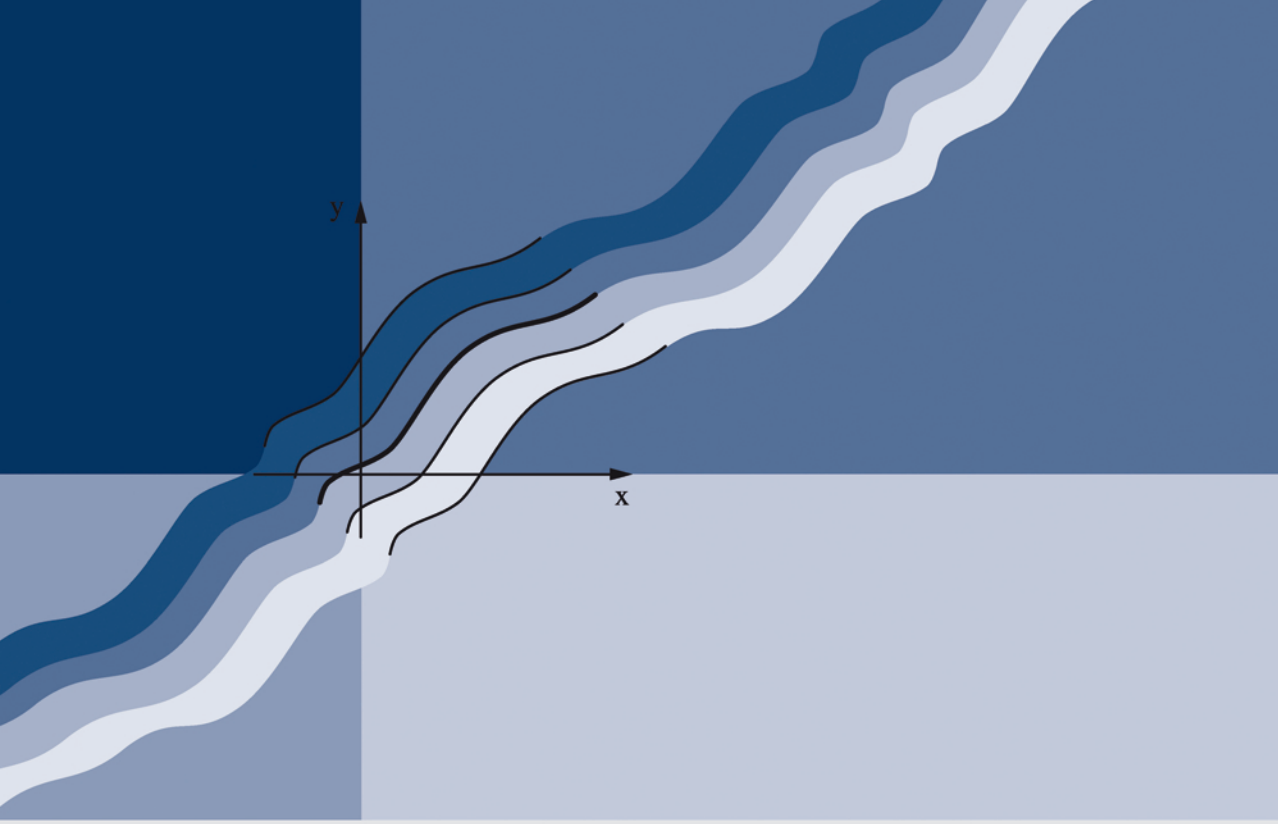
Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería

Tomo I

María Begoña Del Hoyo
Virginia Muto



Servicio Editorial
UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

Argitalpen Zerbitzua
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

TOMO I

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

TOMO I

María Begoña Del Hoyo y Virginia Muto

Departamento de Matemática Aplicada,
Estadística e Investigación Operativa /
Matematika Aplikatua eta Estatistika
eta Ikerkuntza Operatiboa Saila

Facultad de Ciencias / Zientzi Fakultatea
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea
servicio editorial | argitalpen zerbitzua

I.S.B.N.: 84-8373-369-2
Depósito Legal/Lege Gordailua: BI-2158-01

Impresión/Inprimatzea:
Servicio Editorial/Argitalpen Zerbitzua UPV/EHU

Prólogo

En el curso 1999-2000 comenzó a impartirse en la Facultad de Ciencias de la Universidad del País Vasco la titulación de Ingeniería Química.

Dentro de dicha titulación se nos asignó a las profesoras María Begoña del Hoyo y Virginia Muto, la docencia de la asignatura de "*Fundamentos Matemáticos para la Ingeniería*". Como el temario era amplio y el tiempo que teníamos para dedicar a nuestros alumnos era corto, decidimos preparar unos apuntes que les sirvieran de ayuda para "no perderse" por la asignatura y adentrarse así en el mundo de la Matemática que consideramos básica para poder desarrollar con éxito su formación en la Facultad.

Desafortunadamente nuestra experiencia nos dice que los alumnos que llegan a primero de Ingeniería Química carecen del hábito e incluso en muchos casos de la capacidad para el estudio y correcta interpretación de los textos usualmente disponibles en el mercado. La motivación principal que nos ha inducido a escribir este libro y probablemente nuestra aportación original esencial al mismo, ha sido la de producir un texto que pudiera jugar un papel intermedio entre el profesor-tutor y los textos ordinarios, por decirlo en otras palabras que proveyera al alumno con una especie de servicio de tutorización impresa, haciéndoles fácilmente digerible ideas, conceptos y métodos expresados de forma menos elaborada y compacta en otras obras.

Después de dos años de andar con hojas "para adelante y para atrás" hemos creído conveniente publicar estos apuntes en formato libro con el único objetivo de que para nuestros alumnos sea más fácil disponer de los apuntes completos de la asignatura desde el primer día de clase.

Para confeccionar dichos apuntes nos basamos en los siguientes libros:

N. Piskunov: Cálculo Diferencial e Integral. Montaner y Simón, Barcelona, 1978.

E. Marsden & A. J. Tromba: Cálculo Vectorial. Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.

L. Salas & E. Hille: Calculus - Cálculo de una y varias variables con geometría analítica. Reverté, 1995.

B. P. Demidovich: Problemas y ejercicios de Análisis Matemático. Paraninfo, 1969.

B. P. Demidovich: 5000 Problemas de Análisis Matemático. Paraninfo, Madrid, 1990.

M. Spivak: Cálculos. Cálculo Infinitesimal. Reverté. 1970.

J. Martinez Salas: Elementos de Matemáticas. Gráficas Andrés Martín, Valladolid, 1977.

S. Lipschutz: Algebra Lineal. McGraw-Hill, 1992.

M. Castellet & I. Llerena: Algebra Lineal y Geometría. Reverté, Barcelona, 1992.

E. Tebar Flores: Problemas de Cálculo Infinitesimal. Tebar Flores, Albacete.

A. Luzarraga: Problemas resueltos de Algebra Lineal. Romargraf, 1966.

y en otros apuntes que en nuestra experiencia docente de largos años habíamos ido acumulando.

Agradecemos cualquier sugerencia que los lectores nos hagan, para poder subsanar en el futuro defectos y errores en el trabajo que deben ser imputados a nuestra única responsabilidad. Siempre con el objetivo de conseguir un texto útil para nuestros alumnos de Ingeniería Química y si es posible, también, para alumnos de otras secciones.

Agradecemos la ayuda inestimable de César, sin la cual no hubiésemos podido "arrancar" el 1 de Octubre de 1999, a nuestros maridos Alberto y Jon por sus primeras lecturas y críticas y a nuestros hijos Patxi, Ana, Ane Miren y Mikel, que sobre todo el primer curso tuvieron que aguantar a unas madres que eran un manojo de nervios.

Leioa, Junio 2001
Begoña y Virginia

Índice General

Tomo 1

Capítulo -1

Introducción histórica

Es oportuno decir algo acerca de la historia del cálculo. Sus orígenes se remontan a la Grecia antigua. Los antiguos griegos elaboraron muchas cuestiones (a menudo paradójicas) sobre las tangentes, el movimiento, el área, lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande -cuestiones que se han visto aclaradas y han hallado su respuesta con el cálculo. En algunos casos, los griegos aportaron respuestas (algunas muy elegantes) pero, en general, sólo formularon las preguntas.

Después de los griegos, el progreso fue lento. La comunicación era limitada y cada erudito estaba prácticamente obligado a partir de cero. A lo largo de los siglos se concibieron algunas soluciones ingeniosas para los problemas del tipo de los que se plantea el cálculo, pero no se elaboraron técnicas generales. El progreso se vio obstaculizado por la carencia de una notación conveniente. El álgebra, fundada en el siglo noveno por los sabios árabes, no fue plenamente sistematizada hasta el siglo dieciséis. Posteriormente, en le siglo diecisiete, Descartes estableció la geometría analítica, sentando la base del desarrollo ulterior.

El invento del cálculo es atribuido a Sir Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uno inglés y el otro alemán. El invento de Newton resultó ser una de las pocas cosas buenas que la gran epidemia de peste bubónica aportó a la humanidad. La plaga forzó el cierre de la Universidad de Cambridge en 1665 y el joven Isaac Newton, del Trinity College, volvió a su casa de Lincolnshire para pasar dieciocho meses de meditación de los cuales nacieron su *"método de las fluxiones"*, su *"teoría de la gravitación"* y su *"teoría de la luz"*. El método de las fluxiones es lo que nos concierne aquí. Un tratado con este título fue escrito por Newton en 1672, pero no fue publicado hasta 1736, nueve años después de su muerte. El nuevo método fue anunciado por primera vez en 1687, pero en términos generales muy vagos, sin simbolismo, fórmulas o aplicaciones. El propio Newton parecía muy reacio a publicar nada tangible acerca de su descubrimiento, y no es sorprendente que el desarrollo en el Continente, pese a su iniciación tardía, pronto le adelantase y superase.

Leibniz inició su trabajo en 1673, ocho años más tarde que Newton. En 1675 estableció la notación moderna básica dx y $\int$. Sus primeras publicaciones aparecieron en 1684 y 1686. Causaron poco impacto en Alemania, pero los hermanos Bernoulli de Basilea (Suiza) recogieron sus ideas y las enriquecieron con otras muchas. A partir de 1690, el cálculo creció rápidamente alcanzando, prácticamente, su estado actual en unos cien años. Algunas sutilezas teóricas no fueron plenamente resueltas hasta el siglo veinte.

Capítulo 0

Conceptos Básicos.

0.1 Los números reales.

Conocimientos previos.
Preferentemente algebráicos necesarios para el comienzo del temario de la asignatura.

Conjunto: es una colección de objetos. Los conjuntos se representan por letras mayúsculas. Los objetos de un conjunto se llaman **elementos**. Los elementos se representan por letras minúsculas.

$x \in A$ se lee: el elemento x pertenece al conjunto A.

$x \notin A$ se lee: el elemento x no pertenece al conjunto A.

Los conjuntos se definen:

- Por **extensión**: enumerando cada uno de los elementos que lo forman:

  $A = \{a, e, i, o, u\}$.

•• Por **comprensión**: dando la propiedad característica que cumplen todos los elementos del conjunto y solamente ellos.

  $A = \{letras \quad vocales\}$

  $B = \{x \in \mathbb{N} / \quad x^2 - 9 = 0\}$

  $C = \{x \ / \quad \overline{OX} \leq r\}$

Si A y B son conjuntos, diremos que A **está incluido en** B si y sólo si todo elemento de A también es un elemento de B. Con símbolos se representa: $A \subseteq B$.

Si A está incluido en B, diremos que A es un **subconjunto** de B.

Dos **conjuntos** A **y** B se dice que son **iguales** si y sólo si contienen exactamente los mismos elementos. $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Al conjunto que no tiene ningún elemento se le llama **conjunto vacío** y se representa por $\emptyset$.

Si A es un conjuto cualquiera: $\emptyset \subseteq A$.

$\emptyset$ y A son **subconjuntos** de A llamados **impropios**, de existir otros subconjuntos de A, se llaman **subconjuntos propios**.

Ejemplo. Si $A = \{a, b, c\}$ son subconjuntos de A: $\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Al conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A se llama: **conjunto de partes de** A y se denota por $P(A)$. En el ejemplo anterior:

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} = \{S \;/\quad S \subseteq A\}$$

Si el conjunto A tiene "n"elementos, $P(A)$ tiene 2^n elementos.

Dado un conjunto A y un subconjunto S de A, se llama **complementario** de S respecto de A, al conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a S.

Se representa por

$$\overline{S} \quad \text{ó} \quad S^c \quad \text{ó} \quad S'$$

$$\overline{S} \equiv S^c \equiv S' = \{x \in A / \quad x \notin S\}$$

Operaciones entre conjuntos

1) **Unión de conjuntos**

$$A \cup B = \{x \;/\quad x \in A \quad \text{ó} \quad x \in B\}$$

Ejemplos.

1. $A = \{a, b, c\}$, $\quad B = \{c, d\}$ $\qquad A \cup B = \{a, b, c, d\}$
2. $A = \{x / \quad 0 < x < 1\}$, $\quad B = \{0, 1\}$ $\qquad A \cup B = \{x / \quad 0 \leq x \leq 1\}$
3. $A = \{x / \quad x < -1\}$, $\quad B = \{x / \quad x < 0\}$ $\qquad A \cup B = \{x / \quad x < 0\}$

2) **Intersección de conjuntos**

$$A \cap B = \{x / \quad x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$$

Ejemplos.

1. $A = \{x / \quad x < -1\}$, $\quad B = \{x / \quad x < 0\}$ $\qquad A \cap B = \{x / \quad x \leq -1\}$
2. A = conjunto de todos los números no negativos
   B= conjunto de todos los números no positivos $\qquad A \cap B = \{0\}$

Si los **conjuntos** A y B no tienen ningún elemento común se dice que son **disjuntos** y se escribe $A \cap B = \emptyset$.

Leyes de Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$
$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Nota. Repasad las demás propiedades de la unión y la intersección.

Otras operaciones

3) **Diferencia de conjuntos**

$$A - B = \{x/x \in A \quad y \quad x \notin B\} = \left\{x/x \in A \quad y \quad x \in B^C\right\} = A \cap B^C$$

Producto cartesiano. Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces $A \times B$, el producto cartesiano de A y B, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b)/ \quad a \in A \quad y \quad b \in B\}$$

Ejemplo. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$
$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

- Si A tiene n elementos y B m elementos, $A \times B$ tiene $n \cdot m$ elementos.

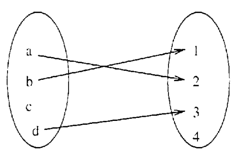
•• Si $A = B$ $\quad A \times B =$ se representa por $= A^2$

Ojo: $A \times B \neq B \times A$ (salvo cuando $A = B$).

Correspondencias

Definición. Se dice que f es una **correspondencia** entre los elementos de un conjunto A y los elementos de un conjunto B y se representa por $f : A \longrightarrow B$ ó $f : A \xrightarrow{f} B$ cuando se da un procedimiento que permita asociar elementos del conjunto A con elementos del conjunto B.

Ejemplo.



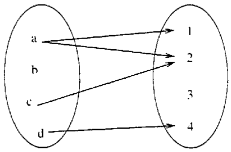
a A se le llama **conjunto inicial** y a B **conjunto final**.

Se llama **conjunto original** de una correspondencia $f : A \longrightarrow B$ al subconjunto de A formado por los elementos en los que está definida la correspondencia

$$orig(f) \subseteq A$$

Se llama **conjunto imagen** de una correspondencia $f : A \longrightarrow B$ al subconjunto de B formado por las imágenes de los elementos del conjunto A

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq B$$



$$A = \text{conjunto inicial} = \{a, b, c, d\}$$
$$B = \text{conjunto final} = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$orig(f) = \{a, c, d\}$$
$$\mathrm{Im}(f) = \{1, 2, 4\}$$

Aplicaciones

Definición. Se dice que f es una aplicación de A en B, si f es una correspondencia en la que todo elemento de A tiene imagen y esa imagen es única.
$f : A \longrightarrow B \quad \forall\, x \in A \quad \exists\, ! \quad y \in B \quad / \quad f(x) = y$

Ejemplo. Una función f es una aplicación $f : D \longrightarrow B$ donde D es el dominio de definición o campo de existencia de la función. Se dice que f es una función definida sobre D con valores en B.

Ejemplo.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3}$$
$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{donde} \quad D = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}.$$

Aplicaciones especiales

1) Aplicación constante. Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es constante si

$$f(x) = K \quad \forall\, x \in A.$$

2) Aplicación identidad. La aplicación identidad es una aplicación $i : A \longrightarrow A$ tal que

$$\forall\, x \in A \quad i(x) = x.$$

3) Aplicaciones iguales. Dos aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$ son iguales si

$$\forall\, x \in A \quad f(x) = g(x).$$

Tipos de Aplicaciones

1) Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **inyectiva** si

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ó

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

2) Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **suprayectiva** (o sobreyectiva) si

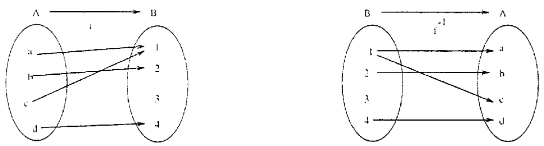
$$\mathrm{Im}(f) = B, \text{es decir, si } \forall\ y \in B \quad \exists \text{ al menos un } x \in A/ \quad f(x) = y.$$

3) Una aplicación $f : A \longrightarrow B$ se dice que es **biyectiva**, si es inyectiva y suprayectiva

$$\forall\ y \in B \quad \exists\,! \quad x \in A \quad / \quad f(x) = y.$$

Correspondencia recíproca. Aplicación recíproca

Sea f una correspondencia de A en B. Se llama correspondencia recíproca de f y se representa por f^{-1} a la correspondencia de B en A.
La correspondencia recíproca de una apliación no tiene por qué ser aplicación.



Para que la correspondencia recíproca de una aplicación f sea aplicación, es preciso que f sea biyectiva.

Ley de composición interna

Definición. Dado un conjunto A, se llama operación o ley de composición interna sobre A, a toda aplicación de $A \times A \longrightarrow A \quad / \quad (a, b) \longrightarrow c$

A "c" se le llama resultado o compuesto de los elementos a y b por la citada ley.

Una ley de composición interna se denota por los siguientes signos: $*, \top, \perp, \otimes, +, \times, \cdot, \ldots$ etc.. Si la denotamos por ejemplo por $*$, que al par $(a, b) \longrightarrow c$ se escribe $a * b = c$.

Propiedades que puede tener una ley de composición interna

Sean $*$ y $\top$ dos leyes de composición interna definidas en un conjunto A

1) **asociativa**. $\quad a * (b * c) = (a * b) * c \quad \forall\ a, b, c \in A$

2) **conmutativa**. $\quad a * b = b * a \quad \forall\ a, b \in A$

3) **elemento neutro**. Se llama elemento neutro al elemento $e \in A$ tal que

$$e * a = a * e = a \quad \forall\, a \in A$$

4) **elemento simétrico**. Sea $*$ una ley de composición interna sobre A la cual admite elemento neutro $e \in A$; se llama elemento simétrico del elemento $a \in A$ al elemento $a' \in A$ tal que

$$a * a' = a' * a = e$$

Al elemento a se le llama elemento **simetrizable**.

Si todos los elementos de A son simetrizables, entonces la ley de composición interna se llama **simétrica**.

5) **distributiva**. $\forall\, a, b, c \in A$

$a * (b \top c) = (a * b) \top (a * c)$, $\quad *$ distributiva a la izquierda respecto a $\top$.

$(a \top b) * c = (a * c) \top (b * c)$, $\quad *$ distributiva a la derecha respecto a $\top$.

Si se cumplen las dos distributivas: $*$ es distributiva respecto a $\top$.

Ley de composición externa

Dados dos conjuntos K y A, toda aplicación $F : K \times A \longrightarrow A$ se llama ley de composición externa sobre el conjunto A.

Un conjunto en el que se han definido una o más leyes de composición interna y eventualmente una o más leyes de composición externa, se dice que es una **estructura algebráica**.

Algunas estructuras algebráicas

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto en el que hay definida una ley de composición interna $*$ que es asociativa, entonces se dice que $(A, *)$ es un **semigrupo** o bien que A tiene estructura de semigrupo respecto de $*$.

Si además $*$ es conmutativa, $(A, *)$ es **semigrupo conmutativo**.

- **Grupo**. Sea $G \neq \emptyset$ un conjunto en el que se ha definido una ley de composición interna que cumple las propiedades:
  - Asociativa
  - Elemento neutro
  - Simétrica

  $(G, *)$ es un grupo; si además $*$ es conmutativa $\Longrightarrow (G, *)$ grupo conmutativo o abeliano.

- **Anillo**. Sea A un conjunto en el que están definidas dos operaciones $*, \top$, tales que:

  1) $(A, *)$ grupo conmutativo.
  2) $(A, \top)$ semigrupo.
  3) $\top$ es distributiva respecto a $*$, entonces se dice que $(A, *, \top)$. Es un anillo.

  - Si $\top$ es conmutativa $\Longrightarrow$ $(A, *, \top)$ **anillo conmutativo**.
  - Si $\exists \quad n \in A \quad / \quad a \top n = n \top a = a \quad \forall\, a \in A$ (n neutro respecto a $\top$)$\Longrightarrow$ $(A, *, \top)$ **anillo unitario**.

  Divisores de cero. Sea $(A, *, \top)$ un anillo. Sean $a, b \in A$ tales que $a \neq e$ y $b \neq e$. Se dice que a y b son divisores de cero si $a \top b = e$.

- **Anillo de integridad**: es un anillo sin divisores de cero.

- **Dominio de integridad**: es un anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero.

- **Cuerpo**. Se llama cuerpo a un conjunto K en el que están definidas dos leyes de composición interna $*, \top$ para las cuales se cumple:

  1) $(K, *)$ grupo.
  2) $(K - \{e\}, \top)$ grupo.
  3) $\top$ es distributiva respecto a $*$.

  Si además $\top$ es conmutativa $\longrightarrow$ $(K, *, \top)$ es cuerpo conmutativo.

- **Espacio Vectorial**. Dado un cuerpo $(K, *, \top)$, se dice que el conjunto V tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo K si:

  1) En V hay definida una ley de composición interna (simbolizada por "+"):
     $V \times V \quad \xrightarrow{+} \quad V$ tal que $(V, +)$ es grupo conmutativo.
  2) En V hay definida una ley de composición externa (simbolizada por $\circ$):
     $K \times V \quad \xrightarrow{\circ} \quad V$ que cumple las propiedades
     a) $\forall\ \alpha \in K \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V \Longrightarrow \alpha \circ (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \circ \vec{x} + \alpha \circ \vec{y}$
     b) $\forall\ \alpha, \beta \in K \quad \forall\ \vec{x} \in V \Longrightarrow (\alpha + \beta) \circ \vec{x} = \alpha \circ \vec{x} + \beta \circ \vec{x}$
     c) $\forall\ \alpha, \beta \in K \quad \forall\ \vec{x}, \vec{y} \in V \Longrightarrow \alpha \circ (\beta \vec{x}) = (\alpha\beta) \circ \vec{x}$
     d) $\forall\ \vec{x} \in V \quad \Longrightarrow n \circ \vec{x} = \vec{x}$ siendo n el neutro de K respecto a $\top$

- Los elementos del espacio vectorial V se llaman **vectores** y se suelen representar $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u}, \vec{v}, \ldots$

- Los elementos de K reciben el nombre de **escalares** y se representan por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Durante muchos siglos los números han sido utilizados en la matemática sin una definción precisa de ellos, por este motivo, sus propiedades eran estudiadas apoyándose en ideas intuitivas, sin dar una demostración rigurosa.

El conjunto infinito más sencillo es el de los **números naturales** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Este conjunto cumple los siguientes principios:

- **Principio de inducción matemática.**

  Una propiedad $P(x)$ es verdad para todos los números naturales x siempre que se cumplan estas dos condiciones:

  a) $P(1)$ es verdad (significa ue cumple la propiead P el elemento 1).

  b) Si $P(k)$ es verdad, entonces $P(k+1)$ es verdad.

Ejemplo. Demostrar que $\mathbb{N}$ cumple: $1 + 2 + \dots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

a) para $n = 1$ efectivamente $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

b) Supongamos que se cumple para k, veamos si se cumple para $k+1$

$$1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\left((k+1)+1\right)}{2}$$

•• **Principio de inducción magnética.** (Es una variación del principio anterior).

Una propiedad $P(x)$ es verdad para todos los naturales x siempre que

a) $P(1)$ sea verdad.

b) Si $P(1), P(2), \dots, P(k)$ es verdad, entonces $P(k+1)$ es verdad.

Los dos principios son equivalentes.

••• **Principio de buena ordenación.**

Todo subconjunto del conjunto de los números naturales no vacío, tiene elemento mínimo.

Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Podéis comprobar que $(\mathbb{Z}, +)$ tiene estructura de grupo conmutativo. No ocurre lo mismo con $(\mathbb{Z}, \times)$

Los **números racionales** $\mathbb{Q}$ se definen de la siguiente forma

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / \quad p, q \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad q \neq 0 \right\}.$$

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

Los números racionales pueden expresarse en forma de fracciones decimales finitas o periódicas infinitas.

Ejemplo. $-2 = -\frac{2}{1}, \qquad \frac{1}{2} = 0'5, \qquad \frac{2}{3} = 0'\overline{6}.$

Los números en forma de fracciones decimales infinitas, no periódicas, no son números racionales y se les denomina **números irracionales,** $\mathbb{I}$.

Ejemplo. $\pi, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, e, \ldots$

Veamos que efectivamente $\sqrt{2}$ no es un número racional. Hagamos la demostración por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Sea $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donde p y q sean números primos enteros, es decir $m.c.d.(p, q) = 1$,

$$\sqrt{2}q = p \quad \Longrightarrow \quad 2q^2 = p^2 \quad \Longrightarrow \quad p \text{ es par},$$

luego p se puede expresar $p = 2p'$. Entonces

$$2q^2 = (2p')^2 \quad \Longrightarrow 2q^2 = 4p'^2 \quad \Longrightarrow \quad q^2 = 2(p')^2 \quad \Longrightarrow$$

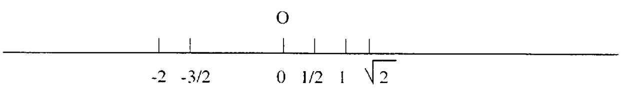
$$\Longrightarrow \quad q \text{ es par} \quad \Longrightarrow \quad m.c.d.(p, q) \neq 1$$

hemos llegado a una contradicción pues partíamos de que p y q eran primos.

La unión de los números racionales e irracionales se llama **conjunto de números reales** $\mathbb{R}$.

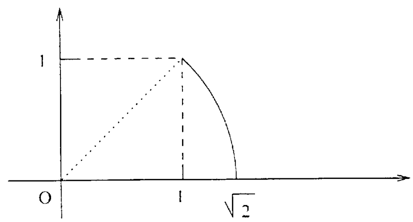
$\mathbb{R}$ es un conjunto totalmente ordenado.

Los números reales se representan en una recta infinita en la cual se determina un punto fijo O al que se le hace corresponder el cero, y los números positivos se colocan a la derecha de O y los negativos a la izquierda.



Se llama **recta real** o eje numérico.

Entre los números reales y los puntos de la recta anterior existe una correspondencia biunívoca: a cada punto le corresponde un solo número real y recíprocamente a cada número le corresponde un solo punto.



Debido a esta correspondencia biunívoca se suele decir indistintamente "número a" y punto "a".

Una **propiedad** importante de los números reales es la **de densidad**. Entre dos números reales cualesquiera existe una infinidad de números racionales y una infinidad de números irracionales.

Dos **conjuntos** se llaman **coordinables** cuando entre sus elementos se puede establecer una correspondencia biunívoca.

Los conjuntos coordinables se dice que tienen la misma **potencia**.

Se llaman **numerables** los conjuntos que tienen la misma potencia que el conjunto de los números naturales, es decir, aquellos para los que se puede establecer una correspondnecia biunívoca entre sus elementos y los números naturales.

El conjunto formado por la reunión de un número finito de conjuntos numerables es numerable. Pues si son:

$$A_1 : a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

$$A_2 : b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_p : l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

basta formar el conjunto

$$a_1, b_1, \ldots, l_1, a_2, b_2, \ldots, l_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots, l_n, \ldots$$

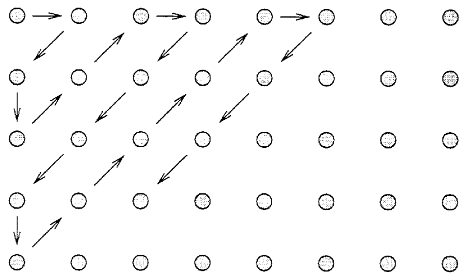
que es evidentemente numerable.

Todo conjunto numerable de conjuntos numerables es numerable. En efecto, sean $A_1, A_2, \ldots, A_p \ldots$ los conjuntos, y sus elementos:

$$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1n}, \ldots, A_1$$

$$u_{21}, u_{22}, \ldots, u_{2n}, \ldots, A_2$$
$$u_{31}, u_{32}, \ldots, u_{3n}, \ldots, A_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Se pueden numerar siguiendo el esquema:



Es decir

$$u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{21}, u_{31}, u_{22}, u_{13}, u_{14}, u_{23}, u_{32}, \ldots$$

Podéis observar que hemos tenido en cuenta que la suma de los subíndices sea $2, 3, 4, \ldots$.

Poniendo $u_{mn} = \dfrac{m}{n}$ se deduce como consecuencia inmediata que el conjunto de los números racionales es numerable. Observad que los números enteros y algunos fraccionarios son contados infinitas veces, pero esto no altera el resultado en virtud de la propiedad siguiente

Si de un conjunto numerable se extrae un conjunto parcial, queda otro numerable.

Todo conjunto en que cada elemento $u_{m,n,\ldots,k}$ depende de k índices que toman valores naturales es numerable.

El conjunto de los números reales del intervalo $(0, 1)$ no es numerable.

El conjunto de los números reales ampliados - o recta real ampliada - se define por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \quad U\{-\infty, +\infty\} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} -\infty < x & \forall\, x \in \mathbb{R} \\ +\infty > x & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Conjuntos acotados, supremo e ínfimo

Definición. Un **conjunto** $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está **acotado superiormente**, si existe un número real k, tal que $x \leq k \quad \forall\, x \in A$. k se llama **cota superior** de A.

Definición. Un **conjunto** $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está **acotado inferiormente**, si existe un número real q, tal que $x \geq q \quad \forall\, x \in A$. q se llama **cota inferior** de A.

Definición. Un **conjunto** $A \subset \mathbb{R}$ está **acotado**, cuando lo está superior e inferiormente. O también cuando existe un número real $k > 0$, tal que $|x| \leq k \quad \forall\, x \in A$. (es decir, $-k \leq x \leq k$).

Definición. Se llama **supremo** (o extremo superior) de un conjunto A a la menor de sus cotas superiores.

Definición. Se llama **ínfimo** (o extremo inferior) de un conjunto A a la mayor de sus cotas inferiores.

Si el supremo pertenece al conjunto A se llama **máximo**. Si el ínfimo pertenece al conjunto A se llama **mínimo**.

Ejemplos.

1. Sea $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$

   Cota superior mínima = supremo = 1

   Cota inferior máxima = ínfimo = 0

   A tiene máximo pues $1 \in A$

   A no tiene mínimo pues $0 \notin A$

2. $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\} = \{2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$

   A no está acotado superormente, aunque sí está acotado inferiormente y además tiene mínimo que es 1.

Valor absoluto de un número real. Propiedades.

Se llama valor absoluto (o módulo) de un número real a y se representa por $|a|$ al número

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

también se suele definir

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

o

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

Ejemplos. $|3| = 3$, $\left|-\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$, $|0| = 0$.

De la definición se deduce que para cualquier número a se verifica que $a \leq |a|$.

Propiedades del valor absoluto

1) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

2) $|-a| = |a|$.

3) $|ab| = |a| \quad |b|$.

4) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdad triangular).

   Demostración:
   $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$
   $\Longrightarrow \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{\{|a| + |b|\}^2}$ es decir, $|a + b| \leq |a| + |b|$ c.q.d.

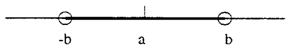
5) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

   Demostración:
   $||a| - |b||^2 = (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \leq a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

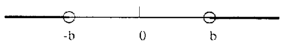
   Hemos obtenido

   $||a| - |b||^2 \leq (a-b)^2$ luego $||a| - |b|| \leq \sqrt{(a-b)^2} = |a - b|$ c.q.d.

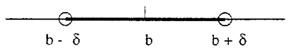
6) $|a| < b \quad \Longleftrightarrow \quad -b < a < b$.



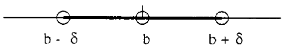
7) $|a| > b \quad \Longleftrightarrow \quad a < -b$ ó $a > b$ ($b > 0$, si $b < 0$ la desigualdad siempre es cierta).



8) $|a - b| < \delta \Longleftrightarrow b - \delta < a < b + \delta$.



9) $0 < |a - b| < \delta \Longleftrightarrow b - \delta < a < b \quad$ ó $\quad b < a < b + \delta$.



Distancia entre dos números reales (interpretación geométrica del valor absoluto)

Por definición la distancia entre dos números reales a y b es $d(a, b) = |a - b|$.
Es evidente que

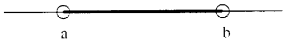
$d(a,b) = d(b,a)$ pues $d(a,b) = |a - b| = |(-1)(b - a)| = |-1||b - a| = |b - a| = d(b,a)$

$|a| = d(a, 0)$.

Intervalos. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, donde $a < b$ se llama **intervalo abierto** de extremos a y b, al conjunto de números reales tales que son mayores que a y menores que b. A "a" se le llama extremo inferior del intervalo y a "b" extremo superior.

La definición anterior de manera formal se expresa

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \quad a < x < b\}$.



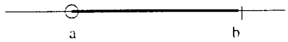
Intervalo cerrado

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \quad a \leq x \leq b\}$.

Semiintervalos

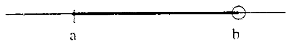
abierto a la izquierda y cerrado a la derecha

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / \quad a < x \leq b\}$.



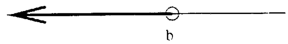
cerrado a la izquierda y abierto a la derecha

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / \quad a \leq x < b\}$.

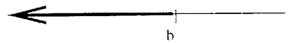


Como caso particular se definen los "intervalos infinitos"

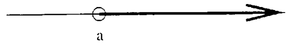
$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / \quad x < b\}$;



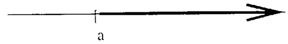
$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / \quad x \leq b\}$;



$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / \quad x > a\}$;



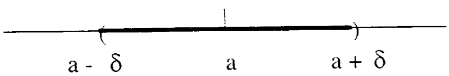
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} / \quad x \geq a\}$.



Entornos (son casos especiales de intervalos)

Se define **entorno abierto de centro** a **y radio** δ y se representa por $\epsilon(a, \delta)$ ó $N(a, \delta)$, al conjunto de números reales tales que su distancia a a es menor que δ, es decir

$$\epsilon(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / \quad d(x, a) < \delta\} = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$



Entorno cerrado de centro a **y radio** δ

$$\epsilon[a, \delta] = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x - a| \leq \delta\} = [a - \delta, a + \delta].$$

Entorno reducido de centro a **y radio** δ es el entorno de centro a y radio δ en el cual hemos "excluido" el centro a

$$\epsilon^*(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / \quad 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \epsilon(a, \delta) - \{a\}.$$

Nota. En la práctica se suele trabajar más con los entornos abiertos que con los cerrados, por ello, cuando hablemos de "entorno" nos referiremos a los abiertos salvo que se diga o especifique que es cerrado.

Ejercicios.

1) Decir si están acotados los siguientes conjuntos:

$$A = (2, 3);$$
$$B = \{1^2, 2^2, \ldots, n^2\};$$
$$C = \{1, -1, 2, -2, 3, -3 \ldots, n, -n\}.$$

2) Resolver las siguientes desigualdades:

a) $16x + 64 \leq 16$;

b) $3x + 5 > \frac{1}{4}(x - 2)$;

c) $3x - 2 \leq 1 + 6x$;

d) $x^2 + x - 2 \leq 0$;

e) $x^2 - 3x + 2 > 0$;

f) $x(x - 1)(x - 2) > 0$;

g) $6x^2 + 4x + 4 \leq 4(x - 1)^2$;

h) $\frac{1}{x} < x$;

i) $x + \frac{1}{x} \geq 1$;

j) $\frac{x}{x-5} > \frac{1}{4}$;

k) $\frac{1}{3x-5} < 2$;

l) $\frac{3x^2+1}{1-x^2} < 0$;

m) $\frac{3x^2-1}{1+x^2} \geq 0$.

3) Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

a) $|x - 3| = 8$;

b) $|x + 4| < 2$;

c) $|x| > 3$;

d) $|5x - 1| > 9$;

e) $|x^2 - 16| > 9$;

f) $|3x - 5| < 3$;

g) $|x - 1||x - 2| > 1$;

h) $|x-1||x+3| = 3$;

i) $|x-1||x+1| = 0$;

j) $0 < |x - \frac{1}{2}| < 2$.

4) Sean a y b números reales no negativos. Demostrar que si $a^2 \leq b^2$ entonces $a \leq b$. (Indicación: $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$).

5) Sean a y b números negativos. Demostrar que si $a^2 \leq b^2$ entonces $a \geq b$.

6) Sea $a \in \mathbb{R}$ demostrar que

a) si $a > 1$ entonces $a^2 > a$;

b) si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$.

7) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ demostrar que si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$.

8) Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $|x-5| \leq |x^2 - 1|$;

b) $||x-1| + 7| \leq x + 3$;

c) $|x^2 - 6| \geq |x+3|$.

0.2 Sucesiones de números reales.

Definición. Una **sucesión de números reales** o, abreviadamente sucesión, es una función del conjunto $\mathbb{N}$ en el conjunto $\mathbb{R}$, tal que a cada número natural le va a hacer corresponder un número real.

Así pues las funciones definidas para cada número natural mediante

$a(n) = n - 1$, $\quad b(n) = \frac{n^2-1}{n}$, $\quad c(n) = \sqrt{n}$, $d(n) = \sqrt{\ln n}$, $e(n) = \frac{e^n}{n}$

son todas ellas sucesiones de números reales.

El número $a(n)$ denominado **n-ésimo término** de la sucesión a se designa abreviadamente como a_n. La sucesión misma se denota por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Por ejemplo, la sucesión de recíprocos $a(n) = \frac{1}{n}$ $\forall\, n \in N$ puede definirse haciendo simplemente $a(n) = \frac{1}{n}$ o escribiendo $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ o incluso $\{\frac{1}{n}\}$.

La sucesión de raíces de 10, $a(n) = 10^{\frac{1}{n}}$ $\forall\, n \in N$ puede indicarse mediante $a(n) = 10^{\frac{1}{n}}$ o bien escribiendo $\left\{10, 10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{3}}, \ldots\right\}$ ó $\left\{10^{\frac{1}{n}}\right\}$

Las nociones desarrolladas para funciones en general (que visteis en el curso anterior), **son aplicables a sucesiones.**

- Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones de números reales

$$\alpha\{a_n\} + \beta\{b_n\} = \{\alpha a_n + \beta b_n\} \quad \text{y} \quad \{a_n\}\cdot\{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$$

también son sucesiones y supuesto que ninguno de los b_n sea cero

$$\frac{1}{\{b_n\}} = \left\{\frac{1}{b_n}\right\} \quad \text{y} \quad \frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$$

también son sucesiones.

Ejemplos. Sean $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \{n\}$, $\quad \{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n}\}$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{n\} + \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{n + \frac{1}{n}\right\} = \left\{n + \frac{n^2+1}{n}\right\}$$

$$\{a_n\}\cdot\{b_n\} = \{n\}\cdot\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{n \cdot \frac{1}{n}\right\} = \{1\}$$

$$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\}.$$

- Una **sucesión** está **acotada superiormente** cuando sus términos se mantienen menores o iguales que un cierto número k_1. k_1 recibe el nombre de **cota superior**.

- Una **sucesión** está **acotada inferiormente** cuando sus términos se mantienen mayores o iguales que un cierto número k_2. k_2 recibe el nombre de **cota inferior**.

- Una **sucesión** está **acotada** cuando lo esta superior e inferiormente o cuando todos sus términos en valor absoluto son menores o iguales que cierto número positivo k.

Ejemplos.

  - La sucesión $\{\frac{1}{n}\}$ está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1 \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}$$

  - La sucesión $\{2^n\}$ está acotada inferiormente por $2, 2 \leq 2^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$ pero no está acotada superiormente, pues no hay un número fijo M que satisfaga $2^n \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

  - La sucesión $a(n) = (-1)^n 2^n$ puede escribirse $\{-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots\}$ y vemos que no está acotada ni superior ni inferiormente.

- La suma de dos sucesiones acotadas es una sucesión acotada.

- El producto de dos sucesiones acotadas también es una sucesión acotada.

- El producto de una sucesión acotada por un número real, es una sucesión acotada.

Definición. Se dice que una **sucesión** $\{a_n\}$ es

a) **creciente** $\Leftrightarrow a_n < a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

b) **no decreciente** $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

c) **decreciente** $\Leftrightarrow a_n > a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

d) **no creciente** $\Leftrightarrow a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

Si se cumple cualquiera de estas cuatro propiedades, se dice que la sucesión es **monótona**.

Ejemplo 1. Las sucesiones $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$, $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$, $\{2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \ldots\}$ son todas ellas monótonas pero $\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots\}$ no lo es.

Ejemplo 2. La sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6} \ldots\right\}$ es creciente puesto que

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+1} =$$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{n+2)(n+1)} \implies$$

$$\implies \quad a_{n+1} - a_n > 0 \quad \implies \quad a_{n+1} > a_n.$$

(También se puede ver demostrando que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$). Su cota inferior es $\frac{1}{2}$ y la superior 1.

Ejemplo 3. La sucesión $a_n = \dfrac{2n}{n!}$ es no creciente.

Decrece para $n \leq 2$ pues

$$a_1 = \frac{2^1}{1!} = 2$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2!} = \frac{4}{2} = 2$$

y para $n \geq 2$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1} - (n+1)2^n}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{2^n \cdot 2 - n \cdot 2^n - 2^n}{(n+1)!} = \frac{2^n(2 - n - 1)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{2^n(-n+1)}{(n+1)!} = -\frac{2^n(n-1)}{(n+1)!} < 0 \quad \text{si } n \geq 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1} < a_n.$$

(También demostrando que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ si $n \geq 2$).

Ejemplo 4. Si $|c| > 1$, la sucesión $a_n = |c|^n$ crece sin tener ninguna cota.

Demostración: Supongamos que $|c| > 1$, entonces $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{|c|^{n+1}}{|c|^n} = |c| > 1$ por lo tanto $a_{n+1} > a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Esto demuestra que la sucesión es creciente.

Para demostrar la falta de acotación, tomemos M y demostremos que existe un $k \in \mathbb{N}$ para el que $|c|^k \geq M$.

Un k apropiado es el que satisface $k \geq \frac{\ln M}{\ln |c|}$ ya que entonces tenemos

$k \ln |c| \geq \ln M \Rightarrow \ln |c|^k \geq \ln M$ y en consecuencia $|c|^k \geq M$.

Puesto que las sucesiones están definidas sobre el conjunto de los enteros positivos y no sobre un intervalo, no se les puede aplicar directamente los métodos de Cálculo.

Afortunadamente, en la mayor parte de los casos, podemos superar esta dificultad considerando incialmente, no la sucesión misma, sino las funciones definidas sobre $[1, \infty)$ que concuerdan con la sucesión dada para valores naturales.

Ejemplos.

1) Estudiemos la sucesión $a_n = \dfrac{n}{e^n}$.

   Consideremos la función $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

   Como $f'(x)$ se anula en $x = 1$ y es negativa para $x > 1 \Rightarrow f$ es decreciente en $[1, \infty)$ luego la sucesión $a_n = \frac{n}{e^n}$ es decreciente.

   Como la sucesión es decreciente, su primer término $a_1 = \frac{1}{e}$ es el mayor. Por lo tanto $\frac{1}{e}$ es una cota superior. Como todos los términos de la sucesión son positivos, el 0 es una cota inferior.

2) La sucesión $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ es decreciente a partir de $n \geq 3$.

   Podríamos comparar directamente a_n con a_{n+1} pero es más sencillo el considerar la función $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ pues como $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$ tenemos que

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right).$$

   Para $x > e$, $f'(x) < 0$ esto implica que f es decreciente en $[e, \infty)$. Como $3 > e$, f es decreciente en $[3, \infty)$, luego $\{a_n\}$ es decreciente para $n > 3$.

Idea intuitiva del límite de una sucesión

En la sucesión $(0'3, 0'33, 0'333, \ldots, 0'33 \overset{n}{\cdots} 3, \ldots)$ sus términos se aproximan cada vez más al número racional $\frac{1}{3}$. En la $(2, 2'9, 2'99, 2'999, \ldots)$ sus términos se aproximan cada vez más al número 3. Este número se dice que es el límite de la sucesión.

- En la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ cada término se aproxima mejor que el anterior a 0.

  Si n se hace muy grande, la diferencia entre 0 y $\frac{1}{n}$ se hace muy pequeña. Diremos que el límite de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es cero.

- La sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$ tiene por límite el número 1. Si n se hace muy grande $\frac{n}{n+1}$ se aproxima cada vez más a 1.

  Así para $n = 1000$, $\quad \frac{1000}{1001} = 0'9990009$

  para $n = 100000$, $\quad \frac{100000}{100001} = 0'99999$.

Los ejemplos anteriores nos permiten dar una definición provisional e intuitiva del límite de una sucesión.

Decir que el número l es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ equivale a decir que si n va tomando valores cada vez mayores, entonces los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número l.

Intuitivamente vemos también que la idea del límite de una sucesión lleva implícito que, para cualquier ϵ que prefijemos, existen términos de la sucesión que están dentro del entorno $(l - \epsilon, l + \epsilon)$.

No solamente deben estar en este entorno algunos términos sino todos los siguientes a partir de uno dado que llamaremos a_{n_0} $(a_{n_0} \equiv a_k)$.

Ejemplo. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene límite 0, ya que para todo $\epsilon > 0$ se puede determinar un término a_k tal que a partir de él, todos los siguientes términos están en el entorno $(0 - \epsilon, 0 + \epsilon)$.

Este término a_k depende de ϵ como podemos ver a continuación:

- Si $\epsilon = \frac{1}{10}$ el término a_k es a_{10} ya que $-\epsilon < \frac{1}{n} < \epsilon$ para todo $n > 10$.
- Si $\epsilon = \frac{1}{100}$ el término a_k es a_{100} ya que $\frac{-1}{100} < \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ para todo $n > 100$.

Definición.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0$ **existe un entero** $k > 0$ **tal que si** $n \geq k$, **entonces** $|a_n - l| < \epsilon$.

O también: El número real l es el límite de la sucesión $\{a_n\}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, cuando para todo número real positivo ϵ, existe un término a_k de la sucesión, a partir del cual, todos los términos siguientes están en el entorno $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ del punto l.

Ejemplo 1. La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ tiene por límite 0 veámoslo.

La definición exige demostrar que para cada $\epsilon > 0$ existe un número entero k positivo tal que si $n > k$ entonces $|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| < \epsilon$

- siendo $\frac{1}{n} > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ la desigualdad $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ es equivalente a $\frac{1}{n} < \epsilon$ es decir $n > \frac{1}{\epsilon}$.
- Si $\epsilon = 10^{-1}$ entonces $n > \frac{1}{10^{-1}}$ se verifica para $n > k = 10$
- Si $\epsilon = 10^{-3}$ entonces $n > \frac{1}{10^{-3}}$ se verifica para $n > k = 1000$

Ejemplo 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{4n+2} = \dfrac{3}{4}$

Sea $\epsilon > 0$ tenemos que demostrar que $\exists\ k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\left|\frac{3n-1}{4n+2} - \frac{3}{4}\right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq k.$$

Puesto que

$$\left|\frac{3n-1}{4n+2} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{12n-4-12n-6}{4\,(4n+2)} = \frac{-10}{4(4n+2)}\right| =$$

$$= \frac{10}{8(2n+1)} = \frac{5}{4\,(2n+1)} \text{ ha de ser } < \epsilon$$

$$\frac{5}{4\epsilon} < 2n+1 \iff \frac{5}{4\epsilon} - 1 < 2n \iff$$

$$\iff \frac{5-4\epsilon}{4\epsilon} < 2n \iff \frac{5-4\epsilon}{8\epsilon} < n \implies k > \frac{5-4\epsilon}{8\epsilon}.$$

- para $\epsilon = 0'1$ $\quad \frac{5-4\cdot 0'1}{8\cdot 0'1} = 5'75$ luego $k > 6$.
- para $\epsilon = 0'001$ $\quad \frac{5-4\cdot 0'001}{8\cdot 0'001} = 624'5$ luego $k > 625$.

Ejemplo 3. Sea $a_n = 0'333 \overset{n}{\cdots} 3$, demostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$. Con este ejemplo vamos a justificar que $\frac{1}{3} = 0'\overline{3}$.

Sea $\epsilon > 0$

$$\left|a_n - \frac{1}{3}\right| = \left|0'333 \overset{n}{\cdots} 3 - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{0'999 \overset{n}{\cdots} 9 - 1}{3}\right| = \left|\frac{-0'000 \overset{n}{\cdots} 01}{3}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^n}$$

Escogiendo k de manera que $\frac{1}{10^k} < \epsilon$, si $n \geq k$

$$|a_n - \frac{1}{3}| < \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^k} < \epsilon$$

El proceso de paso al límite para sucesiones es similar al proceso de paso al límite de funciones. Por eso, las demostraciones de la mayor parte de los teoremas sobre límites de sucesiones son similares a las de los teoremas sobre límites de funciones.

Teorema 0.1 ***Unicidad del límite.***
Si $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2$, *entonces se verifica que* $l_1 = l_2$. *Es decir, si una sucesión tiene límite, éste es único.*

Demostración:

Supongamos $l_1 \neq l_2$, tomemos como $\epsilon = \frac{1}{2}|l_1 - l_2| > 0$.

- Por $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1 \quad \Rightarrow \quad \exists\ k_1 \ / \quad |a_n - l_1| < \frac{1}{2}|l_1 - l_2|, \quad \forall\ n \geq k_1.$
- Por $\lim_{n\to\infty} a_n = l_2 \quad \Rightarrow \quad \exists\ k_2 \ / \quad |a_n - l_2| < \frac{1}{2}|l_1 - l_2|, \quad \forall\ n \geq k_2.$

Para $n \geq \max\{k_1, k_2\}$ tenemos que

$$|a_n - l_1| + |a_n - l_2| < |l_1 - l_2|$$

Por la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - a_n) + (a_n - l_2)| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| = \\ &= |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < |l_1 - l_2| \end{aligned}$$

que es un absurdo. En consecuencia $l_1 = l_2$.

c.q.d.

Definición. Una **sucesión** que tiene límite se dice que es **convergente**. Una **sucesión** se dice que es **divergente** cuando su límite es infinito, es decir, cuando para cada número $H > 0$ elegido tan grande como se quiera, existe un entero positivo k, tal que cualquiera que sea $n > k$ se verifica $|a_n| > H$.

Entonces se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Si se puede precisar que $a_n > H$ o bien $a_n < -H$ se dice que el límite es $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente.

Ejemplo. $\lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Las sucesiones que carecen de límite se llaman **oscilantes**.

Ejemplos.

$$1, 2, \frac{1}{2}, 2^2, \frac{1}{4}, 2^3, \dots \qquad\qquad 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$$

Son notaciones equivalentes las siguientes expresiones

- $\lim_{n\to\infty} a_n = l$,
- $a_n \longrightarrow l$ (se lee a_n converge a l),
- $a_n \longrightarrow l$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Teorema 0.2 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Demostración: Como $\lim_{n\to\infty} a_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, k/ \quad \forall\, n > k|a_n - l| < \epsilon$. Entonces

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon \quad \Rightarrow \quad l - \epsilon < a_n < l + \epsilon, \quad \forall\, n \geq k \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k-1}|, |l| + \epsilon\} \quad \forall\, n \quad \Rightarrow \quad \{a_n\} \text{ está acotada.}$$

Puesto que las sucesiones convergentes son acotadas, las sucesiones que no sean acotadas no pueden ser convergentes, es decir

toda sucesión no acotada es divergente

Ejemplo. Ninguna de las sucesiones siguientes $a_n = \frac{1}{2}n$, $b_n = \frac{n^2}{n+1}$, $c_n = n \ln n$ está acotada. Por lo tanto, todas ellas son divergentes.

La acotación no implica convergencia.

Ejemplo. La sucesión oscilante $\{1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$ está acotada (superiormente por 1, inferiormente por 0) pero vemos que no converge. Sin embargo, vamos a ver que la acotación, conjuntamente con la monotonía, implica la convergencia.

Teorema 0.3 *Una sucesión acotada y no decreciente converge al extremo superior; una sucesión acotada y no creciente converge a su extremo inferior.*

Demostración:

- Supongamos que $\{a_n\}$ es acotada y no decreciente. $a_n \leq a_{n+1}$. Sea ϵ un número positivo arbitrario. Si l es el extremo superior de esta sucesión, entonces ha de existir a_k tal que

  $$l - \epsilon < a_k \quad \text{(pues de lo contrario, } l - \epsilon \text{ sería una cota superior menor que } l).$$

  Por a_n ser monótona, si $n \geq k$ entonces $a_n \geq a_k$. Es decir $a_k \leq a_n$, por lo tanto tenemos:

  $$l - \epsilon < a_n \leq l \quad \text{(por suponer que } l \text{ es el extremo superior)} \quad \forall\, n \geq k$$

  luego

  $$l - \epsilon < a_n \leq l < l + \epsilon \quad \forall\, n \geq k$$

es decir

$$-\epsilon < a_n - l < \epsilon \quad . \quad \forall\, n \geq k \quad \Rightarrow \quad |a_n - l| < \epsilon \quad \forall\, n \geq k \Rightarrow$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

c.q.d.

- El caso no creciente se demuestra de forma análoga (hacedlo como ejercicio).

Ejemplo. Sea la sucesión $\{a_n\} = \left\{(3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}}\right\}$.

A) Veamos que la sucesión $\{a_n\}$ está acotada:

$$3 = (3^n)^{\frac{1}{n}} < (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} < (2 \cdot 4^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \cdot 4$$

B) Veamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente:

$$(3^n + 4^n)^{\frac{(n+1)}{n}} = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \cdot (3^n + 4^n) = (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \cdot 3^n + (3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} \cdot 4^n >$$

$$> (3^n)^{\frac{1}{n}} \cdot 3^n + (4^n)^{\frac{1}{n}} \cdot 4^n > 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n = 3^{n+1} + 4^{n+1}$$

tomando la raiz de orden $n + 1$ en ambos extremos de la desigualdad obtenemos:

$$(3^n + 4^n)^{\frac{1}{n}} > (3^{n+1} + 4^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

A) y B) $\Rightarrow$ que la sucesión es convergente. (Luego veremos que el límite es 4).

Teorema 0.4 *Si $a_n \longrightarrow l$ y $b_n \longrightarrow m$ y α es un número real:*

a) $a_n + b_n \longrightarrow l + m$,

b) $\alpha\, a_n \longrightarrow \alpha\, l$,

c) $a_n \cdot b_n \longrightarrow l \cdot m$.

Si además $m \neq 0$ y b_n nunca es cero, entonces

d) $\dfrac{1}{b_n} \longrightarrow \dfrac{1}{m}$.

e) $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{l}{m}$.

