sistema baten pean dauden elementu mekaniko guztietan agertzen dira. Horien artean daude habeak eta kableak. Habeak zeharkako kargak jasaten dituzten elementu mekaniko linealak dira. Haien geometriak luzeran zehar barne-indarren aldaketaren analisisia errazten du. Kableak, berriz, malguak dira, eta, horren ondorioz, trakzio-indarrak soilik jasan ditzakete.

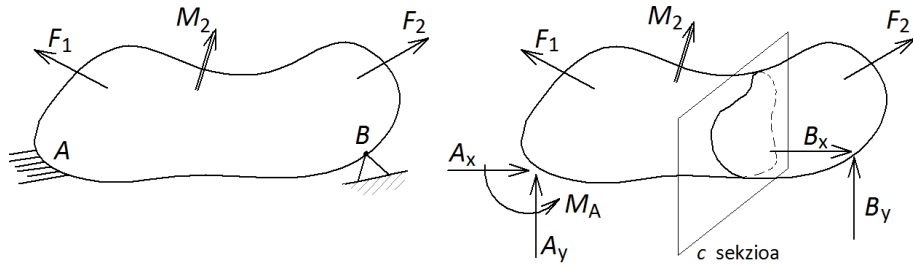
2.1. Barne-indarrak

Atal honetan, egitura bateko elementu batean barne-indarrak zehazten ikasiko da. Barne-indarrek kanpo-indarrei aurre egiten diete, elementuaren kohesioa mantenduz eta, era berean, kargak lotura eta bermapuntuetara transmitituz.

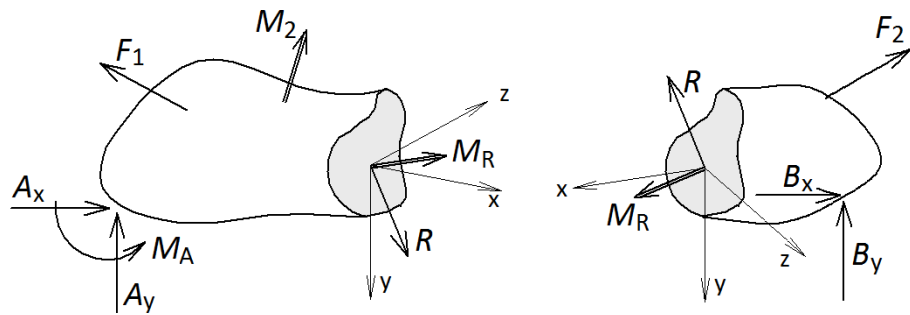
Aztertzen ari garen gorputza osatzen duten zatien arteko interakzioei *barne-indarrak* esaten zaie. Elementu baten solido askearen diagramatik abiatuz (2.1. ir.), pieza edozein sekziotan moztean, zatia orekan mantentzeko jasaten dituen kanpo-indarrez gain, ebaketan agertzen diren barne-indarrak ere kontuan hartu behar dira (2.2. ir.).

Demagun pieza bitan banatu dugula (2.2. ir.). Oreka-baldintzak aplikatuz, sekzioan barne-indarrak zehazten dira: R indar eta M_G momentu erresultanteak. Oreka- eta jarraitutasun-baldintzak betetzen dituen barne-indarren sistema bat existitzen dela eta bakarra dela frogatu daiteke.

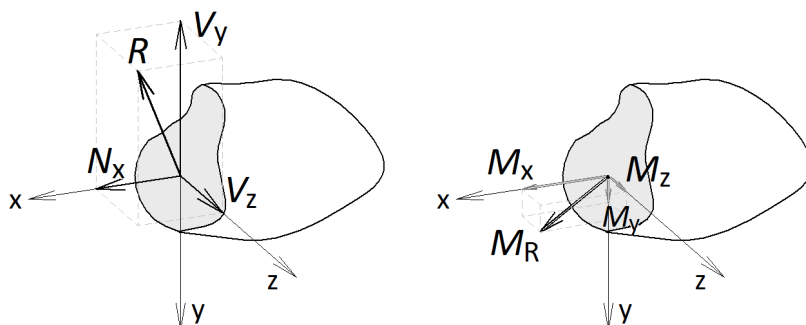
$$\Sigma(\vec{P}_n)_{ezk} + (\vec{P}_A) = 0 \quad -(\vec{P}_A) + \Sigma(\vec{P}_n)_{esk} = 0$$



2.1. irudia: Ezkerrean, solido bat kanpo-indarren pean eta ingurunearekin A eta B puntuetan loturekin; eskuinean, elementuaren solido askearen diagrama, ingurunearekin dituen loturak askatuz



2.2. irudia: Solidoa c sekzioan moztuz, bi zatiak bere baitan oreka mantentzeko barne-indarrak agertzen dira sekzioan: R indarra eta M_R momentua



2.3. irudia: Barne-indarrak, indar eta momentu erresultanteak, ardatzekiko hiru osagaietan deskonposatzen dira: N_x , V_y , V_z eta M_x , M_y , M_z

$$\Sigma(\vec{P}_n)_{ezk} + \Sigma(\vec{P}_n)_{esk} = 0$$

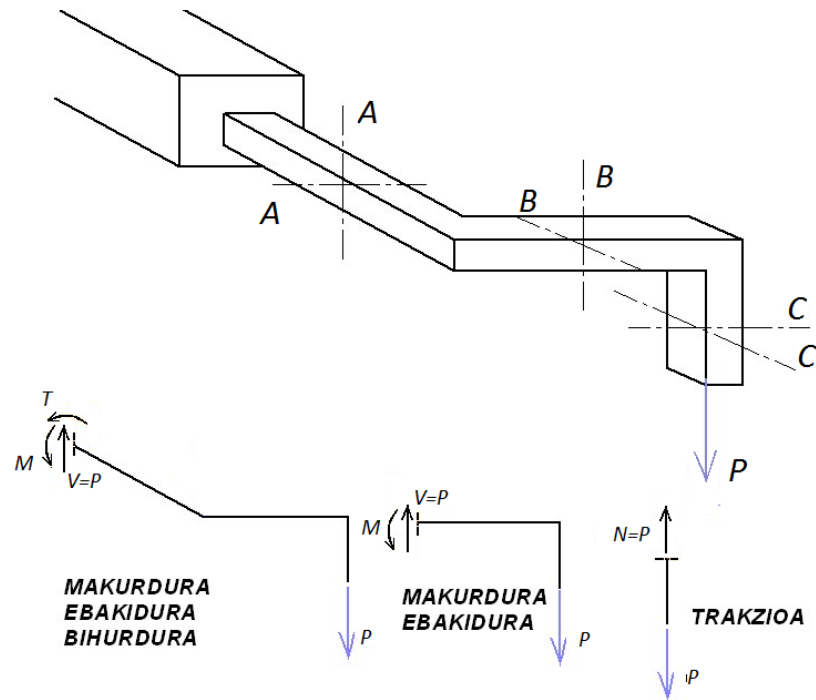
R eta M_G hiru ardatzetan proiektatuz, sei osagai lortuko ditugu: hiru indar eta hiru momentu (2.3. ir.). Osagai horiei sekzioaren *barne-indarreko faktore* edo *orekatzaile* deritze.

R_x	N , indar normala	<i>trakzioa/konpresioa</i>
R_y	V_y , indar ebakitzzailea	<i>ebakidura</i>
R_z	V_z , indar ebakitzzailea	<i>ebakidura</i>
$(M_G)_x$	M_x edo T , bihurtura-momentua	<i>bihurdura</i>
$(M_G)_y$	M_y , makurdura-momentua	<i>makurdura</i>
$(M_G)_z$	M_z , makurdura-momentua	<i>makurdura</i>

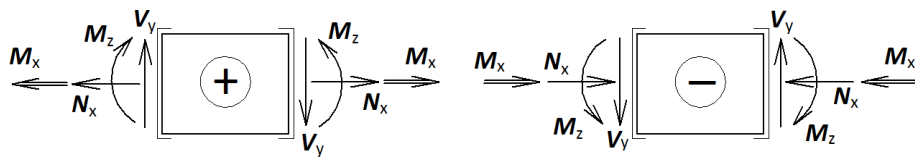
Era berean, barne-indarraren osagaiak sekzioaren lan egiteko modua edo *karga mota* definitzen dituzte: *trakzioa/konpresioa*, *ebakidura*, *makurdura* eta *bihurdura*. Sekzio batek horietako barne-indar bat edo horien arteko konbinazio bat jasan dezake efektuak batuz. 2.4. irudiak azaltzen ditu karga motak 3D euskarri batean A , B eta C sekzioetan.

Irakasgai honetako adibideetan, indarrak planoan daude (x, y), eta momentuak planoarekiko norabide perpendikularrean (z). Horrela, aztertuko ditugun elementuetan honako barne-indar hauek agertuko zaizkigu: N_x (edo N) karga axialak (trakzioa/konpresioa), V_y indar ebakitzzailea, M_x (edo T) bihurtura-momentua eta M_z (edo M) makurdura-momentua. V_z eta M_y barne-indarren ondorioak aurrekoek sortutakoen antzera aztertzen dira eta horien efektuak batu egiten dira gainjarpen-printzipioari esker.

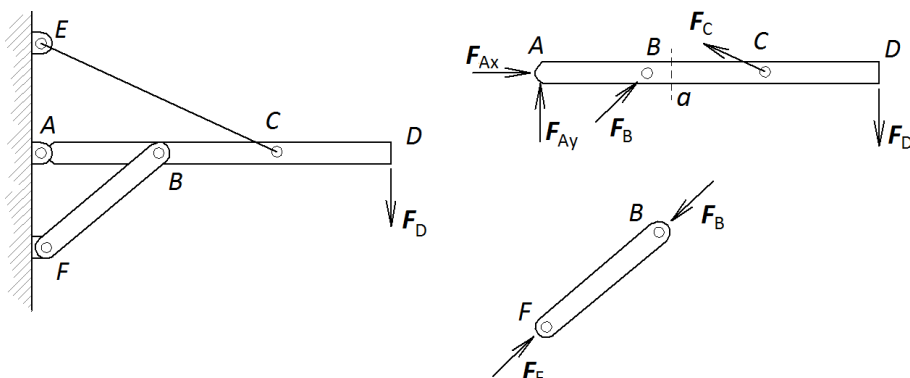
Barne-indarren *zeinu-irizpideak* ez du erreferentzia-ardatzen noranzkoekin bat egiten. Are gehiago, ezberdina da ezkerreko eta eskuineko aurpegietan. x ardatzaren norabidea beti da sekzioarekiko perpendikularra eta noranzko positiboa kanporantz. Beste bi ardatzak eta horien noranzkoak 2.5. irudian azaltzen dira.



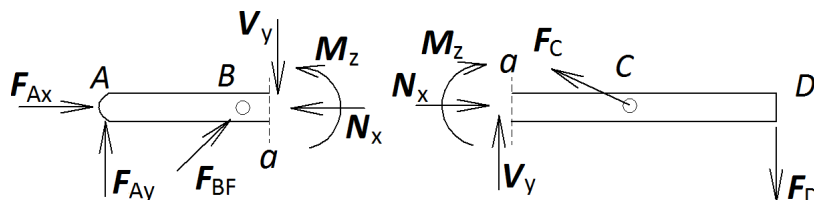
2.4. irudia: Barne-indarrek lan egiteko era definitzen dituzte: trakzioa (C), ebakidura (A, B), bihurtura (A) eta makurdura (A, B)



2.5. irudia: Zeinu-irizpideak barne-indarretan



2.6. irudia: Adibidea: egitura osoa eta elementu bakoitzaren solido askearen diagrama, elementuen arteko elkarrekintzak gehituz



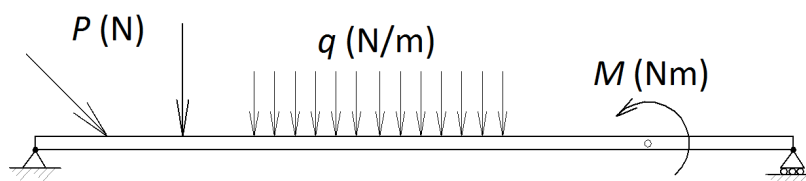
2.7. irudia: AD habearen a sekzioan moztuz gero, sortzen diren bi zatietan ere indarren oreka betetzen da, hau da, barne-indarrak agertzen dira

2.1.1. Barne-indarrak sekzio jakin batean

Beharrezkoa da sekzio bateko barne-indarrak ezagutzeko irakasgaiaren bigarren zatian sekzioaren profila egokia den ebaluatzeko, hau da, erresistentziaren ikuspuntutik piezaren diseinu mekanikoa egiteko. Demagun egitura bateko elementu batean sekzio jakin bateko barne-indarrak ezagutu nahi direla duen profila egokia den balioztatzeko. Har dezagun adibidetzat 2.6. irudiko egitura: AD habearen a sekzioko barne-indarrak ezagutu nahi dira.

Lehenengo pausoa elementuen solido askearen diagramak lortzea da. 2.6. irudiak AD habearen eta FD barraren solido askearen diagramak erakusten ditu. Horietan, kanpo-indarren eta momentuen erresultanteak zero dira.

AD habearen a sekzioan moztuz gero, Aa eta aD zatien bi zatien dira (2.7. ir.). Aa zatian orekan egon dadin, a sekzioan V indar ebakitzailea, M makurdura-momentua eta N indar axiala edo normala agertzen dira. Horien oreka-ekuazioen bidez kalkula daitezke. Era berean, aD zatian ere barne-indarrak sortzen dira, oreka lortuz. aD aldean agertzen diren barne-indarrek Aa zatian agertzen direnen modulu berdinak baina aurkako noranzkoak dituzte. Horrela, bi zatien artean, barne-indarrak elkar ezeztatzen dira.



2.8. irudia: Habeek jasaten dituzten ohiko karga motak honako hauek dira: P karga puntualak edo kontzentratuak, q karga banatuak eta momentuak M

2.2. Habeak

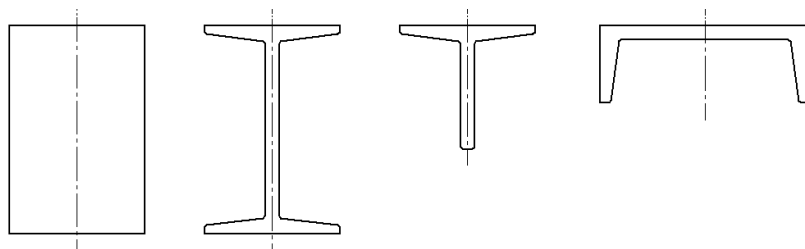
Habea da zeharkako kargak jasateko diseinatua dagoen egitura-elementua (barrek indar axialak bakarrik jasaten dituzte, trakzioa edo konpresioa). Normalki, luzetarako ardatzarekiko perpendikularrak diren kargak jasaten dituzte, tentsio ebakitzailak eta makurdura-momentuak sortuz. Kargak perpendikularki aplikatuta ez daudenean, indar axialak ere agertzen dira.

Habea (barraren antzera) dimentsio bat beste biak baino handiagoa duen egitura-elementua da. Normalki, profil bat lerro zuzen batean zehar (luzetarako ardatza) garatuz lortzen da.

Habeen diseinuak bi zati dauzka:

1. Kargak sortutako barne-indarren azterketa luzeran zehar (gai honetan aztertuko dugu).
2. Lehen zatian identifikatutako V indar ebakitzailak eta M makurdura-momentu maximoa duten sekzioan/sekzioetan tentsioak hobekien jasaten dituen profilararen aukeraketa (irakasgaiaren bigarren zatian ikusiko dugu, Materialen Erresistentzian).

2.8. irudiak aurkezten ditu habeek jasaten dituzten ohiko karga motak. Aurreko gaian ikusitako indar puntualek eta indar banatuek gain (ikus 1.3.2. atala, 1.7. ir.), momentuak ere jasan ditzakete.



2.9. irudia: Habeen profilen adibideak, beraien makurdura-planoarekin

Ikusiko ditugun habeak egitura lauak dira, karga eta deflexio denak irudiko planoan kokatzen direlako. Plano honi *makurdura-plano* deritzo. Landuko ditugun habeen profilak simetrikoak dira makurdura-planoarekiko (2.9. ir.).

Berma-baldintzak eta habeen konfigurazioak

Berma-baldintzek habeak lurrarekin edo beste elementuekin dituen loturak adierazten dituzte. Lotura horiek desplazamenduak edo biraketak eragozten dituzte, erreakzioak eraginez (indarrak eta momentuak). 1.5. atalean ikusi diren ohiko berma-baldintzak erabiltzen dira habeetan: bermapuntuak, landapenak eta giltzadurak (ikusi 1.31. ir.). Habearen solido askearen diagrama marrazteko, beharrezkoa da loturetan sortutako erreakzioak ezagutzea.

Oreka estatikoa lortzeko, erreakzio kopuruak, oreka-ekuazio kopurua berdintzen badu, egitura *isostatikoa* da, eta behar baino erreakzio gehiago badaude egitura *hiperestatikoa* (ikusi 1.32. ir.). Irakasgai honetan egitura isostatikoak bakarrik aztertuko dira.

Hainbat habe-konfigurazio aukera daude. Oinarrizko konfigurazioak (isostatikoak) 2.10. irudian ikus daitezke.

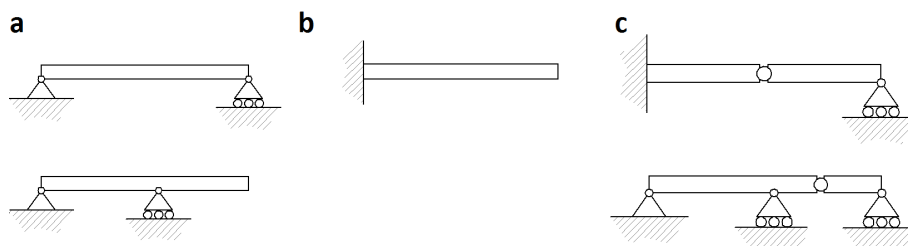
Soilki bermatutako habeak berma-puntuz eusten dira (2.10.(a) ir.). Hauek desplazamendua mugatzen dute, baina biraketa ez; erreakzioak indarrak dira. Bermapuntuak habearen muturretan edo tartean egon daitezke, eta, hala, habearen alde bat edo biak hegalean geratu.

Landatutako habeek, berriz, landapen bat dute gutxienez (2.10.(b) ir.). Landapenek desplazamenduez gain biraketa ere mugatzen dute, eta erreakzioetan indarrak eta momentuak agertzen dira.

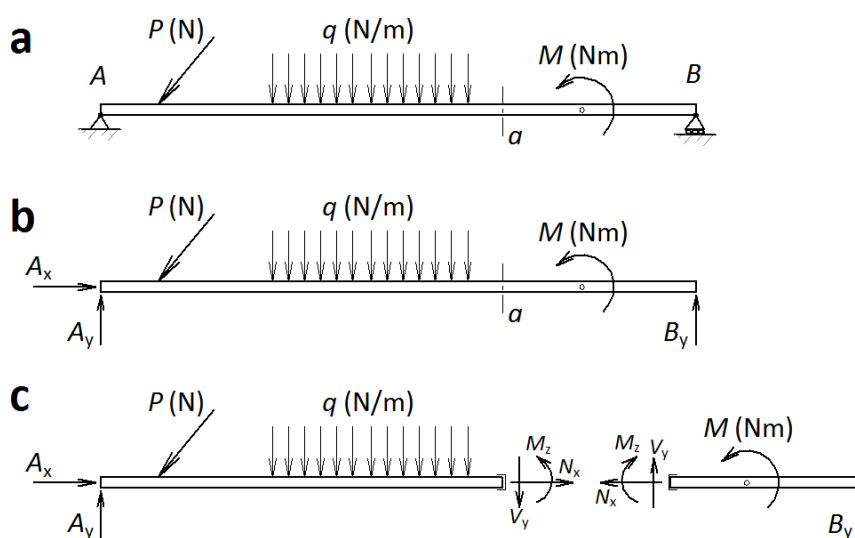
Ohiko konfigurazioez gain, habeetan *giltzadurak* ere erabiltzen dira (2.10.(c) ir.). Kasu horietan, erreakzio kopurua oreka-ekuazio kopurua baino handiagoa da. Hala ere, zati bakoitzaren solido askearen diagrama planteatuz, erreakzioak kalkula daitezke. Gogoratu giltzaduretan momentua zero dela.

2.2.1. Indar ebakitzailen eta makurdura-momentuen (VM) diagrama

Habe bateko sekzio jakin batean (2.11. irudian a sekzioa) agertzen diren barne-indarrak kalkulatzeko (V indar ebakitzaila eta M makurdura-momentua), lehenik solido askearen diagrama lortu behar da loturetako erreakzioak kalkulatzeko. Ondoren, habeaz azertu nahi den sekzioan moztu, eta, alde batean edo bestean oreka estatikoko ekuazioak planteatuz, V eta M barne-indarrak lortzen dira.



2.10. irudia: Habe isostatikoaren ohiko konfigurazioak: (a) soilki bermatutako habea, (b) landatutako habea eta (c) giltzatura duen habea



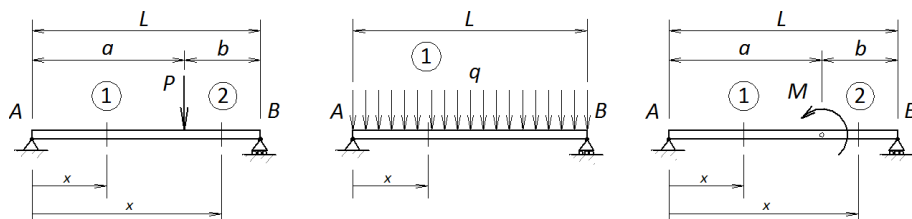
2.11. irudia: (a) Soilki bermatutako habea; (b) habearen solido askearen diagrama; (c) barne-indarrak a sekzioan

Garrantzitsua da hasieran erakutsi den zeinu-irizpidea jarraitzea, sekzioaren aurpegia eskuinean edo ezkerrean dagoen kontuan hartuz (2.5. ir.).

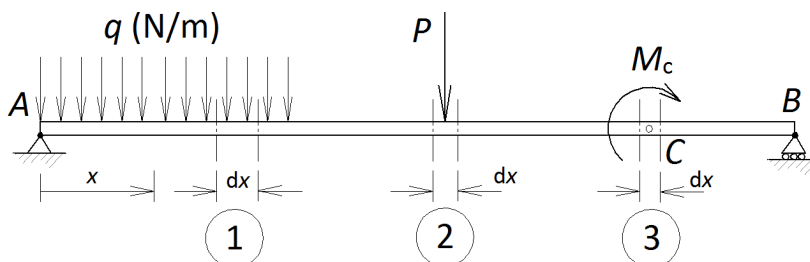
Habe bateko sekzio batean barne-indarrak (V eta M) nola kalkulatu diren ikusi da, baina sekzioaren kokapenaren arabera V eta M aldatuz doaz. Habearen diseinu mekanikoan, barne-indarrak maximoak diren sekzioa ezagutzeta da interesgarria, hau da, *sekzio kritikoa*. Profilaren balioztapena sekzio horrekigo egiten da: bertan baldintzak onargarriak badira, beste sekzioetan, barne-indar txikiagoekin, ez da arazorik izango. Sekzio kritikoa identifikatzeko, barne-indarrak habearen zehar nola aldatzen diren aztertuko dugu era grafikoan VM diagramen bidez. 2.12. irudiko adibideen bidez ikusiko dugu VM diagramak lortzeko prozedura.

VM diagrama lortzeko honako pauso hauek egin behar dira:

- habearen solido askearen diagrama lortu: loturak kendu eta erreakzioak kalkulatu;
- habeak dituen zatiak identifikatu: karga-aldaketa bakoitzak (indarra, mo-



2.12. irudia: Indar ebakitzaille eta makurdura-momentuen (VM) diagramen adibideak (ebatzi gabe)



2.13. irudia: Barne-indarren aldaketa aztertuko diren puntuak

mentua edo indar banatua) zati bat mugatzen du (2.12. irudian zenbatuta agertzen dira);

- zati bakoitza ebaki, eta oreka aztertuz barne-indarrak (V eta M) ebaluatu x luzerarekiko; eta, azkenik,
- barne-indarren funtzioetan balioak ordezkatuz VM diagrama marraztu.

2.2.2. Karga banatuen, indar ebakitzailen eta makurdura-momentuen arteko erlazioa

Habe batean kargek zati infinitesimal batean sortzen dituzten barne-indarren (V eta M) aldaketak aztertuko ditugu. 2.13. irudiak aurkezten ditu hiru kasuak: (1) karga banatua, (2) karga puntuala eta (3) momentua.

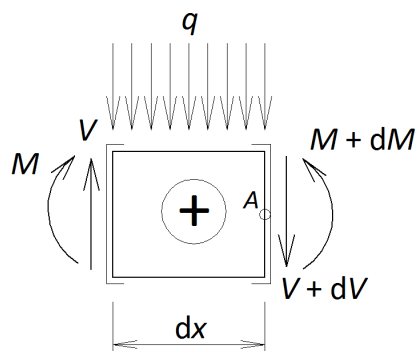
1. Karga banatua (q)

q karga banatu uniformeak 2.13. irudiko (1) zati infinitesimalean eragiten dituen barne-indarren aldaketak (dV , dM) ezagutu nahi dira. Horretarako, habe zati infinitesimalean oreka aztertzen da (2.14. ir.).

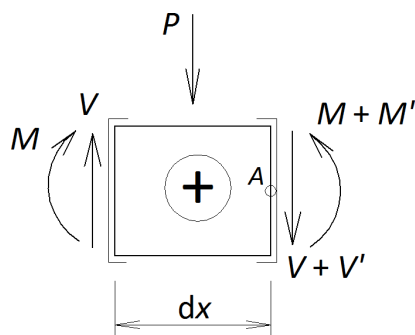
$$\Sigma F_V = 0 \quad V - (V + dv) - qdx = 0 \quad -dv - qdx = 0$$

$$-dV - qdx = 0 \quad -\frac{dV}{dx} = q \quad \frac{dV}{dx} = -q$$

Karga banatuak positiboak (+) dira beherantz (↓) jarduten dutenean.



