Imposición Medioambiental Optima cuando los Bienes y la Contaminación son Duraderos

Amagoia Sagasta*
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea

Noviembre 1999

Abstract

Este artículo analiza los efectos de establecer los impuestos óptimos sobre la contaminación emitida por un monopolista productor de un bien duradero y sin poder de compromiso. Los impuestos óptimos establecidos por el gobierno son los que maximizan el bienestar social, definido como el excedente de los consumidores más los beneficios brutos del productor menos el daño medioambiental.

Se obtienen cómo son los impuestos óptimos y se analizan los efectos de los impuestos sobre la producción y beneficios del monopolista, el excedente de los consumidores, el daño medioambiental y el bienestar social. Al establecer los impuestos óptimos el daño medioambiental disminuye y aumenta el bienestar social. Sin embargo, el efecto sobre los beneficios del monopolista depende de la capacidad del gobierno de establecer impuestos distintos en diferentes periodos y de la durabilidad de la contaminación emitida.

---

*Deseo agradecer la ayuda financiera del Gobierno Vasco (Beca para Formación de Investigadores 98-99). El planteamiento y desarrollo de este trabajo se ha enriquecido con comentarios por parte de Ana Isabel Saracho y José María Usategui. Dirección: Departamento de Fundamentos del Análisis Económico. Facultad de Ciencias Económicas - Universidad del País Vasco. Avenida Lehendakari Aguirre 83, 48015 Bilbao. España. E-mail:eddsaela@bs.ehu.es

1 Introducción

La literatura existente (Coase (1972), Bulow (1982)) establece que cuando un monopolista productor de bienes duraderos no puede comprometerse a un esquema de producción futura, sus beneficios son menores que cuando existe esa capacidad de compromiso. El monopolista sin poder de compromiso va a tener en el futuro el incentivo a aumentar la producción (disminuir precios) ya que las pérdidas de dicho aumento las sufren los individuos que compraron el bien en el pasado. Estas pérdidas no son internalizadas por el monopolista vendedor y por tanto éste acabará sobreproduciendo. Los consumidores, conocedores de este incentivo del monopolista a aumentar la producción lo tendrán en cuenta a la hora de determinar cuánto están dispuestos a pagar por el bien en cada periodo. Por tanto, deberíamos esperar que la empresa utilice todos los medios de que dispone para reducir su problema de falta de compromiso.[1]

En este trabajo se considera que la producción del bien duradero genera un efecto externo negativo entendido como daño medioambiental. Por ello, el regulador decide establecer impuestos sobre el daño medioambiental con el fin de reducirlo. Se analiza cómo deben ser los impuestos óptimos sobre la contaminación y cuáles son los efectos de la imposición óptima sobre la posibilidad de compromiso del monopolista, sus producciones y beneficios y sobre el excedente de los consumidores y la contaminación.

Para ello, se considera un modelo de dos períodos donde el monopolista produce un bien duradero perfectamente divisible y que no se deprecia en el tiempo. Los compradores son precio aceptantes y tienen una previsión perfecta del futuro. La producción del bien duradero genera emisión de polución. Por tanto, el monopolista además de a los costes de producir el bien duradero se va a enfrentar a los impuestos sobre la contaminación que

[1] La literatura ha considerado diferentes contextos en los cuales el monopolista podía evitar cierta reducción en beneficios derivada de su falta de poder de compromiso respecto de su comportamiento futuro tales como: restricciones de capacidad (Bulow (1982)); costes marginales crecientes (Kahn (1986)); disminuir la durabilidad del producto, esto es obsolescencia planeada (Bulow (1986)); cláusula del cliente preferencial (Butz (1990)); investigación y desarrollo del producto (Goering et al. (1993)).

establece el gobierno con el fin de controlar este daño medioambiental.

Consideramos que la contaminación es duradera, es decir parte de la contaminación emitida en el primer periodo permanece en el aire en el segundo periodo. Por tanto, en el segundo periodo la empresa pagará impuestos tanto por el daño medioambiental que ocasiona su producción del segundo periodo como por el daño medioambiental ocasionado por su producción del primer periodo en el segundo periodo. En este contexto, se derivan los impuestos óptimos y se analizan los efectos de esos impuestos sobre las producciones y beneficios del monopolista, el excedente de los consumidores y el daño medioambiental. Dichos impuestos se obtienen maximizando el bienestar social, que además del excedente de los consumidores y de los beneficios del productor brutos del coste de los impuestos, tiene en cuenta el daño medioambiental ocasionado por la emisión de polución. A continuación analizamos qué ocurre si consideramos que la contaminación es perfectamente duradera. Finalmente se estudia el caso concreto en el que el gobierno tiene que establecer el mismo impuesto óptimo en ambos periodos.

Se toma como referencia el artículo de Goering y Boyce (1996) pero se generaliza al caso en el que la contaminación es duradera. En dicho artículo los autores demuestran que los impuestos sobre la polución emitida por un monopolista productor de un bien duradero pueden tener el efecto de aumentar la capacidad de compromiso del monopolista y por tanto también su poder de mercado. Demuestran que bajo ciertas condiciones esta capacidad de compromiso es suficientemente fuerte como para que aumenten los beneficios del monopolista. Nosotros obtenemos que cuando la contaminación es duradera, el efecto de los impuestos óptimos sobre los beneficios del monopolista va a depender de la durabilidad de la contaminación emitida. Se demuestra que si la contaminación es perfectamente duradera o si el impuesto que establece el gobierno es el mismo en ambos periodos, los beneficios del monopolista después de impuestos nunca van a ser mayores a sus beneficios antes de impuestos y el resultado obtenido por Goering y Boyce no se mantiene.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta el modelo que resuelve el monopolista vendedor sin poder de compromiso cuando la contaminación es duradera y se obtienen las producciones resultantes. En la sección 3 se hallan los impuestos óptimos maximizadores del bienestar social. Los efectos de dichos impuestos óptimos sobre las producciones y beneficios del monopolista, el excedente de los consumidores, la contaminación emitida y el bienestar social son analizados en la sección 4.

En la sección 5 se analiza el caso en el que la contaminación es perfectamente duradera. En la sección 6 se estudia la situación en la que el gobierno establece el mismo impuesto óptimo en los dos periodos. Finalmente en la sección 7 se resumen brevemente los resultados.

2 Modelo del monopolista vendedor sin poder de compromiso

Sea un monopolista que produce un bien duradero perfectamente divisible y que no se deprecia en el tiempo. Existe un mercado de segunda mano perfecto en el que los bienes comprados en el primer periodo pueden ser vendidos en el mercado en el segundo periodo.[2]

Los agentes que actúan en el mercado tienen información perfecta y completa sobre la demanda y los costes de producción. Los compradores son precio aceptantes, racionales y tienen previsión perfecta del futuro (predicen perfectamente las decisiones futuras del productor).

Consideramos dos periodos discretos de tiempo $t = 1, 2$ en los que la producción sólo ocurre al principio de cada periodo.

La función inversa de demanda de los servicios del bien por periodo es lineal e invariante en el tiempo:

$p(x) = a - bx$

donde $p(x)$ es el precio por periodo de alquiler, a y b son constantes positivas y x es la producción acumulada en el periodo considerado.

Denoto por β al factor de descuento donde $0 < \beta \leq 1$. Todos los agentes en el mercado tienen el mismo factor de descuento.