Demostración:

a) Por $a_n \to l \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, k_1 / \quad \forall\, n \geq k_1 \quad |a_n - l| < \epsilon/2$
Por $b_n \to m \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, k_2 / \quad \forall\, n \geq k_2 \quad |b_n - m| < \epsilon/2$

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(l+m)| &= |(a_n-l)+(b_n-m)| \leq |(a_n-l)|+|(b_n-m)| < \\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \qquad \forall\, n \geq \max\{k_1,k_2\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=l+m.$$

c.q.d.

b) Hacedlo como ejercicio.

c)
- Por $\{a_n\}$ convergente, está acotada, luego $\exists\ M>0/ \quad |a_n|\leq M \quad \forall\ n$
- Por $\{a_n\} \longrightarrow l, \quad \forall\,\epsilon>0 \quad \exists\ k_1 \ / \quad \forall\ n\geq k_1 \quad |a_n-l| < \frac{\epsilon}{2(|m|+1)}$, pues m puede ser cero.
- Por $\{b_n\} \longrightarrow m, \quad \forall\,\epsilon>0 \quad \exists\ k_2 \ / \quad \forall\ n\geq k_2 \quad |b_n-m| < \frac{\epsilon}{2M}$, tomando $k=\max\{k_1,k_2\}, \quad \forall\ n\geq k$ tenemos que $\left\{ \begin{array}{l} |a_n-l| < \frac{\epsilon}{2(|m|+1)} \\ |b_n-m| < \frac{\epsilon}{2M} \end{array} \right\}$

  Entonces

$$|a_n\cdot b_n - l\cdot m| = |a_nb_n - a_nm + a_nm - lm| = |a_n(b_n-m)+m(a_n-l)| \leq$$

$$\leq |a_n(b_n-m)|+|m(a_n-l)| = |a_n||b_n-m|+|m||a_n-l| <$$

$$< M|b_n-m|+(|m|+1)|a_n-l| <$$

$$< M\frac{\epsilon}{2M}+(|m|+1)\frac{\epsilon}{2(|m|+1)} = \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

luego

$$\forall\,\epsilon>0 \quad \exists\ k \quad / \quad \forall\ n\geq k = max\{k_1,k_2\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |a_n\cdot b_n - l\cdot m| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \lim(a_nb_n)=l\cdot m$$

d) Sea $\epsilon>0$

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{m}\right| = \left|\frac{m-b_n}{b_n\cdot m}\right| = \frac{|m-b_n|}{|b_n\cdot m|} = \frac{|b_n-m|}{|b_n||m|}$$

pero como $b_n \to m(\neq 0)$ y $\frac{|m|}{2}>0$, existirá un k_1 tal que si $n\geq k_1$ entonces $|b_n-m| < \frac{|m|}{2}$ que equivale a $-\frac{|m|}{2} < b_n - m < \frac{|m|}{2}$.

Si $m>0$

$$m=|m| \quad \text{luego} \quad |m|-\frac{|m|}{2} < b_n \quad \Rightarrow \quad \frac{|m|}{2} < b_n.$$

Si $m<0$

$$\frac{|m|}{2}+m=-\frac{|m|}{2} \quad \text{luego} \quad b_n < -\frac{|m|}{2} \quad \Rightarrow \quad |b_n| > \frac{|m|}{2}.$$

De lo anterior deducimos que para $m \neq 0$

$$\frac{|m|}{2} < |b_n| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|m|}$$

luego

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|b_n - m|}{|b_n||m|} < \frac{2}{|m|}\frac{|b_n - m|}{|m|} = \frac{2}{|m|^2}|b_n - m|$$

Como $b_n \longrightarrow m \quad \exists\, k_2 \,/ \quad$ si $n \geq k_2$ entonces $|b_n - m| < \frac{\epsilon|m|^2}{2}$ luego, para $n \geq k_2$ tenemos

$$\frac{2}{|m|^2}|b_n - m| < \epsilon$$

Tomando $k \geq \max\{k_1, k_2\}$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{m}\right| < \epsilon \quad \forall\, n \geq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{m}.$$

c.q.d.

La demostración de e) ahora es inmediata pues

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \longrightarrow l \cdot \frac{1}{m}.$$

Nota. Dos sucesiones pueden no ser convergentes y su cociente tener límite.

Ejemplo. Las sucesiones $\{n+1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$ y $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ no tienen límite sin embargo su cociente $\left\{\frac{n+1}{n}\right\} \longrightarrow 1$.

Después de haber visto este teorema ya podemos manejar cualquier sucesión racional

$$a_n = \frac{\alpha_k\, n^k + \alpha_{k-1}\, n^{k-1} + \ldots + \alpha_0}{\beta_j\, n^j + \beta_{j-1}\, n^{j-1} + \ldots + \beta_0}$$

Para determinar el comportamiento de la sucesión, necesitamos únicamente dividir tanto el numerador como el denominador por la potencia más alta de n en la fracción.

Ejemplo 1. $\dfrac{2\,n^3 - 3\,n^2 + 3\,n - 1}{n^4 - 3\,n^2} = \dfrac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{1 - \frac{3}{n^2}} \longrightarrow \dfrac{0}{1} = 0$

Ejemplo 2. $\dfrac{1 - 3\,n^2}{7\,n^2 - 3\,n + 2} \longrightarrow -\dfrac{3}{7}$

Ejemplo 3. $\dfrac{n^6 - 3\,n^2 + 2\,n - 7}{n^4 - 3\,n + 2} \longrightarrow -\dfrac{1}{0} \Rightarrow$ la sucesión no está acotada $\Rightarrow$ no puede converger.

Teorema 0.5 $\{a_n\} \to l \iff \{a_n - l\} \to 0 \iff |\{a_n - l\}| \to 0$

Demostración:

$$\{a_n\} \to l \iff \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, k \,/\, \forall\, n \geq k |a_n - l| < \epsilon \iff$$

$$\iff |(a_n - l) - 0| < \epsilon \iff \{a_n - l\} \to 0.$$

c.q.d.

Teorema 0.6 ***Teorema de la sucesión intermedia.***
Supongamos que para todo n suficientemente grande $a_n \leq b_n \leq c_n$. *Si* $\{a_n\} \to l$ *y* $\{c_n\} \to l$ *entonces* $\{b_n\} \to l$.

Demostración:

- Por $\{a_n\} \to l, \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, k_1 \,/\, \forall\, n \geq k_1 \quad |a_n - l| < \epsilon$
- Por $\{c_n\} \to l, \quad \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, k_2 \,/\, \forall\, n \geq k_2 \quad |c_n - l| < \epsilon$

$$\left.\begin{array}{l} -\epsilon < a_n - l < \epsilon \\ -\epsilon < c_n - l < \epsilon \end{array}\right\} \text{ como } a_n \leq b_n \leq c_n$$

$-\epsilon < a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l < \epsilon$

entonces, para $k = \max\{k_1, k_2\} \qquad -\epsilon < b_n - l < \epsilon$

luego $\forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, k = \max\{k_1, k_2\} \;\; / \;\; \forall\, n \geq k \quad -\epsilon < b_n - l < \epsilon$

es decir $|b_n - l| < \epsilon$ luego $\{b_n\} \to l$. c.q.d.

Corolario. *Supongamos que para n suficientemente grande* $|b_n| \leq |c_n|$. *Si* $|c_n| \to 0$ *entonces* $|b_n| \to 0$.

Demostración:

Claro pues $|b_n| \leq |c_n| \quad \Rightarrow \quad -|c_n| \leq |b_n| \leq |c_n| \quad \Rightarrow$ por el teorema 0.6 $|b_n| \to 0$.

c.q.d.

Ejemplo 1. $\frac{\cos \pi n}{n} \to 0$ porque $|\frac{\cos \pi n}{n}| \leq |\frac{1}{n}|$ y $\frac{1}{n} \to 0$ entonces, por el teorema 0.5 $|\frac{1}{n}| \to 0$ y por el corolario anterior $|\frac{\cos \pi n}{n}| \to 0$ y de nuevo por el teorema 0.5 $\frac{\cos \pi n}{n} \to 0$.

Ejemplo 2. $\sqrt{4 + (\frac{1}{n})^2} \to 2$ Como se cumple

$$2 \leq \sqrt{4 + (\frac{1}{n})^2} \leq \sqrt{4 + (\frac{1}{n})^2 + 4(\frac{1}{n})} = \sqrt{(2 + \frac{1}{n})^2} = (2 + \frac{1}{n})$$

luego $2 \leq \sqrt{4+(\frac{1}{n})^2} \leq (2+\frac{1}{n})$. y como $\lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = 2$. por el teorema 0.6

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4+\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 2.$$

Ejemplo 3.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Hemos visto que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, entonces

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \leq \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right| =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left|1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{e}{n}.$$

Hemos obtenido $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \leq \frac{e}{n}$, como $\frac{e}{n} \to 0$ entonces $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| \to 0$ y por el teorema 0.5 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$.

Veamos otra demostración de que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ en dos pasos. usando el teorema 0.3.

1) La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es creciente.

Utilizando el binomio de Newton para expresar a_n

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n\cdot n\cdot n}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots}{n\cdot n \overset{n}{\cdots} n} =$$

$$= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Esta expresión de a_n consta de n sumandos. Análogamente tendríamos

$$a_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Esta expresión de a_{n+1} consta de $(n+1)$ sumandos.

Si comparamos los términos de a_n y a_{n+1} se comprueba que los sumandos de a_{n+1} son mayores que los correspondientes de a_n (salvo el primero que es igual), por tanto

$$a_n < a_{n+1}.$$

Se tiene pues que

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{3}\right)^n < \dots$$

luego la sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente.

2) La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ está acotada.

Consideremos la sucesión

$$\{b_n\} = \left\{2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right\}$$

comparando con $\{a_n\}$ vemos que $a_n < b_n$ pues los sumandos de $\{a_n\}$ son menores que los de $\{b_n\}$. Por otra parte, si se compara la sucesión $\{b_n\}$ con la sucesión

$$\{c_n\} = \left\{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$

se observa que $b_n < c_n$. Como $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$ son los términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, su suma es

$$S = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

luego

$$c_n = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así pues tenemos las desigualdades

$$2 < a_n < b_n < c_n < 3.$$

Esta desigualdad demuestra que para todo n, el valor del término a_n está comprendido entre 2 y 3.

Luego la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es una sucesión acotada, y su intervalo de acotación es $[2, 3]$.

Como habíamos visto antes que es creciente $\Rightarrow$ es convergente. El límite de esta sucesión es por definición el número e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Cálculo aproximado del número e

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	$2'25$
3	$2'37030$
4	$2'441406$
...	...
1000	$2'716924$
10000	$2'718146$
100000	$2'718625$
1000000	$2'718283$

cuanto mayor es n, mejor es la aproximación que se obtiene.

Las sucesiones $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$, $\left\{\ln\frac{n}{n+1}\right\}$, $\left\{e^{\frac{1}{n}}\right\}$, $\left\{\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\pi^2 n^2-8}{16n^2}}\right)\right\}$ son todas de la forma $\{f(a_n)\}$ donde f es una función contínua.

Tales sucesiones son fáciles de tratar. La idea básica es esta: **cuando se aplica una función contínua a una sucesión convergente, el resultado es una sucesión también convergente.**

Teorema 0.7 *Supongamos que $c_n \to c$ y que para cada n, c_n pertenece al dominio de la función f. Si f es contínua en c, entonces*

$$f(c_n) \to f(c).$$

<u>Demostración</u>:

Supongamos que f es continua en c y tomemos $\epsilon > 0$. En virtud de esta continuidad sabemos que $\exists$ un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(c)| < \epsilon,$$

como $c_n \to c$, ha de existir un entero positivo k tal que si $n \geq k$ entonces

$$|c_n - c| < \delta \text{ por tanto, si } n \geq k \text{ entonces } |f(c_n)-f(c)| < \epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(c_n) \to f(c)$$

c.q.d.

Ejemplos.

1. Como $\frac{\pi}{n} \to 0$ y la función coseno es contínua en 0, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 0$;
2. Como $\frac{n}{n+1} \to 1$ y la función logaritmo es contínua en $1 \Rightarrow \log\left(\frac{n}{n+1}\right) \to \log 1 = 0$;
3. Como $\frac{1}{n} \to 0$ la función exponencial es contínua en $0 \Rightarrow e^{\frac{1}{n}} \to 0 = 1$;

4. Como $\frac{\pi^2 n^2-8}{16n^2} \longrightarrow \frac{\pi}{16}$ y la función $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$ es contínua en $\pi^2 \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\pi^2n^2-8}{16n^2}}\right) \longrightarrow$ $\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\pi^2}{16}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

5. Como $\frac{2n+1}{n} + \left(5 - \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 7$ y la función raiz cuadrada es contínua en 7 tenemos $\sqrt{\frac{2n+1}{n} + \left(5 - \frac{1}{n^2}\right)} \longrightarrow \sqrt{7}$;

6. Como la función valor absoluto es contínua en todo su dominio $a_n \longrightarrow l \Rightarrow |a_n| \longrightarrow |l|$.

Cálculo de Límites

- **Límite de una suma o diferencia**

a) $\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow a\\ \text{y } b_n \longrightarrow b\end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow a + b$;

b) $\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow \infty\\ \text{y } b_n \text{ está acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow \infty$;

$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow -\infty\\ \text{y } b_n \text{ está acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow -\infty$;

c) $\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow \infty\\ \text{y } b_n \longrightarrow \infty\end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow \infty$;

d) $\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow -\infty\\ \text{y } b_n \longrightarrow -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \longrightarrow -\infty$;

e) $\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \longrightarrow \infty\\ \text{y } b_n \longrightarrow -\infty\\ \text{ó}\\ \text{si } a_n \longrightarrow -\infty\\ \text{y } b_n \longrightarrow \infty\end{array}\right\}$ no se puede asegurar nada del límite de $a_n + b_n$.

Ejemplos.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2} - \frac{1+n^2}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+n^2}{2n} = \infty - \infty$

pero $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2} - \frac{1+n^2}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n-1}{2n} = -\frac{1}{2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{2} - \frac{1+n^2}{2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+1+n^2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{2n} \longrightarrow \infty$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1} - n\right) = \infty - \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2-1}-n\right)\left(\sqrt{n^2-1}+n\right)}{\sqrt{n^2-1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} = 0.$

- **Límite de un producto**

a) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to a\\ \text{y } b_n \to b\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to a \cdot b;$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to 0\\ \text{y } b_n \text{ está acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to 0;$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to \infty\\ \text{y } b_n \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \infty;$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to 0\\ \text{y } b_n \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \text{ no se puede decir nada (indeterminación);}$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to \infty\\ \text{y } b_n \to -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to -\infty.$$

- **Límite de un cociente**

a) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to a\\ \text{y } b_n \to b \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \cdot b_n \to \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b};$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \text{ está acotada} \to 0\\ \text{y } b_n \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0;$$

c) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \text{ está acotada}\\ \text{y } b_n \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty;$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to 0\\ \text{y } b_n \text{ está acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0;$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to \infty\\ \text{y } b_n \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \text{ indeterminación;}$$

f) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to 0\\ \text{y } b_n \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \text{ indeterminación;}$$

g) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to 0\\ \text{y } b_n \to \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to 0;$$

h) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to \infty\\ \text{y } b_n \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty;$$

i) $$\left.\begin{array}{l}\text{si } a_n \to \infty\\ \text{y } b_n \text{ está acotada}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \infty.$$

- **Límite de un logaritmo**

Si $a_n \to a$ entonces
$$\lim_{n \to \infty} (\log_\alpha a_n) = \log_\alpha a.$$

- **Límite de una potencia**

  a) Si $a > 0$ y $\alpha_n \to \alpha$ entonces

$$a^{\alpha_n} \to a^{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n}.$$

Casos particulares

$$\begin{array}{llll}
* \text{ si } \alpha_n \to \infty & \wedge & a > 1 & \text{entonces } a^{\alpha_n} \to \infty; \\
* \text{ si } \alpha_n \to -\infty & \wedge & a > 1 & \text{entonces } a^{\alpha_n} \to 0; \\
* \text{ si } \alpha_n \to -\infty & \wedge & a < 1 & \text{entonces } a^{\alpha_n} \to \infty; \\
* \text{ si } \alpha_n \to \infty & \wedge & a < 1 & \text{entonces } a^{\alpha_n} \to 0; \\
* \text{ si } \alpha_n \to 0 & \wedge & a > 1 & \text{entonces } a^{\alpha_n} \to 1.
\end{array}$$

  b) $\left.\begin{array}{l} \text{si } \alpha_n \to \alpha > 0 \\ \text{y } \beta_n \to \beta \end{array}\right\}$ entonces

$$(\alpha_n)^{\beta_n} \to \alpha^{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n}$$

Casos particulares

$$* \left.\begin{array}{l} \text{si } \alpha_n \to 1 \\ \text{y } \beta_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_n)^{\beta_n} \to 1^{\infty} \text{ indeterminación (número e);}$$

$$* \left.\begin{array}{l} \text{si } \alpha_n \to 0 \\ \text{y } \beta_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_n)^{\beta_n} \to 0^{0} \text{ indeterminación;}$$

$$* \left.\begin{array}{l} \text{si } \alpha_n \to \infty \\ \text{y } \beta_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_n)^{\beta_n} \to \infty^{0} \text{ indeterminación;}$$

$$* \left.\begin{array}{l} \text{si } \alpha_n \to 0 \\ \text{y } \beta_n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha_n)^{\beta_n} \to 0.$$

Algunos límites importantes

- si $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = 1$;
- si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$;
- para todo x real , $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$;
- para todo $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$;

- $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1;$
- para todo x real, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$

Ejemplos.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (2^2)^{\frac{1}{n}} = 1;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-\alpha/n} = e^{\underset{n\to\infty}{lim}\ (-\alpha/n)} = e^0 = 1;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n+2}} = 1$ pues: $1 \le n^{\frac{1}{n+2}} \le n^{\frac{1}{n}};$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt{x}|_{\frac{1}{n}}^{1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2 - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2;$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (n+2)^{\frac{1}{n+2}} = \lim\limits_{t\to\infty} t^{\frac{1}{t}} = 1;$

f) Demuestra que si $0 < c < d$ entonces

$$(c^n + d^n)^{\frac{1}{n}} \to d.$$

<u>Solución</u>:

$$(c^n + d^n)^{\frac{1}{n}} = d\left(\frac{c^n}{d^n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$1 \le \left(\frac{c^n}{d^n} + 1\right)^{\frac{1}{n}} \le 2^{\frac{1}{n}}$$

Luego $\left(\frac{c^n}{d^n} + 1\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ por tanto

$$(c^n + d^n)^{\frac{1}{n}} = d\left(\frac{c^n}{d^n} + 1\right)^{\frac{1}{n}} \to d.$$

Cálculo de Límites

1) **Expresiones racionales**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots + b_q} = l$$

se divide numerador y denominador por n elevado a la mayor potencia.

a) $p > q$ entonces $l = \infty$. Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-2}{7n^2-n+1} = \infty$.

b) $p = q$ entonces $l = \dfrac{a_0}{b_0}$. Ejemplo: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3-3n+2}{3n^3-6n^2} = \dfrac{2}{3}$.

c) $p < q$ entonces $l = 0$. Ejemplo: $\lim\limits_{0\to\infty} \dfrac{7n^3+2n-6}{n^5+3n-2} = 0$.

2) **Expresiones irracionales**

No hay regla fija. Conviene racionalizarlas.

Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2-\sqrt{n^2-1}\right)\left(n^2+\sqrt{n^2-1}\right)}{n^2+\sqrt{n^2-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-n^2+1}{n^2+\sqrt{n^2-1}} = \infty.$$

3) **número** e

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$, cuando $a_n \to \infty$;

c) Si $a_n \to 1$ y $b_n \to \infty$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-1)b_n}.$$

Ejemplo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n}\right)^{\frac{n^2+3}{4n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n}-1\right)\left(\frac{n^2+3}{4n}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-2n}-1\right)\left(\frac{n^2+3}{4n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2+6n+3}{4n^3-8n^2}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

d) De c) se deduce la fórmula

$$\ln\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n} = \lim_{n\to\infty}(a_n-1)\,b_n.$$

Infinitésimos equivalentes

Definición. Dos infinitésimos son equivalentes si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$.

Todo infinitésimo que está multiplicando o dividiendo puede ser sustituido por uno equivalente.

Los infinitésimos equivalentes más usuales son

* $\text{sen } \epsilon_n \sim \epsilon_n$;
* $\cos \epsilon_n \sim \frac{\epsilon_n^2}{2}$;
* $\text{tg } \epsilon_n \sim \epsilon_n$;
* $\text{arctg } \epsilon_n \sim \epsilon_n$;
* $\text{arc sen } \epsilon_n \sim \epsilon_n$;
* $\ln(1+\epsilon_n) \sim \epsilon_n$;
* $\ln(a_n) \sim a_n - 1 \quad (a_n \longrightarrow 1)$.

Técnicas de Cálculo de Límite de Sucesiones

Las técnicas para "romper" las indeterminaciones en el cálculo de límites son análogas a las utilizadas en el cálculo de límites de funciones de una variable real, pero existen técnicas específicas para las sucesiones tales como

a) **criterio de la media aritmética**

$$\text{Si} \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n} = \alpha.$$

b) **criterio de la media geométrica**

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha > 0 \\ \text{y} \\ \text{si } \alpha_n > 0, n = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \alpha.$$

c) **criterio del cociente raiz** (criterio de la raiz n-ésima)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \alpha \\ \text{y} \\ \alpha_n > 0, n = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha.$$

d) **criterio de STOLZ**

Sean $\{\alpha_n\}$ una sucesión arbitraria y $\{\beta_n\}$ una sucesión monótona creciente o decreciente tales que

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \pm\infty \\ \text{y} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\beta_n - \beta_{n-1}} = \alpha \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \alpha.$$

e) **Fórmula de STIRLING**

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Ejercicios.

1. Determina qué sucesiones de las indicadas convergen, si es así, halla el límite.

a) $\dfrac{4^n}{2^n + 10^6}$; b) $\dfrac{n + (-1)^n}{n}$;

c) $(0'9)^n$; d) $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$;

e) $\ln n - \ln(n+1)$; f) $\sqrt{4 - \frac{1}{n}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}(e^n\pi)}{n+1}$; h) $\dfrac{2^n - 1}{2^n}$;

i) $\dfrac{n^2}{\sqrt{2n^4 + 1}}$; j) $\dfrac{10\sqrt{10}\,n}{n+1}$.

2. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2}\right)$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right)$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^2}{3^2} + \ldots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

0.3 Funciones reales de variable real.

Sea D un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ o el mismo $\mathbb{R}$. Definir una **función sobre D**, es dar una regla por la que a cada número de D se le asocia un número real único, es decir una aplicación de D en $\mathbb{R}$. Se representa simbólicamente por

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad \forall\, x \in D \longrightarrow y \in \mathbb{R}$$

o también por

$$f(x) = y \quad \text{ó} \quad f : D \xrightarrow{f} \mathbb{R}.$$

- a $\mathbf{f(x)} \in \mathbb{R}$ se le llama **imagen de x** mediante f.
- a la **x** se le llama **variable independiente**. La relación que existe entre las variables x e y se llama **dependencia funcional**. A **y** se le llama **variable dependiente**.
- Al conjunto **D** se le denomina **dominio o campo de existencia de la función**.
- Al conjunto de los valores que toma la función se denomina **imagen o rango de la función** y se representa por $\mathbf{Im(f)}$ o por $\mathbf{f(D)}$.

  Ejemplo. $f(x) = \sqrt{x^2}$. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. $\text{Im}(f) = [0, \infty)$

Recordemos el cálculo del dominio de algunas funciones:

1. $f(x) = P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$

   $$\text{Dom}(f) = \mathbb{R};$$

2. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ cociente de polinomios

   $$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \quad Q(x) \neq 0\};$$

3. $f(x) = \sqrt{P(x)}$

   $$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \quad P(x) \geq 0\};$$

4. Consideremos ahora $f(x)$ como una combinación entre los casos 2. y 3.:

   - $f(x) = \dfrac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$

     $$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \quad P(x) \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} / \quad Q(x) \neq 0\};$$

   - $f(x) = \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$

     $$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} / \quad Q(x) > 0\};$$

- $f(x) = \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right\} - \{x \in \mathbb{R}/ \quad Q(x) \neq 0\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}/ \quad \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0\right\} \cap \{x \in \mathbb{R}/ \quad Q(x) \neq 0\};$$

5. $f(x) = e^{g(x)}$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g);$$

6. $f(x) = \log_a g(x)$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R}/ \quad g(x) \leq 0\} = \mathrm{Dom}(g) \cap \{x \in \mathbb{R}/ \quad g(x) > 0\};$$

7. $f(x) = \operatorname{arcsen} g(x)$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}/ \quad -1 \leq g(x) \leq 1\};$$

8. $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(g(x))$

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g).$$

Ejercicios.

Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 2}$;

c) $y = x\sqrt{x^2 - 2}$; d) $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$;

e) $y = \log \frac{2+x}{2-x}$; f) $y = \sqrt[3]{x+1}$;

g) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; h) $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x(x+2)}}$;

i) $y = \operatorname{arcsen}\left(\log \frac{x}{10}\right)$; j) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$.

Operaciones algebráicas con funciones

Sean f y g funciones con dominio común D, entonces se verifica

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

- función recíproca de g: $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, si $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in D$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in D$
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

En el caso de que f y g no tengan dominio común

- $\mathrm{Dom}(f \pm g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
- $\mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$
- $\mathrm{Dom}\left(\dfrac{1}{g}\right) = \mathrm{Dom}(g) \cap \{x \,/\, g(x) \neq 0\}$
- $\mathrm{Dom}(\alpha f) = \alpha\, \mathrm{Dom}(f)$

Composición de funciones

Si la imagen de la función g está contenida en el dominio de la función f, la función g compuesta con f que se denota $(f \circ g)$ es la función definida en el dominio de g mediante

$$(f \circ g)(x) = f\,(g(x))$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f\,(g(x))$$

$$x \xrightarrow{\quad f\circ g \quad} f\,(g(x))$$

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

Ejemplo.

Sean $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^2$, luego

$$(f \circ g)(x) = f\,(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

La composición de funciones no es conmuntativa.

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

En el ejemplo anterior $(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$ y sabemos que $x^2 + 1 \neq (x+1)^2$.

Es posible formar la composición de dos o más funciones

$$(f \circ g \circ h)(x) = f\,(g\,(h(x)))$$

$$x \xrightarrow{h} h(x) \xrightarrow{g} g\left(h(x)\right) \xrightarrow{f} f\left(g\left(h(x)\right)\right)$$

$$f \circ g \circ h$$

$$x \to h(x) \to g\left(h(x_1)\right) \to f\left(g\left(h(x)\right)\right).$$

Para que dicha composición pueda definirse, se tiene que cumplir

$$\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Dom}(g) \qquad \text{y que} \qquad \mathrm{Im}(g \circ h) \subset \mathrm{Dom}(f).$$

Ejemplo.

Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad g(x) = x + 2$ y $\quad h(x) = (x^2+1)^2$. Calcula $(f \circ\ g \circ h)$.

$$(f \circ\ g \circ h)(x) = f\left(g\left(h(x)\right)\right) = f\left((x^2+1)^2\right) = f\left((x^2+1)^2 + 2\right) = \frac{1}{(x^2+1)^2+2}$$

$$\mathrm{Im}(h) = [1, \infty) \qquad\qquad \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$[1, \infty) = \mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Im}(g \circ h) = [3, \infty) \qquad\qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$[3, \infty) = \mathrm{Im}(g \circ h) \subset \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

La composición de funciones es asociativa

Funciones inyectivas. Función inversa.

Dada una **función** $y = f(x)$, se dice que f es **inyectiva** si

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f) \quad / \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2).$$

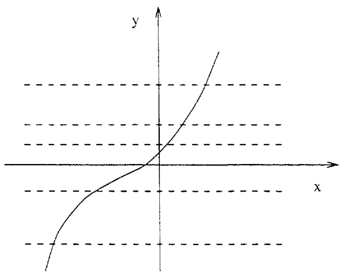
Una definición equivalente a esta es: una función f es inyectiva si

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

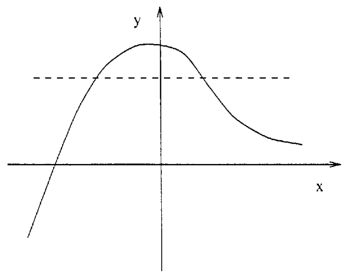
Ejemplo.

$\begin{array}{rl} f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \rightsquigarrow x^2 \end{array}$ no es inyectiva pues $f(1) = f(-1) = 1$ y sin embargo $1 \neq -1$. Pero la función $y = x^3$ sí es inyectiva.

Gráficamente si una recta horizontal corta a la gráfica de la función más de una vez, la función no es inyectiva.



función inyectiva



función no inyectiva

Una **función** $y = f(x)$ se dice que es **suprayectiva** si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Si una **función** es suprayectiva e inyectiva se llama **biyectiva** o biunívoca.

Dada una función f cuyo dominio sea D, $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$. Si f es inyectiva, entonces existe una función g, $g : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow D$ tal que $g\left(f(x)\right) = x \quad \forall\, x \in D$.

$$D \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{g} D$$

$$x \rightsquigarrow f(x) \rightsquigarrow x$$

A la función g se le llama **función inversa** de f, y se representa por $\mathbf{f^{-1}}$.

Esquemas:

$$D \xrightarrow{f} \mathrm{Im}(f) \qquad\qquad \mathrm{Im}(f) \xrightarrow{f^{-1}} D$$

$$x \rightsquigarrow f(x) = y \qquad\qquad y \rightsquigarrow f^{-1}(y).$$

Como

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(y) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x$$

es decir f^{-1} es la inversa de f.

Veamos que f es la inversa de f^{-1}.
Dado que $f^{-1}(y) = x$, aplicando f: $f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y \quad \Rightarrow f$ es la inversa de f^{-1}.

Luego f y f^{-1} son inversas entre sí.

Ejemplo 1.

Sea $f(x) = 3x - 5$, calcula f^{-1}.

$$y = 3x - 5 \quad \Rightarrow \quad 3x = y + 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{3} + \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1} = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}.$$

<u>Regla</u>

Si nos dan f para calcular f^{-1} podemos que seguir los pasos

1) Despejar x.

2) Cambiar x por y e y por x.

Ejemplo 2.

Sea $f(x) = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2$, calcula f^{-1}.

$$y = \sqrt[5]{1 - x^3} + 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{1 - x^3} = y - 2 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^3 = (y-2)^5 \quad \Rightarrow$$

$$x^3 = 1 - (y-2)^5 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1 - (y-2)^5}$$

luego

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1 - (x-2)^5}.$$

Ejercicio.

Calcula las inversas de las siguientes funciones:

$$y = \sqrt[3]{1-x^3}; \qquad y = \operatorname{arc\,tg} 3\,x; \qquad y = \ln \frac{x}{2}.$$

Representación analítica de funciones

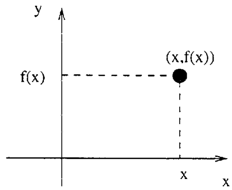
Se llama expresión analítica de una función a la notación simbólica del conjunto de las operaciones matemáticas conocidas que se han de realizar en cierto orden con los números y letras que designan magnitudes constantes o variables -operaciones matemáticas son: adición, sustracción, radicación, logaritmos, etc....

Ejemplos.

$$y = \frac{\ln x - \operatorname{sen} x}{3x^2-1}, \qquad y = 3^x - \sqrt{5+2x}.$$

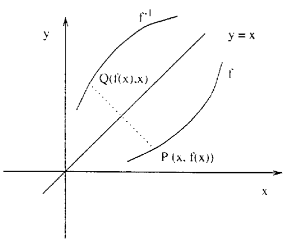
Representación gráfica de funciones

Dado un sistema de ejes rectangulares, la gráfica de una función es el conjunto de puntos del plano cuyas abcisas son los valores de la variable independiente y las ordenadas sus correspondientes imágenes.



Hay una relación entre la gráfica de una función inyectiva y la de su inversa.

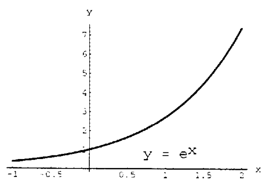
Las gráficas de f y f^{-1}

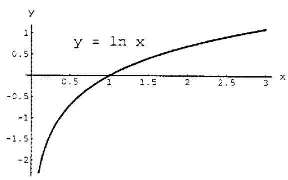


Como la gráfica de f está formada por los puntos de la forma $P\,(x, f(x))$ y la gráfica de f^{-1} está formada por los puntos de la forma $Q\,(f(x), x)$ -debido a la definición de f^{-1}-, entonces, para cada x, P y Q son simétricos con respecto a la recta $y = x$. Luego si conocemos la gráfica de f, para representar f^{-1} únicamente tenemos que hacer la simétrica de dicha gráfica respecto a la recta $y = x$.

Ejemplo.

Sea $f(x) = e^x$, su inversa f^{-1} es $\quad y = \ln x$.





Ejercicios.

1) Calcula $(f \circ g)$ en los siguientes casos:

   a) $f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = \frac{1}{x};$

   b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \qquad g(x) = (x^2+2)^2.$

2) Calcula $(f \circ g \circ h)$, donde $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2x+1}$ y $h(x) = x^2$.

3) Dadas $f(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ 1+x & x \geq 1 \end{cases}$

   Halla $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$.

4) Idem $f(x) = \begin{cases} 1-2x & x < 1 \\ 1+x & x \geq 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1-x & x \geq 0 \end{cases}$

5) Di si las siguientes funciones son inyectivas o no, hallando su inversa en los casos en que lo sean:

   a) $f(x) = 1 - x^2;$

   b) $f(x) = x^3 - 1;$

   c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x};$

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x};$

   e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - 1;$

   f) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}.$

Clasificación de funciones

Las funciones se pueden clasificar en dos grandes grupos

1) funciones algebráicas.

2) funciones no algebráicas o trascendentes.

Las funciones algebráicas a su vez se pueden clasificar en:

a) **función racional entera o polinómica**. Es una función de la forma

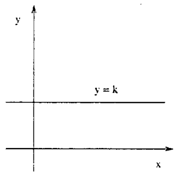
$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde n es el grado del polinomio y es un número entero, y a_n son los coeficientes que son números reales.

Casos particulares

1) **función constante**

$y = k$ no tiene inversa.



2) **función lineal homogénea**

$y = ax$

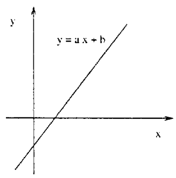
2.1) **función identidad**

$y = x$

3) **función afín o lineal**

$y = ax + b$

* a es la pendiente de la recta.
* la inversa es: $y = \frac{1}{a}x - b$, $a \neq 0$

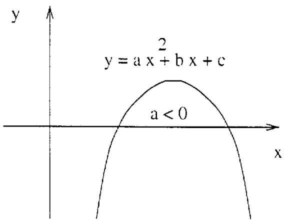


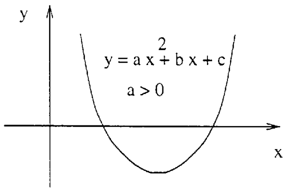
3.1) **función traslación**

$y = x + b$

4) **función cuadrática**

$y = ax^2$

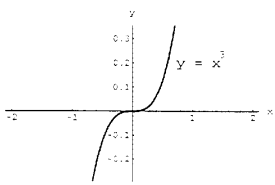


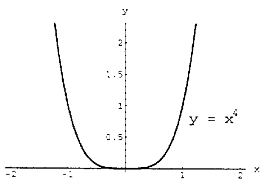


5) **función potencial**

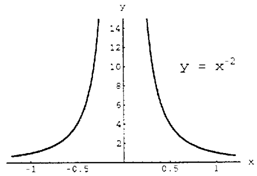
$y = x^\alpha$

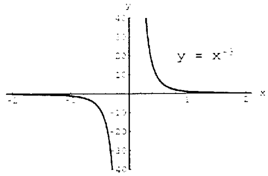
* si α es un entero positivo, la función está definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$.





* si α es un entero negativo, la función está definida para todos los valores de x, excepto para $x = 0$.



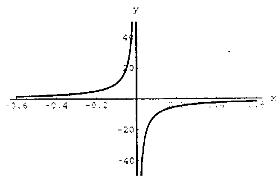


b) **función racional fraccionaria**

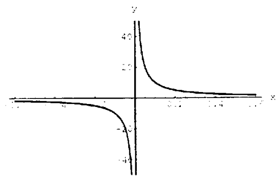
$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

Ejemplo. $y = \dfrac{a}{x}$

$a > 0$

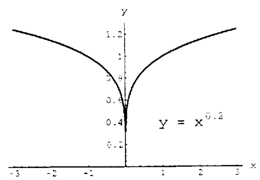


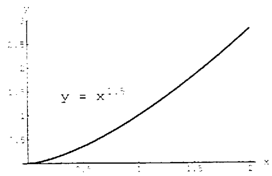
$a < 0$



c) **funciones irracionales**

Son funciones en las que la variable está elevada a un número fraccionario.





Ejemplos.

$y = \sqrt{x+2} \qquad D = [-2, \infty);$

$y = \sqrt[3]{x+2} \qquad D = (-\infty, \infty);$

$y = \dfrac{x + \sqrt[3]{x}}{x^2} \qquad D = \mathbb{R} - \{0\}.$

Observación. No todas las funciones algebráicas están comprendidas en los tres tipos mencionados anteriormente. Se llama función algebráica a cualquier función $y = f(x)$ que satisface una ecuación de la forma

$$P_0(x)\,y^n + P_1(x)\,y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0$$

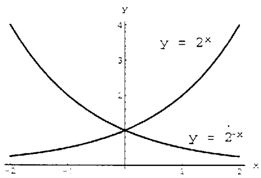
donde $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ son polinomios de x.

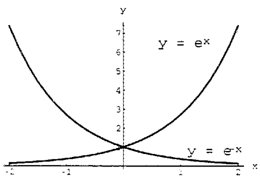
Ejemplo. $(x + x^2)\,y^3 + (x - x^3)\,y^2 = 0$

Funciones trascendentes

a) **función exponencial**

$y = a^x$, donce a es un número positivo distinto de 1, es decir: $a > 0 \wedge a \neq 1$



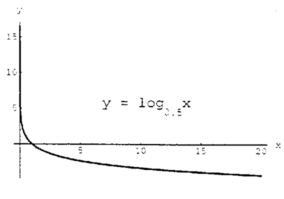


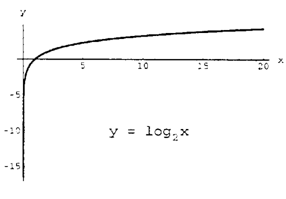
b) **función logarítmica**

$y = \log_a x$, donde la base a es un número positivo diferente de la unidad, es decir $a > 0 \wedge a \neq 1$.

Esta función está definida solamente para valores de $x > 0$.

La función exponencial y la logarítmica son funciones inversas entre sí.



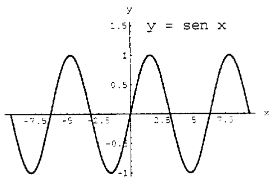


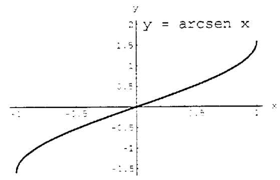
$D = (0, \infty)$
$\text{Im}(f) = (-\infty, \infty)$

$D = (0, \infty)$
$\text{Im}(f) = (-\infty, \infty)$

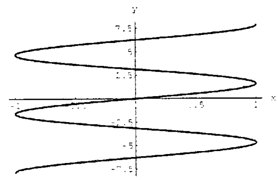
c) **funciones trigonométricas**

- $y = \operatorname{sen} x$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$, $\quad$ su inversa $y = \operatorname{arcsen} x$





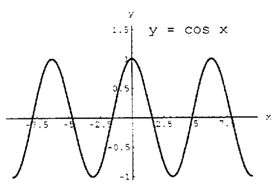
Observación importante. Recordad que en funciones inversas entre sí, el dominio de f coincide con $\operatorname{Im}(f^{-1})$ y la $\operatorname{Im}(f)$ con el dominio de f^{-1}.

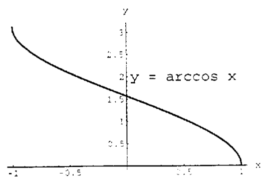


Para hablar de la función $y = \operatorname{arcsen} x$ "como verdadera función" no podemos considerar que su dominio sea $[-1, 1]$ pues por ejemplo la imagen del 0, si miráis en la gráfica es: $0, -\pi, \pi, 2\pi$, etc., luego a un original le corresponden varias imágenes y esto contradice la definición de función.
No hay contradicción, lo que pasa es que $y = \operatorname{sen} x$ es una función periódica -lo veremos más adelante- y entonces como dominio de la función $y = \operatorname{sen} x$ se puede considerar $D = [-\pi, \pi]$ ó $[\pi, 2\pi]$ y como dominio de $y = \operatorname{arcsen} x$ $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Nota. Esta observación es válida también para las inversas de las funciones trigonométricas $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$.

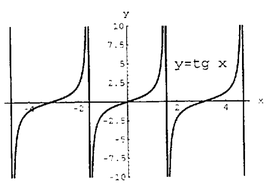
- $y = \cos x$ $\quad D = \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{Im}(f) = [-1, 1]$. $\quad$ su inversa $y = \arccos x$

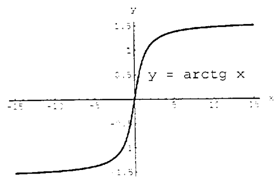




- $y = \operatorname{tg} x$ $\quad D = \mathbb{R} - \left(\frac{2k-1}{2}\right)\pi \quad \Leftrightarrow \quad D = \mathbb{R} - \left\{\ldots, -3\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, \ldots\right\}$

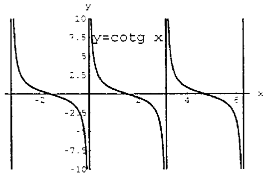
$\operatorname{Im}(f) = (-\infty, \infty)$ $\quad$ su inversa $y = \operatorname{arctg} x$

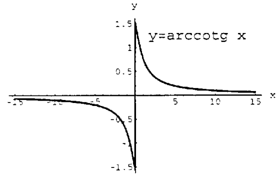




- $y = \mathrm{cotg} x \qquad D = \mathbb{R} - k - \pi \quad \Leftrightarrow \quad D = \mathbb{R} - \{\dots, -3\pi, -\pi, 0, \pi, 3\pi, \dots\}$

  $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, \infty)$ su inversa $y = \mathrm{arctg}\, x$

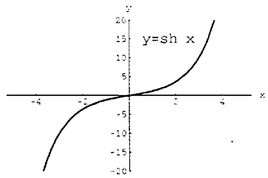


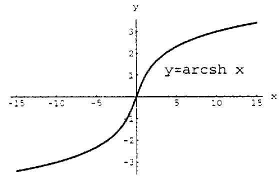


d) **funciones hiperbólicas**

1) $y = \mathrm{sh}\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad D = (-\infty, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = (-\infty, \infty),$

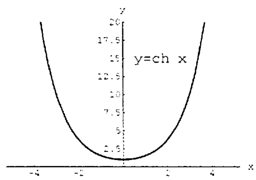
su inversa $y = \mathrm{arcsh}\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

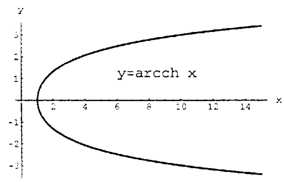




2) $y = \mathrm{ch}\ x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad D = (-\infty, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = [1, \infty),$

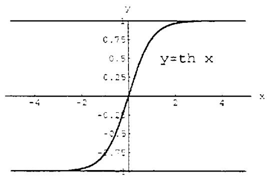
su inversa $y = \mathrm{arcch}\ x = \begin{cases} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ \ln\left(x - \sqrt{x^2+1}\right) \end{cases}$

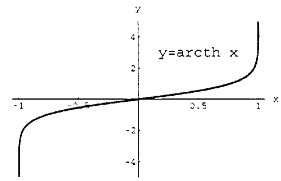




3) $y = \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{ch}\ x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad D = (-\infty, \infty) \qquad \mathrm{Im}(f) = (-1, 1),$

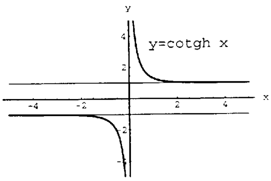
su inversa $y = \mathrm{arcth}\, x = \dfrac{1}{2} \ln\left(-\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

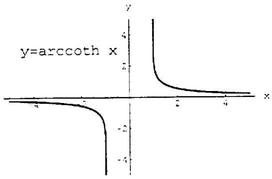




4) $y = \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\quad D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \quad \mathrm{Im}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$,

su inversa $y = \operatorname{arccoth} x = \dfrac{1}{2} \ln \left(-\dfrac{x+1}{x-1} \right)$





Función elemental

Una función se dice que es elemental cuando se expresa de la forma $y = f(x)$ donde $f(x)$ es una composición finita de todas las funciones vistas anteriormente.

Ejemplo. $y = \dfrac{\log_3 x - \operatorname{sen} x + x^2}{\sqrt{x}}$.

Función no elemental

Ejemplos.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x - 1, & x \geq 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

Función uniforme. Una función es uniforme cuando a cada valor de x le correponde un solo valor de y. Si a cada valor de x le corresponde un número finito o infinito de imágenes se llama **función multiforme o polivalente**. Ejemplo: $y = \operatorname{arcsen} x$.

Función explícita. Una función viene dada de forma explícita cuando la variable dependiente está despejada respecto a la independiente. Ejemplo: $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Función implícita. Es una función en la cual las variables x e y se encuentran en el mismo miembro de la ecuación. Ejemplo: $x + 5xy^2 - 3 = 0$

Ejercicio.
Escribe en forma explícita las funciones:

a) $x^2 - \arccos y = \pi$;

b) $10^x + 10^y = 10$;

c) $x + |y| = 2y$.

Función creciente. Es una función en la que $\forall\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Es **estrictamente creciente** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente. Es una función en la que $\forall\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Es **estrictamente decreciente** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Función par. Una función es par cuando $f(x) = f(-x) \quad \forall\ x \in D$.

Una función par es simétrica respecto al eje OY. Ejemplo: $f(x) = x^2$.

Función impar. Una función es impar cuando $f(-x) = -f(x) \quad \forall\ x \in D$ (o cuando $f(x) = -f(-x) \quad \forall\ x \in D$).

Una función impar es simétrica respecto al origen. Ejemplo: $f(x) = x^3$.

Función periódica. Una función es periódica de periodo $\top$ cuando se verifica que $f(x + \top) = f(x)$.

Ejemplo: $y = \operatorname{sen} x$ es periódica de periodo 2π.

Si una función es periódica de periodo $\top$, también es periódica de cualquier múltiplo de $\top$. A $\top$ se le llama **periodo fundamental**.

Ejercicios.

1. Determina cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles impares:

   a) $f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$;
   b) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$;
   c) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;
   d) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$;
   e) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

2. De las siguientes funciones, di cuáles son periódicas y halla su periodo:

   a) $f(x) = 10 \operatorname{sen} 3x$;
   b) $f(x) = a \operatorname{sen} \lambda x + b \cos \lambda x$;
   c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;
   d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$;
   e) $f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}$.

0.4 Límite de una función en un punto.

Definición intuitiva. Se dice que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a x_0 es l si para valores próximos a x_0, $f(x)$ está tan cerca como queramos de l. Se denota

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

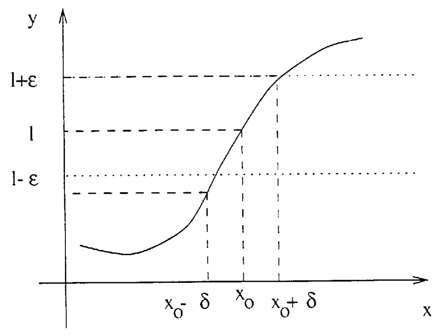
Demos ahora la **definición** rigurosa.
Sea $y = f(x)$ una función real definida en un subconjunto D de R, y sea x_0 un punto perteneciente o no a D. Se dice que el límite de la función $f(x)$ es l cuando x tiende a x_0, cuando fijado un entorno arbitrario de l, $E(l, \epsilon)$, existe un entorno reducido del punto x_0, $E^*(x_0, \delta)$, tal que para todo $x \in E^*(x_0, \delta) \cap D$ se verifica que $f(x) \in E(l, \epsilon)$.
Es decir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, E(l, \epsilon)\ \exists\ E^*(x_0, \delta)\ /\ \forall\, x \in E^*(x_0, \delta) \cap D \ \Rightarrow\ f(x) \in E(l, \epsilon). \quad (1)$$

Cuando l y x_0 son número finitos, la definición anterior equivale a

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ x : 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon. \quad (2)$$

Trabajamos con entornos reducidos del punto x_0, para no obligar al límite de la función a que tome el valor $f(x_0)$, pues veremos en ejemplos que a veces, existe límite en x_0, y sin embargo $f(x_0)$ no está definida.



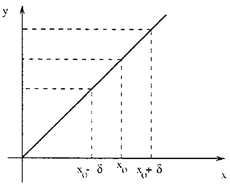
El hecho de que $f(x) \to l$ cuando $x \to x_0$ se traduce en la gráfica de la función $y = f(x)$ en que los puntos P correspondientes a todos los puntos x cuya distancia al punto x_0 es inferior a δ, están contenidos en una banda de ancho 2ϵ limitada por las rectas $y = l - \epsilon$ e $y = l + \epsilon$.

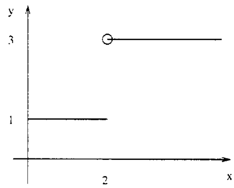
Ejemplos "gráficos".

1) $y = x$

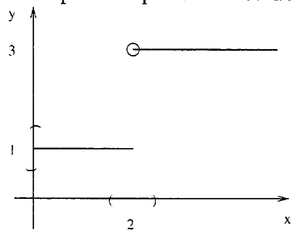
2) La función cuya expresión analítica es

$$y = \begin{cases} 1 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$$





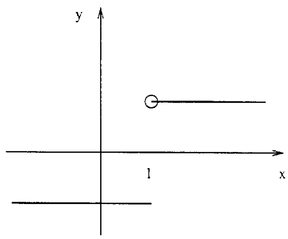
Vemos que en $x_0 = 2$ la función no tiene límite. Podríamos pensar que el límite de la función cuando $x \longrightarrow 2$ es 1, pero no es cierto.



Dado un entorno del punto $l = 1$, nunca podremos encontrar un entorno reducido del punto $x_0 = 2$ tal que todas sus imágenes pertenezcan al entorno de centro 1 y radio $\epsilon > 0$, pues fijaos que las imágenes de los puntos situados a la derecha de 2, no valen 1 sino 3.

Por el mismo razonamiento el límite de la función cuando $x \longrightarrow 2$ tampoco es 3, pues en este caso, los puntos situados a la izquierda de 2 tienen por imagen 1, es decir dichas imágenes "se saldrían" del entorno del punto 3 por muy pequeño que hubiéramos tomado el entorno del punto 2.

3) $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$



- Si $x_0 < 1$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -1$
- Si $x_0 > 1$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$
- Si $x_0 = 1$ $\quad \nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

4) Prueba que $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

<u>Solución</u>: Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, tenemos que encontrar por lo menos un $\delta > 0$, tal que las x que verifiquen que $0 < |x - 2| < \delta$, sus imágenes han de verificar que $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$.

Es cuestión de establecer una conexión entre $|x-2|$ y $|(2x-1)-3|$.

$$|(2x-1)-3| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x-4| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2|x-4| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-4| < \frac{\epsilon}{2}$$

luego si tomamos como $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, cualquiera que sea ϵ, para todos los valores de x que satisfagan la desigualdad $|x-2| < \frac{\epsilon}{2} = \delta$ el valor de la función $y = 2x-1$ se diferencia de 3 en una magnitud menor que ϵ, es decir, 3 es el límite de la función cuando x tiende a 2.

5) Prueba que $\lim\limits_{x \to c} |x| = |c|$.

<u>Solución</u>: Sea $\epsilon > 0$ busquemos un $\delta > 0$ t.q. si $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow \big|\, |x| - |c| \,\big| < \epsilon$.
Como $\big|\, |x| - |c| \,\big| \leq |x-c| < \delta = \epsilon$ basta escoger $\delta = \epsilon$.

6) Prueba que $\lim\limits_{x \to c} a = a$.

<u>Solución</u>: $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \ \ / \ \ \forall\ x : |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |a-a| < \epsilon$,
en este caso como $|a-a| = 0$, la relación $|a-a| < \epsilon$ se cumple para cualquier δ.

Ejercicios.

Utilizando la definición de límite prueba que

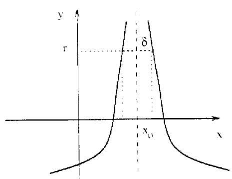
a) $\lim\limits_{x \to 2}(3x-1) = 5$;

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$;

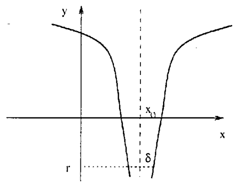
c) $\lim\limits_{x \to -2}(x^4 - 8x^2 + 20) = 4$.

La definición (2) está dada para el caso de que tanto l como x_0 sean números finitos. Si l o x_0 o ambos a la vez se hacen infinitos, la definición general de límite se expresa así

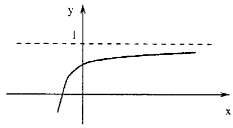
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$
  $\forall\ r > 0$ por muy grande que sea, $\exists\ \delta > 0 \quad /$
  $\forall\ x : 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > r$.
  En este caso a la recta $x = x_0$ se le llama asíntota vertical de ramas convergentes.



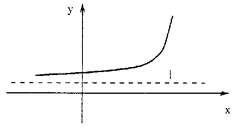
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$
  $\forall\, r > 0$ por muy grande que sea, $\exists\, \delta > 0 \quad /$
  $\forall\, x : 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) < -r.$



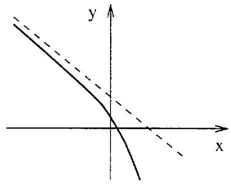
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$
  $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, r > 0 \quad / \quad \forall\, x > r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon$
  significa que cuando x es arbitrariamente grande la gráfica de f se aproxima a la recta $y = l$ (llamada asíntota horizontal).



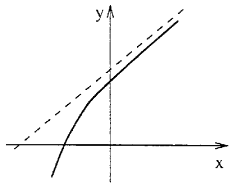
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow$
  $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, r > 0 \quad / \quad \forall\, x < -r \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \epsilon.$



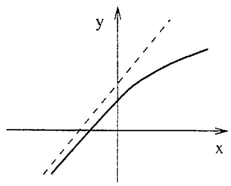
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$
  Para cada $M > 0 \quad \exists\, k < 0 \quad$ t.q. si $\quad x \leq k$
  entonces $\quad f(x) \geq M.$



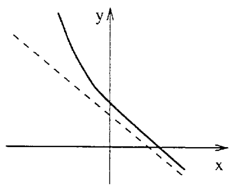
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow$
  Para cada $\quad M > 0 \quad \exists\, k > 0 \quad$ t.q. si $\quad x \geq k$
  entonces $\quad f(x) \geq M.$



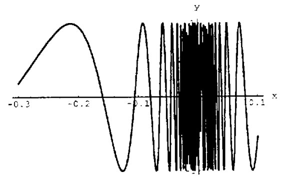
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$
  Para cada $\quad M > 0 \quad \exists\, k < 0 \quad$ t.q. si $\quad x \leq k$
  entonces $\quad f(x) \leq -M.$

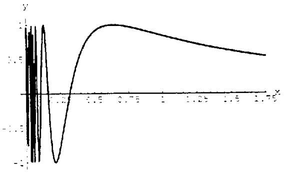


- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow$
  Para cada $\quad M > 0 \quad \exists\, k > 0 \quad$ t.q. si $\quad x \geq k$
  entonces $\quad f(x) \leq -M.$



Nota. No es forzoso que la función $f(x)$ tienda a un límite finito ni infinito cuando $x \longrightarrow a$ ó $x \longrightarrow \pm\infty$. Por ejemplo, la función $y = \operatorname{sen} x$ sabemos que está definida en todo $\mathbb{R}$. pero cuando $x \longrightarrow \pm\infty$, no tiende a un límite finito ni infinito. Otro ejemplo nos lo da la función $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, definida para todos los valores x, excepto para $x = 0$. no tiende a ningún límite finito, ni tampoco a infinito, cuando $x \longrightarrow 0$.





Límites laterales

Sea $y = f(x)$ una función real definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}$ y sea x_0 un punto que puede pertenecer o no a D. Se dice que el **límite de la función f(x)** es l_1 **cuando x tiende a x₀ por la derecha** y se escribe

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$$

si $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (l_1 - \epsilon, l_1 + \epsilon)$.