2.14. irudia: q karga banatu uniformeak dx luzeran sortutako barne-indarren aldaketa



2.15. irudia: P karga puntualak dx luzeran sortutako barne-indar aldaketa

q karga banatua V -ren x -ekiko deribatua da, zeinua aldatuta.

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + Vx + qdx \frac{dx}{2} - (M + dM) = 0$$

2. mailako diferentziala mespretxatuz:

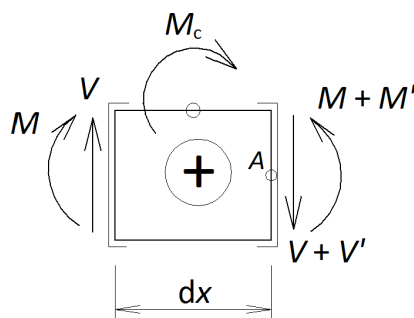
$$Vdx = dM \quad \rightarrow \quad V = \frac{dM}{dx}$$

V indar ebakitzaila M momentu makurtzailearen deribatua da x -rekiko

2. Karga puntuala (P)

Oraingoan, P karga puntualak dx zati infinitesimalean sortzen dituen barne-indarren aldaketak aztertuko ditugu, 2.15. irudian oreka aztertuz. Aurreko kasuan ez bezala, hemen P aldaketa osoa eta zehatza da dx luzeran, eta, ondorioz, V' , M' aldaketa handiak espero dira.

$$\Sigma F_V = 0 \quad V - P - (V + V') = 0$$



2.16. irudia: M_c momentuak dx luzeran sortutako barne-indar aldaketa

$$V' = -P$$

P karga kontzentratua aplikatzen den puntuan, P baliodun jausi bortitz bat gertatzen da indar ebakitzailen diagraman.

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + Vdx - P\frac{dx}{2} - (M + M') = 0$$

$$M' = Vdx - P\frac{dx}{2}$$

Momentu-aldaketa adierazpenean lehen mailako infinitesimalak agertzen dira; hau da, momentuen diagraman jausirik ez da gertatzen; aldiz, malda-aldaketa agerikoa da.

Bi aldeetan momentuak x -ekiko deribatuz, momentuen diagraman gertatzen den malda-aldaketa antzeman dezakegu:

$$\text{ezkerraldean, } \frac{dM}{dx} = V \quad \text{eta eskuinaldean, } \frac{dM}{dx} = V - P$$

3. Momentua (M_c)

Azkenik, momentu batek (M_c) barne-indarretan sortutako aldaketak aztertuko ditugu ((3) zatia 2.13. irudian). Hemen ere, M_c -k balio osoa eta zehaza duenez, V' , M' balio osoa duten aldaketak aurreikus daitezke.

$$\Sigma F_V = 0 \quad V - (V + V') = 0 \quad \longrightarrow \quad V' = 0$$

Momentu bat aplikatua dagoen puntuan, indar ebakitzaila ez da aldatzen.

$$\Sigma M_A = 0 \quad M + M_c + Vdx - (M + M') = 0$$

Infinitesimoa mespretxatuz:

$$M' = -M_c \quad (\text{momentuen diagraman aldaketa})$$

Momentu bat dagoen puntuan, jausi bortitz bat gertatzen da momentuen diagraman.



2.3. Kableak

Kableak ez dira solido zurrinak, malguak dira. Beraz, estatikako oreka-ekuazioak bete behar dituzte, baina horiek ez dira nahikoak erreakzioak kalkulatzeko.

Kableak ez dira gai makurdura jasateko, trakziora soilik egiten dute lan. Kableen tentsioa tangentea da haiekiko.

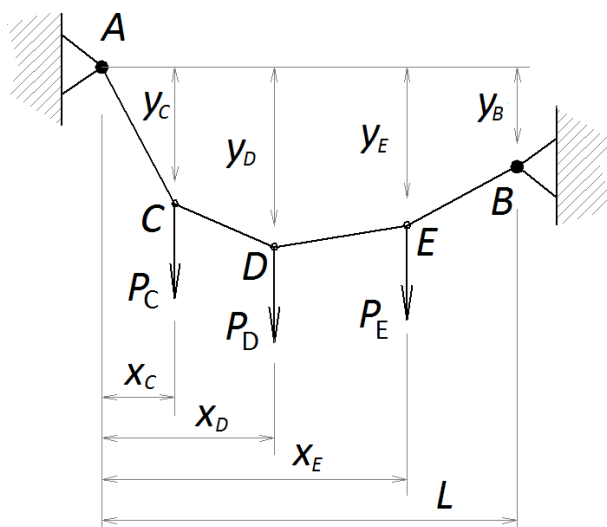
Kableek jasaten duten trakzioko barne-indarrari tentsio (T) deritzo. Kontuz, ez nahastu T kablearen tentsioa erresistentziako zatian aztertuko diren (σ , τ) tentsioekin!

2.3.1. Karga bilduak dituzten kableak

Kablearen pisua mespretxa daiteke, kargen magnitudearekin konparatuz. Bi karga bilduen artean beste indarrak ez dagoenez, kargen arteko zatiak zuzenak dira.

Kargen arteko x distantziak ezagunak dira; kable beraren forma zehaztu nahi da: tarte bakoitzeko T tentsioaz gain, karga bakoitzaren y altuera (2.17. ir.).

- Ezagutzen diren datuak: $x_1, x_2, x_3, x_4, P_1, P_2, P_3$
- Ezezagunak: $y_1, y_2, y_3, A_x, A_y, B_x, B_y$



2.17. irudia: Karga bilduak jasaten dituen kablea

Kableak hainbat konfigurazio har ditzake. Ezezagun horiek askatzeko datu gehigarri bat behar da: kablearen puntu bateko koordenatuak (2.18. irudian G puntua (x_G, y_G)). Puntua karga baten posizioarekin bat egin dezake, edo bi kargen artean egon daiteke.

Ondoren, oreka-baldintzak kable osoan eta zati batean aztertuz, erreakzioak tentsioak eta altuerak kalkula daitezke. Tentsioaren osagai horizontala konstantea da kable osoan zehar, ($T \cos \theta = -A_x$). T tentsio maximoa agertzen da θ malda maximoa den zatian.

2.3.2. Karga banatuak dituzten kableak

Kasu honetan, kargak oso hurbil daudenez, lerroz osatutako irudiaren ordeztu, kableak kurba baten itxura hartzen du (2.19. ir.). Kasu honetan ere, tentsioak kablearekiko tangenteak dira.

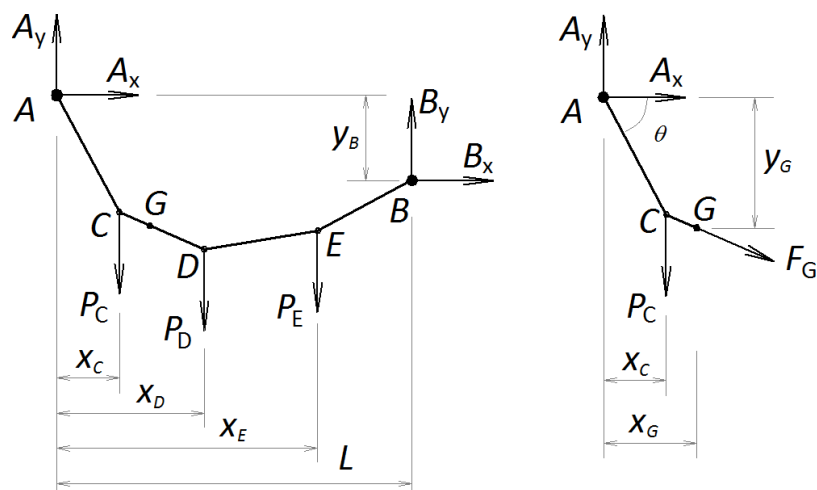
q_x -en erresultantea W bada, honako erlazio hauek lortzen dira indarren triangelutik (2.19. ir.):

$$T_o = T \cos \theta \quad W = T \sin \theta \quad \tan \theta = \frac{W}{T_o} \quad T = \sqrt{T_o^2 + W^2}$$

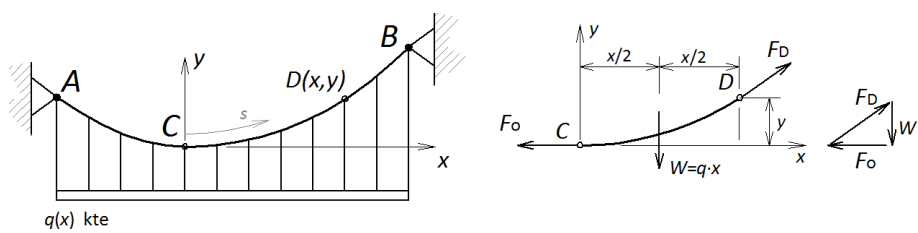
Hemen ere, tentsioaren osagai horizontala konstantea da kablean zehar (T_o). T minimoa puntu baxuenean eta T maximoa bermapuntuetako batean agertzen dira.

Kable parabolikoak

Kableak jasaten duen karga berdina banatua da. Kablearen pisua arbuizaten da jasaten dituen indarren parean horizontalean zehar. Zubi zintzilikatua da kable parabolikoen ohiko adibidea.



2.18. irudia: Indarren oreka: kable osoan eta G puntuan (y_G ezaguna da)



2.19. irudia: Horizontalean uniformeki banatutako q karga jasaten dituen kablea; oreka CD zatian; indarren hirukia

q (N/m), horizontalean dagoen karga berdin banatua da.

Lehen karga banatuetan lortu diren ekuazioak baliagarriak dira (2.19. ir.):

$$T = \sqrt{T_o^2 + q^2 x^2}$$

Momentuen oreka D puntuan aplikatuz:

$$\Sigma M_D = 0 \quad T_o y = qx \frac{x}{2}$$

Eta azken hau askatuz, *parabolaren ekuazioa* lortzen da:

$$y = \frac{q}{2T_o} x^2$$

Parabolaren jatorria kablearen puntu baxuenean dago.

Kablearen luzera kalkulatzeko, s luzeran integratuz:

$$s_D = \int_0^{x_D} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$s_D = \dots = x_D \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_D}{x_D}\right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y_D}{x_D}\right)^4 + \dots \right]$$

Gezi edo deflexio trikia duten katenariak kable parabolikoak balira bezala azter daitezke.

Katenaria

Kablearen luzeran zehar indar banatua dagoenean; adibidez, bere pisua jasaten duen kablea.

Izan bitez s kablearen luzera koordinatua eta q luzera-unitateko pisua.

Lehen bezala, honako erlazio hau beteko da (2.19. ir.):

$$T = \sqrt{T_o^2 + q^2 s^2}$$

c katenariaren parametroa bada ($c = T_o/q$), orduan:

$$T_o = qc \quad W = qs \quad T_o = q\sqrt{c^2 + s^2}$$

Momentuen ekuazioa ezin da hartu $q \cdot s$ erresultantearen kokagunea ezagutzen ez delako. Horretarako, kablearen luzerako ds elementu infinitesimal baten proiektzioa aztertuko dugu x ardatzean.

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_o}{T} ds = \frac{T_o}{q} \frac{ds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{cds}{\sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}}$$

$$\int_0^x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{c^2}}} \rightarrow x = c \left[\operatorname{arcsinh} \frac{s}{c} \right]_0^s = c \operatorname{arcsinh} \frac{s}{c} \quad s = c \sinh \frac{x}{c}$$

Eta horrela lortzen da *kateneria funtzioa*:

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad \text{eta} \quad y^2 - s^2 = c^2$$

3. gaia

Egitura giltzatuak

3.1. Sarrera. Egitura lauak

Egitura asko (zubiak, estalkiak, garabiak,...) egitura giltzatuak dira. Barrez osatuak daude, eta horiek korapiloetan elkartzen dira, bai planoan, baita espazioan ere. Eraikinetan erabiltzen diren egitura giltzatuak *sareta* deritze.

Barren pisua arbuigarritzat joko da jasaten dituzten indarren parean, eta *indarrak soilik korapiloetan aplikatuta* daude.

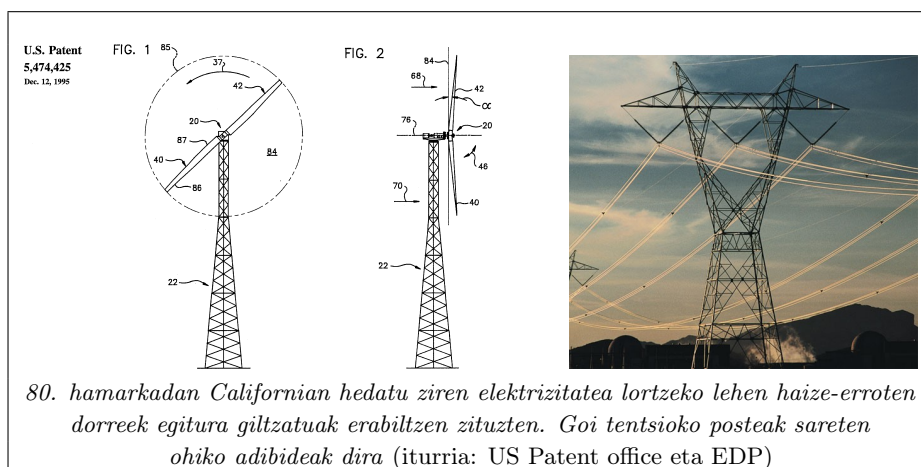
Hipotesi horren arabera, barrek bi puntutan bakarrik jasaten dituzte indarrak eta, ondorioz, indar horiek barraren norabidea, modulu bera eta aurkako noranzkoa izan behar dituzte. Beraz, trakzioan edo konpresioan lan egiten dute.

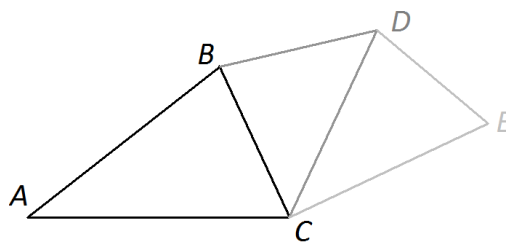
Egitura giltzatu sinplea triangelua da. Hirukiz osatutako egiturari, *egitura sinplea* deritzo. Korapilo bakoitzean bi barra gehituz garatzen da (3.1. ir.).

Bi egitura simple barra batekin elkartzean, *egitura konposatua* lortzen da (*Polonceau* eta *Mansarda* 3.2. irudian).

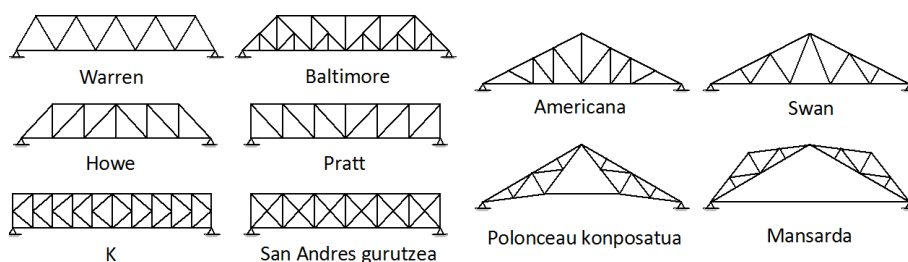
Ohiko sareta konfigurazioek sortzailearen izena hartzen dute (3.2. ir.).

Korapiloak soldatuak, errematxatuak edo torlojutuak izan daitezke (3.3. ir.). Barren ardatzak korapiloko puntu batean moztea ezinbestekoa da giltzatuak hartu ahal izateko; horrela momentuak zero dira eta elementuek barra gisa





3.1. irudia: Hirukiari bi barra gehituz, sareta eratzen da



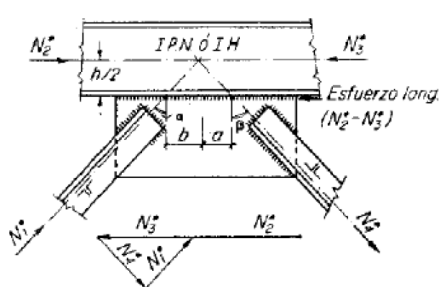
3.2. irudia: Ohiko egitura edo sareta konfigurazioak

egiten dute lan.

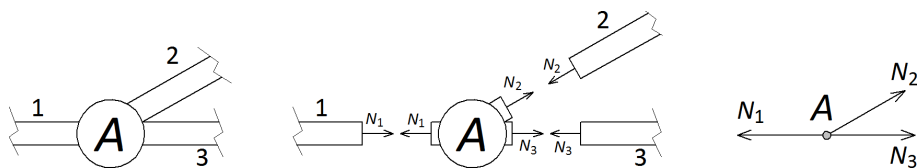
Ikusten denez, biraketa eragotzita dago aipatu diren kasuetan, eta ondorioz, korapiloetan ager daitezke erreakzio-momentuak ere. Hala ere, hauek arbuia garritzat jotzen dira, eta korapiloa giltzadura dela suposatzen da.

Egituretako barrek jasaten dituzten barne-indarrak kalkulatzeko bi metodo ikusiko ditugu: *korapiloen metodoa*, egitura baten barra guztietan indarrak eza-gutzeko, eta, *Ritter-en edo sekzioen metodoa*, barra zehatz batean edo batzuetan indarrak lortzeko.

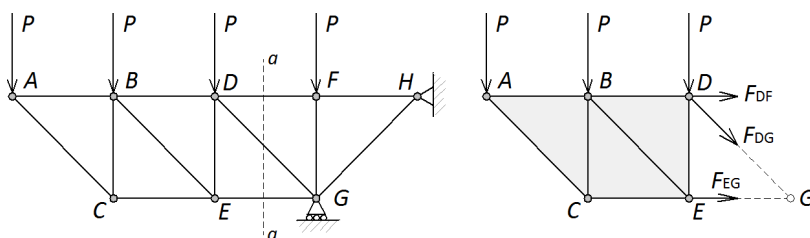
Bietan (ia beti) ezinbestekoa da egitura osoaren solido askearen diagrama marraztea korapiloen metodoa erabili aurretik. Hau da, egitura loturetatik askatu eta erreakzioak kalkulatzeko.



3.3. irudia: Giltzadurak: ezkerrean, Eibarko Astelena frontoiko estaldurako eraikuntza-detailea; eskuinean, Donostiako Fatronik-Teknalia ikerkuntza-zentroan hodiz osatutako egitura



3.4. irudia: A giltzadura, A giltzadura isolatuta eta indarren oreka A korapiloan



3.5. irudia: Sekzioen metodoaren adibidea: egitura $a-a$ planoan moztuz, zatiak ere oreka mantentzen dute

3.2. Korapiloen metodoa

Egituren korapiloak banan-bana isolatuz eta partikularen oreka-baldintza ezarri, barretako indarrak kalkula daitezke (3.4. ir.).

$$\Sigma F_x = 0 \quad N_1 = N_3 + N_2 \cos \alpha$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad N_2 \sin \alpha = 0 \rightarrow N_2 = 0$$

Oro har, bi ezezagun dituen korapilotik hasi behar da.

Indarrak korapilotik irteteen *trakziozkoak* dira eta sartzean *konpresiozkoak*. Oreka planteatzean, indar guztiak trakziozkoak direla suposatuko da. Balio negatiboak ematen dituztenak konpresiozkoak izango dira.

Indarrak grafikoki ere lor daitezke (Cremona-ren metodoa).

3.3. Sekzioen metodoa (Ritter)

Egituretan barra jakin batzuetako indarrak ezagutu nahi direnean erabiltzen da. Lehendabizi, berma-puntuetako erreakzioak analitikoki kalkulatu dira. Ondoren, hiru (edo lau) barra dauden leku batean moztu da egitura. Ondorioz, hiru barra horietako indarrak kalkula daitezke (3.5. ir.). Barra bakoitzaren indarra lortzeko hainbat mozketa aukera daude, baina bat edo bi egokienak. Mozketa aukeraketa egokia egiteko aukera ezberdinak aztertzea komeni da, ez ikusten den lehena.

II. Atala

Materialen erresistentzia

4. gaia

Tentsio eta deformazio kontzeptuak

4.1. Materialen erresistentzia

Solido guztiek erresistentzia eta zurruntasun propietateak dituzte neurri ezberdinean. Beraz, kargak jasan ditzakete hautsi gabe eta deformazio garrantzitsurik izan gabe muga batzuen barruan.

Materialen Erresistentzia (edo Materialen Mekanika) da elementu mekanikoen erresistentzia eta zurruntasuna aztertzen dituen zientzia:

- Erresistentzia: kargen eraginpean, *hausturari* aurre egiteko ahalmena:
- Zurruntasuna: kargen eraginpean, *deformazioari* aurre egiteko ahalmena.

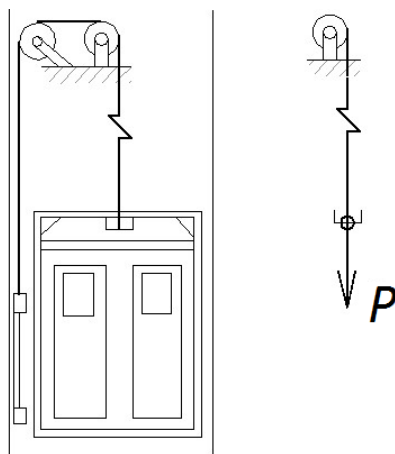
Materialen erresistentziak garatu dituen metodoen bidez, segurtasunez diseinatzen dira elementuen dimentsioak makinetan eta egituretan. Materialen erresistentziaren oinarriak mekanika orokorraren teoremetatik eratorri dira, batez ere estatikatik.

Materialen erresistentzia *solido deformagarrien mekanika* deritzon mekanikaren adarra da. Solido deformagarrien mekanikaren barruan dago *elastikotasunaren teoria*, materialen erresistentziak baino ikuspuntu zehatzagoak erabiltzen dituena. Baina horren emaitza zehatzak lortzeko, erreminta matematiko konplexuetara jotzen du, zenbait kasutan emaitzarik lortu ezin delarik. Beraz, eremu murriztuan aplikatzen da *elastikotasunaren teoria*, nahiz errealitatea era zehatzagoan eta osoagoan deskriba dezakeen.

Beraz, *Materialen Elastikotasuna eta Erresistentziaren* (MEE) helburua da kalkulu-metodo sinplifikatuak eraikitzea, ikuspuntu teknikitik elementu seguruak izan daitezen, eta era onargarrian diseina daitezen.

4.2. Sistema erreala eta kalkulu-eskema

Kalkulu-eskema bat aukeratuz hasten da objektuaren erresistentziaren edo sistema errealaren azterketa. Egituraren kalkulu-eskema eraikitzeko, egituraren



4.1. irudia: Igogailuaren sistema eta kablearen kalkulua

ezaugarri nagusiak identifikatzen dira, soberan daudenak baztertuz. Hau da, ez dira kontuan hartzen sistemaren portaeran eragin txikia duten faktoreak.

Arazoaren sinplifikazioa guztiz beharrezkoa da kasu guztietan, ezinezkoa baita egituraren ezaugarri guztiak kontuan hartzen dituen problemaren emaitza lortzea (elementu finituen metodoa bera ere emaitzaren hurbilpen bat da).

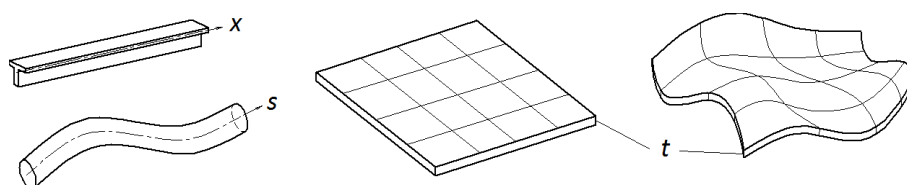
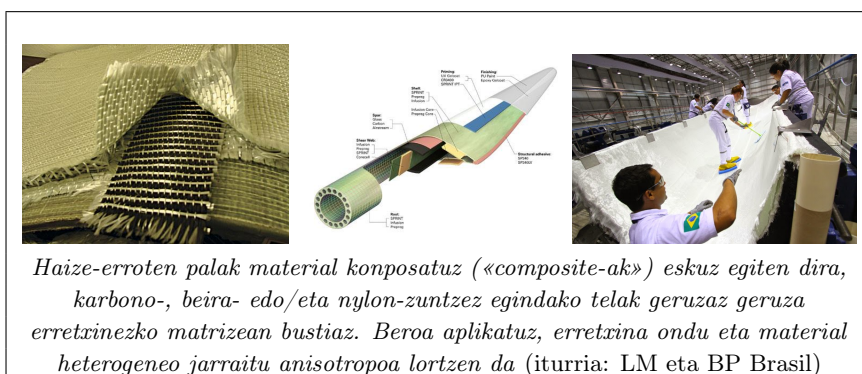
Adibidez, igogailuaren kablearen erresistentziaren kalkuluan (4.1. ir.),

- faktore garrantzitsuak:
 - kabinaren pisua,
 - kablearen pisua (oso luzea bada),
 - kabinaren azelerazioa;
- soberan daudenak:
 - igogailuaren erresistentzia aerodinamikoa,
 - presio barometrikoaren aldaketa altueraren arabera,
 - tenperaturaren aldaketa altueraren arabera,
 - eta zenbatezinak diren beste hainbat faktore.