La producción de este bien duradero genera costes externos en forma de emisión de polución. El gobierno quiere controlar esta contaminación que emiten las empresas al producir el bien duradero estableciendo impuestos sobre la polución. Además, suponemos que la contaminación es duradera (es decir, una proporción del daño medioambiental ocasionado por el monopolista en el primer periodo permanece en el segundo periodo), luego en el primer periodo la empresa va a tener que pagar impuestos por el daño medioambiental que ocasiona su producción en dicho periodo y en el segundo periodo pagará impuestos por el daño medioambiental que ocasiona tanto su

[2] Alternativamente puede suponerse que los individuos que más valoran el bien en un periodo también son los que más lo valoran en el periodo siguiente.

producción del segundo periodo como su producción del primer periodo. Por tanto, la empresa se va a enfrentar a dos tipos de costes:

- Costes de producción. El coste marginal de la empresa en el período t con $t = 1, 2$ va a ser c_t, donde $c_1 \geq (1 + \beta)\, c_2$.[3]

- Costes derivados de la contaminación emitida al producir el bien. Denotamos mediante τ_1 y τ_2 los tipos impositivos de los períodos $t = 1$ y $t = 2$ respectivamente. El gobierno va a aplicar estos tipos impositivos sobre la contaminación emitida al producir el bien. Las funciones de daño medioambiental las definimos de la siguiente manera:

$$e_1(x_1) = \gamma x_1$$
$$e_2(x_2) = \gamma(X_2 - x_1) + \gamma\delta x_1 = \gamma x_2 + \gamma\delta x_1 = \gamma(x_2 + \delta x_1)$$

donde γ es una constante positiva y denota el daño medioambiental que ocasiona una unidad de producción, δ con $0 \leq \delta \leq 1$ es el daño medioambiental que permanece en el segundo periodo ocasionado por una unidad de producción del primer periodo, x_t es la cantidad producida por el monopolista en el periodo t y X_2 es la producción agregada. Suponemos que el daño medioambiental que ocasiona una unidad de producción, γ, es el mismo independientemente del periodo en el que estemos.[4] Estamos suponiendo que la contaminación es duradera ya que una proporción δ de contaminación emitida permanece de un período a otro.[5]

Cuanto mayor sea la producción mayor va a ser la contaminación emitida por el monopolista y mayor será el pago total en impuestos dados τ_1 y τ_2.[6]

El monopolista no puede comprometerse a un esquema de producción futura, luego va a elegir el plan de producción temporalmente consistente que

[3] Dicho supuesto se introduce para que sea óptimo socialmente producir una cantidad positiva en el segundo periodo. Véase la discusión al respecto en Saracho y Usategui (1994).

[4] Goering y Boyce (1996) suponen que γ toma un valor distinto en $t = 1$ y $t = 2$ (que denotan γ_1 y γ_2 respectivamente). Sin embargo, se comprobará más adelante que no todos sus resultados se mantienen si suponemos que el daño medioambiental ocasionado por una unidad de producción en un periodo es el mismo independientemente del periodo en el que estemos.

[5] En muchas ocasiones resulta difícil medir cuál es la contaminación emitida por el monopolista al producir el bien. En esos casos, el gobierno podría decidir establecer impuestos sobre la cantidad producida por el monopolista en lugar de establecer impuestos sobre el daño medioambiental.

[6] El resultado obtenido en nuestro análisis es equivalente al que obtendríamos si el gobierno estableciese unos tipos impositivos de $\gamma\,(\tau_1 + \beta\delta\tau_2)$ y $\beta\gamma\tau_2$ sobre las cantidades producidas en el primer y segundo períodos respectivamente.

maximiza el valor presente de sus beneficios. El modelo debe ser resuelto por inducción hacia atrás y por tanto el monopolista resolverá secuencialmente los siguientes problemas:

En $t = 2$ obtendrá el X_2 que maximiza los beneficios de ese período, dado x_1. Resolverá el problema:

$\max\limits_{X_2} \left(a - bX_2 - c_2 - \gamma\tau_2\right)\left(X_2 - x_1\right) - \gamma\tau_2\delta x_1$

$s.a.\ X_2 \geq x_1$

Por tanto, la producción total del monopolista en función de la producción del primer período es:[7]

$$X_2 = \frac{a - c_2 - \gamma\tau_2 + bx_1}{2b}$$

En $t = 1$ encontramos la producción del primer período, x_1 , que maximiza el valor presente descontado de los beneficios totales, esto es:

$\max\limits_{x_1} \left[a - bx_1 + \beta\left(a - bX_2\right) - c_1 - \gamma\tau_1 - \beta\gamma\delta\tau_2\right] x_1 + \beta\left[a - bX_2 - c_2 - \gamma\tau_2\right]\left(X_2 - x_1\right)$

$s.a.\ X_2 = \frac{a - c_2 - \gamma\tau_2 + bx_1}{2b}$

Los valores de x_1 y X_2 que resuelven el problema de maximización con los impuestos τ_1 y τ_2 son:

$$x_1 = \frac{2\left[a - c_1 - \gamma\tau_1 + \beta c_2 + \beta\gamma\tau_2\left(1 - \delta\right)\right]}{b\left(4 + \beta\right)}$$

$$X_2 = \frac{\left(6 + \beta\right)a - 2\left(c_1 + \gamma\tau_1\right) - \left(4 - \beta\right)c_2 - \left(4 - \beta + 2\beta\delta\right)\gamma\tau_2}{2b\left(4 + \beta\right)}$$

Haciendo $\tau_1 = \tau_2 = 0$ obtenemos las producciones del monopolista cuando no existen impuestos:

$$x_1^{si} = \frac{2\left(a - c_1 + \beta c_2\right)}{b\left(4 + \beta\right)}$$

$$X_2^{si} = \frac{\left(6 + \beta\right)a - 2c_1 - \left(4 - \beta\right)c_2}{2b\left(4 + \beta\right)}$$

[7] Nos remitimos a soluciones interiores.

3 Impuestos óptimos

Consideramos ahora que el gobierno quiere establecer unos impuestos sobre el daño medioambiental ocasionado que maximicen el bienestar social. Definimos el bienestar social como el valor presente del excedente de los consumidores más los beneficios brutos del productor menos el daño medioambiental:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{x_1} (a - bx)\, dx + \beta \int_0^{X_2} (a - bx)\, dx - c_1 x_1 - \beta c_2 (X_2 - x_1) - \gamma x_1 - \\ &\quad -\beta\gamma (X_2 - x_1) - \beta\gamma\delta x_1 \end{aligned}$$

Los niveles eficientes de producción son los x_1^w y X_2^w que obtenemos de la maximización del bienestar social y vienen dados por :

$$x_1^w = \frac{a - c_1 + \beta c_2 - (1 - \beta + \beta\delta)\gamma}{b}$$

$$X_2^w = \frac{a - c_2 - \gamma}{b}$$

En este contexto, se puede probar:
Proposición 1: *Los impuestos óptimos que establecerá el regulador son:*[8]

$$\begin{aligned} \tau_1^w &= \frac{1}{2\gamma} \{ -(2+\beta) a + (2 - \beta + 2\beta\delta) c_1 - \beta c_2 (-\beta + 2\beta\delta + 2\delta) + \\ &\quad + \left(4 - \beta + \beta^2 + 2\beta\delta - 3\beta^2\delta + 2\beta^2\delta^2\right) \gamma \} \end{aligned}$$

$$\tau_2^w = \frac{-c_1 + (1+\beta) c_2 + (1 + \beta - \beta\delta)\gamma}{\gamma}$$

Demostración: véase el apéndice 1.

Los impuestos óptimos pueden aumentar o disminuir con el tiempo dependiendo de los valores de los parámetros.

[8]Los impuestos óptimos pueden ser negativos (subvenciones), pero en este artículo se analiza el caso de impuestos positivos.

A partir de la proposición 1 se obtiene:

Corolario 1: *El gobierno establecerá un impuesto creciente en valor presente* $\beta\tau_2^w > \tau_1^w$ *cuando los valores de los parámetros sean tales que cumplan la siguiente relación:*[9]

$$\begin{aligned}&(2+\beta)\,a-(2+\beta+2\beta\delta)\,c_1+(2+\beta+2\beta\delta+2\delta)\,\beta c_2+\\&\left(-4+3\beta+\beta^2-2\beta\delta+\beta^2\delta-2\beta^2\delta^2\right)\gamma>0\end{aligned}$$

Un ejemplo de impuestos crecientes en valor presente $(\tau_1^w < \beta\tau_2^w)$ es el siguiente:

$$\begin{array}{l}a=85 \quad c_1=80 \quad c_2=50 \quad \gamma=20 \quad \beta=0.5 \quad \delta=0.6 \quad b=1\\ x_1^w=14 \quad x_2^w=1 \quad X_2^w=15\\ x_1^{si}=13.33 \quad x_2^{si}=10.83 \quad X_2^{si}=24.16\\ \pi^w=252.5 \quad \pi^{si}=353.125\\ \tau_1^w=0.115 \quad \tau_2^w=0.95\\ EC^w=154.25 \quad EC^{si}=234.895\end{array}$$

donde hemos denotado al excedente de los consumidores cuando el gobierno establece los impuestos óptimos mediante EC^w y al excedente de los consumidores cuando no existen impuestos mediante EC^{si}. Los beneficios del monopolista cuando el gobierno establece los impuestos óptimos los denotamos mediante π^w mientras que los beneficios del monopolista cuando no existen impuestos los denotamos mediante π^{si}.

