

Gradu Amaierako Lana
Fisikako Gradua

Eguratseko dinamikaren eredu sinplifikatua

Egilea:
Kerman Alonso Ajuria
Zuzendaria:
Jon Sáenz Agirre

© 2020, Kerman Alonso Ajuria

Gaien Aurkibidea

1	Sarrera	1
1.1	Eguratseko iragarpen modeloen historia	1
1.2	Helburuak	2
2	Bortizitate barotropikoaren ekuazioa	3
2.1	Ekuazio primitiboak	3
2.2	Bortizitate barotropikoaren ekuazioa	5
3	Metodo espektralaren bidezko ebazpena	8
3.1	Metodo espektrala	8
3.2	BVE-ren ebazpena	12
3.3	Hasierako baldintzak	14
3.4	Egonkortasuna eta iragazkiak	16
4	Egiaztapena eta balioespena	18
4.1	Begi hutseko egiaztapena eta balioespena	18
4.2	Distribuzio diagramak	21
4.3	Sakabanatze diagramak	21
4.4	R^2 denboran zehar	24
5	Datu asimilazioa	26
5.1	3DVAR asimilazio teknika	27
5.2	Implementazioa	28
5.3	Lorturiko emaitzak	30
6	Ondorioak	33
	Bibliografia	34

1 Sarrera

Eguraldia elkarrizketa gai unibertsala da, munduko toki eta historiako aro guztietako biztanleen interesa piztu duena. Baina egun albistegian ikusten ditugun eguraldi iragarpenen zehaztasun eta fidagarritasuna pentsaezina zen duela ehun urte, eta eguratseko iragarpenen historia ezagutzeak hau hobeto preziatzen lagun diezaguke.

1.1 Eguratseko iragarpen modeloen historia

Duela mende bat eguraldia iragartzea arte bat zen zientzia baino. Izan ere, eguratsaren behaketak urriak ziren, eta fisikaren oinarri teorikoek zeresan txikia zuten iragarpenetan. Iragarleak euren lurraldeko klimaren ezagutza, intuizioan eta lege enpirikoetan oinarritzen ziren. Hau dela eta, ez da harritzekoa garai hartako iragarpenen zehaztasun eta fidagarritasun falta [20].

Eguratsaren portaera deskribatzen duen teoria XX. mendearen hasieran garatu zen, Cleveland Abbe eta Vinhelm Bjerknes zientzialariek eginiko ekarpenei esker besteak beste. Eguratsaren egoera zazpi ekuazioen bidez erlacionatutako zazpi aldagaik zehazten dute: presioa, tenperatura, dentsitatea, hezetasuna eta abiaduraren hiru osagaiak. Ekuazioak ekuazio primitibo bezala ezagutzen dira eta aldagaien arteko erlazio konplexuen eraginez ezinezkoa da sistema analitikoki ebaztea [7]. Egun teknika numerikoak aplikatuz ebazten dira, baina garai hartan teknika hauek ez zeuden horren garatuak, eta konputagailu elektronikoak ez ziren existitzen.

Lehenengo ebazpen numerikoa Lewis Fry Richardson-ek lortu zuen, hurbilketa hidrostatikoa aplikatuz eta diferentzia finituetako teknikak erabiliz. Kalkuluak eskuz egin zituen Europako bi puntutan presioaren eta haizearen abiaduraren aldaketak iragarri sei ordutara. Lorturiko emaitzak errealitateko neurketak baino hamar aldiz handiagoak izan ziren, kalkuluak egiteko erabilitako hasierako baldintzak orekatuak ez egotearen eraginez.

Richardson-ek lortutako emaitzak onak izan ez ziren arren, berak argitaratutako lana funtsezkoa izan zen lehenengo ebazpen arrakastatsua lortzeko. Hasierako baldintza ezorekatuek eragindako ezegonkortasunak murrizteko, ekuazio primitiboek hurbilketa gehiago aplikatu eta bortizitate barotropikoaren ekuazioa (BVE) eratorri zen. 1950ean Julie Charney-k eta bere kideek ekuazio honetan oinarritutako iragarpenak egin zituzten ENIAC konputagailua erabiliz [16]. 24h-ko iragarpenak egiteko 24h inguru behar izan zituzten arren, iragarritako eguratsaren eskala handiko ezaugarriak neurketen antzekoak izan ziren. Lortutako arrakastak bultzatuta, 1958. urtean BVEen oinarritutako eguratseko iragarpen erregularrak hasi ziren.

Hurrengo urteetan hasierako baldintzak orekatzeko teknikak garatu ziren, eta honek, konputagailuen garapenarekin batera, ekuazio primitiboetan oinarritutako iragarpenak egitea ahalbidetu zuen. 1966tik aurrera iragarpen erregularrak egiteko erabilitako modeloak ekuazio primitiboak inplementatuz joan ziren, eta egungo modelo operazional guztiak horietan oinarritzen dira.

Azkenengo 50 urteetan aurrerapen handiak egin dira eguratsaren iragarpen numerikoaren arloan. European European Centre for Medium-range Weather Forecasts (ECMWF) erakundea sortu zen, eta 1979an martxan jarri zuten haien lehen modelo operazionala. Ordudanik etengabe hobetuz joan dira, iragarpenen erabilgarritasun tartea egun batez luzatuz hamarkadako. Gaur egun iragarpenen kalitatea mugatzen duen faktore nagusia eguratsaren izaera kaotikoa da, hasierako baldintzen kalkulan egindako errore txikiak eragin handia izan dezaketelako egun batzuen buruan. Hau konpontzeko modeloa elkarrekiko ezberdintasun txikiak dituzten egoerekin hasieratu eta iragarpen probableena zein den zehazten dute, baina metodo hau aplikatzea ez da erraza eta haren inplementazioa ikerketa hari aktibo bat da [20].

1.2 Helburuak

Gaur egun atmosferaren egoera iragartzeko erabiltzen diren modelo numerikoak oso konplexuak dira, ekuazio primitiboak ebazten baitituzte erresoluzio altuko sare fisikoetan. Halako modelo bat garatzea ezinezkoa litzateke lan honetan, eta inplementatu den modeloa 1950 eta 1960. hamarkadetan garautakoetatik hurbilago dago.

ENIAC konputagailuan inplementatu zen iragarpen modeloak bezala, lan honetan garatutako modeloak bortizitate barotropikoaren ekuazioa ebazten du eguratsaren dinamika iragartzeko. Ekuazio hau lortzeko hainbat sinplifikazio onarpen aplikatu behar zaizkie ekuazio primitiboek, eta onarpenen atzean dagoen teoria ezagutzea funtsezkoa da BVE-ren mugapenak ulertzeko. Oinarri teoriko hau 2 kapitulu jaso da.

Teoria finkatu ondoren, bortizitate barotropikoaren ekuazioa ebazteko erabilitako metodo numerikoak zein diren eta zergatik aukeratu diren azaltzen da 3 kapitulu. Metodo numerikoak aplikatzeak nahitaez eragiten ditu trunkaketa erroreak, modeloari sinplifikazio teorikoetatik haratago doazen mugapenak gehituz. Hau dela eta, edozein eguratseko modelo numeriko garatu ondoren, emandako iragarpenak eguratsean egindako neurketekin bat datozen ebaluatu behar da. Prozesu hau 4 kapitulu jaso da, non BVE modeloa ECMWFren behaketen analisiarekiko eta iragarpen modeloerekiko konparatu den.

Azkenik, 5 kapitulu, iragarpen modeloen hasierako baldintzak lortzeko erabiltzen den 3DVAR asimilazio teknikaren eredu sinplifikatu bat garatu da. Teknika hau BVE modeloari behaketek emandako informazioa periodikoki gehitu eta iragarpenen kalitatea hobetzeko erabili da.

2 Bortizitate barotropikoaren ekuazioa

Bortizitate barotropikoaren ekuazioa (BVE) ebaztearen helburua haizearen abiadura iragartzea da. Izatez, haizearen abiaduraren eboluzioa atmosferaren egoera zehazten duten beste hainbat aldagairi lotua dago *ekuazio primitiboak* izeneko ekuazio multzoak deskribatzen duen bezala. Abiadura gainerako aldagaietatik isolatu eta bortizitate barotropikoaren ekuazioa eratortzeko beharrezkoa da sinplifikazio onarpenak egitea. Kapitulu honetako helburua ekuazio primitiboetatik BVE eratorri eta sinplifikazio onarpen horiek aurkeztea da. Baina hori egin aurretik, beharrezkoa da zenbait definizio ematea.

Lanean zehar (λ, θ, r) aldagaiek definitutako erreferentzi sistema esferikoa erabiliko da, non λ longitudea, θ latitudea eta r Lurraren zentroarekiko distantzia diren. \mathbf{i} , \mathbf{j} eta \mathbf{k} bektoreek ekialde, iparralde eta kanporanzko (Lurraren zentroarekiko) norabideei dagozkien norabide bektoreak izango dira. Definizio hauen arabera, horrela idatz daiteke haizeak lurrazalarekiko duen abiadura erlatiboa (\mathbf{V}):

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \quad (2.1)$$

Bortizitatea abiaduraren errotazionala da, eta fluidoaren errotazioa kuantifikatzen du puntu jakin batean (neurketa mikroskopikoa da) [17]. Eskala-handiko meteorologiaren esparruan, bortizitatearen osagai bertikala aztertu ohi da, eta bortizitate hitza “bortizitatearen osagai bertikala” izendatzeko erabiliko da lanean zehar. Abiadura absolutuaren errotazionala *bortizitate absolutua* (η) da, eta bi osagaitan banatu ohi da *bortizitate planetarioa* (f) eta *bortizitate erlatiboa* (ζ). Lehenengoa, Lurraren errotazioaren ondoriozko bortizitatea da, eta bigarrena berriz haizeak lurrazalarekiko duen abiadura erlatiboaren ondoriozko bortizitatea:

$$f = 2\Omega \sin \theta, \quad \zeta = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{V}_H), \quad \eta = f + \zeta \quad (2.2)$$

non Ω Lurraren abiadura angeluarra eta \mathbf{V}_H haizearen abiadura erlatiboaren osagai horizontala (Lurrazalarekiko paraleloa) diren.

2.1 Ekuazio primitiboak

Haizearen abiaduraren osagaiez (u, v, ω) gain, atmosferaren egoera tenperaturaren (T), presioaren (p), dentsitatearen (ρ) eta hezetan espezifikaren (q) bidez deskribatzen da. Aldagai hauek erlazionatzen dituzten ekuazioak zazpi dira: masaren jarraitasun ekuazio bat, ur-masaren jarraitasun ekuazio bat, energia termodinamikoaren ekuazio bat, egoera ekuazio bat eta hiru higadura ekuazio [7].

Ekuazioak ulertzeko beharrezkoa da fluidoaren dinamikaren *deribatu total* edo *deribatu material* izenez ezagutzen dena definitzea. Deribatu honek fluido baten zati txiki bat (“fluid parcel” ingelesez) jarraitzen du, eta espazioko puntu finko bateko deribatu lokalaz eta adbezio gai batez osatua dago:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \quad (2.3)$$

Zerrendatutako lehen ekuazioak, masaren kontserbazio legea adierazten du:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.4)$$

Ur-masaren jarraitasun ekuazioak hezetasun espezifikokoaren aldaketak hezetasun iturri (S_O) eta hezetasun xurgatzaileekin (S_K) erlazionatzen ditu:

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q \mathbf{V}) = S_O - S_K + F_q \quad (2.5)$$

non F_q hezetasun fluktuazio turbulentuen adierazle den.

Ondoren aipaturiko energia termodinamikoaren ekuazioak termodinamikaren lehen legea adierazten du:

$$c_p \frac{DT}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \dot{Q} + F_T \quad (2.6)$$

non c_p airearen bero espezifikoa, \dot{Q} erradiazioaren ondoriozko berotze diabatikoaren abiadura, eta F_T bero fluktuazio turbulentuen adierazlea diren.

Egoera ekuazioak p , T , ρ eta q erlazionatzen ditu airea hezea denean:

$$p = \rho R_d T (1 + 0.61q) \quad (2.7)$$

non R_d aire sikuaren gas konstante espezifikoa den.

Azkenik, higidura ekuazio dinamikoak Newtonen bigarren legean oinarritzen dira, eta norabide jakin batean haizeak jasaten duen azelerazioa norabide berean eragiten duten indarrekin erlazionatzen dute. Koordenatu esferikoetan hurrengo forma dute:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{uv \tan \theta}{a} + \frac{u\omega}{a} = \\ - \frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \theta - 2\Omega \omega \cos \theta + F_x \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2 \tan \theta}{a} + \frac{v\omega}{a} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \theta} - 2\Omega u \sin \theta + F_y \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \omega \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g + 2\Omega u \cos \theta + F_z \quad (2.10)$$

non a Lurraren erradioa den. Ekuazioen ezker aldean, haizearen azelerazioaren osagaien adierazpenak agertzen dira, haizearen abiaduraren deribatu totala kalkulatuaz lortzen direnak. Ezker aldeko azken bi batugaiak *kurbatura gai* izenez ezagutzen dira, eta kalkulua egiterakoan Lurrak esfera itxura duela onartzetik datoz [17]. Eskuineko aldean indarretatik eratorritako terminoak agertzen dira. Lehenengo batugaia *presio gradiente indarrari* lotua dago ekuazio guztietan, Ω -ren mendeko gaiak *Coriolis indarretik* eratorriak dira eta g azelerazio grabitatorio eraginkorra da (egiazko azelerazio grabitatorioaren eta Lurraren indar zentrifugoaren konbinaketa). Azkenik, F_x , F_y eta F_z -k indarraren fluktuazio turbulenteekin zerikusia dute.

Aipatu behar da, idatzitako higidura ekuazioetan inplizituki onartzen dela Lurraren erradioa atmosferaren altuera baino askoz handiagoa dela.