Gorputz edo sistema berak kalkulu-eskema bat baino gehiago izan ditzake, kalkuluak behar duen zehaztasunaren eta aztertu nahi den faktorearen arabera. Horrela, aurreko adibidean kablearen erresistentzia soilik aztertu nahi bada, kabina eta karga solido deformaiezintzat har daitezke, eta kablearen muturrean aplikatutako indar baten bidez ordezkatu. Aldiz, kabinaren erresistentzia aztertzean, ezin da solido zurruntzat hartu. Haren ezaugarriak aztertu eta haren kalkulu-eskema berezia egin beharko da.

Materialaren hipotesi sinplifikatzaileak

Kalkulu-eskemaren aukeraketa materialen ezaugarriak definituz hasten da. Materialaren ezaugarriak zehaztean, *hipotesi sinplifikatzaileak* erabiltzen dira; normalean, materialak *homogeneoak*, *jarraituak* eta *isotropoak* direla jotzen da.



4.2. irudia: Geometriaren idealizazioa: luzera elementuak, plakak eta oskolak

- Materiala *homogenea* da, baldin eta edozein puntutan propietate berak baditu.
- Materiala *jarraitua* da, baldin eta material elementuari ezarritako bolumen osoa okupatzen badu.
- Materiala *isotropoa* da, baldin eta edozein norabidetan propietate berak baditu.

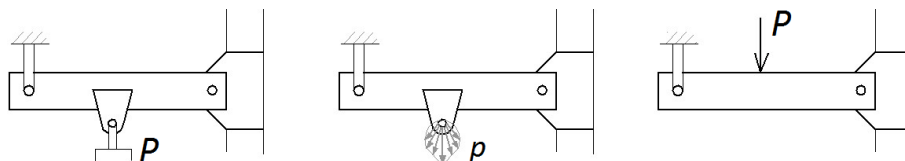
Geometria

Kalkulu-eskema eraikitzean, *solidoaren geometria* ere sinplifikazioak ezartzen dira (4.2. ir.).

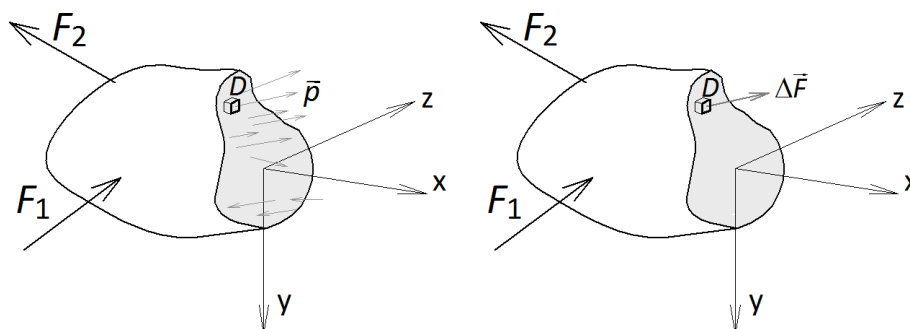
- Elementu prismatikoa: bere dimentsioetako bi txikiak dira hirugarrenarekin konparatuz (barra eta habeak).
- Plaka: elementu laua da, eta bere dimentsioetako bat beste biak baino txikiagoa da.
- Oskola edo gainazala: kurbatuta dagoen plaka da; lodiera txikiko egitura-elementu espaziala da.

Indarrak

Objektu errealak eskemekin ordezkatzeko, aplikatutako *indar-sistemak* ere sinplifikatzen dira. Horrela, indar kontzentratuaren eta banatuaren kontzeptuak sortzen dira (4.3. ir.).



4.3. irudia: Indar kontzentratuaren idealizazioa

4.4. irudia: A azalera zerorantz doanean intentsitatearen balioa da *tentsioa* \bar{f}

Indarrak, aldi berean, kanpo- eta barne-indarrak izan daitezke. Indarrek bi gorputzen arteko akzioa neurtzen dute. Kanpo-indarrak, elementuak jasotzen dituen karga zuzenez gain, inguruko elementuekin dituen loturek sortutako erreakzioek ere osatzen dute (ikusi 1.3.2. atala, 1.7. irudia). Barne-indarrek solidoa kohesionatzen dute, aldi berean kanpo-indarrak euskarrietara eramanez (ikusi 2.1. atala).

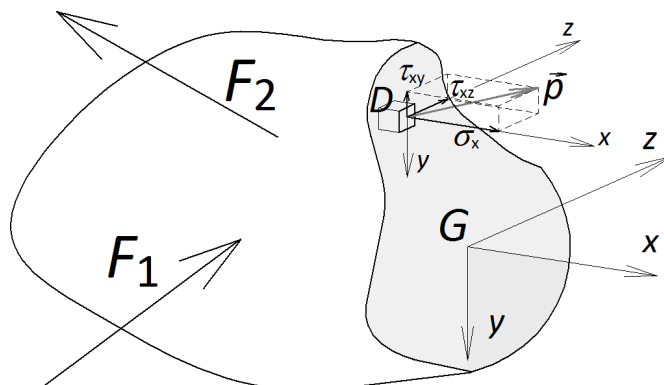
4.3. Barne-indarrek sortutako tentsioak

2.1. atalean ikusi dugu gorputza osatzen duten partikulen arteko interakzioek barne-indarrak osatzen dituztela. Barne-indar horiek gorputza plano batez moztean, zatiak orekan mantentzeko sekzioaren GZn agertzen diren indar eta momentu erresultanteek osatzen dituzte. Era berean, indar eta momentu erresultanteak hiru osagaitan deskonposatu daitezke: N indar axiala (trakzioa eta konpresioa), V_y , V_z indar ebakitzailak, M_x (edo T) bihurtura-momentua eta M_y , M_z makurdura-momentuak (ikusi 2.3. irudia).

Sekzioan barne-indarren banaketa definitzeko, aurretik indar-intentsitatearen kontzeptua azaldu behar da. Neurri horri *tentsio* esango diogu.

4.4. irudiaren ezkerrekoak 2.3. irudiko barne-indarrek (R , M_R) sekzioan duten banaketa erakusten du. Barne-indarrak sekzioan «presio» eran banatzen dira, hau da, azalera banatutako indarra. Sekzioko barne-indarrek duten banaketak gai izan behar du bi sekzioak hurbilduz bat egiteko, haiek sortutako deformazioak kontuan hartuz. Baldintza horri *deformazioen jarraipen-baldintza* deritzen, eta Materialen Erresistentziaren eta Elastikotasunaren Teoriaren oinarria da.

Sekzioko D puntuan indarren intentsitatea aztertuko dugu. D puntuaren



4.5. irudia: D puntuan (kubo infinitesimala) sekzioko aurpegian tentsioen banaketa ardatzekiko: σ_x , τ_{xy} , eta τ_{xz}

inguruan ΔA eremua aztertuko dugu, haren barnean $\Delta \vec{F}$ barne-indarra hartzen duelarik. Bi termino horien zatiketak definitzen du \vec{p}_m batez besteko tentsioa ΔA eremuan:

$$\vec{p}_m = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

ΔA eremua nahi adina txikiagotu dezakegu, materiala jarraitua baita. Beraz, limitea ΔA zerorantz doanean (4.5. ir.):

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

\vec{p} osagai bektorialari sekzioko D puntuko *tentsio oso* deritzo. Tentsioa, indarra zati azalera unitatean definitzen da.

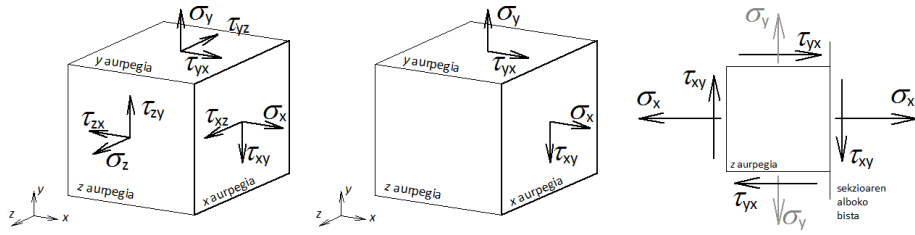
Tentsioaren unitateak (SI): $\frac{N}{m^2} \rightarrow Pa$ (pascal) «Pa» unitate txikia denez, «MPa» erabili ohi da: $1 MPa = 10^6 Pa = 1 \frac{N}{mm^2}$

Era berean, \vec{p} tentsio osoa koordinatu-ardatzetan hiru osagaitan deskonposatzen da (4.5. ir.):

- x norabidean tentsio normala $\rightarrow \sigma_x$ [sigma x],
- tentsio ebakitzailak edo tangentialak
 - y norabidean $\rightarrow \tau_{xy}$ [tau xy],
 - z norabidean $\rightarrow \tau_{xz}$ [tau xz].

x , y eta z ardatzak sekzioaren ardatzen norabideekiko paraleloak dira. Tentsioen notazioak sekzioaren eta ardatzen informazioa ematen du. Aurreko kasuan x sekzioaren aurpegia da, eta xy , xz y eta z ardatzak x aurpegiarekiko.

D puntuko tentsioak sekzioko ΔA azalera infinitesimalerako ondorioztatu ditugu. Beste orientazio bat duen eta D puntu bera mozten duen beste sekzio batean tentsioak aztertzean, tentsio-egoera ezberdina da. Horrela, puntu bateko tentsio-egoera aztertzeko, bertan gurutzatzen diren hiru planoetako tentsioak aztertu behar dira. Hiru plano horiek ortonormalak izan ohi dira, eta kubo bat osatzen dute (4.5. eta 4.6. irudiak).



4.6. irudia: Ezkerrean, puntu bateko (kubo infinitesimala) tentsio egoera; erdian, tentsio laua egoera, tentsioak xy planoan agertzen dira; eskuinean, tentsio laua z ardatzetik ikusita

Tentsio-egoera matritzialki adierazten da, eta materialen erresistentziaren oinarrietako bat da $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$.

Tentsio-tentsorearen osagaiak era matritzialean adierazita:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

x, y eta z ardatzek kuboaren aurpegien norabide normalarekin bat egiten dute.

Tentsio normala σ_i gisa adieraziko da, dagokion ardatza azpiindize gisa due-larik (x, y edo z).

Tentsio ebakitzaila τ_{ij} izendatzen da, bi azpiindize dituelarik: lehenengoa planoarekiko perpendikularra da, eta ardatzarena da; bestea, dagokion ardatzaren norabidea. Aurrerago frogatuko da ij eta ji tentsio-osagaiek balio berdina dutela ($\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$).

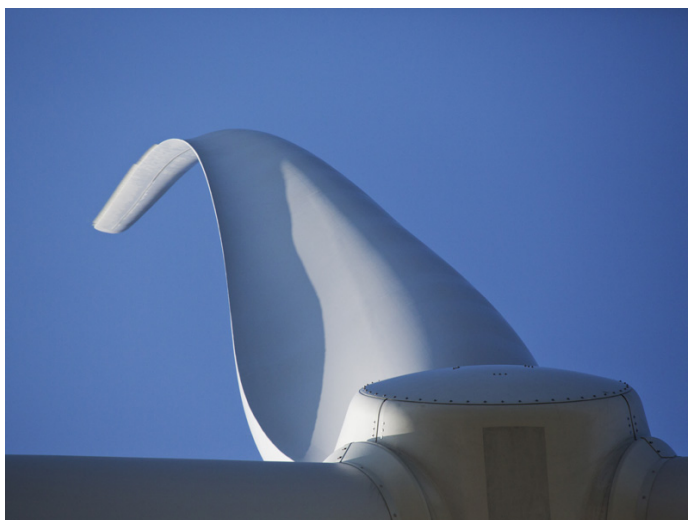
Irakasgai honetan *tentsio laua* egoeran dauden solidoak soilik aztertuko ditugu; hau da, indarrak xy planoan daude. Horrek, analisia errazten du, eta ondorioak egoera konplexuagoetara estrapola daitezke. Tentsio lauan z osagaiak desagertzen dira: σ_z, τ_{yz} eta τ_{zx} (4.6. ir.). σ_y ere ez zaigu agertuko, tentsio biaxialeko kasuak ez baititugu aztertuko.

Barne-indar mota bakoitzak bere tentsio-banaketa sortzen du. Era berean, tentsio-banaketa sekzioan integratuz lortutako indar erresultanteek barne-indarrekin bat egiten dute. Honako taula honek barne-indar eta tentsioen arteko komunitadura aurkezten du:

Karga axiala, N_x		
Makurdura-momentua, $M_z, (M_y)$	\Leftrightarrow	Tentsio normala, $\sigma_x, (\sigma_y)$
Indar ebakitzaila, $V_y, (V_z)$		
Bihurdura-momentua edo pareia, M_x	\Leftrightarrow	Tentsio ebakitzaila, $\tau_{xy}, (\tau_{xz}, \tau_{yz})$

*Parentesia artean dauden kargak eta tentsioak 3D kasutan agertzen dira

Barne-indar ezberdinek sortutako mota bereko tentsioak batu egiten dira gainjarpen-printzipioari esker. Hau da, tentsio normalak beren artean batzen dira, eta ebakitzailak ere bai; baina ezin dira tentsio normalak eta ebakitzailak



Haize-erroten palek, haizeak sortutako presioaren ondorioz, makurduraz gain, indar zentrifugoen eraginez luzatu (trakzioa) eta indarren banaketagatik bihurtu egiten da. Ondorioz, diseinuan erresistentzia eta desplazamenduak, biak hartzen dira kontuan. Donostiako Ibermatica enpresak palaren deformazioa konpentsatzeko orientazioaren kontrolean eragite-sistema garatu du (iturria: Gamesa-Siemens)

batu.

Ondorengo gaitetan (5, 6, eta 7) barne-indar bakoitzak sortutako tentsio-banaketa sakonki aztertuko dugu.

4.4. Desplazamenduak eta deformazioak

Material guztiak kanpo-indarren eraginpean deformatzen dira. Horrek eragina du solidoaren barne-indarren banaketan eta, ondorioz, tentsioetan. *Tentsioak eta deformazioak lotuta doaz beti*, erresistentzia vs zurruntasuna.

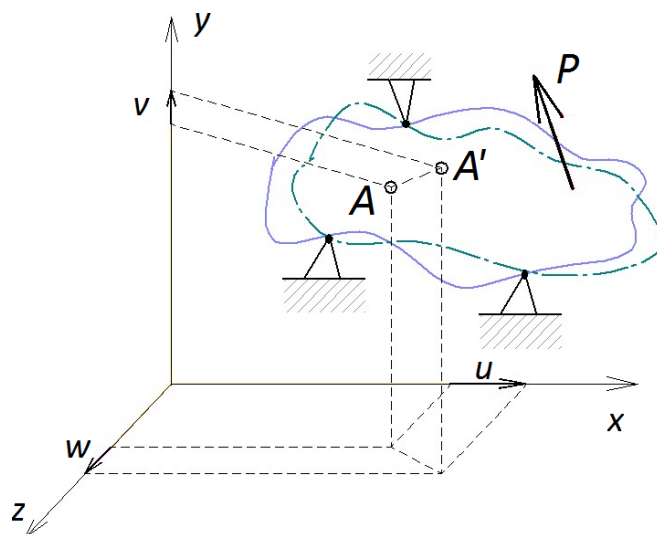
Era berean, solidoaren puntuak desplazatu egiten dira deformazioen eraginez. Deformazioa dimentsio-aldaketa da; desplazamendua, berriz, posizio-aldaketa, deformazio guztien konbinazioaren emaitza.

Puntu baten *desplazamendu-bektorearen* jatorria solidoa deformatu gabeko puntua da (A puntua), eta gezia solidoa deformatu ondorengo puntuaren posizio berrirantz (A' puntua) doa (4.7. ir.).

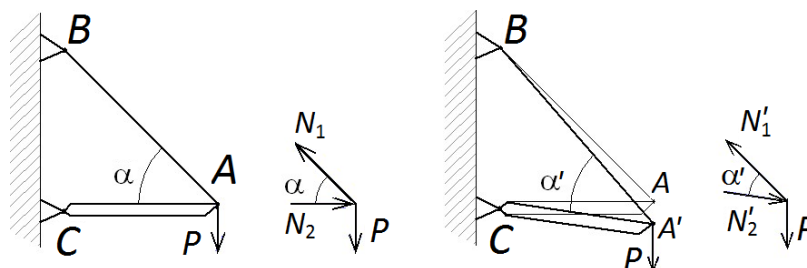
Desplazamendu-bektoreak ardatzetan dituen proiektzioak, desplazamendu-ardatzetan noranzko berekoak dira. \vec{u} , \vec{v} eta \vec{w} izendatzen dira (x , y eta z ardatzetan, hurrenez hurren).

Desplazamendu linealaz gain, kontuan hartu beharrekoa da *desplazamendu angeluar* kontzeptua ere. Solidoaren bi puntuk sortzen duten segmentuak, deformatu aurretik eta ondoren, biraketa ere jasaten du espazioan. Biraketa hori definitzeko planoekiko deskonposatzen da:

$$\vec{\gamma} = \gamma_{yz}\vec{i} + \gamma_{xz}\vec{j} + \gamma_{xy}\vec{k}$$



4.7. irudia: A puntuaren desplazamendua kanpo-indarren ondorioz

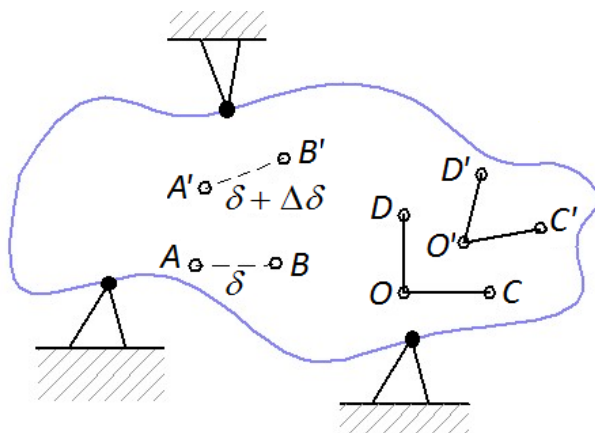
4.8. irudia: Nahiz eta P indarraren ondorioz karga egoerak aldatu, horien eragina mesprezagarritzat hartzen da

Solido-sistema batek behar adina lotura baditu bere desplazamendua espazioan saihesteko, sistema *zinematikoki aldaezina* dela esaten da. Bestela, solido zurrunaren desplazamendua kendu beharko zaio desplazamendu absolutuari puntuen deformazio-desplazamendua lortzeko.

Materialen erresistentzian aztertuko ditugun kasu gehienetan, solidoaren dimentsio geometrikoak baino txikiagoak izango dira edozein puntutako \vec{u} , \vec{v} eta \vec{w} desplazamenduak. Hori kontuan hartuta, barne-indarrak aztertzean, sinplifikazioak aplikatzen dira funtsezko oinarrietan.

Simplifikazioetako bat *hasierako dimentsioen printzipioa* da, non, estatikako oreka-ekuazioak planteatzean, solidoa deformaiezintzat jotzen baita. Hau da, haren dimentsio geometrikoak berdinak dira kanpoko indarrak aplikatu aurretik eta ondoren. Printzipio hori ezin da aplikatu deformazio handien kasuan (4.8. ir.).

Dimentsio-aldaketaren intentsitatea neurtzeko, luzera-aldaketaren eta hasierako luzeraren arteko erlazioan limitea aplikatzen da (4.9. ir.):



4.9. irudia: Desplazamenduen eta deformazioen arteko ezberdintasuna

$$\frac{\Delta \vec{\gamma}}{\gamma} = \vec{\varepsilon}_m \quad \varepsilon_m \text{ batez besteko deformazio unitarioa (adimentsionala)}$$

$$\lim_{AB \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\gamma}}{\gamma} = \vec{\varepsilon}_{AB} \quad \varepsilon_{AB} \text{ A puntuko deformazio unitarioa (lineala) } AB \text{ norabidean}$$

A puntu horretan deformazioa beste norabide batean aztertuz, oro har, beste emaitza bat lortuko da. Ardatz cartesianetan:

$$OX \rightarrow \varepsilon_x \quad OY \rightarrow \varepsilon_y \quad OZ \rightarrow \varepsilon_z$$

Era berean, *deformazio-angeluarraren intentsitatea* kalkulatzen da, angelu-aldaketa hasierako angeluarekin konparatuz:

$$\lim_{OC \rightarrow 0} (\widehat{COD} - \widehat{C'O'D'}) = \gamma_{COI} \quad \text{deformazio angeluarra edo distortsio-angelua}$$

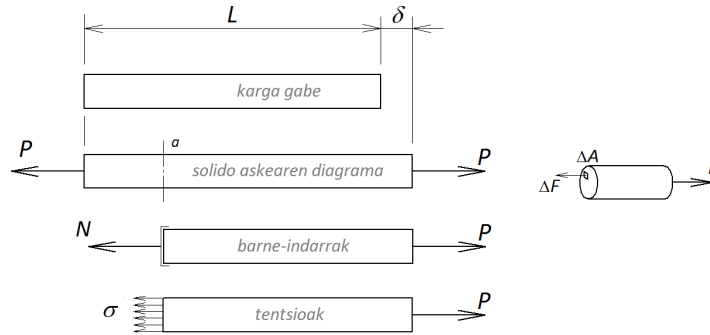
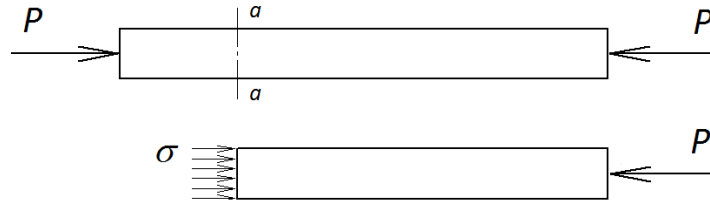
Koordenatu-sistema cartesianean, deformazioak planoen artean aztertzen dira *deformazio-angeluarrak*:

$$xy \rightarrow \gamma_{xy} \quad xz \rightarrow \gamma_{xz} \quad yz \rightarrow \gamma_{yz}$$

Puntu batekiko norabide eta plano guztietako deformazio lineal eta angeluarren multzoak puntuaren *deformazio-egoera* osatzen du. Deformazio-egoera sei osagaiek definitzen dute, zeinek Hooke-ren legeari jarraituz tentsio normalekin eta ebakitzaileekin erlazio zuzena baitute.

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy}, \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

4.10. irudia: Tentsio normala σ trakzioan4.11. irudia: Tentsio normala σ konpresioan

4.5. Tentsio normala eta deformazioa

Tentsio normalaren eta deformazioen arteko erlazio ikusteko, karga axiala jasaten duen barra prismatikoa hartuko dugu adibidetzat. Barra prismatikoa luzeran ebakidura konstante bat duen egitura-elementu bat da, eta karga axialak jasaten ditu soilik (trakzioa $N(+)$, konpresioa $N(-)$).

4.10. irudiko adibidean, barrak N indar normal positiboa jasaten du, eta *trakzioan* egiten du lan. Luzapen uniforme jasaten du luzeran. Barne-indarren azterketan a sekzioan moztuz, intuitiboki ondoriozta daiteke N indar normala tentsio-banaketa uniforme baten erresultantea dela. Horrela, tentsio normalak trakzioan:

$$N = P \longrightarrow \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{P}{A} \quad \text{trakzioa}$$

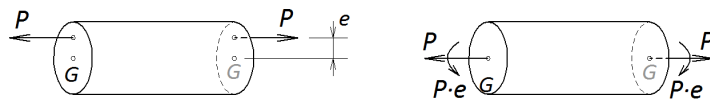
σ , a sekzioarekiko norabide perpendikularrean agertzen denez, *tentsio normala* deritzo.

Indarren zentzua aldatuz gero, hau da, tentsio normal negatiboari *konpresioa* deritzo (4.11. ir.).

Tentsio normalen zeinu-irizpidea:

- Trakzioa $N (+) \longleftrightarrow \sigma (+)$
- Konpresioa $N (-) \longleftrightarrow \sigma (-)$

$\sigma = P/A$ bete dadin, σ tentsioak uniformeki banatuak daude barraren zehar-kako sekzioan. Baldintza hori, P indar axiala sekzioaren GZn aplikatuta dagoenean soilik betetzen da. P indarra sekzioaren GZn aplikatua ez badago,



4.12. irudia: GZn aplikatuta ez dagoen trakzio-indarrak makurdura-momentua ere sortzen du

makurdura-momentua agertzen da, eta tentsio-banaketa aldatu egiten da (4.12. ir.).

Saint Venant-en printzipioa

Karga puntu batean edo eremu txiki batean aplikatua dagoenean, puntu inguruan tentsio-kontzentrazioa dago. Tentsioa uniformeki banatua dago distantzia batetara dagoen sekzio batetik aurrera.

Luzapenak

Demagun honako barra hau dugula:

- Barra prismatikoa (A azalera konstantea).
- Material homoginoa (propietate berdinak puntu guztietan).
- Karga axiala GZn aplikatua.

Honako adierazpen honek barraren hasierako luzera, ε deformazio unitarioa eta δ deformazioa erlazionatzen ditu:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad \text{luzapen unitarioa}$$

Adibidea. Barra batek $L = 10$ m luzera dauka eta $\delta = 6$ mm-ko luzapena jasan du.

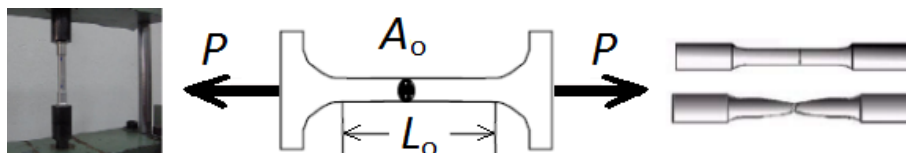
$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{6 \text{ mm}}{10 \text{ m}} = 6 \cdot 10^{-4} \quad \text{luzapen unitarioa adimentsionala da.}$$

Tentsio-egoera honi, *tentsio uniaxial* deritzo.