Un ejemplo de impuestos decrecientes en valor presente $(\tau_1^w > \beta\tau_2^w)$ es:

$$\begin{array}{l}a=90 \quad c_1=100 \quad c_2=60 \quad \gamma=15 \quad \beta=0.4 \quad \delta=0.2 \quad b=1\\ x_1^w=3.8 \quad x_2^w=11.2 \quad X_2^w=15\\ x_1^{si}=6.36 \quad x_2^{si}=11.81 \quad X_2^{si}=18.18\\ \pi^w=84.52 \quad \pi^{si}=134.54\\ \tau_1^w=0.457 \quad \tau_2^w=0.25\\ EC^w=52.22 \quad EC^{si}=86.36\end{array}$$

[9]Dicha relación se obtiene de hallar $\beta\tau_2-\tau_1$

4 Efectos de los impuestos óptimos

Si el gobierno estableciese los impuestos óptimos obtenidos en el apartado anterior, tendríamos los siguientes resultados:

Proposición 2: *Como consecuencia del establecimiento de los impuestos óptimos obtenemos que:*
i) $x_1^w \gtreqless x_1^{si} \Leftrightarrow \tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w \lesseqgtr \beta\tau_2^w$
ii) $x_2^w \gtreqless x_2^{si} \Leftrightarrow 2\tau_1^w \gtreqless (4 + 3\beta - 2\beta\delta)\,\tau_2^w$
iii) $X_2^w < X_2^{si}$
iv) $e^{si}(x) > e^w(x)$
v) Si $\tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w > \beta\tau_2^w \Rightarrow \pi^{si} > \pi^w$
vi) Si $\tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w > \beta\tau_2^w \Rightarrow EC^{si} > EC^w$

Demostración: véase apéndice 2.

El establecimiento de los impuestos óptimos por parte del gobierno puede suponer o bien un aumento o bien una disminución tanto en la producción del primer periodo como en la producción del segundo periodo del monopolista. Sin embargo, la producción total del monopolista siempre va a ser menor después de impuestos.

El bienestar social va a aumentar y el daño medioambiental ocasionado va a disminuir como consecuencia de los impuestos establecidos. Sin embargo, el efecto sobre los beneficios del monopolista va a depender de la relación existente entre el impuesto óptimo establecido en el primer periodo y el impuesto óptimo del segundo periodo. El establecimiento de dichos impuestos óptimos supone un aumento en los costes unitarios de producción en el primer periodo en una cuantía igual a $\tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w$. Por el contrario, los costes unitarios de producción del segundo periodo aumentan en $\beta\tau_2^w$ después de impuestos. Si el coste marginal de producción del primer periodo del monopolista aumenta en mayor cuantía que el coste marginal de producción del segundo periodo, los beneficios del monopolista siempre van a ser mayores antes de impuestos que después de impuestos. Por tanto, una condición necesaria (aunque no suficiente) para que aumenten los beneficios del monopolista después de impuestos es que el coste marginal de producción del segundo periodo aumente en mayor cuantía que el coste marginal de producción del primer periodo, es decir $\tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w < \beta\tau_2^w$. Si $\tau_1^w + \beta\delta\tau_2^w > \beta\tau_2^w$ los beneficios del monopolista no van a aumentar en ningún caso trás el establecimiento de los impuestos óptimos.

Un ejemplo en el que los beneficios del monopolista aumentan después de impuestos es el siguiente:[10]

$$
\begin{aligned}
&a = 110 \quad c_1 = 88 \quad c_2 = 60 \quad \gamma = 26 \quad \beta = 0.3 \quad \delta = 0.005 \quad b = 1 \\
&x_1^w = 27.761 \quad x_2^w = 2.239 \quad X_2^w = 24 \\
&x_1^{si} = 18.6046 \quad x_2^{si} = 15.6976 \quad X_2^{si} = 34.3023 \\
&\tau_1^w = 0.01178 \quad \tau_2^w = 0.9138 \\
&\pi^w = 560.693 \quad \pi^{si} = 559.593 \\
&EC^w = 323.17 \quad EC^{si} = 349.5639 \\
&e^w(x) = 584.098 \quad e^{si}(x) = 606.888
\end{aligned}
$$

Se puede comprobar que en este ejemplo concreto los costes marginales de producción del segundo periodo debido a los impuestos aumentan en mayor cuantía que los costes marginales de producción del primer periodo debido a los impuestos.

El efecto de los impuestos óptimos sobre los beneficios del monopolista va a depender de la durabilidad de la contaminación emitida. Podemos ver que cuanto mayor sea δ, es decir cuanto más duradera sea la contaminación emitida, va a ser más difícil que los beneficios del monopolista aumenten después de impuestos. Podemos observar que la durabilidad de la contaminación emitida afecta al coste marginal de producción del primer periodo del monopolista de forma positiva, es decir cuanto mayor sea la durabilidad de la contaminación mayores van a ser los costes marginales de producción del primer periodo. Sin embargo, la durabilidad de la contaminación no afecta a los costes marginales de producción del segundo periodo. Por tanto, se

[10] En este ejemplo concreto tenemos que:
$\pi^{si} - \pi^w = -11.9238 + 1440.2076\delta - 300.8538\delta^2$
Luego $\pi^{si} = \pi^w$ si :

$$-11.9238 + 1440.2076\delta - 300.8538\delta^2 = 0$$

De donde obtenemos que $\delta = 0.0082936$ y $\delta = 4.7788$. Este último caso no es posible ya que $0 < \delta < 1$. Luego con esos valores concretos de los parámetros obtenemos que si $\delta < 0.0082936 \Rightarrow \pi^{si} < \pi^w$

observa que cuanto mayor sea δ mayores van a ser los costes marginales de producción del primer periodo mientras que los costes marginales de producción del segundo periodo se mantiene constantes, siendo más difícil que sus beneficios después de impuestos sean mayores a sus beneficios antes de impuestos.

Si $\delta = 0$ el aumento en los costes marginales de producción del primer periodo es igual a τ_1^w,mientras que los costes marginales del segundo periodo aumentan en $\beta\tau_2^w$, luego si tenemos un impuesto creciente en valor presente es posible que los beneficios del monopolista después de impuestos sean mayores a sus beneficios antes de impuestos.

5 Caso particular: supongamos que $\delta = 1$

En algunas ocasiones puede ocurrir que el daño medioambiental ocasionado por el monopolista en el primer periodo permanezca en su totalidad en el segundo periodo, por ejemplo si el intervalo de tiempo entre los dos periodos que estamos considerando es relativamente corto. En estas ocasiones tenemos que $\delta = 1$, es decir la contaminación es perfectamente duradera.