Esta definición se puede expresar también

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad / \\ 0 < x - x_0 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l_1| < \epsilon. \end{array} \tag{3}$$

Se dice que **el límite de la función f(x)** es l_2 **cuando x tiende a x₀ por la izquierda** y se escribe

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$$

si $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in (l_2 - \epsilon, l_2 + \epsilon)$.

Esta definición se puede expresar

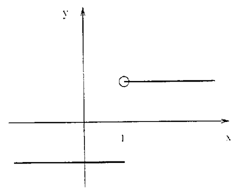
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \quad / \\ 0 < x_0 - x < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l_2| < \epsilon. \end{array} \tag{4}$$

Ejemplo 1.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

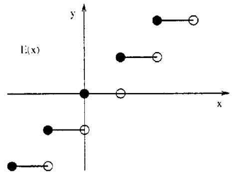
$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$.



Ejemplo 2.

Función parte entera de x, $E(x)$.



$\nexists \lim\limits_{x \to c} E(x)$ para $c \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \to c^+} E(x) = c,$

$\lim\limits_{x \to c^-} E(x) = c - 1.$

Puede ocurrir, como se ve en el ejemplo 2, **que una función tenga límites laterales en un punto y sin embargo, no exista el límite de la función en ese punto.**

Teorema 0.8 . *La condición necesaria y suficiente para que una función tenga límite en un punto, es que existan los límites a la izquierda y a la derecha y que además coincidan.*

Demostración:

$\stackrel{N.}{\Longrightarrow}$ La condición es necesaria, ya que si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, entonces, cualquiera que sea $E(l, \epsilon)$ existe un $E^*(l, \delta)$ tal que si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ entonces $f(x) \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. En particular $f(x)$ sigue perteneciendo a $E(l, \epsilon)$ si trabajamos únicamente con los valores de x que pertenecen a $(x_0, x_0 + \delta)$ o a $(x_0 - \delta, x_0)$ lo que significa que existen límites a la derecha y a la izquierda y ambos coinciden con l.

$\stackrel{S.}{\Longleftarrow}$ La condición también es suficiente, ya que si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x \in (x_0, x_0 + \delta) \;\Rightarrow\; f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$$

entonces, cualquiera que sea $x \in E^*(x_0, \delta)$ también se verificará que $f(x) \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$ pues $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ o bien $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ y por tanto $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

c.q.d.

Ejemplo 1.

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$ Calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x = 0 \end{array}\right\} \quad \text{como no coinciden} \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \to 0} f(x).$$

Ejemplo 2.

Sea $f(x) = |2x - 6|$. Calcula $\lim_{x \to 3} f(x)$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & x > 3 \\ 0 & x = 3 \\ -2x + 6 & x < 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - 6) = 0 \\ \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (2x - 6) = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 3} f(x) = 0.$$

Definición. Se dice que una función $f(x)$ está acotada en un entorno reducido de un punto x_0, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R} \;/\; \forall\, x \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq M.$$

Propiedades de los límites

1) **Unicidad**. Si una función tiene límite en un punto este límite es único.

Demostración: (por reducción al absurdo)

Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ y que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ y $l_1 \neq l_2$.

Sea $\epsilon > 0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ por la definición de límite (2)

$$\exists\, \delta_1 \;/\; 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l_1| < \epsilon.$$

Por la misma razón, dado que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$

$$\exists\, \delta_2 \;/\; 0 < |x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l_2| < \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para este δ las dos condiciones anteriores se cumplen a la vez, entonces

$$\exists\, \delta > 0 \;/\; 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l_1| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f(x) - l_2| < \epsilon,$$

luego

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| = \\ &= |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| < \epsilon + \epsilon = 2\,\epsilon. \end{aligned}$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4}$ tenemos

$$0 < |l_1 - l_2| < 2\epsilon = \frac{2|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

que es absurdo. Esto solamente se cumple para $l_1 = l_2$, es decir, cuando $|l_1 - l_2| = 0$.

c.q.d.

2) **Acotación.** Si $f(x)$ tiene límite finito en un punto x_0, está acotada en un entorno reducido del punto x_0.

Demostración:

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, entonces en un entorno reducido de x_0 se cumple que $|f(x) - l| < \epsilon$, pero esto equivale a

$$-\epsilon < f(x) - l < \epsilon \quad \Rightarrow \quad l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \quad \Rightarrow$$

$f(x)$ está acotada en un entorno reducido de x_0. c.q.d.

3) Si una función tiene límite distinto de cero en un punto x_0, existe al menos un entorno reducido de este punto en el que la función conserva el signo.

Demostración:

Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $l > 0$; entonces según (1) $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$. Eligiendo $0 < \epsilon < l$, la desigualdad anterior indica que $f(x)$ se mantiene positiva en un entorno reducido de x_0 de radio ϵ.

c.q.d.

De la misma forma se hace la demostración considerando a l negativo (hacedlo como ejercicio).

Operaciones con límites finitos

Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$ (a finito ó infinito) se verifica

a) $\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) = l_1 + l_2$.

Demostración:

$\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1 > 0 \;/\; 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f_1(x) - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$,

$\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta_2 > 0 \;/\; 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f_2(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces si $\quad 0 < |x - a| < \delta$

$$|f_1(x) + f_2(x) - (l_1 + l_2)| \leq |f_1(x) - l_1| + |f_2(x) - l_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

c.q.d.

b) $\lim_{x \to a} (f_1(x) - f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) - \lim_{x \to a} f_2(x) = l_1 - l_2$.
(Haced la demostración como ejercicio).

c) $\lim_{x \to a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) \cdot \lim_{x \to a} f_2(x) = l_1 \cdot l_2$.

Demostración:

$$\begin{aligned}|f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 \cdot l_2| &= |f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot l_2 + f_1(x) \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2| \leq \\ &\leq |f_1(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot l_2| + |f_1(x) \cdot l_2 - l_1 \cdot l_2| = \\ &= |f_1(x)|\,|f_2(x) - l_2| + |l_2|\,|f_1(x) - l_1|.\end{aligned}$$

Dado que $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$, para $\epsilon = 1 > 0 \ \exists\ \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow$ $|f_1(x) - l_1| < 1 \quad \Rightarrow \quad |f_1(x)| < 1 + |l_1|$
(esta última desigualdad se deduce de la propiedad $||a| - |b|| \leq |a - b|$).

Además $\exists\ \delta_2 > 0$ t.q. $0 < |x - a| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f_1(x) - l_1| < \dfrac{\epsilon}{2|l_2|}$.

Por el mismo motivo como $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2 \ \exists\ \delta_3 > 0$ t.q. $0 < |x - a| < \delta_3 \quad \Rightarrow$ $|f_2(x) - l_2| < \dfrac{\epsilon}{2\,(1 + |l_1|)}$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ si $0 < |x - a| < \delta$

$$|f_1(x) \cdot f_2(x) - l_1 \cdot l_2| < (1 + |l_1|) \cdot \frac{\epsilon}{2\,(1 + |l_1|)} + |l_2| \cdot \frac{\epsilon}{2|l_2|} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

c.q.d.

d) **El producto de una función acotada por otra que tiende a cero, también tiende a cero.**

e) Si $\lim_{x \to a} f(x) = l \neq 0$ entonces $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{l}$.

Demostración:

Sea $\epsilon > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \exists\ \delta_1 > 0 \ / \ 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$

como $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{|l|}{2} < |f(x)| - |l| < \dfrac{|l|}{2} \Rightarrow \dfrac{|l|}{2} <$ $|f(x)| < \dfrac{3|l|}{2}$, luego $|f(x)| > \dfrac{|l|}{2}$, y por lo tanto $\dfrac{1}{|f(x)|} < \dfrac{2}{|l|}$.

Tenemos

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|f(x) - l|}{|f(x)|\,|l|} \leq \frac{2}{|l|^2}\,|f(x) - l|$$

al ser $\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \Rightarrow \quad \exists\, \delta_2 > 0 \ / \ 0 < |x-a| < l \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| < \frac{|l|^2}{2} \cdot \epsilon,$

tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$

$$|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l_1}| \le \frac{2}{|l|^2} \cdot \frac{|l|^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon.$$

c.q.d.

f) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2},$ siempre que $l_2 \neq 0$.

g$_1$) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

g$_2$) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

h) **límite de un logaritmo**. Si la función $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$

$$\lim_{x\to a} \log_b f(x) = \log_b l.$$

i) **límite de la función exponencial**. Si β es un número positivo y distinto de 1 y $\lim_{x\to a} f(x) = l$

$$\lim_{x\to a} \beta^{f(x)} = \beta^{\lim_{x\to a} f(x)} = \beta^l.$$

j) **límite de una potencia**. Si $f(x) > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$, entonces, cualquiera que sea el exponente r se verifica:

$$\lim_{x\to a} (f(x))^r = [\lim_{x\to a} f(x)]^r = l^r.$$

En todos los casos anteriores hemos supuesto que al tender x hacia un valor finito o infinito, el límite de la función es siempre finito. Volvamos sobre esas operaciones suponiendo ahora que algunos de los límites considerados son infinitos.

Para no alargar el enunciado, sobreentenderemos que todos los límites se refieren al caso que x tienda hacia un punto a finito o infinito, así como las acotaciones que se establezcan valen para un entorno reducido de dicho punto.

Casos de límites infinitos

1) a) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} f_2(x) = \pm\infty,$

$$\lim_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \pm\infty.$$

b) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} f_2(x) = l$,

$$\lim_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x)) = \infty.$$

c) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} f_2(x) = -\infty$

de $\lim_{x\to a} (f_1(x) + f_2(x))$ no se puede decir en principio nada salvo que es una indeterminación. Ya veremos cómo "quitarlas".

2) a) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \infty$ y $|f_2(x)| > k$,

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \infty.$$

b) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} f_2(x) = 0$,

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] \qquad \text{es una indeterminación.}$$

3) a) Si la función $f_1(x)$ tiene límite finito o bien se mantiene acotada y la función $f_2(x)$ tiende hacia infinito (en ambos casos cuando $x \to a$),

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0.$$

b) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) \to \infty$ y $\left|\frac{1}{f_2(x)}\right| > k$, o sea $|f_2(x)| < \frac{1}{k}$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty.$$

c) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{0}{0} \qquad \text{es una indeterminación.}$$

d) Si $\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_2(x) = \infty$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{es una indeterminación.}$$

4) a) Si $\beta > 1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to a} \log_\beta f(x) = -\infty.$$

b) Si $0 < \beta < 1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = 0$,

$$\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = \infty.$$

c) Si $\beta > 1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = \infty.$$

d) Si $0 < \beta < 1$ y $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$,

$$\lim_{x \to a} \log_\beta f(x) = -\infty.$$

5) a) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\beta > 1$,

$$\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = \infty.$$

b) Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $0 < \beta < 1$ entonces

$$\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = 0.$$

c) Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $\beta > 1$,

$$\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = 0.$$

d) Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ y $0 < \beta < 1$,

$$\lim_{x \to a} \beta^{f(x)} = \infty.$$

6) Por último, escribiendo

$$[f(x)]^{g(x)} = \beta^{g(x) \log_\beta f(x)}$$

el límite de la función potencial-exponencial para las diversas posibilidades de límites infinitos, se reduce al de los casos estudiados en 2), 4) y 5).

Indeterminaciones:

$$\infty - \infty, \; 0 \cdot \infty, \; \frac{0}{0}, \; \frac{\infty}{\infty}, \; \infty^0, \; 0^0, \; 1^\infty, \; 1^{-\infty}, \qquad \text{pero} \quad 0^\infty = 0.$$

Teorema 0.9 ***Teorema de la función intermedia.***
Sea $\rho > 0$. Supongamos que para todo x tal que $0 < |x - a| < \rho$ sea $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Si $\lim_{x \to a} h(x) = l$ y $\lim_{x \to a} g(x) = l$ entonces se verifica que $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Demostración:

Tomemos un $\epsilon > 0$, por ser $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ entonces $\exists\ \delta_1 > 0\ /\quad 0 < |x-a| < \delta_1 \quad\Rightarrow$ $|h(x) - l| < \epsilon$, es decir

$$l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon;$$

de manera parecida por $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$ entonces $\exists\ \delta_2 > 0\ /\quad 0 < |x-a| < \delta_2 \quad\Rightarrow$ $|g(x) - l| < \epsilon$, es decir

$$l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon.$$

Sea $\delta = \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, para los x tales que $0 < |x-a| < \delta$ se cumple

$$l - \epsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < l + \epsilon \quad\Rightarrow\quad |f(x) - l| < \epsilon \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f(x) = l.$$

c.q.d.

0.5 Infinitos e infinitésimos.

- Dada una función $f(x)$, se dice que es un **infinito** en a si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty.$$

- Se dice que la función $y = f(x)$ es infinitamente pequeña cuando x tiende hacia a, o que $f(x)$ es un **infinitésimo** en a si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

(En los dos casos $a \in \bar{R}$).

Ejemplos.

$\lim\limits_{x\to a} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad y = x - \frac{\pi}{2}$ es un infinitésimo cuando $x \to \frac{\pi}{2}$;

$\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = 0 \quad\Rightarrow\quad y = \frac{1}{x}$ es un infinitésimo cuando $x \to \infty$;

$\lim\limits_{x\to a} \operatorname{sen} x = 0 \quad\Rightarrow\quad y = \operatorname{sen} x$ es un infinitésimo cuando $x \to 0$.

Dadas dos funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$, que sean las dos infinitésimos en a, a pesar de que las dos funciones tienden a cero cuando $x \to a$, mediante comparación vamos a ver "cuál de las dos tiende antes a cero".

1) Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, se dice que
$f(x)$ es un **infinitésimo de orden superior** a $g(x)$.
$f(x) << g(x)$ indica que $f(x)$ es mucho más pequeña que $g(x)$ en el límite cuando $x \to a$.

2) Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, se dice que
$g(x)$ es un **infinitésimo de orden superior a** $f(x)$,
$g(x) << f(x)$ indica que $f(x)$ es un infinitésimo de orden inferior a $g(x)$.

3) Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ \neq 0 \end{cases}$ entonces se dice que
$f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos del mismo orden**.
Si $l = 1$ se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos equivalentes**, se denota por $f(x) \sim g(x)$.

4) Si $\nexists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ se dice que
$f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos no comparables**.

- Hay muchas funciones llamadas **infinitésimos fundamentales o patrones** que se dice que tienen orden 1, mientras que sus potencias $2^a, 3^a, \ldots$ tienen órdenes $2, 3, \ldots$. Las más usuales son:

  a) cuando $x \to a$, $\quad f(x) = x - a$;

  b) cuando $x \to \infty$, $\quad f(x) = \frac{1}{x}$.

  En general, si α es un número real positivo cualquier otra función del mismo orden que $(x-a)^\alpha$, $\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha$ -usaremos una de las dos dependiendo de a qué tienda x- se dice de orden α.

  Ejemplo.

  $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ es de orden 1 cuando $x \to \infty$ pues

  $$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$$

  Para expresar que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden, se suele utilizar la notación de Landau

  $$f(x) = O\left(g(x)\right).$$

- Si $f(x) <<< g(x)$ es decir, si $f(x)$ es un infinitésimo mucho más pequeño que $g(x)$ y queremos saber "cuántas veces es más pequeño", tendremos que buscar un $r > 1$ tal que

  $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{[g(x)]^r} = l \neq 0$$

  y diremos que $f(x)$ es un **infinitésimo de orden r** respecto a $g(x)$. Este r es único.

- Un caso particular del apartado anterior, muy utilizado, es: si $f(x)$ es un infinitésimo en $x = a$ y se cumple que:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^r} = l \neq 0$$
entonces se dice que $f(x)$ es un **infinitésimo de orden r cuando** $x \to a$.

- Si un infinitésimo es suma de varios, uno de ellos de orden inferior a los restantes, a dicho sumando se le llama **parte principal del infinitésimo** dado.

  Ejemplo 1. $f(x) = x^5 + x^2$ es un infinitésimo para $x = 0$; pues bien x^2 es la parte principal de dicho infinitésimo pues $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^5} = \infty$.

  Ejemplo 2. $\frac{1}{x}$ es la parte principal de $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ cuando $x \to \infty$ pues
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1.$$

- Un infinitésimo y su parte principal son infinitésimo equivalentes.

- Si en la expresión de una función se sustituye un factor o un divisor (nunca un sumando) infinitésimo por
$$\left.\begin{array}{ll} a) & \text{otro infinitésimo equivalente} \\ \text{ó} & \\ b) & \text{por su parte principal} \end{array}\right\} \text{el límite de dicha función no varía.}$$

- La parte principal de un infinitésimo no se altera al sumarle o restarle otro infinitésimo de orden superior. ¡Ojo! que si es del mismo orden sí puede variar.

  Ejemplo.
$$f(x) = x^2 + 3x^3 \quad \longrightarrow \quad \text{orden } 2, \qquad g(x) = x^2 + 4x^6 \quad \longrightarrow \quad \text{orden } 2$$
$$f(x) - g(x) = 3x^2 + 4x^6 \quad \longrightarrow \quad \text{orden } 3.$$

Consecuencia práctica

Para calcular un límite, si tenemos una suma o resta finita de infinitésimos, calculamos primero los de menor orden, sustituimos estos por sus partes principales, despreciamos los de orden superior y el límite es el resultado de operar con estos.

Infinitésimos equivalentes más usados

1. $\operatorname{sen}(u(x)) \sim u(x)$, cuando $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$;

2. $\operatorname{tg}(u(x)) \sim u(x)$, cuando $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$;

3. $\operatorname{arcsen}(u(x)) \sim u(x)$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

4. $\operatorname{arctg}(u(x)) \sim u(x)$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

5. $e^{u(x)} - 1 \sim u(x)$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

6. $(1 + u(x))^m \sim m\, u(x)$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

7. $\ln(1 + u(x)) \sim u(x)$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

8. $\ln(u(x)) \sim u(x) - 1$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 1$;

9. $1 - \cos(u(x)) \sim \dfrac{[u(x)]^2}{2}$, cuando $\lim_{x\to a} u(x) = 0$;

10. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \sim a_0x^n$, cuando $x \to \infty$;

11. $a^{u(x)} - 1 \sim u(x)\ln a$, cuando $\lim_{x\to a} = 0$;

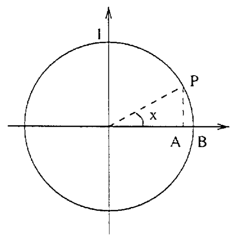
7. y 8. son dos formas de decir lo mismo.

Demostración de que $\operatorname{sen} x \sim x$:

Tenemos que ver que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Como los ángulos se miden en radianes y el círculo tiene radio 1, la longitud del arco PB coincide con x. Además $\operatorname{sen} x = \overline{PA}$ luego

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\text{tamaño de longitud PA}}{\text{longitud del arco PB}}$$



Para pequeños ángulos tanto PA como PB son pequeños y PA es tan parecido al arco PB que el cociente $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se va acercando a 1, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Si hacemos con calculadora

x	1	0'1	0'01
$\operatorname{sen} x$	0'84147	0.099833	0'0099998
$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	0'84147	0'99833	0'99998

Ejemplo 1.

Calcula $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos\frac{x}{3}\right)\left(2^{\operatorname{sen} x}-1\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\right)^5-1}$.

Solución:

$$1-\cos\frac{x}{3}\sim\frac{x^2}{18},\qquad 2^{\operatorname{sen} x}-1\sim\operatorname{sen} x\ln 2\sim x\ln 2,\qquad \left(1+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\right)^5-1\sim 5\cdot\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\sim 5\frac{x^3}{18}.$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\cos\frac{x}{3}\right)\left(2^{\operatorname{sen} x}-1\right)}{\left(1+\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}\right)^5-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{18}x\ln 2}{5\frac{x^3}{8}}=\frac{8\ln 2}{5\cdot 18}=\frac{4\ln 2}{45}.$$

Ejemplo 2.

Calcula $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{x}{3}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{5}{x}\right)}{\operatorname{arctg}\frac{7}{x}\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)}$.

Solución:

Haciendo el cambio $\dfrac{1}{x}=y$, y considerando que $\ln(1+\operatorname{tg}^2 5y)\sim\operatorname{tg}^2 5y\sim 25y^2$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{3}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{5}{x}\right)}{\operatorname{arctg}\frac{7}{x}\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}3y\cdot\ln(1+\operatorname{tg}^2 5y)}{\operatorname{arctg}7y(1-\cos 3y)}=\lim_{y\to 0}\frac{3y\cdot 25y^2}{7y\frac{9y^2}{2}}=\frac{50\cdot 3}{9\cdot 7}=\frac{50}{21}.$$

Ejemplo 3.

Sabemos que $\ln(1+x)\sim x$ cuando $x\to 0$. Calcula aproximadamente $\ln(1'08)$.

Solución:

$$\ln(1'08)=\ln(1+0'08)\sim 0'08\Rightarrow\ln(1'08)\approx 0'08.$$

Ejemplo 4.

Demuestra que $\dfrac{x}{2}$ y $\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ son infinitésimos equivalentes cuando $x\to 0$ y utilizando este resultado calcula aproximadamente $\sqrt{0'98}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x(1+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{2x}=\frac{2}{2}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{2}\sim\sqrt{1+x}-1.$$

Entonces

$$\sqrt{0'98}\sim\frac{0'02}{2}+1=\frac{0'02+2}{2}=0'99.$$

Ejemplo 5.

Halla el orden y la parte principal de los siguientes infinitesimos:

a) $f(x) = 3x^3 - 2x$, cuando $x \to 0$;

Solución:

$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 2x}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3x^2 - 2)}{x^n}$
para que este límite sea finito y distinto de cero, n ha de valer 1 pues así nos queda $\lim_{x \to 0} \frac{x(3x^2 - 2)}{x} = -2$ luego el orden es $n = 1$, y como el límite es -2, la parte principal es $-2\,x$.

b) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$, cuando $x \to 0$;

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x \cdot x^n} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x(1 - \cos x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x^n} = \frac{1}{2} \quad \text{(para n=3)}$$

luego el orden es $n = 3$ y la parte principal $\frac{1}{2}x^3$.

c) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, cuando $x \to 0$;

Solución:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x + (x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\left[x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{x^n} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{\frac{1}{4}}\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{x^n} = 1 \quad \text{cuando} \quad n = \frac{1}{4}$$

el orden es $n = \frac{1}{4}$ y la parte principal es $1 \cdot x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$.

d) $f(x) = \cos x$, cuando $x \to \frac{\pi}{2}$.

Solución: haciendo $x - \frac{\pi}{2} = y \quad \Rightarrow \quad x = y + \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y^n} = \lim_{y \to 0} \frac{\cos y \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{y^n} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{y^n} = \lim_{y\to 0} \frac{-1}{y^n} = -1 \quad \text{cuando} \quad n = 1$$

el orden es $n = 1$ y la parte principal es $-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicios.

1) Calcula el orden y la parte principal de $f(x) = 1 - \cos\left(\sqrt{9+x} - 3\right)$, cuando $x \to 0$.
(Sol. Orden 2, parte principal $\frac{1}{72}x^2$).

2) Calcula el orden y la parte principal de $f(x) = e^{x^2} - \cos x$, cuando $x \to 0$.
(Sol. Orden 2, parte principal $\frac{3}{2}x^2$).

3) Calcula el orden y la parte principal de $f(x) = 1 - \operatorname{sen}\frac{x}{2}$, cuando $x \to 0$.
(Sol. Orden 2, parte principal $\frac{1}{8}(x - \pi)^2$).

Pasos a seguir para quitar indeterminaciones en el cálculo de límites

$\frac{0}{0}$

a) si aparece un cociente de polinomios, $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$, dividir numerador y denominador por $(x - a)$;

b) por cambio de variables;

c) por infinitésimos equivalentes;

d) por L'Hopital.

$\frac{\infty}{\infty}$

a$_1$) si es posible, dividir numerador y denominador por la mayor potencia que exista en la fracción;

a$_2$) si es cociente de polinomios dará

1) $\pm\infty$ si grado numerador > grado denominador;

2) $\frac{a}{b}$ si el grado del numerador coincide con el grado del denominador; a y b son los coeficientes de los términos de mayor grado;

3) 0 si el grado numerador < grado denominador;

b) por cambio de variable;

c) por infinitésimos equivalentes;

d) por L'Hopital.

1^∞

a) aplicando logaritmos

$$y = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty \quad \Rightarrow \quad \ln y = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x);$$

b) mediante el número e de acuerdo con la expresión

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} [f(x)-1]g(x)}.$$

$\mathbf{0^{\infty}, \infty^{0}}$ Aplicando logaritmos neperianos.

$\infty - \infty$ a) si aparecen raices, multiplicar y dividir por el conjugado;

b) haciendo la transformación

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

se pasa de $\infty - \infty$ a $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ y se puede aplicar lo visto en los apartados anteriores.

$\mathbf{0 \cdot \infty}$ Operando o transformando se pasa esta indeterminación a alguna de las anteriores.

En cada ejemplo veremos la transformación adecuada.

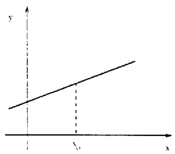
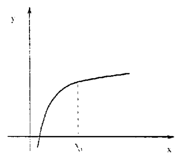
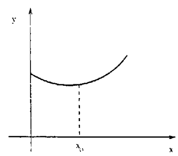
0.6 Continuidad de una función.

Sea $y = f(x)$ una función real definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Se dice que la función **f(x) es continua en un punto $\mathbf{x_0}$** si

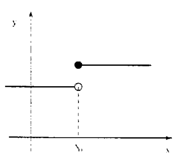
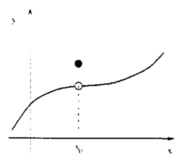
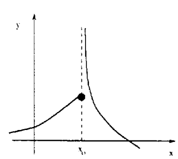
$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \text{existe} \quad f(x_0) \\ 2) & \text{existe} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \\ 3) & \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Ejemplos gráficos

- las siguientes funciones son continuas en el punto x_0

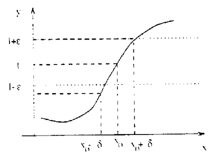




- las siguientes funciones no son continuas en x_0

La definición (5) es equivalente a decir que la función $f(x)$ es continua en un punto x_0 pertenenciente al dominio de $f(x)$, si fijado un entorno de $f(x_0)$, $E(f(x_0), \epsilon)$ existe un entorno del punto x_0, $E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\ x \in E(x_0, \delta) \cap D$ se verifica que $f(x) \in E(f(x_0), \epsilon)$.

Por ser $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = f(x_0)$, no es necesario excluir del entorno $E(x_0, \delta)$ al propio x_0 como ocurría en la definición de límite.



Gráficamente la defినción de continuidad expresa la existencia de un entorno del punto x_0, tal que la gráfica de la función para todos los puntos de dicho entorno está comprendida entre la banda limitada por las rectas $y = f(x_0)+\epsilon$, $\quad y = f(x_0)-\epsilon$
Otra definición equivalente a las anteriores es

$$f(x) \quad \text{es continua en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ x, |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad |f(x) - f(x)| < \epsilon. \end{array} \tag{6}$$

Si por $\triangle x_0 = x - x_0$ representamos el **incremento de la variable**, la definición de continuidad en un punto x_0 interior al dominio de definición se expresa de la forma

$$\lim_{\triangle x_0 \to 0} [f(x_0 + \triangle x_0) - f(x_0)] = 0,$$

o bien por

$$\lim_{\triangle x_0 \to 0} [f(x_0 + \triangle x_0) - f(x_0)] = 0,$$

es decir

$$\lim_{\triangle x_0 \to 0} \triangle f(x_0) = 0,$$

donde $\triangle f(x_0) = f(x_0 + \triangle x_0) - f(x_0)$ recibe el nombre de **incremento de la función**.

La condición de continuidad la podemos expresar de la forma: una función es continua en un punto cuando a un incremento infinitésimo de la variable le corresponde un incremento infinitésimo de la función.

Ejemplo 1.

La función $y = \operatorname{sen} x$ es continua en toda la recta real -ver la gráfica de dicha función.

Ejemplo 2.

La función $y = \operatorname{tg} x$ no es continua en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$ -ver gráfica.

Ejemplo 3.

La función

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & \forall\ x \neq 2 \\ \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

no es continua en el punto $x_0 = 2$ pues $f(2) = 2 \quad$ y $\quad \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$

Continuidad lateral

Dada la función $y = f(x)$ definida en D, sea $x_0 \in D$. Si ocurre que

a) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ se dice que $f(x)$ es **continua a la derecha** de x_0;

b) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ se dice que $f(x)$ es **continua a la izquierda** de x_0.

Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** (a,b) cuando $f(x)$ es continua $\forall\ x \in (a,b)$.

Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ cuando $f(x)$ es continua $\forall\ x \in (a,b)$ y además es continua a la derecha de a y a la izquierda de b.

Ejemplo 4.

La función $f(x) = x \operatorname{sen} x$ definida en el intervalo $[0, 2\pi]$ es una función continua en dicho intervalo, ya que si $x \in (0, 2\pi)$ tenemos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (x \cdot \operatorname{sen} x) = x_0 \cdot \operatorname{sen} x_0 = f(x_0).$$

- Si $x_0 = 0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} x \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0 \cdot 0 = 0 = f(0)$.

- Si $x_0 = 2\pi$, $\quad \lim\limits_{x\to (2\pi)^-} x \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x\to (2\pi)^-} x \cdot \lim\limits_{x\to (2\pi)^-} \operatorname{sen} x = 2\pi \cdot 0 = 0 = f(2\pi)$.

Una **función** real es **discontinua en un punto** x_0, cuando no es continua en dicho punto, es decir, cuando no existe $f(x_0)$, o no existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, o cuando existiendo $f(x_0)$ y el límite, estos valores no coinciden.

Ejemplo 5.

La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es continua en $x_0 = 0$ ya que

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f(0) = 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{-x} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \quad \lim_{x\to 0} f(x).$$

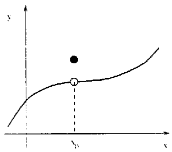
Tipos de discontinuidades

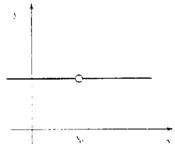
1) **Discontinuidad evitable** si

   a) existe $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

   o

   b) cuando $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ pero $\nexists f(x_0)$





Se llama evitable porque basta dar a $f(x_0)$ el valor del límite para establecer la continuidad en $x = x_0$. Al valor del límite se le llama **"verdadero valor"** de $f(x)$ en $x = x_0$.

Ejemplo. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

pero $\nexists f(3)$, entonces podemos "redefinir" $f(x)$ de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \forall\, x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$$

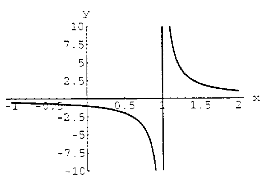
y ya es continua en $x_0 = 3$.

2) **Discontinuidad de primera especie**

   Cuando $l_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$.

   Se llama salto de la discontinuidad a la diferencia $|l_2 - l_1|$ que puede ser finita o infinita.

Ejemplo 1. $y = \dfrac{1}{x - 1}$.



Esta función tiene una discontinuidad de primera especie infinita (o de salto infinito) en el punto $x_0 = 1$ pues

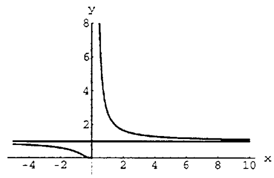
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x - 1} = -\infty.$$

Ejemplo 2. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Esta función tiene una discontinuidad de primera especie en $x_0 = 0$ pues

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$

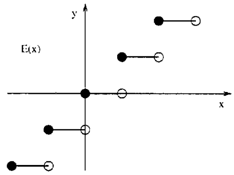
$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$



Ejemplo 3. Sea la función parte entera de x

$$y = E(x)$$

tiene discontinuidades finitas de primera especie en los puntos $x_0 \in \mathbb{Z}$ (el salto es 1).



3) **Discontinuidad de segunda especie**

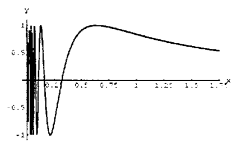
Cuando uno o los dos límites laterales no existen. Se dice finita o infinita según que la función sea acotada o no.

Ejemplo 1. La función

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

tiene discontinuidad de segunda especie finita en $x_0 = 0$ pues

$$\nexists \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \nexists \lim_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$$



Ejemplo 2. La función

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

presenta discontinuidad infinita de segunda especie en $x_0 = 0$.

Los casos de discontinuidad de primera y segunda especie se llaman **esenciales** pues sus discontinuidades no se pueden evitar.

Ejemplo 3. La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \forall\, x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

en $x_0 = 0$ presenta una discontinuidad de primera especie de salto 2.

Ejemplo 4. La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

en $x_0 = 0$ tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito pues

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Ejemplo 5. La función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} \;\nexists \end{array} \right\} \Rightarrow \text{discontinuidad de segunda especie.}$$

Método práctico para "buscar"las discontinuidades de una función

a) Si nos piden la continuidad en un punto, miramos si se cumplen las tres condiciones de la definición (5) en ese punto.

b) Si nos piden estudiar la continuidad de $f(x)$

1) Calculamos el dominio D de $f(x)$ -pues $\forall\, x \notin D$ es punto de discontinuidad por no estar definida en él la función.
2) Para funciones definidas "a trozos"estudiaremos los puntos $x = x_0$ en los cuales "cambia"la expresión de la función, pues son puntos de posible discontinuidad.
3) Estudiaremos puntos especiales como pueden ser: ceros en los denominadores, ceros en los valores absolutos, ...

Continuidad de las funciones elementales

1) Las funciones polinómicas, $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, son continuas $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) La función potencial $y = x^n$

   a) si $n > 0$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
   b) si $n < 0$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3) La función esponencial $y = a^x$ $(a > 0)$ es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

4) La función logarítmica $y = \log_a(x)$ $(a > 0)$ es continua $\forall\ x \in (0, \infty)$.

5) Las funciones trigonométricas

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & y = \operatorname{sen} x \\ \text{b)} & y = \cos x \end{array}\right\} \text{ son continuas } \forall\ x \in \mathbb{R};$$

c) $y = \operatorname{tg} x$ continua $\forall\ x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall\ k \in \mathbb{Z}$.

6) Sus inversas

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & y = \operatorname{arcsen} x \\ \text{b)} & y = \arccos x \end{array}\right\} \text{ continuas } \forall\ x \in [-1, 1];$$

c) $y = \operatorname{arctg} x$ continua $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Operaciones con funciones continuas

Según se desprende de la propia definición de continuidad, esta no es más que un caso particular de la definición de límite; de aquí que según se deduce de las propiedades que poseen los límites de una función se tenga

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el mismo dominio D (o en un punto x_0), entonces

  a) $$\left.\begin{array}{l} f(x) + g(x) \\ f(x) - g(x) \\ f(x) \cdot g(x) \end{array}\right\} \text{ son también continuas en } D \text{ (o en el punto } x_0);$$

  b) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en todos los puntos de D excepto en aquellos puntos donde se anula el denominador;

  c) la función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$, porque $\lim\limits_{x \to a} |x| = |a|$;

  d) la función raiz cuadrada es continua para cada número positivo, dado que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ para cada $a > 0$.

Ejercicio.

Estudia la continuidad de las funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$, b) $y = |2x - 6|$,

c) $y = \dfrac{x^2 + 3}{\operatorname{sen} x}$, d) $f(x) = \begin{cases} 2\,x^2 & x < -2 \\ 8 & -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x - 3} & 1 < x \leq 5 \\ \dfrac{2x - 9}{2} & 5 < x < 7. \end{cases}$

Teorema 0.10 ***Continuidad de la función compuesta***
Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones reales tales que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Dom}(g)$. Si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0 y la función $g(x)$ es continua en $f(x_0)$ entonces la función compuesta $(g \circ f)(x)$ es continua en el punto x_0.

Demostración:

- Como f es continua en x_0:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- Como g es continua en $f(x_0)$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \delta_1 > 0 \;/\; \forall\, f(x): \quad |f(x) - f(x_0)| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g\left(f(x)\right) - g\left(f(x_0)\right)| < \epsilon.$$

Entonces $(g \circ f)$ es continua en el punto x_0 pues

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x: \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g\left(f(x)\right) - g\left(f(x_0)\right)| < \epsilon$$

porque

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon = \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g\left(f(x)\right) - g\left(f(x_0)\right)| < \epsilon.$$

c.q.d.

Continuidad uniforme

Una función $f(x)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ se dice que es uniformemente continua en dicho intervalo si

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x_1, x_2 \in [a, b] \text{ tales que } |x_1 - x_2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Propiedades

1) Si una función f es uniformemente continua en un intervalo $[a, b]$, entonces f es continua $\forall\, x_0 \in [a, b]$.

   Demostración:

   Por ser uniformemente continua

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x_1, x_2 \in [a, b] \text{ t.q. } |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

   Si tomamos como $x_2 = x_0$:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \;/\; \forall\, x_1 \text{ que cumpla } |x_1 - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$$

   y esto implica que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, luego $f(x)$ es continua en $x_0 \in [a, b]$.

c.q.d.

2) La recíproca de dicha propiedad no es cierta en general.

   Es decir, que $f(x)$ sea continua $\forall\ x_0 \in [a, b]$ no tiene por qué implicar que $f(x)$ sea uniformemente continua en $[a, b]$

   Ejemplo. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua en $(0, 1)$ y sin embargo no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Propiedades de las funciones continuas

1) Si una función $f(x)$ es continua en un punto x_0, y $f(x_0) \neq 0$, existe un entorno del punto x_0, $E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\ x \in E(x_0, \delta)$ se verifica que

$$\operatorname{sg} f(x) = \operatorname{sg} f(x_0).$$

   Demostración:

   - Supongamos que $f(x_0) > 0$.
     Por ser la función continua en x_0, $\forall\ \epsilon > 0$ existe un entorno de dicho punto $E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\ x \in E(x_0, \delta)$ se verifica $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ o lo que es lo mismo

$$-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

     Si elegimos el ϵ de forma que sea $0 < \epsilon < f(x_0)$ resulta que

$$0 < f(x_0) - \epsilon < f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0 \quad \forall\ x \in E(x_0, \delta).$$

   - •• Si $f(x_0) < 0$, bastaría elegir como valor de ϵ uno que cumpla la condición de que

$$0 < \epsilon < -f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -f(x_0) - \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) + \epsilon < 0$$

     con lo que

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < 0 \quad \forall\ x \in E(x_0, \delta).$$

     De los resultados anteriores se deduce que

$$\forall\ x \in E(x_0, \delta) \qquad \operatorname{sg} f(x) = \operatorname{sg} f(x_0).$$

c.q.d.

2) Si una función toma valores positivos y negativos en cualquier entorno de un punto x_0 y además es continua en x_0, la función se anula en x_0.

   Demostración:

   En efecto, ya que si no se anula en x_0, por la propiedad anterior existe un entorno de dicho punto donde la función toma solamente valores positivos o negativos, lo que contradice la hipótesis. c.q.d.

3) Si una función $f(x)$ es continua en un punto x_0, y además $f(x_0) > k$ (ó $f(x_0) < k$), existe un entorno del punto $x_0, E(x_0, \delta)$ tal que $f(x) > k$ (ó $f(x_0) < k$) $\forall\, x \in E(x_0, \delta)$.

Demostración:

Para demostrarlo definamos la función $g(x) = f(x) - k$ que es continua en el punto x_0 por ser diferencia de dos funciones continuas. Evaluando en el punto x_0 se verifica $g(x_0) = f(x_0) - k > 0$, entonces, por la propiedad 1) existe un entorno del punto $x_0, E(x_0, \delta)$ tal que

$$\forall\, x \in E(x_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad g(x) > 0$$

o lo que es lo mismo $f(x) - k > 0$ es decir, $f(x) > k$. c.q.d.

La demostración para la otra desigualdad se hace de la misma forma, cambiando el signo de mayor por el de menor.

4) Si la función $f(x)$ es continua en el punto x_0, existe un entorno de $x_0, E(x_0, \delta)$ donde la función está acotada.

Demostración:

Por ser la función $f(x)$ continua en x_0, existe un entorno de $x_0, E(x_0, \delta)$ tal que $\forall\, x \in E(x_0, \delta)$ se verifica $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ es decir,

$$f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon$$

de aquí, una vez fijado el ϵ, resulta que $f(x_0) - \epsilon$ y $f(x_0) + \epsilon$ son cotas inferior y superior respectivamente de la función $f(x)$ para todo $x \in E(x_0, \delta)$.

c.q.d.

Ejemplo. Encuentra un entorno del punto $x_0 = 2$ donde la función $f(x) = x^2$ esté acotada por 3 y por 5.

Solución:

Por ser la función continua en $x_0 = 2$ se tiene

$$f(2) - \epsilon < f(x) < f(2) + \epsilon \quad \Rightarrow \quad 4 - \epsilon < f(x) < 4 + \epsilon$$

Para $\epsilon = 1$ se tiene $3 < f(x) < 5$, la función está acotada por 3 y 5. Para este ϵ vamos a buscar el δ. Sea x_1 la anteimagen de 3 y x_2 la anteimagen de 5. $x_1 = f^{-1}(3) = \sqrt{3}, x_2 = f^{-1}(5) = \sqrt{5}$; luego podemos tomar como

$$\delta = \min\{|2 - x_1|, |2 - x_2|\} = 0'23.$$

debido a que

$$|2 - x_1| = |2 - \sqrt{3}| = |0'27| = 0'27, \qquad |2 - x_2| = |2 - \sqrt{5}| = |-0'23| = 0'23.$$

5) Una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ está acotada.

Demostración:

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo.

Supongamos que la función $f(x)$ no esté acotada en el intervalo $[a, b]$. Se divide este intervalo en dos partes iguales. Al menos en una de ellas la función no está acotada, ya que si lo estuviera en las dos mitades

$$|f(x)| < k_1 \quad \forall\, x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \qquad |f(x)| < k_2 \quad \forall\, x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right],$$

la función $f(x)$ también estaría acotada en $[a, b]$ por $k = \max\{k_1, k_2\}$ en contra de la hipótesis de partida.

Sea $[a_1, b_1]$ el intervalo donde la función no está acotada. Se divide este en dos mitades, y al menos en una de ellas la función no está acotada por la misma razón que apuntábamos antes. Este proceso se repite indefinidamente, con lo que se obtiene una sucesión de intervalos no acotados en que cada uno de ellos contiene al siguiente.

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

y cuyas amplitudes son

$$l, \frac{l}{2}, \frac{l}{2^2}, \ldots, \frac{l}{2^n}, \ldots$$

Por tender hacia cero las amplitudes, por el Postulado de Cantor, la sucesión de intervalos encajados define un único punto α que pertenece al intervalo $[a, b]$, por estar contenidos todos los intervalos de la sucesión en él.

Por ser la función continua en $[a, b]$, también lo será en el punto α y por tanto, existe un entorno de α, $E(\alpha, \delta)$ donde la función está acotada -propiedad (4)-. Si tomamos un intervalo $[a_n, b_n]$ de la sucesión de intervalos encajados cuya amplitud sea menor que $2\,\delta$, es decir, donde n satisface la desigualdad $\dfrac{l}{2^n} < 2\,\delta$, entonces tendremos que $[a_n, b_n] < E(\alpha, \delta)$, lo cual es contradicción, ya que la función no estaba acotada en $[a_n, b_n]$ mientras que sí lo está en $E(\alpha, \delta)$. c.q.d.

6) **Teorema 0.11** ***Teorema de Weierstrass (o sobre la existencia de máximos y mínimos).***

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, se verifica que en algún punto de $[a, b]$ $f(x)$ toma un valor máximo M y asimismo en algún punto de $[a, b]$ toma un valor mínimo m.

Demostración:

Por la propiedad anterior, la función $f(x)$ está acotada en el intervalo cerrado $[a, b]$. Únicamente nos falta por demostrar que el extremo superior e inferior del conjunto de valores que la función toma en $[a, b]$ pertenece también a ese conjunto.

Sea M el extremo superior del conjunto

$$A = \{f(x) \ / \quad x \in [a, b]\} \quad \text{y supongamos que} \quad M \notin A.$$

Definamós la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ que también es continua en $[a, b]$, ya que es cociente de funciones continuas y el denomiandor no se anula cuando x varía en el intervalo $[a, b]$ ya que hemos supuesto que $M \notin A$.

Por ser $g(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, también está acotada en dicho intervalo.

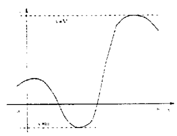
Sea H una cota superior para la función $g(x)$ en $[a, b]$. Se tiene

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq H \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{H} \leq M - f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq M - \frac{1}{H} \quad \forall\, x \in [a, b],$$

lo que nos dice que $M - \dfrac{1}{H}$ es una cota superior del conjunto A, lo cual es un absurdo ya que M era el extremo superior y $M - \dfrac{1}{H} < M$. c.q.d.

De manera análoga se demuestra que el extremo inferior del conjunto A, también pertenece a dicho conjunto.

Geométricamente este teorema nos dice que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado se encuentra comprendida entre dos líneas paralelas al eje de abscisas.



M y m son el extremo superior e inferior del conjunto A respectivamente.

7) **Teorema 0.12** ***Teorema de Bolzano (Existencia de raices).***

Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $\operatorname{sg} f(a) \neq \operatorname{sg} f(b)$ entonces la función se anula por lo menos en un punto del intervalo (a, b).

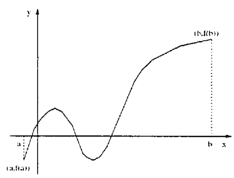
Demostración:

Supongamos que se verifica $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$.

El intervalo $[a, b]$ se divide en dos partes iguales $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ y $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$ donde $\dfrac{a+b}{2}$ es el punto medio del intervalo $[a, b]$. Si la función se anula en el punto $\dfrac{a+b}{2}$, el teorema está ya demostrado, en caso contrario, en uno de los dos intervalos anteiores la función toma en sus extremos valores de signo contrario. Sea este intervalo el $[a_1, b_1]$ el cual se vuelve a dividir en dos partes iguales. Si al repetir este proceso la función se anula en el punto medio, el teorema queda demostrado; en caso contrario, elegimos aquella mitad donde la función toma en los extremos valores de signo contrario. Repitiendo indefinidamente este razonamiento, llegamos a construir la sucesión de intervalos encajados $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots$ de amplitudes $l, \frac{l}{2}, \frac{l}{2^2}, \ldots, \frac{l}{2^n}, \ldots$ donde cada uno de ellos se caracteriza porque la función toma en los extremos valores de signo opuesto.

Al tender las amplitudes de dichos intervalos hacia cero, por el postulado de Cantor, la sucesión de intervalos encajados define un único punto α que está contenido en todos los intervalos en donde la función tiene necesariamente que anularse, ya que si $f(\alpha) \neq 0$ existe un entorno $E(\alpha,\delta)$ en cuyos puntos la función toma valores del mismo signo que el de $f(\alpha)$ -por la propiedad 1)-. Por otra parte, fijado el entorno $E(\alpha,\delta)$, existe un intervalo de la sucesión $[a_n,b_n]$ de amplitud $\frac{l}{2^n}$ contenido en dicho entorno, $[a_n,b_n] \subset E(\alpha,\delta)$. Bastará elegir aquel que cumpla la condición de que $\frac{l}{2^n} < 2\delta$, lo que es un absurdo, ya que $f(x)$ toma valores de signo contrario en los extremos de $[a_n,b_n]$, y por otra parte, el signo de la función es siempre el mismo en $E(\alpha,\delta)$. c.q.d.

Geométricamente este teorema dice que si la función es continua en $[a,b]$, para pasar del punto $(a,f(a))$ de la curva al punto $(b,f(b))$, necesariamente hemos de cortar por lo menos una vez al eje de abscisas. Es decir, por lo menos existe un punto $c \in (a,b)$ tal que en él la función se anula, $f(c) = 0$.



Aplicación: Método de bisección

Supongamos que queremos encontrar las raices de $f(x) = 0$. Miramos si

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ continua en } [a,b] \\ \operatorname{sg} f(a) \neq \operatorname{sg} f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, p \in (a,b) \;/\; f(p) = 0.$$

El método requiere dividir repetidamente a la mitad los subintervalos de $[a,b]$ y, en cada paso, localizar la mitad que contiene a p. Para empezar, tomemos $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y p_1 el punto medio de $[a,b]$; o sea $p_1 = \frac{1}{2}(a_1+b_1)$. Si $f(p_1) = 0$, entonces $p = p_1$; si no, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$. Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, entonces $p \in (p_1,b_1)$, y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$. Si $f(p_1)$ y $f(b_1)$ son del mismo signo, entonces $p \in (a_1,p_1)$, y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Ahora re-aplicamos el proceso al intervalo $[a_2,b_2]$. Y así hasta que se encuentra $f(p) = 0$ ó el i-ésimo intervalo $[a_i,b_i]$ es más pequeño que un error prefijado.

8) **Teorema 0.13** ***Teorema del valor intermedio (Propiedad de Darboux).***

(Generalización del teorema de Bolzano)

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(a) \neq f(b)$ la función alcanza en este intervalo todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración:

En efecto, supongamos para fijar ideas que $f(a) < f(b)$; demostremos que para cualquier valor $y_0 \in [f(a), f(b)]$ existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Si $y_0 = f(a)$ o $y_0 = f(b)$ el teorema está ya demostrado, ya que en ambos casos el valor x_0 coincide con a o b respectivamente. Únicamente falta demostrarlo cuando $y_0 \in (f(a), f(b))$.

Definamos la función $g(x) = f(x) - y_0$ que es continua en $[a, b]$ por ser diferencia de funciones continuas. Además se verifica que

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0 \quad \text{y} \quad g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

es decir, en los extremos de $[a, b]$, la función toma valores de signo contrario. En virtud del teorema de Bolzano, existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0.$$

Luego $f(x_0) = y_0$. c.q.d.

9) **Teorema 0.14**

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, la función recorre todos los valores comprendidos entre el máximo y el mínimo de la función en $[a, b]$.

Demostración:

Claro, pues por ser la función continua en $[a, b]$, por el teorema de Weierstrass la función posee un máximo y un mínimo. Sean estos M y m respectivamente y sea y_0 un valor arbitrario comprendido entre M y m. La función $g(x) = f(x) - y_0$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano, luego existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$ y esto implica $f(x_0) = y_0$.

c.q.d.

Capítulo 1

Derivación.

1.1 Derivada de una función.

Definición. Sea $f(x)$ una función real definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}$. Se dice que la **función** f(x) es **derivable o diferenciable en un punto** $\mathbf{x_0 \in D}$ si y solo si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.1}$$

dicho límite se representa por $f'(x_0)$ y recibe el nombre de derivada de f en x_0.

Si hacemos $x = x_0 + h$ la expresión (1.1) se transforma en

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle x}$$

que nos dice que la derivada de una función en un punto x_0 es el límite del incremento de la función partido por el incremento de la variable cuando este tiende a cero.

La derivada de una función en un punto es un valor numérico. Se designa con las notaciones

$$y_0' = f'(x_0) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = Df(x_0).$$

Ejemplo. Calcula la derivada de $y = x^2$ en el punto $x_0 = 1$.

Solución:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h} = 2.$$

Función derivada. Sea $f(x)$ una función real definida y derivable en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$. Podemos construir una nueva función asignando a cada valor $x_0 \in D$ su derivada $f'(x_0)$. A esta nueva función se le llama función derivada y se designa por

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = Df(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.2}$$

Ejemplo. Calcula la función derivada de la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-3(x+h)+5-x^2+3x-5}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h+5-x^2+3x-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h-3)}{h} = 2x-3. \end{aligned}$$

Ojo, no confundir la función derivada, en que x es variable, con la derivada en un punto que es un valor numérico.
Siguiendo con el mismo ejemplo, para calcular $f'(-2)$ podemos hacer de dos formas:

- aplicando la definición

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[(-2+h)^2-3(-2+h)+5]-[(-2)^2-3(-2)+5]}{h} = \\ &= \lim_{h\to x_0}\frac{h(h-7)}{h} = -7; \end{aligned}$$

•• o bien en $f'(x) = 2x - 3$ sustituir x por -2: $f'(-2) = -7$.

Definición. Si la función derivada $f'(x)$ es a su vez derivable en el subconjunto $D \subset \mathbb{R}$, a la derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda de $f(x)$ y se representa por $f''(x)$. de forma análoga a la función derivada de la función $f^{n-1}(x)$ se le llama **derivada n-ésima** de $f(x)$ y se representa por $\mathbf{f^n(x)}$.

Ejemplo. Halla la derivada n-ésima de la función $y = \dfrac{1}{2x+1}$.

Solución:
Como $y = (2x+1)^{-1}$ se tiene

$$\begin{aligned} y' &= -2\,(2x+1)^{-2} \\ y'' &= 2^2\cdot 2\cdot 1\,(2x+1)^{-3} \\ y''' &= -2^3\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(2x+1)^{-4} \\ y^{iv} &= 2^4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,(2x+1)^{-5} \\ &\vdots \\ y^n &= \frac{(-1)^n\,2^n\,n!}{(2x+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

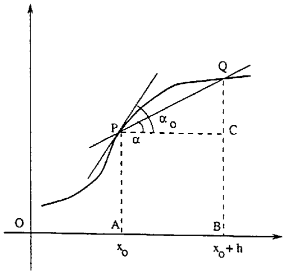
(más adelante veremos el cálculo de derivadas n-ésima).

Interpretación geométrica de la derivada

Sea $f(x)$ una función derivable en x_0.

Sean $P\,(x_0, f(x_0))$ y $Q\,(x_0 + h, f(x_0 + h))$ dos puntos pertenecientes a la gráfica de dicha función.

El primero un punto fijo y el segundo un punto arbitrario ya que depende del valor que le demos a h.



Se tiene que

$f(x_0 + h) - f(x_0) = \overline{BQ} - \overline{CB} = \overline{QC}$

$h = \overline{BA} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{PC}$

Como la función es derivable en x_0, por definición sabemos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{QC}}{\overline{PC}} = \lim_{h \to 0} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha_0$$

Por tanto

Si una función es derivable en un punto x_0, su derivada en dicho punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Otras interpretaciones de la derivada

Muchas nociones de la Química, la Física,..., la Técnica, adoptan una expresión precisa gracias al concepto de derivada.

La **velocidad** de un móvil en un movimiento rectilíneo en un instante t_0 se define como el límite del cociente del incremento de espacio por el incremento del tiempo

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s - s_0}{t - t_0}$$

es decir, es la derivada de la función espacio $s = s(t)$ respecto del tiempo, en el instante considerado t_0.

Del mismo modo el límite del cociente del incremento de la velocidad por el incremento del tiempo

$$\lim_{t \to t_0} \frac{v - v_0}{t - t_0}$$

se llama **aceleración** del movimiento y es la derivada de la velocidad $v = v(t)$ respecto del tiempo.

En general, para cualquier fenómeno cuyos estados se puedan medir por números y que dependan del tiempo t, $y = y(t)$ (por ejemplo: un movimiento de rotación de un sólido, temperatura de un cuerpo, altura de un avión, etc.) se puede definir la **velocidad de variación** como

$$\lim_{t \to t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

y por tanto, estos conceptos físicos tienen su definición correcta mediante la noción de derivada.

Otro tanto se puede decir de funciones cuya variable independiente no es el tiempo, pero que también se reducen a la noción de derivada. Así por ejemplo: el peso específico, el calor específico, la concentración de una disolución, la velocidad de una reacción química, la dilatación de una barra, ...

Derivadas laterales

Sea $f(x)$ una fucnión real definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$. Si existe el límite a la derecha

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se dice que la función $f(x)$ tiene **derivada a la derecha del punto** $\mathbf{x_0}$ y se representa por $\mathbf{f'(x_0^+)}$.

Si existe límite

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

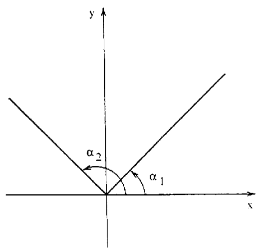
se dice que la función $f(x)$ tiene **derivada a la izquierda del punto** $\mathbf{x_0}$ y se representa por $\mathbf{f'(x_0^-)}$.