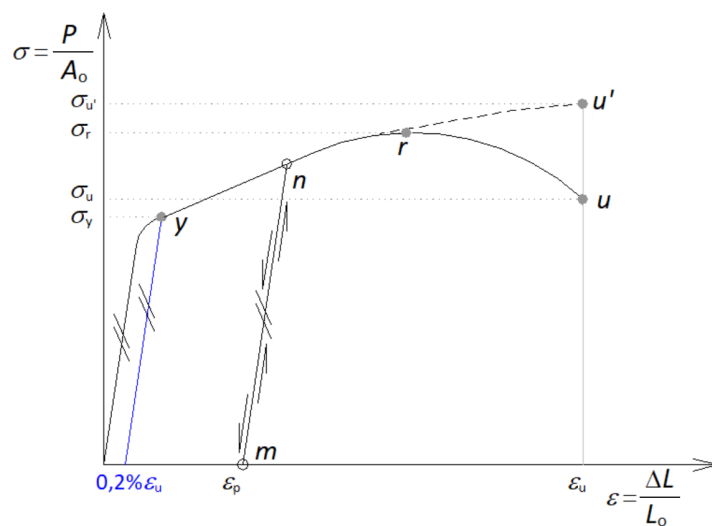
4.6. Tentsio-deformazio diagrama

Materialaren portaera mekanikoa karakterizatzeko, saiakuntza esperimentalak egiten dira. Trakzio-saiakuntzan, A_0 sekzioa duen lagina poliki-poliki abiadura konstantean luzarazten da. Indarrak eta deformazioak uneoro monitorizatzen dira, lagina apurtu arte. 4.13. irudiak trakzio-saiakuntzaren eta laginaren irudiak erakusten ditu.

$$\text{Karga } P(=N) \quad \text{Luzapena } \delta \quad \text{Tentsioa } \sigma = \frac{N}{A} \quad \text{Deformazioa } \varepsilon = \frac{\delta}{L}$$



4.13. irudia: Trakzio-saiakuntza, lagin normalizatua eta haustura motak: hauskorra eta harikorra



4.14. irudia: Trakzio-saiakuntzan lortutako tentsio-deformazio diagrama

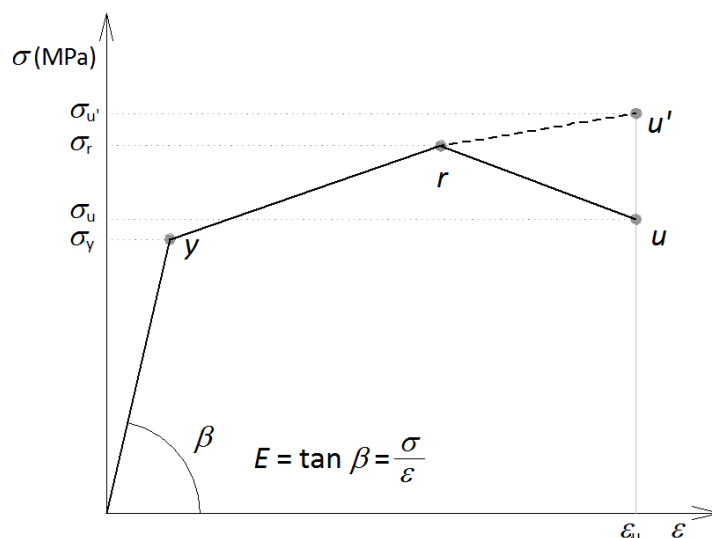
Trakzio-saiakuntzak uneko indarra eta deformazioa gordetzen ditu grafikoki aurkeztuz. Hala ere, balio horiek laginaren sekzioa duten elementu mekanikoentzat da soilik baliagarria. Saiakuntzako emaitzak edozein sekzio duen elementuetara estrapolatu ahal izateko, indar-deformazio (P - A) grafikoak tentsio-deformazio unitario (σ - δ) grafikoetara pasatzen da. 4.14. irudiak erakusten du altzairuetan lortutako ohiko tentsio-deformazio grafiko bat, puntu garrantzitsuenak nabarmenduz.

4.14. irudiko diagrama zatiz zati aztertuz:

- OY : *eremu elastikoa*; aplikatutako karga kenduz gero, lagina hasierako dimentsioetara bueltatzen da.
 - OP : *eremu elastiko-lineala* edo *proporzionala*; materialak portaera elastikoa eta lineala erakusten du, kargak deformazioekiko proporzionalak dira; Hooke-ren legea betetzen da: $E = \sigma/\varepsilon$ (E Young-en modulua edo elastikotasun-modulua). Karga kentzean, bai eremu elastikoan, baita plastikoan ere, lagina eremu elastiko-linealaren maldarekin leheneratuko da (PY eremua da salbuespena).
 P puntua: σ_p *proporzionaltasun-muga*; portaera elastiko-linealetik elastiko-ez-linealerako aldaketa zehazten du.
 - YP : *elastikotasuna* dago; karga kenduz gero, laginak hasierako dimentsioak berreskuratzen ditu, baina ez dago linealtasunik eta, berez, ezin dira ez Hooke-ren legea, ezta gainjarpen-printzipioa ere aplikatu. Y puntua σ_y *isurpen-* edo *elastikotasun-muga*; portaera elastikoaren eta plastikoaren arteko muga; muga lausoa da eta definitzeko, portaera elastiko-linealaren malda duen lerroa botatzen da deformazio osoaren % 0,2-an; lerro horrek kurba mozten duen puntuan dago y puntua.
Guretzat eta ingeniaritzan oro har, OY eremua da diseinu mekanikoan materialen lan-eremu erabilgarria eta segurua, deformazio iraunkorrik gabekoa. Nahiz eta horrela ez izan, Y isurpen-mugara arte materialaren portaera elastiko-linealtzat hartzen da.
- YU : *eremu-plastikoa*; eremu honetan karga kenduz gero (adibidez n puntuan), laginak malda elastiko-lineala jarraituz ($n \rightarrow m$) zertxobait berreskuratzen da era elastikoan, baina ε_m deformazio iraunkorrekarekin geratzen da. Honela, n puntuan deformazioak (eta oro har eremu plastiko osoan) bi zatitan banatzen dira ditzakegu: deformazio *elastikoa* eta deformazio *plastikoa* (edo iraunkorra).

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

- YA : *isurpen-gunea*; zati laua eremu plastikoan: tentsioaren igoera txiki batek deformazio handia sortzen du. Material denek ez dute eremu hau; ohikoa da altzairuetan eta titanio aleaziotan.
- AR : zati honetan, materialaren erresistentzia handitzen da (deformazioak eraginda)
 R puntua: σ_r *haustura-tentsioa*, hasierako sekzioarekiko (A_o) materialak jasan dezakeen tentsio maximoa da.



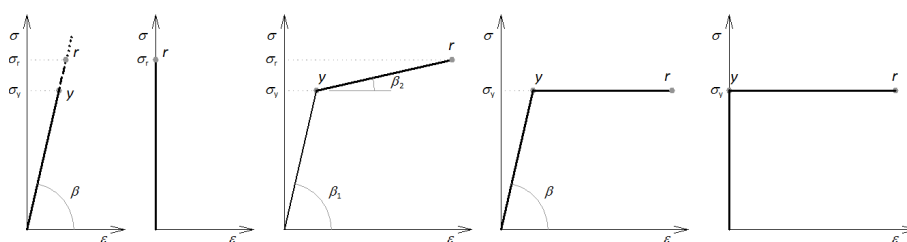
4.15. irudia: Tentsio-deformazio diagrama hurbildua puntu nagusiekin

- RU : errealitatean R haustura-puntuaren inguruan hertsadura edo estugune bat sortzen da, eta handik aurrera deformazioa estugune horretan bakarrik gertatzen da. Fenomeno horri *estrikzio* deritzen. Errealitatean hausturara iristeko tentsioa handitzen da, estrikzioaren eraginez zeharkako sekzioa txikiagoa baita. Hala ere, A_0 hasierako sekzioarekiko marrazten dira tentsio-deformazio diagramak.

Eremu plastikoa gainditu eta hausturara iritsi gabe saiakuntza geratzeak (4.14. irudian N puntua), deformazio iraunkorrak sortu eta materiala gogortu egiten du, erresistenteagoa da orain. Materiala kargatzean ON kurba jarraitzen du, eta deskargak, berriz, $m-n$ lerroa. Beraz, pieza berriz kargatzean M puntutik hasiko da, elastikotasun-modulua berdina da (malda), baina muga elastiko berria N puntuan egongo da, aurreko kurba utzitako lekutik jarraituz. Fenomeno honi *deformazioagatikoko gogortzea* esaten zaio eta, tratamendu termikoekin batera, materialen erresistentzia hobetzeko daukagun baliabidetako bat da.

Oro har, $\sigma = f(\varepsilon)$ erlazioa bilatzen da, baina zaila da datu errealekin lan egitea. Diagrama sinplifikatuak erabiltzea ohikoa da ingeniarietan. 4.15. irudiak puntu nagusiak lotuz lortutako tentsio-deformazio diagrama hurbildua da. 4.16. irudiak, berriz, diseinuan erabiltzen diren tentsio-deformazio diagrama sinplifikatuak aurkezten dira. Ohikoena, eta irakasgai honetan erabiliko dena, material elastiko-lineal perfektuarena da.

Materialak hausturaren aurretik deformatzeko duten gaitasunaren arabera honela sailkatzen dira: harikorrek eta hauskorrek. Harikortasuna, haustura bitartean deformazio handiak izateko gaitasuna da. Tentsio-deformazio diagramak jatorriarekiko simetrikoak dira. Material hauskorrek, berriz, haustura bitartean deformazio plastikorik ez dute izaten, edo horiek oso txikiak dira. Horien haustura-tentsioa txikiagoa izaten da trakzioan konpresioan baino. Material hauskorrek, tenperatura altuetan material harikorren jokabidea izan dezakete.



4.16. irudia: Tentsio-deformazio diagrama sinplifikatuak: material elastiko-lineal perfektua, material zurruna, bi eremu elastikodun materiala, material elastoplastikoa, eta, material plastiko perfektua

4.17. irudian, tentsio-deformazio diagrama sinplifikatuak aurkezten dira material harikorrenztat eta hauskorrenztat, trakzioan eta konpresioan. Oro har, material harikorrek trakzioan eta konpresioan antzeko portaera erakusten dute. Material hauskorrek, berriz, erresistentzia askoz ere handiagoa erakusten dute konpresioan trakzioan baino. Are gehiago, trakziorik jasateko gai ez direla jotzen da diseinuan (hormigoia, zeramika, beira...).

Altzairuaren propietate mekanikoak (burdina-karbono aleazioa da) karbono edukiarekiko nabarmen aldatzen dira, eta aplikazio bakoitzerako konposizio egoki bat dago. 4.18. irudiak karbono-edukiaren arabera altzairuen tentsio-deformazio diagramak aurkezten ditu. Kurbek osatutako azalera da laginak hautsi aurretik xurgatutako energia edo lana.

Segurtasun-koefizientea

Segurtasuna mantentzeko, lanean izango ditugun tentsioak plastikotasun edo haustura tentsioetatik urrun izan behar dira materialaren arabera. Diseinuan *segurtasun-koefiziente* bat ezartzen da, eta horrek finkatzen du piezan eman daitekeen σ_{onarg} tentsio onargarria. Material harikorretan isurpen-tentsioa da erreferentzia (ez dugu eremu plastikoan lan egitea nahi), eta hauskorretan, berriz, haustura-tentsioa. Bietan $n > 1$ da (4.19. ir.).

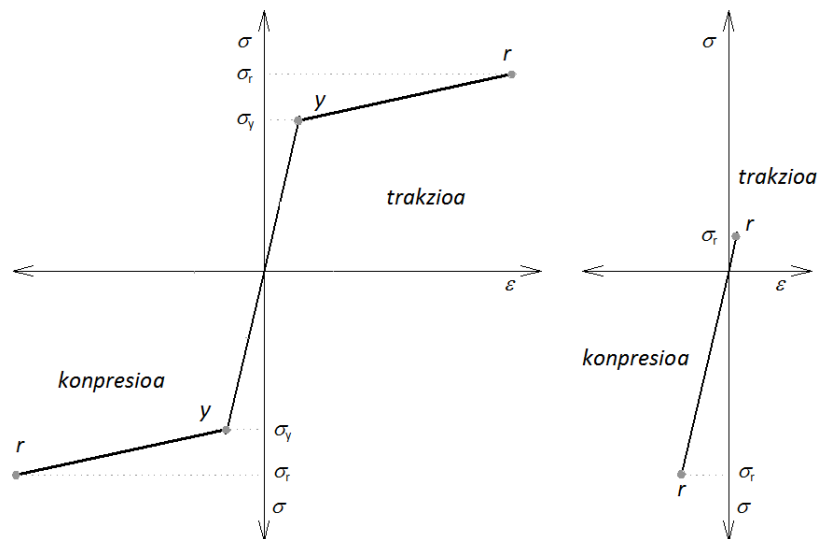
$$\text{Material harikorrak, } \sigma_{\text{onarg}} = \frac{\sigma_y}{n}$$

$$\text{Material hauskorrak, } \sigma_{\text{onarg}} = \frac{\sigma_r}{n}$$

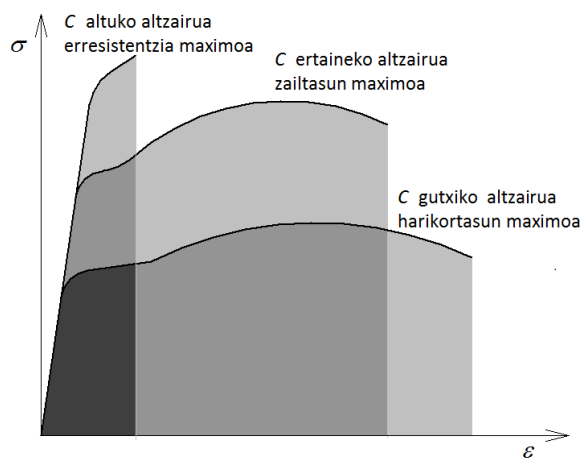
Kasu honetan segurtasun-koefizientea tentsio normalari aplikatu zaio, baina, era berean, tentsio ebakitzaleari edo kargari ere aplika dakieke.

Aukeraketa konplexua da; ingeniariak zehazten ditu irizpideak, bere esperientzia eta nazioarteko arauak kontuan hartuz. Segurtasun-koefizientearen aukeraketan kontuan hartu beharreko faktoreak:

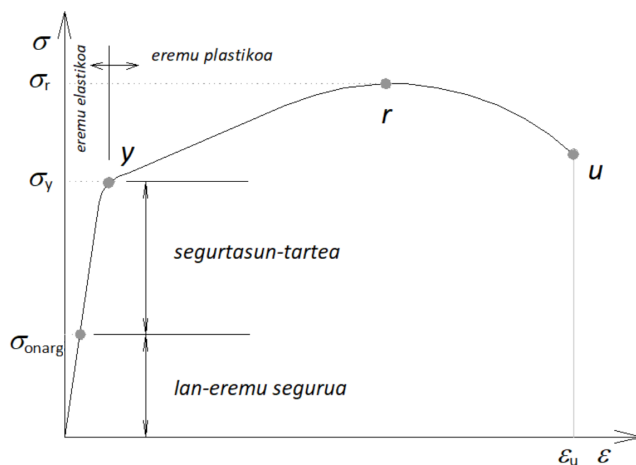
1. Nazioarteko arauak, estatuko legedia, enpresaren barne-arauak.
2. Egiturak gainkarga izateko probabilitatea: eraikuntzak (lurrikara), makinak, ibilgailuak, barkuak, hegazkinak...
3. Karga motak (estatikoak, dinamikoak, ziklikoak).



4.17. irudia: Tentsio-deformazio diagrama sinplifikatuak konpresioan: ezkerrean, material harikorra (metalak), eta eskuinean, material hauskorra (hormigoia, zeramikak)



4.18. irudia: Altzairuaren tentsio-deformazio diagrama C karbono edukiaren arabera



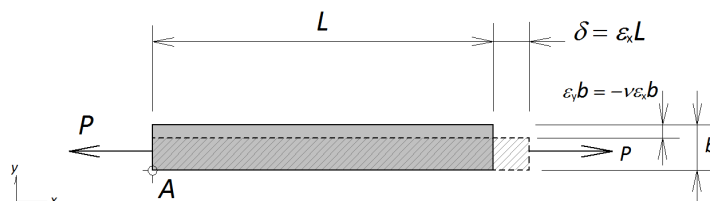
4.19. irudia: Tentsio normalarekiko segurtasun-koefizientearen n definizioa isurpen mugarekiko dagoen tartearen funtzioan ($n = \frac{\sigma_y}{\sigma_{onarg}}$)

4. Nekeagatik huts egiteko probabilitatea.
5. Hutsegiteak fabrikazioan eta muntaian (perdoiak, prozedurak...).
6. Kalitatearen jarraipena fabrikazioan.
7. Materialen propietateetan aldakuntzak.
8. Inguruaren eragina.
9. Arrazoi ekonomikoak (kostua, erregai kontsumoa...).
10. Diseinu-metodoen zehaztasuna; hartutako usteak.
11. Bat-bateko hutsegitea edo mailakatua.
12. Hutsegitearen ondorioak: istripu txikia edo katastrofea:
 - n txikiegia bada \rightarrow hutsegite arriskua $\uparrow\uparrow$ - egitura onartezina
 - n handiegia bada \rightarrow egitura garestia - ezegokia bere funtziorako

4.7. Elastikotasun lineala eta Hooke-ren legea

Plastikoek eta material konposatuek ezik, gainontzeko materialek portaera elastiko-lineala daukate tentsio-deformazio diagramaren lehenengo zatian. Hau da, piezak jasaten dituen tentsioak eta deformazioak proportzionalki aldatzen dira. Gainera, eremu elastikoan jasaten diren deformazioak txikiak eta berreskuragarriak dira: indarra desagertzean, piezak hasierako dimentsioak berreskuratzen ditu.

Horregatik, proportzionaltasun-muga honen azpian lan egiteko diseinatzen dira piezak. Guk erabiliko ditugun kalkulu-metodoek, materialak portaera elastiko-lineala duela joko dute.



4.20. irudia: A puntua erreferentziatzen hartuz, trakzioan lan egiten duen barra luze baten norabidean luzatzen eta zeharkakoan uzurtzen da

- Materiala, elastikoa denez, hasierako dimentsioak berreskuratzen ditu karga kentzean (4.19. irudian OY eremua).
- Tentsioaren eta deformazioaren arteko erlazioa lineala da:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \tan \beta = E \quad (\text{kte})$$

$$\text{orduan, } \sigma = E \cdot \varepsilon$$

E , σ eta ε arteko proportzionaltasun konstantea da, eta materialaren *elastikotasun-modulua* edo *Young-en modulua* esaten zaio. E -ren unitatea, tentsioarenaren berdina da (Pa , N/m^2).

Altzairuetan $E \approx 200 \text{ GPa}$; aluminioetan $E \approx 70 \text{ GPa}$.

$\sigma = E \cdot \varepsilon$ adierazpena *Hooke-ren legea* bezala ezagutzen da. Tentsio normala jasaten duten puntuetan era zuzenean aplikatu daitezke. Hooke-ren legeak bat egiten du trakzio eta konpresio sinpleko egoeren adierazpenarekin.

Poisson-en modulua

Trakzioan dagoen barra baten luzapen axialaren eta alboko kontrakzioaren arteko erlazioa adierazten du (4.20. ir.). Ondorioak baliagarriak dira tentsio normalaren pean dauden puntuetzat.

$$\text{Poissonen modulua} = \frac{-\text{alboko deformazioa (unitarioa)}}{\text{deformazio axiala (unitarioa)}} \quad \nu = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

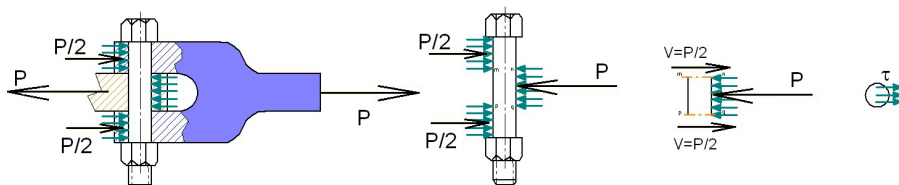
$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x; \quad \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

Adierazpen hau baliagarria da material homogeneoentzat (propietate berdina puntu guztietan) eta isotropoentzat (propietate berdina norabide guztietan).

$$\text{Metal askorentzat } \frac{1}{4} < \nu < \frac{1}{3} \quad (\text{altzairuak } \nu = 0,3)$$

Bolumen-aldaketa

Trakzioan dagoen barra baten bolumena handitu egiten da. Trakzioan lan egiten duen barra homogeneo eta isotropo bat aztertuz:



4.21. irudia: Irudiko buloi V indar ebakitzaila jasaten du, τ tentsio ebakitzaila sortzen duena

$$a_1 \longrightarrow a_1 + a_1\varepsilon = a_1(1 + \varepsilon)$$

$$b_1 \longrightarrow b_1 + b_1\varepsilon = b_1(1 + \varepsilon)$$

$$c_1 \longrightarrow c_1 + c_1\varepsilon = c_1(1 + \varepsilon)$$

$$V_1 = a_1 b_1 c_1 (1 + \varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)(1 - \nu\varepsilon)$$

$$\varepsilon^2 \text{ eta } \varepsilon^3 \text{ terminoak mespretsatuz, } V_1 = a_1 b_1 c_1 (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon)$$

Bolumen-aldaketa:

$$\Delta V = V_1 - V_o = a_1 b_1 c_1 (1 + \varepsilon - 2\nu\varepsilon) - a_1 b_1 c_1 = a_1 b_1 c_1 \varepsilon (1 - 2\nu)$$

Beraz, e bolumen-aldaketa unitarioa edo deformazio bolumentrikoa:

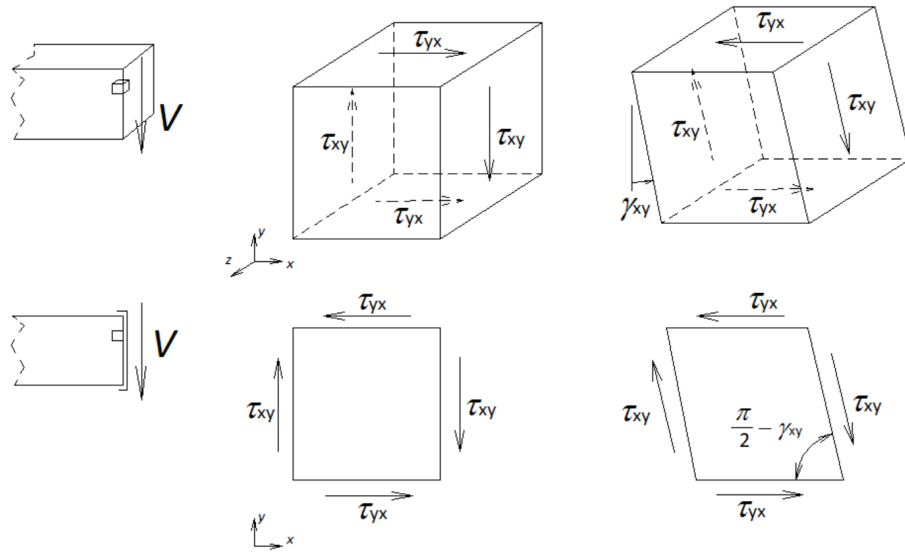
$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{a_1 b_1 c_1 \varepsilon (1 - 2\nu)}{a_1 b_1 c_1} = \varepsilon (1 - 2\nu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\nu)$$

$\nu = 0,5$ bada, $e = 0$ da. $\nu > 0,5$ bada, e negatiboa da, fisikoki ezinezkoa dena.

4.8. Tentsio ebakitzaila eta deformazio angeluarra

Tentsio ebakitzaila norabide tangenzialean agertzen da sekzioan, marruskaduraren antzera. Torloju, perno, buloi (4.21. ir.), errematxe, falka, soldadura eta lotura itsatsien kalkuluan agertzen da. Bihurdurak tentsio ebakitzaila hutseko egoera bat sortzen du. Makurdura bakunean, berriz, indar ebakitzailak sortutako tentsio ebakitzailak makurdura-momentuak sortutako tentsio normalekin konbinatzen dira.

Kontuz: tentsio ebakitzailak eta normalak EZIN dira batu!



4.22. irudia: Sekzioko puntu batean (bolumen infinitesimal kubikoa) V indar ebakitzaileak sortutako τ tentsio ebakitzailea, eta, horren ondorioz sortutako γ deformazio angeluarra. Goian, 3Dn (kuboa) eta, behean, 2Dn albotiko bista; biek tentsio-egoera berdina adierazten dute

Tentsio ebakitzaileen efektua

Adibidez, makurdura bakunean lan egiten duen habe prismatiko batean, V indar ebakitzaileak sekzioko puntu batean eragindako τ tentsio ebakitzailea aztertuko dugu. Puntua dx , dy eta dz dira, bere aldeak dimentsioak dituen paralelepipedo infinitesimala bada (4.22. ir.):

1. Indarren oreka baldintza betetzeko, kontrako aurpegi paraleloetako tentsio ebakitzaileek modulu berdina eta kontrako noranzkoa dute.

$$\Sigma F_H = 0 \quad \tau_{xy} dx dz = \tau'_{xy} dx dz \quad \longrightarrow \quad \tau_{xy} = \tau'_{xy}$$

$$\Sigma F_V = 0 \quad \tau_{yx} dx dz = \tau'_{yx} dx dz \quad \longrightarrow \quad \tau_{yx} = \tau'_{yx}$$

2. Aurpegi perpendikularretako tentsio ebakitzaileek modulu berdina dute, beren zentzuek aurkako biraketa sortzen dute:

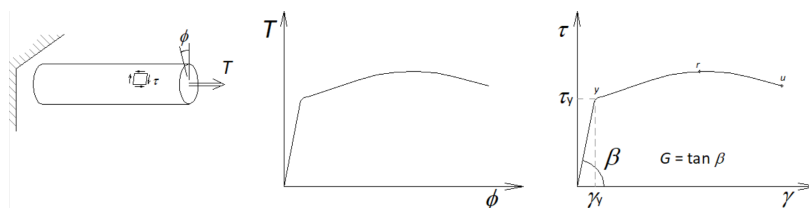
$$\Sigma M = 0 \quad \tau_{xy} dx dy dz = \tau_{yx} dx dy dz \quad \longrightarrow \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Deformazio angeluarra

Tentsio ebakitzaileak soilik jasaten dituen puntuak *ebakitzaile hutsean* lan egiten du. Tentsio ebakitzaile pean elementuak γ_{xy} *deformazio angeluarra* jasaten du (4.22. ir.).