2.2 Bortizitate barotropikoaren ekuazioa

Bortizitate barotropikoaren ekuazioa higidura ekuazioetatik eratorritzen da, gainerako ekuazioetan ere eragina duten sinplifikazio onarpenak aplikatuaz.

Hasteko, $\cos \theta$ duten Coriolis indarrari lotutako gaiak, eta F_x , F_y eta F_z arbuia egi-ten dira haien magnitude erlatibo txikia delako ([17]-ko 2.1 taulan kontsulta daitezke termino bakoitzaren magnitudeak).

Ondoren, atmosferaren eskala horizontala bere eskala bertikala baino askoz handiagoa denez, hurbilketa hidrostatikoa aplikatzen da. Honen arabera, grabitate indarra eta presio gradiente indarra orekan daude higidura ekuazio bertikalean, eta beraz, azelerazio bertikala arbuia garria da [6]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2.11)$$

Atmosfera homogenea dela onartuz gero (ρ konstantea), (2.11) ekuazioak adierazten du presioaren gradiente horizontala r -rekiko independentea dela. Kontsideratutako indar eragileak r -rekiko independenteak direnez, abiaduraren osagai horizontalak ere r -rekiko

independenteak direla onartzen da. Ondorioz, adbezio bertikalari dagozkion gaiak ar-
buiatzen dira.

Onarpen guzti hauen pean eta f -ren definizioa erabiliz, higidura ekuazio horizontal hur-
bilduak honela idatz daitezke:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{uv \tan \theta}{a} = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + fv \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u^2 \tan \theta}{a} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \theta} - fu \quad (2.13)$$

(2.12) eta (2.13) ekuazioetatik, higidura ekuazio horizontalaren aldaera bektoriala lor-
daiteke [13]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_H}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla \mathbf{V}_H + f \mathbf{k} \times \mathbf{V}_H + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (2.14)$$

non ∇ gradiente operatzaile horizontala den.

Hurrengo pausoa (2.14) ekuazioan ζ bortizitatea agerraraztea da, $\mathbf{V}_H \cdot \nabla \mathbf{V}_H$ gaia (2.15)
identitatea erabiliz ordezkatu eta ekuazioaren errotazionalaren osagai bertikala kalkula-
tuz:

$$\mathbf{V}_H \cdot \nabla \mathbf{V}_H = (\nabla \times \mathbf{V}_H) \times \mathbf{V}_H + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V}_H \cdot \mathbf{V}_H) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \left[\frac{\partial \mathbf{V}_H}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{V}_H) \times \mathbf{V}_H + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{V}_H \cdot \mathbf{V}_H) + f \mathbf{k} \times \mathbf{V}_H + \frac{1}{\rho} \nabla p \right] = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (\zeta + f) \mathbf{V}_H = 0 \quad (2.17)$$

(2.17) bortizitate ekuazio izenez ezagutzen da, eta honela berridatz daiteke:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla (\zeta + f) + (f + \zeta) \nabla \cdot \mathbf{V}_H = 0 \quad (2.18)$$

Behin bortizitate ekuazioa lortuta, hurbilketa barotropikoa aplikatzen da. Hau da, at-
mosfera homogenea izateaz gain, konprimaezina ($D\rho/Dt = 0$) dela ere onartzen da.
Beraz, (2.4) ekuazioa honela geratzen da [17]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \text{ edo } \nabla \cdot \mathbf{V}_H = -\frac{\partial \omega}{\partial r} \quad (2.19)$$

Azkenik, Lurrazala guztiz leuna dela eta atmosferaren lodiera konstantea dela onartzen
da. [7]-ko 6.4 atalean eta [17]-ko 4.5.2 azpiataletan azaltzen den bezala, abiaduraren

osagai bertikala nulua izatea ($\omega = 0$) eragiten du honek, (2.18) ekuazioko $\nabla \cdot \mathbf{V}_H$ dibergentzia terminoa anulatuz. Horrela bortizitate barotropikoaren ekuazioa lortzen da:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla(\zeta + f) = 0 \quad (2.20)$$

Egindako onarpen guztien pean, bortizitate barotropikoaren ekuazioak adierazten du η bortizitate absolutua kontserbatu egiten dela [5]:

$$\frac{D\eta}{Dt} = 0 \quad (2.21)$$

Gainera, BVE ebatzea nahikoa da haizearen abiadura lortzeko, ez dago ekuazio primitiboetatik eratorritako beste ekuaziorik ebazteko beharrik. Ebazpen prozesua azaldu aurretik ordea, kalkulu konputazionalak errazteko erabilgarria den parametro bat definitzea komeni da, *korrante-funtzioa* (ψ):

$$\nabla^2 \psi = \zeta, \quad u = -\frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v = \frac{1}{a \cos \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad (2.22)$$

Erlazio hauek eta f -ren definizioa (2.20) ekuazioan ordezkaturik, bortizitate barotropikoaren ekuazioa korrante-funtzioaren mende idatz daiteke:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (2.23)$$

Aurkeztutako onarpen eta sinplifikazio guztiak eginda ere, ebatzi beharreko bortizitate barotropikoaren ekuazioa deribatu partzialetako ekuazio ez lineala da, (2.23) ekuazioak erakusten duen moduan.

3 Metodo espektralaren bidezko ebazpena

Bortizitate barotropikoaren ekuazioa ebazten duen modelo bat eraikitze hainbat metodo numeriko erabil daitezke. Ezagunenak diferentzia finituetako metodoak eta metodo espektralak dira. Historikoki, diferentzia finituetako metodoak erabili ziren lehendabizi (50. hamarkan argitaratutako [16] eta [10]-n adibidez), eta metodo espektraletan oinarritutako modeloak beranduago garatu ziren (1961. urtean argitaratutako [22] artikuluan deskribatzen dena kasu).

Hasiera batean, diferentzia finituetan oinarritutako modelo bat inplementatu zen lan honetan, [7] liburuko 7 kapitulua jarraituz. Liburuan modeloa ebaluatzeko planteatzen diren ariketetan emaitza zuzenak lortu ziren, baina modeloak zenbait mugapen ditu. Hasteko, koordenatu esferikoak erabili beharrean koordenatu kartesiarrak erabiltzen dira BVE ebazteko, Lurraren kurbaturaren ondorioz agertzen diren gaiak kontuan hartu gabe. Horrez gain, konputazionalki oso motela den erlazazio metodoa erabiltzen da Poisson-en ekuazioa ($\nabla^2\psi = \zeta$) ebatzi eta bortizitatetik korrante-funtzioa lortzeko. Azkenik, kontu handia eduki behar da mugalde baldintzak definitzerakoan.

[22]-n azaltzen da metodo espektralek ez dituztela aipaturiko diferentzia finituko modeloaren mugapenak aurkezten. Hau dela eta, inplementaturiko diferentzia finituetako modeloa baztertu eta metodo espektraletan oinarritutako modeloa garatzea erabaki zen azkenean.

Modeloa Python programazio lengoaiari idatzita dago, eta esparru zientifikoan ohikoak diren NumPy, SciPy, Matplotlib eta beste hainbat liburutegi erabiltzen ditu. Horrez gain, Numba erabili da kodeko zati batzuk exekuzio denboran konpilatu eta azeleratzeko [4].

3.1 Metodo espektrala

Metodo espektraletan espazio eta denborarekiko diferentzialak diren ekuazioak soilik denborekiko diferentzialak diren ekuazio bihurtzen dira. Horretarako, ekuazioko aldagai espazialen mendeko funtzioak, (2.23) ekuazioko ψ kasu, elkarrekiko ortogonalak diren *oinarri funtzioen* batura bezala adierazten dira. Batugai bakoitzeko oinarri funtzioa *koeffiziente espektral* batez biderkatua dago, eta honek denborarekiko mendekotasuna dauka bakarrik. Oinarri funtzioak elkarrekiko ortogonalak direnez, hasiera batean espazioarekiko diferentziala zen ekuaziotik ekuazio sistema bat lortzen da, oinarri funtzio bezain beste ekuazio dituen. Ekuazio bakoitza denborarekiko ekuazio diferentzial arrunta da, eta diferentzia finituko metodoak aplikatuz ebatz daitezke [7].

Harmoniko esferikoak

BVE lurrazalarekiko paraleloa den gainazal esferiko batean ebazteko oinarri funtzio aproposenak harmoniko esferikoak dira. Hauek hainbat modutan definitu daitezke aukeratu-tako normalizazio faktorearen arabera, eta lan honetan [7]-ko 11.6.1 azpiataleko definizioa erabiltzea aukeratu da:

$$Y_{m,n}(\mu, \lambda) = \beta_{m,n} P_{m,n}(\mu) e^{im\lambda} \quad (3.1)$$

non $\mu = \sin \theta$ den, eta n eta m hurrengo baldintzak betetzen dituzten zenbaki osoak:

$$n \geq 0 \text{ eta } m \in [-n, n] \quad (3.2)$$

$\beta_{m,n}$ normalizazio faktorea da,

$$\beta_{m,n} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (3.3)$$

eta $P_{m,n}(\mu)$ lehenengo motako Legendreren polinomio kideak:

$$P_{m,n}(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2 - 1)^n \quad (3.4)$$

Definizio honen arabera harmoniko esferikoek hurrengo ortogonalitate erlazioa betetzen dute:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} Y_{m,n}(\mu, \lambda) Y_{r,s}^*(\mu, \lambda) d\lambda d\mu = \delta_{m,r} \delta_{n,s} \quad (3.5)$$

Harmoniko esferikoak programatikoki implementatzeko zailtasun handiena Legendreren polinomio kideen kalkulua da. Hauek lortzeko polinomioen arteko erlazioetan oinarritutako prozesu iteratiboak erabiltzen dira, [13]-ko 4.4 atalean deskribatzen direnak kasu. Hasiera batean, halako prozesu iteratiboetan oinarritutako funtzio bat programatu zen, baina kalkuluetan faktorialen erabilerak zenbaki handiak agertzea eta emaitzen zehaztasuna txikitzea eragiten zuen. Horregatik, sendoagoa eta zehatzagoa den `scipy.special.lpmn` funtzioa erabili zen azkenean.

Aurreranzko eta alderantzizko transformatuak

Metodo espektralean bi espazio bereizten dira: espazio fisikoa (non ekuazioak aldagai espazialen mende idazten diren) eta espazio espektrala (non ekuazioak m eta n uhin zenbakien bidez adierazten diren). Espazio batetik bestera igarotzeko transformatuak erabiltzen dira; aurreranzkoa fisikotik espektralera igarotzeko eta alderantzizkoa espektraletik fisikora igarotzeko. BVE ekuazioa ebazteko transformatu hauek ψ korrante funtzioari aplikatzen zaizkio, zein eremu fisikoan $\psi(\lambda, \mu, t)$ balio multzo batez adierazia dagoen, eta eremu espektralean $\psi_{m,n}(t)$ koefiziente espektralaren bidez.

$\psi(\lambda, \mu, t)$ harmoniko esferikoen serie baten bidez adierazten da, eta koefiziente espektralak ezagututa latitude eta longitude bakoitzari dagokion korrante funtzioa kalkulatzeko hurrengo erlazioa erabil daiteke [13]:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{N(m)} \psi_{m,n}(t) Y_{m,n}(\mu, \lambda) \quad (3.6)$$

non M seriean erabilitako harmoniko esferikoen ordena altuena den. Normalean, eta hala egin da lan honetan, mozketari triangeluarra egiten da: $N(m) = M$ [5, 13].

Latitude eta longitude guztietako ψ -ren balioak lortzeko, eragiketa kopuru handia behar da. Prozesua azkartzeko, (3.6) ekuazioa bi pausutan ebazten da, eta latitude jakin bateko $\psi(\lambda, \mu, t)$ balioak lortzeko *alderantzizko Fourierren transformatu azkarra* izeneko algoritmoa aplikatzen da. Hurrengo banaketa egiten da:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \hat{b}_m(\mu, t) e^{im\lambda} \quad (3.7)$$

non

$$\hat{b}_m(\mu, t) = \sum_{n=|m|}^M \psi_{m,n}(t) \beta_{m,n} P_{m,n}(\mu) \quad (3.8)$$

(3.7) ebazterakoan aplikatzen da alderantzizko Fourierren transformatu azkarra, eta horri esker, latitude bakoitzean longitude balio guztietako $\psi(\lambda, \mu, t)$ balioak lortzeko $O[M^2]$ operazio egin beharrean $O[M \log M]$ egiten dira. Implementatutako modeloan `scipy.fftpack.ifft()` funtzioa erabili da alderantzizko Fourierren transformatu azkarra kalkulatzeko, eta gainerako batuketak `for` egitura arrunten bidez egin dira.

Eremu fisikotik espektralera igarotzeko, $\psi_{m,n}(t)$ koefizienteak $\psi(\lambda, \mu, t)$ -ren mende adierazi behar dira:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda, \mu, t) Y_{m,n}^*(\mu, \lambda) d\lambda d\mu \quad (3.9)$$

Kasu honetan ere adierazpena banatu egiten da, *Fourierren transformatu azkarra* aplikatu ahal izateko:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \hat{a}_m(\mu, t) \beta_{m,n} P_{m,n}(\mu) d\mu \quad (3.10)$$

$$\hat{a}_m(\mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda \quad (3.11)$$

(3.11) ekuazioko longitudearekiko integrala da Fourierren transformatu azkarra erabiliz ebazten dena, eta (3.10)-ko integrala koadratura Gaussdarra erabiliz kalkulatu da.

Inplementatutako programan `scipy.fftpack.fft()` Fourierren transformatu azkarra, eta `scipy.special.roots_legendre()` funtzioan oinarritutako koadratura Gaussdarra erabili dira.

(3.9)-ko integrala ebazterakoan, longitude eta latitude kopuru minimo bat behar da, trunkaketa triangeluarra duen garapen espektraleko koefizienteak ondo definitzeko. [13]-ren arabera, gutxienez λ -ren $3M+1$ balio eta μ -ren $(3M+1)/2$ erabili behar dira integrala kalkulatzeko. Hau eginez gero, trunkaketa errore bakarra mozketan triangeluarrak eragindakoa da, integralaren kalkuluak ez du errorea handitzen.

Deribatu espazialak eremu espektralean

Esan bezala, metodo espektralaren abantaila nagusia deribatu espazialak kalkulatzeko ematen duen erraztasuna da. Arrazoia da harmoniko esferikoen deribatu espazialak beste harmoniko esferiko batzuen konbinazio lineal gisa idatz daitezkeela. Behin $\psi(\lambda, \mu, t)$ harmoniko esferikoen batura moduan adierazita, bere deribatuen kalkulua egiteko oinarri funtzio bakoitzari dagokion konbinazio lineala aplikatzen zaio, deribatua esplizituki kalkulatu beharrean.

Harmoniko esferikoak Laplazzarraren autofuntzioak dira koordenatu esferikoetan, eta hurrengo erlazioa betetzen dute [13]:

$$\nabla^2 Y_{m,n} = \frac{-n(n+1)}{a^2} Y_{m,n} \quad (3.12)$$

Beraz, $\psi(\lambda, \mu, t)$ -ren Laplazzarra ondokoa da:

$$\nabla^2 \psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_{m,n}(t) \frac{-n(n+1)}{a^2} Y_{m,n}(\mu, \lambda) \quad (3.13)$$

Longitudearekiko deribatu partzialak hurrengo erlazioa betetzen du [7]:

$$\frac{\partial Y_{m,n}}{\partial \lambda} = im Y_{m,n} \quad (3.14)$$

Eta bertatik lortzen da:

$$\frac{\partial \psi(\lambda, \mu, t)}{\partial \lambda} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_{m,n}(t) im Y_{m,n}(\mu, \lambda) \quad (3.15)$$

Azkenik, harmoniko esferikoen μ -rekiko deribatu partzialek hurrengo ekuazioa betetzen dute [7]:

$$(\mu^2 - 1) \frac{\partial Y_{m,n}}{\partial \mu} = C_1(m, n) Y_{m,n+1} + C_2(m, n) Y_{m,n-1} \quad (3.16)$$

non

$$C_1(m, n) = \frac{n(n-m+1)}{2n+1} \frac{\beta_{m,n}}{\beta_{m,n+1}} \quad (3.17)$$

$$C_2(m, n) = -\frac{(n+m)(n+1)}{2n+1} \frac{\beta_{m,n}}{\beta_{m,n-1}} \quad (3.18)$$

Beraz,

$$(\mu^2 - 1) \frac{\partial \psi(\lambda, \mu, t)}{\partial \mu} = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{M+1} [C_1(m, n-1) \psi_{m,n-1}(t) + C_2(m, n+1) \psi_{m,n+1}(t)] Y_{m,n}(\mu, \lambda) \quad (3.19)$$

$\psi_{m,n}(t)$ -ren balio ez nuluak μ -rekiko deribatu partzialaren $(m, n+1)$ koefiziente espektrala ez nulua izatea eragiten du. Beraz, kasu honetan, n aldagaia $M+1$ baliorarte doa, deribatu partziala kalkulatzeko informaziorik ez galtzeko [5].

3.2 BVE-ren ebazpena

Metodo espektrala egokia da deribatu partzialetako ekuazio linealak ebazteko, baina BVE bezalako ekuazio ez linealetan zuzenean aplikatuz gero, batukarien arteko biderketak kalkulatu beharko lirateke. Horregatik, zuzenean aplikatu beharrean, *transformatuaren metodoa* erabiltzen da. Metodo honetan eremu fisikoaren eta eremu espektralaren arteko transformazioak egiten dira eragiketa mota bakoitza eremu egokienean egiteko: deribatuak eremu espektralean eta gai ez linealetako biderketak eremu fisikoan [7].

BVE eremu espektralean

BVE-ren (2.23) adierazpenak $\psi(\lambda, \mu, t)$ -ren aldiune ezberdinetako balioak erlazionatzen ditu. Metodo espektrala aplikatzerakoan, pareko erlazio bat erabiltzen da, baina $\psi_{m,n}(t)$ koefiziente espektralaren artean.

Erlazio hori lortzeko lehendabizi (2.23) ekuazioa honela berridaztea komeni da:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \left((\mu^2 - 1) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right) - \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right) \left((\mu^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \right] \quad (3.20)$$

Horrez gain, BVE ekuazioko gai ez linealak biltzen dituen hurrengo terminoa defini daiteke:

$$G(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{1 - \mu^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \left((\mu^2 - 1) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \mu} \right) - \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right) \left((\mu^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) \right] \quad (3.21)$$

$G(\lambda, \mu, t)$ -ren balioa lortzeko, lehenik eta behin, deribatu espazialak eremu espektralean kalkulatu dira. Ondoren, deribatu bakoitzaren alderantzizko transformazioa egiten da eremu fisikoan duten balioa lortzeko, eta azkenik, eremu fisikoko balioak puntutz puntu (λ eta μ -ren balio bakoitzerako) biderkatzen dira. BVE ebatzi ahal izateko lorturiko $G(\lambda, \mu, t)$ -ren aurreranzko transformazioa egin behar da, eremu espektralera itzuli eta $G_{m,n}(t)$ balioak lortuz:

$$G_{m,n}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} G(\lambda, \mu, t) Y_{m,n}^*(\mu, \lambda) d\lambda d\mu \quad (3.22)$$

(3.20) ekuazioan ψ harmoniko esferikoen batura moduan adierazi eta deribatu espazialen adierazpenak erabiliz, hurrengo ekuazioa lor daiteke:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_{m,n}(t) \frac{-n(n+1)}{a^2} Y_{m,n}(\mu, \lambda) \right) = \\ - \frac{2\Omega}{a^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M \psi_{m,n}(t) im Y_{m,n}(\mu, \lambda) \\ + \frac{1}{a^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M G_{m,n}(t) Y_{m,n}(\mu, \lambda) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Azkenik, harmoniko esferikoak elkarrekiko ortogonalak direla kontuan izanik m, n bikote bakoitzak betetzen duen denborarekiko deribatu partzialaren adierazpena lor daiteke:

$$\frac{\partial \psi_{m,n}(t)}{\partial t} = \frac{1}{n(n+1)} [2\Omega im \psi_{m,n}(t) - G_{m,n}(t)] \quad (3.24)$$

Deribatu tenporala

Denborarekiko deribatua denbora diskretizatu eta diferentzia finituko teknikak erabiliz ebazten da [7]. Aldiune diskretuak q zenbaki osoarekin zenbakitu eta denbora pausua Δt izendatuz, $\psi_{m,n}(t)$ koefizientea $\psi_{m,n}^q$ bihurtzen da, $t = q\Delta t$ izanik.

Egindako inplementazioan, aurreranzko diferentziazioa erabiltzen da lehenengo iterazioan, $\psi_{m,n}$ -ren hasierako balioa soilik ezagutzen delako:

$$\psi_{m,n}^1 = \psi_{m,n}^0 + \Delta t \frac{1}{n(n+1)} [2\Omega im \psi_{m,n}^0 - G_{m,n}^0] \quad (3.25)$$

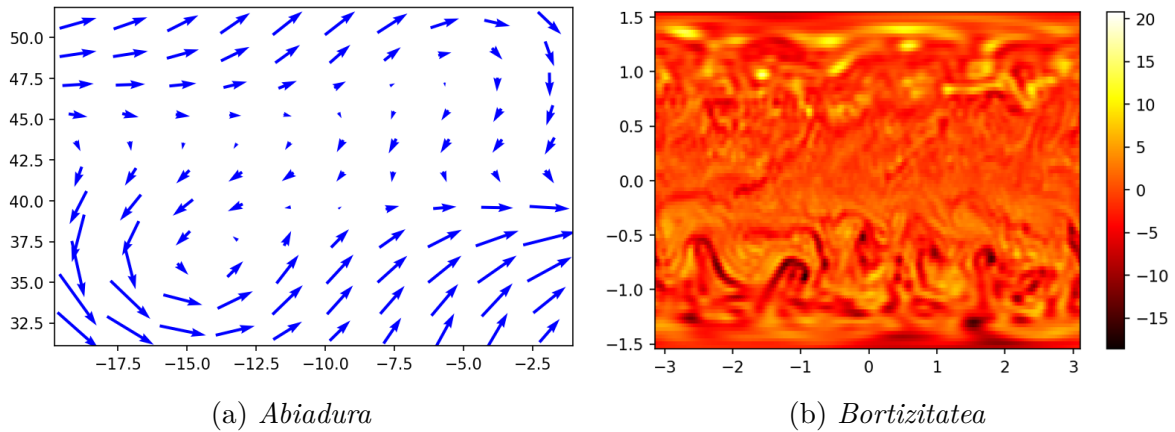
Ondorengoetan, diferentziazio zentratua erabiltzen da:

$$\psi_{m,n}^{q+1} = \psi_{m,n}^{q-1} + 2\Delta t \frac{1}{n(n+1)} [2\Omega im \psi_{m,n}^q - G_{m,n}^q] \quad (3.26)$$

Behin etorkizuneko aldiuneko $\psi_{m,n}(t)$ koefiziente espektralak kalkulatu, alderantzizko transformatua aplikatuz $\psi(\lambda, \mu, t)$ -ren balioak lortzen dira.

Bortizitatearen eta abiadura horizontalaren osagaien eratorpena

BVE ebazteko erabiltzeaz gain, metodo espektrala korrante funtzioetik bortizitatea (ζ) eta abiaduraren osagai horizontalak (\mathbf{u} eta \mathbf{v}) lortzeko aplikatu daiteke (2.22) ekuazioak ebartziz. Implementaturiko modeloak magnitude hauek kalkulatu eta Matplotlib-ek eskaintzen dituen funtzioak erabiliz 3.1 irudian jaso diren bezalako grafikoak sor ditzake.

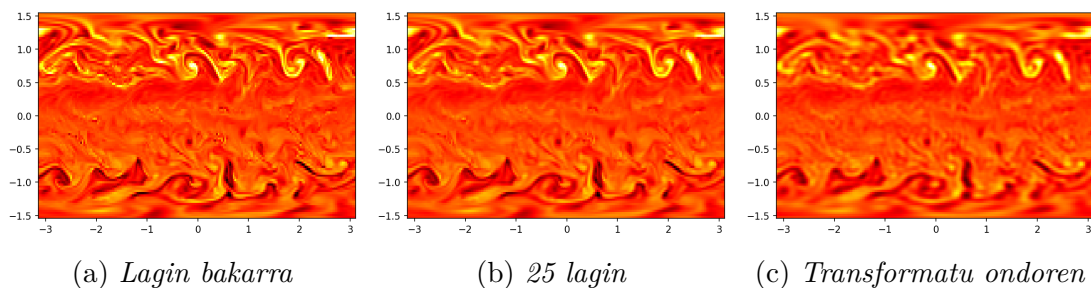


3.1 Irudia: Ezkerrean haizearen \mathbf{u} eta \mathbf{v} osagaien arabera irudikaturiko haizearen abiadura horizontalaren gezi diagrama kualitatiboa, gradutan adierazitako koordinatuetan. Eskuinean ζ bortizitate erlatiboaren araberrako kolore diagrama, non kolore barrako balioak $\times 10^5 s^{-1}$ -etan dauden eta koordinatuak rad-etan.

3.3 Hasierako baldintzak

BVE ekuazioaren ebazpena hasierako baldintzen mendeko problema da. Egindako inplementazioan, hasierako baldintza horiek ERA Interim datu basetik jaitzita .nc formatuko fitxategietatik eskuratzen dira. Konkretuki bortizitate erlatiboaren hasierako egoera da fitxategitik ateratzen den informazioa, koordinatu bikote bakoitzeko bortizitate balioa gordetzen duen matrize bidimentsionalaren forman. Fitxategi horretako sarearen erresoluzioa programak ebartz dezakeena baino handiagoa denez, bortizitate matrizea moldatu egin behar da hasierako baldintza moduan erabiltzeko. Bi pausutan egokitzen da .nc fitxategiko bortizitate matrizea:

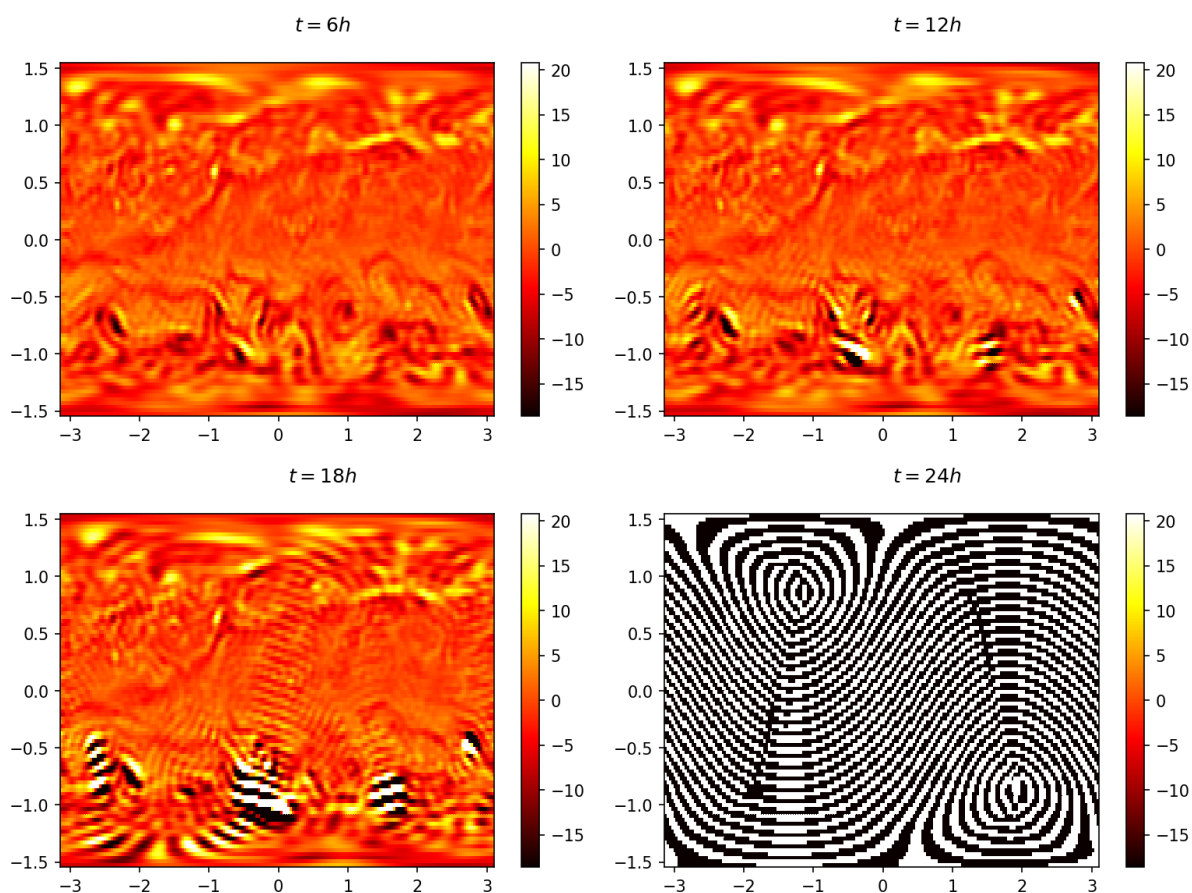
1. Bortizitate matrizeko balioak eta Scipy-ren `RectBivariateSpline()` funtzioa erabiliz, bortizitatea sarearen mugen barneko edozein puntutan kalkula dezakeen g funtzioa lortu da. Aukerarik sinpleena programaren erresoluzio txikiagoko sarearen puntu bakoitzeko g aplikatu eta dagokion bortizitate balioa lortzea da. Hau eginez gero ordea, bortizitate aldaketa zorrotzak ager daitezke programako sareko ondoz ondoko puntuen artean (aliasing-a). Programako sareko puntu bakoitzak azalera bat errepresentatzen du; azalera horri dagokion bortizitatearen balioa lortzeko azalera barneko puntu bakarra erabiliz gero, baliteke emaitza azaleraren egiazko bortizitateetik urrun egotea. Arazo hau ekiditeko, programaren sareko puntu bakoitzaren inguru hurbileko hainbat balio hartu eta batezbestekoa kalkulatu da. Balioak lortzeko, sareko puntuak errepresentatzen duen azalera uniformeki zatitzen da, g funtzioak eskatzen dituen latitude eta longitude balioak lortzeko. Metodo hau *uniform-supersampling* izenez ezagutzen da, eta aliasing-a ekiditeko erabil daitezkeen teknika sinpleenetako bat da. Bortizitatea programaren sareko puntu guztietan ebaluatuz, programak erabil dezakeen bortizitate matrizea lortzen da. 3.2a eta 3.2b irudiek sareko puntu bakoitzeko lagin bakarra erabiliz lortutako bortizitatea, eta puntu bakoitzeko 25 lagin erabiliz lortutakoa adierazten dituzte hurrenez hurren.
2. Uniform-supersampling aplikatzerakoan, ondoz ondoko puntuen arteko bortizitate balio aldaketa handiak egotea ekiditen da. Hala ere, garapen espektralean eginko trunkaketaren eraginez, programa ez da gai sarearen erresoluzio espazialaren ($\Delta\lambda, \Delta\theta$) eskalatik hurbil dauden bortizitate aldaketak kontuan hartzeko. Hau dela eta, hasierako baldintza bezala erabili aurretik, bortizitate matrizearen eremu espektraleko koefizienteak kalkulatu (aurreranzko transformatua), eta lortutako koefizienteak erabiliz berriro ere eremu fisikoko bortizitate matrizea berreskuratzen da (alderantzizko transformatua). Horrela, programak errepresenta eta erabil dezakeen hasierako bortizitate matrize bat lortzen da. Honelako bortizitate matrize bat erabili da 3.2c irudia sortzeko.



3.2 Irudia: *Grafiko hauek ERA Interim-etik ateratako bortizitate matrize baten egokitze prozesua erakusten dute. Koloreek bortizitatea adierazten dute, eta kontuz behatuz gero, ezberdintasunak ikus daitezke grafikoen artean. Grafikoetako ardatz horizontal eta bertikaletan longitudea eta latitudea ageri dira rad-etan.*

3.4 Egonkortasuna eta iragazkiak

BVE modeloa inplementatu eta hasierako baldintza egokiak lortu ondoren, modeloa martxan jarri eta bortizitatearen lehen iragarpenak lortu ziren. Emaitzak 3.3 irudian jaso dira, eta ikus daitekeen bezala ezegonkortasun nabarmenak agertzen dira denboran aurrera egin ahala. Ezegonkortasunak gero eta anplitude handiagoa duten uhin luzera txikiko bortizitate oszilazioak dira. Haien uhin luzera modeloak errepresenta dezakeen uhin luzera txikienetik hurbil dago, eta seguruenik *Gibbs fenomenoarekin* zerikusia dute. Fenomeno hau eremu espektralean egindako trunkaketaren ondorioz gertatzen da, eremu fisikoko uhin luzera txikieneko oszilazio edo desjarraitasunak ezin direlako eremu espektraleko oinarri funtzio leunen bidez adierazi [9, 12].



3.3 Irudia: Oinarrizko BVE modeloak iragarritako bortizitatea. Ardatz horizontalean longituedea ageri da rad-etan, bertikalean latitudea rad-etan eta kolore barran bortizitate erlatiboa $\times 10^5 s^{-1}$ -etan. t -k hasierako aldiunetik igarotako denbora adierazten du ordutan.

Oszilazioak desagerrarazi eta emaitza konbergenteak lortzeko, BVE modelo espektralean ohikoak diren bi iragazki aplikatzea erabaki zen: hiperdifusio iragazkia eta Robert-Asselin iragazkia.

Hiperdifusio iragazkia

Iragazki honen helburua eremu espektraleko (m, n) balio handieneko harmoniko esferikoei dagozkien koefizienteen magnitudea murriztea da, hauek baitira eremu fisikoko uhin luzera txikiko oszilazioei lotuak daudenak. Iragazkia eremu bortizitate barotropikoaren ekuazioari hiperdifusio termino bat gehitzean oinarritzen da. Termino honek ez du justifikazio fisikorik, baina beharrezkoa da modeloa egonkortzeko.

Hiperdifusioa gehitzeko erabilitako adierazpena [12]-n jasotzen dena da:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, f + \nabla^2 \psi) - (-1)^h K_{2h} \nabla^{2h} (\nabla^2 \psi) \quad (3.27)$$

non

$$J(\psi, f + \nabla^2 \psi) = \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{1}{a^2 \cos \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (3.28)$$

$2h$ hiperdifusioaren ordena da, eta K_{2h} hiperdifusio koefizientea:

$$K_{2h} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{a^2}{n_0(n_0 + 1)} \right)^h \quad (3.29)$$

τ hiperdifusioaren n ordena altueneko gaiari dagokion “e-folding time scale” delakoa da, a planetaren erradioa eta n_0 modelo espektralak erabiltzen duen n -ren balio handiena (M zenbakia, mozketari triangeluarraren kasuan).

Robert-Asselin iragazkia

Diferentzia finituetako metodo zentratuak bi soluzio posible ditu: modu fisikoa eta modu konputazionala [12]. Modu fisikoa nahi den “egiazko” soluzioa da, eta modu konputazionala denbora pausu bakoitzean gero eta magnitude handiagoa duen uhin luzera txikiko oszilazioa. Modu konputazionalak ere eragina du modeloaren egonkortasunean, eta iragazi ezean bere magnitudea modeloa hondatu arte haz daiteke.

Modu konputazionala iragazteko Robert-Asselin iragazkia erabiltzen da, (3.26) ekuazioa eta gero aplikatuz. Hurrengoa da bere adierazpena:

$$\psi_{m,n}^q = (1 - 2r)\psi_{m,n}^q + r(\psi_{m,n}^{q+1} + \psi_{m,n}^{q-1}) \quad (3.30)$$

r 0.05 eta 0.2 artean dagoen zenbaki bat izan ohi da [12], eta gainerako aldagaiak (3.26) ekuazioko berberak dira.

4 Egiaztapena eta balioespena

[7]-ren arabera egiaztapena eta balioespena egurats modelo baten kalitatea ebaluatzen duten prozesuak dira. Egiaztapenaren helburua modeloan akatsik gabeko algoritmo egokiak erabiltzen direla ziurtatzea da. Balioespenaren helburua berriz, modeloak eguratsaren egoera zeinen ondo iragartzen duen ebaluatzea da.

Egiaztapen prozesuan lehendabizi modeloaren azpi-modulu bakoitza bere aldetik probatzen da, izan ditzakeen akatsak topatu eta konpontzeko. Ondoren, modeloak bere osotasunean funtzionatzen duen egiaztatzen da, modelo egonkorra dela eta emaitza arazoigarriak (magnitude egokikoak) ematen dituela konprobatzeko. 3.4 ataletan azaldu da inplementatutako modelo egonkortzeko iragazkiak beharrezkoak direla. Iragazki hauen parametroak 4.1 atalean azaldutako egiaztapen prozesuaren bidez egokitu dira. Behin egiaztapen prozesua bukatuta, egurats modelo batek ez luke kodifikazio akatsik eduki beharko, baina posible da inplementatutako modeloan detektatu gabeko akatsen bat egotea.

Balioespen prozesua egiteko hainbat metodo existitzen dira, kualitatibo zein kuantitatiboak, eta helburuaren arabera bata edo bestea erabiltzea komeni da. Lan honetan, helburu nagusia inplementatutako modeloaren emaitzak eta ERA Interim datu baseko analisiak konparatzea izan da, modeloaren kalitatea ebaluatzeko. Horrez gain, modeloaren mugak hobeto ikustarazten dituzten grafikoak sortu dira. Azkenik, modelo ERA Interim-ek eskaintzen dituen ECMWF iragarpen modeloaren emaitzekiko ere konparatu da.

4.1 Begi hutseko egiaztapena eta balioespena

Modelo osoa egonkorra den eta emaitza arazoigarriak ematen dituen egiaztatze erarik sinpleena iragarritako bortizitatea zuzenean aztertzea da. Modeloaren iragarpenak 4.1 irudikoak bezalako kolore grafikoak sortzeko erabiliz, erraz ikus daitezke ezegonkortasun numerikoak eta bortizitatearen balio tartea.

3 kapituluan deskribaturiko BVE ebazteko metodo espektralak zehaztu beharreko bi parametro nagusi ditu, denbora pausua (Δt) eta mozketa zenbakia (M). Mozketa zenbaki handiegia aukeratzeak zehaztasun galera eta “overflow”-a eragin ditzake 3.1 atalean deskribatutako harmoniko esferikoen kalkuluan. Arrazoi horregatik, eta kostu konputazionalak murrizteko, ohiko erresoluzio baxuko aukeraketa egin da: $M = 63$. Denbora pausua $\Delta t = 900s$ aukeratu da, enpirikoki konprobatuz balio txikiagoek ez dutela inplementatutako modeloaren emaitza aldatzen.

Zehaztu beharreko gainerako parametroak hiperdifusio eta Robert-Asselin iragazkien parametroak dira. Parametroak aldatu eta kolore grafikoak aztertuz, hurrengo aukeraketa egonkorra dela konprobatu da (zehazki 10 eguneko iragarpenaren emaitza egonkorra dela egiaztatu da):

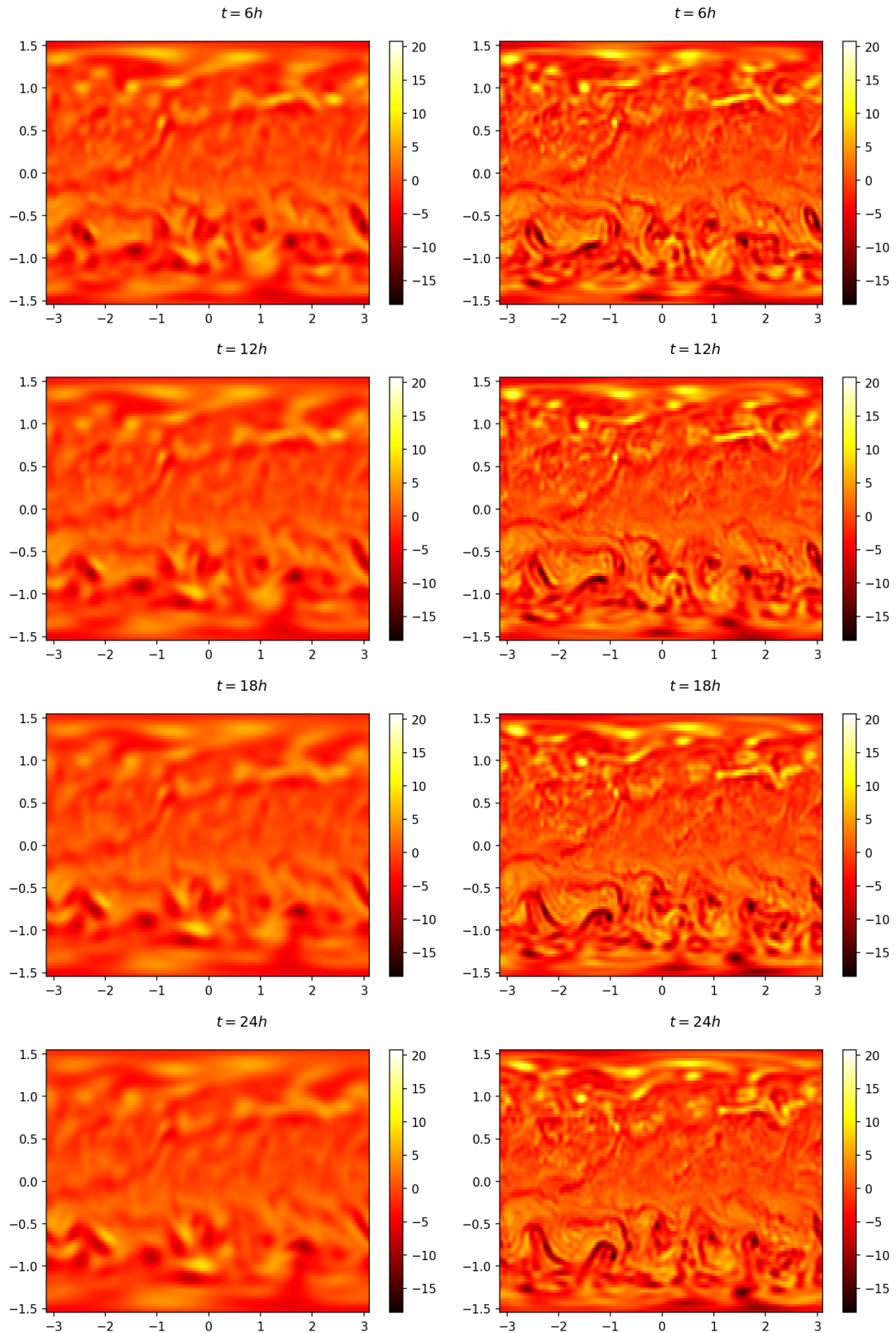
$$n_0 = M = 63, \tau = 25200s, h = 2 \text{ eta } r = 0.2 \quad (4.1)$$

Gainera, K_{2h} hiperdifusio koefizientea 9-gatik biderkatu da hiperdifusioaren eragina indartzeko. Aukeratutako hiperdifusioaren parametroak [12]-ko *Examples of Diffusion Coefficients in Spectral Models* ataleko balioetatik hurbil daude. r -ren balioa [12]-ko *Robert-Asselin Filter* atalean zehazturiko balio tartearen barnean dago, aipatzen diren balio handienetatik hurbil.

Egiaztapenaz gain, bortizitatearen kolore grafikoak modeloaren balioespen kualitatibo bat egiteko ere erabil daitezke. 4.1 irudian alboz albo kokatu dira inplementatutako BVE modeloaren eta ERA Interim-eko analisiaren bortizitate grafikoak (hasierako bortizitatea 2019/07/20-ko 00:00-etan, 500 *hPa*-eko presio mailari zegokiona izanda). Ondoz ondoko irudiak konparatuz ikusten den lehenengo gauza BVE modeloan gertatzen den erresoluzio galera da. Irudi hauetako grafiko guztiek $(\Delta\lambda, \Delta\theta)$ eskala espazial berbera daukate, baina iragazkien eraginaren ondorioz, BVE bortizitate grafikoek $(\Delta\lambda, \Delta\theta)$ eskalatik hurbil dauden uhin luzera txikiko aldaketei buruzko informazioa galdu dute. Efektiboki, eta hala dirudi grafikoak begi hutsez behatuz gero, programak auresandako grafikoen $(\Delta\lambda, \Delta\theta)$ eskala espaziala ERA Interim datu basetik eskuratutako bortizitate grafikoena baino handiagoa da.

Erresoluzio galera ez da analisi bortizitateekiko bakarrik gertatzen, denboran aurrera egin ahala, iragarritako BVE bortizitateak gero eta uhin luzera handiagoi buruzko informazioa galduz doaz. Hau hiperdifusio iragazkiak gradu txikiagoko (n zenbaki txikiagoko) moduetan ere eragin txiki bat daukalako gertatzen da, denborak aurrera egin ahala pilatu eta antzeman daitekeena. Beraz, argi dago modelo egonkortzearen prezioetako bat denboran aurrera egin ahala iragarritako bortizitatearen erresoluzio espaziala galtzea dela.

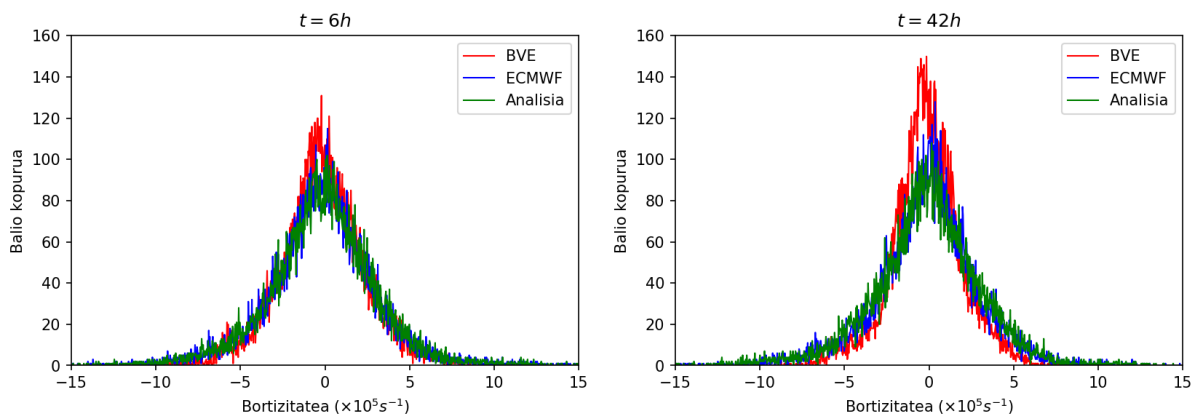
Inplementaturiko BVE modeloaren mugapenak alde batera utzita, antzekotasunak suma daitezke 4.1 irudian alboz albo kokaturiko grafikoen artean. Esaterako, kolore iluna duten zonaldeek antzeko kokapena dute. Horrek adierazten du BVE modeloaren grafikoetako zonalde ilunak eta ERA Interim-eko analisiaren grafikoetakoak noranzko berberean mugitzen direla denborak aurrera egin ahala. Aurkako noranzkoko mugimenduak inplementatutako modeloak akatsen bat duela adieraziko luke. Beraz, begi hutseko balioespena bateragarria da BVE modelo egokia izatearekin.



4.1 Irudia: Ezkerrean iragazkidun BVE modeloak aurreandako bortizitatea ageri da, eskuinean aldiune berberari dagokion ERA Interim-eko analisi bortizitatea. Ardatz horizontalean longituedea ageri da rad-etan, bertikalean latitudea rad-etan eta kolore barran bortizitate erlatiboa $\times 10^5 s^{-1}$ -etan.

4.2 Distribuzio diagramak

Implementatutako modeloen erabilitako iragazkiek duten eragina hobeto ikustarazteko, 4.2 irudiko distribuzio diagramak sortu dira. Diagrama bakoitzean ERA Interim-eko analisi bortizitatearen, ECMWF modeloak iragarritako bortizitatearen eta BVE modeloak iragarritako bortizitatearen distribuzioak adierazi dira, lerro baten bidez bakoitza. Hau da, bortizitate matrize bakoitzean bortizitatearen balio bakoitza sare fisikoko zenbat puntutan agertzen den adierazi da lerro baten bidez.



4.2 Irudia: *Hasierako aldiunetik 6h eta 42h-ra analisi bortizitatearen, ECMWF modeloak iragarritako bortizitatearen eta BVE modeloak iragarritako bortizitatearen distribuzioak.*

4.2 irudian ikus daiteke distribuzio kurbek antzeko forma dutela hiru kasuetan. Hala ere, bistakoa da denborak aurrera egin ahala BVE modeloko bortizitatearen moduluaren balioak txikituz doazela, dagokion distribuzio kurbaren zeroren inguruko maximoaren balioa handituz baitoa. Teorikoki BVE modelo batean bortizitatea kontserbatu egin beharko litzateke, baina distribuzio diagramek erakusten dute implementatutako modeloen bortizitatea galdu egiten dela. Honen eragile nagusia hiperdifusio iragazkia da.

ECMWF modeloen ere batezbestean bortizitatearen moduluaren murrizketa dagoela antzematen da, baina dagokion distribuzio kurba analisi bortizitatearen oso hurbil dago. Denborak aurrera egin ahala distribuzio kurba altu eta zorrotzagoa bihurtzeak, modeloa epe luzera egonkorra dela adierazten du, eta aurkako tendentzia ezegonkortasunaren adierazle da. Hala ere, argi dago modeloen distribuzio kurbak analisiaren distribuzio kurbatik ahalik eta hurbilen egon behar duela, ECMWF modeloen ikusten den bezala.

4.3 Sakabanatze diagramak

Begi hutseko balioespenak eta sakabanatze diagramak BVE modeloak dituen mugetako batzuk erakusten dituzte, baina ez dute modeloa ERA Interim-eko analisitik zeinen hurbilen dagoen kuantifikatzen. Modeloen kalitatea kuantitatiboki aztertzeke, sakabanatze diagramak irudikatu eta Pearson-en korrelazio koefizienteak (R) kalkulatu dira.

Balioespen metodo hau maiz erabiltzen da iragarpen meteorologiko modeloen kalitatea ebaluatzeko [1].

4.3 irudiko sakabanaketa diagrametan, puntu bakoitza sare fisikoko puntu bati dagokio. Puntuak diagraman duen posizio horizontalak puntu horri dagokion ERA Interim-eko analisi bortizitatea adierazten du, eta posizio bertikalak BVE modeloaren arabera dagokion bortizitatea. BVE modeloak iragarpen perfektuak egingo balitu, diagrametako puntu guztiak $malda = 1$ duen eta $(0, 0)s^{-1}$ puntutik igarotzen den lerro baten gainean egongo lirateke.

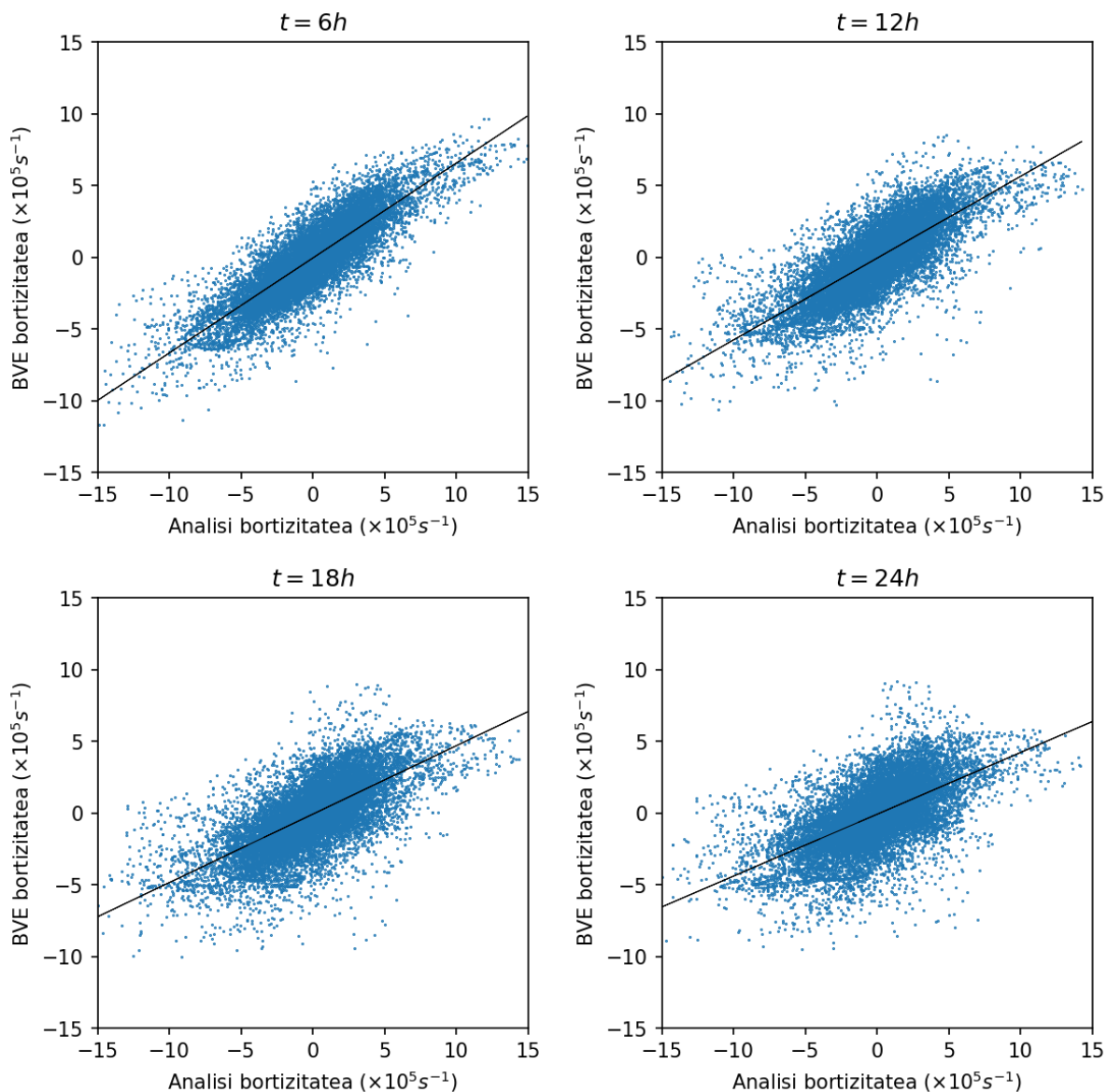
Sakabanatze diagrametako korrelazio koefizienteak `numpy.corrcoef()` funtzioa erabiliz kalkulatu dira, eta erregresio lineala egiteko `sklearn-ek` eskaintzen duen moduloko `LinearRegression()` funtzioa aplikatu da.

4.1 Taula: *Erregresio linealeko ($y = a + bx$) parametroak, 2019/07/20-ko 00:00-etatik aurrera, 500 hPa-eko presio mailan, BVE modeloak iragarritako bortizitateak eratorritako sakabanatze diagrametan. Balio bakoitza “bootstrap” teknika erabiliz lorturiko ($P_{0.025}, P_{0.5}, P_{0.975}$) pertzentilen bidez adierazi da.*

t (h)	R (adim)	R^2 (adim)	a ($\times 10^7 s^{-1}$)	b (adim)
0	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)	(0.00, 0.00, 0.00)	(1.00, 1.00, 1.00)
6	(0.85, 0.86, 0.86)	(0.72, 0.73, 0.74)	(-6.1, -4.2, -2.4)	(0.65, 0.66, 0.67)
12	(0.76, 0.77, 0.78)	(0.58, 0.59, 0.61)	(-7.3, -5.1, -3.1)	(0.56, 0.57, 0.58)
18	(0.67, 0.68, 0.69)	(0.45, 0.46, 0.47)	(-8.8, -6.3, -3.4)	(0.47, 0.48, 0.49)
24	(0.60, 0.61, 0.62)	(0.36, 0.38, 0.39)	(-9.6, -7.1, -4.6)	(0.42, 0.43, 0.44)

4.1 taulan jaso dira sakabanatze diagrametan erregresio lineala ($y = a + bx$) aplikatuz lortutako parametroak. a parametroaren balioa egokia da, erregresio lineala eginez irudikatutako zuzenak $(0, 0)s^{-1}$ puntutik hurbil igarotzen direla adierazten baitu. b parametroak ordea idealki 1 balio beharko luke, baina denborak aurrera egin ahala gero eta txikiagoa dela ikus daiteke. Honek adierazten du BVE modeloak iragarritako balioak (ardatz bertikala) txikituz doazela analisi bortizitate balioekiko (ardatz horizontala). Hau bat dator distribuzio diagramek erakusten duten joerarekin, eta aurreko atalean esan bezala, iragazkien eraginaren ondorio zuzena da.

Korrelazio koefizienteak ere 1 balio idealetik aldenduz doaz denborak aurrera egin ahala. Alde batetik, 2 kapituluaren aurkeztutako sinplifikazio eta hurbilketa teorikoen eraginez ematen da joera hau. Bestetik, 3 kapituluaren azaldutako prozedura numerikoan egindako mozketek ere BVE modeloak egindako iragarpenak analisiak emandako balioetatik aldentzea eragiten dute. Mugapen hauek kontsideratuz, lortutako R -ren balioak BVE modelo batetik espero daitezkeenak dira.



4.3 Irudia: 2019/07/20-ko 00:00-etatik aurrera, 500 hPa-eko presio mailan, BVE modeloak lortutako bortzitatetik eratorritako sakabanatze diagramak. t -k hasierako aldiunetik igarotako denbora adierazten du ordutan. Zuzen beltzak erregresio lineala aplikatuz lortu dira.

Erroren kalkulua “bootstrap” teknika erabiliz

Erregresio linealeko R , b eta a parametroei lotutako erroreak kalkulatzeko formula analitikoak bilatu ordez, “bootstrap” teknika aztertu eta aplikatzea erabaki zen. Teknika honek edozein estimatzailearen zehaztasuna zenbatestea ahalbidetzen du, analisi teorikoa kalkulu konputazional kopuru handi bategatik ordezkatuz. Teknika Bradley Efron-ek ezagutarazi zuen 1979. urtean, eta ordudanik bere erabilera zabalduz joan da konputagailuen kapazitateen hobekuntzarekin batera [8].

[18]-n oinarriturik, 4.1 taulan jasotako R , R^2 , b eta a parametroen konfiantza tartekak

kalkulatzeko erabili da “bootstrap”. Teknika jatorrizko datu multzo edo laginaren (4.3 irudiko grafikoetan sakabanatutako puntuak kasu honetan) hainbat lagin hartzean oinarritzen da. Bir-laginketa (“resample” ingelesez) bakoitza egiteko datuak ausazko eran hartzen dira jatorrizko laginetik (errepikapenak onartuz), harik eta bir-laginketa bakoitzaren datu kopurua jatorrizko laginaren berbera den arte. Bir-laginketak modu honetan eginez gero, “bootstrap” printzipioak dio, jatorrizko laginarekin kalkulaturako edozein estimatzailearen bariazioa bir-laginekin kalkulaturako estimatzaile berberaren bariazioarekin hurbil daitekeela.

Eraikitako modelotan, sakabanatze diagrama bakoitza eraikitzeke erabilitako laginaren 1000 bir-laginketa egiten dira `numpy.random.choice()` funtzioa erabilita. Bir-lagin bakoitza erabilita R , R^2 , b eta a kalkulatu dira, eta `bootstrap_matrix` izeneko 1000 lerro eta 4 zutabeko matrizearen lerro batean gordetzen dira. Bir-laginketa guztien parametroak kalkulatu ondoren, `numpy.percentile()` funtzioa erabiltzen da `bootstrap_matrix`-en zutabe bakoitzeko mediana eta %95-eko konfiantza tartea lortzeko.

4.4 R^2 denboran zehar

BVE modeloa egun erabiltzen diren iragarpen modelo konplexuago batekin konparatuta nola moldatzen den ikusteko, korrelazio koefizientearen karratuaren (R^2) denboran zeharreko eboluzioa irudikatzea erabaki zen. Dagoeneko, distribuzio diagrametan erakutsi da ECMWF modeloaren portaera BVE modeloarena baino hobea dela. Baina atal honetako R^2 -ren eboluzioaren grafikoek argiago uzten dute zeinen hobea den ECMWF modeloa.

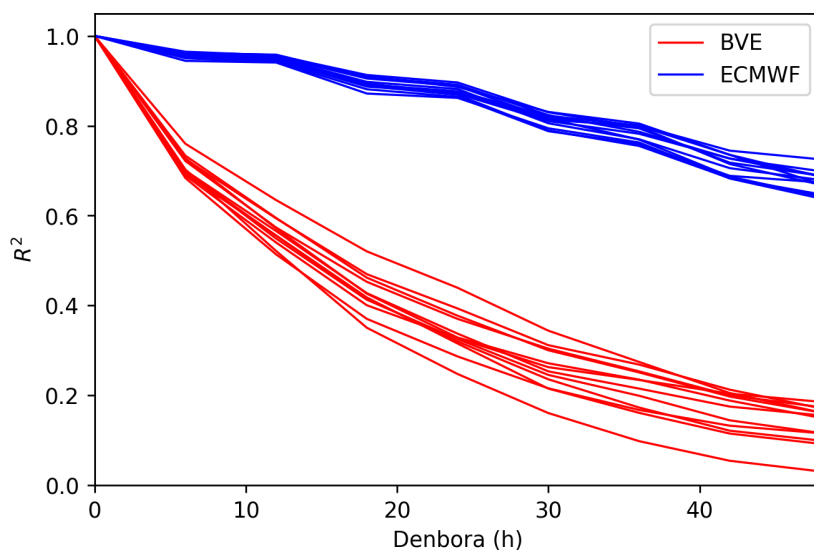
4.4 irudia lortzeko, lehenik eta behin, hainbat hasierako baldintzatatik abiatuta BVE modeloak eta ECMWF modeloak iragarritako bortizitateak lortu dira *6h*-ro *48h*-ra iritsi arte. Ondoren, modelo bakoitzeko bortizitateak eta ERA Interim-eko analisi bortizitateak erabilita sakabanatze diagramak irudikatu dira. Sakabanatze diagrametatik korrelazio koefizienteak eta erregresio linealeko parametroak eskuratu dira (4.2 taulan jaso dira balio esanguratsu batzuk). Azkenik, R^2 -k denboran zehar duen eboluzioa irudikatu da, modelo bakoitzak hasierako baldintza bakoitzarekiko emandako balioak lerro baten bidez adieraziz.

4.2 taulan ikus daiteke ECMWF modelotan R^2 eta b parametroek zeroranzko joera dutela, BVE modelotan gertatzen den bezala. Hala ere, argi dago ECMWF modelotan balioak askoz hobekak direla, eta honek bere iragarpenen kalitatea hobea dela adierazten du, espero bezala. Bereziki azpimarragarria da zeinen ondo mantentzen den b parametroa 1 baliotik hurbil; ECMWF modelotan bortizitatea askoz hobeto kontserbatzen da.

4.2 Taula: Erregresio linealeko ($y = a+bx$) parametroak, 2019/07/20-eko 00:00-etatik aurrera, 500 hPa-eko presio mailan. BVE azpiindizedun parametroak BVE modeloari dagozkio, eta EMCWF azpiindizedunak ECMWF iragarpen modeloari.

t (h)	R_{BVE}^2 (adim)	R_{ECMWF}^2 (adim)	b_{BVE} (adim)	b_{ECMWF} (adim)
0	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)
6	(0.72, 0.73, 0.74)	(0.952, 0.954, 0.955)	(0.65, 0.66, 0.67)	(0.947, 0.951, 0.954)
12	(0.58, 0.59, 0.61)	(0.944, 0.946, 0.948)	(0.56, 0.57, 0.58)	(0.954, 0.958, 0.961)
18	(0.45, 0.46, 0.47)	(0.888, 0.892, 0.895)	(0.47, 0.48, 0.49)	(0.899, 0.905, 0.910)
24	(0.36, 0.38, 0.39)	(0.872, 0.877, 0.881)	(0.42, 0.43, 0.44)	(0.898, 0.905, 0.911)

4.4 irudian modelo bien iragarpenak denboran aurrera egin ahala okertuz doazela ikus daiteke. BVE modeloaren kasuan lerroen malda era uniformean aldatzen dela antze-man daiteke, baina ECMWF modeloan desjarraitasunak nabaritzen dira. Hau ERA Interim-eko analisi bortizitatea lortzeko jarraitzen den prozesuan ECMWF modeloaren iragarpenak erabiltzen direlako gertatzen da, eguneko ordu jakin batzuetan analisi bortizitatearen balioak ECMWF bortizitatearen balioetatik hurbilago egotea eraginez. Modeloaren bortizitateak “benetako” bortizitatearekiko konparatuko balira, ECMWF-ri dagozkion lerroen maldan ez lirakeke desjarraitasunak agertuko.



4.4 Irudia: R^2 -ren eboluzioa denboran zehar. Lerro bakoitza hasierako aldiune bati dagokio. Lerro urdinak ECMWF iragarpen modeloari dagozkio. Lerro gorriak berriz, BVE modeloari.

4.4 irudian ikus daitekeen bigarren gauza bi modeloen artean alde handia dagoela da. Esan daiteke, BVE modeloak 6h-ra egindako iragarpen baten kalitatea ECMWF modeloak 48h-ra egindakoaren parekoa dela. Honek erakusten du iragarpen meteorologiko numerikoaren hastapenetatik hobekuntza handiak eman direla. Bereziki, ECMWF modeloak ekuazio primitiboen sistema osoa ebatzen duela azpimarratu behar da, eta implementatutako BVE modeloak baino erresoluzio espazial handiagoa erabiltzen duela [2].

5 Datu asimilazioa

BVE-ren ebazpena hasierako baldintzen mende dago. Hortaz, funtsezkoa da hasierako baldintza horiek eguratseko benetako egoera ondo errepresentatzea, iragarpen egoki bat lortu nahi bada. Hasierako baldintzak lortzeko lehenengo urratsa planetako hainbat puntutan haizearen abiadura eta norabidea neurtzea da. Behaketak nagusiki estazio meteorologikoetatik eskuratzen dira; Euskadin esaterako, Euskalmet eta Aemet agentzia meteorologikoek kudeatzen dituzten estazio meteorologikoetatik lor daiteke lur mailako haizearen norabide eta abiadurara. Altitude handiko haizeari buruzko informazioa eskuratzeko zunda-globoak erabiltzen dira, baina ez dira estazio meteorologikoak bezain ugariak. Euskalmet-ek adibidez zunda-globo jaurtigailu automatiko bat dauka Arteaga-Gauegizko Bird International Center-en [3]. Estazio meteorologikorik gabeko lurrazaleko eremuetan behaketak egiteko sateliteak, hegazkinak, radar-profilatzaileak eta irismen handiko bestelako neurketa tresnak erabiltzen dira.

Behaketen jatorria ikusita, argi dago lurrazalean duten banaketa irregularra dela, eta hasierako baldintza moduan erabili aurretik tratamendu bat behar dutela. Behaketetatik hasierako baldintzak lortzeko prozesua datu asimilazio izenez ezagutzen da, eta bi pausu nagusi ditu: *datu analisisa* eta *hasieratzea* [7]. Datu analisisian behaketetatik abiatuta modeloaren sareko puntu bakoitzari dagozkion balioak lortzen dira. Horretarako, beharrezkoa da interpolazio espazial bat egitea, behaketei lotutako erroreak kontuan izanez. Mundu mailako modeloetan behaketez gain aurretik egindako iragarpen baten emaitzak ere kontuan hartzen dira, behaketa gutxiko zonaldeetako informazio falta konpentsatzeko. Datu analisisian lorturiko emaitzak atmosferako benetako egoeratik ahalik eta hurbilen egotea bilatzen da. Baina honek ez du ziurtatzen emaitzak orekaturik egotea. Horregatik, modeloak erabil ditzakeen hasierako baldintzak lortzeko datu analisisiko emaitzak orekatu egiten dira hasieratze prozesuan. Esan beharra dago orekatze honen ondorioz hasierako datuak benetako egoeratik aldentzen direla.

3.3 atalean azaldutako hasieratze prozesuan ERA Interim-eko analisi bortizitate matrizeak erabiltzen direla azaldu da. Bortizitate matrize hauek datu asimilazio teknika baten bidez lortzen dira, eta horregatik erabil daitezke zuenean modelo hasieratzeko. Beraz, ez da beharrezkoa modelon datu asimilazioa inplementatzea iragarpenen hasierako aldiuneko baldintzak lortzeko. Horren ordez, datu asimilazioa iragarpena egin bitartean 12 orduro aplikatzea erabaki zen, behaketetatik lorturiko informazioa modeloari periodikoki gehitu eta iragarpenak hobetzeko.

[7]-ko 12.1.2 azpiatalean kontatzen da datu asimilazioak 1940. hamarkadatik aurrera izan duen garapen historikoa, lehenengo interpolazio tekniketarik egun erabiltzen diren teknika bariatzional (3DVAR eta 4DVAR) eta Kalmanen iragazkietara (EnKF). Iraganen datu analisisa eta hasieratzea bi pausotan eta teknika ezberdinak erabiliz egiten

zirela azaltzen da, baina egungo teknika bariationalek bi pausoak batera egiten dituzte. ERA Interim-ek 4DVAR erabiltzen du analisi bortizitate matrizeak lortzeko. Teknika honek interpolazio espaziala egiteaz gain interpolazio tenporala ere egiten du, aldiune ezberdinetan egindako behaketak erabiliz. 3DVAR teknikak interpolazio espaziala baino ez du egiten, baina konputazionalki merkeagoa eta inplementatzeko errazagoa da. Hori dela eta, 3DVAR aztertzea erabaki zen.

5.1 3DVAR asimilazio teknika

Teknika bariationalek funtzio edo integral bat minimizatzen duten parametroak topatzea dute helburu. Fisikan, hainbat arlotan erabiltzen dira; esaterako, mekanika kuantikoan, helio atomoaren autofuntzio eta autobalioak kalkulatzeko Hartree-Fock metodoa aplikatzen denean. 3DVAR teknika *kostu funtzioa* (J) minimizatzen duen bortizitate matrizea topatzean oinarritzen da. Kostu funtzioaren adierazpena eman aurretik ordea, zenbait bektore eta matrize definitzea komeni da.

Hasteko, *iragarpen bektorea* (\mathbf{x}_b) eta *behaketa bektorea* (\mathbf{y}), modeloak iragarritako bortizitate matrizea eta behaketa matrizea dimentsio bakarrera kolapsatuz lortzen dira hurrenez hurren. 3DVAR aplikatzearen helburua *analisi bektorea* (\mathbf{x}_a) izeneko lortzea da, zeinaren bortizitate balioak \mathbf{x}_b eta \mathbf{y} -ren bortizitate balioen artean egongo diren. Behin kalkulatu, analisi bektorea bi dimentsioko bortizitate matrize bihurtzen da modeloak erabili ahal izateko.

Behaketa bektorearen eta iragarpen bektorearen dimentsioek ez dute zertan berdinak izan. Iragarpen modelo modernoek esaterako 10^7 ordenako askatasun gradu kopurua dute, baina 10^4 ordenako neurketa kopurua [15]. Dimentsio bereko bektoreak lortu eta eragiketak egin ahal izateko, *behaketa eragilea* (H) definitzen da. H \mathbf{x}_b -ri aplikatzen zaionean, iragarpen bortizitate balioak behaketa puntuetara (\mathbf{y} -ren elementuen koordinatuetara) eramaten dira, behaketa bektorearen dimentsio bereko bektorea lortuz.

Bai modeloaren iragarpenek zein behaketek kontuan hartu beharreko erroreak dituzte. [7]-n bortizitatearen beneteko balioak dituen *egiazko egoera bektorea* (\mathbf{x}_t) erabiltzen da *iragarpen errore bektorea* ($\boldsymbol{\varepsilon}_b$) eta *behaketa errore bektorea* ($\boldsymbol{\varepsilon}_o$) definitzeko:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{x}_b - \mathbf{x}_t \quad (5.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_o = \mathbf{y} - H\mathbf{x}_t \quad (5.2)$$

Ondoren, *iragarpen errore kobariantza matrizea* (\mathbf{B}) eta *behaketa errore kobariantza matrizea* (\mathbf{R}) eraikitzen dira errore bektoreak erabilita:

$$\mathbf{B} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b^T} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{R} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_o \boldsymbol{\varepsilon}_o^T} \quad (5.4)$$

Beharrezko bektore eta matrizeak definituta, kostu funtzioaren adierazpen orokorra idatz daiteke [15]:

$$J(\mathbf{x}_a) = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) + (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_a))^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}_a))] \quad (5.5)$$

(5.5) ekuazioan H -k ez du zertan lineala izan. Normalean, \mathbf{x}_a egiazko egoera bektorearen baliotik hurbil dagoela onartu eta H linealizatu egiten da. Baina, lan honetan egindako implementazioan lineala den behaketa eragile bat erabili da, zuzenean matrize forman idatz daitekeena (\mathbf{H}). Behaketa eragile linealak [7]-ko 12.5 atalean eta [19]-ko 3.1 adibidean erabiltzen dira 3DVAR-en oinarriko azalpenak emateko.

Kostu funtzioa definituta, hau minimizatzen duen \mathbf{x}_a topatzea da hurrengo pausua. Horretarako, J -ren gradientea zerorekin berdindu behar da. $\nabla J(\mathbf{x}_a)$ -ren adierazpena lortzeko prozedura [15]-eko 5.5 atalean azaltzen da. Adierazpen horretan behaketa eragile lineala dela onartuz, honela idatz daiteke $\nabla J(\mathbf{x}_a)$:

$$\nabla J(\mathbf{x}_a) = [\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}] (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) - \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) = 0 \quad (5.6)$$

Azkenik, (5.6) ekuaziotik \mathbf{x}_a -ren adierazpena lortzen da:

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + [\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b) \quad (5.7)$$

5.2 Implementazioa

(5.7) adierazpena, 3DVAR problemaren ebazpen formal da. Praktikan ordea, $[\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ matrizea oso handia da, eta bere alderantzizkoa kalkulatzeko konputazio-nalki garestiegia. Horregatik, normalean minimizazio teknika iteratiboak erabiltzen dira J minimizatzeke, *conjugate gradient* eta *quasi-Newton* metodoak dira erabilieneak [15]. Hala ere, egindako implementazioan minimizazio teknika iteratiboak erabili ordez, (5.7) zuzenean ebatzi da bektore eta matrizeak eraikitzerakoan sinplifikazio onarpen batzuk eginez.

Hasteko, azpimarratu beharreko puntu garrantzitsuena da \mathbf{y} eraikitzeke benetako behaketak erabili beharrean ERA Interim-eko analisi bortizitatetik ateratako balioak erabili direla. Behaketa puntuak modeloko sareko puntuetan kokatuak daudela onartu da. Baina behaketa puntu kopurua modeloko sareko puntu kopurua baino txikiagoa izan ohi dela, eta behaketa puntuen banaketa uniforme ez dela simulatu da. Zehazki, sareko puntuen %20-a ausazko eran (errepikapenik gabe) aukeratu da behaketa puntuak sortzeko.

Behaketa puntuak sareko puntuak izateak asko sinplifikatzen du \mathbf{H} matrizearen implementazioa. Modeloan matrize moduan inplementatu beharrean, \mathbf{y} bektorearen dimentsiodun Python zerrenda bat (\mathbf{H}) erabili da. \mathbf{y} bektorearen kasuan bezala, \mathbf{H} -ko indize bakoitza behaketa puntu bati dagokio. \mathbf{H} -ren elementu bakoitzean bere indizeari dagokion behaketa puntuak \mathbf{x}_b bektorean izango lukeen indizea gordetzen da. Beraz, \mathbf{H} -ko

informazioa erabiliz era errazean lor daiteke zein diren \mathbf{x}_b -k behaketa puntuetan dituen balioak ($\mathbf{H}\mathbf{x}_b$).

\mathbf{x}_t ezezaguna denez, ezin dira (5.1) eta (5.3) ekuazioak erabili \mathbf{B} kalkulatzeko. Horren ordez, iragarpen errore kobariantza matrizearen kalkulua [14]-n deskribatzen den metodoan oinarriturik dago, ezberdintasun nabarmen batekin. Artikuluan iragarpen errore kobariantzen kalkulua eremu espektralean egiten da, modu ezberdinen erroreek korrelaziorik ez dutela onartuz. Lorturiko emaitzak eremu fisikora transformatuz, iragarpen errore kobariantza egokiak lortzen direla azaltzen da, eremu fisikoko bariantza balioak errealistak ez diren arren. Bestalde, eraikitako modeloan iragarpen errore kobariantzen kalkulua eremu fisikoan egiten da, sareko puntuen bortizitate erroreek korrelaziorik ez dutela onartuz. Beraz, kobariantza matrizea baino bariantza matrizea kalkulatu da, diagonaletik kanpoko elementu guztiak nuluak izanik. Honek \mathbf{B} matrizea diagonaleko elementuak soilik gordetzen dituen dimentsio bakarreko matrize moduan (\mathbf{B}) definitzea ahalbidetzen du, eragiketen kostu konputazionala txikituz.

Kalkulua eremu fisikoan egiten den arren, jarraitutako metodoa [14]-ko 3.a eta [19]-ko 3.3.b azpiataletan deskribatzen dena da funtsean. Metodo honek 48 orduko denbora tartean iragarpen errorearen egitura estatistikoa gutxi aldatzen dela onartzen du. Honela, iragarpen errorearen korrelazio espaziala eta aldiune jakin bateko bortizitatea kalkulatzeko eginiko 12 h eta 6 h orduko iragarpenen diferentzien arteko korrelazioa antzekoak direla onar daiteke. Honetan oinarrituz, modeloan \mathbf{B} matrizea lortzeko, 2019-ko uztaileko lehen 30 egunetan eguerdiko 12:00-etako bortizitatearen 12 h-ko (hasierako aldiunea: egun bereko 00:00) eta 6h-ko (hasierako aldiunea: egun bereko 06:00) iragarpen matrizeen arteko kenketa egiten da lehendabizi. Ondoren, kendura 2-gatik berretzen da (elementuz-elementu) egun bakoitzeko bariantza matrizea lortzeko. Azkenik, egun guztietako bariantza matrizeen batezbestekoa kalkulatu \mathbf{B} lortzen da.

\mathbf{B} -ren kasuan bezala, \mathbf{R} matrizea definitzerakoan ere diagonaletik kanpoko elementuak nulutzat hartu dira (programan dimentsio bakarreko matrize moduan inplementatu da). Modeloan erabilitako behaketak benetakoak ez direnez, ez dago haien erroreari buruzko informaziorik. Behaketen errorea simulatzeko guztiek %10-eko errore erlatiboa dutela onartu da, eta ondoriozko errore absolutuen balioetatik eratorri da bariantza. Definizio hau sinplea den arren, arazoak sor ditzake ($\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}_b$) handia den kasuetan (5.7) ekuazioaren eskuineko aldeko bigarren batugaia \mathbf{x}_b -rekiko handiegia bihurtu daitekeelako. Hau konpontzeko [14]-ko 3.b azpiatalean deskribatzen den *kalitate-kontrol* prozedura aplikatu da. Puntu jakin baterako (i indizeduna) ($\mathbf{y}(i) - \mathbf{H}\mathbf{x}_b(i)$) onartutako behaketen errore absolutua baino 3 aldiz handiagoa bada, bariantzaren balioa ($\mathbf{y}(i) - \mathbf{H}\mathbf{x}_b(i)$) diferentzian oinarrituz handitzen da. ($\mathbf{y}(i) - \mathbf{H}\mathbf{x}_b(i)$) onartutako errore absolutua baino 5 aldiz handiagoa den kasuetan, puntu jakin horretako behaketa ez da kontuan hartzen.

Esan bezala, erabilitako matrize eta bektoreen definizioek (5.7) ekuazioa zuzenean aplikatzea ahalbidetzen dute. Behin \mathbf{x}_a kalkulatu, bortizitate matrize bidimentsional moduan idazten da. Azkenik, 3.3 atalean bezala, bortizitate matrizearen eremu espektraleko koefizienteak kalkulatu eta hauetan oinarrituta eremu fisikoko balioak birkalkulatu dira. Horrela, ezegonkortasunak sor ditzaketen uhin-luzera txikiko osagaiak kentzen dira analisi bortizitate matrizea modeloan sartu aurretik.

5.3 Lorturiko emaitzak

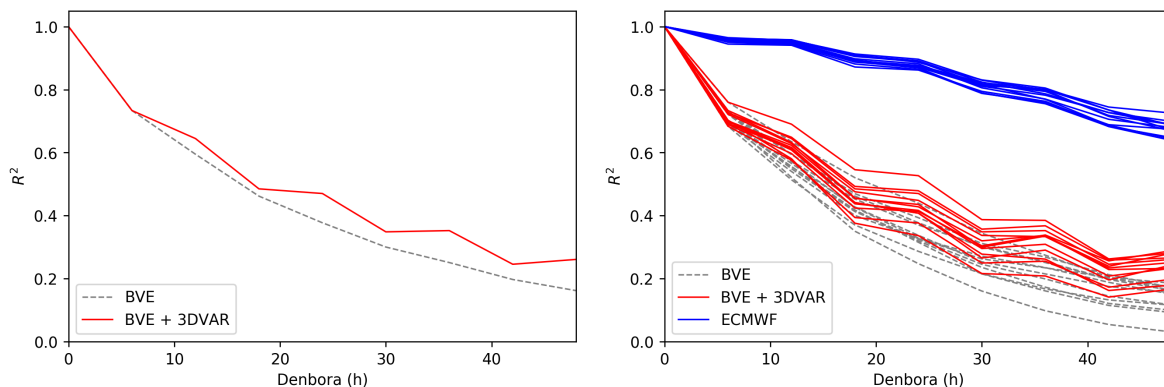
Kapituluaaren sarreran aipatu den bezala, 3DVAR asimilazioa 12 orduro aplikatu zaio BVE modeloari ($t = 12h$ aldiunetik hasita). Funtsean asimilazioak “behaketek” emandako informazioa erabiltzen du iragarpenak zuzentzeko. Beraz, 12. orduan iragarpenen hobekuntza bat egotea espero da, eta aldiune horretatik aurrera asimilaziodun modeloaren iragarpenak asimilaziorik gabeko modeloarenak baino hobeak izatea.

3DVAR-en implementazioa ebaluatzeko sakabanatze diagrametan oinarritutako balioespen teknikak erabili dira (4.3 eta 4.4 ataletan deskribatutakoak). 5.1 taulan jaso dira 3DVAR-dun eta 3DVAR gabeko BVE modeloei dagozkien korrelazio koefizientearen karratuaren eta erregresio linealeko b parametroaren balioak. 12. ordua baino lehen, ez dago bi bertsioen arteko ezberdintasunik. Hortik aurrera 3DVAR-dun modeloaren parametroak hobeak direla ikus daiteke, ezberdintasuna txikia bada ere.

5.1 Taula: Erregresio linealeko ($y = a+bx$) parametroak, 2019/07/20-eko 00:00-etatik aurrera, 500 hPa-eko presio mailan. BVE azpiindizedun parametroak BVE modeloari dagozkio, eta 3DVAR azpiindizedunak 12h-ro 3DVAR aplikatzen duen BVE modeloari.

t (h)	R_{BVE}^2 (adim)	R_{3DVAR}^2 (adim)	b_{BVE} (adim)	b_{3DVAR} (adim)
0	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)	(1.00, 1.00, 1.00)
6	(0.72, 0.73, 0.74)	(0.73, 0.73, 0.74)	(0.65, 0.66, 0.67)	(0.65, 0.66, 0.67)
12	(0.58, 0.59, 0.61)	(0.63, 0.64, 0.66)	(0.56, 0.57, 0.58)	(0.58, 0.59, 0.60)
18	(0.44, 0.46, 0.47)	(0.47, 0.49, 0.50)	(0.47, 0.48, 0.49)	(0.47, 0.48, 0.49)
24	(0.36, 0.38, 0.39)	(0.46, 0.47, 0.48)	(0.42, 0.43, 0.44)	(0.46, 0.47, 0.48)

3DVAR aplikatzerakoan lorturiko hobekuntza hobeto ikusten da 5.1 irudiko grafikoetan. Ezkerreko grafikoak erakusten du 3DVAR-dun bertsioak emaitza hobeak ematen dituela, eta denborak aurrera egin ahala 3DVAR gabeko bertsioarekiko hobekuntza nabarmenduz doala. Eskuineko grafikoak berriz, 3DVAR aplikatuta ere BVE modeloaren iragarpenak ECMWF modeloarenak bezain onak izatetik urrun daudela adierazten digu. Horrez gain, 3DVAR-dun modeloari dagozkion lerroen maldek aldaketa desjarriak dituztela ikusten da; 12 orduro iragarpenen kalitatea asimilazioa erabiliz hobetzen delako.



5.1 Irudia: R^2 -ren eboluzioa denboran zehar. Ezkerreko grafikoa hasierako aldiune bakar batetik abiatuta 3DVAR-dun eta 3DVAR gabeko BVE modeloek egindako iragarpenei dagokie. Eskuinekoan hainbat hasierako aldiunetatik abiatutako iragarpenak ageri dira, ECMWF modeloak eginikoak barne.

Anomalia korrelazio koefizientea denboran zehar

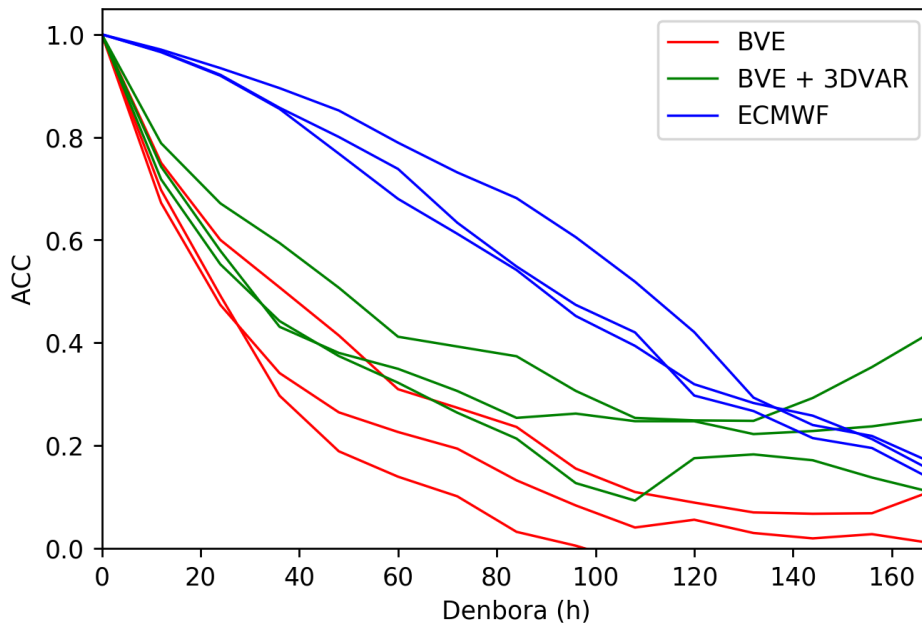
Asimilazioa aplikatzearen eragina hobeto ikusarazteko, epe luzeagorako iragarpenak aztertzea erabaki zen meteorologian ohikoa den beste balioespen teknika bat aplikatuz: anomalia korrelazio koefizientearen (ACC) denboran zeharreko eboluzioa. Koefiziente honek behaketek (o) eta iragarpenek (f) batezbesteko klimatiko batekiko (c) aurkezten dituzten anomalia edo desbideraketen arteko korrelazioa neurtzen du. ACC-ren adierazpen sinpleena [21]-n jasotzen dena da:

$$ACC = \frac{\sum_{i=1}^N f'_i o'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f'_i)^2 \sum_{i=1}^N (o'_i)^2}} \quad (5.8)$$

non i azpiindizeak sare fisikoko puntu bakoitza adierazten duen, eta $f'_i = f_i - c_i$ eta $o'_i = o_i - c_i$. Batazbesteko klimatikoa 21 egunetako analisi bortizitate balioen batezbestekoa kalkulatu zezake lortu da. Behaketen tokian analisi bortizitatearen balioak erabili dira, eta iragarpen balioak modeloetatik eratorri dira.

Behaketen eta iragarpenen anomaliak puntu guztietan berdinak direnean, ACC-ren balioa 1 da, eta guztiz aurkakoak direnean -1. Asimilaziorik gabeko edozein iragarpen modeloaren ACC balioa txikitu egin beharko litzateke iragarpen denborak aurrera egin ahala, eta horixe da 5.2 irudiak erakusten duena BVE eta ECMWF modeloen kasuan. Egia esan, ACC-k zerorantz jotzen du hasieran, baina bere balioa txikia denean zero balioaren inguruan oszilatzen duela ikus daiteke, ausazko korrelazio positibo zein negatiboan agerpenen eraginez. Asimilazioa duten modeloetan ACC hobeto mantentzen da, periodikoki behaketei buruzko informazioa erabiltzen dutelako ACC handituz. Honen eraginez, epe luzera 3DVAR aplikatzen duen BVE modeloak asimilaziorik gabeko ECMWF modeloak baino ACC balio hobek ditu. Edozein kasutan, $ACC < 0.6$ denean

iragarpenen uhin luzera handieneko osagaien kalitatea ere ezin da “on” kontsideratu [21]. Beraz, 3DVAR-dun BVE modeloak erakusten duen ECMWF modeloarekiko hobekuntzak ez du zeresan handirik.



5.2 Irudia: ACC-ren eboluzioa denboran zehar. Lerro bakoitza hasierako aldiune eta modelo jain bati dagokio.

6 Ondorioak

Lan honetan bortizitate barotropikoaren ekuazioaren alderdi teorikoa aztertu eta bere ebazpena lortzen duen modelo bat programatu da. Egindako modeloak dituen jatorri teoriko zein numerikoko mugapenak erakutsi dira, haien artean aipagarriena ezegonkortasuna izanik. Ezegonkortasuna eguratseko iragarpen modeloetan arruntak diren bi iragazki aplikatuz konpondu da, baina honek iragarpenen erresoluzio espazial efektiboa txikitzea eragin du.

Garatutako modelo ebaluatzeko balioespen teknika kualitatibo zein kuantitatiboak erabili dira, eta bere kalitatea ECMWF-ren iragarpen modeloerako konparatu da. Lortutako emaitzek argi adierazten dute azken 60 urteetan aurrerapen handiak eman direla eguratseko iragarpen modeloen alorrean. Egun ohituak gaude albistegietan duela hamar-kada batzuk pentsaezina zen kalitateko iragarpenak ikustera. BVE modelo bat inplementatu eta iragarpen modelo moderno batekiko konparatu ondoren, hobeto preziatzen da albistegietako iragarpenen atzean dagoen ikerkuntza eta lana.

Azkenik, 3DVAR asimilazio teknika ere aztertu eta inplementatu da. Honetan ere sinplifikazio ugari egin diren arren, emaitza positiboak lortu dira, modeloaren kalitatea hobetuz.

Eguratseko iragarpen modeloek, balioespen teknikek eta datu asimilazioak egungo iragarpen meteorologikoen funtsa osatzen dute. Lan honetan jarraitutako sinplifikazio onarpenek kontzeptu bakoitza bere oinarrietara murriztu eta hirurak inplementatzea ahalbidetu dute. Horregatik, lana erabilgarria izan daiteke eguratseko iragarpen modeloei buruzko oinarrizko irakasgaietan.

Horrez gain, garatutako programa kalitate hobeko iragarpenak lortzen dituzten modeloak sortzeko oinarri bezala erabili daiteke. Esaterako, posible izango litzateke BVE moldatuz lurrazalaren erliebeak bortizitatean duen eragina kontuan hartzea, modeloaren erresoluzio espaziala handitzea edo 3DVAR teknika aplikatzerakoan kobariantza gaiak kontuan hartzea.

Bukatzeko, BVE ebazteko metodo espektralak erabili izanak, ekuazio hau esferikoak ez diren gainazal sinpleetan ebazteko aukera ematen du programan aldaketa gutxi batzuk eginez. Funtsean, oinarri moduan erabili diren harmoniko esferikoak beste gainazal horri dagozkion harmoniko batzuegatik ordezkatzeko nahikoa litzateke. Harmoniko zilindrikoak erabiliko balira, BVE ekuazioa Larry Niven-en eratzun formako Ringworld munduan ebatzi ahal izango litzateke, eta baita Terry Pratchett-en disko formako Discworld-en. Harmoniko toroidalak erabiliko balira berriz, teorikoki egonkorak diren eta behar bada gure unibertsoan existitzen diren toroide formako planeten eguratseko dinamika aztertu ahalko litzateke [11].

Bibliografía

- [1] Forecast Verification methods Across Time and Space Scales. WWRP/WGNE Joint Working Group on Forecast Verification Research, <https://www.cawcr.gov.au/projects/verification/>
- [2] IFS Documentation. Part III: Dynamics and Numerical Procedures. ECMWF, <https://www.ecmwf.int/en/elibrary/19307-part-iii-dynamics-andnumerical-procedures>
- [3] Infraestructura: algunas de las infraestructuras con las que cuenta la DAEM. Euskalmet, https://www.euskalmet.euskadi.eus/s07-5893/es/contenidos/informacion/infraestructura/es_10896/es_cliinfraestructura.html
- [4] Numba documentation. Numba, <https://numba.readthedocs.io/en/stable/index.html>
- [5] The barotropic vorticity equation. Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, <https://www.gfdl.noaa.gov/idealized-spectral-models-quickstart/>
- [6] The Shallow Water Equations. Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, <https://www.gfdl.noaa.gov/idealized-spectral-models-quickstart/>
- [7] Alex J. DeCaria, Glenn E. Van Knowe: A First Course in Atmospheric Numerical Modeling. Sundog Publishing (2014)
- [8] B. Efron, R. Tibshirani: Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy. Statistical Science (1986)
- [9] Benoit Cushman-Roisin, Jen-Marie Beckers: Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Academic Press (2009)
- [10] Bert Bolin: Numerical Forecasting with the Barotropic Model. Tellus (1955)
- [11] Cheuk-Yin Wong: Toroidal Figures of Equilibrium. The Astrophysical Journal (1974)
- [12] Christiane Jablonowski, David Williamson: Numerical Techniques for Global Atmospheric Models, kap. 13, orr. 381–493. Springer (2011)
- [13] Dale R. Durran: Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. Springer (1999)
- [14] David F. Parrish, John C. Derber: The National Meteorological Center’s Spectral Statistical-Interpolation Analysis System. American Meteorological Society (1992)
- [15] Eugenia Kalnay: Atmospheric modeling, data assimilation and predictability. Cambridge University Press (2003)

-
- [16] J. G. Charney, R. Fjörtoft, J. von Neuman: Numerical Integration of the Barotropic Vorticity Equation. *Tellus* (1950)
 - [17] James R. Holton: *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Elsevier Academic Press (2004)
 - [18] Jeremy Orloff, Jonathan Bloom: *Bootstrap confidence intervals. : Introduction to Probability and Statistics*. MIT OpenCourseWare (2014)
 - [19] M. Fisher: *Assimilation techniques: 3dVar. : Meteorological Training Course Lecture Series*. ECMWF (2002)
 - [20] Peter Lynch: *The origins of computer weather prediction and climate modeling*. *Journal of Computational Physics* (2007)
 - [21] Rolf H. Langland, Ryan N. Maue: *A multi-model diagnostic study of medium-range forecast skill dropouts*. United States Naval Research Laboratory
 - [22] S. Kubota, M. Hirose, Y. Kikuchi, Y. Kurihara: *Barotropic Forecasting with the Use of Surface Spherical Harmonic representations*. *Papers in Meteorology and Geophysics* (1961)