Del problema de maximización de beneficios de la empresa obtenemos que las producciones del monopolista en presencia de impuestos son:

$$x_1 = \frac{2\left[a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1\right]}{b\left(4+\beta\right)}$$

$$X_2 = \frac{\left(6+\beta\right)a - 2c_1 - \left(4-\beta\right)c_2 - 2\gamma\tau_1 - \left(4+\beta\right)\gamma\tau_2}{2b\left(4+\beta\right)}$$

Y las producciones socialmente óptimas serán:

$$x_1^w = \frac{a - c_1 + \beta c_2 - \gamma}{b}$$

$$X_2^w = \frac{a - c_2 - \gamma}{b}$$

Los impuestos socialmente óptimos que establecerá el gobierno en este caso son:

$$\tau_1^w = \frac{(2+\beta)(-a+c_1-\beta c_2)+(4+\beta)\gamma}{2\gamma} = 1 - \frac{(2+\beta)(a-c_1+\beta c_2-\gamma)}{2\gamma}$$

$$\tau_2^w = \frac{-c_1+(1+\beta)c_2+\gamma}{\gamma} = 1 - \frac{c_1-(1+\beta)c_2}{\gamma}$$

Proposición 3: *Si $\delta = 1$ el efecto de los impuestos óptimos es el siguiente:*
i) $x_1^{si} > x_1^w$
ii) $x_2^{si} \gtreqless x_2^w \Leftrightarrow 2\gamma\tau_1^w \lesseqgtr (4+\beta)\gamma\tau_2^w$
iii) $X_2^{si} > X_2^w$
iv) $e^{si}(x) > e^w(x)$
v) $\pi^{si} > \pi^w$
vi) $EC^{si} > EC^w$

Demostración: véase apéndice 3.

Si todo el daño medioambiental ocasionado por el monopolista en el primer periodo permanece hasta el segundo periodo ($\delta = 1$) los beneficios del monopolista y el excedente de los consumidores se van a reducir. Sin embargo, el daño medioambiental disminuye y el bienestar social aumenta como consecuencia de dichos impuestos.

Si comparamos esta situación con el caso en el que la contaminación no es perfectamente duradera se puede observar cómo en este caso no es posible que los beneficios de la empresa después de impuestos sean mayores a sus beneficios antes de impuestos. En la sección anterior señalábamos que si los cambios en los costes marginales de producción debido a los impuestos eran crecientes, era posible aumentar los beneficios de la empresa pero un requisito imprescindible para ello era que δ no fuese igual a uno. En este caso, al ser la contaminación perfectamente duradera, el aumento en los costes marginales de producción del primer periodo siempre va a ser mayor al aumento en los costes marginales del segundo periodo luego los beneficios del monopolista después de impuestos siempre seran menores a sus beneficios antes de impuestos.

De este modo, en el caso extremo en el que $\delta = 1$ los beneficios del monopolista después de impuestos siempre se van a reducir. Por tanto, cuando generalizamos el modelo analizado por Goering y Boyce (1996) suponiendo que la contaminación es duradera, sus resultados no se mantienen.

Corolario 3: *Si el gobierno en lugar de establecer los impuestos óptimos establece unos impuestos positivos cualquiera, los resultados de la proposición 3 se van a mantener.*

Demostración: véase apéndice 3.

6 Caso particular: impuestos iguales en los dos periodos

En esta sección se supone que el gobierno establece el mismo impuesto en ambos periodos, es decir $(\tau_1 = \tau_2)$. Puede ocurrir que el gobierno no esté capacitado para cambiar el impuesto óptimo que establece de un periodo a otro o también puede ser que el gobierno decida mantener el mismo impuesto en ambos periodos por problemas de credibilidad.

Manteniendo el resto del modelo invariante, las producciones del monopolista cuando se enfrenta al mismo impuesto en ambos periodos son:[11]

$$x_1 = \frac{2\left[a - c_1 + \beta c_2 - (1 - \beta + \beta\delta)\,\gamma\tau\right]}{b\,(4+\beta)}$$

$$X_2 = \frac{(6+\beta)\,a - 2c_1 - (4-\beta)\,c_2 - (6 - \beta + 2\beta\delta)\,\gamma\tau}{2b\,(4+\beta)}$$

$$x_2 = \frac{(2+\beta)\,a + 2c_1 - (4+3\beta)\,c_2 - (2 + 3\beta - 2\delta)\,\gamma\tau}{2b\,(4+\beta)}$$

Las producciones del monopolista cuando no existen impuestos serán las mismas de antes.

El impuesto óptimo que establece el gobierno se obtiene del siguiente problema de maximización restringido:

[11] Al igual que hasta ahora, nos remitimos a soluciones interiores.

$$\max\left[\int_0^{x_1}(a-bx)\,dx+\beta\int_0^{X_2}(a-bx)\,dx-c_1x_1-\beta c_2\,(X_2-x_1)-\gamma x_1-\right.$$
$$\left.-\beta\gamma\,(X_2-x_1)-\beta\gamma\delta x_1\right]$$

$$\text{s.a.}\left\{\begin{array}{c} x_1=\frac{2[a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau]}{b(4+\beta)} \\ X_2=\frac{(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau}{2b(4+\beta)} \end{array}\right\}$$

Proposición 4: *El impuesto óptimo que establecerá el gobierno en ambos periodos es:*

$$\tau^w = \frac{(4+\beta)}{\gamma[16(1-\beta+\beta\delta)^2+\beta(6-\beta+2\beta\delta)^2]}\{-(2+\beta)(2+2\beta\delta-\beta)a+2(2+2\beta\delta-3\beta)c_1$$
$$+(5\beta-2\beta\delta+2)\beta c_2+2(4-2\beta+3\beta^2+8\beta\delta-6\beta^2\delta+4\beta^2\delta^2)\gamma\}$$

Demostración: véase apéndice 4.

Podemos ver como $\tau_1^w \gtreqless \tau^{\ w}$y $\tau_2^w \gtreqless \tau.^w$

Proposición 5: *Si el gobierno establece el mismo impuesto óptimo en ambos periodos* ($\tau_1^w=\tau_2^w=\tau^w$), tenemos que:[12]
i) $x_1^{si}>x_1^w$
ii) $x_2^{si}>x_2^w$
iii) $X_2^{si}>X_2^w$
iv) $e^{si}(x)>e^w(x)$
v) $\pi^{si}>\pi^w$
vi) $EC^{si}>EC^w$

Demostración: véase apéndice 5.

Los resultados obtenidos del i) a vi) se mantienen aunque el gobierno no establezca el impuesto óptimo, es decir, cualesquiera que sean los impuestos

[12]Los resultados obtenidos (del i) al vi))se mantienen si $\tau_1=\beta\tau_2$.

establecidos por el gobierno dichos resultados se van a mantener. Sin embargo, si el gobierno quiere maximizar el bienestar social sólo lo va a conseguir estableciéndole al monopolista el impuesto óptimo obtenido.

Además, los resultados obtenidos en esta sección se van a mantener independientemente del valor que tome δ (siempre que $0 \leq \delta \leq 1$).

Como consecuencia del impuesto establecido el daño medioambiental, el excedente de los consumidores y los beneficios del monopolista se van a reducir.[13] Sin embargo, si el gobierno establece el impuesto óptimo obtenido en ambos periodos el bienestar social va a ser máximo.

Cuando el regulador establece el mismo impuesto en ambos periodos, los beneficios del monopolista siempre van a ser menores después de impuestos que antes de impuestos. Esto es debido a que cuando el gobierno establece el mismo impuesto en ambos periodos el coste marginal de producción del primer periodo va a aumentar en mayor cuantía que el coste marginal de producción del segundo periodo y como hemos señalado antes cuando esto ocurre no es posible que los beneficios del monopolista después de impuestos sean mayores que sus beneficios antes de impuestos.

Veíamos que si el gobierno establece impuestos distintos en los dos periodos y $\delta \neq 1$ y el coste marginal de producción del segundo periodo aumentaba en mayor cuantía que el coste marginal de producción del primer periodo, podía ocurrir que aumentase el poder de mercado del monopolista y por tanto también sus beneficios. Sin embargo, si el gobierno establece el mismo impuesto en ambos periodos los beneficios del monopolista siempre van a disminuir.

[13] A diferencia del modelo de Goering y Boyce (1996), (donde suponía que el daño medioambiental ocasionado por una unidad de producción era diferente en los dos periodos y por tanto cuando los impuestos eran iguales en ambos periodos podían aumentar los beneficios del monopolista después de impuestos) en este caso vemos que con $\tau_1 = \tau_2$ no es posible que los beneficios del monopolista aumenten después de establecer unos impuestos positivos.

7 Conclusiones

En este trabajo se analizan los efectos de los impuestos óptimos sobre las cantidades producidas por un monopolista productor de un bien duradero contaminante, el daño medioambiental, el excedente de los consumidores, los beneficios del monopolista y el bienestar social.

Suponiendo que los compradores tienen expectativas racionales y que el vendedor no puede comprometerse a precios de venta futuros, se obtiene cuales son los impuestos óptimos maximizadores del bienestar social y se demuestra que si el aumento en los costes marginales de producción del primer periodo debido a los impuestos es mayor al aumento en los costes marginales de producción del segundo periodo, los impuestos óptimos pueden aumentar los beneficios del monopolista ya que obtiene mayor poder de compromiso frente a los consumidores. De esta forma puede haber situaciones en los que el monopolista sin poder de compromiso esta a favor del establecimiento de los impuestos óptimos. Sin embargo, este resultado esta condicionado por la durabilidad de la contaminación emitida y por la capacidad del gobierno de establecer impuestos distintos en diferentes periodos. Por el contrario, si el gobierno establece el mismo tipo impositivo óptimo en los dos periodos, o si la contaminación emitida por el monopolista es perfectamente duradera, los beneficios del monopolista serán menores con impuestos que sin ellos. El poder de mercado que le da al monopolista el impuesto establecido en el segundo periodo no es suficiente para compensarle del pago adicional que tiene que hacer en impuestos.

APÉNDICE

Apéndice 1:

A partir de

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{2\left(a-c_1-\gamma\tau_1+\beta c_2+\beta\gamma\tau_2\left(1-\delta\right)\right)}{b\left(4+\beta\right)} = x_1^w = \frac{a-c_1+\beta c_2-\left(1-\beta+\beta\delta\right)\gamma}{b} \\
X_2 &= \frac{\left(6+\beta\right)a-2\left(c_1+\gamma\tau_1\right)-\left(4-\beta\right)c_2-\left(4-\beta+2\beta\delta\right)\gamma\tau_2}{2b\left(4+\beta\right)} = X_2^w = \frac{a-c_2-\gamma}{b}
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
2\left(a-c_1+\beta c_2\right)-\left(4+\beta\right)\left[a-c_1+\beta c_2-\left(1-\beta+\beta\delta\right)\gamma\right] &= 2\gamma\left(\tau_1-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2\right) \\
\left(6+\beta\right)a-2c_1-\left(4-\beta\right)c_2-2\left(4+\beta\right)\left(a-c_2-\gamma\right) &= \gamma\left[2\tau_1+\left(4-\beta+2\beta\delta\right)\tau_2\right]
\end{aligned}$$

Mediante operaciones algebraicas sencillas derivamos las expresiones presentadas. ■

Apéndice 2:

Para demostrar $i)$ $ii)$ y $iii)$ obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned}
x_1^{si}-x_1^w &= \frac{2\left(a-c_1+\beta c_2\right)}{b\left(4+\beta\right)} - \frac{2\left(a-c_1-\gamma\tau_1^w+\beta c_2+\beta\gamma\tau_2^w\left(1-\delta\right)\right)}{b\left(4+\beta\right)} = \\
&= \frac{2\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)} \gtreqless 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2^{si}-x_2^w &= \frac{(2+\beta)a+2c_1+(4+3\beta)c_2}{2b\left(4+\beta\right)} - \\
&\quad -\frac{(2+\beta)a+2c_1+2\gamma\tau_1^w+(4+3\beta)c_2-(4+3\beta-2\beta\delta)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)} = \\
&= \frac{\gamma\left[-2\tau_1^w+\left(4+3\beta-2\beta\delta\right)\tau_2^w\right]}{2b\left(4+\beta\right)} \gtreqless 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_2^{si} - X_2^{w} &= \frac{(6+\beta)a - 2c_1 - (4-\beta)c_2}{2b\,(4+\beta)} - \\
&\quad - \frac{(6+\beta)a - 2(c_1 + \gamma\tau_1^w) - (4-\beta)c_2 - (4-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau_2^w}{2b\,(4+\beta)} = \\
&= \frac{\gamma\left[2\tau_1^w + (4-\beta+2\beta\delta)\,\tau_2^w\right]}{2b\,(4+\beta)} > 0
\end{aligned}
$$

$iv)$ El daño medioambiental que produce la empresa monopolista cuando el gobierno no interviene en el mercado es:

$e^{si}(x) = \gamma\left(x_1^{si} + \beta x_2^{si} + \beta\delta x_1^{si}\right)$

Y el daño medioambiental que produce la empresa monopolista cuando el gobierno establece los impuestos óptimos para reducir el daño medioambiental es:

$e^{w}(x) = \gamma\left(x_1^{w} + \beta x_2^{w} + \beta\delta x_1^{w}\right)$

Luego:

$$
\begin{aligned}
e^{si}(x) - e^{w}(x) &= \gamma\left[\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) + \beta\left(x_2^{si} - x_2^{w}\right) + \beta\delta\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right)\right] = \\
&= \gamma\left[(1+\beta\delta)\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) + \beta\left(x_2^{si} - x_2^{w}\right)\right] = \\
&= \gamma\left[(1+\beta\delta)\left(\frac{2\gamma\left[\tau_1^w - \beta\,(1-\delta)\,\tau_2^w\right]}{b\,(4+\beta)}\right) + \beta\frac{\gamma\left[-2\tau_1^w + (4+3\beta-2\beta\delta)\,\tau_2^w\right]}{2b\,(4+\beta)}\right] = \\
&= \frac{\gamma^2\left[(4+4\beta\delta-2\beta)\,\tau_1^w + \beta\left(3\beta^2 + 4\beta\delta - 6\beta^2\delta + 4\beta^2\delta^2\right)\tau_2^w\right]}{2b\,(4+\beta)} > 0
\end{aligned}
$$

$v)$ Los beneficios de la empresa monopolista cuando no interviene el gobierno son:

$\pi^{si} = \left[a - bx_1^{si} - c_1 + \beta c_2\right]x_1^{si} + \beta\left[a - bX_2^{si} - c_2\right]X_2^{si}$

Los beneficios del monopolista cuando el gobierno establece los impuestos óptimos son:

$\pi^{w} = \left[a - bx_1^{w} - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^w + \beta\,(1-\delta)\,\gamma\tau_2^w\right]x_1^{w} + \beta\left[a - bX_2^{w} - c_2 - \gamma\tau_2^w\right]X_2^{w}$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\pi^{si} - \pi^{w} &= (a - c_1 + \beta c_2)\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) - b\left(\left(x_1^{si}\right)^2 - \left(x_1^{w}\right)^2\right) + \left(\gamma\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}\right)x_1^{w} + \\
&\quad + \beta(a - c_2)\left(X_2^{si} - X_2^{w}\right) - \beta b\left(\left(X_2^{si}\right)^2 - \left(X_2^{w}\right)^2\right) + \beta\gamma\tau_2^{w}X_2^{w} = \\
&= \left(a - bx_1^{w} - c_1 + \beta c_2\right)\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) + \left(\gamma\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}\right)x_1^{w} + \\
&\quad + \beta\left(a - bX_2^{w} - c_2\right)\left(X_2^{si} - X_2^{w}\right) + \\
&\quad + \beta\gamma\tau_2^{w}X_2^{w} - b\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right)x_1^{si} - \beta b\left(X_2^{si} - X_2^{w}\right)X_2^{si} =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(a - c_1 + \beta c_2 - \frac{a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^{w} + \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right)\left(\frac{\gamma\left[\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\tau_2^{w}\right]}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right) + \\
&\quad + \left(\gamma\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}\right)\left(\frac{a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^{w} + \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right) + \\
&\quad + \beta\left[a - c_2 - \left(\frac{a - c_2 - \gamma\tau_2^{w} + \frac{a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^{w} + \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}}{2}\right)\right]\left(\frac{\gamma\tau_2^{w} + \frac{\gamma\left[\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\tau_2^{w}\right]}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}}{2b}\right) + \\
&\quad + \beta\gamma\tau_2^{w}\left(\frac{a - c_2 - \gamma\tau_2^{w} + \frac{a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^{w} + \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}}{2b}\right) - \\
&\quad - b\left(\frac{\gamma\left[\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\tau_2^{w}\right]}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right)\left(\frac{a - c_1 + \beta c_2}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right) - \\
&\quad - \beta b\left(\frac{\gamma\tau_2^{w} + \frac{\gamma\left[\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\tau_2^{w}\right]}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}}{2b}\right)\left(\frac{a - c_2 + \left(\frac{a - c_1 + \beta c_2}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right)}{2b}\right) =
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\gamma\left[\tau_1^{w} - \beta(1-\delta)\tau_2^{w}\right]}{b\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right) \\
&\quad \left(a - c_1 + \beta c_2 + \frac{\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)\left(a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1^{w} + \beta(1-\delta)\gamma\tau_2^{w}\right)}{\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)}\right) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta\left(a-c_2\right)\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2+\frac{\beta}{2}\right)\gamma\tau_2^w-(1-\delta)\beta\gamma\tau_2^w+(4+\beta)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)}\right)+\\
&+\beta\left(\frac{\gamma\left[\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)}\right)\\
&\left(\frac{\left(2+\frac{\beta}{2}\right)\gamma\tau_2^w-\left(a-c_1+\beta c_2-\gamma\tau_1^w+\beta\left(1-\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)}{\left(4+\beta\right)}\right)+\\
&+\beta\gamma\tau_2^w\left(\frac{a-c_1+\beta c_2-\gamma\tau_1^w-\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{b\left(4+\beta\right)}\right)-\\
&-\frac{4\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)^2}-\\
&-\beta\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{\left(4+\beta\right)}\right)\left(\frac{a-c_2}{2b}+\frac{a-c_1+\beta c_2}{b\left(4+\beta\right)}\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\;&\left(\frac{\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(2+\frac{\beta}{2}\right)}\right)\\
&\left(a-c_1+\beta c_2+\frac{\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(a-c_1+\beta c_2-\gamma\tau_1^w+\beta\left(1-\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)}{\left(2+\frac{\beta}{2}\right)}\right)+\\
&+\beta\left(a-c_2\right)\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(6+\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)}\right)+\\
&+\beta\left(\frac{-\left(a-c_1+\beta c_2\right)}{\left(4+\beta\right)}+\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{\left(4+\beta\right)}\right)\left(\frac{\gamma\left[\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)}\right)+\\
&+\beta\gamma\tau_2^w\left(\frac{a-c_1+\beta c_2}{b\left(4+\beta\right)}-\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{b\left(4+\beta\right)}\right)-\\
&-\frac{4\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)^2}-\\
&-\beta\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{\left(4+\beta\right)}\right)\left(\frac{a-c_2}{2b}+\frac{a-c_1+\beta c_2}{b\left(4+\beta\right)}\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \left(\frac{\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(2+\frac{\beta}{2}\right)}\right) \\
& \left(a-c_1+\beta c_2+\frac{\left(1+\frac{\beta}{2}\right)\left(a-c_1+\beta c_2-\gamma\tau_1^w+\beta\left(1-\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)}{\left(2+\frac{\beta}{2}\right)}\right)+ \\
& +\beta\left(a-c_2\right)\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(6+\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)}\right)+ \\
& \beta\left(\frac{\gamma\tau_1^w-\left(2+\frac{3\beta}{2}-\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{\left(4+\beta\right)}\right)\left[\frac{-\left(a-c_1+\beta c_2\right)+\gamma\left[\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)}\right]- \\
& -\frac{4\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]}{b\left(4+\beta\right)^2}- \\
& -\beta\left(\frac{\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w}{\left(4+\beta\right)}\right)\left(\frac{a-c_2}{2b}+\frac{a-c_1+\beta c_2}{b\left(4+\beta\right)}\right)=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \frac{1}{b\left(4+\beta\right)^2}\left\{-2\left(2+\beta\right)\gamma^2\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]^2+\right. \\
& +2\left(6+2\beta\right)\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]+ \\
& +\beta\left(2+\frac{\beta}{2}\right)\left(a-c_2\right)\left(\gamma\tau_1^w+\left(6+\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)- \\
& -\beta\left(a-c_1+\beta c_2\right)\left(\gamma\tau_1^w-\left(2+\frac{3\beta}{2}-\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)+ \\
& +\beta\left(\gamma\tau_1^w-\left(2+\frac{3\beta}{2}-\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)\left(\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)- \\
& -4\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]- \\
& -\beta\left(2+\frac{\beta}{2}\right)\left(a-c_2\right)\left(\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)- \\
& \left.-\beta\left(a-c_1+\beta c_2\right)\left(\gamma\tau_1^w+\left(2-\frac{\beta}{2}+\beta\delta\right)\gamma\tau_2^w\right)\right\}=
\end{aligned}
$$

$$
= \quad \frac{1}{b\left(4+\beta\right)}\left\{-\gamma^2\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]^2+2\left(a-c_1+\beta c_2\right)\gamma\left[\tau_1^w-\beta\left(1-\delta\right)\tau_2^w\right]+\right.
$$

$$+\beta\left(2+\frac{\beta}{2}\right)(a-c_2)\gamma\tau_2^w-\beta\frac{(4+\beta)}{4}\gamma^2\left(\tau_2^w\right)^2\Bigg\}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b(4+\beta)}\Bigg\{\gamma\left(\tau_1^w-\beta(1-\delta)\tau_2^w\right)\left[\left(2+\frac{\beta}{2}\right)(a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma)+\right.\\
&\quad \left.+(a-c_1+\beta c_2)\right]+\left[\left(1+\frac{\beta}{4}\right)(c_1-(1+\beta)c_2-(1-\delta)\beta\gamma)+\right.\\
&\quad \left.+\left(2+\frac{\beta}{2}\right)(a-c_2-\gamma)+\left(1+\frac{\beta}{4}\right)\gamma\right]\beta\gamma\tau_2^w\Bigg\}
\end{aligned}$$

Al ser todos los términos de esta expresión positivos excepto$\left(\tau_1^w-\beta(1-\delta)\tau_2^w\right)$obtenemos que si $\tau_1^w>\beta(1-\delta)\tau_2^w\Rightarrow\pi^{si}>\pi^w$

$vi)$ El excedente de los consumidores lo definimos como:

$$\begin{aligned}
EC &= \int_0^{x_1}(a-bx)\,dx+\beta\int_0^{X_2}(a-bx)\,dx-p_1x_1-\beta p_2(X_2-x_1)=\\
&= \frac{b}{2}\left(x_1^2+\beta X_2^2\right)
\end{aligned}$$

Si comparamos el excedente de los consumidores en una situación donde el gobierno establece impuestos con una situación donde el gobierno no interviene tenemos que:

$$\begin{aligned}
EC^{si}-EC^w &= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}\right)^2+\beta\left(X_2^{si}\right)^2-\left(x_1^w\right)^2-\beta\left(X_2^w\right)^2\right]=\\
&= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}\right)^2-\left(x_1^w\right)^2+\beta\left(X_2^{si}\right)^2-\beta\left(X_2^w\right)^2\right]=\\
&= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}-x_1^w\right)\left(x_1^{si}+x_1^w\right)+\beta\left(X_2^{si}-X_2^w\right)\left(X_2^{si}+X_2^w\right)\right]=\\
&= \frac{b}{2}\left[\left(\frac{2\gamma\left(\tau_1^w-\beta(1-\delta)\tau_2^w\right)}{b(4+\beta)}\right)\left(x_1^{si}+x_1^w\right)+\right.\\
&\quad \left.+\beta\left(\frac{\gamma\left(2\tau_1^w+(4-\beta+2\beta\delta)\right)}{2b(4+\beta)}\right)\left(X_2^{si}+X_2^w\right)\right]
\end{aligned}$$

Si $\tau_1^w>\beta(1-\delta)\tau_2^w\Rightarrow EC^{si}>EC^w$ ■

Apéndice 3:

La diferencia en las producciones del monopolista es:

$$x_1^{si} - x_1^w = \frac{2\left[a - c_1 + \beta c_2\right]}{b\left(4+\beta\right)} - \frac{2\left[a - c_1 + \beta c_2 - \gamma \tau_1^w\right]}{b\left(4+\beta\right)} = \frac{2\gamma\tau_1^w}{b\left(4+\beta\right)}$$

Si $\tau_1^w > 0 \Rightarrow x_1^{si} > x_1^w$

$$\begin{aligned} X_2^{si} - X_2^w &= \frac{\left(6+\beta\right)a - 2c_1 - \left(4-\beta\right)c_2}{2b\left(4+\beta\right)} - \\ &\quad - \frac{\left(6+\beta\right)a - 2c_1 - \left(4-\beta\right)c_2 - 2\gamma\tau_1^w - \left(4+\beta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)} = \\ &= \frac{2\gamma\tau_1^w + \left(4+\beta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)} \end{aligned}$$

Si $\tau_1^w, \tau_2^w > 0 \Rightarrow X_2^{si} > X_2^w$

$$\begin{aligned} x_2^{si} - x_2^w &= \frac{\left(2+\beta\right)a + 2c_1 - \left(4+3\beta\right)c_2}{2b\left(4+\beta\right)} - \\ &\quad - \frac{\left(2+\beta\right)a + 2c_1 - \left(4+3\beta\right)c_2 + 2\gamma\tau_1^w - \left(4+\beta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)} = \\ &= \frac{-2\gamma\tau_1^w + \left(4+\beta\right)\gamma\tau_2^w}{2b\left(4+\beta\right)} \end{aligned}$$

Sin embargo, $x_2^{si} \gtreqless x_2^w$.[14]

Por tanto, las parte i) ii) y iii) de la proposición quedan demostradas.

El efecto sobre el daño medioambiental ocasionado en este caso será:

$$\begin{aligned} e^{si}(x) - e^w(x) &= \gamma\left(1+\beta\right)\left(x_1^{si} - x_1^w\right) + \beta\gamma\left(x_2^{si} - x_2^w\right) = \\ &= \frac{\gamma^2\left[2\left(2+\beta\right)\tau_1^w + \beta^2\left(4+\beta\right)\tau_2^w\right]}{2b\left(4+\beta\right)} \end{aligned}$$

[14]Un ejemplo de cada situación es la siguiente:

Ejemplo 1:

Si $a = 89 \quad c_1 = 120 \quad c_2 = 62 \quad \gamma = 15 \quad \beta = 0.8 \quad \delta = b = 1$ tenemos que $x_2^{si} = 9.625 > 8.4 = x_2$

Ejemplo 2:

Si $a = 91 \quad c_1 = 125 \quad c_2 = 62 \quad \gamma = 15 \quad \beta = 0.8 \quad \delta = b = 1$ tenemos que $x_2^{si} = 11.25 < 13.4 = x_2$

Si $\tau_1^w, \tau_2^w > 0 \Rightarrow e^{si}(x) > e^w(x)$.

Por tanto, la parte iv) de la proposición queda demostrada.

El efecto sobre los beneficios del monopolista es:

$$\begin{aligned}
\pi^{si} - \pi^w &= \frac{1}{b(4+\beta)} \left\{ \gamma\tau_1^w \left[\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)(a - c_1 + \beta c_2 - \gamma) + (a - c_1 + \beta c_2) \right] + \right. \\
&\quad + \left[\left(1 + \frac{\beta}{4}\right)(c_1 - (1+\beta) c_2) + \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(2 + \frac{\beta}{2}\right)(a - c_2 - \gamma) + \left(1 + \frac{\beta}{4}\right)\gamma \right] \beta\gamma\tau_2^w \right\}
\end{aligned}$$

Si $\tau_1^w, \tau_2^w > 0 \Rightarrow \pi^{si} > \pi^w$

Por tanto, la parte v) de la proposición queda demostrada.

El efecto sobre el excedente de los consumidores es:

$$\begin{aligned}
EC^{si} - EC^w &= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}\right)^2 - \left(x_1^w\right)^2 + \beta\left(\left(X_2^{si}\right)^2 - \left(X_2^w\right)^2 \right) \right] = \\
&= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si} + x_1^w\right)\left(x_1^{si} - x_1^w\right) + \beta\left(\left(X_2^{si} - X_2^w\right)\left(X_2^{si} + X_2^w\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Como $(x_1^{si} > x_1^w)$ y $(X_2^{si} > X_2^w)$ tenemos que $EC^{si} > EC^w$

Por tanto, la parte vi) de la proposición queda demostrada. ■

Para demostrar el corolario 3 teníamos del apéndice 2 que la diferencia de beneficios era:

$$\begin{aligned}
\pi^{si} - \pi &= \frac{1}{b(4+\beta)} \left\{ -\gamma^2\tau_1^2 + 2(a - c_1 + \beta c_2)\gamma\tau_1 + \right. \\
&\quad \left. + \beta\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)(a - c_2)\gamma\tau_2 - \beta\left(1 + \frac{\beta}{4}\right)\gamma^2\tau_2^2 \right\} = \\
&= \frac{\gamma}{b(4+\beta)} \left\{ \tau_1 \left[2(a - c_1 + \beta c_2) - \gamma\tau_1 \right] + \right. \\
&\quad \left. + \beta\tau_2 \left[\left(2 + \frac{\beta}{2}\right)(a - c_2) - \left(1 + \frac{\beta}{4}\right)\gamma\tau_2 \right] \right\} = \\
&= \frac{\gamma}{b(4+\beta)} \left\{ \tau_1 \left[(a - c_1 + \beta c_2) + (a - c_1 + \beta c_2 - \gamma\tau_1) \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta\tau_2}{4}\left[(8+2\beta)(a-c_2)-(4+\beta)\gamma\tau_2\right]\Big\} = \\
= \;& \frac{\gamma}{b(4+\beta)}\left\{\tau_1\left[(a-c_1+\beta c_2)+(a-c_1+\beta c_2-\gamma\tau_1)\right]+\right. \\
&+\frac{\beta\tau_2}{4}\left[((6+\beta)a-(4-\beta)c_2-(4+\beta)\gamma\tau_2-2c_1-2\gamma\tau_1)+\right. \\
&\left.\left.+((2+\beta)a+2c_1-(4+3\beta)c_2+2\gamma\tau_1)\right]\right\} > 0
\end{aligned}
$$

Apéndice 4:

La función de bienestar social lo definíamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
W \;=\;& \int_0^{x_1}(a-bx)\,dx+\beta\int_0^{X_2}(a-bx)\,dx-c_1x_1-\beta c_2(X_2-x_1)-\gamma x_1- \\
&-\beta\gamma(X_2-x_1)-\beta\gamma\delta x_1 = \\
=\;& (a-c_1-\gamma-\beta\gamma\delta)x_1-\frac{b}{2}x_1^2+\beta aX_2-\beta\frac{b}{2}X_2^2-\beta(c_2+\gamma)x_2 = \\
=\;& (a-c_1-\gamma-\beta\gamma\delta)\frac{2(a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau)}{b(4+\beta)}- \\
&-\frac{b}{2}\left(\frac{2(a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau)}{b(4+\beta)}\right)^2+ \\
&+\beta a\left(\frac{(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau}{2b(4+\beta)}\right)+ \\
&-\frac{\beta b}{2}\left(\frac{(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau}{2b(4+\beta)}\right)^2+ \\
&-\beta(c_2+\gamma)\left(\frac{(2+\beta)a+2c_1-(4+3\beta)c_2-(2+3\beta-2\beta\delta)\gamma\tau}{2b(4+\beta)}\right)
\end{aligned}
$$

Maximizando la función de bienestar social obtenemos el impuesto óptimo que establecerá el gobierno en ambos periodos.

$$
\frac{dW}{d\tau} = \frac{-2(a-c_1-\gamma-\beta\gamma\delta)(1-\beta+\beta\delta)\gamma}{b(4+\beta)}+
$$

$$+\frac{4(a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau)(1-\beta+\beta\delta)\gamma}{b(4+\beta)^2}-\frac{\beta a(6-\beta+2\beta\delta)\gamma}{2b(4+\beta)}+$$
$$+\frac{\beta[(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau](6-\beta+2\beta\delta)\gamma}{4b(4+\beta)^2}+$$
$$+\frac{\beta(c_2+\gamma)(2+3\beta-2\beta\delta)\gamma}{2b(4+\beta)}=0$$

$$\frac{1}{b(4+\beta)}[-2(a-c_1-\gamma-\beta\gamma\delta)(1-\beta+\beta\delta)\gamma+$$
$$+\frac{4(a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau)(1-\beta+\beta\delta)\gamma}{(4+\beta)}-\frac{\beta a(6-\beta+2\beta\delta)\gamma}{2}+$$
$$+\frac{\beta[(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau](6-\beta+2\beta\delta)\gamma}{4(4+\beta)}+$$
$$+\frac{\beta(c_2+\gamma)(2+3\beta-2\beta\delta)\gamma}{2}]=0$$

$$\frac{1}{4b(4+\beta)^2}[-8(a-c_1-\gamma-\beta\gamma\delta)(1-\beta+\beta\delta)\gamma(4+\beta)+$$
$$+16[a-c_1+\beta c_2-(1-\beta+\beta\delta)\gamma\tau](1-\beta+\beta\delta)\gamma-2\beta a(6-\beta+2\beta\delta)\gamma(4+\beta)+$$
$$+\beta[(6+\beta)a-2c_1-(4-\beta)c_2-(6-\beta+2\beta\delta)\gamma\tau](6-\beta+2\beta\delta)\gamma+$$
$$+2\beta(c_2+\gamma)(2+3\beta-2\beta\delta)\gamma(4+\beta)]=0$$

Despejando τ nos queda:

$$\tau^w = \frac{(4+\beta)}{\gamma[16(1-\beta+\beta\delta)^2+\beta(6-\beta+2\beta\delta)^2]}\{-(2+\beta)(2+2\beta\delta-\beta)a+2(2+2\beta\delta-3\beta)c_1+$$
$$+(5\beta-2\beta\delta+2)\beta c_2+2(4-2\beta+3\beta^2+8\beta\delta-6\beta^2\delta+4\beta^2\delta^2)\gamma\} \blacksquare$$

Apéndice 5:

Comparando las producciones del monopolista cuando no existen impuestos con sus producciones cuando el gobierno establece el impuesto óptimo obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1^{si} - x_1^w &= \frac{2\left[a - c_1 + \beta c_2\right] - 2\left[a - c_1 + \beta c_2 - \left(1 - \beta + \beta\delta\right)\gamma\tau^w\right]}{b\left(4 + \beta\right)} = \\
&= \frac{2\left(1 - \beta + \beta\delta\right)\gamma\tau^w}{b\left(4 + \beta\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\text{Si } \tau^w > 0 \Rightarrow x_1^{si} > x_1^w
$$

$$
\begin{aligned}
X_2^{si} - X_2^w &= \frac{(6 + \beta)a - 2c_1 - (4 - \beta)c_2}{2b\left(4 + \beta\right)} - \\
&\quad - \frac{\left[(6 + \beta)a - 2c_1 - (4 - \beta)c_2 - (6 - \beta + 2\beta\delta)\gamma\tau^w\right]}{2b\left(4 + \beta\right)} = \\
&= \frac{(6 - \beta + 2\beta\delta)\gamma\tau^w}{2b\left(4 + \beta\right)} > 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{Si } \tau^w > 0 \Rightarrow X_2^{si} > X_2^w
$$

$$
\begin{aligned}
x_2^{si} - x_2^w &= \frac{(2 + \beta)a + 2c_1 - (4 + 3\beta)c_2}{2b\left(4 + \beta\right)} - \\
&\quad - \frac{\left[(2 + \beta)a + 2c_1 - (4 + 3\beta)c_2 - (2 + 3\beta - 2\beta\delta)\gamma\tau^w\right]}{2b\left(4 + \beta\right)} = \\
&= \frac{(2 + 3\beta - 2\beta\delta)\gamma\tau^w}{2b\left(4 + \beta\right)} > 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{Si } \tau^w > 0 \Rightarrow x_2^{si} > x_2^w
$$

Por tanto, las partes i) ii) y iii) de la proposición quedan demostradas.

El daño medioambiental ocasionado por el monopolista cuando el gobierno no establece los impuestos es:

$$e^{si}(x) = e_1^{si}(x_1) + \beta e_2^{si}(x_2) = \gamma x_1^{si} + \beta\gamma\left(\delta x_1^{si} + x_2^{si}\right)$$

El daño medioambiental ocasionado por el monopolista cuando el gobierno establece impuestos en ambos periodos es:

$$e^{w}(x) = e_1^{w}(x_1) + \beta e_2^{w}(x_2) = \gamma x_1^{w} + \beta\gamma\left(\delta x_1^{w} + x_2^{w}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} e^{si}(x) - e^{w}(x) &= \gamma\left(x_1^{si} + \beta x_2^{si} + \beta\delta x_1^{si} - x_1^{w} - \beta x_2^{w} - \beta\delta x_1^{w}\right) = \\ &= \gamma\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) + \beta\gamma\left[\delta\left(x_1^{si} - x_1^{w}\right) + \left(x_2^{si} - x_2^{w}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\text{si } \tau^{w} > 0 \Rightarrow e^{si}(x) > e^{w}(x)$$

Por tanto, la parte v) de la proposición queda demostrada.

Los beneficios de la empresa cuando no existen impuestos son:

$$\pi^{si} = \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) b\left(x_1^{si}\right)^2 + \beta b x_2^{si} X_2^{si}$$

Cuando el gobierno establece los impuestos óptimos, los beneficios de la empresa serán:

$$\pi = \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) b\left(x_1\right)^2 + \beta b x_2 X_2$$

Luego:

$$\begin{aligned} \pi^{si} - \pi^{w} &= \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) b\left(x_1^{si}\right)^2 + \beta b x_2^{si} X_2^{si} - \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) b\left(x_1^{w}\right)^2 - \beta b x_2^{w} X_2^{w} = \\ &= \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) b\left[\left(x_1^{si}\right)^2 - \left(x_1^{w}\right)^2\right] + \beta b\left(x_2^{si} X_2^{si} - x_2^{w} X_2^{w}\right) > 0 \end{aligned}$$

Como consecuencia del impuesto óptimo los beneficios del monopolista van a disminuir.

El excedente de los consumidores en una situación sin impuestos es:

$$EC^{si} = \frac{b}{2}\left(\left(x_1^{si}\right)^2 + \beta\left(X_2^{si}\right)^2\right)$$

El excedente de los consumidores cuando el gobierno establece los impuestos será:

$$EC^{w} = \frac{b}{2}\left(\left(x_1^{w}\right)^2 + \beta\left(X_2^{w}\right)^2\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned} EC^{si} - EC^{w} &= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}\right)^2 + \beta\left(X_2^{si}\right)^2 - \left(x_1^{w}\right)^2 - \beta\left(X_2^{w}\right)^2\right] = \\ &= \frac{b}{2}\left[\left(x_1^{si}\right)^2 - \left(x_1^{w}\right)^2 + \beta\left(X_2^{si}\right)^2 - \beta\left(X_2^{w}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$\text{Si } \tau^{w} > 0 \Rightarrow EC^{si} > EC^{w}$$

Por tanto, la parte iv) de la proposición queda demostrada. ■

BIBLIOGRAFÍA

-Bulow, Jeremy I. 1986. "An Economic Theory of Planned Obsolescence". *Quarterly Journal of Economics* 101: 729-749

-Butz, David A. 1990. "Durable-Good Monopoly and Best-Price Provisions." *American Economic Review* 80: 1062-1076.

-Coase, Ronald H. 1972. "Durability and Monopoly." Journal of Law And Economics 15: 143-149

-Goering, Gregory E. John R. Boyce and James M. Collins. 1993. "R&D and Product Obsolescence." *Review of Industrial Organization* 8: 609-621.

-Goering, Gregory E. John R. Boyce 1996. "Taxation and Market Power when Products are Durable." *Journal of Regulatory Economics:* 83-94.

-Kahn, C. 1986. "The Durable Goods Monopolist and Consistency with Increasing costs". *Econométrica* 54: 275-296.

- Saracho, A. I., Usategui, J. M. 1994. "Innovation Diffusion Subsidies: Supply without Precommitment Ability and Welfare". European Journal of Political Economy 10, 357-372.