Deformazio mota hau aztertuz, honako hau ondoriozta dezakegu:

- Tentsio ebakitzaileek ez dute elementua luzatzen edo mozten x , y eta z norabideetan; hau da, ertzen luzera ez da aldatzen.



4.23. irudia: Tentsio ebakitzaila - deformazio angeluar (τ - γ) diagrama bihurtura-saiakuntzan

Elementua: paralelepipedo karratua \rightarrow paralelepipedo zeharria

Aurpegia: karratua \rightarrow erronboa

- Aurpegien arteko angeluak tentsioak gurutzatzen diren erpinetan:
lehen $\frac{\pi}{2}$; \rightarrow ondoren $\frac{\pi}{2} - \gamma$ (aldaketa $\gamma \downarrow$)
- Aurpegien arteko angeluak tentsioak aldentzen diren erpinetan:
lehen $\frac{\pi}{2}$; \rightarrow ondoren $\frac{\pi}{2} + \gamma$ (aldaketa $\gamma \uparrow$)

γ angeluak adierazten du elementuak jasaten duen distortsio-maila edo forma-aldaketa. *Deformazio angeluarra* deritzo eta radianetan ematen da.

Ebakidurarekiko propietateen neurketa esperimentalak

Bihurdurak ebakidura hutseko egoera bat sortzen du. Lagin zilindrikoetan bihurtura-saiakuntzen bidez neurtzen dira materialen propietateak ebakiduran (4.23. ir.). Trakzio-saiakuntzen antzeko diagramak lortzen dira (balio ezberdinekin, noski). Eremu elastiko-plastikoak eta karga-deskarga prozesuak antzekoak dira. Bihurduran, tentsio ebakitzailaren eta deformazio angeluarraren arteko erlazioa ere proportzionala da eremu elastiko-linealean. Horrela, Hooke-ren legea ebakiduran:

$$\tan \phi = \frac{\tau}{\gamma} = G \quad \tau = G \cdot \gamma \quad G, \text{ elastikotasun} - \text{modulua ebakiduran}$$

Egiturretan erabiltzen diren altzairuek duten τ_y , 0,5 - 0,6 aldiz σ_y da.

Hiru konstante elastikoen arteko erlazioa

E , G eta ν konstante elastikoak ez dira materialarekiko propietate independenteak. E , G eta ν arteko erlazioa honako hau da:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

ν -ren balioa 0 eta 0,5 artean izan behar denez,

$$\nu = 0 \text{ denean,} \quad G = \frac{E}{2(1 + 0)} = \frac{E}{2}$$

$$\nu = 0,5 \text{ denean, } G = \frac{E}{2(1+1/2)} = \frac{E}{2 \cdot 3/2} = \frac{E}{3}$$

$$\text{beraz, } \frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

5. gaia

Karga axialak. Trakzioa eta konpresioa

5.1. Sarrera

Barra prismatikoak dira luzeran ardatz zuzena duten egitura-elementuak. Barrek indar axialak soilik jasaten dituzte, beraz, soilik trakzioan edo konpresioan egiten dute lan.

Mota honetako elementuen adibideak:

- eraikuntzen zutabeak,
- egitura giltzatuen barrak,
- motorren bielak,
- zubien tiranteak edo kableak.

Hainbat profil erabil daitezke sekzioetan:

- barne-beteak ●
- horma mehe barne-hutsak \square , \diamond , \circ , \triangle
- irekiak \sqcup , \times , \perp

Diseinuan eta diseinuaren berrikuspenean, diseinua balioztatzean tentsioak, deformazioak eta desplazamenduak aztertzen dira.

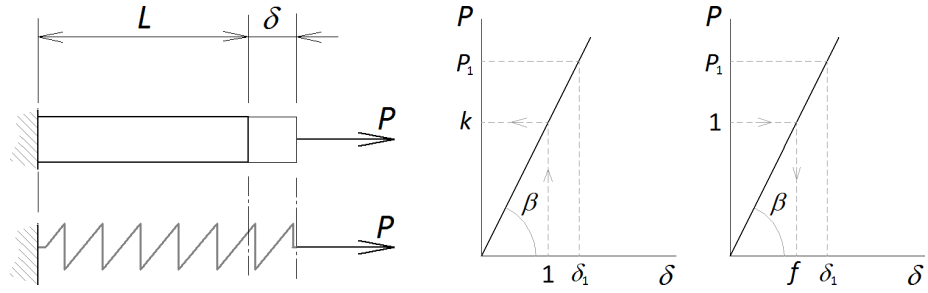
Analisisa, diseinua eta optimizazioa

Elementu mekaniko baten *analisi*an:

- dimentsioak eta materiala ezagunak dira, eta,
- tentsioak eta deformazioak ezagutu nahi dira.

Egitura baten *diseinua* egituraren konfigurazio geometrikoa zehaztean datza, ezarri zaion funtzioa eta eskakizunak betetzeko gai izan dadin. Elementuen portaera aztertzeke, karga ezagunak aplikatzen dira.

Optimizazioa da eskakizunak betetzeko gai den egiturarik onena diseinatzea. Adibidez, pisu minimoa duen egitura edo kostu minimoa duena.



5.1. irudia: Malgukiren analogia; k zurruntasunaren eta f malgutusunaren definizioak

5.2. Indar axialak eragindako luzapena

Demagun muturreko sekzioen GZetan P indarrak aplikatuta dituen barra bat dugula (4.10. ir.). Adibidean, barne-indarrek kanpo-kargarekin bat egiten dute ($N = P$). Muturretatik distantzia batera dauden sekzioen tentsioak uniformeki banatuak egongo dira (Saint Venanten printzipioa).

Materiala homogeneotzat hartuz, A zeharkako sekzioaren azalera bada eta δ barrak jasandako luzapena, orduan:

$$\text{Tentsio normala } \sigma = \frac{N}{A} \quad \text{Hookeren legea } \sigma = E\varepsilon$$

$$\text{Deformazio unitarioa, } \varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\sigma}{E}$$

$$\text{Orduan luzapena, } \delta = \frac{\sigma L}{E} = \frac{PL}{EA}$$

Materiala elastiko-lineala bada (Hooke-ren legea betetzen du),

- δ zuzenki proportzionala da P -rekiko eta L -rekiko.
- δ alderantziz proportzionala da A -rekiko eta E -rekiko.

AE , barraren *zurruntasun axiala* da.

Barra-malguki analogia

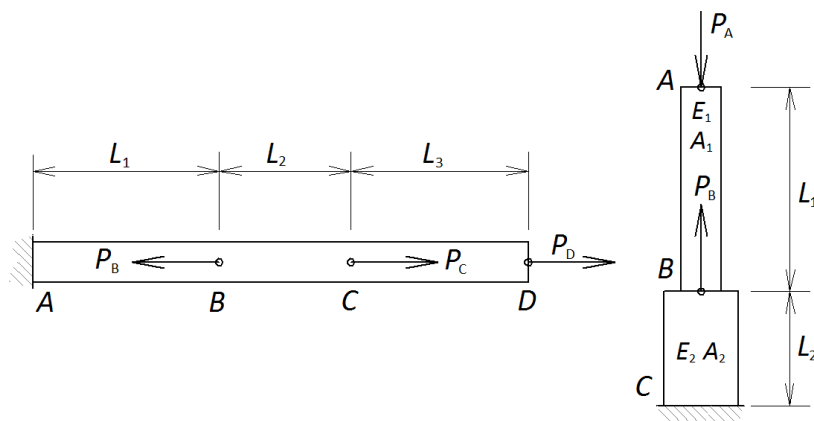
Barraren portaera mekanikoa malgukiaren analogiarekin deskriba daiteke (5.1. ir.).

Malgukiaren konstante elastikoa edo *zurruntasuna*, K , luzapena unitatea izateko beharrezko indarra da.

$$K = \frac{P}{\delta} = \tan \beta$$

Malgukiaren *malgutatsuna*, f , konstante elastikoaren alderantzizkoa da, hau da, karga unitate batek sortzen duen deformazioa.

$$f = \frac{\delta}{P} = \frac{1}{K}$$



5.2. irudia: Adibideak: (a) hainbat indar jasaten dituen barra; (b) bi sekzio dituen barra

Axialki kargatua dagoen barra baten K zurruntasuna, malguki baten konstantearekin alderatuz, luzapen unitatea deformatzeko beharrezko indarra da.

$$K = \frac{P}{\delta} \quad \delta = \frac{PL}{AE} \quad \rightarrow \quad K = \frac{P}{\delta} = \frac{AE}{L}$$

Malgutasuna f , karga unitarioak sortutako luzapena da.

$$f = \frac{\delta}{P} = \frac{L}{AE}$$

Malgutasuna zurruntasunaren alderantzizkoa da. Biek dute garrantzia egituren analisisian.

KONTUZ! L handi batek K txikitu eta f handitzen du.

Hainbat karga eta sekzio dituzten barrak

Jo dezagun orain barra hainbat indarrekin kargatu dugula, edo/eta sekzio-material ezberdinak ditugula. 5.2. irudiak bi adibide erakusten ditu.

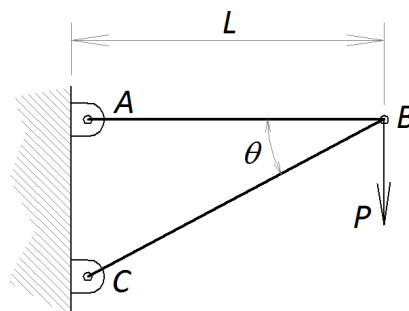
Luzapen osoa lortzeko bi aukera daude:

- barra-zati bakoitzaren ekarpena batzen da; edo,

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i L_i}{A_i E_i}$$

- jatorri batekiko, barra karga bakoitzarekin indibidualki sortutako luzapenak batzen dira.

Lehenengo kasuan beharrezkoa da aurrez barraren indar normalen (N) diagrama marraztea.



5.3. irudia: Desplazamendu-diagramaren adibidea: kalkulatu B puntuaren desplazamendua P kargaren ondorioz

5.3. Desplazamendu-diagramak

Egituretako elementuak barne-indarren ondorioz deformatu egiten dira. Barra bakoitzaren deformazioak loturen bidez alboko elementuak desplazazten ditu. Ondorioz, kargak jasaten dituzten egiturek desplazamenduak jasaten dituzte. Ohikoa da egitura baten diseinuaren eskakizunetan puntu baten edo batzuen desplazamendu maximoak muga izatea, nahiz eta isurpen-mugatik urrun egon (erresistentziaren ikuspuntua). *Desplazamendu-diagramak* edo *Williot-en diagramak* egituretako puntuen desplazamenduak zehazteko metodo grafikoa da.

Desplazamendu-diagramak marrazteko prozedura azaltzeko, 5.3. irudiko egitura adibidetzat hartuko dugu. Bi barra hauek muturretan giltzatuta daude. Irudiak bi barrek osatutako egitura erakusten du: AC eta BC barrak. P kargaren ondorioz, C puntuaren desplazamendua ezagutu nahi da. Datuak: L , θ , A_{AB} , A_{BC} , E eta P .

Desplazamendu-diagramak marrazteko honako pauso hauei jarraitzen zaie:

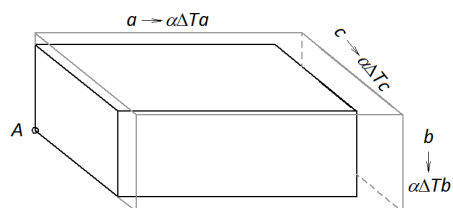
- Lehendabizi, barrek jasaten dituzten kargak kalkulatu dira;
- ondoren, barra bakoitzaren deformazioak, eta,
- azkenik, deformazioak eta biraketak grafikoki marrazten dira, puntuen desplazamenduak lortuz. Barren biraketak barrarekiko perpendikularrak direla jotzen da.

5.4. Temperatura eta aurre-deformazioen eragina

Temperatura-aldaketak dimentsioetan aldaketak dakartza material guztietan. Material homogeen eta isotropo batean, temperatura-gehikuntza uniforme eta oso batek dimentsio handitzea dakar norabide guztietan. Adibidez, 5.4. irudiko prisma errektangeluarra A puntua erreferentziatzat hartuz.

Materialak ε_t deformazio termiko uniforme jasaten du, neurri adimensional da. α dilatazio-koefizientea bada ($1/K$, $1/^\circ C$) eta ΔT temperatura-aldaketa, orduan:

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta T$$



5.4. irudia: Dimentsio aldaketak solido erretanguluar batean temperatura iguera baten ondorioz; A puntua erreferentziatzat hartuz, solidoa ΔT temperatura aldaketarekiko norabide guztietan proportzionalki dilatzen da

(+) \rightarrow dilatazioa

(-) \rightarrow kontrakzioa

Deformazio termikoak itzulgarriak dira.

Material arruntetan ΔT handitzean ε_t ere handitzen da. Kontuz urarekin:

- $T > 4\text{ }^\circ\text{C}$ denean dilatatu egiten da,
- $T < 4\text{ }^\circ\text{C}$ denean ere dilatatu egiten da,
- $T = 4\text{ }^\circ\text{C}$ denean, maximoa da bere dentsitatea.

Blokearen aldaketa dimentsionala, blokearen dimentsio originalak ε_t deformazio termikoarekin biderkatuz lortzen dira. Adibidez:

$$L \rightarrow L + \delta_t \quad \text{non} \quad \delta_t = \varepsilon_t L = \alpha \Delta T L$$

Egitura isostatikoetan, elementuak aske handitu edo txikitu daitezke, ez da barne-tentsiorik sortzen. Egitura hiperestatikoetan, berriz, ezin dira libreki mugitu, barne-tentsioak sortuz.

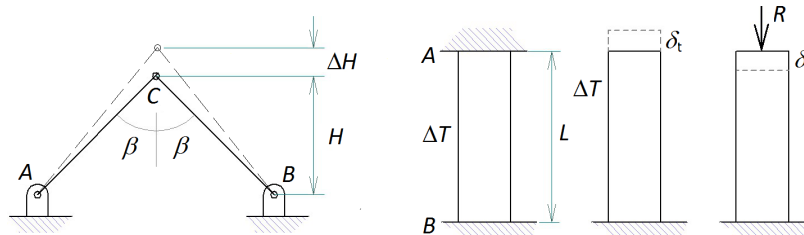
Egitura isostatikoaren adibidea: temperatura-gehikuntzak deformazioak eragiten ditu, baina elementuak aske luza daitezke (5.5. ir., ezkerrekoa).

- C korapiloa mugituko da.
- Ez da tentsiorik sortzen barren artean.
- Ez da erreakzio gehigarririk sortzen euskarrietan.

Egitura hiperestatikoaren adibidea: AB barra bi pareten artean trabatuta dago (5.5. ir., eskuinekoa):

- ΔT temperatura-aldaketak barra luzarazten du.
- Paretek desplazamendua eragotzen dutenez, δ berdina sortzen duen R konpresio-karga agertzen da.
- Gainkarga termikoak diseinuan kontuan izan behar dira.

$$\delta_A = 0 = \delta_t - \delta_R \quad 0 = \alpha \Delta T L - \frac{RL}{AE}$$



5.5. irudia: Temperatura aldaketaren eragina egituretan: ezkerrean, egitura isostatikoa; eskuinaldean, egitura hiperestatikoa

Aldez aurreko deformazioak

Jo dezagun egitura batean barra bat nahi gabe L luzera teorikoa ez den beste luzera batekin muntatzen dela.

- Egitura isostatiko batean, bere hasierako konfiguraziotik pixka bat alden-
du egingo da, baina ez da tentsio gehigarrik sortuko.
- Egitura hiperestatiko batean, berriz, barne-deformazioak eta tentsioak
sortzen dira, mugimendua eragotzita baitu.

Batzuetan, nahita sortzen dira aurretiko deformazioak, egiturak kargapean tentsio-baldintza hobean lan egin dezan. Adibidez, hormigoi armatuzko habeak, gas-turbinen euste-eraztunak...

5.5. Tentsio-kontzentrazioa

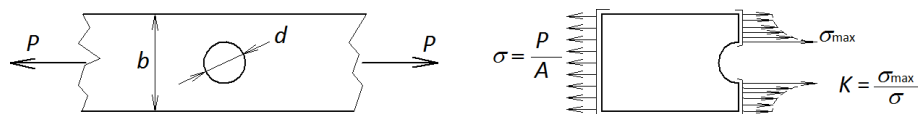
Axialki kargatuak dauden barren azterketa egitean, $\sigma = N/A$ formula aplikatu dugu, tentsioa sekzioan uniformeki banatua dagoela suposatuz.

Baina, errealitatean, barrek zuloak, erretenak, hariak, matadera, koska, sekzio- edo/eta geometria-aldaketak eduki ditzakete. Ez-jarraitutasun horiek tentsio-kontzentrazioak sortzen dituzte eremu oso txikietan.

Kargak aplikatzen diren puntuetan ere tentsio-kontzentrazioak sortzen dira. Karga puntual bat arraroa da uniformeki banatua ez egotea luzera edo gainazal batean. Normalki eremu txiki batean banatzen da eta tentsio-kontzentrazioak agertzen dira, baina ez puntuala hartuz sortuko lirakeen adinakoak.

Tentsio-kontzentrazio horiek metodo experimental edo zenbaki-analisiaren (elementu finituak, diferentzia finituak...) bidez zehaztu daitezke. Ingeniari-tzako hainbat eskuliburu teknikok biltzen dituzte tentsio-kontzentrazioen gehi-kuntza faktoreak tauletan, kasu ezberdinetarako.

Tentsio-kontzentrazioen kokapena ezaguna denez, formula estandarrek erabiltzen jarrai dezakegu eremu horietatik urrutin dauden sekzioetan (Sant Venant-en printzipioa). Elementu osoen desplazamendu-, deformazio- eta energia-azterketak baliagarriak dira nahiz eta tentsio-kontzentrazioak kontuan ez izan, horiek eragin txikia baitute multzoaren portaeran.



5.6. irudia: Tentsio-kontzentrazio faktorearen adibidea: zuloan zuloan trakzioan

Tentsio-kontzentrazio faktoreak

Kasu partikular bat aztertuz, zuloan barra baten, zuloaren parean sortzen den tentsio maximoaren, eta batez besteko tentsioaren arteko erlazioa definitzen du *tentsio-kontzentrazio faktoreak* (5.6. ir.).

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

K -ren balioa tauletatik edo elementu finitu bidez aztertuz lortzen da.

Tentsio-kontzentrazioa gutxitzeko, badaude diseinua hobetzeko soluzioak: ez-jarraitutasunak biribildu, zuloak ekidin edo handitu...

6. gaia

Bihurdura

6.1. Sarrera

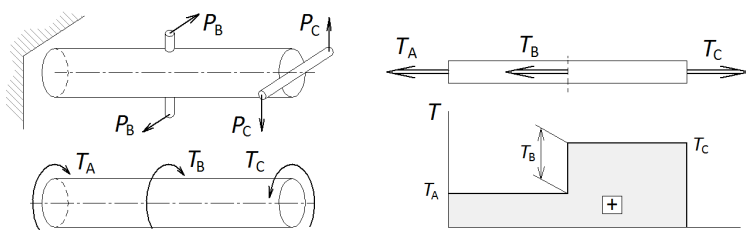
Bihurdura momentua luzeratako ardatzean aplikatuta duten barretan gertatzen da. Efektua biraketa da, bai estatikan, baita dinamikan ere, eta transmisio ardatzetan potentzia-transferentzian erruz erabiltzen da. Gai honetan, bihurturak barra zirkularretan sortzen dituen tentsioak eta deformazioak aztertuko dira. Adibideak: makinaren transmisio-ardatzak, egitura aeroespazialean erabiltzen diren hodiak, dorre eolikoak...

Bihurdura-momentuari (*parea* ere deitua), barraren luzeratako ardatzean aplikatzen denez, M_x deritzo orain arteko nomenklaturaren arabera. Hala ere, testuliburuetan T (*torsión*, *torque*) deitu ohi zaionez, hemen ere T deituko diogu (ez nahastu kableetako T tentsioarekin!).

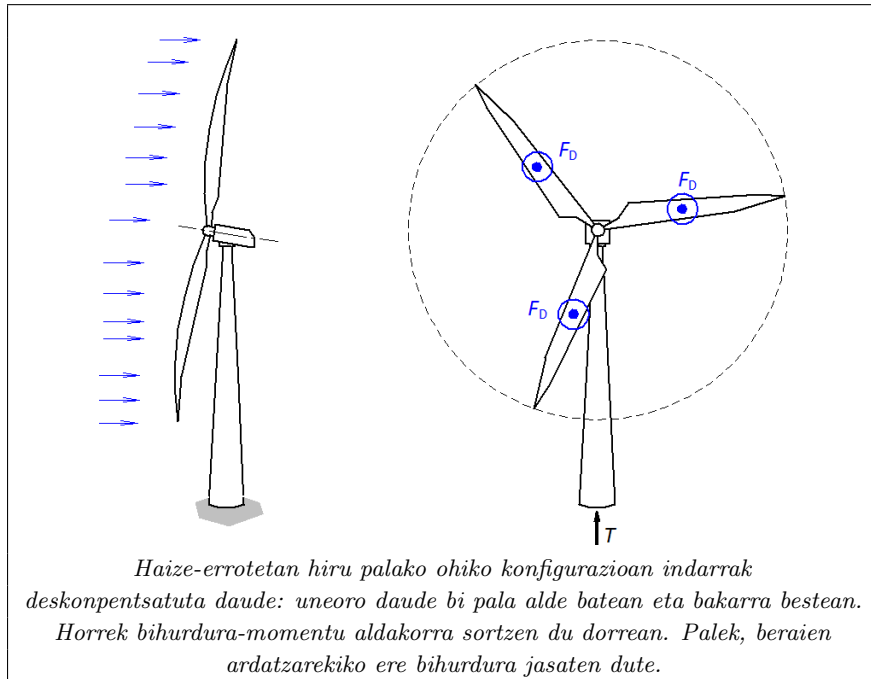
6.1. irudia T_B eta T_C bihurtura-momentuak jasaten dituen ABC ardatza aurkezten du adibide gisa. A muturreko landapena askatzean T_A bihurtura-momentua da erreakzio bakarra. Behin solido askearen diagrama marraztuta, T bihurtura-momentuen diagrama marraz daiteke, ardatzaren zatika aztertuz.

6.2. Bihurdura ardatz zirkularretan

T bihurtura-momentuak τ tentsio ebakitzailak eta γ deformazio angeluarrak sortzen ditu. Helburua da kausaren eta efektuaren arteko erlazioa bilatzea.



6.1. irudia: B eta C puntuetako indar pareek ABC ardatzean bihurtura sortzen dute; eskuinean, ardatzaren solidoa askearen diagrama eta T diagrama



Kausa $T (= M_x)$ \longleftrightarrow Efektua τ, γ

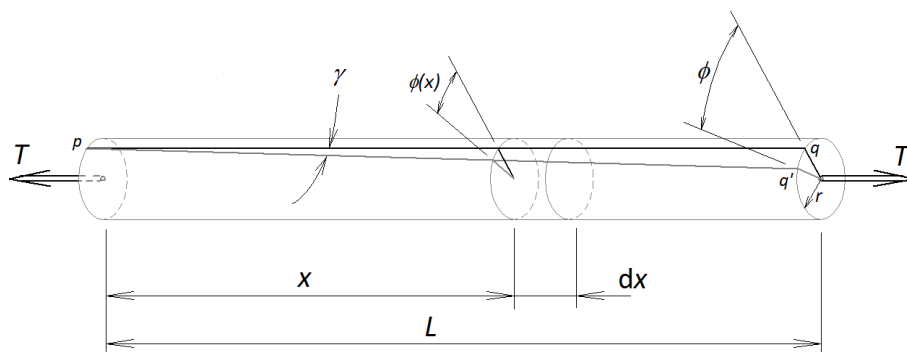
Momentua ardatzaren norabidean aplikatua duen barra zirkularrak *bihurdura hutsean* lan egiten du (6.2. ir.). Simetria kontuan hartuta, honako hau froga daiteke:

- Barra zirkularraren zeharkako sekzioek luzeratako ardatzaren inguruan biratzen dute, gorputz zurrinak balira bezala.
- Erradioak zuzen mantentzen dira; zeharkako sekzioa ere lau eta zirkular mantentzen da.
- L barraren luzera eta R erradioa ez dira aldatzen; bihurtura-angelua bai.