De la interpretación geométrica del concepto de derivada, se deduce que las derivadas en un punto coinciden con las pendientes de las semirrectas tangentes a la curva en ese punto.

Para que una función sea derivable en un punto tienen que existir las derivadas laterales en dicho punto y ser iguales.

Ejemplo 1. Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$.

<u>Solución</u>: $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$



$$f'(0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 = \operatorname{tg} \alpha_2,$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 = \operatorname{tg} \alpha_1.$$

luego $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.

Ejemplo 2. Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x^3 & x \geq 0. \end{cases}$$

Solución:

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h-0}{h} = 2$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3-0}{h} = 0$$

luego $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$.

Se dice que una función f(x) **es derivable en un intervalo** $[a, b]$, **cuando es derivable en** (a, b) **y además existe la derivada a la derecha del punto** a **y la derivada a la izquierda del punto** b.

1.2 Continuidad de las funciones de una variable.

Teorema 1.1 *Si una función $f(x)$ definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ es derivable en un punto $x_0 \in D$, entonces la función es continua en dicho punto.*

Demostración:

Sabemos que una función es continua en un punto si

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$$

o lo que es lo mismo

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0 \tag{1.3}$$

Suponiendo que $f(x)$ sea derivable en x_0, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot h =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Es válido multiplicar y dividir por h, ya que nunca toma el valor cero, único caso donde la división no está definida.

c.q.d.

El recíproco de este teorema no es siempre cierto, pues antes hemos visto que la función $f(x) = |x|$ es continua en el origen, pero no es derivable en dicho punto; por ello, la derivabilidad de las funciones es una condición más fuerte que la continuidad de las mismas.

Ejercicio.

Estudia la continuidad y la derivabilidad en $x_0 = 0$ de la función

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.2 *Sean f y g dos funciones derivables en el punto x_0, entonces:*

1) $f + g$ es derivable en x_0 y

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) αf es derivable en x_0 ($\alpha \in \mathbb{R}$) y

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

3) $f \cdot g$ es derivable en x_0 y

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + g'(x_0)\, f(x_0)$$

4) si $g(x_0) \neq 0$ entonces $\dfrac{1}{g}$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

5) si $g(x_0) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en x_0 y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Demostración:

1) Calculemos

$$\frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} = \frac{[f(x_0+h) + g(x_0+h)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{h} =$$

$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}.$$

Aplicando límites

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

luego

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2) Calculemos

$$\frac{(\alpha f)(x_0+h)-(\alpha f)(x_0)}{h}=\frac{\alpha f(x_0+h)-\alpha f(x_0)}{h}=\alpha\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Aplicando límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f)(x_0+h)-(\alpha f)(x_0)}{h}=\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

luego

$$(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0).$$

3) Calculemos

$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\frac{(f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0+h)g(x_0)+f(x_0+h)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)\,[g(x_0+h)-g(x_0)]}{h}+\frac{g(x_0)\,[f(x_0+h)-f(x_0)]}{h}.$$

Aplicando límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_0+h)\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}+$$

$$g(a)\,\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

como f es derivable en x_0 entonces f es continua en a, luego

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0).$$

Por tanto

$$(f\,g)'(x_0)=f(x_0)\,g'(x_0)+g(x_0)\,f'(x_0).$$

4) Dado que $g(x_0)\neq 0$ y g es continua en x_0 entonces $\frac{1}{g}$ es continua en x_0. Luego

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)}=\frac{1}{g(x_0)}.$$

Además, por lo estudiado en continuidad, puntos muy próximos a x_0 tienen las imágenes muy próximas a $g(x_0)$, es decir, para un $h\neq 0$ suficientemente pequeño $g(x_0+h)\neq 0$.

$$\frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}\right]=-\left[\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right]\cdot\frac{1}{g(x_0+h)}\cdot\frac{1}{g(x_0)}.$$

Aplicando límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x_0+h)}-\frac{1}{g(x_0)}}{h}=-\left(\lim_{h\to 0}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x_0+h)}\right)\frac{1}{g(x_0)}$$

luego

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

5) Como podemos escribir $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, usando los apartados 3) y 4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)=$$

$$=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

c.q.d.

Cálculo de derivadas

1) La **derivada de una constante** es cero

$$f(x)=k \quad\rightarrow\quad f'(x)=0.$$

2) La **derivada de una constante por una función** es igual a la constante por la derivada de la función

$$y=c\cdot f(x) \quad\rightarrow\quad y'=c\cdot f'(x).$$

3) La **derivada de una suma de funciones**, es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones

$$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x).$$

4) **Derivada del producto de funciones**

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

5) **Derivada del cociente de funciones**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\qquad\forall\, x\ /\ g(x)\neq 0.$$

6) **Derivada de la función** $\mathrm{f(x) = x^n}$ donde n es un número natural -después generalizaremos-

$$f'(x) = n\,x^{n-1}.$$

7) **Derivada de la función seno**

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \cos x.$$

8) **Derivada de la función coseno**

$$f(x) = \cos x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

9) **Derivada de la función tangente**

$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x.$$

10) **Derivada de la función cotangente**

$$f(x) = \operatorname{cotg} x \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x).$$

11) **Derivada de la función logarítmica**

$$f(x) = \log_a x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e \qquad (a > 0);$$

$$f(x) = \ln x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

12) **Derivada de la función exponencial**

$$f(x) = a^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = a^x \ln a \qquad (a > 0);$$

$$f(x) = e^x \quad \longrightarrow \quad f'(x) = e^x.$$

Teorema 1.3 ***Derivada de la función compuesta (Regla de la cadena).*** *Sea $y = f(x)$ una función derivable en $D_1 \subset \mathbb{R}$ y sea $h = g(y)$ una función derivable en $D_2 \subset \mathbb{R}$ donde están los valores que toma f. Entonces, si*

$$h = g \circ f \quad \Rightarrow \quad h' = g'(y) \cdot f'(x). \tag{1.4}$$

Demostración:

A cada valor de x le vamos a asignar un valor de $y = f(x)$ y a este valor de y un valor $g(y)$

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) \qquad \triangle h = g(y + \triangle y) - g(y).$$

Para hallar la derivada de la función compuesta tenemos que hallar $\lim\limits_{\triangle y \to 0} \dfrac{\triangle h}{\triangle x} = h'(x)$.
Por ser $h = g(y)$ una función derivable para el punto y

$$g'(y) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{g(y + \triangle y) - g(y)}{\triangle y} \quad \text{entonces} \quad g'(y) = \frac{g(y + \triangle y) - g(y)}{\triangle y} + \epsilon(\triangle y)$$

siendo $\epsilon(\triangle y)$ una función que tiende a cero cuando $\triangle y \to 0$.

$$\triangle h = g(y + \triangle y) - g(y) = \triangle y\,[g'(y) - \epsilon(\triangle y)]$$

luego

$$\frac{\triangle h}{\triangle x} = \frac{g(y + \triangle y) - g(y)}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{\triangle x}\,[g'(y) - \epsilon(\triangle y)]\,.$$

Tomando límites

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle h}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{g(y + \triangle y) - g(y)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}\,[g'(y) - \epsilon(\triangle y)] =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} g'(y) = f'(x) \cdot g'(y)$$

Es decir, $h'(x) = f'(x) \cdot g'(y)$, luego

$$[g \circ f]'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

c.q.d.

Ejemplo 1. Halla la derivada de la función $h = \ln(\operatorname{sen} x)$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \operatorname{sen} x = y \\ g(y) = \ln y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} f'(x) = \cos x \\ g'(y) = \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{array}\right\}$$

entonces

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(\operatorname{sen} x).$$

Luego

$$[\ln(\operatorname{sen} x)]' = g'(y) \cdot f'(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x.$$

Ejemplo 2. Halla la derivada de la función $\ln[\text{sen}(a^x)]$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y = f(x) = a^x \\ h = g(y) = \text{sen}\, y \\ i = z(h) = \ln h \end{array}\right\} \Rightarrow (i \circ h \circ y)(x) = \ln[\text{sen}\, x(a^x)] \qquad \left.\begin{array}{l} z'(h) = \dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{\text{sen}\, y} = \dfrac{1}{\text{sen}\, a^x} \\ g'(y) = \cos y = \cos(a^x) \\ f'(x) = a^x \ln a \end{array}\right\}$$

Luego

$$[\ln[\text{sen}(a^x)]]' = [(i \circ h \circ y)(x)]' = z'(h) \cdot g'(y) \cdot f'(x) = \frac{1}{\text{sen}(a^x)} \cdot \cos(a^x) \cdot a^x \cdot \ln a.$$

Otra formulación de la regla de la cadena

Si $\left.\begin{array}{l} y = f(u) \\ u = g(x) \end{array}\right\} \rightarrow y = f(u) = f(g(x))$ en esta situación tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(g(x))) \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)) \qquad g'(x) = \frac{du}{dx}$$

Luego la fórmula se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Dicha fórmula puede extenderse a varias variables

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}.$$

Ejemplo 3. Halla $\dfrac{dy}{dx}$, supuesto que $\quad y = 3u^2 + 2 \quad$ y $\quad u = \dfrac{1}{x-1}$.

Solución:

Dado que

$$\frac{dy}{du} = 6u = \frac{6}{x-1} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{6}{x-1} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = -\frac{6}{(x-1)^3}.$$

Se puede obtener el mismo resultado expresando en primer lugar y en función de x y luego diferenciando

$$y = 3u^2 + 2 \text{ y } u = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{(x-1)^2} + 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{6}{(x-1)^3}.$$

Derivada de la función inversa

Si f es inyectiva, sabemos que f tiene función inversa f^{-1}.
Si f es inyectiva y diferenciable tal que f' no toma el valor 0, entonces f^{-1} es diferenciable.
Sea $y = f(x)$, sabemos que su función inversa cumple

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x.$$

Para hallar la derivada de f^{-1}, aplicamos la derivada de la función compuesta

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x \quad \Rightarrow \quad \left[\left(f^{-1} \circ f\right)(x)\right]' = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\left(f^{-1}\right)'(y)\right) \cdot f'(x) = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'(y)}.$$

En la notación de Leibniz

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

pues

$$y = f(x) \qquad x = f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \frac{dx}{dy} = \left(f^{-1}\right)'(y)$$

Sabemos $y = f\left(f^{-1}\right)(y)$ entonces, derivando

$$1 = f'\left(f^{-1}\right)(y)(f^{-1})'(y) = f'(x)\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Aplicaciones

13) La **derivada de $\mathbf{y = arcsen\,x}$** es

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pues la inversa de $y = \operatorname{arcsen} x$ es $x = \operatorname{sen} y$. Luego

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = y' = \frac{1}{\cos y} \quad \text{pero} \quad \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

14) La **derivada de $\mathbf{y = arccos\,x}$** es

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

pues la inversa de $y = \arccos x$ es $x = \cos y$. Luego

$$y' = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\operatorname{sen} y} \quad \text{pero} \quad \operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

15) La **derivada de $\mathbf{y = arctg\, x}$** es

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

pues la inversa de $y = \operatorname{arctg} x$ es $x = \operatorname{tg} y$. Entonces

$$y' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$$

Además

$$x = \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 y}}{\cos y} \quad \Rightarrow \quad x\cos y = \sqrt{1-\cos^2 y} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\cos^2 y = 1 - \cos^2 y \quad \Rightarrow \quad x\cos^2 y + \cos^2 y = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 y(1+x^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

que sustituyendolo en la expressión de arriba queda

$$y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

De forma análoga podéis demostrar que:

16) La **derivada de $\mathbf{y = arccotg\, x}$** es

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

17) La **derivada de $\mathbf{y = [f(x)]^{g(x)}}$**

$y = [f(x)]^{g(x)}$ aplicando neperianos

$$\ln y = \ln [f(x)]^{g(x)} \Rightarrow \ln y = g(x) \ln f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = g'(x) \ln (f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = y \left[g'(x) \ln (f(x)) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

Ejemplo. Calcula la derivada de $y = x^x$.

Solución:

$$\ln y = \ln x^x \quad \Rightarrow \quad \ln y = x \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}x \quad \Rightarrow \quad y' = y\,[\ln x + 1] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y' = x^x\,[\ln x + 1]\,.$$

Derivada de la función implícita

Una función decimos que está en forma implícita cuando viene dada por $f(x, y) = 0$. Por ejempo, la ecuación $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ determina implícitamente las dos funciones

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{e} \qquad y = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

No siempre es posible hallar la forma explícita de una función implícita. Así, las funciones definidas por las ecuaciones $y^6 - y - x^2 = 0$ ó $y - x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} y = 0$ no pueden ser expresadas mediante funciones elementales.

Toda función explícita $y = f(x)$ puede ponerse en forma implícita como $y - f(x) = 0$. Supongamos que la función esté dada por la ecuación $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Derivando ambos miembros de dicha identidad respecto a x y considerando que y es función de x, obtenemos (aplicando la regla de la cadena, teorema 1.3)

$$2\,x + 2\,y\,y' = 0 \quad \text{de donde} \quad y' = -\frac{x}{y}.$$

Observad que si derivamos la función explícita correspondiente $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ obtendríamos

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

es decir, el mismo resultado.

Ejemplos.

1) $y^6 - y - x^2 = 0 \longrightarrow$ derivando respecto a x, $\quad 6\,y^5\,y' - y' - 2\,x = 0 \quad \Rightarrow$

$$y' = \frac{2\,x}{6\,y^5 - 1}$$

2) $e^y = x + y \longrightarrow y'e^y = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y'\,(e^y - 1) = 1 \quad \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{e^y - 1}.$$

Observación. De los ejemplos anteriores se deduce que si se trata de hallar la derivada de una función implícita para un valor dado x_0 de la variable x, es preciso conocer previamente el valor de la función para ese valor x_0.

Aplicaciones geométricas de la derivada

1) **Ecuaciones de la tangente y de la normal**

   Sabemos que una recta viene expresada por la ecuación $y - y_0 = m\,(x - x_0)$ donde (x_0, y_0) es un punto de dicha recta y m su pendiente (es decir, la tangente del ángulo que dicha recta forma con el eje de abscisas), luego

   - la **ecuación de la recta tangente** a una curva en un punto (x_0, y_0) es

   $$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

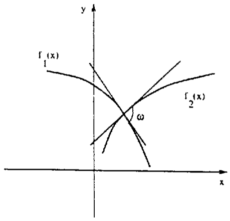
   •• y **la ecuación de su normal** es

   $$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0).$$

2) **Angulo entre curvas**

   Dadas las curvas $y = f_1(x) \qquad y = f_2(x)$

   Se llama ángulo formado por las curvas f_1 y f_2 en su punto común M_0, al ángulo ω que forman entre sí las tangentes a las curvas en ese punto M_0.



   Por geómetria analítica se tiene

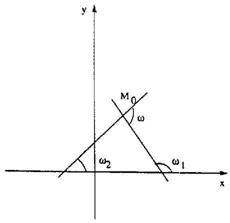
   $$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\omega_2 - \omega_1)$$

   pues

   $$\omega = 180 + (\omega_2 - \omega_1)$$

   luego

   $$\operatorname{tg}\omega = \frac{\operatorname{tg}\omega_2 - \operatorname{tg}\omega_1}{1 + \operatorname{tg}\omega_2 \operatorname{tg}\omega_2} = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x) \cdot f_1'(x_0)}.$$



Ejemplos.

1) Halla los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sean paralelas al eje de abscisas.

   Solución:

   $\alpha = 0^\circ \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0$

   $$y' = 12\,x^3 + 12\,x^2 - 24\,x$$

   $$0 = 12\,x^3 + 12\,x^2 - 24\,x \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = 20 \\ y = 15 \\ y = -1 \end{array}$$

luego los puntos son:

$$P_1(0,20), \quad P_2(1,15), \quad P_3(-2,-12).$$

2) ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

Solución:

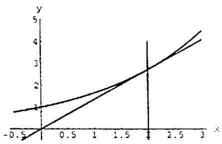
$$\left.\begin{array}{l} y' = 2x - 7 \\ 5x + y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = -5x + 3 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -5 = 2x - 7 \quad \Rightarrow \quad 2 = 2x \quad \Rightarrow$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad P(1,-3).$$

3) ¿Qué ángulo forma la curva $y = e^{0'5\,x}$ con la recta $x = 2$ al cortarse con ella?

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{0'5\,x} \\ x = 2 \end{array}\right\} \text{ se cortan en el punto } (2, e)$$



$$y' = 0'5e^{0'5\,x} \quad \Rightarrow \quad y'(2,e) = \tfrac{2}{e} = \operatorname{tg}\omega_2$$

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\pi}{2} - \omega_2$$

luego

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{\operatorname{tg}\omega_1 - \operatorname{tg}\omega_2}{1 + \operatorname{tg}\omega_1\ \operatorname{tg}\omega_2} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\omega_2}{\operatorname{tg}\omega_1}}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\omega_1} + \operatorname{tg}\omega_2} = \frac{1}{\frac{e}{2}} = \frac{e}{2}.$$

4) Un punto se mueve sobre la hipérbola $y = \dfrac{10}{x}$ de tal modo que su abscisas x aumenta uniformemente con la velocidad de una unidad por segundo. ¿Con qué velocidad variará su ordenada cuando el punto pase por la posición $(5,2)$?

Solución:

$$y = \frac{10}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{pero} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{10}{x^2}$$

$$\text{luego} \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{(5,2)} = -\frac{10}{25}.$$

1.3 Diferencial de una función.

Supongamos que la función $y = f(x)$ es derivable en el intervalo $[a, b]$. En un punto x del mismo, la derivada de esta función sabemos que se determina por $f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$; entonces

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) + \epsilon(x) \qquad \text{donde} \qquad \lim_{\triangle x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

Multiplicando por $\triangle x$ tenemos

$$\triangle y = f'(x) \triangle x + \epsilon(x) \triangle x.$$

Si $f'(x) \neq 0$, $f'(x) \triangle x$ es un valor muy pequeño y $\epsilon(x) \triangle x$ es un infinitésimo de orden superior a $\triangle x$ ya que $\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\epsilon(x) \triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \epsilon(x) = 0$.
Así pues, el incremento de la función, $\triangle y$, se compone de dos sumandos de los cuales el primero (para $f'(x) \neq 0$) recibe el nombre de **parte principal del incremento**. El producto $\mathbf{f'(x) \triangle x}$ se denomina **diferencial de la función** y se designa por $\mathbf{dy}$ ó $\mathbf{df(x)}$.
De modo que si la función $y = f(x)$ tiene derivada $f'(x)$ en un punto x, y esta es $\neq 0$, el producto de ésta por el incremento, $\triangle x$, de la variable independiente se llama diferencial de la función y se designa con el símbolo dy, o sea

$$dy = f'(x) \triangle x. \tag{1.5}$$

La diferencial de la función identidad $y = x$ es: $dy = 1 \cdot \triangle x$ y como $y' = x' = 1$

$$dy = dx = \triangle x.$$

Así pues, la diferencial de la variable independiente x, dx, coincide con su incremento, $\triangle x$.

La igualdad $dx = \triangle x$ se toma como definición de la diferencial de una variable independiente, por tanto (1.5) se puede expresar

$$dy = f'(x)\, dx \tag{1.6}$$

y de aquí

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Por tanto, la derivada $f'(x)$ puede ser considerada como la razón de la diferencial de la función respecto a la de la variable independiente.

Entonces podemos escribir

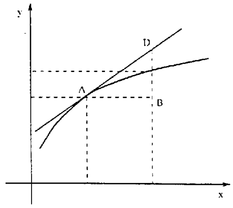
$$\triangle y = dy + \epsilon(x) \triangle x.$$

Así pues el incremento de la función difiere de la diferencial de ésta, en un infinitésimo de orden superior respecto a $\triangle x$.

Significado geométrico de la diferencial

Sea $y = f(x)$ una función derivable en un intervalo $[a, b]$. Hemos visto que la diferencial de la función es $dy = f'(x)\,dx$.

Trazamos la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto x. Por la interpretación geométrica de la derivada sabemos que $f'(x) = tg\alpha$, es decir, $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto x

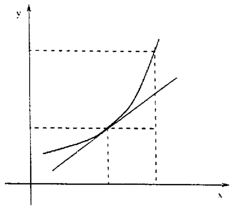


En el triángulo ABD:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \overline{BD} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \overline{AB} \\ \overline{BD} = f'(x)\,dx = dy \end{cases}$$

luego, *la diferencial de la función $f(x)$ correspondiente a los valores dados de x e $\triangle x$ es igual al incremento de la ordenada de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto dado x.*

Como se ve en la segunda figura, no siempre es $dy > \triangle y$.



Ejercicio. Calcula $\triangle y$ y dy en la función $y = x^2$

1) para valores arbitrarios de x y de $\triangle x$,

2) para $x = 20$ e $\triangle x = 0'1$.

Solución:

1) $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x) = (x+\triangle x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 - x^2 = 2x\triangle x + (\triangle x)^2$

$$dy = f'(x)\,dx = 2\,x\,dx.$$

2) $\triangle y = 2 \cdot 20 \cdot 0'1 + (0'1)^2 = 4 + 0'001 = 4'001$

$$dy = 2 \cdot 20 \cdot 0'1 = 4$$

Vemos que $\triangle\, y \approx dy$.

El cálculo de la diferenial de una función se reduce en realidad al cálculo de la derivada, ya que al multiplicar la última por la diferencial de la variable independiente se obtiene la diferencial de la función. Por tanto, la mayoría de los teoremas y fórmulas que se refieren a las derivadas, siguen siendo válidas para las diferenciales.

Por ejemplo:

$$\mathbf{d(u + v) = du + dv}$$

pues $y = u + v \to y' = u' + v'$, luego $dy = y'\,dx = (u' + v')\,dx = u'\,dx + v'\,dx = du + dv$;

$$\mathbf{d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du}$$

pues $y = u \cdot v \to y' = u \cdot v' + u' \cdot v$, luego $dy = d(uv) = y'\,dx = (u\,v' + u'\,v)\,dx = u\,v'\,dx + v\,u'\,dx = u\,dv + v\,du$;

$$\mathbf{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}}.$$

Diferencial de la función compuesta

Sea $y = f(x)$ y $h = g(y)$, luego $h\,(g(y)) = g\,(f(x)) = (g \circ f)\,(x)$

$$\mathbf{dh = d\,(g\,(f(x))) = g'_y\,dy = g'_y \cdot f'_x\,dx}.$$

Ejemplo 1. Halla la diferencial de la función $h = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$.

Solución:

$h = \operatorname{sen}(x^2 + 1)$, $\quad y = x^2 + 1 \to dy = 2\,x\,dx$, $\quad h = \operatorname{sen} y \to dh = \cos y\,dy$, $\quad$ luego

$$dh = \cos(x^2 + 1) \cdot 2\,x\,dx = 2\,x\,\cos(x^2 + 1)\,dx.$$

Ejemplo 2. Halla dy en el punto $(1, 2)$ si $y^3 - y = 6x^2$.

Solución:

$$3y^2y' - y' = 12x \to y'(3\,y^2 - 1) = 12\,x \to y' = \frac{12\,x}{3\,y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{12\,x}{3\,y^2 - 1}\,dx \quad \text{luego} \quad dy\big|_{(1,2)} = \frac{12}{12 - 1}\,dx = \frac{12}{11}\,dx.$$

Ejercicio.

Calcula las diferenciales de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$ $\qquad$ Sol.: $dy = \dfrac{1}{\cos^4 x}\,dx$;

b) $y = \dfrac{x \ln x}{1 - x} + \ln(1 - x)$ $\qquad$ Sol.: $dy = \dfrac{\ln x}{(1 - x)^2}\,dx$;

c) $(x + y)^2(2x + y)^3 = 1$ $\qquad$ Sol.: $dy = \dfrac{-10x - 8y}{7x + 5y}\,dx$;

d) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\qquad$ Sol.: $dy = \dfrac{x + y}{x - y}\,dx$.

1.4 Derivadas de orden superior.

Supongamos que $y = f(x)$ es derivable en un intervalo $[a, b]$. Los valores de $f'(x)$ dependen generalmente de x, es decir, la derivada $f'(x)$ también es función de x. Derivando esta última función obtendremos la llamada segunda derivada de la función $f(x)$, que se designa por y'' o por $f''(x)$

$$y'' \equiv (y')' \equiv f''(x).$$

La derivada de la derivada segunda se denomina de tercer orden y se designa por y''' o $f'''(x)$.

En general, la derivada (de primer orden) de la derivada $(n-1)$ se denomina **derivada de n-esimo orden de la función f(x)** y se designa por $y^{(n)}$ o $f^{(n)}(x)$.
(El orden de la derivada se designa entre paréntesis para no confundirlo con un exponente de potencia).

Ejemplo 1. Sea la función $y = e^{kx}$, $k = cte.$ Calcula la expresión general de su derivada de orden n.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= k\, e^{kx}, \\ y'' &= k^2\, e^{kx}, \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= k^{n-1}\, e^{kx}, \\ y^{(n)} &= k^{(n-1)}\, k\, e^{kx} = k^n\, e^{kx}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Sea $y = \operatorname{sen} x$. Halla $y^{(n)}$.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ y'' &= -\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \\ y''' &= -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \\ y^{iv} &= \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Se puede demostrar que

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x).$$

$$(cf(x))^{(n)} = cf^{(n)}(x) \qquad c = cte.$$

Fórmula de Leibniz para el cálculo de la derivada de orden n del producto de dos funciones

Hallemos primero varias derivadas consecutivas y establezcamos después la ley general. Sea

$$\begin{aligned} y &= f\cdot g \\ y' &= f'g+fg' \\ y'' &= f''g+f'g'+f'g'+fg''=f''g+2f'g'+fg'' \\ y''' &= f'''g+f''g'+2f''g'+2f'g''+f'g''+fg'''=f'''g+3f''g'+3f'g''+fg''' \\ y^{(4)} &= f^{(4)}g+4f'''g'+6f''g''+4f'g'''+fg^{(4)} \end{aligned}$$

Aplicando el método de inducción matemática, se puede demostrar que para calcular $(f\cdot g)^{(n)}$, se desarrolla la expresión $(f+g)^{(n)}$ por la fórmula del binomio de Newton, y en la serie obtenida, se sustituyen los exponentes de f y g por los índices correspondintes de las derivadas; además los exponentes cero, f^0, g^0, que entran en los términos extremos del desarrollo, se sustituyen por las propias funciones, esto es, por las derivadas de orden cero. Luego, si $y=f\cdot g$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (f\cdot g)^{(n)} = \\ &= \binom{n}{0} f^{(n)}\, g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\, g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}\, g'' + \ldots + \\ &\quad + \binom{n}{n-1} f'\, g^{(n-1)} + \binom{n}{n} f\, g^{(n)} = \\ &= f^{(n)}\, g + n\, f^{(n-1)}\, g' + \tfrac{n(n-1)}{2!} f^{(n-2)}\, g'' + \ldots + f\, g^{(n)} \end{aligned}$$

Ejemplo 1. Sea $y=e^{a\,x}\,x^2$, halla $y^{(n)}$.

Solución:
Sea $f=e^{a\,x}$ y $g=x^2$

$$\begin{array}{ll} f=e^{ax} & g=x^2 \\ f'=ae^{ax} & g'=2x \\ f''=a^2e^{ax} & g''=2 \\ f'''=a^3e^{ax} & g'''=g^{(iv)}=\ldots=g^{(n)}=0 \\ \vdots & \\ f^{(n)}=a^ne^{ax} & \end{array}$$

luego

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= a^n\, e^{a\,x}\, x^2 + n\, a^{n-1}\, e^{a\,x}\, 2\,x + \tfrac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\, a^{(n-2)}\, e^{a\,x}\cdot 2 = \\ &= a^n\, x^2\, e^{a\,x} + 2\, a^{(n-1)}\, n\, x\, e^{a\,x} + a^{(n-2)}\, n\,(n-1)\, e^{a\,x}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Sea $y=x^{n-1}\ln x$, halla $y^{(n)}$.

Solución:
Sea $f = x^{n-1}$ y $g = \ln x$

$f' = (n-1)\, x^{n-2}$

$f'' = (n-1)\,(n-2)\, x^{n-3}$

$f''' = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\, x^{n-4}$

$f^{iv} = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\, x^{n-5}$

$\vdots$

$f^{(n-4)} = (n-1)\,(n-2)\ldots(n-(n-4))\; x^{n-[(n-4)+1]} = (n-1)\,(n-2)\ldots\cdot 4\, x^3$

$f^{(n-3)} = (n-1)\,(n-2)\ldots(n-(n-3))\, x^2 = (n-1)\,(n-2)\ldots\cdot 4\cdot 3\, x^3$

$f^{(n-2)} = (n-1)\,(n-2)\ldots(n-(n-2))\, x = (n-1)(n-2)\ldots 2\, x$

$f^{(n-1)} = (n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots(n-(n-1))\, x^{n-[(n-1)+1]} =$

$= (n-1)\,(n-2)\ldots\cdot 1\cdot x^0 = (n-1)!$

$f^{(n)} = 0$

$$g' = \frac{1}{x}, \qquad g'' = -\frac{1}{x^2}, \qquad g''' = \frac{2}{x^3}, \qquad g^{(4)} = -\frac{2\cdot 3}{x^4}, \qquad g^{(5)} = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}, \ldots$$

$$g^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

luego, recordando que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \dfrac{a!}{(a-b)!b!}$,

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} f^{(n)}\, g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)}\, g' + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} f^{(n-2)}\, g'' + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} f^{(n-3)}\, g''' + \\
&\quad + \begin{pmatrix} n \\ 4 \end{pmatrix} f^{(n-4)}\, g^{(4)} + \begin{pmatrix} n \\ 5 \end{pmatrix} f^{(n-5)}\, g^{(5)} + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} f\, g^{(n)} = \\
&= 0 + \frac{n!}{(n-1)!1}\,(n-1)!\,\frac{1}{x} - \frac{n!}{(n-2)!2!}\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots 2\cdot x\cdot \frac{1}{x^2} + \\
&\quad + \frac{n!}{(n-3)!3!}\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots 3\cdot x^2\cdot \frac{2!}{x^3} - \\
&\quad - \tfrac{n!}{(n-4)!4!}\,(n-1)\,(n-2)\ldots 4\cdot x^3\cdot \frac{3!}{x^4} + \\
&\quad + \frac{n!}{(n-5)!5!}\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots 2\cdot 5x^4\cdot \frac{4!}{x^5} + \ldots + \\
&\quad + \frac{n!}{n!}x^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} = \\
&= \frac{n!}{x} - \frac{n!(n-1)}{2!x} + \frac{n!\,(n-1)\,(n-2)}{3!x} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{n!\,(n-1)!}{n!x}.
\end{aligned}$$

En algunos casos el método de Leibniz no es el más apropiado para el cálculo de la derivada n-ésima.

Ejemplo.

$$y = e^{x\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\begin{aligned}
y' &= e^{x\cos\alpha}\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha) + e^{x\cos\alpha}\cos(x\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha = \\
&= e^{x\cos\alpha}\left[\cos\alpha\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha) + \cos(x\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}\alpha\right] = e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha+\alpha) \\
y'' &= e^{x\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha+2\alpha) \\
\vdots &\quad \vdots \\
y^{(n)} &= e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha + n\alpha.
\end{aligned}$$

Comprobadlo vosotros. Si hubiéseis hecho por Leibniz saldría más complicado.

Ejercicios

1) Halla la derivada n-esima de las siguientes funciones:

- $y = \ln(1+x)$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$;
- $y = \dfrac{1}{1+x}$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^n}$;
- $y = \ln(ax+b)$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$;
- $y = \operatorname{sen}^2 x$ — Sol.: $y^{(n)} = 2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;
- $y = \sqrt{x}$ — Sol.: $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n x^{n-\frac{1}{2}}}$;
- $y = \cos 2x$ — Sol.: $y^{(n)} = 2^n\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$;
- $y = \dfrac{1+x}{1-x}$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

2) Demuestra que la función $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^x$ satisface la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

3) Halla $f^{(n)}(0)$ si $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$ — Sol.: $y^{(n)}(0) = (n-1)!$.

4) Halla $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = x^3\ln x$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$ $n\geq 4$.

5) Halla $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$ — Sol.: $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}\cdot$ $\cdot[x-(2n-1)]$.

1.5 Diferenciales de diversos ordenes.

Supongamos la función $y = f(x)$ donde x es la variable independiente. La diferencial de esta función sabemos que es $dy = f'(x)\,dx$; es una función de x, pero de x depende solamente el primer factor $f'(x)$, puesto que el segundo, dx, es un incremento de la variable independiente x que no depende del valor de esta.

La diferencial de la diferencial de una función se denomina diferencial segunda o de segundo orden y se designa por d^2 y $d(dy) = d^2y$.

Hallemos su expresión. En virtud de la definición general de la diferencial tenemos

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)\,dx]'\,dx = [f''(x)\,dx]\,dx = f''(x)\,(dx)^2.$$

(Os recuerdo que dx es independiente de x y entonces al derivar, sale fuera del signo de derivación).
Luego

$$d^2y = f''(x)\,(dx)^2.$$

En la potencia de la diferencial se suele omitir el paréntesis. Así, **en lugar de $(dx)^2$ se escribe dx^2 sobreentendiendo que se trata del cuadrado de la expresión dx.**

De igual forma, $(dx)^3$ se escribirá dx^3. En general $(dx)^n \equiv dx^n$.

$$d^3y = d(d^2y) = \left[f''(x)\,dx^2\right]\,dx = f'''(x)\,dx^3.$$

En general, se llama **diferencial n-ésima** o diferencial de n-ésimo orden a la diferencial primera de la diferencial de orden $n-1$.

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{1.7}$$

Sirviéndose de las diferenciales de diversos órdenes, la derivada de un orden cualquiera puede ser expresada como cociente de las diferenciales del orden correspondiente

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \ldots \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}(x)}{dx^n}. \tag{1.8}$$

Nota. Las igualdades (1.7) y (1.8) -para $n > 1$- son válidas sólo en el caso de que x sea una variable independiente. Sin embargo, la igualdad (1.8) la escribiremos también en el caso en que x no sea variable independiente, pero entonces las expresiones $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{(n)}(x)}{dx^n}$ se deben considerar como representación simbólica de las derivadas correspondientes.

Derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas

Veamos con ejemplos el método para obtener las derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas.

Ejemplo 1. Sea $x^2+y^2=a^2$. Calcula y''.

Solución:

$$2x+2yy'=0 \quad \Rightarrow \quad y'=-\frac{x}{y}$$

$$y''=\frac{(-1)y-y'(-x)}{y^2}=\frac{-y+xy'}{y^2}=\frac{-y+x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=\frac{-y-\frac{x^2}{y^2}}{y^2}=\frac{-(y^2+x^2)}{y^3}=-\frac{a^2}{y^3}.$$

Ejemplo 2. Dada la ecuación $y=x+\ln y$ halla:

$$\text{a)}\ \frac{d^2y}{dx^2} \qquad\qquad \text{b)}\ \frac{d^2x}{dy^2}.$$

Solución:

a) $\dfrac{dy}{dx}=y'$

$$y'=1+\frac{y'}{y} \quad\longrightarrow\quad y'y=y+y' \quad\longrightarrow\quad y'(y-1)=y \quad\longrightarrow\quad y'=\frac{y}{y-1}$$

$$y''=\frac{y'(y-1)-y'y}{(y-1)^2}=\frac{\frac{y}{y-1}(y-1)-\frac{y}{y-1}y}{(y-1)^2}=\frac{y^2-y-y^2}{(y-1)^2}=-\frac{y}{(y-1)^3}$$

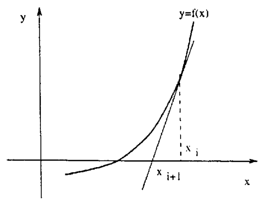
$$\text{luego} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-y}{(y-1)^3};$$

b) $x=y-\ln y$

$$x'=1-\frac{1}{y}, \qquad x''=\frac{1}{y^2} \qquad \text{luego} \qquad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{y^2}.$$

Método de Newton-Raphson (o método de la tangente) **para la localización de raíces de un polinomio**

Si el valor inical de la raíz es x_i, se traza una tangente desde el punto $(x_i, f(x_i))$. El punto donde esta tangente corta al eje OX, representa una aproximación mejorada de la raíz.



Sabemos que

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i)-0}{x_i-x_{i+1}} \quad \Rightarrow$$

$$f'(x_i)\,(x_i-x_{i+1})=f(x_i) \quad \Rightarrow$$

$$f'(x_i)\,x_i-f'(x_i)\,x_{i+1}=f(x_i) \quad \Rightarrow$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \tag{1.9}$$

que es la fórmula de Newton-Raphson. Se comprueba que la raíz r es igual al límite de la sucesión (x_{i+1}).

Aunque este método en general es muy eficiente, hay simulaciones en que se porta deficientemente, por ejemplo, cuando las raíces son múltiples, pues la derivada se hace cero antes de llegar a dar la solución.

Ejemplo 1. Dada la ecuación $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ en el intervalo $[1, 2]$ calcula una raíz aplicando el método Newton-Raphson.

Solución:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 \qquad f'(x) = 3x^2 + 4x + 10 \quad \Rightarrow$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 + 2x_i^2 + 10x_i - 20}{3x_i^2 + 4x_i + 10}.$$

Tomando como valor inicial $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{16}{30} = 1'4646, \qquad f(1'4646) = 2'07775$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1'3715, \qquad f(1'3715) = 0'05683$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1'36881, \qquad f(1'36881) = 0'0000399$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1'3688081, \qquad f(1'3688081) \approx 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ la raíz es } r = 1'3688081.$$

Ejemplo 2. Calcula las tres raíces de la ecuación $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$.

Solución:
Tomamos como valor inicial $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1'1052631$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1'003081064$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1'0000023 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = 1 \text{ es una raíz.}$$

Entonces por Ruffini tenemos la descomposición

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - 1)\,(x^2 - 4x + 3).$$

Para encontrar las otras dos raíces se resuelve el polinomio de segundo grado

$$f(x) = x^2 - 4x + 3.$$

Ejercicio

1) La función y está dada implícitamente por la ecuación $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$. Halla $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ en el punto $(1,1)$. Sol.: $=\frac{1}{3}$.

2) Usa el método de Newton-Raphson para calcular la raíz de $y = e^{-x} - x$ empleando el valor inicial $x_0 = 0$. Sol.: $x_0 \simeq 0'5629$

Capítulo 2

Teoremas del valor medio. Aplicaciones.

2.1 Teoremas clásicos sobre derivación.

Teorema 2.1 ***Teorema de Rolle.***
Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ donde la derivada de la función se anula, es decir $f'(\alpha) = 0$.

Demostración:

Por ser la función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, esta, por el teorema de Weierstrass (ver teorema 0.11) alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m en dicho intervalo. Si estos dos valores se alcanzan en los extremos se tendrá que: $f(a) = f(b) = M = m$ y por lo tanto la función es constante en dicho intervalo. Al ser la derivada de una función constante nula, cualquier punto del intervalo (a, b) satisface la condición $f'(\alpha) = 0$ con lo que el teorema queda demostrado.

Si la función no es constante, el máximo o el mínimo se alcanza en un punto $\alpha \in (a, b)$, donde vamos a ver que la derivada en dicho punto se tiene que anular.

En efecto, supongamos que la función en el punto α presenta un máximo. Se tiene

$$f'(\alpha^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \leq 0$$

$$f'(\alpha^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} \geq 0.$$

Como estamos suponiendo que $f(x)$ es derivable en α se ha de cumplir

$$f'(\alpha^+) = f'(\alpha^-) = 0.$$

Si la función presenta un mínimo en el punto α, el razonamiento es análogo -vedlo vosotros.

c.q.d.

Ejemplo 1. Encuentra un punto en el intervalo $[0,1]$ donde la tangente a la curva $y = 1 + x - x^2$ sea paralela al eje de abscisas.

Solución:
Por ser una función polinómica es continua y derivable en toda la recta real, en particular lo será en $[0,1]$. Además $f(0) = 1 = f(1)$ luego se puede aplicar el teorema de Rolle y este punto satisface la ecuación

$$f'(\alpha) = 1 - 2\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. Encuentra un punto en el intervalo $[-1,1]$ donde la tangente a la curva $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ sea paralela al eje de abscisas.

Solución:
La función $f(x)$ es continua en $[-1,1]$, y además

$$f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - 1 = 0, \qquad f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$¿\exists\ \alpha \in (-1,1) \quad \text{tal que } f'(\alpha) = 0?$$

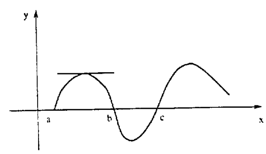
Dado que $f'(x) = -\frac{3}{3\sqrt[3]{x}} \quad \Rightarrow \quad \nexists\ \alpha \in (-1,1)$ tal que $f'(\alpha) = 0$, porque la función $f(x)$ no es derivable en $(-1,1)$ ya que $\nexists\ f'(0)$.

Interpretación geométrica del teorema de Rolle

El teorema de Rolle se utiliza cuando nos dan una función y nos piden calcular el número de raíces posibles. Se aplica junto con el de Bolzano.

- Bolzano nos dice que hay raíces.
- Rolle nos dice cuántas hay.

En la gráfica se observa que una función que cumpla las condiciones del teorema de Rolle, tiene por cada punto de tangente horizontal, la posibilidad de que existan como máximo 2 valores de $x \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases}$ tales que $f(a) = f(b)$.



Teorema 2.2 ***Teorema del valor medio de Cauchy.***
Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el abierto (a,b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\ g'(\alpha) = [g(b) - g(a)]\ f'(\alpha) \tag{2.1}$$

Demostración:

Definamos la función $F(x)$

$$F(x) = [f(b) - f(a)]\ g(x) - [g(b) - g(a)]\ f(x)$$

- $F(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por ser diferencia de un producto de funciones continuas y derivables en dichos intervalos.

  Además
  $$F(a) = f(b)\, g(a) - g(b)\, f(a) = F(b)$$
  luego es aplicable el teorema de Rolle (teorema 2.1) a la función $F(x)$ en el intervalo $[a, b]$, por tanto, existe un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que $F'(\alpha) = 0$.

  Como
  $$F'(x) = [f(b) - f(a)]\ g'(x) - [g(b) - g(a)]\ f'(x)$$
  resulta que
  $$F'(\alpha) = 0 = [f(b) - f(a)]\ g'(\alpha) - [g(b) - g(a)]\ f'(\alpha)$$
  luego
  $$[f(b) - f(a)]\ g'(\alpha) = [g(b) - g(a)]\ f'(\alpha).$$

c.q.d.

— Si $g(b) \neq g(a)$ y además la función derivada $g'(x)$ no se anula en el intervalo (a, b), la igualdad anterior se expresa de la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

Como el primer miembro es un valor constante k, se tiene

$$k = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \quad \text{o sea,} \quad f'(\alpha) = k\, g'(\alpha).$$

c.q.d.

Ejemplo. Aplica el teorema del valor medio de Cauchy a las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución:

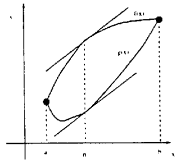
Las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son funciones continuas y derivables en toda la recta real; en particular lo son en los intervalos $[0, \frac{\pi}{2}]$ y $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Aplicando el teorema del valor medio

$$\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right] g'(\alpha) = \left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right] f'(\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Interpretación geométrica del teorema de Cauchy

Este teorema nos dice que hay dos puntos $(\alpha, f(\alpha))$ y $(\alpha, g(\alpha))$ de las curvas $f(x)$ y $g(x)$ tales que la pendiente de la tangente a la curva $f(x)$ en el primer punto es k veces la pendiente de la tangente a la curva $g(x)$ en el segundo punto.
En particular, si $f(b) = g(b)$ y $f(a) = g(a)$, entonces $k = 1$ y ambas pendientes son iguales como ocurre en la figura.



Teorema 2.3 ***Teorema de los incrementos finitos o de Lagrange.***
Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b), entonces existe al menos un punto $\alpha \in (a, b)$ tal que

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2.2}$$

Demostración:

En efecto, por ser la función $g(x) = x$ una función polinómica, es continua y derivable en toda la recta real y en particular en los intervalos considerados. Aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy 2.2 a las funciones $f(x)$ y $g(x) = x$ y por ser $g'(x) = 1$ y $g(a) \neq g(b)$ se tiene

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\alpha) \quad \text{donde} \quad \alpha \in (a, b).$$

c.q.d.

Ejemplo 1. Halla un punto de la curva $y = x^n$ donde la tangente sea paralela a la cuerda de extremos $(0, 0)$ y (a, a).

Solución:

$$f(x) = x^n, \qquad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f'(\alpha) = n\,\alpha^{n-1} \quad \longrightarrow \quad \text{pendiente de la cuerda}$$

$$\frac{a-0}{a-0} = 1 = f'(\alpha)$$

$$1 = n \cdot \alpha^{n-1} \quad \longrightarrow \quad \alpha^{n-1} = \frac{1}{n} \quad \longrightarrow \quad \alpha = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \qquad \alpha \in (0, a).$$

Ejemplo 2. ¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1)$?

Solución:

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(\alpha) = \frac{1-0}{e-1} \quad \longrightarrow \quad \text{pendiente de la cuerda}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{luego} f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = e-1.$$

Ejemplo 3. Comprueba que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^2-5x-6}$ se halla la de su derivada.

Solución:

$$y = \sqrt[3]{x^2-5x-6} = 0 \longrightarrow x^2-5x-6 = 0 \longrightarrow x = \begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$$

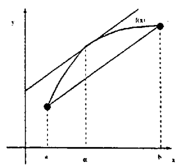
$$f(x) \text{ es continua en } [-1,6] \quad \text{y} \quad f(x) \text{ es derivable en } (-1,6)$$

$$f(-1) = f(6) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x-6)^2}} \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) = \frac{1}{3}\frac{2\alpha-5}{\sqrt[3]{(\alpha^2-5\alpha-6)^2}} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2} \in (-1,6).$$

Interpretación geométrica del teorema de Lagrange



Este teorema nos dice que existe un punto $(\alpha, f(\alpha))$ de la curva, en donde la tangente a la curva en dicho punto es paralela a la ~~curva~~ recta cuerda que tiene por extremos los puntos de coordenadas $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejercicios

1) Encuentra un punto en el intervalo $[0,\pi]$ donde la tangente a la curva $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ sea paralela al eje de abscisas.

2) Dada $f(x) = \operatorname{tg} x$ ¿se puede aplicar el teorema de Rolle 2.1 a esta función en $[0,\pi]$?

3) Dada $f(x) = |x|$ ¿se puede aplicar el teorema de Rolle 2.1 a esta función en $[-1,1]$?

4) Aplicando el teorema de los incrementos finitos demuestra que

$$\ln(1+x) < x \quad \text{cuando} \quad x > 0.$$

5) Demuestra que $e^x \geq 1 + x \quad$ en $[0,x]$.

6) ¿Es aplicable el teorema de Rolle a la función siguiente?

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & x \in [-1,0) \cup (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

7) Aplicando el teorema de Lagrange en el intervalo $[x, x+1]$ con $x > 0$. Halla

$$\lim_{x \to 0} \left[(1+x)^{1+\frac{1}{1+x}} - x^{1+\frac{1}{x}}\right] \quad \text{donde} \quad f(x) = x^{1+\frac{1}{x}}.$$

2.2 Regla de L'Hôpital.

Teorema 2.4 *Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b), además $g'(x) \neq 0$ en (a,b) y $f(a) = g(a) = 0$, entonces si existe*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

existe también

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y además

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{2.3}$$

Demostración:

Tomemos en el intervalo $[a,b]$ un punto $x \neq a$. Aplicando la fórmula de Cauchy (2.1) tenemos

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \qquad \alpha \in (a,x).$$

Pero por hipótesis $f(a) = g(a) = 0$. Esto significa que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}.$$

Si $x \to a$ también $\alpha \to a$ ya que $\alpha \in (a,x)$.

Al mismo tiempo, si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, entonces existirá también $\lim_{\alpha\to a} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$ y por la unicidad del límite será también A.

Está claro que

$$\lim_{\alpha\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\alpha\to a} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

luego

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

c.q.d.

Nota 1. El teorema es válido también cuando las funciones $f(x)$ o $g(x)$ no estén definidas en $x = a$ pero $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que estas sean continuas en dicho punto. Para esto es suficiente imponer

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

ya que, evidentemente, el $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no depende de que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ estén definidas o no en el punto $x = a$.

Nota 2. Si $f'(a) = g'(a) = 0$ y las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ satisfacen las condiciones impuestas por las hipótesis del teorema, entonces, aplicando la regla de L'Hôpital al cociente $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ obtendremos la fórmula

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots$$

Nota 3. La regla de L'Hôpital es también válida cuando $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, ya que en este caso, bastará hacer el cambio $x = \dfrac{1}{z}$ para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})}$$

Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ cumplen las condiciones exigidas en la regla de L'Hôpital, al tender z hacia cero se tiene

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{g(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0} \frac{-\frac{1}{z^2} f'(\frac{1}{z})}{-\frac{1}{z^2} g'(\frac{1}{z})} = \lim_{z\to 0} \frac{f'(\frac{1}{z})}{g'(\frac{1}{z})} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esta regla sigue siendo válida cuando las funciones f(x) y g(x) admitan límites infinitos cuando x tiende hacia x_0.

Límites indeterminados

Todos los casos de límites indeterminados se ajustan a una de estas siete formas:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty$$

$\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$ se han estudiado por L'Hôpital. Los restantes se pueden reducir a estos dos casos.

a) Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ entonces

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}}$$

y la indeterminación pasa de ser de la forma $\infty - \infty$ a $\dfrac{0}{0}$

b) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Ejemplo. Calcula $\lim_{x\to 0} x\ln x$.

Solución:

Si hacemos

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0(-\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{-1}{\frac{x}{\ln^2 x}}} = \lim_{x\to 0} \left(-x\ln^2 x\right)$$

no quitamos la indeterminación. Pero si hacemos

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

c) En los tres restantes casos, hemos de tener en cuenta la relación $A^B = e^{B\ln A}$ con lo que las tres indeterminaciones se reducen a una de las ya estudiadas.

Ejemplo 1. Calcula $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x \ln x} = e^{0(-\infty)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x}} = e^{\frac{-0}{1}} = e^0 = 1$$

Ejemplo 2. Calcula $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \infty^0 = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x}\ln(\operatorname{cotg} x)} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\operatorname{cotg} x)}{\ln x}} = e^{\frac{\infty}{-\infty}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{cotg} x}}{\frac{1}{x}}} =$$

$$e^{\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{cotg} x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\operatorname{sen}^2 x \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}} = e^{\frac{0}{0}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{-1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}} = e^{\frac{-1}{1-0}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Ejercicio.

Calcula los siguientes límites:

1) $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{1+x}{1}\right)$ Sol.: 1

2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$ Sol.: 1

3) $\lim_{x\to 0} (e^{\operatorname{sen} x}-1)\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ Sol.: -1

4) $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$ Sol.: $2/\pi$

5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$ Sol.: -1

6) $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$ Sol.: $1/e$

7) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ Sol.: $1/e^6$

8) $\lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ Sol.: $1/e$

9) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$ Sol.: 1

10) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

11) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen} x)-\cos x}{x^4}$

2.3 Fórmula de Taylor. Resto de Lagrange.

Fórmula de Taylor

Supongamos que la función $y=f(x)$ es derivable hasta el orden $n+1$ incluisve, en cierto intervalo que contiene al punto $x=a$. Busquemos un polinomio $y=P_n(x)$ de grado no superior a n, cuyo valor en el punto $x=a$ sea igual al de la función $f(x)$ en el mismo punto, y los valores de sus derivadas hasta el n-ésimo orden en el punto $x=a$ iguales a los valores de las derivadas correspondientes de la función $f(x)$ en este punto

$$P_n(a)=f(a),\quad P_n'(a)=f'(a),\quad P_n''(a)=f''(a),\quad \dots,\quad P_n^{(n}(a)=f^{(n}(a). \tag{2.4}$$

Es de suponer que este polinomio en cierto aspecto será "próximo" la función $f(x)$.

Busquemos este polinomio en forma de potencias de $(x-a)$ con coeficientes indeterminados.

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n. \tag{2.5}$$

Los coeficientes indeterminados $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ los calcularemos de modo que se cumplan las condiciones (2.4).

Hallemos primero las derivadas de $P_n(x)$

$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= C_1 + 2\,C_2\,(x-a) + 3\,C_3\,(x-a)^2 + \ldots + n\,C_n\,(x-a)^{n-1}\\
P_n''(x) &= 2\,C_2 + 3\cdot 2\,C_3(x-a) + \ldots + n\,(n-1)\,C_n\,(x-a)^{n-2}\\
P_n'''(x) &= 3\cdot 2\,C_3\,(x-a) + 4\cdot 3\cdot 2\,C_4(x-a) + \ldots + n\,(n-1)\,(n-2)\,C_n\,(x-a)^{n-3}\\
&\vdots\\
P_n^{(n}(x) &= n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 4\cdot 3\cdot 2\cdot C_n
\end{aligned}$$

Particularizando estas derivadas en $x=a$ tenemos

$$\left.\begin{array}{l}
P_n(a) = C_0\\
P_n'(a) = C_1\\
P_n''(a) = 2\,C_2\\
P_n'''(a) = 3\cdot 2\,C_3\\
\quad\vdots\\
P_n^{(n}(a) = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\,C_n
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
C_0 = f(a)\\
C_1 = f'(a)\\
2\,C_2 = f''(a)\\
3\cdot 2\,C_3 = f'''(a)\\
\quad\vdots\\
n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 2\,C_n = f^{(n)}(a).
\end{array}$$

Luego

$$C_0 = f(a), \quad C_1 = f'(a), \quad C_2 = \frac{f''(a)}{2}, \quad C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}, \quad \ldots, \quad C_n = \frac{f^{(n}(a)}{n!}.$$

Introduciendo el valor de los coeficientes en el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\,(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n \tag{2.6}$$

que se llama **polinomio de Taylor de grado n para la función f(x) en el punto a.**

Si designamos por $R_n(x)$ la diferencia entre los valores de la función dada $f(x)$ y del polinomio calculado $P_n(x)$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

tenemos

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

es decir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \tag{2.7}$$

El término $\mathbf{R_n(x)}$ se conoce con el nombre de **término complementario**.

Para aquellos valores de x en los que el término complementario $R_n(x)$ es pequeño, el polinomio $P_n(x)$ da un valor aproximado de la función $f(x)$.

Así pues, la fórmula (2.7) permite sustituir la función $y = f(x)$ por el polinomio $y = P_n(x)$ con un grado de precisión igual al valor del término complementario $R_n(x)$.

Escribamos el término complementario de la forma

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \tag{2.8}$$

donde $Q(x)$ es la función que debemos hallar.

Escribamos de nuevo la fórmula (2.7) del siguiente modo

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \tag{2.9}$$

Considerando fijos los valores de x y a, la función $Q(x)$ tendrá un valor determinado, que designamos por Q.

Consideremos la función

$$F(t) = f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q$$

Hallemos la derivada de esta función respecto a t

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + 2\frac{f''(t)}{2!}(x-t)-$$

$$-\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 + 3\frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n +$$

$$+\frac{nf^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^{n-1} + \frac{(n+1))(x-t)^n}{(n+1)!}Q.$$

Simplificando

$$F'(t) = \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q - \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n = \frac{(x-t)^n}{n!}Q - \frac{f^{(n+1}(t)}{n!}(x-t)^n \tag{2.10}$$

$F(t)$ es derivable en todos los puntos t próximos al punto de abscisa a, además $F(x) = 0$ y $F(a) = 0$.

Luego la función $F(t)$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo (a, x), por tanto existe un punto $\alpha \in (a, x)$ donde $F'(\alpha) = 0$.

Sustituyendo α en (2.10) tenemos $F'(\alpha) = \dfrac{(x-\alpha)^n}{n!}Q - \dfrac{f^{(n+1}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n = 0$ y entonces

$$Q = f^{(n+1)}(\alpha). \tag{2.11}$$

Sustituyendo (2.11) en (2.8)

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\alpha), \qquad \alpha \in (a, x). \tag{2.12}$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **fórmula de Lagrange**.

Como α está comprendido entre x y a puede ser expresado de la forma:

$$\alpha = a + \theta(x-a)$$

donde θ es un número comprendido entre 0 y 1, es decir, $0 < \theta < 1$. En este caso, la fórmula del término complementario se escribe:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta(x-a)\right]. \tag{2.13}$$

Sustituyendo (2.13) en (2.9) obtenemos la **fórmula de Taylor de la función f(x)**.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \\ &+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta\,(x-a)\right]. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Si $a = 0$ la fórmula (2.14) se conoce con el nombre de **fórmula de Maclaurin**:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta\, x) \tag{2.15}$$

donde $0 < \theta < 1$.

Ejercicio.

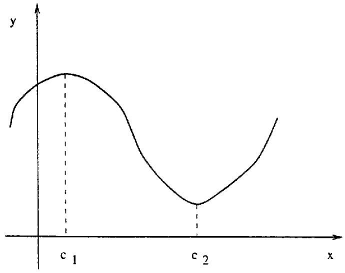
Halla el desarrollo de Taylor de la función $f(x) = e^{x/2}$ en el punto $x = 3$.

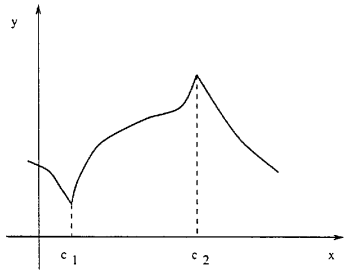
2.4 Máximos y mínimos relativos y absolutos.

Se dice que una función f posee un **máximo local o relativo** en el punto c si y sólo si $f(c) \geq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

Se dice que una función f posee un **mínimo local o relativo** en el punto c si y sólo si $f(c) \leq f(x)$ para todo x suficientemente próximo a c.

Se tiene que los máximos y mínimos relativos tienen lugar solamente en aquellos puntos en los que la tangente es horizontal ($f'(c) = 0$) o donde $f'(c)$ no existe.





Teorema 2.5 ***Condición necesaria.***
Si la función $f(x)$ derivable en (a,b), tiene un máximo (o un mínimo) local en el punto $c \in (a,b)$, su derivada se anula en dicho punto, es decir, $f'(c) = 0$.

<u>Demostración</u>:

Supongamos que en el punto $x = c$ la función tiene un máximo, entonces para los incrementos de x, $\triangle x \neq 0$, suficientemente pequeños en valor absoluto se verificará

$$f(c+\triangle x) \leq f(c) \quad \leftrightarrow \quad f(c+\triangle x) - f(c) \leq 0$$

luego

$$\frac{f(c+\triangle x) - f(c)}{\triangle x} \leq 0 \quad \text{cuando } \triangle x > 0$$

y

$$\frac{f(c+\triangle x) - f(c)}{\triangle x} \geq 0 \quad \text{cuando } \triangle x < 0$$

pero por ser la función derivable en c

$$f'(c) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(c+\triangle x) - f(c)}{\triangle x}$$

entonces

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \triangle x \to 0 \text{ e } \triangle x > 0 \Rightarrow f'(c) \leq 0 \\ \text{si } \triangle x \to 0 \text{ e } \triangle x < 0 \Rightarrow f'(c) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0.$$

c.q.d.

Del mismo modo se demuestra el teorema cuando se trata de un mínimo local.

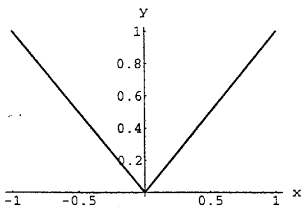
Significado geométrico. las rectas tangentes a los máximos y mínimos locales de una función son paralelas al eje OX.

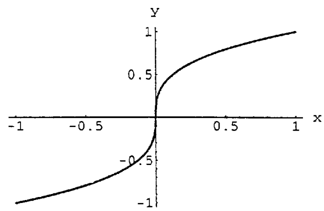
Conclusión. Si la función es derivable en todos los puntos del intervalo (a, b), puede tener máximos o mínimos locales donde la derivada primera es cero, pero no a la inversa.

Hemos analizado el caso en que la función tiene derivada en todos los puntos del intervalo (a, b), pero ¿qué ocurre en los puntos donde no existe la derivada?

Vamos a ver con ejemplos que en los puntos donde la función no tiene derivada puede haber máximos o mínimos locales, pero puede ocurrir también que en estos puntos no haya ni unos ni otros.

Ejemplo 1. La función $y = |x|$ no tiene derivada en el punto $x = 0$, pero en él la función admite un mínimo relativo.





Ejemplo 2. ¿Existe la derivada de la función $y = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$?

Solución:
No, pues:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad \text{para } x = 0 \quad \nexists\, y'.$$

En $x = 0$ la función no tiene ni máximo ni mínimo local puesto que

$$f(0) = 0$$

$$f(x) < 0 \quad \text{para } x < 0 \quad \text{y} \quad f(x) > 0 \quad \text{para } x > 0.$$

Resumen.

La función puede tener máximos o mínimos locales solamente en los puntos donde la derivada existe y es igual a cero o bien en aquellos donde no existe la derivada.

Si la derivada no existe en un cierto punto, pero sí en los cercanos a éste, entonces la función derivada presenta una discontinuidad en dicho punto.

Los valores de la variable independiente para los que la derivada se anula o presenta una discontinuidad se denominan **puntos críticos**.

De lo visto anteriormente se deduce que todo valor o punto crítico no es necesariamente un máximo o un mínimo local. Sin embargo, si en un puunto la función admite un máximo o mínimo local, este punto es crítico. Por ello, para hallar los máximos y mínimos locales se procede de la siguiente forma: se hallan todos los puntos críticos y después se estudian cada uno de ellos, aclarando si hay o no en estos un máximo o un mínimo local de la función.

Condiciones suficientes para la existencia de máximos y mínimos locales

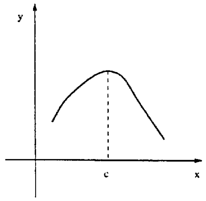
Teorema 2.6 *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en un cierto intervalo al cual pertenece el punto crítico c, y es derivable en todos los puntos de dicho intervalo a excepción quizá de dicho punto c.*
Si al pasar por este punto de izquierda a derecha, el signo de la derivada cambia de "mas$^{\underline{a}}$ "menos", entonces la función admite un máximo local en $x = c$.
Si al pasar por el punto c de izquierda a derecha el signo de la derivada cambia de "menos$^{\underline{a}}$ "mas", la función admite un mínimo local en $x = c$.
Es decir

a) $Si \begin{cases} f'(x) > 0 & para\ x < c \\ f'(x) < 0 & para\ x > c \end{cases}$ *la función tiene un máximo local en c.*

b) $Si \begin{cases} f'(x) < 0 & para\ x < c \\ f'(x) > 0 & para\ x > c \end{cases}$ *la función tiene un mínimo local en c.*

Demostración:

Veamos primero el caso en que el signo de la derivada cambia de "mas$^{\underline{a}}$ "menos".
Para todos los puntos de x suficientemente próximos al punto c se tiene



$f'(x) > 0 \quad \text{para } x < c$

$f'(x) < 0 \quad \text{para } x > c$

Aplicando el teorema de los incrementos finitos (teorema de Lagrange 2.3)

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\alpha)$$

donde α es un punto comprendido entre x y c.

Supongamos $x < c \quad \Rightarrow \quad \alpha < c \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) > 0$, además como $x - c < 0$ se sigue que

$$f(x) - f(c) = f'(\alpha)\,(x - c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(c).$$

Supongamos $x > c \quad \Rightarrow \quad \alpha > c \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) < 0$, además como $x - c > 0$ se sigue que

$$f(x) - f(c) = f'(\alpha)\,(x - c) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(c).$$

Luego para todos los valores de x suficientemente cercanos a c, los valores de la función son menores que el valor de ésta en c, por lo tanto la función en c presenta un máximo relativo.

De modo análogo se demuestra la condición suficiente para el mínimo local.

c.q.d.

Nota. Las condiciones a) y b) deben cumplirse en todos los puntos de un entorno suficientemente pequeño del punto crítico c.

Análisis para el estudio de máximos y mínimos por medio de la primera derivada

1) hallar $f'(x)$

2) hallar los puntos críticos

   a) $f'(x) = 0$

   b) Estudiar los puntos donde la función derivada es discontinua.

3) Estudiar el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de los puntos críticos.

4) Sustituir el punto crítico c en la función.

Ejemplo 1. Calcula los máximos y mínimos locales de la función $y = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

Solución:

1) $y' = \sqrt[3]{x^2} + (x-1)\,\dfrac{2}{3}\,x^{\frac{-1}{3}} = \dfrac{3x+2x-2}{3\sqrt[3]{x}} = \dfrac{5x-2}{\sqrt[3]{x}}$

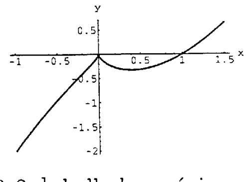
2) a) $f'(x) = 0 \quad \to \quad 5x-2=0 \quad \to \quad x = \dfrac{2}{5}$

   b) $f'(x)$ es discontinua en $x=0$

3) $\left\{\begin{array}{ccc} (-\infty,0) & \left(0,\frac{2}{5}\right) & \left(\frac{2}{5},\infty\right) \\ f'(x)>0 & f'(x)<0 & f'(x)>0 \\ \text{creciente} & \text{decreciente} & \text{creciente} \end{array}\right.$

4) en 0 $\to$ máximo local, $f(0) = 0$

   en $\dfrac{2}{5} \to$ mínimo local, $f\left(\dfrac{2}{5}\right) = -0'32$



Luego en el punto $P_1(0,0)$ la función tiene un máximo local y en el punto $P_2\left(\dfrac{2}{5}, -0'32\right)$ un mínimo local.

Ejemplo 2. Dada la función $y = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$ definida en $[0, 2\pi]$, halla los máximo y mínimos relativos.

Solución:

1) $y' = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x$

2) $2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x = 2\cos x - 2\cdot 2\operatorname{sen} x\cos x = 2\cos x\,(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2\cos x = 0 & \longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}, 3\,\frac{\pi}{2} \\ (1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 & \longrightarrow \quad 2\operatorname{sen} x = 1 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{6}, 5\,\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

3)

$$\begin{array}{ccccc} \left(0, \dfrac{\pi}{6}\right) & \left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right) & \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right) & \left(\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right) & \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ y'+ & y'- & y'+ & y'- & y'- \\ \text{creciente} & \text{decreciente} & \text{creciente} & \text{decreciente} & \text{creciente} \end{array}$$

4) $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$

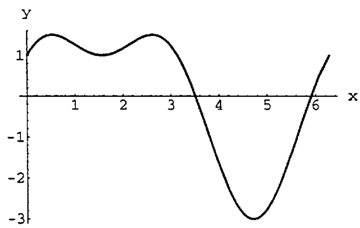
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

$f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$

$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -3$

$f(0) = 1$

$f(2\pi) = 1.$



Máximos y mínimos absolutos

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por el teorema de Weierstrass 0.11 la función alcanza un valor máximo y un valor mínimo (absolutos) en dicho intervalo.
Recordad que $(d, f(d))$ es un máximo absoluto de f si y sólo si $f(d) \geq f(x), \forall\ x \in \operatorname{Dom}(f)$; $(d, f(d))$ es un mínimo absoluto de f si y sólo si $f(d) \leq f(x), \forall\ x \in \operatorname{Dom}(f)$.

La manera más práctica de calcular los valores máximo absoluto y mínimo absoluto es:

1) Calcular los máximos y mínimos relativos.

2) Hallar el valor de la función en los extremos.

3) Comparar estos valores y quedarse con el mayor y menor valor.

Análisis de máximos y mínimos relativos por medio de la segunda derivada

Supongamos que en c, $f'(c) = 0$ y además existe $f''(c)$ y es continua en un cierto entorno que contiene a c.

Teorema 2.7 *Si $f'(c) = 0$, la función tiene un máximo relativo si $f''(c) < 0$ y un mínimo relativo si $f''(c) > 0$.*

Demostración:

1ª parte.

Supongamos que $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$. Como por hipótesis $f''(x)$ es continua en un cierto entorno de c, entonces existirá un intervalo suficientemente pequeño que contenga al punto c tal que en todos sus puntos la segunda derivada $f''(x)$ es negativa.

Puesto que $f''(x)$ es la derivada de la primera derivada, $f''(x) = (f'(x))'$, de la condición $(f'(x))' < 0$ se infiere que $f'(x)$ decrece en el intervalo que contiene al punto $x = c$. Pero $f'(c) = 0$, por consiguiente, en este intervalo tendremos: $f'(x) > 0$ cuando $x < c$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > c$, es decir, el signo de la derivada $f'(x)$ cambia de "masª "menosªl pasar por el punto c, luego en c la función tiene un máximo relativo.

2ª parte.

Si $f''(c) > 0$, entonces $f''(x) > 0$ en todos los puntos del intervalo mencionado que contiene al punto c; pero en este caso, en dicho intervalo $f''(x) = (f'(x))' > 0$ y por tanto $f'(x)$ crece. Como $f'(c) = 0$ al pasar por el punto c, el signo de la derivada $f(x)$ cambia de "menosª ""mas", es decir, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en c.

c.q.d.

Si en el punto crítico c, $f''(c) = 0$, entonces en este punto puede haber un máximo o un mínimo relativo (lo analizaríamos utilizando el primer método) pero puede ocurrir que no exista ni uno ni otro.

Resumen:

$f'(c)$	$f''(c)$	naturaleza del punto crítico
0	$-$	máximo local
0	$+$	mínimo local
0	0	no determinada

Ejemplo. Determina los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

1) $y = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

Solución:

$$y' = -\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{-1}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

Punto crítico $x = 1$

$$y'' = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-1)^{\frac{-4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} \quad \Rightarrow \quad y''(1) \not\exists$$

luego, no se puede hacer el estudio por la segunda derivada, ya que para emplear este método habíamos supuesto que $f'(c) = 0$.

$$\left.\begin{array}{cc} (-\infty, 1) & (1, \infty) \\ y'+ & y'- \\ \text{creciente} & \text{decreciente} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1,2) \quad \text{máximo local.}$$

2) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$

$$y' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

Punto crítico $x = -1$

$$\left.\begin{array}{cc} (-\infty, -1) & (-1, \infty) \\ y' > 0 & y' > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{no existe ni máximo ni mínimo local.}$$

3) $y = 1 - x^4$

$$y' = -4x^3 \quad \to \quad -4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$y'' = -12x^2 \quad \to \quad y''(0) = 0$$

$$\left.\begin{array}{cc} (-\infty, 0) & (0, \infty) \\ y' > 0 & y' > 0 \\ \text{creciente} & \text{decreciente} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (0,1) \text{ máximo local.}$$

4) $y = (x-1)^3$

$$y' = 3(x-1)^2 \to 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$y'' = 6(x-1) \quad \to \quad y''(1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{cc} (-\infty, 1) & (1, \infty) \\ y' > 0 & y' > 0 \\ \text{creciente} & \text{creciente} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{en } x = 1 \text{ ni máximo ni mínimo local.}$$

5) $y = x^4 + 2x^2$

$$y' = -4x^3 + 4x \qquad -4x^3 + 4x = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$$

$$y'' = -12x^2 + 4$$

$$y''(0) = 4 > 0 \qquad (0,0) \quad \text{mínimo relativo,}$$

$$y''(1) = -8 < 0 \qquad (1,1) \quad \text{máximo relativo,}$$

$$y''(-1) = -8 < 0 \qquad (-1,1) \quad \text{máximo relativo.}$$

6) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ $\quad$ Dom $= \quad (0,1) \cup (1, \infty)$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \qquad \text{puntos críticos} \quad \begin{cases} \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = e \\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{-\ln x + 2}{x\,(\ln x)^3} \longrightarrow \quad y''(e) = \frac{-1+2}{e} > 0 \quad \Rightarrow \quad (e, e) \text{ máximo local,}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} (0,1) & (1,e) & (e,\infty) \\ y' < 0 & y' < 0 & y' > 0 \\ \text{decreciente} & \text{decreciente} & \text{creciente} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{sólamente en } (e,e) \text{ existe un máximo local.}$$

Ejercicio.

Calcula los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$ $\qquad$ Sol.: $\begin{array}{ll} x = -\sqrt{2} & \text{mínimo relativo,} \\ x = +\sqrt{2} & \text{máximo relativo.} \end{array}$

b) $y = 2e^x + e^{-x}$ $\qquad$ Sol.: $x = -\dfrac{\ln 2}{2}$ mínimo relativo.

Análisis de máximos y mìnimos relativos mediante la fórmula de Taylor

Si en el punto c, $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, no sabemos lo que ocurre. Para resolver este problema utilizaremos la fórmula de Taylor (2.14) en el punto c:

$$f(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}\,(x-c)^3 + \ldots +$$
$$+\frac{f^n(c)}{n!}\,(x-c)^n + \frac{f^{n+1}(\alpha)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}$$

para valores de $\triangle x \longrightarrow 0$, los términos de la función son infinitésimos cada vez de mayor orden que los podemos despreciar ante el primer término. Entonces

$$f(x) - f(c) = f'(c)\,(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}\,(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}\,(x-c)^3 + \ldots$$

Si en el punto c la función tiene un máximo relativo

$$f(x) < f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(c) < 0.$$

Si tiene un mínimo relativo

$$f(x) > f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(c) > 0.$$

En el máximo y en el mínimo sabemos que $f'(c) = 0$.

- Supongamos que $f''(c) \neq 0$

  Entonces

$$f(x) - f(c) = \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 \quad \begin{cases} \text{si} \quad f''(c) < 0 \rightarrow f(x) - f(c) < 0 \quad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \quad \text{en } c, \quad \exists \text{ un máximo} \\ \\ \text{si} \quad f''(c) > 0 \rightarrow f(x) - f(c) > 0 \quad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \quad \text{en } c, \quad \exists \text{ un mínimo} \end{cases}$$

- Supongamos que $\mathbf{f''(c) = 0}$ y $f'''(c) \neq 0$

$$f(x) - f(c) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{iv}(c)}{4!}(x-c)^4 + \ldots$$

  como estamos utilizando la función en unos puntos muy próximos a c, $\triangle x \rightarrow 0$ luego

$$f(x) - f(c) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Si} \quad f(x) - f(c) < 0, & (x-c)^3 \gtrless 0 \rightarrow f'''(c) \gtrless 0 \\ \text{Si} \quad f(x) - f(c) > 0, & (x-c)^3 \gtrless 0 \rightarrow f''(c) \gtrless 0 \end{array}\right\} \quad \text{imposible}$$

  luego si la función tiene un máximo o un mínimo relativo en c, $f'''(c) = 0$.

- Supongamos que $f'''(c) = 0$ y $f^{iv}(c) \neq 0$

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}(x-c)^4 + \frac{f^{v}(c)}{5!}(x-c)^5 + \ldots$$

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{iv}(c)}{4!}(x-c)^4$$

$$(x-c)^4 > 0 \quad \begin{cases} \text{si} \quad f^{iv}(c) < 0 \rightarrow f(x) - f(c) < 0 \quad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \quad \text{en } c, \quad \exists \text{ un máximo relativo} \\ \\ \text{si} \quad f^{iv}(c) > 0 \rightarrow f(x) - f(c) > 0 \quad \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \quad \text{en } c, \quad \exists \text{ un mínimo relativo} \end{cases}$$

Conclusión. Si la primera derivada de la función no nula es de orden par y esta es < 0, la función en el punto c tiene un máximo. Si esta derivada es > 0, la función en el punto c tiene un mínimo.

Ejemplo 1. Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$, halla sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4, \qquad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$$f''(x) = 12(x-1)^2 \quad \longrightarrow \quad f''(1) = 0$$
$$f'''(x) = 24(x-1) \quad \longrightarrow \quad f'''(1) = 0$$
$$f^{iv}(x) = 24 \quad \longrightarrow \quad f^{iv}(1) = 24 > 0 \quad \Rightarrow$$

en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

Ejemplo 2. Halla los máximos y mínimos relativos de $y = 2\,\mathrm{sen}\,2x + \mathrm{sen}\,4x$.

Solución:

$$y' = 2 \cdot 2\cos 2x + 4\cos 4x = 4\,(\cos 2x + \cos 4x)$$
$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos 3x \cos(-x) = 2\cos 3x \cos x$$
$$2\cos 3x \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,x = \dfrac{\pi}{2}, 3\,\dfrac{\pi}{2} \\ \\ \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi, 3\,\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{puntos críticos:} \quad \frac{\pi}{6} \;,\; \frac{\pi}{2} \;,\; 3\frac{\pi}{2}$$
$$y'' = -8\,\mathrm{sen}\,2\,x - 16\,\mathrm{sen}\,4\,x$$
$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -8\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} - 16\ \mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{en} \quad x = \frac{\pi}{6} \text{ hay un máximo relativo.}$$
$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8\ \mathrm{sen}\,\pi - 16\ \mathrm{sen}\,2\,\pi = 0$$
$$y''\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -8\,\mathrm{sen}\,3\pi - 16\,\mathrm{sen}\,6\pi = 0$$

(completad vosotros el ejercicio).

Se llaman **extremos** de la función a los máximos y mínimos relativos y a los máximos y mínimos absolutos.

Ejercicios.

1) Averigua los extremos de las funciones:

a) $y = x^2\,e^{-x}$; b) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$;

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$; d) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

2) Determina los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los segmentos que se indican:

a) $y = x^3$ en $[-1, 3]$;

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

b_1) en $[-1, 5]$,

b_2) en $[-10, 12]$.

3) Determina los coeficientes p y q del trinomio cuadratico $y = x^2 + px + q$ de forma que $y = 3$ sea un mínimo de este trinomio cuando $x = 1$.

Aplicaciones de máximos y mínimos de las funciones

1) El alcance de un proyectil lanzado con una velocidad inicial V_0 y un ángulo φ viene dado por la fórmula

$$l = \frac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

Calcula el ángulo φ para que el alcance sea máximo.

Solución:

$$\frac{dl}{d\varphi} = \frac{2V_0^2 \cos 2\varphi}{g} = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos 2\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad 2\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{d^2 l}{d\varphi^2} = \frac{-4V_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}$$

$$\frac{d^2 l}{d\varphi^2}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4V_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{g} = \frac{-4V_0^2}{g} < 0 \quad \Rightarrow \quad l \text{ es máximo.}$$

Luego

$$l = \frac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} = \frac{V_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{g} = \frac{V_0^2}{g}.$$

2) ¿Qué dimensiones debe tener un cilindro para que sea mínima su área total S, dado el volumen V?

Solución:

$$V = \pi r^2 h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

$$S' = \frac{ds}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r^3 - 2V = 0$$

$$\longrightarrow \quad r^3 = \frac{2V}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$S'' = \frac{d^2 s}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$$

$$S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = 4\pi + \frac{4V}{\frac{V}{2\pi}} = 4\pi + 8\pi > 0 \quad \Rightarrow \quad S \text{ mínima.}$$

$$\text{luego} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{y} \qquad h = \frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}}.$$

3) Divide un número positivo A en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.

Solución:

$$A = x + y \quad \longrightarrow \quad x = A - y$$

$$P = x \cdot y = (A - y)y = Ay - y^2$$

$$P' = \frac{dP}{dy} = A - 2y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{A}{2}$$

$$P'' = \frac{d^2P}{dy^2} = -2 < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{máximo.}$$

$$\text{luego } y = \frac{A}{2} \qquad x = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$$

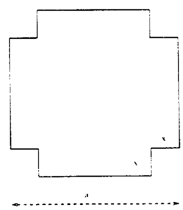
4) De una hoja de cartón cuadrada de lado a, hay que hacer una caja rectangular abierta que tenga la mayor capacidad posible recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y doblando después los salientes de la figura en forma de cruz así obtenida ¿De qué tamaño han de ser los cuadrados que se corten?

Solución:

$$V = (a - 2\,x)^2 \cdot x = (a^2 + 4\,x^2 - 4\,a\,x)\,x = a^2\,x - 4\,x^3 - 4\,a\,x^2$$

$$V' = \frac{dV}{dx} = a^2 + 12\,x^2 - 8\,a\,x = 0 \quad \longrightarrow \quad 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{8\,a \pm \sqrt{64\,a^2 - 4 \cdot 12\,a^2}}{24} = \frac{8\,a \pm \sqrt{16\,a^2}}{24} = \begin{cases} \dfrac{a}{2} \\ \dfrac{a}{6} \end{cases}$$



$$V'' = \frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 8a$$

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = 24\,\frac{a}{2} - 8\,a = 4\,a > 0 \text{ mínimo.}$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = 24\,\frac{a}{6} - 8\,a = -4\,a > 0 \text{ máximo.}$$

$$\text{luego los cuadrados han de ser de lado } x = \frac{a}{6}.$$

5) Tuerce un trozo de alambre de longitud dada l de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

Solución:

$$l = 2x + 2y \quad \rightarrow \quad x = \frac{l-2y}{2}$$

$$A = x \cdot y \quad \rightarrow \quad A = \frac{l-2y}{2}y$$

$$A' = \frac{dA}{dy} = -y + \frac{l-2y}{2} = \frac{-4y+l}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad l - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{l}{4}$$

$$A'' = \frac{d^2A}{dy^2} = -\frac{4}{2} = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{máximo}$$

$$x = \frac{l-\frac{l}{2}}{2} = \frac{l}{4}$$

luego el rectángulo de mayor área es un cuadrado de lado $\frac{l}{4}$.

Ejercicio.

¿Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado igual a $2p$ tiene mayor área?

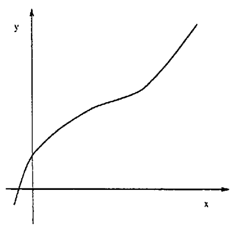
2.5 Trazado de curvas planas definidas de forma explícita.

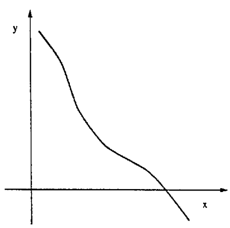
Funciones crecientes y decrecientes

La función **f** es **estrictamente creciente** en el intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

De manera análoga, la función **f** es **estrictamente decreciente** en un intervalo I si $\forall\, x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Ejemplos





Teorema 2.8 *Si la función $f(x)$ derivable en el intervalo $[a,b]$, crece en este intervalo, su derivada en él no es negativa, es decir $f'(x) \geq 0$.*

Demostración:

Supongamos que $f(x)$ crece en el intervalo $[a, b]$. Consideremos la razón

$$\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$$

como $f(x)$ es una función creciente se tiene

$$f(x+\triangle x) > f(x) \quad \text{para } \triangle x > 0$$

$$\text{y}$$

$$f(x+\triangle x) < f(x) \quad \text{para } \triangle x < 0.$$

En ambos casos

$$\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} > 0$$

y por tanto

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \geq 0$$

es decir

$$f'(x) \geq 0.$$

c.q.d.

Teorema 2.9 *Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in (a, b) \Rightarrow f(x)$ es una función creciente en $[a, b]$.*

Demostración:

Sea $f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in (a, b)$.

Consideremos dos valores arbitrarios x_1 y x_2 pertenecientes a (a, b) y tales que $x_1 < x_2$. Por el teorema de Lagrange, teorema 2.3

$$\exists\, \alpha \in (a, b) \;/\; \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$$

Como $f'(\alpha) > 0$ entonces $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ cuando $x_2 > x_1$, por lo tanto la función es creciente.

c.q.d.

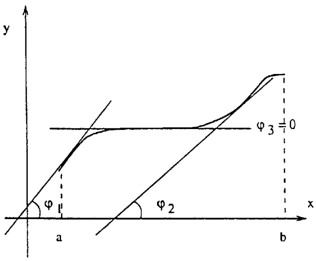
Teorema 2.10 *Si la función $f(x)$ derivable en el intervalo $[a, b]$, decrece en dicho intervalo, entonces su derivada en él no es positiva, es decir $f'(x) \leq 0$.*

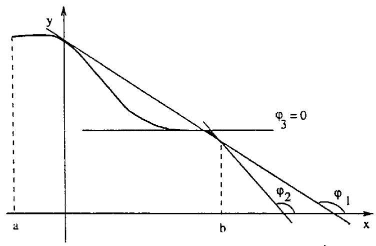
-demostradlo como ejercicio-

Teorema 2.11 *Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b), si $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \Rightarrow$ la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[a, b]$.*

-demostradlo como ejercicio-

Observación. El teorema 2.8 tiene la siguiente interpretación geométrica: Si la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[a, b]$, la tangente a la curva $y = f(x)$ forma con el eje OX un ángulo agudo φ (en algunos casos puede ser paralela a este eje). La tangente de este ángulo no es negativa pues $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \geq 0$.





Si la función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[a, b]$, el ángulo de inclinación de la tangente será obtuso (en algunos puntos la tangente puede ser paralela al eje OX).
La tangente del ángulo no es pues positiva.

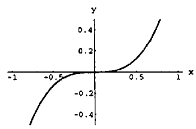
Del mismo modo se interpretan los teoremas 2.9 y 2.11. Permiten juzgar sobre el crecimiento o decrecimiento de la función por el signo de su derivada.

Ejemplo 1. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3$.

Solución:

$$y = x^3 \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^2 \quad \to \quad 3x^2 = 0 \quad \to \quad x = 0$$

$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) > 0$
crece	crece



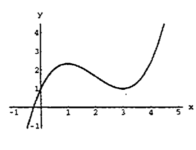
Ejemplo 2. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $y = \dfrac{x^3}{3} - 2\,x^2 + 3\,x + 1$.

Solución:

$$y' = x^2 - 4\,x + 3$$

$$x^2 - 4\,x + 3 = 0 \to x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
crece	decrece	crece



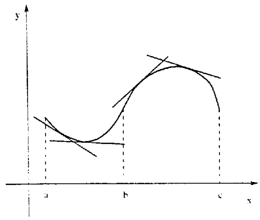
Ejercicios

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

a) $y = x^2(x-3)$; b) $y = (x-3)\sqrt{x}$;

c) $y = x + \operatorname{sen} x$; d) $y = 2e^{x^2-4x}$.

Concavidad



Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en (a, b).

Definición 1. Se dice que la **curva** es **cóncava hacia arriba** $\bigcup$ (cóncava) en el intervalo (a, b) si trazando la tangente a la curva en un punto cualquiera del intervalo, todos los puntos de dicha tangente se encuentran por debajo de la curva.

Definición 2. Se dice que la **curva** es **cóncava hacia abajo** $\bigcap$ (convexa) en el intervalo (b, c) si trazando la tangente a la misma en un punto cualquiera del intervalo, todos los puntos de la tangente se encuentran por encima de la curva.

Criterio para definir la concavidad y convexidad

Teorema 2.12 *Si la derivada segunda de la función $f(x)$ es negativa ($f''(x) < 0$) en todos los puntos del intervalo (a, b), la curva es cóncava hacia abajo $\bigcap$.*

Demostración:

Tomemos un punto del intervalo (a, b) y tracemos la tangente a la curva en ese punto. Si la ordenada de la curva es menor que la ordenada de la tangente, la curva es cóncava hacia abajo.

Sea la curva $y = f(x)$. La ecuación de la tangente a la curva en el punto x_0 es

$$y^* - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \longrightarrow \quad y^* = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

-ponemos $*$ para distinguir la y de la tangente de la curva-

$$y - y^* = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

Aplicando el teorema de los incrementos finitos (teorema 2.3) a la función $f(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\alpha) \quad \text{donde } \alpha \text{ es un punto comprendido entre } x \text{ y } x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\, f'(\alpha)$$

entonces

$$y - y^* = f'(\alpha)\,(x - x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$y - y^* = [f'(\alpha) - f'(x_0)]\,(x - x_0).$$

Aplicando el teorema de los incrementos finitos a la función $f'(\alpha)$

$$\frac{f'(\alpha) - f'(x_0)}{\alpha - x_0} = f''(\alpha_1)$$

$f'(\alpha) - f'(x_0) = (\alpha - x_0)f''(\alpha_1)$ donde α_1 es un punto comprendido entre α y x_0

luego

$$y - y^* = f''(\alpha_1)\,(\alpha - x_0)\,(x - x_0).$$

c.q.d.

Casos:

1) $x > x_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 < \alpha < x \quad \Rightarrow \quad x_0 < \alpha_1 < \alpha < x$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 > 0 \\ \alpha - x_0 > 0 \\ f''(\alpha_1) < 0 \end{array}\right\} \qquad y - y^* < 0$$

2) $x < x_0 \quad \Rightarrow \quad x < \alpha < x_0 \quad \Rightarrow \quad x < \alpha < \alpha_1 < x_0$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 < 0 \\ \alpha - x_0 < 0 \\ f''(\alpha_1) < 0 \end{array}\right\} \qquad y - y^* < 0$$

En los dos casos, a la derecha y a la izquierda del punto, los puntos de la curva se encuentran por debajo de la ordenada de la tangente, luego la curva es cóncava hacia abajo $\bigcap$ (convexa).

Teorema 2.13 *Si la derivada segunda de la función $f(x)$ es positiva en todos los puntos del intervalo (b, c) la curva es cóncava hacia arriba $\bigcup$ (cóncava).*

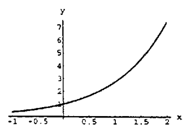
La demostración es análoga a la del teorema anterior.

Ejemplos.

1) $y = e^x$

$y' = e^x$

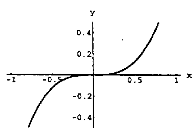
$y'' = e^x > 0$



2) $y = x^3$

$y' = 3x^2$

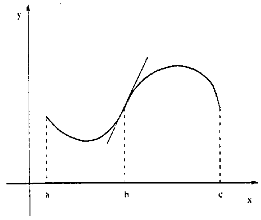
$y'' = 6x$



Puntos de inflexión

El punto que en una curva continua, separa las partes convexas de las cóncavas se llama punto de inflexión.

En el punto de inflexión la tangente corta a la curva de modo que a un lado del punto la curva está por debajo de la tangente y al otro lado por encima de la tangente.



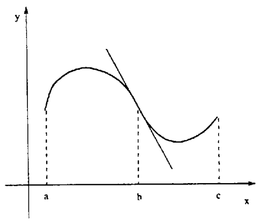
Condición suficiente para que un punto sea de inflexión

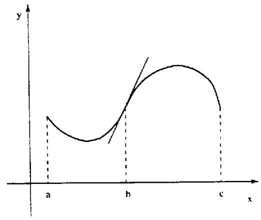
Teorema 2.14 *Sea $y = f(x)$ una curva. Si $f''(a) = 0$ o no existe y la derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar por el valor de $x = a$, entonces, el punto de la curva de abscisa $x = a$ es un punto de inflexión.*

Demostración:

a) Si $f''(x) < 0$ para $x < a$ y $f''(x) > 0$ para $x > a$, entonces para $x < a$ la curva es convexa ($\bigcap$) y para $x > a$ es cóncava ($\bigcup$). Por tanto el punto a es de inflexión.

b) Si $f''(x) > 0$ para $x < b$ y $f''(x) < 0$ para $x > b$, entonces para $x < b$ la curva es cóncava ($\bigcup$) y para $x > b$ es convexa ($\bigcap$). Por tanto en $x = b$ la curva tiene un punto de inflexión.





Ejemplo. Determina los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes curvas:

1) $y = 3 - x^2$

$$y' = -2x \qquad y'' = -2 < 0 \quad \longrightarrow \quad \text{convexa } \forall\, x.$$

2) $y = e^x$

$$y' = e^x \qquad y'' = e^x > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{cóncava } \forall\, x.$$

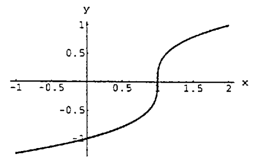
3) $y = (x-1)^{\frac{1}{3}}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$y'' = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} \quad \Rightarrow$$

$x = 1$ posible punto de inflexión.



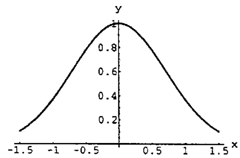
$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$	
$y''>0$	$y''<0$	$\Rightarrow$
cóncava	convexa	

$x = 1$ punto de inflexión.

4) $y = e^{-x^2}$ (curva de Gauss)

Solución:

$$y' = -2\,x\,e^{-x^2}$$



$$y'' = -2\left(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}\right) = -2\,e^{-x^2}\,(1-2x^2)$$

$$y''=0 \quad\Rightarrow\quad 1-2\,x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$
$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$
cóncava	convexa	cóncava

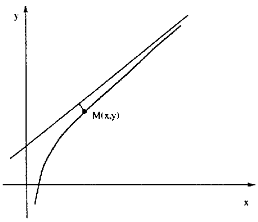
$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\end{array}\right\}\text{ puntos de inflexión.}$$

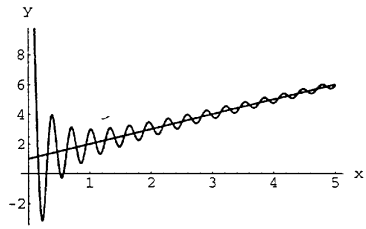
Asíntotas

Frecuentemente es preciso estudiar la forma de una curva $y = f(x)$ y por tanto el comportamiento de la función correspondiente cuando la abscisa y la ordenada de un punto de la curva, juntas o por separado, tienden a $\pm\infty$. Vamos a estudiar el caso particular en que la curva estudiada se aproxima indefinidamente a una cierta recta, al tender un punto variable sobre la curva hacia infinito.

Se dice que el punto variable M, tomado sobre una curva tiende hacia el infinito, si la distancia entre este punto y el origen de coordenadas crece indefinidamente.

Definición. Si la distancia d entre una recta y un punto variable M sobre la curva tiende a cero cuando el punto M tiende hacia infinito, esta recta recibe el nombre de asíntota de la curva.





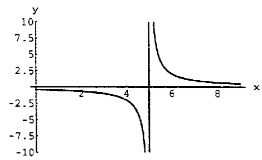
En el estudio de las asíntotas distinguiremos entre asíntotas verticales (// al eje de ordenadas), asíntotas horizontales (// al eje de abscisas) y oblicuas.

Asíntota vertical

Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la recta $x = a$ es **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$

Ejemplos.

1) $f(x) = \dfrac{2}{x-5}$



$\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \infty$

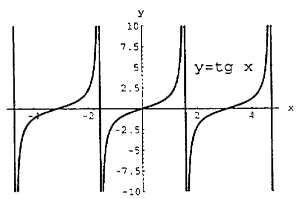
asíntota $x = 5$.

2) $y = e^{\frac{1}{x}}$

$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$

asíntota $x = 0$.

3) $f(x) = \operatorname{tg} x$



$\lim\limits_{x\to\pm\frac{\pi}{2},\pm 3\frac{\pi}{2},\ldots} \operatorname{tg} x = \infty$

asíntotas:

$x = \pm(2n-1)\dfrac{\pi}{2}.$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(1-x) = \infty$

asíntota $x = 1$.

Asíntota horizontal

Si el $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ decimos que la recta $y = b$ es una asíntota de la curva $y = f(x)$.

Ejemplo. Calcula las asíntotas de la función $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

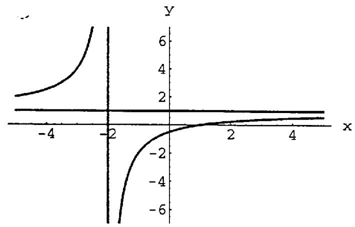
Solución:

$y = \dfrac{x-1}{x+2}$

asíntota vertical $\quad x = -2$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x+2} = 1$

asíntota horizontal $\quad y = 1$.



Asíntota oblicua

Supongamos que la curva $y = f(x)$ tiene una asíntota oblicua cuya ecuación es $y = mx+n$.

Por definición de asíntota, en el infinito

$$f(x) \simeq mx + n \quad \longrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} \simeq m + \frac{n}{x}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(m + \frac{n}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} m + \lim_{x \to \pm\infty} \frac{n}{x} = m$$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2.16}$$

$$n \simeq y - mx \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \to \pm\infty} n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)\,. \tag{2.17}$$

Ejemplo 1. Calcula las asíntotas de $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$.

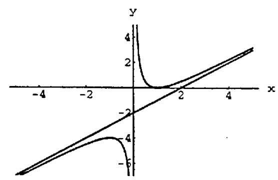
Solución:

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = \infty \quad \Rightarrow$

$x = 0$ asíntota vertical

$\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = \infty \quad \Rightarrow$

no tiene asíntota horizontal.



Asíntota oblicua: $y = mx + n$

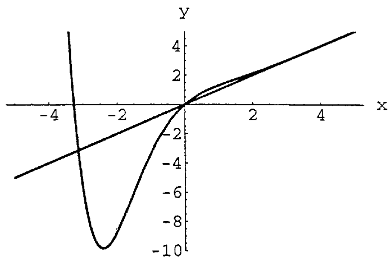
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2} = 1$

$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2}{x} = -2$

luego la asíntota oblicua es $y = x - 2$.

Ejemplo 2. Calcula las asíntotas de la función $y = e^{-x}\operatorname{sen} x + x$.

Solución:



$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ cuando $x \to 0$

pues $\lim_{x\to\infty} (e^{-x}\operatorname{sen} x + x) = \infty$

luego no tiene asíntota vertical.

$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x + x = \infty$

luego tampoco tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x} + \frac{x}{x}\right] = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(e^{-x}\operatorname{sen} x + x - x\right) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x = 0$$

asíntota oblicua: $y = x$.

Ejercicio.

Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ Sol.: $y = 0$.

b) $y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}$ Sol.: $\begin{cases} y = 1, \\ y = -1. \end{cases}$

c) $y = \frac{x}{\ln x}$ Sol.: no tiene.

d) $y = \frac{4x-12}{(x-2)^2}$ Sol.: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0. \end{cases}$

Representación gráfica de funciones

Pasos a seguir para representar gráficamente una función:

1) Dominio de la función.

2) Puntos de discontinuidad.

3) Puntos de corte con los ejes $\begin{cases} OY \to x = 0, \\ OX \to y = 0. \end{cases}$

4) Simetrías:

- $f(x) = f(-x)$ función par o simétrica respecto al eje OY,
- $f(x) = -f(-x)$ función impar o simétrica con respecto al origen.

5) Periodicidad.

Una **función** es **periódica de tipo T** si $f(x+T) = f(x)$.

6) Asíntotas:

- $x = a$ vertical si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty.$$

- $y = b$ es asíntota horizontal si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b.$$

- $y = mx + n$ es asíntota oblicua siendo

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (x \neq 0), \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx).$$

7) Intervalo de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$f(x)$ creciente en $[a,b]$ si $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

$f(x)$ decreciente en $[a,b]$ si $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

x_0 máximo si

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f' \quad \text{pasa de ser positiva a negativa}$$

o bien

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x_0) < 0.$$

x_0 mínimo si

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f' \quad \text{pasa de ser negativa a positiva}$$

o bien

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x_0) > 0.$$

8) Intervalos de concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

$f(x)$ es cóncava en $[a,b]$ si $\quad f''(x) > 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \quad (\bigcup)$

$f(x)$ es convexa en $[a,b]$ si $\quad f''(x) < 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \quad (\bigcap)$

x_0 es punto de inflexión si

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f''' \begin{cases} \text{pasa de ser positiva a negativa} \\ \text{ó de negativa a positiva,} \end{cases}$$

o bien

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'''(x_0) \neq 0.$$

Ejemplo 1. Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1) Dominio $= \mathbb{R}$.

2) No tiene puntos de discontinuidad.

3) Puntos de corte con los ejes:

$OY: \quad x = 0 \quad \longrightarrow \quad y = 0,$

$OX: \quad y = 0 \quad \longrightarrow \quad x = 0 \qquad P(0,0).$

4) Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x) \quad \Rightarrow$$

impar $\quad \Rightarrow \quad$ simétrica con respecto al origen.

5) No es periódica pues no existe $\top$ t.q. $f(x+\top) = f(x)$.

6) Asíntotas:

- vertical

  $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \qquad$ no tiene asíntota vertical;

- horizontal

  $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \qquad y = 0;$

- oblicua

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+x^3} = 0 \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\,x) = 0$$

no tiene asíntota oblícua.

7) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$y' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

puntos críticos $\begin{cases} y'=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1 \\ \nexists \text{ puntos de discontinuidad para } y' \end{cases}$

$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$y'<0$	$y'>0$	$y'<0$
decreciente	creciente	decreciente

$x=-1$ mínimo $\quad M\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $\qquad x=1$ máximo $\quad m\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$

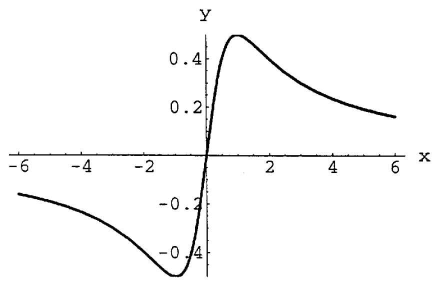
8) Concavidad. Puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x(-x^2+1)}{(1+x^2)^4} = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$$

$$y''=0 \quad \Rightarrow \quad 2x^3-6x=0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2-3)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$y''<0$	$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$
$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Puntos de inflexión: $\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $\quad (0,0)$, $\quad \left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.



Ejemplo 2. Representa gráficamente la función $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1) Dominio $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2) Puntos de discontinuidad $x = \pm 1$.

3) Puntos de corte con los ejes:

$OX : y = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0,$

$OY : x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \qquad P(0,0).$

4) Simetrías:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2 - 1}} = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -f(x) \quad \Rightarrow$$

simetría respecto al origen.

5) no es periódica.

6) asíntotas:

- vertical

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty \qquad x = 1$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -\infty \qquad x = -1$$

- horizontal

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty \qquad \text{no tiene;}$$

- oblicua

$$y = mx + n \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0 \qquad \text{no tiene.}$$

7) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$y' = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$\text{puntos críticos} \begin{cases} y' = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \\ \text{puntos de discontinuidad de } y' \quad x = \pm 1 \end{cases}$$

$(-\infty, \sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$y' > 0$	$y' < 0$	$y' < 0$	$y' < 0$	$y' > 0$
creciente	decreciente	decreciente	decreciente	creciente

$x = -\sqrt{3}$ máximo $\qquad$ $x = \sqrt{3}$ mínimo

$$P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right) \qquad P_2\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

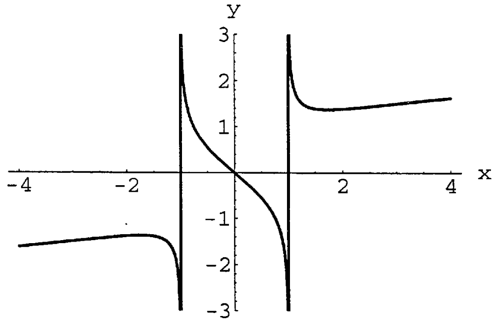
8) Concavidad. Puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{-2\,x^3 + 18\,x}{9\,(x^2-1)^2\,\sqrt[3]{x^2-1}} \qquad y'' = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

puntos de discontinuidad de y'': $x = \pm 1$

$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$	$y''<0$
$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Puntos de inflexión: $P_3\left(-3,-\dfrac{3}{2}\right)$, $P_4\,(0,0)$, $P_5\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$.



Ejemplo 3. Representa gráficamente la función $y = e^{\text{arcsen}\sqrt{x}}$.

1) Dominio $[0,1]$.

2) Puntos de corte:

OX: $y = 0$ no tiene

OY: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 1 \qquad P(0,1)$.

3) Simetrías: no tiene.

4) No es periódica.

5) Asíntotas: no tiene.

6) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}e^{\text{arcsen}\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}e^{\text{arcsen}\sqrt{x}} = \frac{e^{\text{arcsen}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x-x^2}}$$

y' nunca se hace cero

y' siempre es > 0 luego la función siempre es creciente en su dominio.

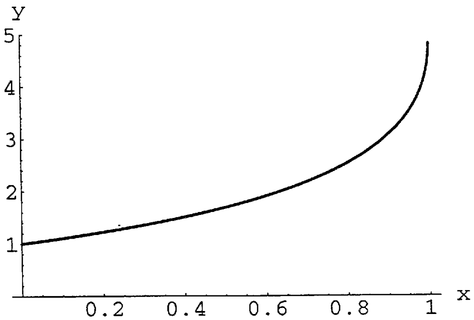
7) Concavidad. Puntos de inflexión.

$$y'' = \frac{e^{\text{arcsen}\sqrt{x}}\left[\sqrt{x-x^2}-(1-2x)\right]}{4\sqrt{x-x^2}(x-x^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-x^2}-(1-2x)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{x-x^2} = 1-2x \quad \Rightarrow \quad 5x^2-5x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} 0'723, \\ 0'277, \end{cases}$$

$(0, 0'277)$	$(0'277, 0'723)$	$(0'723, 1)$
$y'' < 0$	$y'' > 0$	$y'' > 0$
$\cap$	$\cup$	$\cup$

punto de inflexión $\quad (0'277, f(0'277))$.



Ejercicio.

Representa gráficamente las funciones:

a) $y = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

b) $y = \ln(x^2-1) + \dfrac{1}{x^2-1}$

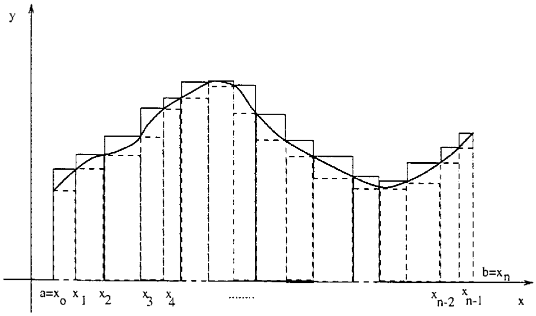
Capítulo 3

Integral de Riemann.

3.1 Introducción a la integral de Riemann.

Desde muy antiguo, el cálculo del área ha sido un problema de interés tanto teórico como práctico. El problema no es fácil, excepto en algunos casos, como por ejemplo, el cálculo del área del rectángulo, del triángulo, del círculo o de un trapecio. Probablemente también hayamos calculado áreas de regiones más complicadas que se descomponen en regiones de esos tipos. Sin embargo, ¿cómo se puede hallar el área comprendida entre la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ y el eje OX en el intervalo $[-1, 1]$? Para resolver este problema daremos un procedimiento general del cálculo de áreas.

Sea $f(x)$ una función de variable real definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$. Resolvamos el siguiente problema: Calcular el área del recinto limitado por el eje de abscisas, las rectas $x = a$, $x = b$ y la curva $y = f(x)$.



Se llama **partición del intervalo** $[a, b]$ al conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

A partir de la partición P formemos los intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Sean

$$h_1 = x_1 - x_0, \quad h_2 = x_2 - x_1, \quad \dots, \quad h_n = x_n - x_{n-1}.$$

Se llama **diámetro de la partición**

$$d(P) = max\{h_1, h_2, \dots, h_n\}.$$

Por ser $f(x)$ continua en $[a, b]$ también lo será en $[x_i, x_{i+1}]$ $\forall\ i$, entonces por el teorema de Weierstrass (teorema 0.11) la función admite extremo superior (M_i) e inferior (m_i) en cada uno de los intervalos.

Sea

$$s_1 = m_1\, h_1 + m_2\, h_2 + \ldots + m_n\, h_n$$

y

$$S_1 = M_1\, h_1 + M_2\, h_2 + \ldots + M_n\, h_n.$$

Sea A el área del recinto que queremos calcular. Se cumple que

$$s_1 \leq A \leq S_1.$$

Se llama **área del recinto por defecto** y se designa por A_d al

$$\lim_{d(P)\to 0} s_n = A_d.$$

Se llama **área del recinto por exceso** y se designa por A_e al

$$\lim_{d(P)\to 0} S_n = A_e.$$

En general $A_d \neq A_e$, pero se cumple que

$$A_d \leq A \leq A_e.$$

Si $A_d = A_e$ cada una de la áreas coincide con A y ésta representa el área del recinto determinado por el trapecio mixtilíneo.

Se dice que una **función** $f(x)$ definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ es **integrable según Riemann** en dicho intervalo cuando se verifica

$$\lim_{d(P)\to 0} s_n = \lim_{d(P)\to 0} S_n = A$$

independientemente de las particiones elegidas.
El valor de este límite se representa por

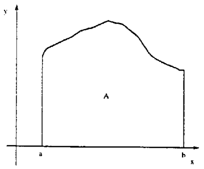
$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

y se lee integral definida de a hasta b de la función $f(x)$.

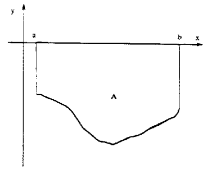
A los números a y b se les llama **límites de integración**. A $f(x)$ se le llama **integrando**.

Si $f(x)$ es no negativa en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área limitada por la gráfica de f el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Si $f(x)$ es negativa en $[a,b]$ y pretendemos calcular el área limitada por la curva, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$, se pone un signo negativo delante de la integral



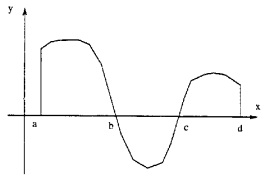
$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$



$$A=-\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{pues} \quad \int_a^b f(x)\,dx<0.$$

Si f es positiva y negativa y queremos calcular el área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas $x=a$, $x=b$, debemos separar la integral de la siguiente forma

$$A=\int_a^b f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx$$



Condición suficiente de integrabilidad: si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces es integrable en dicho intervalo.

3.2 Propiedades de la integral definida.

1) $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall\, k\in\mathbb{R}.$

2) $\displaystyle\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx.$

   Las propiedades 1) y 2) implican que la integral de una combinación lineal de funciones es la combinación lineal de las integrales

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

3) Si $f(x)\geq g(x)$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\geq\int_a^b g(x)\,dx.$

4) Si $f(x)>g(x)$ en $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx>\int_a^b g(x)\,dx,$ (¡desigualdad estricta!).

5) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, el valor absoluto de la integral es menor o igual que la integral del valor absoluto.

6) Si $f(x) \geq 0$ en $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

7) Si $f(x) > 0$ en $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx > 0$, (¡desigualdad estricta!).

8) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

9) Si $a < c < b \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

en general se verifica para cualquier a, b y c.

10) La integral desde cualquier punto c hasta él mismo se define como cero, es decir,

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

3.3 Teorema del valor medio integral.

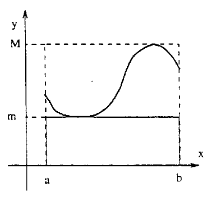
Teorema 3.1
La integral definida de una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, es igual al producto de la longitud del intervalo por el valor que toma la función en un punto de ese intervalo cerrado.

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\alpha) \qquad \alpha \in [a,b].$$

Demostración:

Sean s_1 y S_1, la suma de las áreas de dos rectángulos de base $b-a$ y alturas m y M respectivamente, donde m y M son el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Se tiene

$$s_1 = m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a) = S_1$$

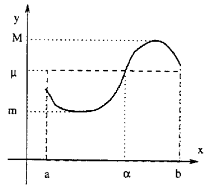


es decir, existe un número μ comprendido entre m y M tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu\,(b-a).$$

Por ser $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ toma todos los valores del intervalo $[m,M]$ -propiedad de Darboux de las funciones continuas, teorema 0.13- $\Rightarrow \exists\ \alpha \in [a,b]$ tal que

$$f(\alpha) = \mu \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)\,(b-a).$$

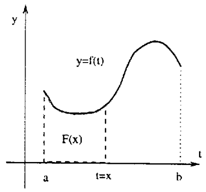


Geométricamente este teorema significa que el área del recinto limitado por la curva, el eje de abscisas y las rectas paralelas al eje de ordenadas $x = a$ y $x = b$ es igual al área de un rectángulo de base $b-a$ y una altura comprendida entre m y M.

3.4 Teorema fundamental del cálculo integral.

Sea $f(t)$ una función integrable en el intervalo $[a,b]$. A partir de esta función podemos definir la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



que depende del límite superior de integración.

Geométricamente $F(x)$ representa el área del recinto limitado por la curva $y = f(t)$, el eje de las t y las rectas $t = a$ y $t = x$.

Teorema 3.2 ***Teorema fundamental del cálculo integral***
Si $f(t)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces la derivada de la función $F(x)$ es: $F'(x) = f(x)$, es decir $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

Demostración:

Calculemos el incremento de $F(x)$

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^a f(t)\,dt \quad \Rightarrow$$

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Aplicando el teorema del valor medio integral 3.1

$$f(x+h) - F(x) = h\,f(\alpha) \qquad \alpha \in [x, x+h]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\alpha)$$

tomando límites

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\alpha)$$

al tender $h \to 0$, α que pertenece al intervalo $[x, x+h]$ tiende al punto x, luego

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \to x} f(\alpha) = f(x)$$

por ser $f(t)$ continua en $[a, b]$.

c.q.d

Este teorema nos da la conexión que existe entre integración y derivación.

Según acabamos de demostrar, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ es una primitiva de $f(x)$, luego cualquier otra función primitiva $G(x)$ de $f(x)$ difiere de $F(x)$ solamente en una constante, es decir

$$G(x) = F(x) + C$$

o bien

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt + C.$$

Calculemos C sustituyendo el valor a en $G(x)$

$$G(a) = \int_a^a f(t)\, dt + C = 0 + C \quad \Rightarrow \quad G(a) = C.$$

Si ahora evaluamos $G(x)$ en el valor $x = b$

$$G(b) = \int_a^b f(t)\, dt + G(a) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = G(x)\Big]_a^b .$$

donde $G(x)$ es una función primitiva arbitraria de $f(x)$.

A esta fórmula se le llama **regla de Barrow** y se enuncia:

Teorema 3.3 ***Regla de Barrow***
La integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $G(x)$, cualquiera de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a) = G(x)\Big]_a^b . \tag{3.1}$$

Ejercicios.

1) Calcula $\int_0^\pi e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$.

2) Calcula $\int_{-1}^1 (\arccos x)^2\, dx$.

3) Si $f(x) = \begin{cases} x\, E(x) & \text{si } x < 3, \\ 12 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$ Halla $\int_1^4 f(x)\, dx$.

4) Calcula $\int_0^3 f(x)\, dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} 2\, x & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

3.5 Cambio de variable en la integral definida.

Teorema 3.4 ***Cambio de variable en la integral definida*** *Sea g' función continua $[a,b]$ y f continua en el conjunto de valores tomados por g'. Luego*

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du. \tag{3.2}$$

Demostración:

Sea $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$ entonces

$$\int_a^b f(g(x))\; g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

c.q.d.

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\int_1^2 \frac{10\, x^2}{(x^3+1)^2}\, dx.$

Solución:
Sea $u = x^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 3\, x^2\, dx$, entonces

$$\frac{10\, x^2}{(x^3+1)^2}\, dx = 10\, \frac{x^2\, dx}{(x^3+1)^2} = \frac{10}{3}\, \frac{du}{u^2}.$$

Para $x = 1 \quad \longrightarrow \quad u = 2$, para $x = 2 \quad \longrightarrow \quad u = 9$, luego

$$\int_1^2 \frac{10x^2}{(x^3+1)^2}\, dx = \frac{10}{3} \int_2^9 \frac{du}{u^2} = \frac{10}{3} \left[-\frac{1}{u} \right]_2^9 = \frac{35}{17}.$$

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^5 \sqrt{x^2+1}\, dx.$

Solución:
Sea $u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\, dx$, entonces

$$x^5\, \sqrt{x^2+1}\, dx = x^4\, \sqrt{x^2+1} x\, dx = \frac{1}{2}\, (u-1)^2\, \sqrt{u}\, du.$$

Para $x = 0 \quad \longrightarrow \quad u = 1$, para $x = \sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad u = 4$, luego

$$\int_0^{\sqrt{3}} x^5\, \sqrt{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^4 (u-1)^2\, \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2} \int_1^4 (u^2 - 2\, u + 1)\, u^{\frac{1}{2}}\, du =$$

$$\frac{1}{2} \int_1^4 \left(u^{\frac{5}{2}} - 2\, u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}} \right)\, du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{7}\, u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}\, u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{848}{105}.$$

Teorema 3.5 ***Propiedad de la integral definida.*** *Si g es diferenciable y f continua se verifica que*

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(u)\,du = f\left(g(x)\right)\cdot g'(x). \tag{3.3}$$

Demostración:

Sea $H(x) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(u)\,du$. Podemos pensar que $H(x)$ es composición de dos funciones diferenciables $g(x)$ y $F(x) = \displaystyle\int_a^{x} f(u)\,du$, pues

$$H(x) = F\left(g(x)\right) = \int_a^{g(x)} f(u)\,du$$

luego por la relga de la cadena, teorema 1.3,

$$H'(x) = F'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

y por el teorema fundamental del cálculo integral 3.2

$$F'(x) = f(x)$$

igualando las dos expresiones obtenemos,

$$H'(x) = f\left(g(x)\right)\, g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(u)\,du = f\left(g(x)\right)\, g'(x).$$

c.q.d.

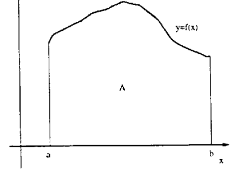
3.6 Aplicaciones de la integral definida.

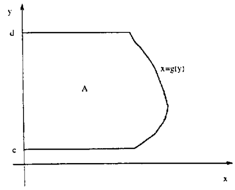
3.6.1 Cálculo de áreas.

1) **Areas en coordenas rectangulares (cartesianas)**

Si $f(x) \geq 0$ está definida en el intervalo $[a, b]$ el área del trapecio curvilíneo limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad A = \int_c^d g(y)\,dy$$





2) **Areas en coordenadas paramétricas**

El área de un trapecio curvilíneo limitado por una curva dada por su ecuaciones paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\} \qquad \alpha \leq t \leq \beta, \qquad \varphi(\alpha)=a, \qquad \varphi(\beta)=b,$$

$$A=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b y\,dx$$

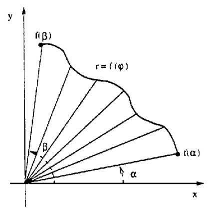
como $x=\varphi(t) \quad \Rightarrow \quad dx=\varphi'(t)\,dt$ luego

$$A=\int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

3) **Area de un sector curvilíneo en coordenadas polares**

Sea $r=f(\varphi)$ la ecuación de una curva en coordenadas polares, con $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Calculemos el área del sector OAB limitado por $r=f(\varphi)$ y los radios vectores $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$.

Dividimos $\beta-\alpha$ en n ángulos iguales de amplitud $\triangle\varphi$.

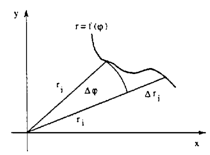


El área del sector circular A_i vale

$$A_i=\frac{1}{2}r_i^2 \triangle \varphi$$

$$r_{i+1}=r_i+\triangle r_i.$$

Observamos por la figura, que tenemos un sector circular inscrito en un sector curvilíneo. Luego si $\triangle\varphi \to 0$ obtenemos infinitos sectores circulares que cubren todo el sector curvilíneo. Por lo tanto



$$A=\lim_{\triangle\varphi\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}r_i^2 \triangle \varphi$$

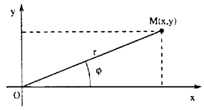
luego

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Supongamos que el polo O del sitema polar coincide con el origen de coordenadas rectangulares y que el eje polar OX coincide con el eje positivo de las abscisas.

Sea M un punto arbitrario del plano, x e y sus coordenadas rectangulares y r y φ sus coordenadas polares. En este caso



$x = r\cos\varphi$

$y = r\operatorname{sen}\varphi$

Inversamente

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Ejemplo. Sean $P(2,-2)$ las coordenadas rectangulares de un punto P. Halla sus coordenadas polares.

Solución:
Dado que $x = 2$ e $y = -2$, se sigue que

$$r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2}{2} = -1.$$

Por consiguiente, bien

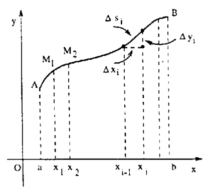
$$\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{o bien} \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi.$$

Como el punto P se encuentra en el cuarto cuadrante, sólo nos sirve el primer valor. El valor principal de φ es $-\frac{\pi}{4}$. Podemos obtener el mismo valor de φ mediante las fórmulas $\operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ó $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Por ejemplo, usando la segunda, $\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de donde se deduce que $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ó bien $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Sólo es correcto el segundo valor por el razonamiento anterior.

3.6.2 Cálculo de longitudes de arco de una curva.

1) **En coordenadas rectangulares**

La longitud del arco AB de una curva $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ se obtiene de la siguiente forma.



Tracemos las cuerdas

$$A\,M_1, M_1\,M_2, \ldots, M_{i-1}\,M_i, \ldots, M_{n-1}\,B,$$

de longitudes

$$\triangle s_1, \triangle s_2, \ldots, \triangle s_i, \ldots, \triangle S_n.$$

La poligonal $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$ inscrita en el arco AB es de longitud

$$s=\sum_{i=1}^{n}\triangle s_i$$

luego la longitud del arco AB es

$$L=\lim_{\max\triangle S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\triangle s_i \qquad \text{(límite de la suma de poligonales).}$$

Si

$$\triangle y_i=f(x_i)-f(x_{i-1}) \quad \Rightarrow \quad \triangle s_i=\sqrt{(\triangle x_i)^2+(\triangle y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}\right)^2}\triangle x_i.$$

Por el teorema de Lagrange (teorema 2.3)

$$\frac{\triangle y_i}{\triangle x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\alpha_i) \qquad \text{con } x_{i-1}<\alpha_i<x_i$$

$$\Rightarrow \quad L=\lim_{\max\triangle x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\alpha_i)]^2}\triangle x_i=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

luego

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

2) **En coordenadas paramétricas**

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{array}\right\} \qquad \alpha\le t\le\beta, \qquad \varphi(\alpha)=a, \qquad \varphi(\beta)=b \quad \Rightarrow$$

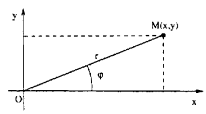
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)\,dt \qquad \Leftrightarrow$$

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

3) **En coordenadas polares**

$x=r\cos\varphi$

$y=r\operatorname{sen}\varphi.$



Sea $r=f(\varphi)$ se pueden considerar como coordenadas paramétricas

$$\varphi(t)=x=r\cos\varphi=f(\varphi)\cos\varphi$$

$$\psi(t) = y = r \operatorname{sen} \psi = f(\varphi) \operatorname{sen} \varphi$$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\operatorname{sen}\varphi)^2 - (f'(\varphi)\operatorname{sen}\varphi + f(\varphi)\cos\varphi)^2}\, d\varphi.$$

Haciendo operaciones en el radicando

$$(f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\operatorname{sen}\varphi)^2 + (f'(\varphi)\operatorname{sen}\varphi f(\varphi) + f(\varphi)\cos\varphi)^2 =$$
$$= f'^2(\varphi)\cos^2\varphi - 2f'(\varphi)f(\varphi)\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + f^2(\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi + f'^2(\varphi)\operatorname{sen}^2\varphi +$$
$$+2f'(\varphi)f(\varphi)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + f^2(\varphi)\cos^2\varphi =$$
$$= f'^2(\varphi)\left[\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\right] + f^2(\varphi)\left[\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi\right] = f'^2(\varphi) + f^2(\varphi),$$

luego

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(f'(\varphi))^2 + (f(\varphi))^2}\, d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, dy.$$

3.6.3 Cálculo de volúmenes.

1) **Volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas**

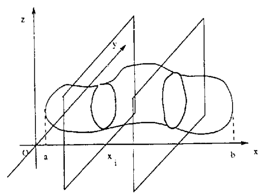
Dado un cuerpo T, supongamos que se conoce el área de toda sección arbitraria de este cuerpo por un plano perpendicular al eje OX.

El área depende de la posición del plano secante, es decir, en función de x

$$Q = Q(x)$$

entonces el volumen es

$$V = \int_a^b Q(x)\, dx.$$



2) **Volumen de un cuerpo de revolución**

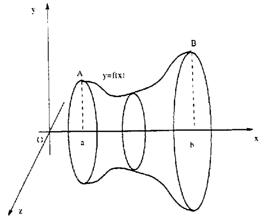
Consideremos el cuerpo de revolución engendrado por el trapecio curvilíneo $aABb$ al girar alrededor deleje OX. El trapecio está limitado por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.

Toda sección arbitraria del cuerpo por un plano perpendicular al eje de abscisas, es un círculo de área

$$Q = \pi y^2 = \pi\left[f(x)\right]^2.$$

Luego

$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx.$$



3) **Volumen al girar alrededor del eje polar**

$$V_p = \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi.$$

3.6.4 Cálculo del área de una superficie de revolución.

Sea $y = f(x)$ la ecuación de una curva definida y continua en $[a, b]$ que engendra un cuerpo de revolución cuando gira alrededor del eje OX cuya área lateral se desea calcular. Dicha área vale

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)}\, dx.$$

Ejercicios.

1) Sea $f(x) = \sqrt{x^3}$ y sea T el trapezoide limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, el eje de abscisas y la gráfica de f.

   a) Calcula el área de T;

   b) calcula la longitud del arco de curva determinado por f desde el punto de abscisa cero hasta el punto de abscisa uno;

   c) calcula el volumen del cuerpo engendrado por T al girar alrededor del eje de abscisas;

   d) calcula el volumen del cuerpo engendrado por T al girar alrededor del eje de ordenadas.

2) Calcula la longitud de un cuadrante de circunferencia de ecuaciones $x = r\cos t$, $y = r \operatorname{sen} t$, con $0 \le t \le \pi/2$.

3) Calcula el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = x$ alrededor del eje OX, entre $x = 0$ y $x = r$.

4) Calcula el área de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje OX la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$, entre $x = 0$ y $x = 9$.

5) Calcula el área de la superficie de revolución engendrada al girar la curva $y = e^{-x}$ alrededor del eje OX, entre $x = 0$ y $x = 3$.

6) Calcula el área de la superficie de revolución engendrada al girar alrededor del eje OY la curva $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y$, entre $y = 1$ y $y = 4$.

Capítulo 4

Técnicas de integración.

4.1 Función primitiva e integral indefinida.

Si en todos los puntos de un intervalo $[a, b]$ se cumple que $F'(x) = f(x)$, a la función $F(x)$ se le llama **función primitiva** de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo. La primitiva de la función $f(x) = x^2$ es $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ pues

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x).$$

Pero también $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 5$ es una primitiva de $f(x)$, ya que $F'(x) = x^2 + 0 = x^2 = f(x)$. En otras palabras la **función primitiva no es única.**

Teorema 4.1 *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces, la diferencia entre las dos es una constante.*

Demostración:

Por definición de primitiva

$$F_1'(x) = f(x) \qquad \text{y} \qquad F_2'x) = f(x).$$

Sea

$$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad \Rightarrow$$
$$\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

como $\varphi'(x) = 0$ entonces $\varphi(x) = Cte.$

c.q.d.

Si $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, la función $F(x)+C$ se llama **integral indefinida** de la función $f(x)$ y se expresa mediante $\int f(x)\,dx$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{4.1}$$

- a $f(x)$ se le llama **integrando** o función bajo el signo integral,
- $f(x)\,dx$ es el **elemento de integración**,
- a C se le llama **constante de integración**,
- $\int$ es el **signo de integración**.

Ejemplo 1.

$$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C, \qquad \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C, \qquad \int \frac{2}{\sqrt{s+3}}\,ds = 4\sqrt{s+3} + C.$$

Ejemplo 2. Halla $f(x)$ suponiendo que $f'(x) = x^3 + 2$ y $f(0) = 1$.

Solución:
Como f' es la derivada de f, f es una primitiva de f', por tanto

$$f(x) = \int \left(x^3 + 2\right)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 3\,x + C.$$

Como $f(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}(0)^4 + 2(0) + C = 1 \quad\Rightarrow\quad C = 1$ luego

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2\,x + 1.$$

Ejemplo 3. Halla $f(x)$ suponiendo que $f'(x) = 8\,x^3 - 6\,x + 3$ y $f(0) = 1$.

Solución:

$$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x + 1.$$

Ejemplo 4. Halla $f(x)$ suponiendo que $f''(x) = 6x - 2$, $f'(1) = -5$ y $f(1) = 3$.

Solución:
Primero obtenemos f' integrando f''

$$f'(x) = \int (6x - 2)\,dx = 3\,x^2 - 2\,x + C.$$

Como $f'(1) = -5 \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 1 - 2\cdot 1 + C = -5 \quad\Rightarrow\quad C = -6.$

Por tanto $f'(x) = 3\,x^2 - 2\,x - 6$. Ahora obtendremos f integrando f'

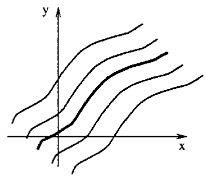
$$f(x) = \int \left(3x^2 - 2x - 6\right)\,dx = x^3 - x^2 - 6\,x + C_1.$$

(Ponemos C_1 para representar la constante de integración porque hemos uticilizado C antes y así evitar la confusión que resultaría de asignar a C dos valores distintos en un mismo problema).

Como $f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad 1 - 1 - 6 + C_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 9$, luego

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 9.$$

Significado geométrico de la integral indefinida. La integral indefinida es un conjunto (familia) de curvas, cada una de las cuales se obtiene mediante el desplazamiento de una curva paralelamente a sí misma, hacia arriba o hacia abajo, es decir, a lo largo del eje OY.



Cuestión.

¿Toda $f(x)$ tiene función primitiva y, por consiguiente, integral indefinida?

La respuesta es negativa, **toda función f(x) no tiene función primitiva**. Sin embargo vamos a señalar el siguiente teorema sin su demostración.

Teorema 4.2 *Toda función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$, tiene una función primitiva y por tanto, una integral indefinida.*

Deducciones de la definición de integral indefinida:

1. **La derivada de la integral indefinida es igual al integrando**, es decir, si $F'(x) = f(x)$ entonces

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x). \tag{4.2}$$

   Esta igualdad significa que la derivada de una primitiva cualquiera es igual al integrando.

2. **La diferencial de una integral indefinida es igual al elemento de integración.**

$$d\left[\int f(x)\,dx\right] = d\,[F(x) + C] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{4.3}$$

3. **La integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria.**

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{4.4}$$

Propiedades de la integral indefinida

1) La integral indefinida de la suma algebráica de dos o más funciones es igual a la suma de las integrales indefinidas de cada función.

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx. \tag{4.5}$$

Por (4.4)

- $\displaystyle\int [f_1(x) + f_2(x)]'\, dx = f_1(x) + f_2(x).$

Por (4.2)

- $\displaystyle\left[\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx\right]' = \left[\int f_1(x)\, dx\right]' + \left[\int f_2(x)\, dx\right]' = f_1(x) + f_2(x).$

Luego

$$\left[\int (f_1(x) + f_2(x))\, dx\right]' = \left[\int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx\right]'.$$

Por tanto, toda función del primer miembro de (4.5) se diferencia de toda función del segundo miembro de (4.5) en una constante, y (4.5) tiene precisamente este significado.

2) Un factor constante se puede sacar fuera del signo de integral.

$$\int \alpha\, f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx. \tag{4.6}$$

Para demostrar (4.6) vamos a derivar ambos miembros

- $\displaystyle\left[\int \alpha f(x)\, dx\right]' = \alpha f(x).$
- $\displaystyle\left[\alpha \int f(x)\, dx\right]' = \alpha \left[\int f(x)\, dx\right]' = \alpha\, f(x).$

Luego

$$\left[\int \alpha\, f(x)\, dx\right]' = \alpha \left[\int f(x)\, dx\right]'$$

y ahora el razonamiento es análogo al de la propiedad anterior.

Ejemplos.

1) $\displaystyle\int \left(2x^2 - 3\operatorname{sen} x + 5\sqrt{x}\right) dx = \int 2x^3\, dx - \int 3\operatorname{sen} x\, dx + \int 5\sqrt{x}\, dx =$

$\displaystyle= 2\int x^3\, dx - 3\int \operatorname{sen} x\, dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = 2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$

$\displaystyle= \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

2) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right) dx = 3\int x^{-\frac{1}{3}}\, dx + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int x^{\frac{5}{4}}\, dx =$

$\displaystyle= 3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}\cdot 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C.$

4) $\displaystyle\int \cos 7x\, dx = \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x + C.$

Reglas de integración

1) Si $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + C$ entonces $\displaystyle\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$

2) Si $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + C$ entonces $\displaystyle\int f(x+b)\, dx = F(x+b) + C.$

3) Si $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + C$ entonces $\displaystyle\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$

Ejemplos.

1) $\displaystyle\int \left(a + bx^3\right)^2 dx = \int \left(a^2 + 2abx^3 + b^2x^6\right) dx = a^2x + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{1}{7}b^2x^7 + C.$

2) $\displaystyle\int \sqrt{2px}\, dx = \int (2px)^{\frac{1}{2}}\, dx = (2p)^{\frac{1}{2}}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{2px} + C.$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + C.$

4) Haced vosotros: $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx.$

4.2 Integrales inmediatas.

Comenzamos con una breve tabla de integrales con la finalidad de revisión y de disponer de una referencia utilizable.

1) $\displaystyle\int \alpha\, dx = \alpha\, x + C,$

2) $\displaystyle\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \qquad n \neq 1,$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C,$

4) $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + C,$

5) $\displaystyle\int p^x\, dx = \frac{p^x}{\log p} + C,$

6) $\displaystyle\int \log x\, dx = x\, \log x - x + C,$

7) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C,$

8) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C,$

9) $\displaystyle\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C,$

10) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C,$

11) $\displaystyle\int \sec x\ \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C,$

12) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x\, \operatorname{cot} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C,$

13) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \log|\sec x| + C,$

14) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx = \log|\operatorname{sen} x| + C,$

15) $\displaystyle\int \sec x\, dx = \log|\sec x + \operatorname{tg} x| + C,$

16) $\displaystyle\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C,$

17) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C,$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\ tg} x + C,$

19) $\displaystyle\int \operatorname{arc\,sen} x \, dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C,$

20) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) + C,$

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

Solamente la fórmula 21 es nueva. Para deducirla observemos que

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Tendremos entonces

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x+1| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

4.3 Integración por cambio de variable o sustitución.

Supongamos que es preciso hallar $\int f(x)\,dx$ y no sabemos obtener inmediatamente la función primitiva de $f(x)$. Se hace un cambio de variable tomando $x = \varphi(t)$ **donde $\varphi(\mathbf{t})$ es una función continua lo mismo que su derivada y tiene función inversa**. Entonces

$$dx = \varphi'(t)\,dt$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \tag{4.7}$$

Una vez calculada la integral (4.7), t se sustituye por la expresión en función de x.

Observación. A veces es preferible plantear el cambio de variable en la forma $t = \psi(x)$.

Ejemplo 1.

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos x \, dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{sen}^3 x} + C$$

(hemos hecho $\operatorname{sen} x = t$).

Ejemplo 2.

$$\int \frac{2x-1}{x^2-x+5} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2-x+5\right| + C$$

(hemos hecho $x^2 - x + 5 = t$).

Ejemplo 3.

$$\int \sqrt{a-bx} \, dx = -\int \sqrt{t} \frac{dt}{b} = -\frac{1}{b} \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{b} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3b} \sqrt{(a-bx)^3} + C$$

(hemos hecho $a - b\,x = t$).

Ejemplo 4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \operatorname{arc\,sen} t + C = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$$

(hemos hecho $\frac{x}{a} = t$).

Ejemplo 5.

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x} dx = \int t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

(hemos hecho $\ln x = t$).

Ejemplo 6.

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$$

(hemos hecho $t = x^2$).

La integración por sustitución es uno de los métodos más importantes para el cálculo de integrales indefinidas. El éxito de la integración depende fundamentalemente de la habilidad en elegir la sustitución adecuada de variables. Así se simplifica la integral dada. Por esto, el estudio de los métodos de integración se reduce, en esencia, a la determinación de la sustitución más conveniente.

Sustituciones trigonométricas

1) Si la integral contiene el radical $\sqrt{a^2-x^2}$ generalmente se hace

$$x = a\ \operatorname{sen} t \qquad \text{de donde} \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\ \cos t.$$

2) Si la integral contiene el radical $\sqrt{x^2-a^2}$ generalmente se hace

$$x = a\ \sec t \qquad \text{de donde} \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\ \operatorname{tg} t.$$

3) Si la integral contiene el radical $\sqrt{x^2+a^2}$ generalmente se hace

$$x = a\ \operatorname{tg} t \qquad \text{de donde} \qquad \sqrt{x^2+a^2} = a\ \sec t.$$

Nota. Hay que advertir, que las sustituciones trigonométricas no son siempre las más convenientes.

Ejercicio.

Calcula las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$ Sol.: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}} \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right) + C;$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$ Sol.: $\displaystyle\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right);$

c) $\displaystyle\int x\left(5\,x^2-3\right)^7 dx$ Sol.: $\displaystyle\frac{1}{80}\left(5\,x^2-3\right)^8 + C;$

d) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$ Sol.: $\displaystyle\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C;$

e) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{2-x^2}}$ Sol.: $\displaystyle\frac{4}{\sqrt{2}}\left[\cos\ \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\left[\cos\ \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]^3\right];$

f) $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ Sol.: $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{3}}(\operatorname{arcsen} x)^3 + C;$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ Sol.: $\operatorname{arcsec} x + C;$

h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx.$ Sol.: $\displaystyle\ln\left(\frac{e+2}{3}\right).$

4.4 Integración por partes.

Comenzamos con la fórmula de la derivada del producto de dos funciones

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x).$$

Integrando ambos miembros tenemos

$$\int (f \cdot g)'(x)\, dx = \int f(x)\, g'(x)\, dx + \int f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Como sabemos que

$$\int (f \cdot g)'(x)\, dx = (f \cdot g)(x) + C = f(x) \cdot g(x) + C$$

tenemos

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx + \int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) + C$$

y por tanto

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx + C.$$

Como el cálculo de $\int f'(x)\, g(x)\, dx$ originará su propia constante arbitraria, no hay razón para conservar la constante C; podemos en consecuencia suprimirla y escribir

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx. \tag{4.8}$$

Esta fórmula, llamada **fórmula de integración por partes**, nos permite hallar la integral $\int f(x)\, g'(x)\, dx$ calculando $\int f'(x)\, g(x)\, dx$ en su lugar.

Es, naturalmente, de utilidad práctica solamente si la segunda integral es más fácil de calcular que la primera.

En la práctica normalmente se hace

$$u = f(x) \qquad du = f'(x)\, dx$$

$$dv = g'(x)\, dx \qquad v = g(x)$$

la fórmula de integración por partes se escribe entonces

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du. \tag{4.9}$$

El éxito que se tenga mediante la utilización de esta fórmula depende de la elección de u y dv de manera que $\displaystyle\int v\, du$ sea más sencilla de calcular que $\displaystyle\int u\, dv$.

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$.

Solución:

$$u = e^x \quad \longrightarrow \quad du = e^x\,dx$$

$$dv = x\,dx \quad \longrightarrow \quad v = \frac{1}{2}x^2$$

integrando por partes

$$\int x\,e^x\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = \frac{1}{2}x^2\,e^2 - \frac{1}{2}\int x^2\,e^x\,dx$$

esta es una integral más complicada que la que teníamos. Luego no hemos hecho buena elección.
Hagamos otra sustitución

$$u = x \quad \longrightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x\,dv \quad \longrightarrow \quad v = e^x$$

$$\int x\,e^x\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C.$$

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\int \ln x\,dx$.

Solución:

$$u = \ln x \quad \longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$dv = dx \quad \longrightarrow \quad v = x$$

$$\int \ln x\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = x\,\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\,\ln x - \int dx = x\,\ln x - x + C.$$

Ejemplo 3. Calcula $\displaystyle\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$.

Solución:
La dificultad consiste de nuevo en la elección de u y dv. Tras varios intentos fallidos encontramos que la descomposición conveniente es:

$$u = x\,e^x \quad \longrightarrow \quad du = (x\,e^x + e^x)\,dx = (x+1)\,e^x\,dx$$

$$dv = \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \quad \longrightarrow \quad v = -\frac{1}{x+1}$$

luego

$$\int \frac{x\,e^x}{(x+1)^2}dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = -\frac{x\,e^x}{x+1} + \int e^x\,dx =$$

$$= -\frac{x\,e^x}{x+1} + e^x + C = \frac{-x\,e^x + x\,e^x + e^x}{x+1} + C = \frac{e^x}{x+1} + C.$$

Ejemplo 4. Evalua $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^x\, dx$.

Solución:
Calculemos primero la integral indefinida $\int x^2\, e^x\, dx$; hacemos

$$u = x^2 \qquad \longrightarrow \qquad du = 2\,x\,dx$$

$$dv = e^x\, dx \qquad \longrightarrow \qquad v = e^x$$

$$\int 2\,x\,e^x\,dx = 2\,x\,e^x - \int 2\,e^x\,dx = 2\,x\,e^x - 2\,e^x + C$$

$$\int x^2\,e^x\,dx = \int u\,dv = u\,v - \int v\,du = x^2\,e^x - \int 2\,x\,e^x\,dx.$$

Calculemos ahora la integral de la derecha de nuevo por partes

$$u = 2\,x \qquad \longrightarrow \qquad du = 2\,dx$$

$$dv = e^x\,dx \qquad \longrightarrow \qquad v = e^x$$

luego

$$\int x^2\,e^x\,dx = x^2\,e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + C.$$

Entonces

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_0^1 = (e - 2e + 2e) - 2 = e - 2.$$

Ejemplo 5. Calcula $\displaystyle\int x \operatorname{arc\,sen} x\,dx$.

Solución:

$$u = \operatorname{arc\,sen} x \qquad \longrightarrow \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dv = x\,dx \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int x \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t dt =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{\cos t}\,dt = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,sen} x - \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right] + C$$

(hemos hecho el cambio $x = \operatorname{sen} t$).

Ejercicio.

Calcula:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$ Sol.: $\displaystyle\frac{1}{e^x}(-x-1) + C$;

b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x}$ Sol.: $-x\,\operatorname{cotg}x + \ln \operatorname{sen} x + C$;

c) $\displaystyle\int x\,\operatorname{sen} x\,\cos x\,dx$ Sol.: $\dfrac{1}{2}\,x\,\operatorname{sen}^2 x - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}\,\operatorname{sen} 2\,x + C$;

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx$ Sol.: $-\dfrac{1}{2x^2}\,\ln x - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{x^2} + C$;

e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ Sol.: $2 \ln x\,\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C$;

f) $\displaystyle\int x\,\operatorname{arctg}x\,dx$ Sol.: $\dfrac{1}{2}\,\operatorname{arctg} x \cdot x^2 - \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1}{2}\,\operatorname{arctg}x + C$;

g) $\displaystyle\int \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,dx$ Sol.: $x\,\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$;

h) $\displaystyle\int \ln^2 x\,dx$ Sol.: $x\,\ln^2 x - 2\,[x\,\ln x - x] + C$;

i) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ Sol.: $\dfrac{1}{2}\,e^{\operatorname{arctg}x}[x+1]\,\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$

4.5 Integración de fracciones racionales.

Por definición, una fracción racional es el cociente de dos polinomios. Así,

$$\frac{1}{x^2-4}, \qquad \frac{2\,x^3+3}{x^4\,(x^2+x+1)}, \qquad \frac{3\,x^4+x^3+20\,x^2+3\,x+10}{(x-2)\,(x^2+9)^2}$$

son todos ejemplos de fracciones racionales, mientras que no lo son

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \ln x, \qquad \frac{|x-2|}{x^2}.$$

Para integrar una fracción racional suele ser necesario volverla a escribir como la suma de un polinomio (que puede ser idénticamente nulo) y de fracciones de la forma:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{y} \quad \frac{B\,x+C}{(x^2+\beta\,x+\gamma)^k}$$

donde el polinomio $x^2+\beta\,x+\gamma$ es irreducible, es decir, no se puede descomponer como producto de dos polinomios de orden 1 con coeficientes reales.

Tales fracciones reciben el nombre de **fracciones simples**. En álgebra se demuestra que toda función racional puede escribirse de esta forma.

Veamos los casos que se pueden presentar al hacer la descomposición en fracciones.

1. **El denominador se descompone en factores lineales distintos.**

Ejemplo. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4-4}\,dx.$

Para $\displaystyle\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}$, escribimos $\displaystyle\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$

reduciendo a común denominador e igualando los numeradores tenemos

$$1=A(x+2)+B(x-2).$$

Para hallar A y B sustituimos x por valores numéricos

haciendo $x=2$ obtenemos $1=4A \quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{4}$,

haciendo $x=-2$ obtenemos $1=-4B \quad\Rightarrow\quad B=-\frac{1}{4}$,

entonces, la descomposición deseada es

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}.$$

En general, cada factor distinto $(x-\alpha)$ en el denominador, da lugar a un término de la forma

$$\frac{A}{x-\alpha}.$$

Pues bien

$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}\left(\ln|x-2|-\ln|x+2|\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C.$$

2. **El denominador tiene un factor lineal repetido.**

Ejemplo. $\displaystyle\int\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}\,dx.$

Escribimos

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

de lo cual se deduce

$$2x^2+3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx.$$

Para determinar los tres coeficientes A, B, C necesitamos sustituir x por tres valores numéricos. Escogemos 0 y 1 dado que para esos valores, varios términos del segundo miembro se eliminan. Como tercer valor de x vale cualquier otro número; para que el cálculo aritmético sea más sencillo escogemos el valor 2.

$$\text{haciendo } x = 0 \text{ obtenemos } A = 3,$$

$$\text{haciendo } x = 1 \text{ obtenemos } C = 5,$$

$$\text{haciendo } x = 2 \text{ obtenemos } 11 = A + 2B + 2C \quad \Rightarrow \quad B = -1.$$

Por tanto

$$\frac{2\,x^2+3}{x\,(x-1)^2} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}.$$

En general, cada factor de la forma $(x-\alpha)^k$ en el denominador, da lugar a una expresión de la forma

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^3} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

Pues bien

$$\int \frac{2x^3+3}{x\,(x-1)^2}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right) dx =$$

$$= 3\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x+1} + C.$$

3. **El denominador tiene un factor cuadrático irreducible.**

Ejemplo. $\displaystyle\int -\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$

Escribimos

$$\frac{-2x}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B\,x+C}{x^2+1}$$

y obtenemos

$$-2\,x = A\,(x^2+1) + (B\,x+C)\,(x+1).$$

Esta vez vamos a usar $-1, 0$ y 1;

haciendo $x = -1$ obtenemos $2 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = 1$

haciendo $x = 0$ obtenemos $0 = A + C \quad \Rightarrow \quad C = -1$

haciendo $x = 1$ obtenemos $-2 = 2A + 2B + 2C \quad \Rightarrow \quad B = -1.$

Luego la descomposición es

$$\frac{-2\,x}{(x+1)\,(x^2+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Pues bien
$$\int \frac{-2x}{(x+1)(x^2+1)}dx = \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+1}\right] dx =$$
$$= \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C.$$
En general, cada factor cuadrático irreducible $x^2 + \beta\, x + \gamma$ en el denominador, da lugar a un término de la forma
$$\frac{A\,x + B}{x^2 + \beta\, x + \gamma}$$
veamos otro **ejemplo**.
$$\int \frac{dx}{x\,(x^2+x+1)}$$
$$\frac{1}{x\,(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2+x+1}$$
$$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)x$$
$$\left.\begin{array}{ll} \text{para } x=0 & 1 = A \\ \text{para } x=1 & 1 = 3A+B+C \\ \text{para } x=-1 & 1 = A+B-C \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1. \end{array}$$
Entonces
$$\int \frac{dx}{x\,(x^2+x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1} =$$
$$= \ln|x| - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$
Para calcular la integral $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$, observemos que
$$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
luego
$$x^2+x+1 = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) =$$
$$= \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\left(x+\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) =$$
$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}i^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Entonces

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(t^2+1)}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t+1}{\frac{3}{2}(t^2+1)}dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\sqrt{3}t+1}{t^2+1}dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sqrt{3}\int \frac{t}{t^2+1}dt + \int \frac{dt}{t^2+1}\right] = \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+\text{arctg}t\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+C$$

aquí hemos hecho el cambio $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t$; diferenciando $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$ y luego $t=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Por tanto, para la integral original obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2+x+1\right)} = \ln|x| - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

4. **El denominador tiene un factor cuadrático irreducible repetido.**

Ejemplo 1. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{x^2+1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \int \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\left(x^2+1\right)}dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \text{arctg}x - \int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$$

Resolviendo esta nueva integral por partes

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\text{arctg x}$$

donde se ha usado $u=x \rightarrow du=dx$, $dv=\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx \rightarrow v=\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(x^2+1\right)}$.

Por tanto, el valor de la integral original es

$$\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C.$$

Ejemplo 2. $\displaystyle\int \frac{3\,x+5}{(x^2+2\,x+2)^2}\,dx.$

$$\int \frac{3\,x+5}{(x^2+2\,x+2)^2}\,dx = \int \frac{3x+5}{\left[(x+1)^2+1\right]^2}dx = \int \frac{3(z-1)+5}{(z^2+1)^2}dz =$$

$$= \int \frac{3z+2}{(z^2+1)^2}dz = \int \frac{3z}{(z^2+1)^2}dz + \int \frac{2}{(z^2+1)^2} = -\frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1} + 2\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1} + 2\left[\mathrm{arctg}z + \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}z\right] + C =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{z^2+1} + \mathrm{arctg}z + \frac{z}{z^2+1} + C = \mathrm{arctg}z + \frac{-3+2z}{2\,(z^2+1)} + C =$$

$$= \mathrm{arctg}(x+1) + \frac{-3+2(x+1)}{2\,[(x+1)^2+1]} + C = \mathrm{arctg}(x+1) + \frac{2x-1}{2\,[(x+1)^2+1]} + C.$$

En general cada factor cuadrático irreducible repetido $(\mathbf{x}^2+\beta\,\mathbf{x}+\gamma)^{\mathbf{k}}$ en el denominador da lugar a una expresión de la forma:

$$\frac{A_1\,x+B_1}{x^2+\beta\,x+\gamma} + \frac{A_2\,x+B_2}{(x^2+\beta\,x+\gamma)^2} + \ldots + \frac{A_k\,x+B_k}{(x^2+\beta\,x+\gamma)^k}.$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \frac{2\,dt}{(4\,t^2+4)^2} = \int \frac{2\,dt}{4^2\,(t^2+1)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{8}\left[\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\mathrm{arctg}t - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt\right]$$

(hemos hecho el cambio $x = 2\,t \rightarrow dx = 2\,dt$).

Calculemos la nueva integral

$$\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt = -\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,t$$

donde se ha usado $u = t \to du = dt$, $dv = \dfrac{t}{(t^2+1)^2}dt \to v = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^2}dt =$
$-\dfrac{1}{2}\dfrac{t}{t^2+1}$.
Por tanto la integral original queda

$$\frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}\text{arctg}t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}\right].$$

Deshaciendo el cambio de variable

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}\frac{x}{\frac{x^2}{4}+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2}\text{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{x^2+4}\right] + C.$$

Hay otra forma de resolver la integral original, haciendo el cambio $2\ \text{tg}\, u = x$;

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{8}\int \cos^2 u\, du = \frac{1}{16}\int (1+\cos 2u)\, du = \frac{1}{16}u + \frac{1}{32}\,\text{sen}\, u + C =$$

$$= \frac{1}{16u} + \frac{1}{16}\,\text{sen}\, u \cos u + C = \frac{1}{16}\text{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{16}\text{arc tg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\left(\frac{x}{x^2+4}\right) + C.$$

En general, las integrales del tipo $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ **pueden calcularse haciendo el cambio de variable** $a\ \text{tg}\, u = x$.

5. **Si el grado del numerador es mayor o igual que el denominador.**

   Se hace primero la división y aparece un polinomio (de integración inmediata) más una integral de los tipos anteriores.

Ejercicio.

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$ Sol.: $x + \ln \sqrt[4]{\dfrac{|x-1|}{|x+1|}} - \dfrac{1}{2}\text{arc tg}\, x + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ Sol.: $\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{2}\ln\left[\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right] + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}\,\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} + \right.$
$\left. + \dfrac{1}{2}\ln\left[\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right] + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{arc tg}\,\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$ Sol.: $\displaystyle\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{(x-2)}-\frac{11}{(x-2)^2}+C$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x\left(x^2+1\right)}\,dx$ Sol.: $\displaystyle x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$ Sol.: $\displaystyle -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$

4.6 Integración de fracciones irracionales.

Las integrales de fracciones irracionales son del tipo

$$\int R\left(x,\left(\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right)\,dx.$$

Generalmente se resuelven haciendo el cambio

$$\frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}=t^s$$

siendo s el mínimo común múltiplo de $q_1,q_2\dots$

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

Solución:
En este caso el cambio adecuado es $x+1=t^6$, que nos da $dx=6\,t^5\,dt$ y $t=\sqrt[6]{x+1}$. Entonces

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{\sqrt{t^6}-\sqrt[3]{t^6}}{\sqrt{t^6}}6t^5\,dt=6\int\frac{t^3-t^2}{t^3}t^5\,dt=$$

$$=6\int t^5-t^4\,dt=t^6-\frac{5}{6}t^5+C=(x+1)-\frac{5}{6}\sqrt[6]{(x+1)^5}+C.$$

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx.$

Solución:
Ahora realizamos el cambio $x+1=t^2$; por tanto $dx=2\,t\,dt$, luego

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=\int\frac{(t+2)2tdt}{t^4-t}=2\int\frac{t+2}{t^3-1}\,dt=2\int\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}\,dt.$$

Descomponiendo el integrando en fracciones

$$\frac{t+2}{(t-1)(t^2+t+1)}=\frac{A}{t-1}+\frac{B\,t+C}{t^2+t+1}$$

$$t+2=A\left(t^2+t+1\right)+(B\,t+C)\,(t-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}0=A+B\\1=A+B+C\\2=A-C\end{array}\right\}\qquad A=3\quad B=-3\quad C=1$$

luego

$$\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x-1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx=2\left[3\int\frac{1}{t-1}dt+\int\frac{-3t+1}{t^2+t+1}\,dt\right]=$$

$$=2\left[3\ln|t-1|+\int\frac{-3t+1}{t^2+t+1}\,dt\right]$$

la integral nueva que aparece es de las que hemos visto anteriormente. Una vez resuelta se deshace el cambio, $t=\sqrt{x+1}$. (Acabadlo vosotros).

Ejemplo 3. Calcula $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Solución:
En este caso el cambio adecuado es $x=t^6$, que nos da $dx=6t^5dt$,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=$$

$$=6\left[\int\left(t^2-t+1\right)dt-\int\frac{1}{t+1}dt\right]=6\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right]+C=$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

4.6.1 Diferenciales binomias.

Se llama binomio diferencial a la expresión: $x^m\,(a+b\,x^n)^p\,dx$ donde m,n,p,a,b son constantes.

La integral del binomio diferencial $\displaystyle\int x^m\,(a+b\,x)^p\,dx$ puede ser transformada, si m,n,p son números racionales, en una integral de una función racional.

Se pueden presentar los siguientes casos:

- que p sea un número entero o cero.
- que $\dfrac{m+1}{n}$ sea un número entero o cero.
- que $\dfrac{m+n}{n}+p$ sea un número entero o cero.

En todos ellos se hace inicialmente el cambio de variable $x = x^{\frac{1}{n}}$, $dx = \dfrac{1}{n}\, z^{\frac{1}{n}-1}\, dz$, entonces

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx = \int z^{\frac{m}{n}}(a+bz)^p\,\frac{1}{n}\,z^{\frac{1}{n}-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p\,dz = \frac{1}{n}\int z^q\,(a+bz)^p\,dz$$

donde $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$.

- **Si p es entero**, como q es racional le llamamos $\dfrac{r}{s}$, entonces

  $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int z^q\,(a+bz)^p\,dz$ se convierte en $\displaystyle\int R\left(z^{\frac{r}{s}}, z\right)\,dz$ que puede ser transformada en la integral de una función racional por el cambio $z = t^s$.

  Ejemplo. Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.

  Solución:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx$$

  aquí son

$$m = -\frac{2}{3}, \quad n = \frac{2}{3}, \quad p = -1$$

  por tanto el cambio es

$$x = z^{\frac{1}{n}} \longrightarrow x^n = z \longrightarrow x^{\frac{2}{3}} = z \longrightarrow x = z^{\frac{3}{2}} \longrightarrow dx = \frac{3}{2}\,z^{\frac{1}{2}}\,dz.$$

  Luego la integral nos queda

$$\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}\,dz = \frac{3}{2}\int t^{-1}(1+t^2)^{-1}\,2\,t\,dt.$$

  En este caso, $q = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{r}{s}$ por lo tanto el cambio es $z = t^s \longrightarrow z = t^2 \longrightarrow dz = 2\,t\,dt$. Volviendo a la integral

$$3\int \frac{dt}{1+t^2} = 3\operatorname{arc\,tg} t + C = 3\operatorname{arc\,tg}\sqrt{z} + C = 3\operatorname{arc\,tg} x^{\frac{1}{3}} + C.$$

- **Si $\dfrac{\mathbf{m+1}}{\mathbf{n}}$ es entero**, entonces $q = \dfrac{m+1}{n} - 1$ también es entero, p es racional por lo que podemos poner $p = \dfrac{1}{\mu}$, transformándose la integral $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int z^q\,(a+bz)^p\,dz$

en una de la forma $\int R\left(z^q, (a+bz)^{\frac{\lambda}{\mu}}\right)\, dz$ que puede transformarse en la integral de una función racional haciendo el cambio

$$a + bz = t^\mu.$$

Ejemplo. Calcula $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solución:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int x^3(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$m = 3, \quad n = 2, \quad p = -\frac{1}{2}, \quad \frac{m+1}{n} = 2,$$

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad x = z^{\frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\, z^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

$$\frac{1}{2}\int z\,(1-z)^{-\frac{1}{2}}\, dz = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\, t^{-1}(-2)\, t\, dt = -\int (1-t^2)\, dt$$

$$p = -\frac{1}{2} \to \mu = 2 \quad \text{por lo tanto el cambio es} \quad 1 - z = t^2 \to dz = -2\, t\, dt.$$

Continuando con la integración

$$-t + \frac{t^3}{3} + C = -\sqrt{1-z} + \frac{\sqrt{(1-z)^3}}{3} + C = -\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C.$$

- **Si $\frac{\mathbf{m+1}}{\mathbf{n}} + \mathbf{p}$ es entero**, entonces $\frac{m+1}{n} - 1 + p = q + p$ también es entero, transformándose la integral en $\int z^q\,(a+bz)^p\, dz = \int z^{q+p}\left(\frac{a+b\,z}{z}\right)^p dz$ donde $q+p$ es entero y $p = \frac{k}{\rho}$ racional. La integral obtenida es de la forma $\int R\left(z, \left(\frac{a+b\,z}{z}\right)^{\frac{k}{\rho}}\right) dz$ que se puede convertir en una racional con el cambio de variable

$$\frac{a+bz}{z} = t^\rho.$$

Ejemplo. Calcula $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2\,\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int x^{-2}\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\, dx$$

$$m=-2, \quad n=2, \quad p=-\frac{3}{2}, \rightarrow \frac{m+1}{n}+p=-2,$$

$$x=z^{\frac{1}{n}} \rightarrow x=z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz=\frac{1}{2}\int z^{-3}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz$$

$$p=-\frac{3}{2} \rightarrow \rho=2$$

$$\frac{1+z}{z}=t^2 \rightarrow 1+z=z\,t^2 \rightarrow \frac{1}{t^2-1}=z \rightarrow dz=\frac{-2t}{(t^2-1)^2}dt.$$

Por tanto

$$-\int (t^2-1)\,t^{-2}\,dt=-\int\frac{t^2-1}{t^2}\,dt=-\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=-t-\frac{1}{t}+C=$$

$$=-\sqrt{\frac{1+z}{z}}-\sqrt{\frac{z}{1+z}}+C=-\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}+C=-\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

4.6.2 Sustituciones de Euler.

Sirven para resolver integrales de la forma

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+C}\right)dx.$$

Existen tres posibles sustituciones:

- si $a>0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t;$
- si $c>0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c}=x\,t\pm\sqrt{c};$
- si $a\,x^2+b\,x+c=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta) \quad \rightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases}(x-\alpha)\,t\\(x-\beta)\,t\end{cases}$

  α y β reales.

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

Solución:
En este caso $a=1>0$, luego hacemos $\sqrt{x^2-x+3}=x+t$; elevando al cuadrado ambos miembros

$$x^2-x+3=(x+t)^2=x^2+2\,x\,t+t^2 \quad \Rightarrow \quad 2\,x\,t+x=3-t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x\,(2t+1) = 3 - t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3-t^2}{2t+1} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{(-2\,t^2 - 2\,t - 6)}{(2\,t+1)^2}dt$$

luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 3}} = \int \frac{\frac{-2t^2-2t-6}{(1+2t)^2}}{\frac{3-t^2}{1+2t}\left(\frac{3-t^2}{1+2t} + t\right)}\,dt = \int \frac{\frac{-2\left(t^2+t+3\right)}{(1+2t)^2}}{\frac{(3-t^2)}{(1+2t)}\left(\frac{3-t^2+t+2t^2}{1+2t}\right)}\,dt =$$

$$= -2\int \frac{t^2+t+3}{(3-t^2)\,(3+t+t^2)}\,dt = -2\int \frac{1}{(3-t^2)}\,dt = -2\int \frac{dt}{\left(\sqrt{3}-t\right)\left(\sqrt{3}+t\right)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\ln\left|\sqrt{3}-t\right|\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\sqrt{3}+t\right|\right) + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x^2-x+3}+x}{\sqrt{3}+\sqrt{x^2-x+3}-x} + C.$$

Ejemplo 2. Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

Solución:
Ahora $c = 1 > 0$, luego hacemos el cambio $\sqrt{x^2+x+1} = x\,t + 1$ y elevando al cuadrado

$$x^2+x+1 = x^2\,t^2 + 2\,x\,t + 1 \quad \Rightarrow \quad x\,(x+1) = x\,\left(x\,t^2 + 2\,t\right) \quad \Rightarrow \quad x+1 = x\,t^2 + 2\,t \quad \Rightarrow$$

$$x - x\,t^2 = 2\,t - 1 \quad \Rightarrow \quad x\,\left(1-t^2\right) = 2\,t - 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2t-1}{1-t^2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2\,t^2 - 2\,t + 2}{(1-t^2)^2}\,dt$$

luego

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}}{\left(1+\frac{2t-1}{1-t^2}\right)\left(\frac{2t-1}{1-t^2} - t + 1\right)}\,dt = \int \frac{2t^2-2t+2}{(-t^2+2t)\,(t^2-t+1)}\,dt =$$

$$= \int \frac{2}{-t^2+2t}\,dt = \int \frac{2}{t(2-t)}\,dt = \ln|t| - \ln|2-t| + C = \ln\frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}}{2 - \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}} + C.$$

Ejemplo 3. Calcula $\displaystyle\int \sqrt{2x - x^2}\,dx$.

Solución:
La descomposición del radicando es $2\,x - x^2 = x\,(2-x)$. Si consideremos la raiz $x = 0$ el cambio a realizar es

$$\sqrt{2\,x - x^2} = t\,x \quad \longrightarrow \quad 2\,x - x^2 = t^2\,x^2 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{2}{t^2+1} \quad \longrightarrow \quad dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

luego

$$\int \sqrt{2x-x^2}dx = \int t\,x\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\frac{-4t}{(t^2+1)^2}\,dt = \int \frac{-8t^2}{(1+t^2)^3}\,dt = \ldots$$

Ejercicio.

Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$.

4.7 Integración de funciones trigonométricas.

1. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ con m ó n impar.

- **supongamos que n es impar**

  Si n = 1 la integral se reduce a

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos x \, dx = \frac{1}{m+1} \operatorname{sen}^{m+1} x + C. \tag{4.10}$$

  Si n > 1 escribimos

$$\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$$

  como $n-1$ es par, $\cos^{n-1} x \cos x$ puede expresarse en potencias de $\operatorname{sen}^2 x$ sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, la integral toma la forma

$$\int (\text{suma de potencias de } \operatorname{sen} x) \cos x \, dx$$

  que puede descomponerse en integrales de la forma (4.10).

- de igual forma, **si m es impar** escribimos

$$\operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen}^{m-1} x \operatorname{sen} x$$

  y utilizamos la sustitución $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Ejemplo 1.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^2 x \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 \cos x \, dx =$$

$$= \int \left(\operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x\right) \cos x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx - 2 \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}^6 x \cos x \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x - \frac{2}{5} \operatorname{sen}^5 x + \frac{1}{7} \operatorname{sen}^7 x + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int \operatorname{sen}^5 x \, dx = \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right) \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x \, dx - 2 \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx + \int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

2. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ con m y n ambos pares.

Se utilizan las fórmulas para el ángulo doble

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x, \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Ejemplo 1.

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \operatorname{sen} x\, dx = \int \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$$

Ejemplo 3.

$$\int x \operatorname{sen}^2 x^2\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 t\, dt = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right] dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right] + C = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t + C = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2x^2 + C.$$

(se ha hecho el cambio $x^2 = t$).

3. Integrales de la forma $\int \operatorname{sen} p\,x \operatorname{sen} q\,x\, dx$, $\int \operatorname{sen} p\,x \cos q\,x\, dx$, $\int \cos p\,x \cos q\,x\, dx$.

Usando las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B\right]$$

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos A + \cos B\right]$$

$$\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\operatorname{sen}\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos B - \cos A\right]$$

se pasa de la forma producto de senos y cosenos a la forma suma de senos y cosenos.

Ejemplo 1.

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} 8x + \operatorname{sen}(-2x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} 8x \, dx + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen}(-2x) \, dx = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C,$$

aquí se ha utilizado la primera fórmula trigonométrica con

$$\left.\begin{array}{l} A+B=3x \\ A-B=5x \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A+B=6x \\ A-B=10x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=8x \\ B=-2x. \end{array}$$

Ejemplo 2.

$$\int \cos(ax+b) \cos(ax-b) \, dx = \int \frac{1}{2} \left[\cos 2ax + \cos 2b\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 2ax \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2b \, dx = \frac{1}{4a} \operatorname{sen}(2ax) + \frac{1}{2} \cos(2b) \cdot x + C,$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A+B}{2} = ax+b \\ \dfrac{A-B}{2} = ax-b \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A+B=2ax+2b \\ A-B=2ax-2b \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=2ax \\ B=2b. \end{array}$$

Ejemplo 3.

$$\int \operatorname{sen} wt \cdot \operatorname{sen}(wt+\varphi) \, dt = \int \frac{1}{2} \left[\cos(-\varphi) - \cos(2wt+\varphi)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cos\varphi \int dt - \frac{1}{2} \int \cos(2wt+\varphi) \, dt = \frac{t}{2} \cos\varphi - \frac{1}{4w} \operatorname{sen}(2wt+\varphi) + C,$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A+B}{2} = wt \\ \dfrac{A-B}{2} = wt+\varphi \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} A+B=2wt \\ A-B=2wt+2\varphi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=2wt+\varphi \\ B=-\varphi. \end{array}$$

4. Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^n x \, dx$, $\int \operatorname{cotg}^n x \, dx$.

- Para integrar $\operatorname{tg}^n x$ hacemos

$$\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \operatorname{tg}^2 x = \left(\operatorname{tg}^{n-2} x\right) \left(\sec^2 x - 1\right) = \operatorname{tg}^{n-2} x \sec^2 x - \operatorname{tg}^{n-2} x.$$

- Para integrar $\operatorname{cotg}^n x$ hacemos

$$\operatorname{cotg}^4 x = \operatorname{cotg}^{n-2} x \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cotg}^{n-2} x \left(\operatorname{cosec}^2 x - 2\right) = \operatorname{cotg}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^{n-2} x.$$

Ejemplo.

$$\int \operatorname{tg}^6 x \, dx = \int \left(\operatorname{tg}^4 x \sec^2 x - \operatorname{tg}^4 x\right) dx = \int \left(\operatorname{tg}^4 x \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x\right) dx =$$

$$= \int \left(\operatorname{tg}^4 x \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \sec^2 x - 1\right) dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - \int dx =$$

$$= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - x + C.$$

5. Integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$, $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$.

- **Para las potencias pares escribimos**

$$\sec^n x = \sec^{n-2} x \sec^2 x = \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right)^{\frac{n-2}{2}} \sec^2 x$$

y

$$\operatorname{cosec}^n x = \operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x = \left(\operatorname{cotg}^2 x + 1\right)^{\frac{n-2}{2}} \operatorname{cosec}^2 x.$$

Ejemplo.

$$\int \sec^4 x \, dx = \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) \sec^2 x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

- **Para las potencias impares se puede integrar por partes**:

  * para $\sec^n x$ se hace el cambio $u = \sec^{n-2} x$, $dv = \sec^2 x \, dx$ y cuando aparece $\operatorname{tg}^2 x$ se usa la identidad $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

  ** para $\operatorname{cosec}^n x$ se opera de la misma forma.

Ejemplo. Calcula $\displaystyle\int \sec^3 x \, dx$.

Solución:

$$u = \sec x \quad \to \quad du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \, dx \quad \to \quad v = \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x$$

luego

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx = \sec x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx =$$

$$= \sec x \ \operatorname{tg} x - \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x \, dx =$$

$$= \sec x \ \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx = \sec x \ \operatorname{tg} x - \int \sec^3 x \, dx + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \, .$$

Por tanto

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \ \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \left[\sec x \ \operatorname{tg} x + \ln |\sec x + \operatorname{tg} x|\right] + C.$$

6. Integrales de la forma $\int \operatorname{tg}^m x \ \sec^n x \, dx$, $\int \operatorname{cotg}^m x \ \operatorname{cosec}^n x \, dx$.

- **Si n es par** escribimos

$$\operatorname{tg}^m x = \sec^n x = \operatorname{tg}^m x \ \sec^{n-2} x \ \sec^2 x$$

y expresamos $\sec^{n-2} x$ en función de $\operatorname{tg}^2 x$ usando la fórmula

$$\sec^2 x = \operatorname{tg}^2 x + 1.$$

Ejemplo.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \ \sec^4 x \, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \ \sec^2 x \ \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^5 x \ \left(\operatorname{tg}^2 x + 1\right) \sec^2 x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^7 x \ \sec^2 x \, dx + \int \operatorname{tg}^5 x \ \sec^2 x \, dx = \frac{1}{8} \operatorname{tg}^8 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C.$$

- **Cuando n y m son ambos impares** escribimos

$$\operatorname{tg}^m x \ \sec^n x = \operatorname{tg}^{m-1} x \ \sec^{n-1} x \ \sec x \ \operatorname{tg} x$$

y expresamos $\operatorname{tg}^{n-1} x$ en función de $\sec^2 x$ usando la fórmula

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1.$$

Ejemplo.

$$\int \operatorname{tg}^5 x \ \sec^3 x \, dx = \int \operatorname{tg}^4 x \ \sec^2 x \ \sec x \ \operatorname{tg} x dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)^2 \sec^2 x \ \sec x \ \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \int \left(\sec^6 x - 2 \ \sec^4 x \ \sec^2 x\right) \sec x \ \operatorname{tg} x \, dx = \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C.$$

- **Si n es impar y m es par** podemos expresar el producto en términos de $\sec x$ e integrar por partes.

  Ejemplo.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x \, dx = \int \left(\sec^3 x - \sec x\right) \, dx =$$

$$= \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

en un ejemplo anterior vimos que

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

y

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

luego

$$\int \operatorname{tg}^2 x \sec x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$$

Se trabaja de manera análoga con integrales de la forma $\operatorname{cotg}^m x \operatorname{cosec}^n x$.

4.8 Integrales racionales de funciones trigonométricas.

- Todas las integrales racionales de funciones trigonométricas se pueden hacer con el cambio

$$\operatorname{tg} \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \mathrm{t} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t \quad \rightarrow \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{2\,dt}}{\mathbf{1 + t^2}}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Ejemplo 1.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} \, dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\left[\frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t}\right] =$$

$$= \ln|1+t| - \ln|1-t| + C = \ln\frac{|1+t|}{|1-t|} + C.$$

Ejemplo 3.

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{1+t^2+2\,t+t+1-t^2} =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{2\,t+2} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

- Casos particulares:

  a) **Si el integrando es impar en el** $\cos x$ (al cambiar $\cos x$ por $-\cos x$ en la integral, ésta cambia de signo), entonces se hace el cambio.

  $$\mathbf{sen\,x = t \qquad cos\,x\,dx = dt.}$$

  Ejemplo 1.

  $$\int \frac{\cos x}{4\operatorname{sen}^4 x}dx = \int \frac{dt}{4t^4} = \frac{1}{4}\frac{t^{-3}}{-3} = -\frac{1}{12}\frac{1}{t^3} + C = -\frac{1}{12}\frac{1}{\operatorname{sen}^3 x} + C.$$

  Ejemplo 2.

  $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{t^2}{\cos^3 x}\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{t^2 dt}{\cos^4 x} = \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2}$$

  ya conocida.

  b) **Si el integrando es impar en** $\operatorname{sen} x$ se hace el cambio $\mathbf{cos\,x = t}$ y queda del tipo de las anteriores.

  c) **Si el integrando es par en** $\operatorname{sen} x$ **y** $\cos x$, es decir $R((-\operatorname{sen} x), (-\cos x)) = R((\operatorname{sen} x, \cos x)$ entonces se hace el cambio

  $$\mathbf{tg\,x = t} \qquad x = \operatorname{arctg} t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{cos\,x = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \operatorname{cosec} x = \operatorname{tg} x \sqrt{\frac{1}{1+t^2 x}} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{sen\,x} = \sqrt{\frac{\mathbf{t^2}}{\mathbf{1+t^2}}}.$$

Ejemplo 1.

$$\int \frac{4 \operatorname{sen} x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{4\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^3}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{4\frac{\sqrt{t^2}}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}} dt =$$

$$= 4\int t\, dt = 2t^2 + C = 2 \operatorname{tg}^2 x + C.$$

Ejemplo 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x \cos^3 x}} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}}} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{\sqrt{\frac{t^2}{(1+t^2)^4}}}} =$$

$$= \int \frac{dt}{(1+t^2)\frac{\sqrt{t}}{(1+t^2)}} = \int \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

Ejemplo 3. Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x}$.

Solución:
Esta integral es par en seno y coseno.

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt, \cos x = \sqrt{\frac{1}{1+t^2}}, \quad \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^4 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\frac{t^2}{1+t^2}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^2} dt = \int \frac{t^4+2t^2+1}{t^2} dt =$$

$$= \int t^2 dt + 2\int dt + \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{t^3}{3} + 2t - \frac{t^{-3}}{3} + C = \frac{1}{3} tg^3 x + 2tgx - \frac{1}{3tg^3 x} + C.$$

4.9 Funciones hiperbólicas.

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ \operatorname{ch} x &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Para resolver las integrales donde aparecen dichas funciones, se ponen en función de la exponencial y se aplican métodos anteriores.

Recordemos algunas fórmulas:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

4.10 Método de Hermite.

Este método es útil cuando el polinomio del denominador tiene raíces complejas múltiples. Cuando el denominador tiene raíces complejas múltiples escribimos:

$$\frac{R(x)}{F(x)} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right] + \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{Mx+N}{(x-\gamma)^2+\beta} + \ldots$$

El denominador $\phi(x)$ será un polinomio que tiene por raíces las de $F(x)$ pero una unidad menos en la multiplicidad, y el numerador $\psi(x)$ es un polinomio sin determinar de grado inferior una unidad al de $\phi(x)$, ya que $\phi(x)$ es el polinomio que resulta al dividir $F(x)$ por $(x-a), (x-b), \ldots, (x-\gamma)^2 + \beta^2$

Se determinan los coeficientes de $\psi, A, B, \ldots, M, N$, (se puede demostrar que el sistema obtenido es determinado).

Una vez efectuada esta descomposición, la integración es inmediata.

$$\int \frac{R(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{d}{dx}\left[\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right]\,dx + \int \frac{A}{x-a}\,dx + \ldots =$$

$$= \frac{\psi(x)}{\phi(x)} + A\ln|x-a| + B\ln|x-b| + \ldots$$

Ejemplo 1. Calcula la integral de $\dfrac{x^2-2}{x^3\,(x^2+1)^2}$.

<u>Solución</u>:

Sea la fracción $\dfrac{x^2-2}{x^3\,(x^2+1)^2}$. La queremos escribir como

$$\frac{x^2-2}{x^3\,(x^2+1)^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{a\,x^3 + b\,x^2 + C\,x + d}{x^2\,(x^2+1)}\right] + \frac{A}{x} + \frac{B\,x + C}{x^2+1}. \qquad (*)$$

Operamos con el primer sumando

$$\frac{d}{dx}\left[\left(ax^3+bx^2+Cx+d\right)x^{-2}\left(x^2+1\right)^{-1}\right]=$$

$$=\left(3\,a\,x^2+2\,b\,x+C\right)x^{-2}\left(x^2+1\right)^{-1}+\left(a\,x^3+b\,x^2+C\,x+d\right)\cdot\left(-2\,x^{-3}\right)\left(x^2+1\right)^{-1}-$$
$$-2\left(x^2+1\right)^{-2}x^{-1}\left(a\,x^3+b\,x^2+C\,x+d\right)$$

Sustituyendo esta expresión en $(*)$ y multiplicando lo obtenido por $x^3\left(x^2+1\right)^2$ queda

$$x^2-2=x\left(x^2+1\right)\left(3\,a\,x^2+2\,b\,x+C\right)-2\left(x^2+1\right)\left(a\,x^3+b\,x^2+C\,x+d\right)-$$

$$-2\,x^2\left(a\,x^3+b\,x^2+C\,x+d\right)+A\,x^2\left(x^2+1\right)^2+(B\,x+C)x^3\left(x^2+1\right).$$

Igualando los términos $x^6, x^5, \ldots, x, x^0$, queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0\\ C-a=0\\ 2A+B-2b=0\\ C+a-3b=0\\ A-Ad=1\\ C=0\\ -2d=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow quad \begin{array}{llll} a=0 \;, & b=\frac{5}{2} \;, & c=0 \;, & d=1\\ A=5 \;, & B=-5 \;, & C=0. & \end{array}$$

Y, sustituyendo e integrando

$$\int\frac{x^2+2}{x^3\left(x^2+1\right)^2}\,dx=\frac{\frac{5}{2}\,x+1}{x^2\left(x^2+1\right)}+\int\frac{5}{2}\,dx-\frac{5}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\frac{\frac{5}{2}x+1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}+5\ln|x|-\frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C.$$

Ejemplo 2. Calcula la integral $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}dx.$

Solución:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)\left(x^2+2\right)^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{ax+b}{x^2+2}\right]+\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(ax+b)\left(x^2+2\right)^{-1}\right]=a\left(x^2+2\right)^{-1}-2(ax+b)x\left(x^2+2\right)^{-2}$$

Multiplicando por $(x-1)\left(x^2+2\right)^2$

$$x^2+1=a(x-1)\left(x^2+2\right)-2(ax+b)x(x-1)+A\left(x^2+2\right)^2+(Bx+C)(x-1)\left(x^2+2\right)$$

Igualando coeficientes y resolviendo el sistema resultante, se obtiene que

$$a = \frac{1}{12} \quad , \quad b = -\frac{1}{6} \quad , \quad A = \frac{2}{9} \quad , \quad C = -\frac{5}{36}$$

luego

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)\,(x^2+2)^2}dx = \frac{1}{12}\frac{x-2}{x^2+2} + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln\left|x^2+2\right| - \frac{5}{36\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Nota. Todas las funciones racionales $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ admiten primitiva en términos elementales. Son integrables mediante funciones elementales.

Capítulo 5

Integrales impropias.

5.1 Definición de integral impropia.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se dice **impropia** si

(1) uno de los límites de integración o los dos se hacen infinitos ó

(2) $f(x)$ no está acotada en uno o más puntos del intervalo $[a, b]$, puntos que se llaman **singularidades** de $f(x)$.

5.2 Integrales extendidas a un intervalo infinito. (Integrales de 1^a especie).

Definición. Sea $f(x)$ acotada e integrable en un intervalo finito $a \leq x \leq b$. Si existe

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

y dicho límite es finito, a éste límite se le llama integral impropia de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, \infty]$ y se designa por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Por tanto, según la definición tenemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \tag{5.1}$$

En este caso suele decirse que la **integral impropia** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existe o **converge**.

Si el límite del segundo miembro de (5.1) no existe o no es finito, entonces se dice que la **integral impropia** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ no existe o es **divergente**.

De modo análogo se determinan las integrales impropias correspondientes a otros intervalos infinitos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.2}$$

La integral del primer miembro de (5.2) es convergente o divergente, según que el límite del segundo miembro exista y sea finito o no.

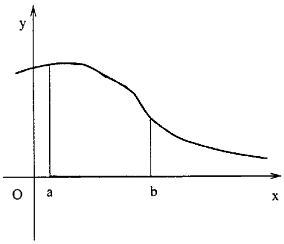
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{5.3}$$

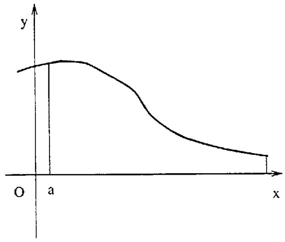
La igualdad (5.3) la debemos entender así: si existen cada una de las integrales impropias del segundo miembro, entonces existe (converge) la integral del primer miembro.

Significado geométrico de la integral impropia

Sea dada la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ para $f(x) > 0$.

Si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de un dominio limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$, es natural considerar que la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ expresa el área del dominio infinito comprendido entre las curvas $y = f(x)$, $x = a$ y el eje de abscisas.





Ejemplos.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}.$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty}[\operatorname{sen} x]_a^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{a\to-\infty}\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} a\right]$

como este límite no existe, $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx$ es divergente.

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$

la segunda integral es la del ejemplo 1) $\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Calculemos ahora

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}[\operatorname{arctg}x]_a^0=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[0-\operatorname{arctg}a]=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

luego

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

5.3 Integrales de funciones no acotadas. (Integrales de 2^a especie).

a) **Si $\mathbf{f(x)}$ no está acotada solamente en el extremo $\mathbf{x = a}$ del intervalo $\mathbf{a \le x \le b}$,** se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx. \tag{5.4}$$

Si el límite del segundo miembro de (5.4) existe y es finito; se dice que la integral del primer miembro es convergente; en caso contrario que es divergente.

Ejemplo. Demuestra que $\displaystyle\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ converge y halla su valor.

<u>Solución</u>:

El integrando no es acotado en $x=-1$. Se define entonces la integral por

$$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}=\lim_{\epsilon\to0^+}\left.\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_{-1+\epsilon}^{7}=$$

$$=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}-\frac{\epsilon^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)=\lim_{\epsilon\to0^+}\left(6-\frac{2}{3}\epsilon^{\frac{2}{3}}\right)=6.$$

b) **Si $\mathbf{f(x)}$ no está acotada solamente en el extremo $\mathbf{x = b}$ del intervalo $\mathbf{a \le x \le b}$,** se define

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to0^+}\int_{a}^{b-\epsilon} f(x)\,dx. \tag{5.5}$$

La integral del primer miembro de (5.5) se dice convergente o divergente según que exista o no el límite, y sea finito, del segundo miembro.

Ejemplo. Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Solución:

Como el integrando no está acotado para $x = 1$ hacemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[-2\sqrt{(-1+\epsilon)} + 2\sqrt{1}\right] = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left[-2\sqrt{\epsilon} + 2\right] = 2.$$

c) **Si f(x) no está acotada solamente en un punto interior $x = x_0$ del intervalo $\mathbf{a \leq x \leq b}$**, se define entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_a^{x_0-\epsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{x_0+\epsilon_2}^b f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

La integral del primer miembro de (5.6) converge o diverge según que existan o no los límites y sean finitos, del segundo miembro.

Ejemplo. Calcula la integral $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Solución:

Vemos que en $x_0 = 0$, el integrando es discontinuo, por tanto, la integral la debemos expresar

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{0-\epsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}$$

calculemos por separado cada límite

- $\displaystyle\lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{-\epsilon_1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{-\epsilon_1} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \left[-\frac{1}{-\epsilon_1} + 1\right] = \infty$

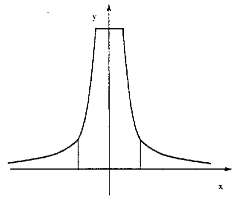
  luego en $[-1, 0]$ la integral diverge.

- $\displaystyle\lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{0+\epsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{\epsilon_2}^1 = \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \left[-1 + \frac{1}{\epsilon_2}\right] = \infty$

  luego en $[0, 1]$ la integral también diverge.

  Por tanto, la integral dada, diverge en el intervalo $[-1, 1]$.

Nota importante.



Si hubiésemos calculado la integral dada sin tener en cuenta la discontinuidad del integrando en $x_0 = 0$, habríamos obtenido un resultado erróneo pues

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1}\right) = -2$$

lo cual es imposible como podemos observar al representar la función.
Puede suceder que los límites del segundo miembro de (5.6) no existan cuando ϵ_1 y ϵ_2 tiendan a cero independientemente. En tal caso es posible que el límite exista si se elige $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$ en (5.6) o sea escribiendo

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \int_a^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \right\} \tag{5.7}$$

si existe el límite del segundo miembro de (5.7) y es finito, se dice que este valor límite es el **valor principal de Cauchy** de la integral del primer miembro.

Ejemplo. Determina si $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3}$ converge

a) en el sentido "corriente";

b) en el sentido del valor principal de Cauchy.

<u>Solución</u>:

a) Por definición

$$\int_{-1}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \int_{-1}^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \int_{1+\epsilon_2}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} =$$

$$= \lim_{\epsilon_1 \to 0^+} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon_1^2}\right) + \lim_{\epsilon_2 \to 0^+} \left(\frac{1}{2\epsilon_2^2} - \frac{1}{32}\right)$$

y como los límites no existen, la integral no converge en el sentido corriente.

b) Pero

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \int_{-1}^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + \int_{1+\epsilon}^{5} \frac{dx}{(x-1)^3} \right\} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \frac{1}{8} - \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{32} \right\} = \frac{3}{32}$$

la integral existe en el sentido del valor principal de Cauchy. El valor principal es $\frac{3}{32}$.

Nota. Si la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ presenta en este intervalo un número finito de puntos en los que no está acotada: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{a_n}^{b} f(x)\,dx$$

si cada una de las integrales impropias del segundo miembro converge. Si por lo menos, una de las integrales diverge, $\int_a^b f(x)\,dx$ es también divergente.

Si uno o los dos límites de integración se hacen infinitos y además $f(x)$ no está acotada en uno o más puntos, el problema de convergencia se resuelve descomponiendo la integral dada en integrales de los tipos anteriores.

Ejemplos.

1) Sea $f(x) = \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}$ y $a < b$. Esta función es integrable en $[a, b-\epsilon]$ para cualquier ϵ tal que $0 < \epsilon \leq b-a$. Estudia el valor de la integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ para los distintos valores de α.

Solución:

- **Si $\alpha = 1$**

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{1}{b-x}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[-\ln|b-x|\right]_a^{b-\epsilon} =$$

$$= -\lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\ln|b-b+\epsilon| - \ln|b-a|\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\ln|\epsilon| - \ln|b-a|\right] \to \infty,$$

luego para $\alpha = 1$ diverge.

- **Si $\alpha \neq 1$**

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[-\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\right]_a^{b-\epsilon} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1}\lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\right]_a^{b-\epsilon} = \frac{1}{\alpha-1}\lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{1}{(\epsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right] = (*)$$

Si $\alpha > 1$

$$\frac{1}{(\epsilon)^{\alpha-1}} \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{la integral diverge.}$$

Si $\alpha < 1$

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{1}{(\epsilon)^{\alpha-1}} = \epsilon^{\alpha-1} \to 0 \qquad (\text{pues} \quad 1-\alpha > 0)$$

luego

$$(*) = -\frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \text{converge,}$$

luego $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$ solamente converge para $\alpha < 1$.

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \frac{\mathbf{dx}}{(\mathbf{x}-\mathbf{a})^\alpha} \qquad \begin{array}{lll} \textbf{converge} & \textbf{si} & \alpha < \mathbf{1} \\ \textbf{diverge} & \textbf{si} & \alpha \geq \mathbf{1} \end{array} \tag{5.8}$$

2) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ y $a > 0$. Estudia la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$.

<u>Solución</u>:

- **Si** $\boldsymbol{\alpha = 1}$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}[\ln|x|]_a^b = \lim_{b\to\infty}[\ln|b| - \ln|a|] = +\infty$$

para $\alpha = 1$ la integral es divergente;

- **Si** $\boldsymbol{\alpha \neq 1}$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^b =$$

$$= -\frac{1}{\alpha-1}\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_a^b = -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right] = (**)$$

Si $\boldsymbol{\alpha > 1}$

$$\frac{1}{b^{\alpha-1>0}} \quad \to \quad \frac{1}{\infty} \quad \to \quad 0 \quad \Rightarrow$$

$$(**) = -\frac{1}{\alpha-1}\left(-a^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \text{convergente.}$$

Si $\boldsymbol{\alpha < 1}$

$$\frac{1}{b^{\alpha-1<0}} = b^{1-\alpha>0} \quad \to \quad \infty \quad \Rightarrow$$

$$(**) \quad \to \quad \infty \quad \Rightarrow \quad \text{divergente.}$$

Luego

$$\int_{\mathbf{a}}^\infty \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}^\alpha}\mathbf{dx} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{a} > \mathbf{0} \qquad \textbf{solamente converge cuando } \alpha > \mathbf{1}. \tag{5.9}$$

5.4 Criterios de convergencia.

- **Para integrales impropias de primera especie**

  Los criterios que siguen se dan para casos en que un límite de integración es ∞. Hay criterios semejantes cuando un límite de integración es $(-\infty)$ (con el cambio de variable $x = -t$ el límite de integración queda ∞). Si no se dice otra cosa, se supone que $f(x)$ es continua y, por tanto, integrable en todo intervalo infinito $a \leq x \leq b$.

  1) **Criterio de comparación** para integrales de integrando no negativo.

     a) **Convergencia**.

     Sea $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$, y supóngase que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge. Entonces si $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \geq a$

     $$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{también converge.}$$

     Ejemplo.

     $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge pues

     $$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-x}\right]_0^b =$$

     $$= -\lim_{b\to\infty}\left[e^{-b} - e^{-0}\right] = -\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{e^b} - 1\right] = 1$$

     Como $\dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ e $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ converge, entonces

     $$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} \qquad \text{también converge.}$$

     b) **Divergencia**.

     Sea $g(x) \geq 0$ para todo $x \geq a$ y supóngase que $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge.

     Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \geq a \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$ también diverge.

     Ejemplo.

     Dado que $\dfrac{1}{\ln x} > \dfrac{1}{x}$ para $x \geq 2$ y por la fórmula (5.9) la integral $\int_2^\infty \dfrac{dx}{x}$ diverge, entonces

     $$\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x} \qquad \text{también diverge.}$$

2) **Criterio del cociente** para integrales de integrando no negativo.

   a) Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ y si $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$ donde $\mathbf{A \neq 0}$ **ó** $\neq \infty$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas.

   b) **Si** $\mathbf{A = 0}$ e $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge.

   c) **Si** $\mathbf{A = \infty}$ e $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge.

Este criterio se relaciona con el de comparación y se usa muy a menudo en vez de éste. En particular tomando $g(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ se tiene en virtud de la fórmula (5.9) el siguiente teorema.

Teorema 5.1 *Sea* $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = A$. *Entonces*

i) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *y* A *es finito.*

ii) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *diverge si* $\alpha \leq 1$ *y* $A \neq 0$ *(puede ser infinito).*

Se pueden obtener criterios parecidos con $g(x) = e^{-tx}$.

Ejemplo 1.

$\displaystyle\int_a^\infty \frac{x^2}{4x^4+25}\,dx$ converge porque tomando $\alpha = 2 > 1$ resulta

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4}.$$

Ejemplo 2.

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$ diverge pues $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1.$

Ejemplo 3.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^3+7}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^3+7}} = 1 \quad \neq 0 \quad \neq \infty$$

$$\frac{5}{2} > 1 \quad \text{luego} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5+x^3+7}} \quad \text{es convergente.}$$

3) **Convergencias absoluta y condicional.**

$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ se dice **absolutamente convergente** si $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge.
Si $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge pero $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ se dice **condicionalmente convergente**.

Teorema 5.2 *Si $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ converge, entonces $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge, es decir que una integral absolutamente convergente es convergente.*

Ejemplo 1.

$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ es absolutamente convergente y por tanto convergente pues

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2+1}\right| dx \leq \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} \quad \text{converge.}$$

Ejemplo 2.

$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge pero $\int_0^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx$ no converge, por ello $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es condicionalmente convergente.

Cualquiera de los criterios utilizados para integrales de integrando no negativo, se pueden emplear como criterio de convergencia absoluta.

- **Para integrales impropias de segunda especie**

Los criterios que vamos a ver se dan para el caso en que $f(x)$ no es acotada en un punto $x = a$ solamente del intervalo $a \leq x \leq b$. Hay criterios parecidos cuando $f(x)$ no es acotada en $x = b$ o en $x_0 \in (a, b)$.

1) **Criterio de comparación** para integrales de integrando no negativo.

a) **Convergencia.**

Sea $g(x) \geq 0$ con $a < x \leq b$ y supóngase que $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ converge.

Entonces si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a < x \leq b$, $\int_a^{b} f(x)\,dx$ también converge.

Ejemplo.

$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ para $x > 1$.

Sabemos que $\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ converge luego $\int_1^{5} \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ también converge.

b) **Divergencia.**

Sea $g(x) \geq 0$ con $a < x \leq b$ y supóngase que $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge. Entonces si $f(x) \geq g(x)$ para $a < x \leq b$, $\int_a^b f(x)\,dx$ también diverge.

Ejemplo.

$\dfrac{\ln x}{(x-3)^4} > \dfrac{1}{(x-3)^4}$ para $x > 3$.

Como $\displaystyle\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$ diverge ($\alpha = 4, a = 3$) entonces $\displaystyle\int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\,dx$ también diverge.

2) **Criterio del cociente** para integrales del integrando no negativo.

a) Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ para $a < x \leq b$ y si $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ **ó** $\neq \infty$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen ambas o divergen ambas.

b) **Si** $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ en $a)$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

c) **Si** $\mathbf{A} = \infty$ en $a)$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Este criterio se relaciona con el de comparación y es un útil sustituto del mismo. En partircular, tomando $g(x) = \dfrac{1}{(x-\alpha)^\alpha}$ se tiene por las conocidas propiedades de la integral el

Teorema 5.3 *Sea* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = A$ *entonces*

i) $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si* $\alpha < 1$ *y* A *es finito.*

ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge si* $\alpha \geq 1$ *y* $A \neq 0$ *(*A *puede ser infinito).*

Si $f(x)$ no está acotada solamente en el límite superior estas condiciones se reemplazan por las del

Teorema 5.4 *Sea* $\displaystyle\lim_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = B$, *entonces*

i) $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si* $\alpha < 1$ *y* B *es finito.*

ii) $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge si* $\alpha \geq 1$ *y* $B \neq 0$ *(*B *puede ser infinito).*

Ejemplo 1.

$\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ converge pues

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(x^4-1)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}}=$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{(x-1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2.

$\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ diverge pues

$$\lim_{x\to 3^-}(3-x)\frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

3) **Convergencia absoluta y condicional.**

$\int_a^b f(x)dx$ se dice **absolutamente convergente** si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, pero si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se dice **condicionalmente convergente**.

Teorema 5.5 *Si* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ *converge,* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge, es decir, que una integral absolutamente convergente es convergente.*

Ejemplo.

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

además

$\displaystyle\int_\pi^{4\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ converge $\quad (\alpha=\frac{1}{3}, a=\pi)$

entonces

$\displaystyle\int_\pi^{4\pi}\left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$ converge, luego $\displaystyle\int_\pi^{4\pi}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\,dx$ converge (absolutamente).

5.5 Criterio de convergencia de Cauchy.

Teorema 5.6 ***Criterio de convergencia de Cauchy.***
Sea $f(x)$ integrable en $[a,x]$ $\forall\ x > A$. Entonces
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *es convergente si y sólo si* $\forall\ \epsilon > 0$ $\exists\ M \in \mathbb{R}$ *tal que*
$|F(x) - F(x')| = \left|\displaystyle\int_{x'}^{x} f(x)\,dx\right| < \epsilon,\ \forall\ x, x' > M,$ *siendo* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx.$

Ejemplo. Demuestra que si $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es absolutamente convergente entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es convergente.

Solución:

Vamos a utilizar el criterio de convergencia de Cauchy. Sea $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ y $F_1(x) = \displaystyle\int_a^x |f(u)|\,du$. Sabemos que $|F(x)| \leq F_1(x)$.

Si existe $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = l$ entonces $\forall\ \epsilon > 0$ $\exists\ M > 0,$ $\forall\ x, x' > M$ con $x > x'$

$$|F_1(x) - F_1(x')| = \left|\int_a^x |f(t)|\,dt - \int_a^{x'} |f(t)|\,dt\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \int_{x'}^{x} |f(t)|\,dt < \epsilon \Rightarrow \left|\int_{x'}^{x} f(t)dt\right| < \epsilon \Rightarrow |F(x) - F(x')| < \epsilon$$

luego existe $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ y por tanto $\displaystyle\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ es convergente.

Importante. La convergencia no implica la convergencia absoluta.

Veámoslo con un ejemplo: la integral de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

- Veamos que es convergente.

$$\int_{x'}^{x''} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\cos x'}{x'} - \frac{\cos x''}{x''} - \int_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Dado que $|a - b| \leq |a| + |b|$, si $0 < x < x' < \infty$

$$\left|\int_{x'}^{x''} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| < \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \int_{x'}^{x''} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \left[-\frac{1}{x}\right]_{x'}^{x''} =$$

$$= \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} - \frac{1}{x''} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{2x'}$$

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, k \;/\; k < x < x' < \infty \quad \text{tomando} \quad k = \frac{1}{2\epsilon}$$

$$\frac{1}{2\epsilon} < x' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x'} < \epsilon$$

luego $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ es convergente.

- Veamos que no es absolutamente convergente.

  Por conveniencia para la demostración vamos a tomar como extremo inferior $x = 1$, esto no nos va a alterar la convergencia o divergencia.

  Llamemos $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$

$$|\operatorname{sen} x| \geq \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad (\text{pues } -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1)$$

entonces
$$\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x}\, dx.$$

Por un lado $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ sabemos que es divergente.

Resolvamos ahora

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx = \left[\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}\right]_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2} dx = -\frac{\operatorname{sen} 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}\, dx$$

que es convergente porque $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ y la $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ es convergente.

Por tanto

$$\int_1^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx \geq \text{una divergente} + \text{una convergente} \quad \Rightarrow$$

I no es convergente luego $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ no es absolutamente convergente.

Ejercicios.

1) Calcula las siguientes integrales cuando converjan:

   a) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x-4}}$ Sol.: 2;

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ Sol.: π.

2) Discute para qué valores de p la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ converge. Sol.: $p < 1$.

3) Estudia la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ Sol.: convergente;

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ Sol.: divergente;

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$ Sol.: absolutamente convergente;

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-2)}}$ Sol.: convergente;

e) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x+e^{-x}} dx$ Sol.: divergente.

Capítulo 6

Métodos Numéricos del Cálculo Integral.

6.1 Introducción.

Para calcular una integral definida mediante la fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

sabemos que primero tenemos que hallar una primitiva F y, luego calcular sus valores en los puntos a y b.

Pero esto a veces no es sencillo y a veces no es posible. Para integrales aparentemente simples como $\int_0^1 \sqrt{x}\operatorname{sen} x\,dx$ e $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ no existen funciones elementales cuyas derivadas sean $\sqrt{x}$ y e^{-x^2}.

En este capítulo vamos a estudiar algunos métodos numéricos sencillos que nos permitan evaluar integrales definidas, métodos que se pueden usar aunque no sepamos hallar una primitiva. Dichos procedimientos utilizan solamente aritmética elemental y pueden implementarse en el ordenador.

Centremos nuestra atención en

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

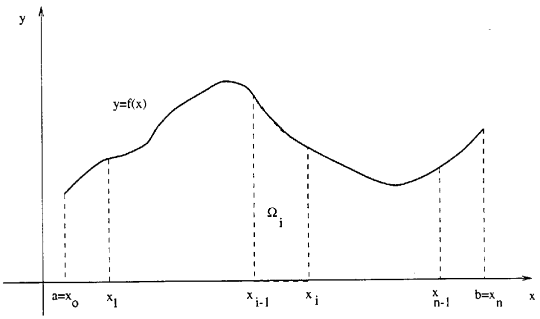
suponiendo que f es continua en $[a,b]$ y, para simplicar nuestras figuras, que es positiva.

Empecemos dividiendo $[a,b]$ en n subintervalos, cada uno de los cuales tiene longitud $\dfrac{(b-a)}{n}$,

$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup \ldots \cup [x_{i-1},x_i] \cup \ldots \cup [x_{n-1},x_n].$$

Sea

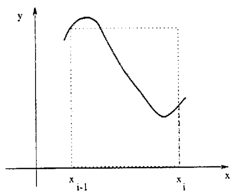
$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n}.$$



La región Ω_i representada en la figura puede aproximarse de varios modos:

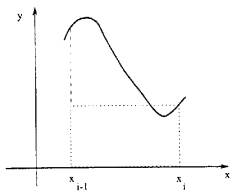
1) Por medio del rectángulo correspondiente al extremo izquierdo del subintervalo.

$$\begin{aligned} \text{área} &= f(x_{i-1}) \triangle x_i = \\ &= f(x_{i-1}) \left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$



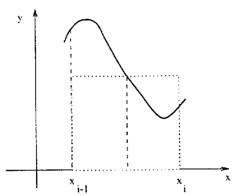
2) Por medio del rectángulo correspondiente al extremo derecho del intervalo.

$$\begin{aligned} \text{área} &= f(x_i) \triangle x_i = \\ &= f(x_i) \left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$



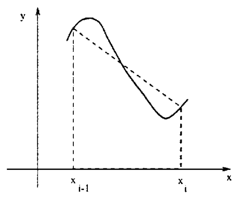
3) Por medio del rectángulo correspondiente al punto intermedio.

$$\begin{aligned} \text{área} &= f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \triangle x_i = \\ &= f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right). \end{aligned}$$



4) Por medio de un trapecio.

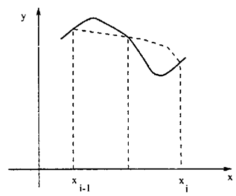
$$\begin{aligned}
\text{área} &= \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\triangle x_1 = \\
&= \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\left(\frac{b-a}{n}\right).
\end{aligned}$$



5) Por medio de región parabólica. Se toma la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por tres puntos indicados.

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \frac{1}{6}\left[f(x_{i-1})+4f\left(\frac{(x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)\right]\triangle x_i = \\
&= \frac{1}{6}\left[f(x_{i-1})+4f\frac{(x_{i-1}+x_i)}{2}+f(x_i)\right]\left(\frac{b-a}{6n}\right).
\end{aligned}$$

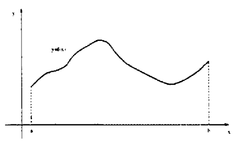
Observad que si los tres puntos están alineados la parábola degenera en una recta y la región parabólica se convierte en un trapecio. En este caso, la fórmula se reduce a la del trapecio.



Las aproximaciones de Ω_i que acabamos de considerar da lugar a las estimaciones para

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

que veremos a continuación.



6.2 Fórmula de los rectángulos.

1) La estimación del extremo izquierdo del subintervalo

$$L_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right]. \tag{6.1}$$

2) La estimación del extremo derecho del subintervalo

$$R_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right]. \tag{6.2}$$

3) La estimación del punto intermedio

$$M_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]. \tag{6.3}$$

Observad que estas tres primeras estimaciones L_n, R_n y M_n son sumas de Riemann.

6.3 Fórmula de los trapecios.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] = \\ &= \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.4 Fórmula de Simpson.

La estimación parabólica da lugar a la regla de Simpson

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{6n}\{f(x_0)+f(x_n)+2\left[f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right]+ \\ &+4\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+\ldots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]\}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Nota. Cada una de las estimaciones puede usarse para aproximar la integral con tanta precisión como se quiera. Todo lo que hay que hacer es tomar n suficientemente grande.

Ejemplo. Halla el valor aproximado de $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ aplicando cada una de las cinco estimaciones.

Solución:

Aquí tenemos $f(x) = \frac{1}{x}$ y el intervalo es $[a,b] = [1,2]$.

Tomando $n = 5$, tenemos

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5}.$$

Los puntos de la partición son

$$x_0 = \frac{5}{5}, \quad x_1 = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{7}{5}, \quad x_3 = \frac{8}{5}, \quad x_4 = \frac{9}{5}, \quad x_5 = \frac{10}{5}.$$

Las cinco estimaciones son entonces las siguientes:

$$L_5 = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{5}+\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right) \cong 0'75;$$

$$R_5 = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}+\frac{5}{10}\right) = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right) \cong 0'65;$$

$$M_5 = \frac{1}{5}\left(\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{15}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}\right) = 2\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right) \cong 0'69;$$

$$T_5 = \frac{1}{10}\left(\frac{5}{5}+\frac{10}{6}+\frac{10}{7}+\frac{10}{8}+\frac{10}{9}+\frac{5}{10}\right) = \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right) \cong 0'70;$$

$$S_5 = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{5}+\frac{5}{10}+2\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{7}+\frac{5}{8}+\frac{5}{9}\right)+4\left(\frac{10}{11}+\frac{10}{13}+\frac{10}{15}+\frac{10}{17}+\frac{10}{19}\right)\right] \cong 0'69.$$

Dado que el integrando $\frac{1}{x}$ decrece en todo el intervalo $[1,2]$, se puede esperar que la estimación del extremo izquierdo, $0'75$, sea demasiado grande, mientras que la estimación del extremo derecho, $0'65$ será demasiado pequeña. Entonces las otras estimaciones deber ser mejores.

Mirando en una tabla, da, $\ln 2 \cong 0'693$. Luego la estimación $0'69$ es correcta redondeada hasta las centésimas.

Ejemplo 1. Halla el valor aproximado de $\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,dx$ mediante la regla del trapecio (toma $n=4$).

Solución:
Cada subintervalo tiene longitud

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}.$$

Los puntos de partición son

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Por lo tanto

$$T_4 = \frac{1}{4}\left[f(0)+2f\left(\frac{1}{2}\right)+2f(1)+2f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right].$$

Utilizando una calculadora y redondeando hasta la tercera cifra decimal, tenemos

$$f(0) = 2'000, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 2'031, \qquad f(1) \cong 2'236,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \cong 2'716, \qquad f(2) \cong 3'464,$$

luego

$$T_4 \cong \frac{1}{4}(2'000+4'060+4'472+5'432+3'464) \cong 4'858.$$

Ejemplo 2. Halla el valor aproximado de $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4+x^3}\,dx$ por la regla de Simpson (toma $n=2$).

Solución:
Hay dos intervalos cada uno de los cuales tiene longitud igual a

$$\triangle x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{2} = 1.$$

Aquí

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \frac{x_0+x_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{3}{2}.$$

La regla de Simpson nos da

$$S_2 = \frac{1}{6}\left[f(0) + f(2) + 2f(1) + 4f\left(\frac{1}{2}\right) + 4f\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

utilizando las estimaciones del ejercicio anterior, nos da

$$S_2 \cong \frac{1}{6}\left(2'000 + 3'464 + 4'472 + 8'124 + 10'864\right) \cong 4'821.$$

Ejercicio.

Calcula mediante diferentes métodos

$$\int_1^3 \left(x^3 + 2x^2 - 1\right)\,dx.$$

Capítulo 7

Series.

7.1 Conceptos previos.

La notación sumatorio.

Para indicar la sucesión $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ podemos llamar $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y escribir $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, pero también podemos llamar $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ y escribir $\{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$. En general podemos llamar $c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+p}$ y escribir $\{c_p, c_{p+1}, c_{p+2}, \ldots\}$. En este tema a menudo vamos a comenzar con un índice distinto de 1.

El símbolo $\sum$ es la letra griega sigma mayúscula. Usaremos la expresión

$$\sum_{k=0}^{n} a_k$$

que leeremos: suma de a sub k, desde k igual a cero hasta n para indicar la suma:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,$$

es decir, se define **sumatorio desde $k = 0$ hasta n**

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n. \tag{7.1}$$

En general, si $n \geq m$ usaremos

$$\sum_{k=m}^{n} a_k$$

para indicar la suma

$$a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n,$$

es decir

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n. \tag{7.2}$$

En (7.1) y (7.2) se puede reemplazar la letra k por otra cualquiera que no haya sido utilizada anteriormente. Por ello decimos que k es una variable muda. Por ejemplo la suma

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

se puede indicar mediante cualquiera de los siguientes sumatorios:

$$\sum_{i=3}^{8} a_i, \qquad \sum_{j=3}^{8} a_j, \qquad \sum_{k=3}^{8} a_k.$$

Propiedades

- La suma de dos sumatorios es igual al sumatorio de la suma

$$\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \tag{7.3}$$

esto es,

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_n + b_n).$$

- El producto de un número real por un sumatorio es igual al sumatorio del producto del escalar por cada término del sumatorio

$$\alpha \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \alpha\, a_k \tag{7.4}$$

esto es,

$$\alpha\,(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) = \alpha\, a_0 + \alpha\, a_1 + \ldots + \alpha\, a_n.$$

- Descomposición de un sumatorio

$$\sum_{k=0}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{7.5}$$

porque

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_m) + (a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n) = a_0 + a_1 + \ldots + a_n.$$

A veces, será conveniente cambiar los índices; observemos que

$$\sum_{k=j}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-j} a_{k+j}$$

dado que las dos son abreviaciones de $a_j + a_{j+1} + \ldots + a_n$.

Si todos los a_k son iguales a un número fijo x, entonces $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ se puede escribir $\sum\limits_{k=0}^{n} x$ y evidentemente

$$\sum_{k=0}^{n} x = x + x + \ldots + x = (n+1)\,x.$$

Como caso particular $\sum\limits_{k=0}^{n} 1 = n + 1$.

Mientras que se puede formar la suma de dos, tres, cien o mil números, es imposible formar la suma de una cantidad infinita de números. Los matemáticos han respondido a esta imposibilidad con la teoría de las series infinitas.

Definición. Dada una sucesión infinita de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la expresión

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

se llama **serie numérica** y la representamos por

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k. \tag{7.6}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman **términos de la serie**.

Ejercicios.

1) Demuestra que $\quad \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

2) Demuestra que para $x \neq 1 \quad \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1 - x^{n-1}}{1 - x}$.

3) Verifica por inducción:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{1}{2}\,n\,(n+1)$,

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (2\,k - 1) = n^2$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$,

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

7.2 Convergencia de una serie.

Definición. La suma de los primeros n términos de la serie se llama **suma parcial n-ésima** de la serie y se representa

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n. \tag{7.7}$$

Consideremos las sumas parciales:

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 \\ S_1 &= a_0 + a_1 \\ S_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ S_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \end{aligned}$$

Con ellas podemos formar la sucesión $\{S_0, S_1, S_2, \ldots\}$.

Definición. Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ y es finito, se representa por $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Dicho límite S se llama **suma de la serie** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ y se dice que la **serie converge.** Si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ no existe, o no es finito, entonces se dice que la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ **diverge** o no tiene suma.

Ejemplo 1. Sea la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$. La n-ésima suma parcial viene dada por

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \frac{1 - 2^n \cdot 2}{1 - 2}$$

como $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, la serie es divergente.

Ejemplo 2. Prueba que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$

Para ello tenemos que demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$$

Como $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$ tenemos que

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$$

por tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1.$$

Ejemplo 3.
La serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ diverge pues, $S_n = -1$ para n impar y $S_n = 0$ para n par luego $\{S_n\}$ es una sucesión oscilante, por lo tanto no converge.

Ejemplo 4. Serie Geométrica.
Sea la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots . \tag{7.8}$$

Sus sumandos son términos de una progresión geométrica de razón q.

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^n \cdot q}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

por ser la suma de los $n+1$ primeros términos de una progresión geométrica.

- **Si $|\mathbf{q}| < \mathbf{1}$** entonces $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} \to 0$ y por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}$$

luego si $|q| < 1$, la serie (7.8) converge y su suma es $S = \dfrac{1}{1-q}$.

- **Si $|\mathbf{q}| > \mathbf{1}$** entonces $|q^n| \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \to \pm\infty$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe. Luego si $|q| > 1$ la serie (7.8) diverge.

- **Si $\mathbf{q = 1}$** la serie (7.8) tiene la forma

$$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Entonces $S_n = n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Luego la serie (7.8) también diverge.

- **Si $\mathbf{q = -1}$** la serie (7.8) toma la forma

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

En este caso

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{cuando } n \text{ es impar} \\ 1 & \text{cuando } n \text{ es par} \end{cases}$$

por consiguiente $\{S_n\}$ no tiene límite y la serie (7.8) diverge.

Resumen. La serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$

- **si $|q| < 1$, converge y $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$,**

- **si $|q| \geq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ diverge.**

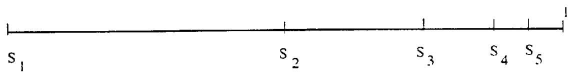
Ejemplo 5. Como caso particular de la serie geométrica tenemos la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Ojo, si en vez de $k = 0$ comenzamos en $k = 1$ las sumas parciales de la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ son:

$$S_1 = \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \quad S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Cada nueva suma parcial está a medio camino entre la suma anterior y el número 1



luego $\quad \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1.$

Teorema 7.1 *Dada la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{7.6}$$

si converge la serie obtenida mediante la supresión en (7.6) de algunos de sus términos, entonces converge también la serie dada.
Inversamente, si converge la serie dada, entonces converge también la serie obtenida mediante la supresión de algunos de sus términos.
En otras palabras, en la convergencia de la serie no influye la supresión de un número finito de términos. Es decir

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

Demostración:
Sea S_n la suma de los n primeros términos de la serie (7.6) y C_k la suma de los k términos suprimidos, (notemos que cuando n es suficientemente grande, todos los términos suprimidos están comprendidos en la suma S_n) y sea σ_{n-k} la suma de los términos de la serie que entran en la suma S_n pero no entran en la C_k

$$S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k) + (a_{k+1} + a_{k+2} + a_n) = C_k + \sigma_{n-k}.$$

C_k es un número constante que no depende de n. Por ello, se deduce que si existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ entonces existe también $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n-k}$.

c.q.d.

Teorema 7.2 *Dadas dos series convergentes,* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = l$ *y* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = m$, *entonces*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = l + m \qquad y \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha\, a_k = \alpha\, l \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

- Sean $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ y $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Por la propiedad (7.3)

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = S_n + T_n$$

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{como} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l & \Rightarrow & \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = l \\ \text{como} & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k = m & \Rightarrow & \displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = m \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_n + T_n) = l + m$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l + m \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = l + m.$$

- Sea $\quad V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha\, a_n$. Por la propiedad (7.4), $V_n = \alpha\, S_n$.

  Como $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_n = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n = l$ entonces

$$\alpha \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \alpha\, S_n = \alpha\, l \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} V_n = \alpha\, l \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha\, a_k = \alpha\, l.$$

c.q.d.

7.3 Criterios de convergencia.

7.3.1 Condición necesaria de convergencia de una serie.

En el estudio de las series, uno de los problemas principales es el de la convergencia o divergencia de la serie dada. A continuación estableceremos los criterios suficientes para resolver este problema. En primer lugar estudiaremos un criterio necesario para la convergencia de una serie, es decir, estableceremos la condición cuyo incumplimiento significa que la serie diverge.

Teorema 7.3 *Si una serie converge, entonces su n-ésimo término tiende a cero cuando n tiende a infinito.*

Demostración:

Sea la serie (7.6), $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, convergente, es decir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Evidentemente tenemos también la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

puesto que cuando $n \to \infty$, también $(n-1) \to \infty$.

Restando término a término en los dos límites anteriores obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0 \quad \text{pero} \quad S_n - S_{n-1} = a_n \quad \text{luego} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

c.q.d.

Corolario. *Si el n-ésimo término de la serie no tiende a cero cuando $n \to \infty$, entonces la serie $\sum_{k=0}^{\infty}$ es divergente.*

Ejemplo.
La serie $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{2n+1} + \ldots$ diverge puesto que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Ojo. El teorema 7.3 **no dice** que si $a_n \to 0$ entonces $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. Hay series divergentes con $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, el criterio del teorema 7.3 es sólo necesario, pero no es suficiente.

Ejemplo 1.
En el caso de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ tenemos que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ cuando $n \to \infty$ pero

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

es decir, $S_n > \sqrt{n}$, entonces como $\{S_n\}$ no está acotada no puede converger.

Ejemplo 2. Serie armónica (nombre puesto por los griegos debido al papel que juega $\frac{1}{n}$ en los armónicos de la música).
La serie armónica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{7.9}$$

diverge aunque $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Para demostrarlo, escribamos la serie armónica de la siguiente forma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Escribamos la "serie auxiliar":

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{32}+\ldots$$

La serie auxiliar se forma del modo siguiente: su primer término es igual a 1, el segundo a $\frac{1}{2}$, el tercero y cuarto son iguales a $\frac{1}{4}$, a partir del quinto hasta el octavo son iguales a $\frac{1}{8}$, los términos desde el noveno hasta el 16 son iguales a $\frac{1}{16}$, los términos desde el 17 hasta el 32 son iguales a $\frac{1}{32}$, etc.

Designemos por $S_n^{(1)}$ la suma de los n primeros términos de la serie armónica (7.9) y por $S_n^{(2)}$ la suma de los n primeros términos de la serie auxiliar.

Puesto que cada término de la serie (7.9) es igual o mayor que el correspondiente término de la serie auxiliar, entonces, para $n > 2$ tenemos

$$S_n^{(1)} > S_n^{(2)}.$$

Calculemos las sumas parciales de la serie auxiliar para los valores n iguales a $2^1, 2^2, 2^3, 2^4$:

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1+3\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{16} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=$$
$$=1+4\cdot\frac{1}{2}.$$

Del mismo modo se calculan

$$S_{32} = S_{2^5} = 1+5\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{64} = S_{2^6} = 1+6\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{2^7} = 1+7\cdot\frac{1}{2}$$

y en general

$$S_{2^k} = 1+k\cdot\frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, las sumas parciales de la serie auxiliar para k suficientemente grande, pueden ser mayores que cualquier número positivo, es decir

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \infty$$

pero entonces, de la relación $S_n^{(1)} > S_n^{(2)}$ se deduce también

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \infty.$$

Luego la serie armónica (7.9) diverge.

Ejemplo. Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k = l - (a_0 + a_1 + \ldots + a_j)\,.$$

Solución:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k = l \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=j+1}^{\infty} a_k = l - \sum_{k=0}^{j} a_k = l - (a_0 + a_1 + \ldots + a_j)\,.$$

7.3.2 Teoremas de comparación.

De ahora en adelante, y hasta que no digamos lo contrario, vamos a trabajar con series cuyos términos sean no negativos, es decir, $a_k \geq 0 \quad \forall\, k$. Para estas series es fundamental el siguiente teorema:

Teorema 7.4 *Una serie con términos no negativos converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales está acotada.*

Demostración:
Si la sucesión de sumas parciales no está acotada, por lo que vimos en la sección 0.2, no puede converger, por lo tanto no tendrá límite y la serie no puede converger.

Supongamos ahora que la sucesión de sumas parciales está acotada. Como los términos no son negativos, la sucesión de sumas parciales es no decreciente.

Entonces, $\{S_n\}$ está acotada y es no decreciente, luego por el teorema 0.3, $\{S_n\}$ ha de converger, es decir la serie converge.

c.q.d.

Bajo ciertas condiciones, la convergencia o divergencia de una serie, se puede deducir de la convergencia o divergencia de una integral impropia relacionada.

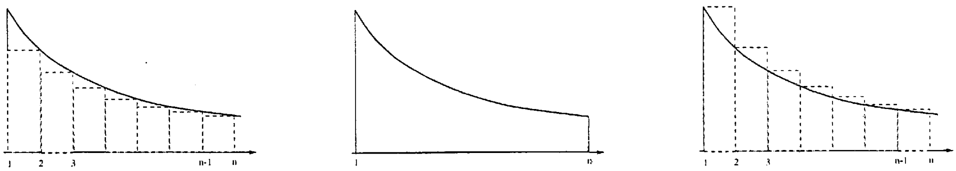
Teorema 7.5 ***Criterio de la integral.***
Si la función f es continua, decreciente y positiva en el intervalo $[1, +\infty)$, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

<u>Demostración</u>:
Se puede demostrar que si f es continua, decreciente y positiva en $[1, +\infty)$ entonces

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{es convergente} \quad \Leftrightarrow \quad \text{la sucesión} \quad \left\{\int_1^{\infty} f(x)\,dx\right\} \quad \text{lo es.}$$

Visualicemos nuestro argumento gráficamente:



Puesto que f decrece en el intervalo $[1, n]$

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \quad \text{es una suma inferior para } f \text{ en } [1, n]$$

y

$$f(1) + \ldots + f(n-1) \quad \text{es una suma superior para } f \text{ en}[1, n].$$

Por lo tanto obtenemos la doble desigualdad

$$f(2) + \ldots + f(n) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$$

$\stackrel{N.}{\Longrightarrow}$ por reducción al absurdo.
Supongamos que la sucesión $\left\{\int_1^n f(x)\,dx\right\}$ diverge. Como f es positiva

$$\int_1^n f(x)\,dx < \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

esto nos dice que la sucesión de integrales es creciente. Siendo divergente y monótona, no puede estar acotada. Entonces, por el lado derecho de la desigualdad doble, la sucesión de sumas parciales no está acotada y por lo tanto la serie será divergente (contradicción).
$\stackrel{S.}{\Longleftarrow}$
Si la sucesión $\left\{\int_1^n f(x)\,dx\right\}$ converge, entonces por el teorema 0.2 está acotada. Por el lado izquierdo de la desigualdad doble, la sucesión de sumas parciales está acotada y como es creciente, la serie es convergente.

c.q.d

Aplicación del criterio de la integral

- **La serie armónica** (7.9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \tag{7.9}$$

diverge.

Demostración:

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es continua, decreciente y positiva en $[1, \infty)$. Entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge, ya que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

La siguiente aplicación nos da un resultado más general.

- **La serie armónica general**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots \tag{7.10}$$

converge si y sólo si $p > 1$.

Demostración:

La función $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ es continua, decreciente y positiva en $[1, \infty)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad p > 1$$

ya que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ converge $\Leftrightarrow$ $p > 1$.

- La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln 3} + \frac{1}{3\ln 4} + \dots \tag{7.11}$$

diverge.

Demostración:

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x+1)}$, como f es continua, decreciente y positiva en $[1, \infty)$ podemos utilizar el criterio de la integral. Además,

$$\int_1^b \frac{dx}{x\ln(x+1)} > \int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \left[\ln\left(\ln(x+1)\right)\right]_1^b = \ln\left(\ln(b+1)\right) - \ln(\ln 2)$$

cuando $b \to \infty$, $\ln(\ln(b+1)) \to \infty$, por lo tanto, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln(x+1)}$ es divergente, luego la serie (7.11) es divergente.

Observación sobre la notación. Vimos en el teorema 7.1 que para cada $j \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si $\displaystyle\sum_{k=j+1}^{\infty} a_k$ converge. Esto nos dice que, al determinar la convergencia de una serie, no tiene trascendencia donde comencemos la numeración de los índices (aunque no olvidemos, que en el caso de convergencia, si que afecta a la suma; recordad que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$, etc.)

Por ello, se puede omitir esta parte de la notación y hablar simplemente de la serie $\sum a_k$. Por ejemplo, tiene sentido decir que $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2}$ converge y que $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$ diverge. La mayor parte del trabajo sobre series con términos no negativos se basa en la comparación con series de comportamiento conocido.

Por eso, el teorema básico siguiente es sencillo e importante.

Teorema 7.6 ***Teorema básico de comparación.***
Sea $\sum a_k$ una serie cuyos términos no son negativos,

a) $\sum a_k$ *converge si existe una serie convergente* $\sum b_k$ *con términos no negativos tal que* $a_k \leq b_k \quad \forall\ k$ *suficientemente grande;*

b) $\sum a_k$ *diverge si existe una serie divergente* $\sum c_k$ *con términos no negativos tal que* $a_k \geq c_k \quad \forall\ k$ *suficientemente grande.*

Demostración:

a) Sean S_n y S_n^*, respectivamente, las sumas parciales de las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_n^* = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Como $a_k \leq b_k \quad \forall\ k$ suficientemente grande, se deduce que

$$S_n \leq S_n^*.$$

Como la serie $\sum b_k$ converge, entonces existe el límite S^* de su suma parcial es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^* = S^*$. Puesto que los términos de las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ son positivos, tenemos que

$$S_n^* < S^* \qquad \Rightarrow \qquad S_n \leq S_n^* < S^*$$

es decir, las sumas parciales S_n están acotadas.

Notemos que, cuando n crece, la suma parcial S_n también crece. Luego como la $\{S_n\}$ está acotada y no decrece, entonces $\{S_n\}$ tiene límite por el teorema 0.3, es decir

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{y es evidente que} \quad S \leq S^*.$$

b) Sean S_n y S_n^{**}, respectivamente, las sumas parciales de las series $\sum a_k$ y $\sum c_k$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_n^{**} = \sum_{k=1}^{n} c_k.$$

Como $a_k \geq c_k$ para todo k suficientemente grande tenemos que

$$S_n \geq S_n^{**}.$$

Como los términos de $\{c_k\}$ son positivos, entonces su suma parcial S_n^{**} crece al aumentar n, y como la serie diverge, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{**} = \infty$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, es decir, la serie $\sum a_k$ diverge.

c.q.d.

Ejemplos.

1) $\sum \dfrac{1}{2\,k^3+1}$ converge por comparación con $\sum \dfrac{1}{k^3}$

pues, $\dfrac{1}{2\,k^3+1} < \dfrac{1}{k^3}$ y $\sum \dfrac{1}{k^3}$ converge.

2) $\sum \dfrac{1}{3\,k+1}$ diverge por comparación con $\sum \dfrac{1}{3\,(k+1)}$

pues, $\dfrac{1}{3\,k+1} > \dfrac{1}{3\,(k+1)}$ y $\sum \dfrac{1}{3\,(k+1)} = \dfrac{1}{3}\sum \dfrac{1}{k+1}$ diverge.

3) $\sum \dfrac{k^3}{k^5+5\,k^4+7}$ converge por comparación con $\sum \dfrac{1}{k^5}$

pues, $\dfrac{k^3}{k^5+5\,k^4+7} < \dfrac{k^3}{k^5} = \dfrac{1}{k^2}$ y $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge.

4) $\sum \dfrac{1}{\ln(k+6)}$ diverge por comparación con $\dfrac{1}{k}$

pues, $\dfrac{1}{\ln(k+6)} > \dfrac{1}{k}$ para $k \geq 3$ y $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.

5) $\sum \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots$ converge pues sus términos son menores que los correspondientes a la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ que es una serie convergente puesto que sus términos a partir del segundo forman una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$. La suma de la segunda serie es $\frac{3}{2}$, por lo tanto la suma de la primera no superará a $\frac{3}{2}$.

6) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^4}\right) + \ldots + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{4^n}\right) + \ldots$ converge, puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$ converge por ser una serie geométrica de razón menor que 1, cuya suma es $S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ y además $\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{4^n}\right) < \frac{1}{4^n}$.

Teorema 7.7 ***Teorema de comparación del límite.***
Sean $\sum a_k$ *y* $\sum b_k$ *series con términos positivos. Si existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$ *estrictamente positivo (no nulo).*

a) Si $\sum b_k$ *es convergente, entonces también lo es* $\sum a_k$*;*

b) si $\sum b_k$ *es divergente, entonces también lo es* $\sum a_k$*.*

Demostración:

a) Si $\frac{a_n}{b_n} \to l$, cuando $n \to \infty$, por la definición de límite

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, N > 0 \;/\; \forall\, n \geq N \quad \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \epsilon$$

es decir

$$-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad l-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l+\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad (l-\epsilon)\, b_n < a_n < (l+\epsilon)\, b_n \;\; \forall\, n \geq N.$$

Si $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=N}^{\infty} (l+\epsilon)\, b_n$ es convergente; luego por el criterio de comparación (teorema 7.6), $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ es convergente y por lo tanto $\sum a_k$ es convergente.

b) hacedlo como ejercicio.

c.q.d.

Ejemplo 1.

La serie $\sum \dfrac{1}{10n+1} = \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{31} + \ldots$ es divergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{10n+1}}{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{10} \neq 0$ y sabemos que $\sum \dfrac{1}{n}$ es divergente.

Nota. La clave para aplicar el criterio de comparación a una serie $\sum a_k$ está en calibrar el orden de la magnitud de los a_k para k grande.

Ejemplo 2.

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}$ converge pues cuando $n \to \infty$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to e$ y $\left(1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right) \to 1$. La influencia mayor es el 2^n del denominador, así que usemos el criterio de comparación del límite con la serie convergente $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} + \ldots$ a la cual se parece la serie dada. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right) = e \cdot 1 = e$$

como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ es convergente, también lo es la serie dada.

Ejemplo 3.

La serie $\sum \dfrac{3k-2}{k^2+1}$ diverge por comparación en el límite con $\sum \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3k-2}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^2-2k}{k^2+1} = 3.$$

Ejemplo 4.

La serie $\sum \dfrac{\sqrt{k}+100}{3k^2\sqrt{k}+2\sqrt{k}}$ converge, por comparación en límite con $\sum \dfrac{1}{k^2}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{k}+100}{3k^2\sqrt{k}+2\sqrt{k}}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2\sqrt{k}+100k^2}{3k^2\sqrt{k}+2\sqrt{k}} = \frac{1}{3}.$$

Ejemplo 5.

La serie $\sum \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{k}$ diverge, por comparación en el límite con $\sum \dfrac{1}{k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\pi\frac{1}{k\pi}} = \lim_{k\to\infty} \pi\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\frac{\pi}{k}} = \pi,$$

ya que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ cuando $x \to 0$.

Teorema 7.8 ***Criterio del cociente (o de D'Alambert).***
Sea $\sum a_k$ *una serie de términos positivos y supongamos que existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

a) Si $l < 1$ *la serie* $\sum a_k$ *converge;*

b) si $l > 1$ *la serie* $\sum a_k$ *diverge;*

c) si $l = 1$ *el criterio no asegura nada.*

Demostración:

a) Tomemos un número r tal que $l < r < 1$, entonces, existe un entero N tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \quad \forall\, n \geq N$$

de donde

$$a_{n+1} < r\, a_n,$$

así que

$$a_{N+1} < r\, a_N$$
$$a_{N+2} < r\, a_{N+1} < r\ (ra_n) = r^2\, a_N$$
$$a_{N+3} < r\, a_{N+2} < r\ \left(r^2 a_N\right) = r^3\, a_N$$

y así sucesivamente.

Por tanto los términos de la serie

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$$

son menores que los correspondientes términos de la serie geométrica

$$a_N + ra_N + r^2 a_N + \ldots$$

salvo para el primer término, a_N, que es igual que el primer término de la serie geométrica.

Como $r < 1$ la serie geométrica converge, por tanto

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots$$

también converge.

b) si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ entonces, para todo n, desde algún N en adelante, $a_{N+1} > a_N$.

Entonces, el término n-ésimo de la serie $a_1 + a_2 + \ldots$ **no** tiende a cero, luego por el criterio del término n-ésimo para la divergencia 7.3, la serie diverge.

c) si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, todo puede suceder.

En este caso deben intentarse otros criterios para determinar si la serie converge o diverge.

c.q.d.

Veamos ahora un ejemplo de cada caso.

a) Caso convergente

Estudia la convergencia de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots$.

Solución:

$a_n = \frac{1}{n!}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = 0 < 1$$

y por lo tanto la serie converge.

b) Caso divergente

Demuestra que la serie $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \ldots + \frac{2^n}{n} + \ldots$ diverge.

Solución:

En este caso $a_n = \frac{2^n}{n}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1$$

y por lo tanto la serie diverge.

c) Caso dudoso

- $\sum \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

y la serie $\sum \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que sabemos que diverge.

- $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

y sabemos que la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Teorema 7.9 ***Criterio de la raiz (o de Cauchy).***

Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos tal que $\sqrt[k]{a_k}$ tiene límite finito cuando $k \to \infty$, es decir, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$ entonces:

a) si $l < 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge;

b) si $l > 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge;

c) si $l = 1$, no puede concluirse nada, es decir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ puede ser convergente o divergente.

Demostración:

a) Sea $l < 1$. Consideremos un número r que satisfaga la desigualdad $l < r < 1$. A partir de un cierto número N, para todo $n \geq N$ se cumple

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| < r - l \quad \Leftrightarrow \quad -(r-l) < \sqrt[n]{a_n} - l < r - l$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} < r \quad \Rightarrow \quad a_n < r^n \forall\, n \geq N.$$

Consideremos ahora las series

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots$$

y

$$r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \ldots.$$

La segunda serie converge, puesto que sus términos forman una progresión geométrica decreciente. Por otro lado, los términos de la primera serie, a partir de a_N son menores que los términos respectivos de la segunda . Por tanto la segunda es serie mayorante de la primera y como la segunda converge entonces también la primera converge.

b) Sea $l > 1$, entonces a partir de un cierto número N tenemos

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \forall\, n \geq N \qquad \text{ó} \qquad a_n > 1 \quad \forall\, n \geq N.$$

Pero si todos los términos de la serie considerada, a partir de a_N son mayores que 1, la serie diverge, puesto que su término general no tiende a cero.

c) si $l = 1$, no podemos asegurar nada.

c.q.d.

Ejemplo 1. Estudia la convergencia de la serie

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots.$$

Solución:
Aplicando el criterio de la raiz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

luego la serie converge.

Ejemplo 2. Estudia el carácter de la serie $\sum \frac{2^k}{k^3}$.
Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = 2 \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^3 = 2 \cdot 1^3 = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{diverge.}$$

Ejemplo 3.
Sabemos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge y que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge. Sin embargo
$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ cuando $n \to \infty$ pues, $\left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ cuando $n \to \infty$, y
$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ cuando $n \to \infty$ pues $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 4. Demuestra que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y calcula $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(10+n)!}{n^n 10!}\right]^{\frac{1}{n}}$.

Solución:
Veamos antes la primera parte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}} =$$

aplicando el criterio de Stolz

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} (\ln a_{n+1} - \ln a_n)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} = e^{\ln \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Calculemos el límite que nos piden como aplicación del resultado de la demostración anterior.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(10+n)!}{n^n 10!}\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(10+n+1)!}{(n+1)^{n+1}10!}}{\frac{(10+n)!}{n^n 10!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+11)!n^n}{(n+1)^{n+1}(10+n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+11)(n+10)!\,n^n}{(n+1)^n(n+1)(10+n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+11}{n+1} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+11}{n+1} \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Teorema 7.10 ***Criterio de Raabe.***

Dada una serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *de términos positivos, si* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = l$ *ó* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = l$*, entonces:*

a) si $l > 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge;*

b) si $l < 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge;*

c) si $l = 1$, *dudoso.*

Nota. Es necesario que a partir de un cierto n en adelante se cumpla que $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$

Ejemplo 1. Analiza la serie $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

<u>Solución</u>:

- Si la estudiamos por el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

- Utilizando ahora el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n!}{(n+1)!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n!}{(n+1)\,n!}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

y entonces también converge.

Ejemplo 2. Analiza la serie $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots$

Solución:

Observamos que su término general es $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$

- $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow$ divergente.
- si no nos hubiésemos dado cuenta y aplicamos el criterio de Raabe

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\frac{(n+1)^2}{2(n+1)^2+1}}{\frac{n^2}{2n^2+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(n+1)^2(2n^2+1)}{[2(n+1)^2+1]\,n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2n^4+4n^3+2n^2+n^2+2n+1}{(2n^2+4n+2+1)n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n^4+4n^2+3n^2-2n^4-4n^3-3n^2-2n-1}{2n^4+4n^3+3n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-4n^3+4n^2-2n-1}{2n^4+4n^3+3n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-4n^4+4n^3-2n^2-n}{2n^4+4n^3+3n^2} = -\frac{4}{2} = -2 < 1 \quad\Rightarrow\quad \text{divergente.}$$

Teorema 7.11 ***Criterio logarítmico.***

Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *si* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n} = l$ *entonces*

a) si $l>1$, *la serie converge;*

b) si $l<1$, *la serie diverge;*

c) si $l=1$, *carácter dudoso.*

Teorema 7.12 *Criterio de Pringheim.*
Dada la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *si* $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = l \neq 0$ *entonces*

a) si $\alpha > 1$, *la serie converge;*

b) si $\alpha \leq 1$, *la serie diverge.*

Nota. Dicho criterio es un caso particular del criterio de comparación.

Ejemplo. Estudia el carácter de la serie $\sum_{2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} =$$

$$= \ln \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^\alpha} = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2(-1)} = \ln e^{-1} = -\ln e,$$

$$\text{donde } \alpha = 2 > 1 \quad \Rightarrow \quad \text{serie convergente.}$$

Ejercicios.

1. Analiza el carácter de las siguientes series.

   a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$ Sol.: convergente;

   b) $\sum \frac{n^n}{n!}$ Sol.: convergente;

   c) $\sum \frac{1}{2k+1}$ Sol.: convergente;

   d) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$ Sol.: convergente;

   e) $\sum \frac{1}{n+\ln n}$;

   f) $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

2. Sea $\sum a_n$ una serie convergente de términos positivos. Estudia el carácter de la serie $\sum \frac{1}{n\,(1+a_n)}$.

7.4 Series Alternadas.

Hasta ahora, hemos estudiado las series cuyos términos son todos positivos. A continuación examinaremos las series cuyos términos son alternativamente positivos y negativos. Es decir, series de la forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$$

ó

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, a_n \tag{7.12}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son todos positivos.

Teorema 7.13 ***Teorema de Leibniz.***
Si una serie alternada (7.12), $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$, es tal que

a) $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ *(es decir, sus términos decrecen en valor absoluto)*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

entonces, la serie (7.12) converge, su suma es positiva y no supera el primer término.

Demostración:
Consideremos la suma de los $n = 2m$ primeros términos de la serie (7.12).

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

De la condición a) se deduce que las expresiones entre los paréntesis son positivas. Por consiguiente la suma S_{2m} es positiva, $S_{2m} > 0$ y crece al aumentar m.
Escribamos ahora esta misma suma del modo siguiente

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

En virtud de a) cada una de las expresiones entre paréntesis es positiva. Por eso, al restar del número a_1 las magnitudes encerradas entre paréntesis, obtenemos un número menor que a_1, es decir

$$S_{2m} < a_1.$$

Por consiguiente, hemos determinado que, al aumentar m, S_{2m} crece y está acotada superiormente. De esto se deduce que S_{2m} tiene límite

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S \quad \text{siendo} \quad 0 < S < a_1.$$

Sin embargo, la convergencia de la serie todavía no está demostrada, pues hemos demostrado solamente que la sucesión de sumas parciales pares tienden al límite S.
Consideremos ahora la suma de los $n = 2m + 1$ primeros términos de la serie (7.12)

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}.$$

Como según la condición $b)$ $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$ tenemos

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = S.$$

De este modo hemos demostrado que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ tanto con n impar como par.

Por tanto, la serie (7.12) converge.

c.q.d.

Ejemplo 1.

La serie $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots = \displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ converge, puesto que

a) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots a_n > a_{n+1} \quad \forall\, n;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Ejemplo 2.

La serie $1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + \ldots$ converge en virtud del teorema de Leibniz pues

a) $1 > \frac{1}{2!} > \frac{1}{3!} > \ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0.$

Ejemplo 3.

La serie $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$ converge pues

a) $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Ejemplo 4. Dada la serie $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ estudia su convergencia.

<u>Solución</u>:

Podemos escribir la serie como $-\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1} + \dfrac{3}{3\sqrt{3}-1} + \dfrac{4}{4\sqrt{4}-1} + \ldots$, luego

a) $\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1} > \dfrac{3}{3\sqrt{3}-1} > \dfrac{4}{4\sqrt{4}-1}\ldots$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ la serie converge.

7.5 Series de términos positivos y negativos.

Una serie cuyos términos pueden ser tanto positivos como negativos, se llama serie de términos positivos y negativos (en las series alternadas los términos a_k eran siempre positivos, ahora pueden ser tanto positivos como negativos).

Teorema 7.14 *Si la serie de términos positivos y negativos $\sum a_k$ (7.6) es tal que la serie de los valores absolutos de sus términos*

$$\sum |a_k| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \tag{7.13}$$

converge, entonces la serie dada (7.6) también converge.

Demostración:
Para cada k

$$-|a_k| \leq a_k \leq |a_k|$$

y por tanto

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2\,|a_k|.$$

Si $\sum |a_k|$ converge, entonces $\sum 2\,|a_k| = 2\sum |a_k|$ converge, y entonces por el criterio de comparación

$$\sum (a_k + |a_k|) \text{ converge.}$$

Como podemos expresar $a_k = (a_k + |a_k| - |a_k|)$, entonces

$$\sum a_k = \sum (a_k + |a_k| - |a_k|) = \sum (a_k + |a_k|) - \sum |a_k|$$

es decir hemos escrito la serie (7.6) como suma de dos series convergentes, y por lo tanto dicha serie es también convergente, por el teorema 7.2.

c.q.d.

Ejemplo 1. Estudia la convergencia de la serie: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2} + \dfrac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2} + \ldots + \dfrac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2} + \ldots$, donde α es un número cualquiera.

Solución:
Consideremos junto con la serie dada, la serie de los valores absolutos

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2}\right| + \left|\frac{\operatorname{sen}3\alpha}{3^2}\right| + \ldots + \left|\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{n^2}\right| + \ldots$$

y la serie armónica para $n = 2$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

Sabemos que la segunda serie converge y los términos de la serie de los valores absolutos no son mayores que los términos correspondientes de la serie armónica, por tanto también la serie de los valores absolutos converge, y en virtud del teorema 7.14 la serie original de términos positivos y negativos también converge.

Ejemplo 2. Estudia el carácter de la serie $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}-\frac{1}{2^7}-\frac{1}{2^8}+\ldots$

Solución:
Si sustituimos cada término por su valor absoluto obtenemos la serie:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots$$

que es una serie geométrica convergente. La serie dada es por tanto convergente.

Ejemplo 3.

La serie $\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{3}+\frac{\cos 3\frac{\pi}{4}}{3^2}+\frac{\cos 5\frac{\pi}{4}}{3^3}+\ldots+\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}$ también es convergente, pues la serie

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

converge por ser términos de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{3}$ y los términos en valor absoluto de la serie original son menores que los términos correspondientes a la segunda serie.

Nota. El criterio de convergencia dado en el teorema 7.14, es sólo suficiente para una serie de términos positivos y negativos, pero no es necesario.

7.5.1 Convergencia absoluta y condicional.

Existen series de términos positivos y negativos que convergen, mientras que las series formadas por los valores absolutos de sus términos divergen. Por ello vamos a introducir las nociones de convergencia absoluta y convegencia condicional de una serie de términos positivos y negativos y basándonos en estas nociones, vamos a clasificar estas series.

Definición. La **serie** de términos positivos y negativos (7.6), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se llama **absolutamente convergente**, si converge la serie formada por los valores absolutos de sus términos (7.13)

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{7.13}$$

Si la serie de términos positivos y negativos (7.6) converge, y la serie (7.13) formada por los valores absolutos de sus términos, diverge, entonces la **serie** (7.6) se llama **condicionalmente convergente**.

Ejemplo 1.

La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ es condicionalmente convergente, puesto que la serie formada por los valores absolutos de sus términos es la serie armónica $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ que sabemos que diverge.

Pero la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ es convergente, pues si aplicamos el criterio de Leibniz

a) $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

b) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$

Ejemplo 2.

La serie $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots$ es absolutamente convergente, pues la serie formada por los valores absolutos $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ converge, como vimos en un ejemplo anterior.

Reordenamientos

Un reordenamiento de una serie es otra serie que tiene exáctamente los mismos términos pero en un orden diferente. Así, por ejemplo:

$$1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{7^7} - \frac{1}{6^6} + \ldots$$

y

$$1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^9} + \ldots$$

son reordenamientos de la serie

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^7} + \ldots$$

En 1867 Riemann publicó un teorema sobre los reordenamientos de series que subraya la importancia de distinguir entre convergencia absoluta y condicional. De acuerdo con este teorema, todos los reordenamientos de una serie absolutamente convergente, convergen absolutamente a la misma suma. Pero este teorema no es válido en general para las series condiconalmente convergentes, pues una serie que es solamente condicionalmente convergente, puede reordenarse de manera que converja a cualquier número que se desee. También puede reordenarse de modo que diverja a $+\infty$ o a $-\infty$ e incluso hacerla oscilar entre dos cotas cualesquiera.

Ejemplos. Estudia las series:

- $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \ldots$

  Solución:

  Aplicando el criterio de Leibniz

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \\ \text{b)} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{la serie es convergente.}$$

  Pero la serie de los valores absolutos, no converge, pues comparándola con la armónica

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

  entonces, la serie de los valores absolutos tiene el mismo carácter que la armónica, es decir, divergente, por tanto la serie dada es condicionalmente convergente.

- $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{6n-5} + \ldots$

  Solución:

  Aplicando el criterio de Leibniz

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & 1 > \frac{2}{7} > \frac{3}{13} > \ldots \\ \text{b)} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{la serie diverge}$$

- $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$

  Solución:

  Aplicando el criterio de Leibniz

  $$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots \\ \text{b)} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{la serie es convergente.}$$

  Veamos ahora si la serie dada es absolutamente convergente. Para ello estudiamos la serie

  $$1 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{4}}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| + \ldots$$

Como $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ entonces la serie de los valores absolutos diverge. Luego la serie dada es condicionalmente convergente.

- $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots$

Solución:

Aplicando el criterio de Leibniz

$$\left.\begin{array}{ll} a) & 1 > \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \ldots \\ b) & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{la serie es convergente}$$

Veamos ahora si la serie dada es absolutamente convergente. Para ello estudiemos la serie

$$1 + \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{9}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{n^2}\right| + \ldots$$

que es convergente. Luego la serie dada es absolutamente convergente.

- $-\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n + \ldots$

Solución:

Estudio directamente la serie de los valores absolutos

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} + \frac{7}{10} + \ldots + \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n + \ldots$$

Por el criterio de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1$$

entonces la serie de los valores absolutos es convergente. Por tanto la serie dada es convergente.

- $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\ln 10} + \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{(\ln 10)^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n\alpha}{(\ln 10)^n} + \ldots$

Solución:

Estudio directamente la serie de los valores absolutos. Consideremos la serie

$$\frac{1}{\ln 10} + \frac{1}{(\ln 10)^2} + \ldots + \frac{1}{(\ln 10)^n} + \ldots$$

que es convergente pues sus términos son términos de una progresión geométrica de razón < 1 (porque $\ln 10 > 1$).

Como

$$\left|\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{(\ln 10)^n}\right| < \frac{1}{(\ln 10)^n}$$

por uno de los criterios de comparación, la serie inicial dada es absolutamente convergente.

- $\displaystyle\sum_1^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$

  Solución:

  Aplicando el criterio de Leibniz

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \ln 1 > \dfrac{\ln 2}{2} > \dfrac{\ln 3}{3} > \dots \\ \text{b)} & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \text{l'Hopital} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{la serie es convergente.}$$

  La serie de los valores absolutos de la serie dada a partir de $n = 3$ verifica $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\ln n}{n}$, luego la de los valores absolutos diverge; por lo tanto la serie inicial es condicionalmente convergente.

- Estudia según los valores de a el carácter de la serie

$$\sum_1^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(a + \frac{b}{n}\right) \qquad \text{donde} \quad 0 < a < \frac{\pi}{2}, \quad a \neq \frac{\pi}{4}.$$

  Solución:

  Aplicando el criterio de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{tg}^n\left(a + \frac{b}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}\left(a + \frac{b}{n}\right) = \operatorname{tg} a = \left\{ \begin{array}{llll} > & 1 & \text{si} \quad a > \frac{\pi}{4} & \quad \text{diverge.} \\ < & 1 & \text{si} \quad a < \frac{\pi}{4} & \quad \text{converge.} \end{array}\right.$$

Ejercicio.

Estudia la convergencia de la siguiente serie según los valores de los parámetros a y b

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n\, a^{1+1/4+1/9+\cdots+1/n^2}, \qquad \text{donde} \quad a, b > 0.$$

7.6 Sumación de Series.

7.6.1 Serie hipergeométrica.

Definición. Se dice que una serie es hipergeométrica cuando se cumple que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

con la condición de que α y β no sean nulos simultáneamente. Dicha serie converge si $\alpha + \beta < \gamma$ y su suma es

$$S = \frac{a_1\,\gamma}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Ejemplo. Suma la serie $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$.

Solución:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1(n+1)(n+2)}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}$$

$$\alpha + \beta = 1 + 0 < 2 = \gamma$$

Luego la serie dada converge y su suma vale

$$S = \frac{\frac{1}{1\cdot 2}\cdot 2}{2-1-0} = \frac{\frac{2}{2}}{1} = 1.$$

7.6.2 Serie aritmético-geométrica.

Definición. Se dice que una serie es aritmético-geométrica cuando su término general es el producto del término general de una progresión aritmética y el de una geométrica.

Ejemplo. Suma la serie $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{3n-2}{2^{n-1}}$.

Solución:

Podemos escribir el término general como el producto

$$a_n = (3n-2)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$$

y notar que $(3n-2)$ es el término general de una progresión aritmética y que $\frac{1}{2^{n-1}}$ es el término general de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2} < 1$.

Vamos a sumarla

$$S_n = 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \ldots + \frac{3n-2}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \ldots + \frac{3n-5}{2^{n-1}} + \frac{3n-2}{2^n}.$$

Restando término a término las dos expresiones anteriores

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{3n-2}{2^n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) S_n = 1 + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{3n-2}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}S_n = 1 + 3\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3n-2}{2^n} \qquad \frac{1}{2}S_n = 1 + 3\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}{\frac{1}{2}} - \frac{3n-2}{2^n}$$

$$S_n = \left[1 + 3\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{3n-2}{2^n}\right]$$

luego

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 2\,[1+3] = 8.$$

7.6.3 Serie telescópica.

Definición. Se dice que una serie es telescópica cuando su término general se puede descomponer de la forma:

$$a_n = \varphi(n+1) - \varphi(n) \qquad \text{ó} \qquad a_n = \psi(n) - \psi(n+1).$$

Entonces

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \varphi(n+1) - \varphi(1) \qquad \text{ó} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \psi(1) - \psi(n+1)$$

y por tanto

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(n+1) - \varphi(1) \qquad \text{ó} \qquad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \psi(1) - \lim_{n\to\infty} \psi(n+1).$$

Ejemplo. Suma la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Solución:

Resulta que

$$\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \log\frac{n^2-1}{n^2} = \log\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \log\left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right] =$$

$$= \log\frac{n+1}{n} + \log\frac{n-1}{n} = \log\frac{n+1}{n} - \log\frac{n-1}{n}.$$

Por tanto

$$S_{n+1}=\log\frac{n+2}{n+1}-\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+1}{n}-\log\frac{n}{n-1}+\ldots-\log\frac{3}{2}+\log\frac{3}{2}-\log\frac{2}{1}.$$

Simplificando queda

$$S_{n+1}=\log\frac{n+2}{n+1}-\log 2;$$

luego

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{n+2}{n+1}-\log 2\right]=-\log 2.$$

7.6.4 Series descomponibles en factores simples.

Veamos como se suman este tipo de series mediante un **ejemplo**. La serie $\sum\frac{1}{n(n+2)}$ no es hipergeométrica pues

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)(n+3)}}{\frac{1}{n(n+2)}}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}.$$

Entonces, en estos casos, descomponemos a_n en fracciones simples.

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}=\frac{A_n+2A+B_n}{n(n+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A+B=0\\2A=1\end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\ \wedge\ B=-\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$a_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}.$$

Calculando los términos de la serie

$$a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{6},\qquad a_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{8},\qquad a_3=\frac{1}{6}-\frac{1}{10},\qquad a_4=\frac{1}{8}-\frac{1}{12},$$

$$a_5=\frac{1}{10}-\frac{1}{14},\qquad\ldots\qquad a_{n-3}=\frac{1}{2n-6}-\frac{1}{2n-2},\qquad a_{n-2}=\frac{1}{2n-4}-\frac{1}{2n},$$

$$a_{n-1}=\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n+2},\qquad a_n=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}$$

y sumando

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4}=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}.$$

Luego

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\right)=\frac{3}{4}.$$

7.6.5 Series descomponibles mediante el número e.

En este tipo de series vamos a utilizar el desarrollo del número $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Veamos como se suman estas series mediante un ejemplo.

Ejemplo. Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ estudia su convergencia y sumarla, si es posible.

Solución:
Estudiemos primero su convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{(n+1)! n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{converge.}$$

Ahora vamos a sumarla

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n \cdot n}{n(n-1)!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1+1}{(n-1)!} =$$
$$= \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} = \frac{(n-1)}{(n-1)(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} =$$
$$= \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)} =$$
$$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} = 1 + e + (e-1) = 1 + e + e - 1 = 2e.$$

7.7 Series de Funciones.

La serie

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

se llama **serie de funciones**, si sus términos son funciones de x. Es decir, son series de la forma

$$a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots \tag{7.14}$$

Dando a x determinados valores numéricos, obtenemos diferentes series numéricas que pueden ser tanto convergentes como divergentes.

El conjunto de valores de x, para los cuales la serie de funciones converge, se llama **dominio de convergencia** de la serie de funciones (7.14).

Es evidente que en el dominio de convergencia de una serie de funciones, su suma es una cierta función de x. Por eso, la suma de una serie funcional se designa por $S(x)$.

Ejemplo.
Consideremos la serie de funciones

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

Esta serie converge para todos los valores de x en el intervalo $(-1, 1)$, es decir, para todos los valores de x que satisfacen la condición $|x| < 1$. Para $\forall\ x \in (-1, 1)$, la suma de la serie es igual a $\dfrac{1}{1-x}$ (suma de una progresión geométrica de razón x). Por consiguiente, en el intervalo $(-1, 1)$ la serie dada define la función $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$, que es la suma de la serie, es decir

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Designemos por $S_n(x)$ la suma de los n primeros términos de la serie (7.14). Si esta serie converge y su suma es igual a $S(x)$ entonces

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

donde

$$r_n(x) = a_{n+1}(x) + a_{n+2}(x) + a_{n+3}(x) + \ldots$$

La magnitud $r_n(x)$ se llama **resto de la serie (7.14)**. Para todos los valores de x del dominio de convergencia de la serie (7.14) tiene lugar la relación

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = \lim_{n \to \infty} [S(x) - S_n(x)] = 0$$

es decir, **el resto $\mathbf{r_n(x)}$ de una serie convergente tiende a cero cuando $\mathbf{n \to \infty}$.**

Series mayorables

La serie de funciones (7.14) se llama **mayorable** en un cierto campo de variación de x, si existe una serie numérica de términos positivos $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ convergente, tal que para todos los valores de x del dominio dado se cumplan las relaciones:

$$|a_1(x)| \leq \alpha_1, \quad |a_2(x)| \leq \alpha_2, \quad \ldots, \quad |a_n(x)| \leq \alpha_n, \quad \ldots$$

En otras palabras, una serie se llama mayorable si cada uno de sus términos no es mayor en valor absoluto al término correspondiente de cierta serie numérica convergente de términos positivos.

Ejemplo.
La serie

$$\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

es mayorable en todo el eje real, pues para todos los valores de x se cumple

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y la serie $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ sabemos que converge.

De la definición de serie mayorable se deduce que toda serie mayorable en cierto dominio converge absolutamente en todos los puntos de dicho dominio.

Continuidad de la suma de una serie de funciones continuas

Sea una serie de funciones continuas $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ convergente en cierto intervalo $[a, b]$.

En la sección 0.6 hemos demostrado que la suma de un número finito de funciones continuas es una función continua. Esta propiedad no es aplicable sin más a la suma de una serie formada por un número infinito de sumandos.

Algunas series de funciones continuas tienen por suma una función continua, otras series de funciones continuas tienen por suma una función discontinua.

Ejemplo.
Consideremos la serie

$$\left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) + \left(x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{1}{3}}\right) + \left(x^{\frac{1}{7}} - x^{\frac{1}{5}}\right) + \ldots + \left(x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}\right).$$

Los términos de esta serie (cada término es un paréntesis) son funciones continuas para cualquier valor de x. Veamos que esta serie converge y que su suma es una función discontinua.
Hallemos la suma de los primeros términos de esta serie

$$S_n(x) = x^{\frac{1}{2n+1}} - x$$

Sabemos que $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.

- si $x > 0$
$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(x^{\frac{1}{2n+1}-x}\right) = 1 - x;$$
- si $x < 0$
$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x\right) = -1 - x;$$
- si $x = 0$
$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Luego

$$S(x) = \begin{cases} -1 - x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$$

que es una función discontinua (comprobadlo).

Teorema 7.15 *La suma de una serie de funciones continuas, mayorables en cierto intervalo $[a, b]$, es una función continua en este intervalo.*

Observación 1. Del teorema anterior se deduce que si la suma de una serie en un cierto intervalo $[a, b]$ es discontinua, la serie no es mayorable en dicho intervalo.

Observación 2. El recíproco del teorema anterior no es correcto. Existen series no mayorables en un intervalo, pero que sin embargo convergen en este intervalo hacia una función continua.

Integración y derivación de series

Teorema 7.16 *Sea una serie de funciones continuas del tipo (7.14), $\sum a_n(x)$, mayorable en el intervalo $[a, b]$ y sea $S(x)$ la suma de esta serie. Entonces, la integral de $S(x)$ entre los límites α y x, pertenecientes al intervalo $[a, b]$, es igual a la suma de las correspondientes integrales de los términos de la serie dada, es decir*

$$\int_\alpha^x S(x)\, dx = \int_\alpha^x a_1(x)\, dx + \int_\alpha^x a_2(x)\, dx + \ldots + \int_\alpha^x a_n(x)\, dx + \ldots$$

Observación. Si la serie no es mayorable, no siempre es posible la integración término a término de la serie, es decir, la integral $\int_\alpha^x S(x)dx$ de la suma de la serie (7.14) no es siempre igual a la suma de las integrales de sus términos.

Teorema 7.17 *Si la serie (7.14), $a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots$, formada por funciones continuas y con derivadas continuas en el interalo $[a, b]$, converge en este intervalo hacia la suma $S(x)$ y la serie $a_1'(x)+a_2'(x)+\ldots+a_n'(x)+\ldots$ formada por las derivadas de sus términos, es mayorable en este intervalo, entonces la suma de la serie de las derivadas es igual a la derivada de la suma de la serie inicial, es decir*

$$S'(x) = a_1'(x) + a_2'(x) + \ldots + a_n'(x) + \ldots$$

Observación. Es muy importante que la serie de derivadas sea mayorable, puesto que su incumplimiento puede hacer imposible la derivación término a término de la serie. Para confirmarlo, veamos un ejemplo de la serie mayorable que no permite la derivación término a término.

Sea la serie
$$\frac{\operatorname{sen} 1^4 x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2^4 x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3^4 x}{3^2} + \ldots + \frac{\operatorname{sen} n^4 x}{n^2} + \ldots$$

Esta serie converge hacia una función continua, puesto que es mayorable.

Efectivamente, para cualquier x, sus términos son menores en valores absolutos que los términos positivos de la serie numérica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$ que sabemos es convergente.

Escribamos una serie formada por las derivadas de los términos de la serie inicial
$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \ldots + n^2 \cos n^4 x + \ldots$$

Esta serie diverge, pues, cuando $x = 0$, se convierte en la serie $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + \ldots$, y se puede demostrar que esta serie diverge no sólo cuando $x = 0$.

7.8 Series de potencias. Intervalo de convergencia.

Definición. Se llama serie entera o **serie de potencias** a una serie de funciones de la forma
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n + \ldots \tag{7.15}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ son números constantes llamados **coeficientes** de la serie.

Definición. Diremos que una serie de potencias (7.15) converge:

a) en $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_n\, x_0^n$ converge

b) en el conjunto $S \quad \Leftrightarrow \quad \sum a_n\, x_0^n$ converge para todo $x \in S$.

Teorema 7.18 ***Teorema de Abel***

1) Si una serie de potencias converge para un cierto valor de x_0, no nulo, entonces converge absolutamente para todo valor de x tal que $|x| < |x_0|$.

2) Si la serie de potencias diverge para un punto x_0, entonces también diverge para todo valor de x tal que $|x| > |x_0|$.

Demostración:

1) Como según la hipótesis la serie numérica $a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$ converge, su término general $a_n x_0^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$; pero esto significa que existe un número positivo M tal que todos los términos de la serie son menores en valor absoluto que M.

   Escribamos la serie (7.15), $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$, de la forma

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

   y consideremos la serie de valores absolutos de sus términos

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n x^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

   Los términos de esta serie son menores que los términos correspondientes de la serie

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

   Cuando $|x| < |x_0|$, la última serie es una progresión geométrica de razón menor que 1, y por consiguiente converge. Puesto que los términos de la serie de valores absolutos son menores que los términos correspondientes de la última serie dada, la serie de los valores absolutos también converge; esto significa que la serie (7.15) converge absolutamente.

2) Supongamos que la serie (7.15), $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, diverge en un punto x_0'. Entonces esta serie divergirá también en cualquier punto x que satisfaga la condición $|x| > |x_0'|$. Pues si la serie convergiera en un cierto punto x que satisfaga esta condición, entonces, en virtud de la primera parte del teorema ya demostrada, debería converger también en el punto x_0', puesto que $|x_0'| < |x|$. Pero esto contradice a la hipótesis de que la serie diverge en el punto x_0'. Por tanto, la serie diverge también en el punto x.

c.q.d.

El teorema de Abel permite determinar los puntos de convergencia y divergencia de una serie de potencias. Pues si x_0 es un punto de convergencia, entonces todos los puntos del intervalo $(-|x_0|, |x_0|)$ son puntos de convergencia absoluta. Si x_0' es un punto de divergencia, entonces $(-\infty, -|x_0'|)$ y $(|x_0'|, +\infty)$ están constituidos por puntos de divergencia.

Teorema 7.19 *El dominio de convergencia de una serie de potencias es un intervalo con centro en el origen de coordenadas.*

Definición. El intervalo $(-r, r)$ tal que $\forall\, x \in (-r, r)$ la serie converge absolutamente y para los $x \notin (-r, r)$ la serie diverge, se llama **intervalo o campo de convergencia** de una serie de potencias. Diremos en este caso que el **radio de convergencia** es **r**.

En los extremos del intervalo, es decir: en los puntos $x = r$ y $x = -r$ la convergencia o divergencia de cada serie concreta se debe resolver individualmente.

- En algunas series, el intervalo de convergencia se reduce a un punto, entonces el radio de convergencia es $\mathbf{r = 0}$.
- En otras abarca todo el eje real OX, entonces el radio de convergencia es $\mathbf{r} = \infty$.

Método para determinar el radio de convergencia de una serie de potencias

Sea la serie (7.15), $a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n + \ldots$. Consideremos la serie formada por los valores absolutos de sus términos

$$|a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots + |a_n|\,|x_n|^n + \ldots$$

Para determinar la convergencia de esta última serie (como es de términos positivos) apliquemos el criterio del cociente.
Supongamos que existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\, |x| = l\,|x|.$$

Entonces, según el criterio del cociente, la serie de los valores absolutos converge si $l\,|x| < 1$, es decir si $|x| < \dfrac{1}{l}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{l}$.

- Por tanto, la serie (7.15) converge absolutamente para $|x| < \dfrac{1}{l}$;
- pero si $|x| > \dfrac{1}{l}$ entonces

  $$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\, l > 1$$

  y la serie de los valores absolutos diverge, pues su término general no tiende a cero. (Pues la serie va creciendo). En este caso, el término general de la serie (7.15), tampoco tiende a cero, y esto significa, en virtud del criterio necesario de convergencia que esta serie de potencias diverge (cuando $|x| > \dfrac{1}{l}$);
- de manera semejante, para determinar el intervalo de convergencia se puede aplicar el criterio de Cauchy y entonces

  $$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ejemplo 1. Determina el intervalo de convergencia de la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| \qquad \Rightarrow \qquad \text{intervalo de convergencia } (-1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet \text{ para} & x = -1 & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \\ \bullet \text{ para} & x = 1 & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots \end{array}\right\} \text{ divergen.}$$

Ejemplo 2. Determina el intervalo de convergencia de la serie:

$$\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots$$

Solución:

Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{(2x)^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right||2x| = |2x|$$

$$|2x| < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |x| < \frac{1}{2} \qquad \text{luego converge en } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- si $x = \frac{1}{2}$ la serie queda: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ que converge (aplicad el criterio de Leibniz para verlo);
- si $x = -\frac{1}{2}$ la serie queda de la forma $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots$ diverge (por compraración con la serie armónica).

Ejemplo 3. Determina el intervalo de convergencia de la serie

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{x^n(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x| = 0 < 1$$

entonces la serie converge para todo $x \in (-\infty, \infty)$.

Ejemplo 4.

La serie $1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$ diverge $\forall\, x$ excepto para $x = 0$ puesto que

$$\lim_{n\to\infty}(nx)^n = \infty.$$

Series de potencias de (x − a)

Una serie de la forma

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \tag{7.16}$$

se llama también de potencias.

Las constantes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llaman coeficientes de la serie. Esta serie está ordenada según las potencias crecientes del binomio $(x-a)$. Cuando $a = 0$, obtenemos una serie de potencias de x, que es por tanto un caso particular de (7.16).

Para determinar el dominio de convergencia de la serie (7.16) se hace el cambio de variable $x - a = y$, con lo cual la serie (7.16) se transforma en $a_0 + a_1\, y + a_2\, y^2 + \ldots + a_n\, y^n + \ldots$ una serie de potencias del tipo (7.15) de y.

Sea $-r < y < r$ el radio de convergencia de (7.15), entonces (7.16) convergerá en

$$-r < x - a < r \qquad \text{o bien} \qquad a - r < x < a + r,$$

luego (7.16) convergerá en el intervalo $(a - r, a + r)$ con centro en el punto a.

Ejemplo. Halla el dominio de convergencia de la serie

$$(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots + (x-2)^n + \ldots$$

Solución:

Haciendo $x - 2 = y$ obtenemos la serie $y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n + \ldots$ que converge para $-1 < y < 1$ por lo tanto la serie dada converge en $-1 < y - 2 < 1$ es decir $\forall\, x \in (1, 3)$.

7.8.1 Series de Taylor y de MacLaurin.

En el desarrollo de Taylor (2.7) supongamos que en el entorno del punto a considerado, el término complementario R_n, tiende a cero, cuando $n \to \infty$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

y que la función $f(x)$ posee derivadas de cualquier orden.

Entonces pasando al límite en la fórmula (2.7)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!} + R_n(x) \tag{2.7}$$

obtenemos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!} + R_n(x) \right]$$

es decir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!}. \tag{7.17}$$

La fórmula (7.17) se llama desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x)$. Se puede demostrar que la serie anterior converge y su suma es $f(x)$.

Importante. La serie de Taylor (7.17) representa la función dada $f(x)$ sólo cuando $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Si $\lim_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, la serie (7.17) no representa a $f(x)$, aunque pueda converger (hacia otra función).

Si en la serie de Taylor (7.17) hacemos $a = 0$ obtenemos un caso particular de ésta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!} x^k \tag{7.18}$$

que se llama serie de MacLaurin.

Nota. La función $f(x)$ sólo se podrá expresar como (7.17) o (7.18) para las x pertenecientes al intervalo de convergencia de las series de los segundos miembros.

Ejemplo 1. Desarrolla $f(x) = e^{x/2}$ en potencias de $(x-3)$ y demuestra que la serie representa a la función para todo x real.

Solución:

Derivando tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}, \qquad f''(x) = \frac{1}{2^2}\, e^{x/2}, \qquad f'''(x) = \frac{1}{2^3}\, e^{x/2}, \quad \dots \quad f^{(n}(x) = \frac{1}{2^n}\, e^{x/2}$$

para $x = 3$

$$f'(3) = \frac{1}{2}\, e^{3/2}, \qquad f''(3) = \frac{1}{2^2}\, e^{3/2}, \qquad f'''(3) = \frac{1}{2^3}\, e^{3/2}, \quad \dots \quad f^{(n}(3) = \frac{1}{2^n}\, e^{3/2}$$

luego la serie de Taylor para $f(x) = e^{x/2}$ en potencias de $(x-3)$ toma la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k}(3)}{k!}\,(x-3)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{3/2}}{2^k\, k!}\,(x-3)^k = e^{3/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k\, k!}\,(x-3)^k.$$

Para demostrar que esta serie representa a la función para todo x real, tenemos que ver que el intervalo de convergencia de dicha serie es toda la recta real. Calculemos dicho intervalo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x-3|^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{|x-3|^n 2^n n!}{2^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|^{n+1}\, 2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!|x-3|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-3|}{(n+1)} = 0 < 1$$

entonces la serie es convergente $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2. Basándose en los desarrollos en serie de las funciones e^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ demuestra la fórmula de Euler

$$e^{i\,x} = \cos x + i\ \operatorname{sen} x.$$

Solución:

Sabemos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

entonces

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots + \frac{(ix)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Diferenciación e Integración de las series de potencias

Teorema 7.20 *Si la serie de potencias (7.15)*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n + \ldots \tag{7.15}$$

converge en el intervalo $(-r, r)$, *entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = a_1 + 2\, a_2\, x + 3\, a_3\, x^2 + \ldots + n\, a_n\, x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n\, x^n) \tag{7.19}$$

también converge en $(-r, r)$.

La serie (7.19) se ha obtenido derivando término a término la serie (7.15).

Una aplicación reiterada de este teorema permite demostrar que todas las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}(a_n x^n), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^3}{dx^3}(a_n x^n), \quad \ldots$$

son convergentes en $(-r, r)$.

Ejemplo.

Dada la serie geométrica convergente en $(-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

todas las series siguentes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + 4\,x^4 + 5\,x^5 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2}(x^n) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2} = 2 + 6\,x + 12\,x^2 + 20\,x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^3}{dx^3}(x^n) = \sum_{n=3}^{\infty} n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} = 6 + 24\,x + 60\,x^2 + \dots$$

$$\vdots$$

convergen en $(-1, 1)$.

Teorema 7.21 ***Teorema de diferenciabilidad de la serie de potencias.***
Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \quad \forall\, x \in (-r, r)$, *entonces*

- f *es diferenciable en* $(-r, r)$,
- $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n\, x^n) \quad \forall\, x \in (-r, r)$.

Veamos una aplicación del teorema 7.21.
Sabemos que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots$$

y que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots$$

pues bien, las relaciones

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$$

se pueden confirmar diferenciando término a término las series anteriores que definen a las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} - \dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \frac{8x^7}{8!} - \ldots =$$

$$= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) = -\operatorname{sen} x$$

Ejemplo. Suma la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \qquad \forall\, x \in (-1,1).$$

Solución:

Sea $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \forall\, x \in (-1,1)$. Por el teorema 7.21

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\, x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(donde hemos realizado el cambio de índice $k-1=n$, y hemos tenido en cuenta que la última serie es una serie geométrica de razón < 1).

Luego como $g'(x) = \frac{1}{1-x}$ y $g(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \int g'(x)dx = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) = \ln\frac{1}{1-x}.$$

Por tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Integración término a término

Teorema 7.22 ***Teorema de integrabilidad de la serie de potencias.***
Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *converge* $\forall\, x \in (-r,r)$ *entonces*

- $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)} x^{n+1}$ *converge* $\forall\, x \in (-r,r)$,
- $\int f(x)\, dx = g(x) + C$.

La integración término a término puede expresarse también de la siguiente manera

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right] dx = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}\right] + C.$$

Si una serie de potencias converge en $x = c$ y en $x = d$, converge para todos los valores de x comprendidos entre c y d y además

$$\int_c^d \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_c^d a_n x^n \, dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \left(d^{n+1} - c^{n+1} \right).$$

Ejemplo 1. Calcula $\displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

Solución:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots$$

luego

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \ldots$$

Calculemos el intervalo de convergencia. Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}}{\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^2 (2n-1)(2n-1)!}{(2n+1)(2n+1)2n(2n-1)} \right| =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{(2n+1)(2n+1)2n} \left| x^2 \right| = 0 < 1 \Rightarrow$$

la serie es convergente $\forall\ x$. Luego

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 2. Demuestra que

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Solución:

Dado que $f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

El desarrollo en serie de $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Entonces

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \qquad \forall\ x \in (-1, 1)$$

por tanto

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \qquad \forall\, x \in (-1, 1)$$

luego

$$\text{arctg } x = f(x) = \int f'(x)\,dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right) + c$$

(la constante c vale 0, porque la serie de la derecha y la inversa de la tangente se anulan en $x = 0$).
Por tanto

$$\text{arctg } x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad \forall\, x \in (-1, 1).$$

Esta serie también representa a arctg x en $x = -1$ y $x = 1$ (por el teorema de Abel 7.18).

Ejemplo 3. Desarrolla ch x en potencias de x.
Solución:
No es necesario que apliquemos el desarrollo de Taylor pues sabemos que

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Entonces, como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

tenemos que

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Luego

$$\text{ch } x = \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + 2\frac{x^6}{6!} + \ldots\right] = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ejercicio.

Demuestra que

$$\text{sh } x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

7.8.2 Serie binómica.

Para expresar el teorema del binomio con la notación del sumatorio, introduzcamos el coeficiente binomial generalizado

$$\binom{r}{n} = \frac{r\,(r-1)\,(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}$$

para cualquier número real r y cualquier entero no negativo n.

A la serie

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \tag{7.20}$$

para $\forall\ x \in (-1,1)$ se le llama **serie binómica.**

Ejemplo 1. Escribe los cuatro primeros términos del desarrollo binomial de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \qquad \text{para} \quad |x| < 1.$$

Solución:

En este caso $r = -\frac{1}{2}$, luego

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots$$

Ejemplo 2. Halla la serie MacLaurin de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{si} \quad |x| < 1.$$

Solución:

Sustituyendo x por $-x^2$ en la función del ejemplo anterior

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\left(-x^2\right)^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\left(-x^2\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \ldots$$

Ejemplo 3. Escribe los cuatro primeros términos del desarrollo binomial de

$$\frac{1}{(1+x)^2}.$$

Solución:

En este caso $r = -2$, entonces

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1+(-2)x\frac{(-2)(-3)}{2!}x^2+\frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}x^3 = 1-2x+3x^2-4x^3+\dots.$$

Ejercicio.

Desarrolla en potencias de x hasta x^4 la expresión

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

RESUMEN

Desarrollar una función $f(x)$ en serie de potencias enteras y crecientes, consiste en hallar una serie convergente tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = f(x)$$

para todo valor de x que verifique $|x| < r$ siendo r el radio de convergencia de la serie

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \qquad \forall\ x \in (-r, r).$$

Se pueden emplear los siguientes métodos:

1) **Desarrollo de Taylor en un entorno de x = 0** (fórmula de MacLaurin (7.18)).

   Ejemplo: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$.

2) **Empleando desarrollos conocidos**: e^x, $\ln(1+x)$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, ...

3) **Por integración**. Se halla la derivada de $f(x)$, $f'(x)$ y se calcula el desarrollo de $f'(x)$

$$f'(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

   y despues se integra

$$f(x) = f(0) + b_0x + \frac{b_1}{2}x^2 + \frac{b_2}{3}x^3 + \dots + \frac{b_n}{n+1}x^n + \dots =$$

$$= a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^2 + \dots + a_n\,x^n$$

   (recordad el ejemplo de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$).

4) **Por la fórmula del binomio de Newton.**

   Ejemplo. Dada la función $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2\,x^2+1}}$

   a) halla su desarollo en serie en un entorno de $x = 0$;

b) calcula el radio de convergencia;

c) calcula $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1'08}}$ con error menor que 10^{-4}.

<u>Solución</u>:

a) $y = (1+2\,x^2)^{-1/4} =$ desarrollando por el binomio de Newton obtenemos

$$= 1+\binom{-\frac{1}{4}}{1}2\,x^2+\binom{-\frac{1}{4}}{2}(2\,x^2)^2+\binom{-\frac{1}{4}}{3}(2\,x^2)^3+\ldots+\binom{-\frac{1}{4}}{n}(2\,x^2)^n =$$

$$1+\left(\frac{-1}{4}\right)2\,x^2+\frac{\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}-1\right)}{2!}2^2\,x^4+\frac{\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}-1\right)\left(\frac{-1}{4}-2\right)2^3}{3!}x^6+\ldots+$$

$$+\frac{\left(\frac{-1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}-1\right)\left(\frac{-1}{4}-2\right)\ldots\left(\frac{-1}{4}-n+1\right)2^n}{n!}x^{2n}+\ldots=$$

$$= 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{8}x^4-\frac{15}{16}x^6+\ldots+\frac{(-1)^n 1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2n\cdot n!}x^{2n}+\ldots$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)x^{2n}}{2^n n!}\cdot\frac{2^{n-1}(n-1)!}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-7)x^{2n}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n-3}{2n}x^2\right| = 2\,|x|^2 < 1 \quad\Rightarrow\quad r=\frac{1}{2}$$

c) $(1+2x^2)^{-\frac{1}{4}} = (1'08)^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow 2x^2 = 0'08 \quad\Rightarrow\quad x^2 = 0'04 \quad\Rightarrow\quad x = 0'2$

haciendo $x = 0'2$ en el desarrollo obtenido, obtendremos el valor de $(1'08)^{-\frac{1}{4}}$. Como nos piden el resultado con cuatro cifras decimales, tendremos que hallar los sumandos con cinco cifras decimales:

$$-\frac{1}{2}(0'2)^2 = -0'02000;\quad \frac{5}{8}(0'2)^4 = -0'00100;\quad -\frac{15}{16}(0'2)^6 = -0'00006;$$

$$\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{2^4\cdot 4!}(0'2)^8 = 0'00000\ldots$$

y este último sumando ya no interviene en la suma.

Luego

$$(1'08)^{-\frac{1}{4}} = 1-0'02+0'001-0'00006 = 0'98094.$$

5) **Por coeficientes indeterminados.** Este método consiste en igualar $f(x)$ a una serie, es decir

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ incógnitas a determinar.

Haciendo las transformaciones convenientes en la primera serie se obtiene una nueva serie

$$0 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots .$$

Considerándola como un polinomio idénticamente nulo resulta:

$$\left.\begin{array}{l} b_0 = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_2 = 0 \\ \vdots \\ b_n = 0 \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \text{que son las ecuaciones que nos permiten hallar } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Clarifiquemos este método mediante un **ejemplo**.

Sea $f(x) = \operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots} =$$

$$= a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots \qquad \Rightarrow$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = (a_0 + a_1 x + \ldots) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!}\right) + \ldots \qquad \Rightarrow$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots = a_0 + a_1 x + \left(-\frac{a_0}{2} + a_2\right) x^2 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_3\right) x^3 + \left(\frac{a_0}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4\right) x^4 + \ldots$$

igualando coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ -\dfrac{a_0}{2} + a_2 = 0 \\ -\dfrac{a_1}{2} + a_3 = -\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{a_0}{24} - \dfrac{a_2}{2} + a_4 = 0 \\ \dfrac{a_1}{24} - \dfrac{a_3}{2} + a_5 = \dfrac{1}{120} \\ \vdots \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_0 = 0 \;\; ; \;\; a_1 = 1 \quad ; \\ a_2 = 0 \;\; ; \;\; a_3 = \dfrac{1}{3} \quad ; \\ a_4 = 0 \;\; ; \;\; a_5 = \dfrac{2}{15} \quad ; \ldots \end{array}$$

Luego

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots$$

Función	**Series de MacLaurin**
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\operatorname{sen} x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lvert x\rvert < 1$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$
$\operatorname{tg}^{-1} x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \lvert x\rvert \leq 1$
$\operatorname{sen}^{-1} x$	$x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots, \quad \lvert x\rvert \leq 1$
$(1+x)^r$	$1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \ldots, \quad \lvert x\rvert < 1$

Ejercicio.

Determina el intervalo de convergencia de las siguientes series:

a) $\frac{2x}{1} - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \ldots;$

b) $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x};$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\,x^n};$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!};$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$