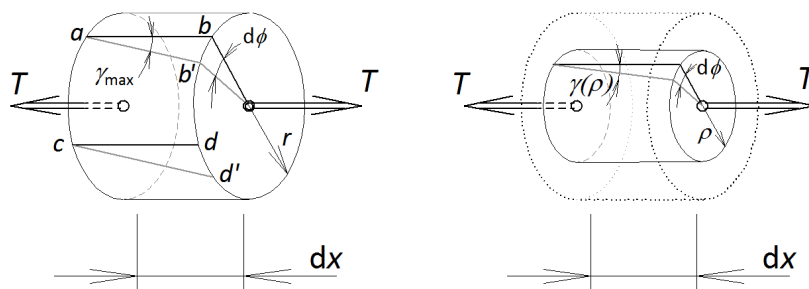
Bihurdurak barraren biraketa sortzen du luzetarako ardatzean, barraren bi muturren artean (6.2. ir.).

skuineko muturrak ϕ angelua biratzen du ezkerreko muturrarekiko. $p-q$ zuzenak edo zuntzak γ_{\max} angelua «biratzen» du helize eran $p-q'$ posizioa hartuz (6.2. ir.). 6.3. irudiak 6.2. irudiko ardatzaren x posizioan dx luzera duen ardatz zatia erakusten du: gainazal zilindrikoko zuntzek γ angelua duen helizea hartzen dute ($ab \rightarrow ab', cd \rightarrow cd'$) eta zeharkako sekzioak $d\phi$ biraketa-angelua biratzen du ($d\phi = \widehat{bOb'} = \widehat{cOc'}$). γ maximoa gainazalean (r erradioa) agertzen da; $d\phi$ angelua, berriz, luzerarekiko da menpekoa, ez erradioarekiko.

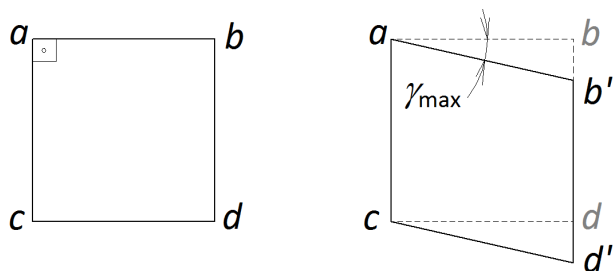
6.4. irudiak 6.3. irudiko $abcd$ karratuaren deformazioa aztertzen du. Biraketa honetan elementuaren aldeek ez dute luzera-aldaketarik jasaten, baina ertzetako angeluek ez dituzte 90° neurtzen. Elementua bihurtura hutsean dagoenez:



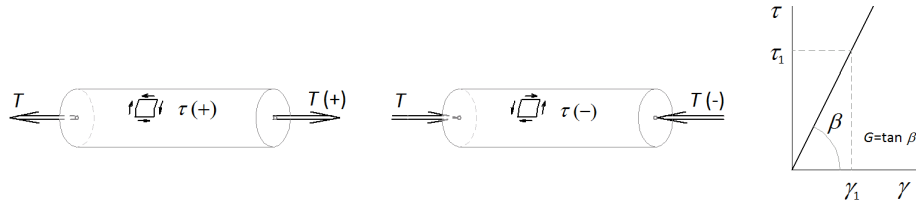
6.2. irudia: T bihurtura-momentuak (edo pareak) luzeratako gainazaleko zuntzetan γ angelua duen helizea p - q' sortzen du eta sekzioak $\phi(x)$ biraketa-angeluaz biratzen ditu x posizioaren funtzioan



6.3. irudia: dx luzeran, T pareak sortutako γ deformazio angeluarra (= helizearen angelua) eta $d\phi$ biraketa-angelua: ezkerrean ardatzaren gainazalean (r erradioa) eta eskuinean barnean (ρ erradioa)



6.4. irudia: 6.3. irudian, gainazaleko $abcd$ karratuaren deformazioa γ -ren ondorioz



6.5. irudia: T bihurtura-momentu positiboak eta negatiboak sortutako τ tentsio ebakitzzaileak; τ - γ diagrama: tentsio ebakitzzailearen eta deformazio angeluarren arteko erlazioa material elastiko-linealetan

$$\gamma_{\max} = \frac{bb'}{ab} \quad \text{baina} \quad bb' = rd\phi \quad \text{eta} \quad ab = dx$$

$$\text{orduan,} \quad \gamma_{\max} = \frac{rd\phi}{dx}$$

θ bihurtura-angeluaren aldaketa ratiotzat definituz:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad \gamma_{\max} = r\theta$$

Bihurdura hutseko egoeran, $\theta = \frac{d\phi}{dx}$ konstantea da barra osoan, zeharkako sekzioak pare (bihurdura-momentu) berdina jasaten baitu luzera osoan zehar.

$$\text{Orduan, } \theta = \frac{\phi_{\max}}{L} \quad \longrightarrow \quad \gamma_{\max} = r\theta = r \frac{\phi}{L} \quad \text{bihurdura hutsa den kasuan.}$$

Aurreko bi adierazpenak irizpide geometrikoak kontuan hartuz garatu direnez, erabilgarriak dira edozein materialetako barra zilindrikoentzat eremu elastikoan, inelastikoan, linealean edo ez-linealean lan egin.

Tentsio ebakitzzaileak 6.5. irudiko noranzkoak ditu.

Material elastiko-lineala bada, tentsio ebakitzzaileak eta deformazio angeluarren erlazioak daude (Hooke-ren legean antzera):

$$\tau_{\max} = G \cdot \gamma_{\max} = G \cdot r \cdot \theta$$

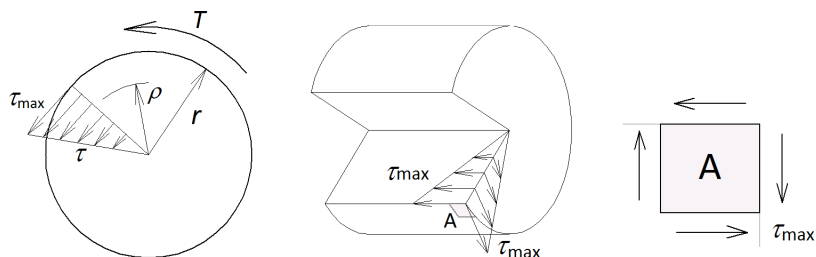
G elastikotasun-modulua ebakitzzailean, τ_{\max} gainazaleko puntu bateko tentsio ebakitzzailea, eta θ gainazalak jasaten duen bihurtura-angelua luzera-unitateko dira hurrenez hurren.

Tentsioak eta deformazioak barraren barnean

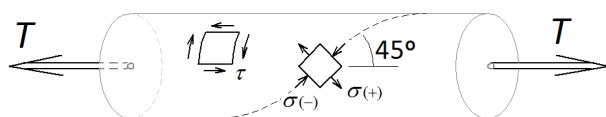
Bihurduran sortzen diren tentsioak, horien banaketa sekzioan eta deformazioa ezagutu nahi dira. Azter dezagun 6.2. irudian qq' arkuaren luzera:

$$qq' \text{ arkua} = \rho\phi_{\max} \quad \gamma = \rho \frac{\phi_{\max}}{L} = \rho\theta \quad qq' \text{ arkua} = \gamma L$$

$$\tau = G\gamma \quad \longrightarrow \quad \tau = G\rho\theta$$



6.6. irudia: Tentsio ebakitzailen banaketa sekzioan eta A gainazaleko puntuan (*karratu infinitesimala*)



6.7. irudia: Bihurdurak sortzen duen tentsio ebakitzaille hutseko egoera; 45° -ko orientazioan trakzio-kompresio tentsio normaleko egoera biaxiala bihurtzen da

G eta θ konstanteak badira, τ tentsio ebakitzaila eta γ deformazio anguluarra ρ erradioarekiko aldatzen dira: $\rho = 0$ denean, $\tau = 0$ eta $\rho = r$ denean, balio maximoa hartzen du: $\tau = \tau_{\max}$ (6.6. ir.).

	ρ	γ	τ
Ardatzean	0	0	0
Tartean	ρ	$\theta\rho$	$G\theta\rho$
Gainazalean	r	θr	$G\theta r$

Zeharkako planoetan dauden tentsio ebakitzailak agertzen dira luzetarako planoetan ere (6.6. ir.).

Material bat ebakiduran hauskorragoa bada luzetarako planoetan zeharkakoetan baino (adibidez egurra), lehen pitzadurak gainazalean agertuko dira luzeratako norabidean.

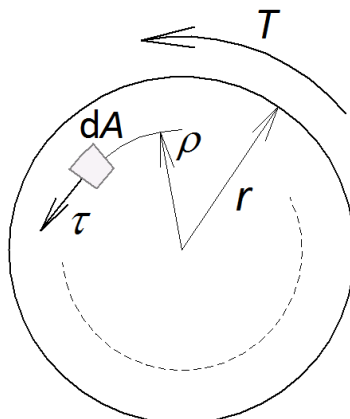
Gainazaleko bihurtura hutsaren egoera, elementua 45° biratuz gero, trakzio-eta konpresio-egoera bati dagokio (6.7. ir.). Bihurduran lan egiten duen barra baten materiala, trakzioan ebakiduran baino ahulagoa bada, haustura trakzioa-gatik gertatuko da ardatzarekiko 45° ra dagoen helizean.

Momentuaren eta bihurtura-anguluaren arteko erlazioa

Estatikan, zeharkako sekzioetan agertzen diren tentsio ebakitzailen erresultanteak, aplikatutako T bihurtura-momentuaren balio berdina izan behar du.

6.8. irudiak, ρ erradioan dagoen dA azaleran τ tentsio ebakitzaila erakusten du. Tentsioa r erradioko sekzio zirkularrean integratuz, tentsioen erresultantea T pareta da.

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta$$



6.8. irudia: τ tentsio ebakitzaila ρ erradiora dagoen dA azalera infinitesimalan

$$dF = \tau dA = G\rho\theta dA$$

$$dM = \rho dF = G\rho^2\theta dA$$

$$T(= M) = \int_A G\rho^2\theta dA = G\theta \int_A \rho^2 dA = G\theta I_P$$

I_P azaleraren zentroaren distantzia karratura integrala da. Hau da, 1.4.2. atalean ikusitako *inertzia-momentu polarra* da, sekzioaren zentroarekiko inertzia-momentua.

$$I_P = \int_0^r 2\pi\rho d\rho \cdot \rho^2 = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} = 0,1d^4$$

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \quad \text{bihurdura} - \text{angelua luzera unitateko.}$$

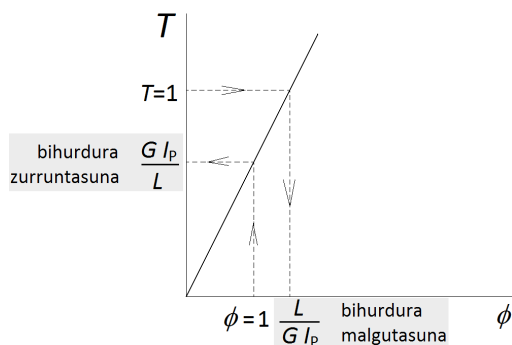
$$\text{Bihurdura hutsean,} \quad \theta = \frac{\phi_{\max}}{L} \longrightarrow \phi_{\max} = \theta L$$

$$\text{Orduan,} \quad \phi_{\max} = \frac{TL}{GI_P}$$

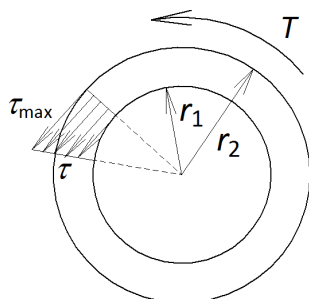
GI_P barraren *bihurdura-zurruntasuna* da eta $\frac{GI_P}{L}$ *bihurdura-zurruntasun unitarioa*.

Azken honek, sekzioa angelu-unitate bat biratzeko beharrezkoa den bihurdu-ra-momentua adierazten du. Honako formula honetan $\phi_{\max} = 1$ eginez lortzen da.

$$T = \frac{GI_P}{L} \phi_{\max} \quad T = 1 \text{ bada,} \quad \phi_{\max} = \frac{1L}{GI_P}$$



6.9. irudia: Bihurdura-momentu - biraketa-angelu $T-\phi$ diagrama: ardatz baten bihurtura-zurruntasunaren eta -malgutasunaren definizioak



6.10. irudia: Tentsio ebakitzailen banaketa ardatz barne-huts baten sekzioan

$\frac{L}{GI_P}$ terminoari *bihurdura-malgutasuna* esango diogu. Momentu unitario baten sortutako biraketa-angelua da (6.9. ir.).

Bihurdura-saiakuntzan behatutako ϕ_{\max} angelua aurreko ekuazioetan ordezkatzuz, materialaren G elastikotasun-modulua ebakiduran lortzen da. Probeta zirkular bati egindako bihurtura-frogaren bidez, ϕ_{\max} biraketa-angelua neurtzen da bihurtura-momentu jakin batentzat. Ondoren, aurreko ekuazioa aplikatuz, G -ren balioa zehaztu daiteke.

Tentsio ebakitzaille maximoa τ_{\max} Hooke-ren legea aplikatuz lortzen da:

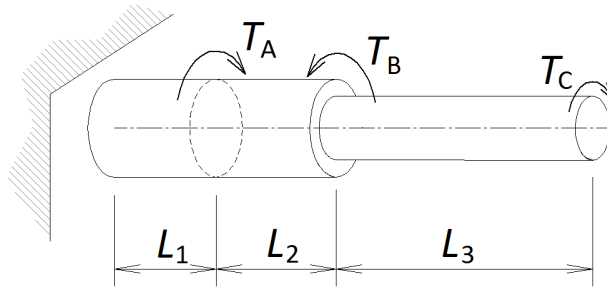
$$\tau_{\max} = Gr\theta \quad \text{eta} \quad \theta = \frac{T}{GI_P} \quad \longrightarrow \quad \tau_{\max} = Gr \frac{T}{GI_P} = \frac{Tr}{I_P}$$

Unitateak: T (edo M_x) \longrightarrow Nm, Nmm, **kg cm**; eta beraz, $\tau \longrightarrow$ Pa, MPa, **kg/cm²**

Barra zirkular hutsak (hodiak)

Hodiak barra barne-beteak baino eraginkorragoak dira bihurturan lan egiteko (6.10. ir.).

- Tentsio ebakitzaille maximoak gainazalean ematen dira, τ_{\max} .



6.11. irudia: Adibidea: kalkulatu hainbat bihurtura-momentu eta sekzio dituen ardatz batek jasandako biraketa-angelua luzeran zehar

- Ardatz barne-bete batean, barneko materialak τ tentsio ebakitzaille txikiak edo zero jasaten ditu; hau da, barnealdeak ia ez du lanik egiten.
- Pisua eta materiala aurreztea garrantzitsua bada, barra hutsak edo hodiak erabiltzen dira.
- Barra huts baten bihurtura-azterketa barra barne-bete baten azterketaren antzera egiten da. Kasu honetan:

$$\theta = \frac{T}{GI_P} \quad \text{non,} \quad I_P = \frac{\pi}{2}(r_2^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{2}(d_2^4 - d_1^4)$$

- Hodia oso fina bada:

$$I_P \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4}$$

t lodiera da eta r , d batez besteko erradioak eta diametroak dira, hurrenez hurren.

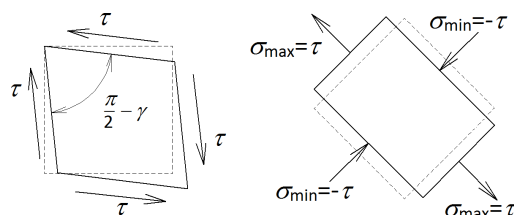
6.3. Bihurdura ez-uniformea

Ardatzak ez du zertan prismatikoa izan (sekzio ez-konstantea), eta aplikatutako pareak luzeran aldakorrek ere izan daitezke. Kasu horietan, bihurtura-formulak ardatza zatika aztertuz aplikatzen dira, karga axilekin egin bezala. 6.11. irudiak bihurtura ez-uniformearen adibidea aurkezten du.

Barraren mutur batek bestearekiko biratzen duen bihurtura-angelu osoa lorzen da zati bakoitzak jasan duen biraketak batuz:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{G_i I_{P_i}}$$

Ekuazio honetan, i azpiindizea da barraren zati bakoitza banatzen duen indize numerikoa eta n zati kopurua. Diametroa bat-batean aldatzen den inguruneetan, tentsio-kontzentrazioak agertzen dira (ikusi 5.5. atala). Hala ere, tentsio-kontzentrazio horien eragina txikia da, eta ϕ kalkulatzeko formulak zehaztasun egokia eskaintzen digu.



6.12. irudia: Ezkerrean, puntua erronbo bihurtzen da; eskuinean, puntua luzatu eta laburtu egiten da

6.4. Ebakidura hutsa

6.3. eta 6.4. irudietan, $abcd$ puntua (karratu infinitesimala) bihurtura hutsaren egoeran dago, elementuak jasaten dituen tentsio bakarrak alboko lau aurpegi-tako ebakidurazkoak baitira.

Puntuaren orientazioa biratuz aldatzen badugu, tentsio normalak eta ebakitzailleak biak aldi berean agertuko dira alboko aurpegi-tan.

σ_θ tentsio normalaren balio maximoa 45° biratzean lortzen da, eta bere balioa τ tentsio ebakitzaille maximoaren berdina da (6.7. ir.). $\theta = -45^\circ$ -rentzat $\sigma_\theta = -\tau$ betetzen da (konpresioan lan egiten du). Horrela, 45° biratua dagoen elementu batek balio berdina duten trakzio eta konpresio tentsiopean lan egingo du, eta tentsio ebakitzailleak desagertu egingo dira.

θ	-90°	-45°	0°	45°	90°
σ_θ	0	$-\tau$	0	$-\tau$	0
τ_θ	$-\tau$	0	τ	0	$-\tau$

Azter ditzagun, 6.12. irudian bihurtura hutsean dagoen elementu batek jasaten dituen deformazio unitarioak 0° eta 45° orientazioetan.

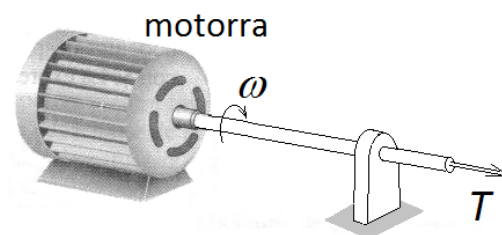
Puntua aurrekoarekiko 45° -ra biratuta dago. Ezkerreko irudian, puntuaren aurpegi-tan tentsio normalik agertzen ez denez, karratuaren luzerak mantendu egiten dira deformatzean, baina diagonal bertikala laburtu egiten da eta horizontala, berriz, luzatu.

6.5. Potentzia-transmisioa ardatzetan

Sekzio zirkularreko ardatz baten funtzio nagusia potentzia-transmisioa da; adibidez:

- Ibilgailu baten transmisio-ardatza.
- Itsasontzi baten helizearen ardatza.
- Zentral hidrauliko, termiko edo nuklear baten sorgailuaren ardatza.

Potentzia transmititzen da ardatzaren biraketa-mugimenduari esker, eta transmititutako potentzia *bihurdura-momentuaren* eta ardatzaren *abiadura angeluarren* funtzioan dago.



6.13. irudia: Adibidea: motor elektriko batek bultzatutako ω biraketa-abiadura konstantean biratzen duen ardatza

Helburua da, P potentzia jakin bat (kW, CV) N biraketa-abiadura jakin batean (rpm) transmititzeko ardatzaren diametroa definitzea, materialaren τ_{onarg} gainditzen ez delarik.

6.13. irudiko ardatzak, ω abiadura angeluarra du (rad/s) eta motorrak sortutako T bihurtura-momentua transmititzen du.

Ardatzak $d\phi$ angelua biratzeko egindako lana: $dW = T d\phi$

Potentzia dt denbora-tartean egindako lana denez:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{T d\phi}{dt} = T\omega$$

Bihurdura-momentua, beraz: $T = P/\omega$

Transmisio ardatzen diseinua

Potentzia = Parea x abiadura angeluarra $\rightarrow P = T\omega$

Unitateak:

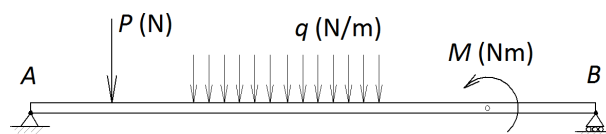
- T bihurtura-momentua edo pareta Nm-tan dago.
- ω rad/s-tan dago.
 - f biraketa-frekuentzia bada (bira/s, s^{-1} , Hz): $\rightarrow \omega = 2\pi f$
 - N_s biraketa-abiadura (bira/min, rpm): $\rightarrow \omega = N_s \frac{2\pi}{60}$
- Beraz, P potentzia $\left(\frac{\text{Nm}}{\text{s}}\right) \rightarrow \text{W (watt)}$

7. gaia

Makurdura eta gilbordura

7.1. Sarrera

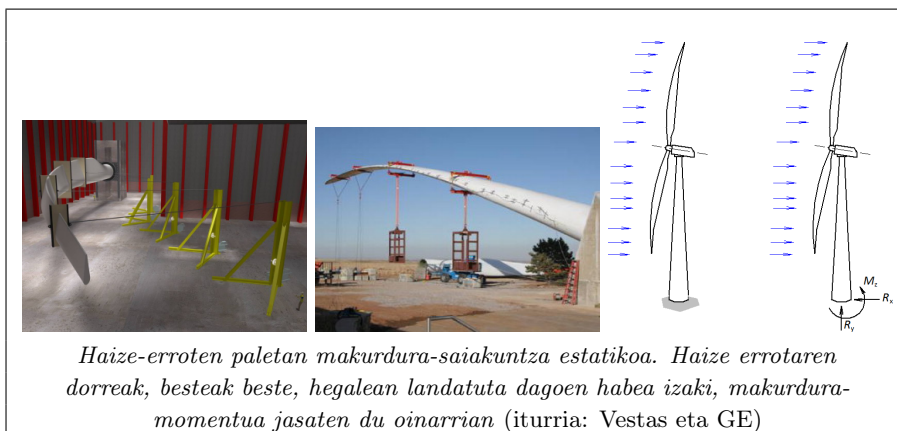
Habeak dira luzetarako ardatzarekiko perpendikular dauden kargak jasaten dituzten egitura-elementuak (karga axialak eta bihurtura ere jasan ditzakete). Habeen luzetarako ardatza *zuzena* da (7.1. ir.).



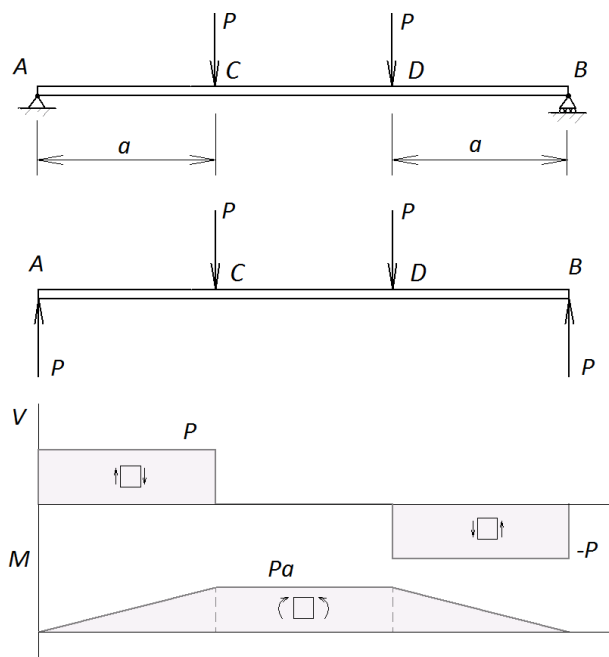
7.1. irudia: Adibidea: P indar puntuala, q indar banatua eta M makurdura-momentua jasaten dituen habea

Makurdura hutsa eta makurdura bakuna

Bigarren gaian ikusi da $V = dM/dx$ betetzen dela. 7.2. irudiko adibidea aztertuz, bi egoera topatzen ditugu:



Haize-erroten paletan makurdura-saiakuntza estatikoa. Haize errotaren dorreak, besteak beste, hegalean landatuta dagoen habea izaki, makurdura-momentua jasaten du oinarrian (iturria: Vestas eta GE)

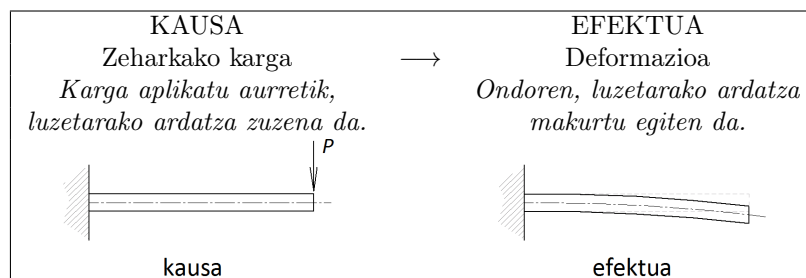


7.2. irudia: Adibidea: makurdura hutsa eta bakuna jasaten dituen habea, solido askearen diagrama eta VM diagramak

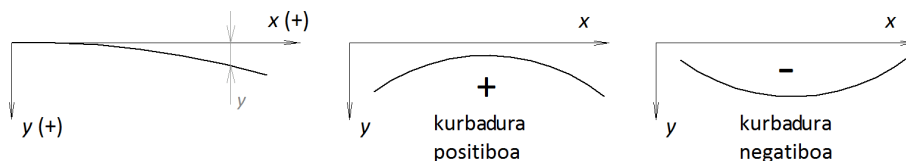
- AC eta DB eremuetan *makurdura bakuna*, eta,
 $M \neq \text{kte}$, $V \neq 0$
- CD eremuan *makurdura hutsa*.
 $M = \text{kte}$, $V = 0$

Makurduraren ondorioak

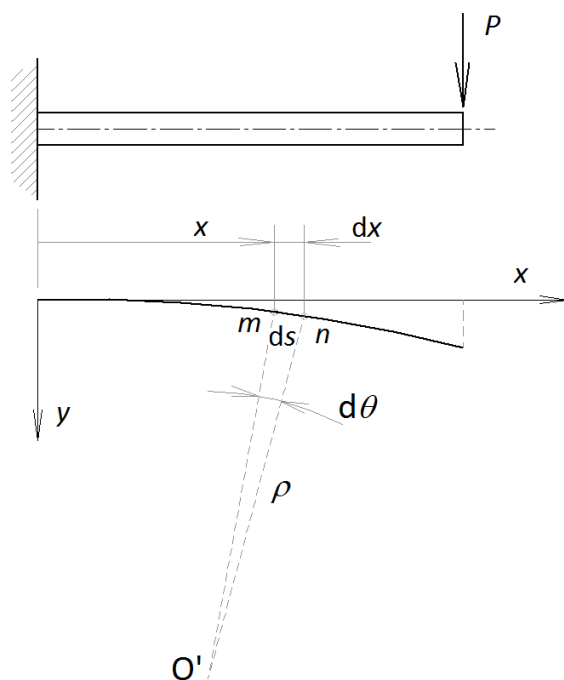
Demagun muturrean P karga duen landatutako habe bat dugula. Muturreko P kargak habea makurrarazten du.



y norabideko deflexioari y gezia esango diogu (7.3. ir.). Geziaren beheranzko noranzkoa positiboa da.



7.3. irudia: Deflexioen zeinu-irizpidea: beheranzko deflexioak positiboak dira (+y); kurbaduraren zeinu-irizpidea: makurdura-momentu negatiboak kurbadura positiboa sortzen du (+ κ , ganbila), eta alderantziz (- κ , ahurra)



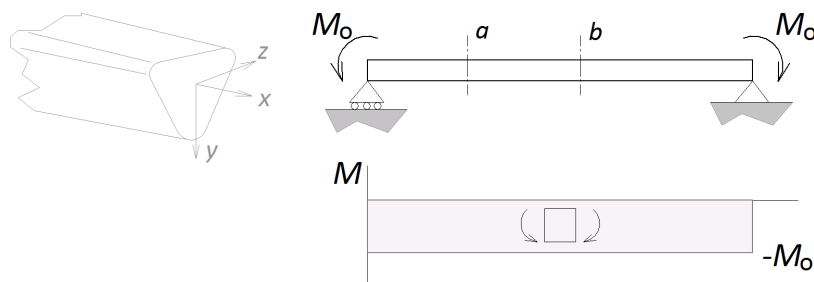
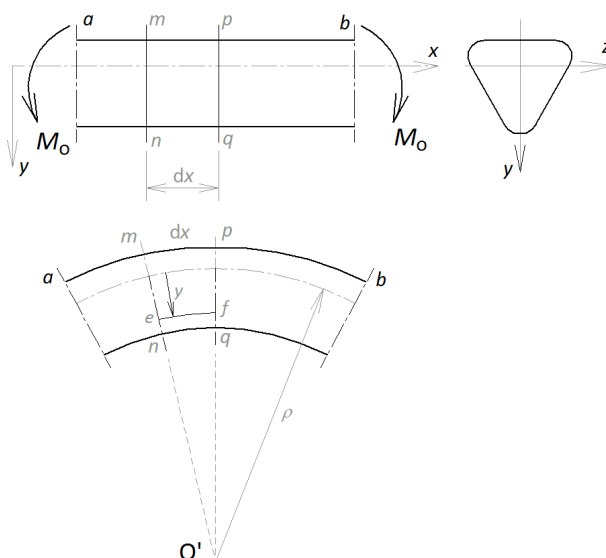
7.4. irudia: Habearen kurba elastikoa eta κ kurbaduraren definizioa

Ardatzak hartzen duen kurbadurari, *habearen makurdura-kurba* edo *kurba elastikoa* deritzo. 7.3. irudiak erakusten du makurdura-kurbaren zeinu-irizpidea.

Habearen kurba elastikoa

7.4. irudiko habe landatuan, m eta n kurba elastikoaren gainean dauden bi puntu dira; puntuak jatorritik x eta $x + dx$ distantzietara daude, hurrenez hurren. ds , m eta n puntuen arteko arku da, O' puntua kurbadura-zentroa, ρ kurbadura-erradioa eta κ kurbadura ($\kappa = \frac{1}{\rho}$).

$$\text{Geometria aztertuz : } \rho d\theta = ds \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

7.5. irudia: Makurdura hutsean lan egiten duen habea (M_o konstante)7.6. irudia: 7.5. irudiko habearen kurbatura $a-b$ zatian

$$\text{Deflexioak txikiak badira : } ds = dx \quad \longrightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}$$

Hau da, κ kurbadura x posizioaren funtzioan.

Kurbaduraren ekuazioa erabiliko da deformazioak zehazteko eta kurba elastikoaren ekuazioa ondorioztatzeko. 7.3. irudiak erakusten ditu κ kurbaduraren zeinua zehazteko irizpideak.

7.2. Deformazio normalak habeetan

Makurdura hutsean lan egiten duen 7.5. irudiko habeetan, a eta b arteko habe zatiaren deformazioa aztertuko dugu.

M_o momentuaren ekintzak habea xy planoan deformatzen du, eta ardatzak kurba zirkularra deskribatzen du (7.6.). Beraz, kurba elastikoa zirkunferentzia bat da.

Honako ondorio hauek hauteman daitezke:

- Habearen zeharkako sekzioak, adibidez $m-n$ edota $p-q$, lauak (deformatu gabe) eta ardatzarekiko perpendikular mantentzen dira.
- Alde ganbileko luzetarako zuntzak luzatu egiten dira, alde ahurrekoak, berriz, laburtu.
- Goialdeko zuntzek trakzioan lan egiten dute; behealdekoak, berriz, konpresioan.
- Goiko eta beheko zatien artean badago azalera bat, non bere luzetarako zuntzak ez baitira ez luzatzen ezta laburtzen ere. Azalera honek *azalera neutroa* (AN) izena du, eta, M_o konstantea den kasuan, azalera neutroa zilindro bat da.
- Azalera neutroaren eta makurdura-planoaren arteko ebakidurari *lerro neutroa* (LN) deitzen.
- Bi planoen arteko dx distantzia ez da aldatzen azalera neutroan ($\rho d\theta = dx$).
- Bestalde, gainerako zuntzak luzatu edo laburtu egiten dira (ε_x).

ANTik y distantziara dagoen $e-f$ zuntza aztertuz, zuntzaren L_1 luzera:

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = \rho d\theta - yd\theta$$

$$\text{baina, } \rho d\theta = dx \longrightarrow d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

$$\text{orduan, } L_1 = dx - \frac{y}{\rho}dx$$

Bere hasierako luzera $L_o = dx$ bada, ΔL luzapena:

$$\Delta L = L_1 - L_o = dx - \frac{y}{\rho}dx - dx = -\frac{y}{\rho}$$

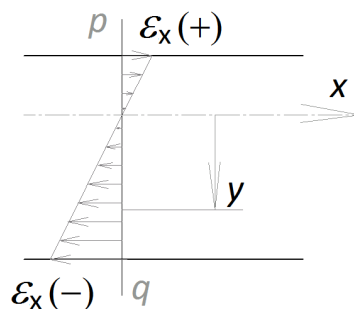
$$\text{Eta luzapen unitarioa : } \varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_o} = \frac{-\frac{y}{\rho}dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

Baina, baita ere, $\kappa = 1/\rho$; orduan, $\varepsilon_x = -\kappa y$

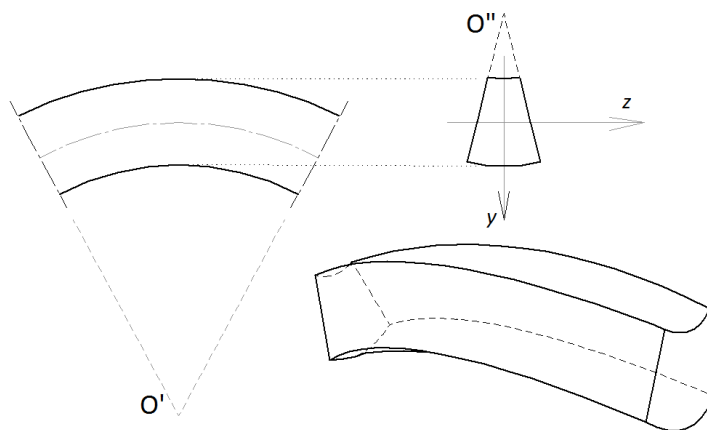
Azken ekuazio hori jatorria zeron duen $-\kappa$ malda duen zuzen baten ekuazioari dagokio. Luzapena κ kurbadurarekiko proportzionala da, eta y -rekin linealki aldatzen da (7.7. ir.).

- ANren azpitik dauden zuntzetan, y distantzia (+) da eta ε_x (-).
- ANren gainetik dauden zuntzetan, y distantzia (-) da eta ε_x (+).

$\varepsilon_x = -y/\rho = -\kappa y$ ekuazioa ondorioztatu da habe deformatu baten geometria aztertuz; materialaren propietateak ez dira formulazioan erabili. Beraz, ondorio hauek baliagarriak dira edozein materialetako habeentzat (elastiko edo inelastiko, lineal edo ez-lineal).



7.7. irudia: ε_x deformazio unitarioaren banaketa sekzioan (x ardatza AN adierazten du)



7.8. irudia: Makurdurak sortutako habearen luzeratako ε_x deformazio unitarioek sekzioko z ardatzean ere $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$ alboko deformazioak sortzen ditu, O'' puntuan biratuz (ν Poissonen modulua)

Zeharkako deformazioak

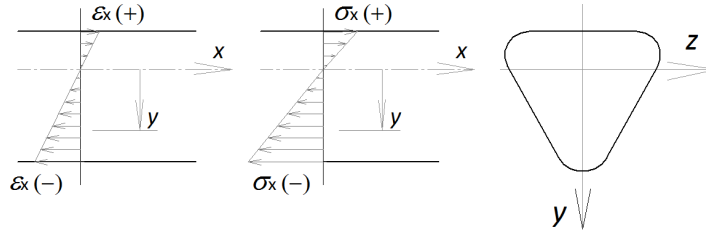
$\varepsilon_x = -y/\rho = -\kappa y$ ekuazioak adierazten dituen ε_x luzetarako deformazioez gain, ε_z zeharkako deformazioak eratortzen dira, Poissonen modulua erlazioaren ondorioz (7.8. ir.).

ANren gainetik dagoen ε_x (+) deformazio positiboak ε_z (-) negatiboekin erlazionatuak daude, eta alderantziz.

Zeharkako sekzioan trakzioan dagoen goiko zatiak kontrakzioa jasaten du z ardatzean, $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = \nu\kappa y$, ν Poissonen modulua izanik.

ε_z deformazioek zeharkako sekzioaren zabalera handitzen dute ANren azpialdean; goialdean kontrakzioa gertatzen da sekzioa estutuz.

Lerro hauen O'' kurbadura-zentroa, habearen goialdean dago, eta ρ_1 kurbadura-erradioa ρ luzerako erradioa baino handiagoa da, $\varepsilon_x \varepsilon_z$ baino handiagoa den proportzio berean: $\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$.



7.9. irudia: Makurdurak x luzeratako ardatzean sortutako ε_x deformazio unitarioak eta σ_x tentsio normalak zuzenki erlazionatuta daude Hooke-ren legearen bidez

7.3. Tentsio normalak habeetan

ε_x deformazio normaletatik abiatuz, zeharkako sekzioarekiko elkarzut agertzen diren σ_x tentsioak lor daitezke.

Habearen luzetarako zuntz bakoitzak trakzioan edo konpresioan lan egiten du.

Tentsio-deformazio diagramak σ_x eta ε_x arteko erlazioa erakusten digute. Materiala elastiko-lineala bada, σ_x - ε_x diagraman Hooke-ren legea aplikatu dezakegu (7.9. ir.). Horrela:

$$\tan \beta = E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad \text{eta} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = -E\kappa y$$

Beraz, $\sigma_x = \kappa \cdot y$ tentsioa linealki aldatzen da ANtik neurtutako y distantziarekiko.

Azter ditzagun, orain, zeharkako sekzioan σ_x tentsioen indar eta momentuen erresultanteak. Bi ekuazio ditugu:

$$1. \quad \Sigma F_x = N = 0 \quad \text{bada,} \quad \int dF = \int \sigma_x dA = - \int E\kappa y dA = 0$$

κ kurbadura eta E elastikotasun-modulua konstanteak direnez, $\int y dA = 0$ izan behar du. Integral honek momentu estatikoa definitzen du, eta zerorekin berdinduz GZren posizioa lortzen da.

Beraz, z ardatza edo *lerro neutroa (LN)* GZtik igarotzen da.

$$2. \quad \Sigma M = M_o \quad dF = \sigma_x dA \quad \text{indarrak LNrekiko momentu bat sortzen du.}$$

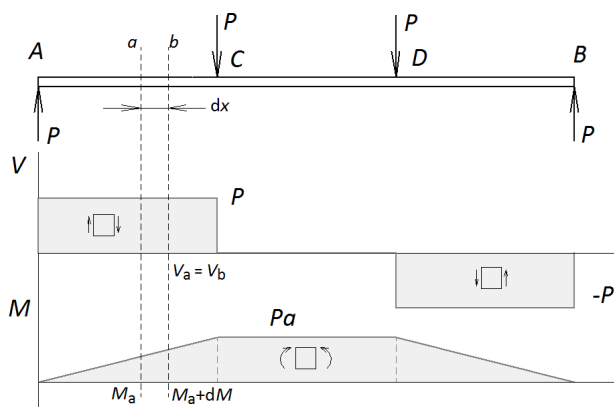
$$dM = +\sigma_x dA \cdot y$$

$$M = + \int \sigma_x y dA = -\kappa E \int_A y^2 dA$$

Momentu horrek $M + M_o = 0$ betetzen du, beraz $M = M_o$.

Bestalde, badakigu $I_{LN} = \int_A y^2 dA$, beraz, $M = -\kappa E I_{LN}$.

$$\text{Eta, horrela, kurbadura :} \quad \kappa = \frac{1}{\rho} = - \frac{M}{EI_{LN}}$$



7.10. irudia: Habearen AC zatian makurdura bakuna jasaten du ($V \neq 0$); dx luzerako $a-b$ zatian V konstantea da, M , berriz, handitzen da

Habe baten luzetarako ardatzaren kurbadura zuzenki proportzionala da M makurdura-momentuarekiko, eta EI_{LN} balioarekiko alderantziz proportzionala da. Habearen *makurdurarekiko zurruntasuna* deitzen EI_{LN} konstante honi.

Alde batetik, erraz kontura gaitzke, zeinu-irizpideak errespetatuz, momentu positibo batek kurbadura negatiboa sortzen duela eta alderantziz:

$$\text{Bestalde, } \sigma_x = E\varepsilon_x = -E\kappa y \quad \text{eta orain, } \kappa = \frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI_{LN}}$$

$$\sigma_x = -E \left(-\frac{M}{EI_{LN}} \right) y = \frac{My}{I_{LN}} \quad \text{Navierren ekuazioa}$$

Ekuazio honek erakusten du σ_x tentsio normala M -rekiko eta y -rekiko zuzenki proportzionala, eta I_{LN} -rekiko alderantziz proportzionala dela.

Tentsio maximoak LNtik urrun dauden puntuetan agertzen dira.

7.4. Tentsio ebakitzailak

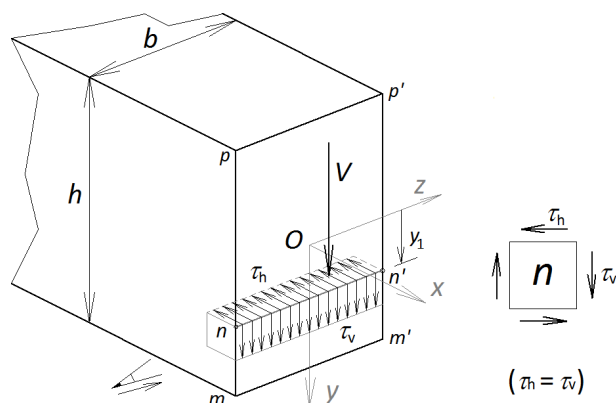
Habe batek *makurdura bakunean* lan egiten duenean, aldi berean, M -k eta V -k parte hartzen dute zeharkako sekzioan (7.10. ir.).

Makurdurak, $\sigma_x = My/I_{LN}$ tentsio normalak sortzen ditu. Atal honetan, V indar ebakitzailak sortutako τ tentsio ebakitzailak aztertuko ditugu.

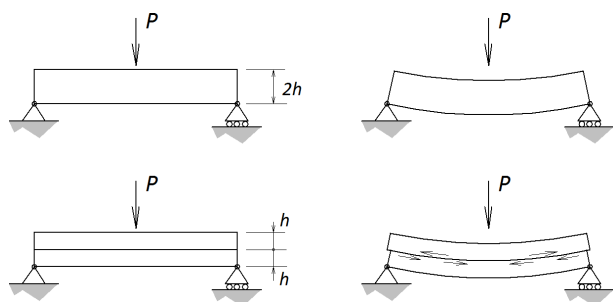
Hasierako hipotesiak:

1. τ tentsio ebakitzailak V -ren norabide eta zentzu berean eragiten du.
2. τ tentsio ebakitzailen banaketa uniformea da sekzioaren zabaleran.

Gainera, badakigu elementu baten aurpegian agertzen den τ_v tentsio ebakitzaila, beste τ_h tentsio ebakitzaila batera lotua dagoela norabide perpendikularrean. Horrela, tentsio ebakitzailak aldi berean agertzen dira habearen geruza horizontaletan eta zeharkako sekzio bertikaletan (7.11. ir.). τ_v eta τ_h tentsioak, 4.8. atalean ikusitako τ_{xy} eta τ_{yx} tentsioei dagokie hurrenez hurren.



7.11. irudia: V indar ebakitzailak b sekzioan ($p-n-m$) LNrekiko y_1 distantziara sortutako τ_v , τ_h tentsio ebakitzailak



7.12. irudia: Goian, soilki bermatutako habea; behean, sekzio berdina osatzen duten itsatsi gabeko bi habe

τ_h eta τ_v arteko berdintasunak ondorio garrantzitsu bat ematen digu habearen goialdeko eta behealdeko gainazalako tentsio ebakitzailak buruz: bertatik elementu bat isolatuz gero, $\tau_h = 0$ da, eta, beraz, $\tau_v = 0$ ($y = \pm h/2$).

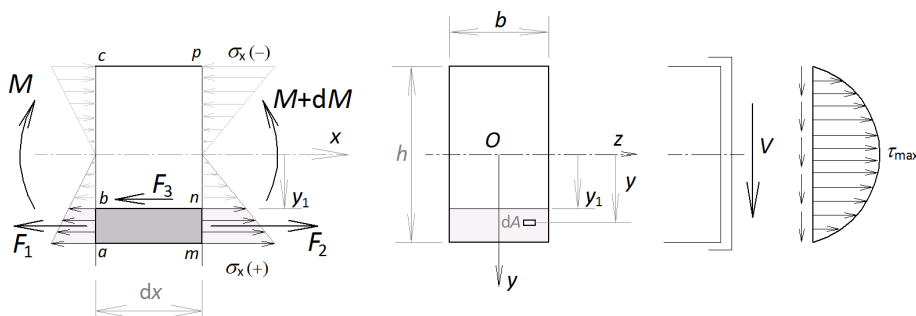
Honako esperimentu honen bidez, τ_h tentsio horizontalen existentzia froga daiteke (7.12. ir.):

- Bi habeak itsatsi gabe: goiko habearen luzetarako zuntzak behekoarekiko labaintzen dira.
- Bi habeak itsatsita: tentsio ebakitzailak LN-n zehar labaindura galarazten dute.

h altuerako bi habeek bakoitzak era independentean egiten duenez, $2h$ altuerako duen habea h altuerako bi habe baino zurrunagoa da. Tentsio ebakitzailaren lana bi habeen planoan agertzen den labaindura eragozte da; analogia eginez, τ_h -k kolaren rola dauka.

7.13. irudian, 7.11. irudiko $pp'n'n$ azalera indarren oreka aztertzen da z ardatzetik y_1 distantziara:

dA azalera duen elementua aztertuz, bertan eragiten duen indar normala:



7.13. irudia: Ezkerrean, indarren oreka 7.10. irudiko $a-b$ zatian azpitik y_1 altuerara arte; erdian sekzioaren bista eskuinetik ikusita; eskuinean, V indar ebakitzailak sortutako τ tentsio ebakitzailen banaketa ezkerreko sekzioan

$$\sigma_x dA = \frac{My}{I} dA$$

Ezkerraldean aztertzen ari garen eremuan eragiten duen F_1 indarra eremuan integratuz lotzen da:

$$F_1 = \int_A \sigma_x dA = \int_{h/2}^{y_1} \frac{My}{I} dA$$

$$\text{Era berean, eskuineko aurpegian : } F_2 = \int_{h/2}^{y_1} \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

pp' -ren goialdeko $b dx$ azaleran agertzen den indar horizontala:

$$F_3 = \tau b dx$$

F_1 , F_2 eta F_3 indarrek oreka estatikoan egon behar dute: $F_3 = F_2 - F_1$

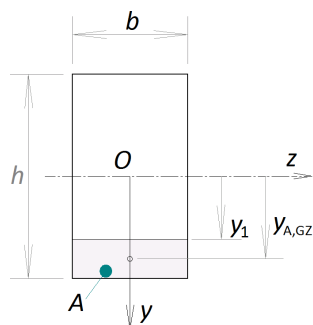
$$\tau b dx = \int_A \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int_A \frac{My}{I} dA$$

$$\tau b dx = \int_A \frac{dM y}{I} dA$$

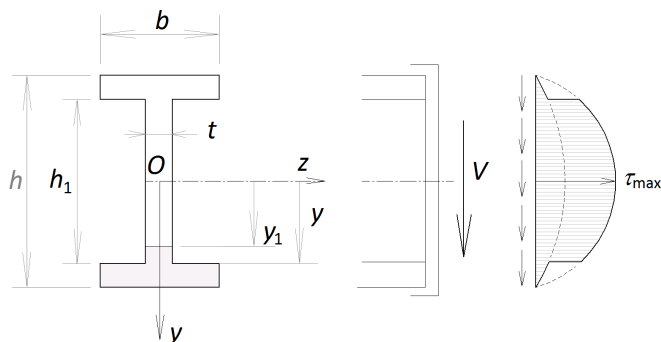
$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{1}{bI} \int_A y dA = \frac{V}{bI} Q$$

Beraz, τ tentsio ebakitzaila honako aldagai hauen menpe dago:

- V , konstantea sekzioko puntu guztietan,
- b , sekzioaren zabalera,
- I , LNrekiko inertzia-momentua, eta,
- Q , $pp'n'n$ azaleraren momentu estatikoa (aldakorra).



7.14. irudia: z ardatzetik y_1 distantziara dagoen puntu baten momentu estatikoaren definizioa



7.15. irudia: *IPN* profila hegaletan b eta ariman t zabalerarekin; V indar ebakitzailak sekzioan sortutako τ tentsio ebakitzailen banaketa

y_1 distantziara dagoen puntu baten Q momentu estatikoak kanpoaldetik y_1 altuerara dagoen A azalera sekzioaren $y_{A,GZ}$ grabitate-zentroan duen ekarpena adierazten du (7.14. ir.).

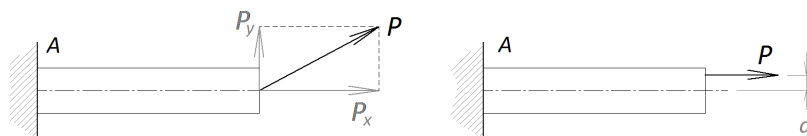
$$Q = \int_A y dA = Ay_{A,GZ}$$

Berehalakoa da V indar ebakitzaila τ tentsio ebakitzailen erresultantea dela ondorioztatzea. Beraz, τ tentsio ebakitzailak V -ren norabide eta noranzko berdina izango dute.

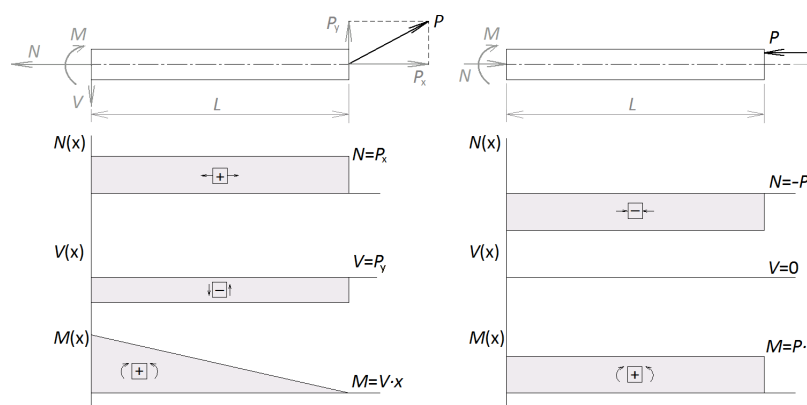
$\tau = \frac{VQ}{Ib}$ formula y altuerarekiko b zabaleraren funtzioan dago. Beraz, sekzio-aldaketa badago, sekzioko tentsio ebakitzailen banaketan jausiak agertzen dira. Adibidez, 7.15. irudiko zabalera aldakorreko profileen.

7.5. Karga axialdun habeak: karga inklinatuak eta eszentrikoak

Orain arteko kargak habearen ardatzarekiko elkarzutak izan dira, eta GZn aplikatuak zeuden. Atal honetan, indar inklinatuak eta GZn aplikatuak ez daudenak



7.16. irudia: Ezkerrean, P karga inklinatua jasaten duen landatutako habea; eskuinean, GZtik e distantziara kokatua dagoen P karga eszentrikoa jasaten duen habea



7.17. irudia: 7.16. irudiko habeen solido askearen diagramak eta N - V - M diagramak

aztertuko ditugu. 7.16. irudiak kasu bakoitzaren adibide bana aurkezten du.

Indar inklinatuak

P karga P_y indar ebakitzailan eta P_x indar normalean deskonposa daiteke, eta landapenean M , V eta N erreakzioak agertzen dira. 7.17. irudiak 7.16. irudiko adibideen solido askearen diagrama eta N - V - M diagrama erakusten ditu.

Landapenean dago sekzio kritikoa: $N = P_x$, $V = P_y$, $M = P_y L$.

V -k τ tentsio ebakitzailak sortzen ditu. N -k eta M -k sortutako tentsio normalak, berriz, batu egiten dira (7.18. ir.):

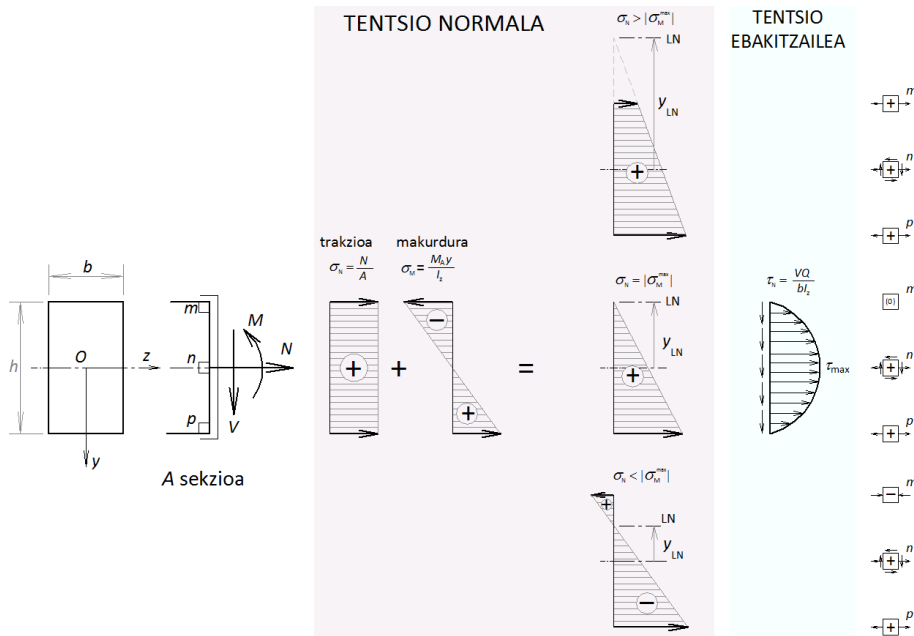
$$\sigma = \frac{P_x}{A} + \frac{(P_y L)y}{I_z}$$

y_{LN} LNren GZrekiko posizioa $\sigma = 0$ eginez lortzen da; horrela:

$$0 = \frac{P_x}{A} + \frac{P_y L y}{I_z} \rightarrow y_{LN} = -\frac{P_x I_z}{P_y L A}$$

Bi egoera ager daitezke: (1) habea motza eta zurruna, eta (2) habea lerdna eta malgua.

1. Geziak oso txikiak dira luzerarekin konparatuz.
Gezien agerpenak aldaketa oso txikia sortzen du P_x kargaren akzio-lerroan.



7.18. irudia: Tentsio normalak eta ebakitzailak landapenean

2. Makurduragatiko deflexioen balioak badira momentu makurtzaileetan eragina izateko beste.
 P_x -ren akzio-lerroa gorantz (7.16. irudiko adibidean) distantzia jakin bat desplazatzen da, makurdura-momentu gehigarri bat sortuz. Hau da, P_x indar normala karga axial eszentrikoan bihurtzen da. $P_x \cdot f$ da momentu gehigarriaren balioa.

Karga axial eszentrikoa

Kasu honek interes praktiko handia dauka eraikuntzan.

P konpresio-kargak zeharkako sekzioarekiko elkarzut eragiten du, GZtik igarotzen den ardatz inertzialarekiko e distantzia batera (7.16. irudian eskuinean). P karga eszentrikoa GZn aplikatutako P konpresio-indarragatik eta $P \cdot e$ makurdura-momentuagatik ordezka daiteke.

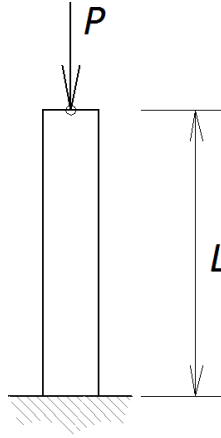
Indar inklinatuetan bezala, zeharkako sekzioko tentsio normala y posizioan karga axialak eta makurdura-momentuak sortutako tentsioen batura da (7.18. ir.):

$$\sigma = -\frac{P}{A} + \frac{Pey}{I_z}$$

y_{LN} LNren GZrekiko posizioa $\sigma = 0$ eginez lortzen da; horrela:

$$0 = -\frac{P}{A} + \frac{Pey}{I_z} \rightarrow y_{LN} = \frac{I_z}{Ae}$$

Ekuazio honek zeharkako sekzioan z ardatzarekiko paraleloa den zuzen bat



7.19. irudia: Zutabea, P konpresio-karga axiala jasaten duen L luzerako habea

definitzen du. Minus (-) zeinuak adierazten du, P indarra z ardatzarekiko ez-kerrera dagoenean, z -ren eskuinera kokatzen dela.

- $e \uparrow$ bada, $\frac{I}{Ae} \downarrow$ eta orduan LN GZrantz hurbiltzen da.
- $e \downarrow$ bada, $\frac{I}{Ae} \uparrow$ eta orduan LN GZtik urruntzen da; LN zeharkako sekziotik kanpo gera daiteke. Kasu horretan, sekzioko puntu guztiak konpresioan egongo lirarteke.

Adibidez, sekzioa h altura duen errektangelua bada, sekzio osoa tentsio negatiboarekin lan egin dezan e balio maximoa:

$$y = \frac{h}{2} \quad 0 = -\frac{P}{A} \pm \frac{Pe \frac{h}{2}}{I_z}$$

$$e = \frac{2I_z}{Ah}$$

e -ren posizio maximoa ezagutzea beharrezkoa da hormigoizko zutabeen diseinuan. Hormigoiak konpresioan soilik egin dezake lan, eta, kargaren aplikazio-puntua e tartearen barnean badago, trakziorik ez da agertuko.

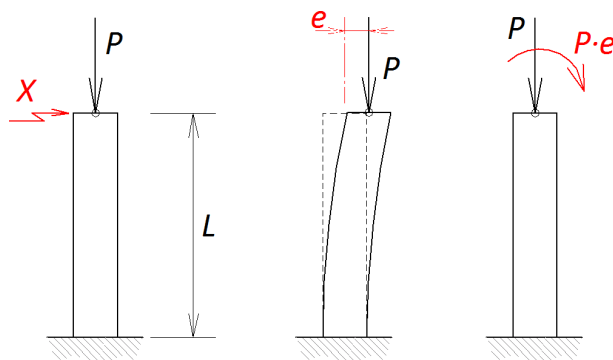
7.6. Gilbordura

Konpresioan lan egiten duten habe lerdinari *zutabea* deritzo (7.19. ir.).

Karga axialak balio kritiko bat gainditzen duenean, zutabeek alboko makurduragatik huts egiten dute, nahiz eta konpresio-tentsioak materialaren isurpenmuga gainditu ez.

Gilbordura (*pandeo*) ez da erresistentzia-arazo bat, desoreka-egoera bat baizik (7.20. ir.). X indar horizontala perturbazioa da, existitzen ez den itxurazko indarra. X -ren ondorioz habea makurtu eta kalkuluetan kontuan hartu ez den $P \cdot e$ momentu gehigarria agertzen da.

$$P \longrightarrow P \cdot e \longrightarrow e \uparrow \longrightarrow P \cdot e \uparrow \longrightarrow e \uparrow \uparrow \longrightarrow P \cdot e \uparrow \uparrow \dots$$



7.20. irudia: X perturbazioak sortzen du e eszentrikotasuna, $P \cdot e$ makurdura-momentua agerraraziz

Gilborduragatiko haustura (alboko makurdura) sekzioaren inertzia-momentu txikienarekin edota kurbadura-erradioarekin erlazionatua dago.

7.6.1. Karga kritikoa

Izan bedi honako baldintza hauen pean dagoen zutabe bat:

1. P konpresio-indarra habearen ardatz geometrikoan aplikatua dago, hau da, karga zentratua dago.
2. Barraren materiala homogeneoa eta elastikoa da, beraz, E konstantea da.
3. Barrak ez du alboko indarririk jasaten.
4. Sekzioa uniforme da luzera osoan (A konstantea).

P_c karga kritikoa zutabearen oreka-egoera galarazten duen P konpresio-karga minimoa da.

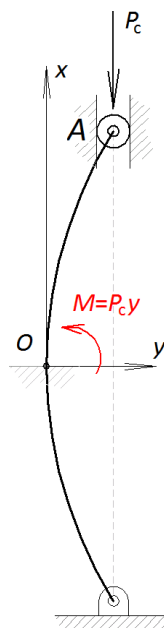
Hiru kasu ager daitezke:

- $P < P_c$ bada, H ezabatuz gero, habea jatorrizko posiziora itzultzen da; oreka-egoera egonkorrean dago.
- $P > P_c$ bada, H kenduta ere, habeak deformatzen jarraituko du haustura gertatu arte; oreka-egoera ezegonkorrean dago.
- $P = P_c$ bada, H kenduz gero, habeak une horretan duen deformazioa mantenduko du; oreka-egoera indiferentea da.

Aipatutako P_c karga kritikoa da egoera ezegonkorrera pasatu aurretik zutabe lerdin batek jasan dezakeen konpresio-karga axial maximoa.

7.6.2. Eulerren formulak

Ezegonkortasun elastikoa definitzen duen P_c karga kritikoaren formula Eulerrek garatu zuen analitikoki orain dela 300 urte. Ezegonkortasun plastikoa sortzen duen karga kritikoa, berriz, enpirikoki definitzen da, eta emaitzak esperimertzio bidez frogatu dira.



7.21. irudia: AB zutabearen P_c karga kritikoa ondorioztatzeko x - y koordenatu-sistema O inflexio-puntuan ipintzen da; puntu horretan habea luzera erdiko landatutako habe gisa portatzen da

Oinarritzko kasua: bi muturretan bermatutako zutabea

Demagun deformatua dagoen AB zutabea (7.21. ir.). A -tik x distantzia batera eragindako momentua: $M_x = +P_c y$.

Makurdura-kurbaren ekuazioa:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI_{\min}} = -\frac{P_c}{EI_{\min}} y$$

$$k^2 = \frac{P_c}{EI_{\min}} \quad \text{eginez,} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 y$$

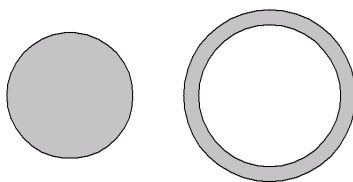
Ekuazio diferentzial honen emaitzak honako itxura hau du:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

C_1 eta C_2 konstanteen balioak *muga-baldintzak* (MB) aplikatuz lortuko dira:

1. **MB** A puntuan ($x = 0$) $\rightarrow y = 0 \rightarrow C_2 = 0$
2. **MB** A puntuan funtzioaren ($y = f(x)$) malda aztertuz, $\alpha \rightarrow C_1 = \frac{\alpha}{k}$
Habearen makurdura-kurbaren ekuazioa honela geratuko da: $y = \frac{\alpha}{k} \sin kx$
3. **MB** $x = L$ puntuan geziak $y = 0$ izan behar du (B bermapuntua).

$$0 = \frac{\alpha}{k} \sin kL \quad \text{beraz,} \quad \sin kL = 0$$



7.22. irudia: Azalera bera duten sekzio zirkular barne-betea eta barne-hutsa

Aurrekoa bete dadin, $kL = 0$ izan behar du, zentzurik ez duen emaitza (biak $neq 0$ dira). Irudiak agertzen duen bezala, $kL = \pi$ edo $n \cdot \pi$ izan behar du.

Baina, $k = \sqrt{\frac{P_c}{EI_{\min}}}$, orduan $\sqrt{\frac{P_c}{EI_{\min}}} L = \pi$

Erro karratua kentzeko bi aldeetan ber-bi eginez:

$$\frac{P_c}{EI_{\min} L^2} = \pi^2 \quad \longrightarrow \quad P_c = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L^2}$$

Adierazpenean sekzioaren inertzia-momentu txikiena erabili behar da.

P_c karga kritikoa eragina duten faktoreak:

- Barraren ezaugarri geometrikoak, I_{\min} , L .
- Materialaren propietateak, E .

Sekzioaren azalera aldatu gabe P_c karga kritikoa handitzeko, inertzia-momentua bi ardatzetan handitu behar da, eta materiala inertzia-ardatz nagusietatik ahalik eta urrutien kokatu. Horregatik dira gilborduran lan egiteko egokiagoak sekzio barne-beteak barne-hutsak baino (7.22. ir.).

Hala ere, buruan eduki behar da Eulerren formularekin kalkulaturako P_c karga kritikoa onartezina dela diseinu-irizpide gisa. P_c pean dagoen zutabea bere lan-gaitasunaren mugan dago, hausturan materialek erakusten duten dispersioaz gain. Beraz, lortutako P_c -ari beti dagokion *segurtasun-koefizientea* aplikatu behar zaio.

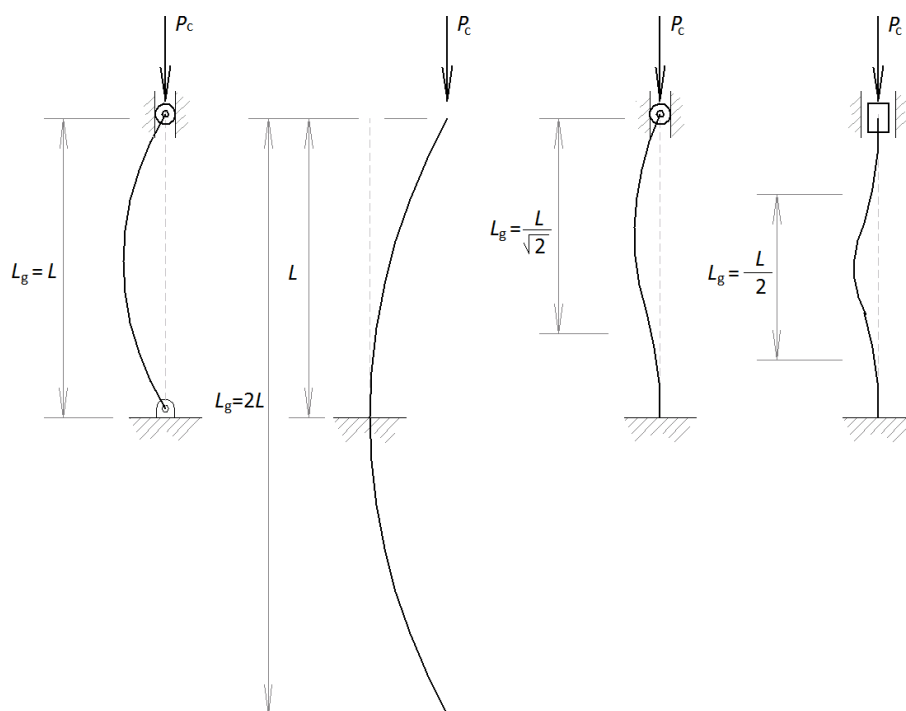
7.6.3. Zutabearen berma-baldintzak

Zutabea bermatuta dagoen baldintzen arabera, erabilgarria da aurreko atalean ondorioztatu den formula, L_G gilbordura-luzera berma-baldintzei egokitu. 7.23. irudiak aurkezten ditu ohiko kasuak dagokien c gilbordura-faktore zuzentzaileekin.

$$L_G = c \cdot L \quad \longrightarrow \quad P_c = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{L_G^2} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{c^2 L^2}$$

7.6.4. Eulerren formularen aplikazio-eremua

Gilbordurak alboko makurdura eragiten du. Habeak gilborduragatik apurtzen dira kargak P_c balioa gainditzen badu ($P \geq P_c$), nahiz eta konpresio-tentsioa isurpen-muga baino txikiagoa izan $\sigma = P/A \leq \sigma_y$. Orain Eulerren formulatik abiatuz, gilbordura sortzen duen tentsio kritikoa aurkitu nahi dugu.



7.23. irudia: Berma-baldintzak zutabeetan: soilik bermatutako zutabea, mutur bat landatua eta bestea aske duen zutabea, mutur bat landatua eta bestea bermatua duen zutabea, eta, bi muturrak landatuta dituen zutabea

$$\text{Gilbordura – karga kritikoa (Euler) : } P_c = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_G^2}$$

$$\text{Gilbordura – tentsio kritikoa : } \sigma_c = \frac{P_c}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L_G^2 A} = \frac{\pi^2 E}{L_G^2} \rho_{\min}^2$$

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} \text{ sekzioaren biraketa – erradioa da.}$$

$$\text{Horrela : } \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_G}{\rho_{\min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{L_G}{\rho_{\min}} \text{ zutabearen lerdentasuna da.}$$

λ zutabeen lerdentasuna, gilbordura-luzera eta biraketa-erradio minimoaren arteko erlazioa da, eta zutabe batek gilbordura jasateko duen arrisku-maila adierazten du.

- $\lambda < 20$ bada, gilbordura ez dago kontuan hartu beharrik.
- $\lambda > 250$ bada, piezak onartezinak dira.

Eulerren hiperbola

λ -ren balio altuei σ_c tentsio kritiko txikiak dagozkie; beraz, pieza oso lerdena bada, gilbortu eta erresistentzia erraz galduko du σ_c tentsio kritiko txikiekin.

7.24. irudiak tentsio kritikoa lerdetasunarekiko grafikoki adierazten du.

Nola sendotu daiteke pieza?

$$\rho \uparrow \text{ edo } \lambda \downarrow \quad \lambda = \frac{L_G}{\rho} \quad \text{baita.}$$

ρ biraketa-erradioa handitzeko, sekzio-azalera berdinarekin inertzia-momentua handitu behar da. Materiala ahalik eta urrutien kokatuz lortzen da hori. Horregatik, perfil tubularrak sekzio oso beteak baino erabiliagoak dira zutabeetan.

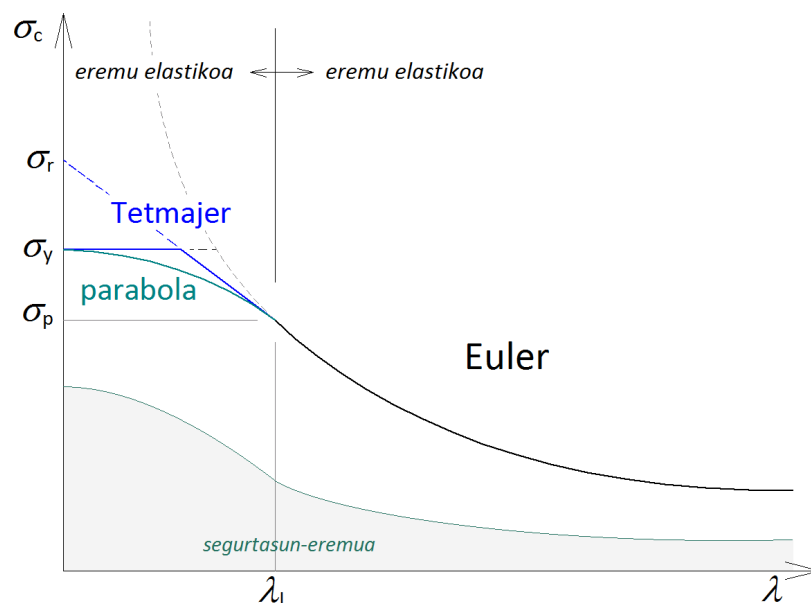
Bestalde, λ txikiagoa den heinean, handitu egiten da σ_c tentsio kritikoa.

Makurdura, materialaren egoera elastiko-linealean, proportzionaltasun-eremuaren barnean eman behar da, $\sigma_c \leq \sigma_p$, Hooke-ren legea aplikatuz ondorioztatatu baita Eulerren formula. Baldintza hori bete dadin, habeak λ_L lerdetasunmuga gainditu beharko du (7.24. ir.):

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad \longrightarrow \quad \lambda_L^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_p}$$

- $\lambda < \lambda_L$ zutabe motzak (eremu plastikoa).
- $\lambda > \lambda_L$ zutabe lerdanak (eremu elastikoa).

Altzairuetan, Eulerren formula erabilgarria da $\lambda > 100$ balioentzat. Beste metalentzat kalkulatu egin behar da, bere σ_p -ren arabera.



7.24. irudia: σ_c gilbordura tentsio kritikoa zutabe lerden eta motzetan; Tetmajer eta Johnson-Ostenfeld hurbilpenak

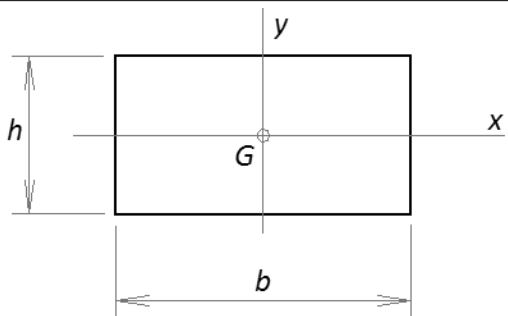
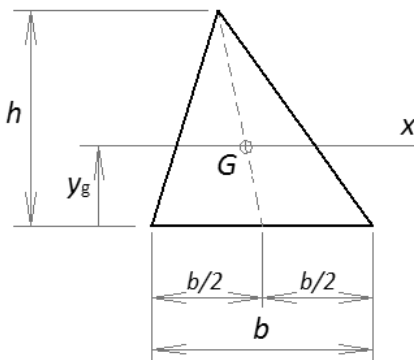
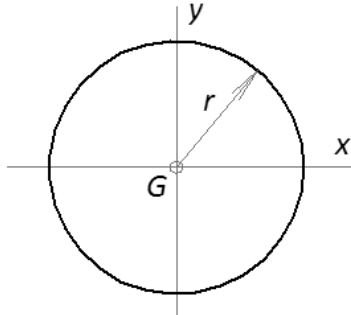
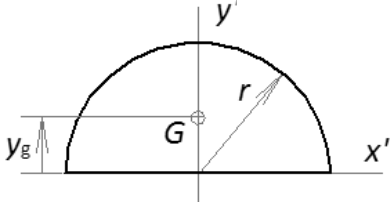
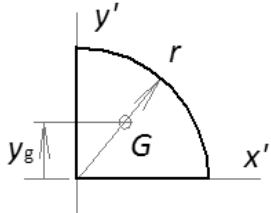
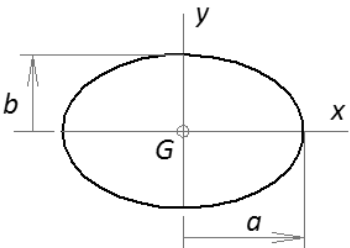
Zutabe motzak: Tetmajer eta Johnson-Ostenfeld

Zutabe motzak diseinatzeko, bi hurbilpen nagusitu dira. Biak esperientazio bidez ondorioztatu dira, gilbordura hausturetan agertzen duen dispersioaren gerizpean (7.24. ir.).

- Tetmajerrek σ_p proportzionaltasun-muga eta σ_r haustura-tentsioa lerro zuzen batez lotzen ditu, eta σ_y isurpen-tentsioa ezartzen du maximotzat. Horrela, bi zuzen horiek mugatzen dute σ_c gilbordura-tentsio kritikoa zutabe motzen eremuan.
- Johnson-Ostenfeld bikoteak, berriz, parabolaren funtzioa erabiltzen du σ_p eta σ_y artean σ_c tentsio kritikoa definitzeko.

Biek antzeko eremua definitzen dute, Johnson-Ostenfeld parabola zerbait murriztaileagoa izanik ere. Biak dira diseinu-programetan inplementatzen errazak. Kontuan izan behar da tentsio kritikoen balioetatik urrun mantendu behar dela segurtasuna bermatzeko. Horretarako, segurtasun-koefizientea aplikatzen da arriskuaren arabera: 1,7 zutabe motzetan eta 3,5 zutabe lerdenetan (7.24. irudian grisez dagoen eremua).

A Gehigarria - Irudi lauen grabitate-zentruak eta inertzia-momentuak

Geometria		Azalera	x_g	y_g	Inertzia-momentua
Errektangelua		hb	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{hb^3}{12}$
Triangelua		$\frac{hb}{2}$		$\frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{36}$
Zirkulua		πr^2			$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_o = \frac{\pi r^4}{2}$
Erdizirkulua		$\frac{\pi r^2}{2}$		$\frac{4r}{3\pi}$	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_o = \frac{\pi r^4}{4}$
Kuadrantea		$\frac{\pi r^2}{4}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{\pi r^4}{16}$ $I_o = \frac{\pi r^4}{8}$
Elipsea		πab			$I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_o = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$

Bibliografia

- [1] F. Beer, E. Johnston, Ingeniarietzako mekanika bektoriala. Estatika, Euskal Herriko Unibertsitatea UPV/EHU, 1998.
- [2] F. Beer, E. Johnston, Mecánica de materiales, McGraw-Hill, 2007.
- [3] Elastikotasunaren teoria eta materialen erresistentzia.
- [4] T. Lardner, R. Archer, Mecánica de Sólidos, McGraw-Hill, 1996.
- [5] J. Gere, S. Timoshenko, G. Bugada, Resistencia de materiales (Timoshenko), Paraninfo, 2002.
- [6] W. Riley, L. Stugers, D. Morris, Mecánica de materiales, Limusa Wiley, 2007.

UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

INFORMAZIOA ETA ESKARIAK • INFORMACIÓN Y PEDIDOS

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial de la UPV/EHU
argitaletxea@ehu.eus • editorial@ehu.eus
1397 Posta Kutxatila - 48080 Bilbo • Apartado 1397 - 48080 Bilbao
Tfn.: 94 601 2227 • www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea