eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia

SUPERTAREAS NEWTONIANAS:
LA RELACIÓN DEL INDETERMINISMO CON LA PÉRDIDA DE LA ENERGÍA EN SISTEMAS NEWTONIANOS ANÓMALOS

Tesis Doctoral

Autor:
Luis Carlos Medina Ruiz

Directores:
Prof. Dr. Andoni Ibarra Unzueta
Prof. Dr. Jon Pérez Laraudogoitia

ISBN: 978-84-9860-388-0
Donostia, 2009

Para Verónica y Luis
–mis padres–,
con admiración.

A la memoria de Igor Aristegi,
compañero y cómplice de este proyecto.

*(*Gaur gurekin zaude
Oroimenean baldin bada ere.

Asgarth, *Eutsi Lagun).*

Agradecimientos

A los directores de esta tesis, los profesores Andoni Ibarra y Jon Pérez Laraudogoitia. Por ofrecerme la dirección conjunta de este trabajo, por todo el tiempo y el esfuerzo que me dedicaron, por los caminos que me aconsejaron y por las libertades y facilidades que me concedieron en la realización de mi investigación. Por ser un ejemplo de laboriosidad y por animarme constantemente a tener ideas nuevas.

A mis papás, a la Nadia, a la Annie, y a la Vero. Por todo el apoyo emocional y económico que incondicionalmente me dieron a lo largo de estos años. Sin ellos, la realización de este proyecto habría sido imposible.

Al profesor Thomas Mormann, por toda la ayuda que representó su compromiso con los diversos seminarios que organizamos, por sus críticas y consejos en la gestación de este trabajo. Al profesor David Papineau, por la orientación brindada en torno al tema del indeterminismo.

A los compañeros del despacho. A Igor Aristegi (†), por los proyectos y sueños que algún día compartimos, algunos materializados, otros ya perdidos, y unos todavía en el horizonte. Por compartir su espíritu de trabajo, su inquietud intelectual, y su sentido del humor. Se te extraña mucho. A Hannot Rodríguez, por la calidad humana e intelectual mostrada en todo momento, por la valiosa atención que prestó a este trabajo a pesar las cuestiones técnicas que surgían, por el Heavy Metal compartido, y por ser un ejemplo vivo de vida virtuosa. Todavía tengo mucho que aprender de ti.

A Aitor Luque, por la discusión realizada en torno al apartado 2.1 de esta tesis. Fue muy fácil llegar a ideas interesantes a través de su intervención.

A los compañeros que formaron o forman parte del grupo y que de una u otra manera me ayudaron y apoyaron: Darío Arteta, Rakel Arraiza, Gloria Baigorrotegui, Julieta Barrenechea, Wendy Cano, Javier Castro, Ana Gómez, Oier Iribar, Josebe Iturrioz, Maialen Montoya, Gabriel Painceyra, Liliana Rocca, Cristian Saborido, Iñaki San Pedro, Ekai Txapartegi, Eduardo Zubia y Javier Zúñiga. A los compañeros del programa de doctorado: Marila Lázaro, Ricardo Pestaña, Paula Restrepo, Jesús Siqueiros (junto a María y a Iker; aquella navidad ha sido inolvidable). A los compañeros que vinieron desde Medellín y compartieron las comidas y la lucha cotidiana: Juan Fernando Arango, Raúl Domínguez y Juan Guillermo Rivera. Por supuesto, también al resto de los antioqueños, ustedes saben quiénes son.

A dos parejas que me dieron un alojamiento excelente en los veranos. Nerea y Jon y Montse e Iñaki. Fueron épocas de retiro e intenso trabajo altamente fructíferas. Por este último motivo también agradezco a Larraitz pero, sobre todo, por todo el aliento que me ha dado (que ha sido mucho), por su increíble compañía y su profunda comprensión.

Índice

SEGUNDA PARTE
LEGITIMIDAD DE LAS SUPERTAREAS NEWTONIANAS

TERCERA PARTE

ANOMALÍAS EN SUPERTAREAS NEWTONIANAS:
EL INDETERMINISMO Y EL FALLO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

0. Introducción

El hecho de saber física, o de conocer la realidad física por medio de teorías físicas altamente exitosas y desarrolladas, no hace de nuestra realidad una realidad libre de aspectos incomprensibles. Suceden cosas en nuestra realidad que quisiéramos entender pero que, en mayor o menor medida, escapan a nuestra comprensión. Hay sucesos inesperados, paradójicos, contradictorios, jocosos, trágicos, dolorosos, que, por más que sean inevitables, nos gustaría al menos comprender. Este aspecto inalcanzado –y quizás, hasta cierto grado, inalcanzable– de la realidad no se debe sólo a que la realidad es más compleja que las teorías físicas de alta complejidad –al menos, por ahora, así lo suponemos–, sino a que nuestra realidad no es una realidad meramente física. Nuestra realidad es física, sí, pero también es biológica, química, social, cultural, lingüística, etcétera.

Nuestra realidad también es filosófica. Nuestro acceso a la realidad se lleva a cabo gracias a las percepciones, pero también gracias a las *ideas* que interpretan y enriquecen tales percepciones. Gracias a ciertas ideas –entre ellas la idea genial de que un símbolo puede representar un fonema–, por ejemplo, podemos leer los pensamientos que este texto pretende transmitir, y no sólo ver un cúmulo de manchas negras, delgadas y caprichosas sobre el papel. Las *ideas*, a su vez, aunque no se introducen en nosotros directamente por medio del aparato perceptivo, son objetos que conforman nuestra realidad. Somos conscientes, en menor o mayor medida, de que otras personas tienen ideas que no compartimos, no entendemos o no conocemos; de que hay una gran cantidad de ideas dignas que considerarse objetos de estudio y reflexión, y que con ello podemos producir ideas de orden superior: ideas sobre las ideas. Precisamente, esta reflexión es la reflexión filosófica.

No es aquí el lugar de discutir qué es la filosofía. Pese a las diversas concepciones que se tienen sobre ella (bajo las cuales hasta se puede considerar, a su vez, la idea de filosofía como un problema filosóficamente relevante), e independientemente de la tradición que se siga, es posible asegurar que la filosofía es una disciplina cuyo objeto de estudio y reflexión son las ideas.[1] Ideas, claro está, que en un momento dado, o bajo cierto contexto, son ideas que resultan ser problemáticas, o que su misma concepción presenta dificultades, desafíos conceptuales o incluso prácticos.

La idea de *silla*, por ejemplo, no es una idea problemática, y por lo tanto no es una idea relevante para la filosofía. No desafía ninguna intuición, no es conflictiva con otras ideas con las que está relacionada, e identificamos perfectamente al objeto que nos referimos cuando hablamos de una silla. No es de extrañar, pues, que la reflexión filosófica acerca de la idea de silla sea nula. No sucede lo mismo, por ejemplo, con la idea del *mal* o del *tiempo*. Intuitivamente, todos "sabemos" (o creemos "saber") a la perfección lo que es el tiempo (los físicos, por ejemplo, utilizan la idea del tiempo, obteniendo resultados notablemente exitosos, sin apenas plantearse su naturaleza conceptual); no obstante, y a pesar de todos los conceptos y posturas que giran alrededor de la idea de tiempo, y de las ideas que se han creado para mejorar su comprensión, no podemos decir que su naturaleza conceptual sea comprendida en su totalidad.

Los problemas que esta tesis abordará se encuentran enmarcados en la filosofía de la física, es decir, en la reflexión sobre el conjunto de ideas que pretenden comprender el aspecto físico de la realidad. Más concretamente, los problemas que abordaremos están enmarcados en la filosofía de la mecánica newtoniana, en la reflexión sobre el conjunto de ideas que pretenden comprender el movimiento de los objetos de la realidad desarrolladas a partir del legado teórico de Newton.

0.1. ¿Física o filosofía de la física?

La realidad física sólo puede ser conocida bajo teorías físicas. Cualquier descripción de la realidad física, cualquier explicación de la realidad física, o cualquier previsión de un suceso físico, se basa en alguna teoría física, aunque ésta sea ingenua, intuitiva, poco desarrollada o poco exitosa. Precisamente, ante la inquietud de tener un mayor conocimiento de la realidad física, la comunidad científica no deja de desarrollar y de enriquecer teorías físicas.

Con esta tesis no pretendemos contribuir al conocimiento de la realidad física, y por lo tanto no nos encontraremos haciendo física. Lo que pretendemos en esta tesis doctoral es contribuir al conocimiento de una teoría habitualmente utilizada para comprender un aspecto de la realidad física. No queremos, pues, decir cómo es la realidad física, sino decir cómo es una teoría, cómo es determinado conjunto de ideas que pretenden decir cómo es la realidad física. La teoría que aquí abordaremos será la mecánica newtoniana, una teoría cuyo objeto de estudio es el movimiento físico.

[1] Sólo por mencionar a dos gigantes de tradiciones distintas –sin otorgarles por ello plena autoridad–, tenemos a Deleuze y a Wittgenstein con concepciones de la filosofía que apuntan hacia las *ideas*. Deleuze, de tradición continental, junto a Guattari escribe (considero que sin recurrir a metáforas) lo siguiente: "la filosofía es el arte de formar, de inventar, de fabricar conceptos" [Deleuze y Guattari 1995 (1991): 8]. Wittgenstein, uno de los principales inspiradores de la tradición analítica, escribe en el punto 4.112 del *Tractatus*: "El objeto de la filosofía es la clarificación lógica de los pensamientos. La filosofía no es una doctrina, sino una actividad. Una obra filosófica consta esencialmente de aclaraciones. […] La filosofía debe de clarificar y delimitar nítidamente los pensamientos, que de otro modo son, por así decirlo, turbios y borrosos" [Wittgenstein 1987 (1922): 65]. Independientemente de estas citas, debo reconocer que, por lo pronto, cada vez estoy más convencido de que la filosofía es la actividad reflexiva en torno a las ideas (ideas, muchas veces, que se refieren a algún aspecto concreto de la realidad).

Las teorías del movimiento físico vigentes en la actividad científica contemporánea son la mecánica newtoniana, la mecánica relativista (especial y general) y la mecánica cuántica. Mientras que la mecánica newtoniana habitualmente se adopta para el estudio de la realidad física macroscópica, la mecánica relativista se adopta para el estudio de la realidad física cosmológica y la mecánica cuántica para el estudio de la realidad física microscópica. Las últimas dos han mostrado ser, frente a la primera, de un éxito apabullante. A pesar de ello, hoy en día la mecánica newtoniana sigue siendo una teoría de suma importancia para comprender el movimiento físico (principalmente a un nivel macroscópico), por lo que la reflexión filosófica sobre ella es digna de llevarse a cabo.

La labor filosófica que se ha realizado sobre la mecánica cuántica es abundante. Desde la misma gestación de la teoría, por ejemplo, sus principales exponentes fueron los protagonistas del debate sobre cómo debía de interpretarse. Tal debate se ha prolongado hasta nuestros días, enriqueciéndose con más interpretaciones, y es especialmente importante para algunas ideas epistemológicas como el nivel de la objetividad y de la realidad cuántica. La misma mecánica cuántica utiliza conceptos que son filosóficamente relevantes como lo son, por nombrar sólo dos, la dualidad partícula-onda o la decoherencia. Otra cuestión célebre en las reflexiones filosóficas sobre esta teoría es el colapso de la medición y el carácter probabilístico que está detrás de ella.

La labor filosófica que se ha realizado sobre la mecánica relativista (especial y general) también es abundante. Entre las reflexiones filosóficas más relevantes sobre la mecánica relativista están las que giran en torno a las consecuencias de las ideas del espacio y el tiempo asumidas por la teoría. Este campo de reflexión ha pasado desde la idea de simultaneidad, por la posibilidad conceptual (bajo esta teoría) de las máquinas del tiempo, hasta la comprensión de la relación que guarda la masa con la energía.

La teoría que aquí vamos a tratar, la mecánica newtoniana, también contiene algunos aspectos con relevancia filosófica. Además del nivel ontológico y epistemológico de las ideas del espacio y del tiempo asumidas en mecánica newtoniana (y, por supuesto, del movimiento que ocurre en tales entidades), está también la estructura infinita que ambas ideas presuponen –tanto en extensión como en división– y que, como se verá en esta tesis (sobre todo en la primera parte), las reflexiones en torno a ellas son abundantes. También, por ejemplo, la comprensión de ideas como fuerza y energía, ideas que hoy en día se encuentran fuertemente arraigadas hasta en el leguaje cotidiano, merecen una profunda reflexión filosófica. La reflexión sobre estas ideas, por supuesto, se enriquece con el enriquecimiento que las mismas han sufrido durante el desarrollo de teorías más recientes. Por otro lado, el determinismo –un aspecto que la mayoría de los científicos desearían para sus teorías–, es también una cuestión filosóficamente importante no sólo con respecto a la mecánica newtoniana, sino también para la cuántica y la relativista.

Antes de exponer la motivación de mi preferencia por la mecánica newtoniana para este trabajo, debo añadir la siguiente aclaración: no existe una frontera clara entre la filosofía de la física y la física.[2] En muchas ocasiones, al estar haciendo un análisis filosófico de la física, puede dar la impresión de que se atiende y se resuelven problemas de física teórica (que, vistos sin su debida interpretación física, son a su vez

[2] Este es un hecho reconocido en distintos lugares. Respecto a la filosofía de la ciencia en general leemos: “In the philosophy of science, specially, there is no clear line where the philosophy ends and the science begins” [Hitchcock 2004: 2]. Concretamente, sobre la filosofía de la física, Lange afirma: “there is no sharp line dividing physics from the philosophy of physics” [Lange 2002: ix]. Más recientemente, Butterfield y Earman dicen “it is obvious that by our lights, there is no sharp line between philosophy of physics and physics itself” [Butterfield y Earman 2007: xviii].

problemas matemáticos). Efectivamente, como es el caso de algunas secciones de esta tesis (por ejemplo, las secciones 5.5.1 y 6.2.3), en algunas ocasiones se invierte bastante esfuerzo en el desarrollo de ciertos modelos físicos. Aunque el estudio de estos modelos suscite problemas legítimos para la física teórica, lo que aquí (y en la filosofía de la física) nos importa de ellos son las repercusiones filosóficas que tienen.

0.2. ¿Por qué considerar la mecánica newtoniana?

A pesar del éxito empírico de la mecánica cuántica y la mecánica relativista, la mecánica newtoniana está todavía muy lejos de ser una teoría olvidada, relegada o que haya caído en desuso. No sólo es una teoría que se aprende previamente a aprender la mecánica cuántica o relativista, no sólo es un preámbulo conceptual para comprender mejor las teorías más exitosas, sino que en sí misma plantea problemas que hoy en día constituyen la motivación de actividades investigadoras relevantes. Por mencionar dos ejemplos ricos en resultados actuales y problemas teóricos todavía abiertos, tenemos la dinámica de los *n*-cuerpos [Saari 2005], y la dinámica de billares [Tabachnikov 2005]. No sólo eso, existe el reconocimiento de un reciente resurgimiento de la atención que se le presta hoy en día a la mecánica clásica por la comunidad científica.[3]

Por otro lado, la mecánica newtoniana es la teoría del movimiento que se enseña (sin entrar en muchos tecnicismos y sin profundizar demasiado) en los niveles más altos de educación obligatoria de muchos países. No sólo eso, especialidades enteras de niveles de educación superior que tienen una importante repercusión en el desarrollo tecnológico, como la ingeniería mecánica o la ingeniería civil o de caminos, se concentran exclusivamente en la mecánica newtoniana para la comprensión del movimiento. ¿Por qué una teoría que hasta cierto punto se ha visto opacada por la mecánica relativista y la mecánica cuántica tiene tanta vigencia en nuestros días? Porque, como ya dijimos, es altamente exitosa para describir el movimiento a escala macroscópica; dicho con otras palabras, es la teoría más adecuada para comprender la realidad del movimiento físico más próximo, inmediato y cotidiano. Definitivamente, la mecánica newtoniana es una teoría digna de atención.

Esta no es la única motivación para que esta tesis concentre su reflexión en la mecánica newtoniana. Una característica sumamente importante de esta teoría es la simplicidad de su formulación. La simplicidad siempre será una característica deseada de las teorías, pues con ella siempre es más fácil acceder a las ideas con las que pretende comprender cierto aspecto de la realidad, y por tanto más fácil acceder a la realidad. De hecho, el amplio reconocimiento de la mecánica newtoniana frente a la mecánica relativista, por ejemplo, como teoría adecuada para comprender el movimiento en un nivel macroscópico no solo se debe a una precisión empírica satisfactoria, sino a la simplicidad de su formulación. Al resaltar esta ventaja de la mecánica clásica frente a la cuántica y a la relativista, no estamos quitando importancia a las dos últimas teorías. Al contrario, la simplicidad de la mecánica newtoniana es una puerta de acceso a las teorías del movimiento más complejas. Por ejemplo, trasladar (siempre y cuando sea adecuado) los resultados obtenidos bajo una formulación newtoniana a una formulación relativista o a una formulación cuántica, en vez de plantear los problemas directamente bajo una formulación relativista o bajo una formulación cuántica respectivamente, es una

[3] Por ejemplo, Sussman y Wisdom así lo reconocen: “There has been a remarkable revival of interest in classical mechanics in recent years. We now know that there is much more to classical mechanics than previously suspected. The behavior of classical systems is surprisingly rich” [Sussman y Wisdom 2001: xii].

estrategia muchas veces conveniente. Es, de hecho, una estrategia que se ha utilizado más de una vez en los sistemas newtonianos que concretamente aquí vamos a abordar: las supertareas basadas en colisiones perfectamente elásticas.[4] Por lo tanto, no descartamos que los resultados obtenidos en esta tesis tengan repercusiones importantes para la mecánica relativista o para la mecánica cuántica.

La mecánica newtoniana, además, es una teoría altamente acorde a nuestras intuiciones más inmediatas acerca del movimiento (esto, muy probablemente, se deba al prestigio que goza entre los legos en física). Esto no es así en las otras dos teorías del movimiento. Por un lado, la mecánica cuántica resulta ser de un éxito empírico abrumador a pesar de su carácter probabilístico; tenemos un alto poder predictivo bajo un grado de incertidumbre. Por el otro lado, la mecánica relativista postula un espacio y tiempo distintos al espacio euclidiano y al tiempo euclidiano, que son los intuitivamente más satisfactorios; de hecho, el espacio-tiempo relativista, cuando se representa gráficamente, siempre se hace inmerso en un espacio euclidiano. Muchas veces, es ante este tipo aspectos contraintuitivos donde surge un amplio campo para la reflexión filosófica.

0.3. El indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía en mecánica newtoniana

Pese al carácter altamente intuitivo de la mecánica newtoniana, esta teoría no está libre de contraintuiciones. Los problemas que aquí vamos a tratar, de hecho, están directa y estrechamente relacionados con contraintuiciones producto de dos aspectos –aspectos que nos atrevemos a llamar prejuicios– muy arraigados en la concepción de la mecánica newtoniana: el determinismo y la conservación de la energía.

El indeterminismo en la mecánica newtoniana

Dicho muy parcamente, el determinismo es la doctrina que concibe un mundo (real, teórico o ficticio) de tal manera que la evolución de tal mundo a lo largo del tiempo está, previamente al transcurso del tiempo, determinada o fijada. Es preferible referirse a los mundos con esta característica como mundos deterministas y no como mundos determinados, ya que esta segunda denominación puede sugerir que exista alguien o algo que determine la evolución de estos mundos, lo que no es ninguna necesidad. La interpretación física, no obstante, considera que la evolución de un mundo determinista está determinada por las leyes físicas que rigen semejante mundo. Así también, un mundo indeterminista es un mundo que se rige por leyes que no son capaces de especificar una única evolución. (Para un tratamiento más detallado de los diversos matices con los que se puede concebir el determinismo, véase sección 5.1).

El determinismo y el indeterminismo, además, se conciben también como propiedades de las teorías. La idea es bastante sencilla: las teorías que postulan un mundo determinista son teorías deterministas y las teorías que postulan un mundo indeterminista son teorías indeterministas. En esta tesis nos vamos a concentrar en el indeterminismo como propiedad de la mecánica newtoniana.

[4] Esta estrategia, de sistemas clásicos a relativistas, se sigue en [Atkinson 2007 y 2008], [Atkinson y Johnson 2009] y en [Pérez Laraudogoitia 1998b, 2007b y 2008]. Por otro lado, la estrategia de clásico a cuántico se sigue en [Atkinson 2007 y 2008] y en [Norton 1999].

Tradicionalmente se ha creído (y se sigue creyendo) que la mecánica newtoniana es una teoría determinista, que el conjunto de sus leyes y asunciones implican, para cada uno de sus sistemas, una única evolución. Más todavía, la mecánica newtoniana es tradicionalmente la fuente de inspiración de la idea, fuertemente impulsada por Laplace, que concibe el mundo real, independientemente de nuestra mayor o menor ignorancia del mismo, como un mundo determinista. Pese a tal tradición, es bien conocido que la mecánica newtoniana es una teoría indeterminista. Cualquier sistema newtoniano, perteneciente al mundo que postula la mecánica newtoniana, que resulte ser indeterminista es una muestra de que la teoría también lo es. Así, es interesante para la filosofía mostrar que existen sistemas indeterministas enmarcados dentro de una teoría específica, y todavía más interesante es comprender por qué tales sistemas resultan ser indeterministas.

Un ejemplo sencillo de sistemas indeterministas en mecánica newtoniana son las colisiones que ocurren instantáneamente entre más de dos cuerpos. La razón de este indeterminismo es simple. Para conocer la evolución de un sistema de tales características tenemos la conservación de la energía mecánica y la conservación del momento lineal en la colisión, que podemos expresar con dos ecuaciones en términos de las velocidades constantes de los cuerpos antes y después del impacto; de esta manera tenemos sólo dos ecuaciones con más de dos incógnitas, ecuaciones que, para un mismo caso, tienen muchas soluciones con un sentido físico preciso. Otro ejemplo, y que se encuentra en el debate actual sobre el indeterminismo en la mecánica newtoniana, es el domo de Norton [2003]. Consiste en un cuerpo que se desliza, bajo gravedad, por un montículo de cierto perfil. En este caso, también, las ecuaciones que rigen el movimiento de tal sistema presentan una gran diversidad de evoluciones con un sentido físico preciso. (En la sección 5.4 tratamos con detalle el indeterminismo del domo).

Estos no son los sistemas con los que directamente trabajaremos aquí (esto, sin embargo, no quiere decir que los sistemas que estudiaremos en esta tesis no tengan repercusiones para los sistemas arriba mencionados). Antes de pasar a especificar el tipo de sistemas que aquí estudiaremos, pasemos al otro problema principal que trataremos en este trabajo.

La pérdida de la energía en la mecánica newtoniana

La idea de la energía en sí es una idea filosóficamente relevante. Podemos, por ejemplo, plantear una cuestión fundamental: ¿es la energía una entidad del mundo real, es decir, se encuentra en el mismo nivel ontológico que los objetos materiales, o es simplemente una magnitud escalar con una peculiar importancia para los sistemas físicos? Cualquier respuesta plausible que se le dé a esta pregunta, requiere de una reflexión filosófica profunda. La cuestión, además, se complica si nos percatamos que la idea de energía tiene una historia, que la idea actual de energía es una idea considerablemente distante de la idea original. En un principio, la idea de energía constaba sólo de lo que hoy en día conocemos como energía mecánica: energía potencial más energía cinética. Con el desarrollo de teorías que intentan comprender otros aspectos de la realidad física, como la termodinámica y la electrodinámica, el concepto de energía se amplió de tal manera que la energía mecánica pasó a ser una manifestación concreta de una “entidad” de mayor alcance, la energía en general. Más aún, con el desarrollo de la teoría de la relatividad, la energía dejó de ser una “entidad” independiente del momento, además de que, junto con el momento, pasa a ser un reflejo de la masa en un marco de referencia dado –esto bajo una idea de masa, es necesario añadir, bastante alejada de la idea originalmente planteada en la gestación de la mecánica newtoniana–.

Este problema tan fundamental –el estatus ontológico de la energía–, y que incumbe no sólo a la mecánica newtoniana sino a la física como disciplina que unifica (al menos hasta cierto grado) la diversidad de las teorías físicas, no es un tema que será abordado en esta tesis. Es la conservación de la energía, específicamente en la mecánica newtoniana, el tema que aquí nos ocupará. Por supuesto, la idea de la conservación de la energía depende en gran medida de la idea de energía que se tenga, y por tanto también es relevante para el estatus ontológico de la misma. Por otro lado, al tratar en esta tesis sistemas newtonianos no conservativos, y dado el carácter fundamental que se le otorga hoy en día al principio de la conservación de la energía, los resultados que aquí se presentarán son relevantes para la fundamentación de la mecánica newtoniana (así como para la fundamentación de otras teorías, en los casos en que sea posible enmarcar los sistemas en otras teorías junto con sus repercusiones).

La conservación de la energía en la mecánica newtoniana, aunque no es una idea que se gestó junto con la teoría, también es una idea temprana. Es a Leibniz a quien se le atribuye esta idea, quien se percató de que una gran cantidad de sistemas mecánicos conservaban la energía a lo largo de su evolución. Leibniz se refería exclusivamente a la energía mecánica, la energía cinética y la potencial, y no a la idea amplia que se tiene ahora. Fue, precisamente esta idea, el punto de partida para ampliar la idea de energía y darle un carácter cada vez más universal al principio de conservación de la misma.

Al igual que con el indeterminismo, tradicionalmente se ha creído (y se sigue creyendo) que la mecánica newtoniana es una teoría conservativa, es decir, que es una teoría bajo la cual todos los sistemas concebibles cumplen con el principio de la conservación de la energía. Es ampliamente conocido, sin embargo, que para muchos casos la energía mecánica en sí –y no la energía en términos generales– no se conserva, aunque en la gran mayoría de los casos sí lo haga. Los ejemplos más representativos son los sistemas de cuerpos cuyo movimiento enfrenta fuerzas de resistencia (fuerzas de fricción) por parte del medio. De hecho, este tipo de fuerzas pertenecen al conjunto de fuerzas denominadas como ‘fuerzas no conservativas’. También es ampliamente conocido que el fallo de la conservación en este tipo de sistemas no amenaza a la conservación de la energía –concebida en términos más amplios–: la energía mecánica que el sistema pierde se transforma en energía térmica. Este tipo de explicación, sin embargo, no se puede ofrecer para los sistemas newtonianos no conservativos que aquí vamos a tratar.

Tanto el indeterminismo como el fallo de la conservación de la energía presente en la mecánica newtoniana se abordará en esta tesis con el estudio de un tipo de sistemas muy específico: las supertareas newtonianas. El motivo principal de ello es que, el planteamiento de supertareas dentro de un marco teórico (la mecánica newtoniana en este caso) ha probado ser una vía fructífera para comprender estas anomalías. Como la comprensión de la cuestión aspira a encontrar las fuentes más profundas, genuinas y generales de estas anomalías, este camino a su vez cobra relevancia para los sistemas anómalos que no ejecutan ninguna supertarea.

0.4. ¿Por qué analizar las supertareas?

Una supertarea es un proceso que consiste en la realización de una infinidad de acciones ejecutadas dentro de un intervalo de tiempo finito. Un proceso de tales características, claro está, sólo es posible en marcos teóricos en los que el tiempo es infinitamente divisible. En muchas ocasiones, debido a ciertas restricciones teóricas, es también necesario que el espacio sea infinitamente divisible. Esta característica, evidentemente, la comparten las ideas del espacio y el tiempo que asume la mecánica newtoniana.

La comprensión de las ideas del espacio y el tiempo es una de las inquietudes más antiguas de la filosofía y, de hecho, las supertareas tienen su origen en una serie de problemas planteados al respecto: las paradojas de Zenón. Concretamente, en la célebre paradoja de Aquiles y la tortuga, para que culmine la carrera, el héroe tiene que alcanzar sucesivamente la infinidad de posiciones que previa y sucesivamente va alcanzando el reptil, todo dentro de un intervalo de tiempo finito. (Esta paradoja se trata a profundidad en el capítulo 1; el planteamiento con detalles se encuentra en la sección 1.1).

Los procesos que nos ocupan en la presente tesis no son más que variaciones y replanteamientos (con cierta sofisticación) de la paradoja de Aquiles. Siempre, como ya lo hemos dicho, enmarcados en la mecánica newtoniana. Así, la trayectoria investigadora que seguiremos se enmarca por completo en el programa de investigación propuesto por Pérez Laraudogoitia en 1997:

> analysing a supertask in the framework of a precise physical theory can be a source of interesting findings concerning the theory itself. […] the situation is similar to that found in the foundations of mathematics: when certain classical paradoxes (for instance, the paradox of the liar) are analysed within the framework of explicit, formal mathematical languages, they become a source of interesting results about those languages (such as Gödel theorem) [Pérez Laraudogoitia 1997a: 50].

No creemos, por supuesto, (aunque así nos gustaría) que los resultados presentados en esta tesis tengan la repercusión que tuvo el teorema de Gödel (muy pocas tesis tendrán, con o sin razón, tal presunción). Esto no impide que los resultados que presentaremos sean una contribución valiosa para la comprensión de la mecánica newtoniana. Así, el estudio de las diversas supertareas será la estrategia principal que seguiremos para contribuir, principalmente, en la comprensión de la pérdida de la energía y el indeterminismo en la mecánica newtoniana.

Es importante recordar que la idea de supertarea en sí fue un problema objeto de la reflexión filosófica que no se limitó a los planteamientos de las paradojas de Zenón. Se plantearon, de hecho, supertareas que diferían altamente de la carrera de Aquiles. El pionero en ello fue Black [1950-1], que plantea una máquina que realiza una infinidad de transmisiones de objetos materiales de una región espacial a otra. Otro planteamiento de alta celebridad es el de Thomson [1954-5], que consiste en una lámpara que se enciende y apaga una infinidad de veces. Ambas contribuciones se centran en la dificultad de especificar un estado final de los procesos que plantean, para mostrar que la idea de supertarea es una idea que conlleva una contradicción, una idea que no es auto-consistente; con estos argumentos, también pretendían mostrar que la paradoja de Aquiles, a pesar de las soluciones tradicionales, estaba a la orden del día. Por más que nuestras intuiciones se posicionen a favor de estos argumentos es bien conocido que ambos son incorrectos. Benacerraf [1962], por un lado, señala que cualquier estado final que Black o Thomson consideran contradictorio con la descripción de las supertareas que plantean es consistente con el proceso que lo antecede. Esto lo corrobora Grünbaum

[1970], presentando modelos cinemáticos para cada supertarea que ponen de manifiesto la consistencia de cada estado final con el proceso que le antecede y que conforma la supertarea. Este es el principio del planteamiento de supertareas enmarcadas en un marco teórico específico –especialmente compatible con la mecánica newtoniana–. Con un origen distinto al de las paradojas de Zenón, Allis y Koetsier [1991 y 1995] proponen una serie de supertareas cuyos estados finales, inferidos por ciertos límites (algunos sin justificación), entran en conflicto entre sí.

A pesar de que estos procesos pueden replantearse dentro del marco teórico de la mecánica newtoniana, el planteamiento de supertareas no cobra relevancia para el indeterminismo y la pérdida de la energía (en la teoría en que se plantea) hasta la presentación de la supertarea de [Pérez Laraudogoitia 1996]. Este proceso consiste en una infinidad de partículas puntuales con una misma masa que inicialmente se encuentran en reposo de tal manera que las posiciones en que están situadas conforman un punto de acumulación en un espacio unidimensional. También inicialmente, una única partícula en movimiento con velocidad constante se aproxima al resto por el costado donde hay una primera partícula. Asumiendo que todas las colisiones que ocurren son perfectamente elásticas, este sistema lleva a cabo una sucesión infinita de colisiones elásticas, tras la cual, todas las partículas terminan en reposo. (Una exposición detallada de esta supertarea se ofrece en la sección 3.2.1). No es difícil percatarse de la pérdida de la energía: al inicio tenemos una partícula en movimiento mientras que el resto está en reposo, por lo que la energía del sistema –debido a la partícula en movimiento– no es nula; en cambio, al final tenemos a todas las partículas en reposo, y por tanto la energía del sistema es nula. Ver el indeterminismo requiere atender al proceso revertido (proceso posible también en la mecánica newtoniana): en tal caso el sistema de partículas inicialmente en reposo puede, por sí mismo, sin ninguna fuerza exterior, abandonar el reposo ejecutando el proceso revertido (el sistema puede auto-excitarse); pero cualquier momento, mientras el sistema (o un subsistema infinito) siga en reposo, es adecuado para abandonar –o seguir en– el reposo. Esta supertarea, que llamaremos ST1, es la que más ha repercutido en la reflexión sobre el indeterminismo y la pérdida de la energía. Supertareas basadas en las mismas acciones, colisiones perfectamente elásticas, son las presentadas en [Pérez Laraudogoitia 1997a y 1998a], ambas ocasionando la desaparición de la totalidad de sus partículas y por tanto con una reversión temporal que también genera indeterminismo.

Ante el planteamiento de estas supertareas, las anomalías que presentan son en sí la fuente principal de problemas. De esta manera, como primer problema tenemos el indeterminismo: ¿por qué los procesos recién mencionados generan indeterminismo? O en otras palabras, ¿por qué, para cierto tipo de sistemas, la mecánica newtoniana es una teoría indeterminista? Como segundo problema tenemos el fallo del principio de conservación de la energía: ¿por qué las supertareas arriba mencionadas violan el principio de la conservación de la energía? O en otras palabras, ¿por qué, para cierto tipo de sistemas, la mecánica newtoniana no cumple siempre el principio de conservación de la energía? De estudiar, además, estos dos problemas conjuntamente, surge también otro problema de especial importancia: ¿cuál es la relación entre el indeterminismo y el fallo de conservación de la energía en este tipo de sistemas? ¿Por qué y cuándo se presentan conjuntamente?

Ahora bien, estas anomalías descansan sobre la suposición de que las supertareas mencionadas son sistemas genuinamente newtonianos. ¿Está justificada semejante suposición? Este es un problema que ha tenido una atención notable en la literatura científica. Concretamente, Alper y Bridger niegan que las supertareas propuestas por

Pérez Laraudogoitia sean newtonianas.[5] Tres son los puntos principales que amenazan a estos sistemas de no ser newtonianos: primero, la discontinuidad en el instante de la colisión presentada por las funciones que describen la velocidad y la aceleración de las partículas; segundo, la interpretación local del sistema que considera un infinito potencial; y tercero, las condiciones para que a un sistema se le pueda aplicar la reversión temporal. Para el primero, Pérez Laraudogoitia [1999b y 2002b] aclara cómo es que la discontinuidad en el instante en el que se da la colisión es resuelta en la mecánica newtoniana contemporánea con la introducción de funciones δ de Dirac, permitiendo también a las ecuaciones diferenciales del movimiento tener una solución. No aceptar dicha discontinuidad implicaría postular extrañas fuerzas de atracción y repulsión entre las partículas que colisionan. Respecto al segundo punto, Alper y Bridger [1998] proponen un análisis global, con el fin de considerar un infinito completo y no potencial, de estos sistemas de partículas introduciendo espacios de Hilbert a los vectores infinitos que representan la posición, velocidad y fuerza de la totalidad de las partículas. Pérez Laraudogoitia [1999b y 2002b] señala que esta propuesta es inapropiada para sistemas newtonianos, ya que viola la invariancia ante las transformaciones de Galileo. Posteriormente, en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002], Alper y Bridger proponen una nueva norma para los vectores infinitos, pero ellos mismos reconocen que no es apropiada para la totalidad de sistemas de infinitas partículas a considerar newtonianos. En cuanto al tercer punto, Alper y Bridger [1998] sostienen que la reversión temporal aplicables a algunos sistemas newtonianos no es aplicable a sistemas como el presentado en [Pérez Laraudogoitia 1996]. Para este caso en concreto, sostienen que la única solución para las ecuaciones del movimiento bajo el estado inicial del reposo es exclusivamente la continuación del reposo de todas las partículas. Contra esto, Pérez Laraudogoitia [1999b] explica que dicha evolución es sólo una de las infinitas posibles evoluciones del sistema, ya que la evolución de un sistema, bajo las ecuaciones del movimiento, depende no sólo del estado inicial, sino de la evolución de la fuerza posteriormente al estado inicial. Finalmente, en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002] se acepta con unanimidad la auto-excitación.

Por otro lado, la búsqueda de las fuentes del indeterminismo en las supertareas newtonianas ha tenido avances notables en los últimos años. En primer lugar, Earman y Norton [1998a] proponen que dos son los factores de los que depende el indeterminismo para los sistemas presentados en [Pérez Laraudogoitia 1996] y en [Pérez Laraudogoitia 1997a]: en el primero el indeterminismo es ocasionado por la falta de un límite inferior en el tamaño de los cuerpos mientras que en el segundo por la falta de un límite superior para las velocidades que los cuerpos toman. Sin embargo, Pérez Laraudogoitia [1999a] hace notar que el primer factor propuesto por Earman y Norton no es acertado, y que el indeterminismo, para ese caso, depende de que la distancia mínima que separa a los cuerpos contiguos precisamente tiene un límite superior. Posteriormente, y centrándose en sistemas como ST1, Pérez Laraudogoitia [2007b] presenta como fuente del indeterminismo el reposo relativo que la totalidad de las partículas adquiere al finalizar la supertarea. Por otro lado, Atkinson y Johnson [2009] muestran que el indeterminismo puede presentarse en este tipo de sistemas debido a que hay una gran cantidad velocidades como estados iniciales que conducen a un mismo estado final. Esto da cabida a una sugerencia interesante: cualquier estado del conjunto infinito de partículas podría presentar una auto-excitación indeterminista, siempre y cuando tal estado se corresponda con un estado inicial de la reversión temporal de alguna supertarea. Al resultado de Atkinson y Johnson, sin embargo, le falta mostrar la auto-consistencia del

[5] Lo hacen explícitamente en [Alper y Bridger 1998], [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000] y [Bridger y Alper 1999].

proceso, es decir, mostrar que tales velocidades se mantienen tal como se supone a lo largo del proceso; que tales velocidades son consistentes con la masa de las partículas, con un posicionamiento de las partículas coherente, y que no ocurren otras colisiones que las contempladas.

En cuanto al fallo de la conservación de la energía, Pérez Laraudogoitia [1998b] sugiere restaurar la pérdida manifestada con la supertarea ST1 introduciendo una "energía de reposo", que explica haciendo notar que en el resto de los marcos de referencia inerciales los principios conservativos se cumplen. Mas tarde, en [Pérez Laraudogoitia 2007a] se muestra el fracaso de esta explicación, pues se distingue entre pérdida de la energía en un sentido fuerte y pérdida de la energía en un sentido débil; la primera es la pérdida de un sistema que ocurre en todo marco de referencia inercial mientras que la segunda es la pérdida de un sistema presente sólo en algún marco de referencia inercial. Allí mismo, Pérez Laraudogoitia presenta un sistema newtoniano cuya energía no se conserva en un sentido fuerte. Por otro lado, Atkinson [2007] presenta una supertarea newtoniana basada en colisiones elásticas (y que sólo es una ligera variación de ST1) que presenta una pérdida de la energía en un sentido fuerte. Allí también muestra que, para la supertareas newtonianas basadas en colisiones elásticas con todas sus partículas inicialmente en reposo a excepción de la primera, la pérdida de la energía puede identificarse con el límite distinto de cero de la energía de la partícula n ($n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$) tras su primera colisión (con la partícula $n - 1$) cuando n tiende a infinito (véase sección 6.1.2.2). Finalmente, Pérez Laraudogoitia [2008] contribuye al esclarecimiento de la relación entre el fallo de la conservación de la energía y el indeterminismo en supertareas newtonianas, mostrando que existen supertareas con una gran cantidad de evoluciones posibles, todas ellas conservativas, a partir de un estado concreto. Esto muestra que la presencia del indeterminismo en supertareas newtonianas no implica un fallo de la conservación de la energía.

0.4.1. Los objetivos del trabajo

Es la relación del indeterminismo con la pérdida de la energía, precisamente, la cuestión de fondo que más interesa y motiva este trabajo. Sin embargo, esta tesis aspira a contribuir en un sentido distinto al resultado referido con el que se acaba de cerrar la sección anterior. Mientras que en esa contribución se mostró que la presencia del indeterminismo no implica un fallo en la conservación, aquí queremos mostrar que la presencia del fallo de la conservación de la energía, en una supertarea newtoniana, no implica la presencia del indeterminismo. Dicho más exactamente, las condiciones que provocan que algunas supertareas newtonianas presenten un fallo de la conservación de la energía –las fuentes del fallo de la conservación de la energía–, no necesariamente provocan una generación del indeterminismo. Las fuentes de ambas anomalías son distintas de tal manera que ambas anomalías no siempre se presentan conjuntamente en las supertareas newtonianas. A veces habrá indeterminismo sin un fallo de la conservación, otras veces habrá un fallo de la conservación sin indeterminismo. Si la relación entre estas dos anomalías contiene este último aspecto, entonces debe existir –al menos– una supertarea que no sea conservativa a la vez que su evolución sea por completo determinista. Así, en este trabajo también se pretende encontrar un modelo de supertarea newtoniana que presente estas características. Esta inquietud, obviamente, apunta hacia un avance en el conocimiento de la relación entre ambas anomalías en la mecánica newtoniana. A su vez, se dirige hacia una mayor comprensión de cada una de ellas por separado. Esta comprensión de ambas anomalías por separado claramente nos arrojará luz sobre la relación que ellas puedan guardar. Además, abordar la relación como objeto de estudio, a su vez nos brindará luz para un mayor entendimiento de las anomalías por separado, pues la comprensión de su relación en sí también es comprensión de las anomalías.

Ahora bien, para poder tener una mayor comprensión del fallo de la conservación de la energía y del indeterminismo en mecánica newtoniana por medio de las supertareas newtonianas, considero conveniente a su vez poseer un mayor entendimiento de las ideas que conforman la mecánica newtoniana, de los procesos que llamamos supertareas newtonianas, y de los aspectos de la mecánica newtoniana y de las supertareas que permiten la ejecución de este tipo de procesos en un mundo descrito por el aparato teórico que constituye la mecánica newtoniana.

Como ya mencionamos más arriba en esta introducción, la ejecución de una supertarea requiere de un tiempo continuo, a la vez que es favorecida por el espacio continuo. Es de crucial importancia, pues, comprender la estructura del espacio continuo y del tiempo continuo que asume la mecánica newtoniana, mismas entidades que posibilitan las trayectorias continuas que, a su vez, posibilitan la ejecución de supertareas. Tradicionalmente, este aspecto ha sido tratado por la filosofía con el estudio de las paradojas de Zenón. De esta manera, y como las supertareas newtonianas tienen su origen en la paradoja de Aquiles, en este trabajo también se pretende mostrar que las contraintuiciones que originan las ideas del espacio continuo y del tiempo continuo y señaladas con agudeza por las paradojas de Zenón, son consistentes con la ejecución de una supertarea en un mundo newtoniano. Podría pensarse que esta es una cuestión cerrada. Sin embargo, como trabajo filosófico que es esta tesis, no podemos pasar por alto los argumentos que existen en contra y a favor de una cuestión tan fundamental para el objetivo principal que aquí perseguimos, ni dar por supuesto una cuestión que, por más avanzada que se encuentre, sigue hoy en día provocando polémica. Considero interesante, además, rechazar las actitudes que invitan a pensar que no hay nada nuevo que decir al respecto (de esto o de cualquier otra cuestión problemática). Si éste es el caso, es decir, si en realidad quedan cosas nuevas por decir, entonces tendremos un mayor conocimiento de las ideas del espacio continuo y del tiempo continuo, y comprenderemos de una mejor manera las peculiaridades de estas ideas que posibilitan sin contradicción alguna la ejecución de una supertarea.

Por otro lado, pero también abordando una cuestión fundamental, en este trabajo también queremos mostrar que los procesos físicos que llamamos supertareas newtonianas son procesos legítimos. Es decir, por un lado, que la idea de una supertarea es una idea auto-consistente, que no contiene ninguna contradicción y, por otro lado, que las supertareas newtonianas son, a pesar de las anomalías que presentan, procesos genuinamente newtonianos. Respecto de la auto-consistencia de la idea de una supertarea, la literatura parece reflejar un consenso considerable a favor; sin embargo, repito, no podemos dejar de revisar los argumentos en torno ni pensar que no haya nada nuevo que decir. Aquí, queremos reforzar tal auto-consistencia. En cuanto al carácter newtoniano de las supertareas newtonianas, se quiere mostrar que a lo largo de toda la evolución que desenvuelven los sistemas que ejecutan dichas supertareas, en ningún momento violan o contradicen ninguno de los postulados ni de las asunciones que constituyen la mecánica newtoniana. Como ya se dio cuenta más arriba, esta cuestión se ha abordado con profundidad en la literatura haciendo referencia explícita y plena a las supertareas newtonianas. Pese al reconocimiento de un acuerdo en ciertos aspectos en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002], no podemos dar por cerrado el problema, pues allí mismo se manifiesta un claro antagonismo entre las posiciones de los autores. En este trabajo se quiere enriquecer el debate sostenido por ellos, enfrentándolo, y también considerando otras cuestiones que amenazan el carácter newtoniano de las supertareas; tal enriquecimiento, pondrá a las supertareas newtonianas sobre fundamentos más sólidos. Más allá de las supertareas newtonianas en torno a las cuales gira, esta discusión también es importante para la demarcación de los principios y asunciones que conforman la mecánica newtoniana. Con ella, pues, aquí también esperamos obtener unos requisitos mínimos que nos ayuden a identificar los sistemas newtonianos.

Con todo esto, hemos detectado ya los problemas principales que este trabajo va a tratar y hemos explicitado los resultados que aspira a obtener; sabemos dónde estamos y sabemos a dónde queremos llegar. Resta por ahora especificar, paso a paso, la estrategia que se va a seguir para lograrlo, especificar el camino que se va a recorrer para llegar al lugar deseado a partir del lugar dónde nos encontramos.

0.4.2. Estrategia de trabajo: estructura de la tesis

La tesis de divide en tres partes, cada una de ellas dividida a su vez en dos capítulos. En la primera parte de la tesis (capítulo 1 y 2), nos concentraremos en mostrar que las contraintuiciones en torno a las ideas del espacio y tiempo continuos son consistentes con la ejecución de una supertarea en un mundo newtoniano. Para ello, trataremos las cuatro paradojas de Zenón sobre el movimiento –la paradoja de Aquiles, la dicotomía, la flecha y el estadio–, vistas a partir del movimiento que la mecánica newtoniana asume; trataremos también la paradoja de la división en todo lugar que, pese a que no es directamente sobre el movimiento, nos ayudará a entender la continuidad de las trayectorias en mecánica newtoniana. Concretamente, en el capítulo 1 trataremos con la paradoja de Aquiles y la paradoja de la dicotomía (paradojas que son el origen de las supertareas), mientras que en el capítulo 2 trataremos con la paradoja de la división en todo lugar, con la paradoja de la flecha y con la paradoja del estadio (paradojas menos cercanas a las supertareas pero de suma importancia para la estructura del espacio y tiempo de la mecánica newtoniana).

En la segunda parte de la tesis (capítulo 3 y 4), se dedicará a mostrar la legitimidad de las supertareas newtonianas; para ello, se tratarán los argumentos a favor y en contra de la consistencia de las supertareas en general y de las anomalías de las supertareas newtonianas con la mecánica newtoniana. Concretamente, en el capítulo 3 trataremos los argumentos que amenazan la consistencia lógica de la idea de una supertarea, mientras que en el capítulo 4 trataremos los aspectos que amenazan a los sistemas que más adelante trataremos de ser sistemas genuinamente newtonianos.

Finalmente, dedicaremos la tercera parte (capítulo 5 y 6) a mostrar en qué grado la relación del indeterminismo con la pérdida de la energía en supertareas newtonianas permite la presencia de la segunda anomalía sin la presencia necesaria de la primera. Concretamente, en el capítulo 5 trataremos analíticamente los argumentos que señalan las diversas fuentes del indeterminismo para los diversos tipos de supertareas newtonianas, con la finalidad de aclarar las fuentes del indeterminismo en las supertareas. En el capítulo 6, seguiremos mirando al indeterminismo, pero ahora en su relación con la conservación de la energía, mirando, a su vez, a las fuentes de la violación del principio conservativo.

De manera detallada, el camino a recorrer –la estrategia que seguiremos– en esta tesis a lo largo de los capítulos se explicita a continuación.

Capítulo 1. En primer lugar, se presentarán los planteamientos de las dos versiones de la dicotomía y de la paradoja de Aquiles (apartado 1.1). El análisis de las paradojas, que se pueden reducir a un mismo problema, se dividirá en dos cuestiones centrales: la primera es la posibilidad de atravesar una infinidad de puntos (apartado 1.2) y la segunda la posibilidad de realizar una infinidad de actos (apartado 1.3).

Respecto de la primera cuestión, el análisis primeramente se dirige hacia la distinción aristotélica del infinito potencial y el infinito actual, atendiendo por un lado al argumento de Aristóteles en contra de la posibilidad del infinito actual (sección 1.2.1) y por el otro al argumento de Faris [1996] que no toma en cuenta el infinito actualmente dado (sección 1.2.2). En segundo lugar, se analiza la célebre solución aritmética de la paradoja, que utiliza la noción de límite para definir una sumatoria infinita; aprovechando que utiliza algunos recursos de dicha solución, allí mismo se presentará la solución newtoniana de la paradoja (sección 1.2.3). En tercer lugar, se analiza la ambigüedad presente en el término 'siempre' (o en el término 'nunca') en el planteamiento de la paradoja y se muestra la argumentación inválida que provoca (sección 1.2.4). En cuarto lugar, se aclarará si acaso el movimiento continuo asumido por la mecánica newtoniana demuestra la posibilidad de atravesar una infinidad de puntos (sección 1.2.5).

En cuanto a la segunda cuestión, la posibilidad de realizar una infinidad de actos, se analizarán primeramente dos argumentos a favor de un finitismo basado en la realidad (el primero esgrimido por Black [1950-1] y el segundo por Wisdom [1951-2]) y que objetan la realización de una infinidad de actos (sección 1.3.1). En segundo lugar, se presentará el modelo de la carrera *staccato*, modelo de trayectoria admitida por la mecánica clásica que demuestra la realización de la infinidad de actos (sección 1.3.2). En tercer lugar, se analizarán dos objeciones (localizadas en Burke [2000a y 2000b]) hacia la posibilidad de la carrera *staccato* en la mecánica newtoniana (sección 1.3.3).

Para cerrar el capítulo, se enumeran cuatro aspectos importantes a tener en cuenta para el análisis de las supertareas, dos que conciernen a ciertos procesos infinitos (como el caso que plantea la paradoja) y otros dos que conciernen a la mecánica newtoniana en relación con la estructura infinita propia del espacio y el tiempo que asume para el movimiento de los objetos (apartado 1.4).

Capítulo 2. En primer lugar, se tratará con la continuidad de la línea recta (ejemplo elemental de una trayectoria) atendiendo a la paradoja de la división en todo lugar (apartado 2.1). Inicialmente se planteará dicha paradoja y se explicarán diversos modos de llevar a cabo el proceso infinito que el planteamiento sugiere (sección 2.1.1). En seguida, se analizará un proceso de división infinita que consiste en fragmentar y separar entre sí subsegmentos de la misma línea (sección 2.1.2). Tras esto, se mostrará que una línea continua puede ser el resultado de haber ejecutado la división infinita con éxito (sección 2.1.3).

En segundo lugar, se tratará la idea de un estado instantáneo de movimiento atendiendo a la paradoja de la flecha (apartado 2.2). Inicialmente se planteará la paradoja así como la solución que tradicionalmente de ella se brinda, que consiste en distinguir entre un estado de movimiento instantáneo y un movimiento realizado durante un instante (sección 2.2.1). En seguida, se planteará la paradoja considerando el movimiento en un espacio y tiempo discretos, y se ilustrará con ello que la conclusión paradójica se obtiene tras un razonamiento falaz (sección 2.2.2). Tras esto, se analizarán los conceptos de velocidad y aceleración como posibles criterios para establecer un estado instantáneo de movimiento, concluyendo que ninguno de ellos es satisfactorio.

Allí también se mostrará que, a pesar de lo último, es posible establecer estados instantáneos de movimiento si se atiende a la trayectoria del móvil (sección 2.2.3).

Finalmente, se tratará con la relatividad de Galileo –relatividad del movimiento adoptada por la mecánica newtoniana– atendiendo a la paradoja del estadio (apartado 2.3). Inicialmente se reconstruirá, a partir de Aristóteles, la versión más aceptada de la paradoja (sección 2.3.1). En seguida, se planteará la paradoja considerando un movimiento en un espacio y tiempo discretos y se señalará una implicación contraintuitiva que esto tiene para el movimiento (sección 2.3.2). Tras esto, se acudirá a las transformaciones de Galileo para resolver la paradoja (sección 2.3.3).

Capítulo 3. En primer lugar, se tratará con los argumentos que amenazan la consistencia lógica de las supertareas (apartado 3.1). Se empezará abordando los procesos propuestos por Black [1950-1] (las máquinas de Black) ideados para defender que la idea de una supertarea es contradictoria (sección 3.1.1); tras analizar el argumento de Black y mostrar que es incorrecto (sección 3.1.1.1), se presentarán una serie de modelos newtonianos para cada una de las máquinas y se especificará el estado final consistente con el proceso según cada modelo (sección 3.1.1.2). Seguidamente se abordará el proceso sugerido por Thomson [1954-5] (la lámpara de Thomson) ideado también para mostrar la inconsistencia de la idea de una supertarea (sección 3.1.2). Tras analizar el argumento de Thomson y mostrar que no es válido (sección 3.1.2.1) se presentarán modelos newtonianos para la lámpara y se mostrará que, dependiendo del modelo que se tome, la lámpara terminará encendida o apagada en consistencia con el proceso que lo antecede (sección 3.1.2.2). Finalmente, se tratará con el proceso descrito en la paradoja de Ross-Littlewood (sección 3.1.3). Tras analizar los argumentos que prescinden de consideraciones cinemáticas y comprobar que con ello no queda claro el estado final del proceso (sección 3.1.3.1), se presentarán modelos newtonianos para el proceso original y sus variaciones así como el estado final correspondiente a cada modelo (sección 3.1.3.2).

Una vez mostrada la consistencia de estas supertareas, se pasará a exponer los principales problemas o anomalías que presentan las supertareas newtonianas basadas en colisiones elásticas (apartado 3.2). En primer lugar se expondrá la supertarea ST1 con detalle, un modelo que –como ya hemos explicado brevemente en el apartado anterior– presenta pérdida de la energía (sección 3.2.1). En segundo lugar se hará una exposición de la supertarea ST2, un modelo que presenta la desaparición de sus partículas (sección 3.2.2). En tercer lugar se formulará la supertarea ST3, un modelo que presenta el escape al infinito de todas sus partículas (sección 3.2.3). Finalmente se especificará el modo en que aparecen los problemas más importantes que plantean las evoluciones de estas supertareas: el indeterminismo y la pérdida de la energía (sección 3.4).

Capítulo 4. En primer lugar, se hará un recordatorio –valioso para el análisis de algunas objeciones que se considerarán– de las leyes de Newton y de las ideas que estas leyes asumen, base de todos los sistemas que se suponen newtonianos (apartado 4.1).

En segundo lugar, se consideran las objeciones al carácter newtoniano de las supertareas supuestamente newtonianas (apartado 4.2). La primera objeción que se considerará consiste en advertir que supertareas como ST2 y ST3 aparentemente violan el principio de conservación de la masa. Se mostrará que dicha violación se basa en un principio intuitivo que resulta ser inconveniente, y que ante una formulación más adecuada del principio, las supertareas en cuestión no lo violan (sección 4.2.1). La segunda objeción que se tomará en cuenta consiste en destacar el hecho de que ST1, ST2 y ST3 son sistemas con masa total infinita. Aunque en sí, este hecho no tiene un buen fundamento para presentarse como problemático (dentro de la mecánica clásica), de cualquier modo se mostrará que existen sistemas con masa total finita en los que persiste la presencia del indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía (sección 4.2.2). Enseguida se apreciará la objeción en contra del análisis local de la trayectoria de cada partícula, junto con la propuesta de un análisis global para las supertareas presentada por Alper y Bridger [1998]. Se verá que el análisis global presentado hasta ahora es altamente inconveniente, pues no respeta la invariancia ante las transformaciones de Galileo (sección 4.2.3). Tras ello, se analizará la problemática en torno a la colisión de los cuerpos por contacto. Éste, aunque es un problema desafiante, no resulta ser exclusivo de las supertareas basadas en colisiones elásticas, sino de todos los sistemas newtonianos que presentan cuerpos en contacto, donde se incluyen una inmensa cantidad de sistemas que se presumen libres de anomalías (sección 4.2.4). La siguiente objeción que se enfrentará consiste en señalar la discontinuidad de la velocidad y la fuerza en el instante de la colisión entre partículas. Se verá que, no asumir dicha discontinuidad acarrea peores inconvenientes y que, además, existe el utillaje matemático adecuado para modelar la discontinuidad junto con la derivabilidad de la velocidad en el instante de la colisión (sección 4.2.5). Una vez hecho esto, se considerará la objeción que sostiene que el proceso revertido de las supertareas presentadas en el capítulo anterior no es un proceso posible. Es decir, que la invariancia ante la reversión temporal de las leyes de Newton no implica la posibilidad del proceso revertido de los procesos originales. Se mostrará que los procesos revertidos sí son procesos posibles y por qué el criterio que lo muestra es el más plausible (sección 4.2.6). A continuación, se examinará la posición finitista que defiende que los sistemas infinitos en sí son problemáticos. Se evidenciará que esto no es así. Para ello, se propondrá un sistema infinito que lleva a cabo una supertarea, y que carece de anomalías (sección 4.2.7). En seguida, se valorará la observación que repara en que los sistemas en cuestión no toman en cuenta los efectos gravitatorios. Se aclarará que en mecánica clásica un sistema que interacciona bajo efectos gravitatorios es otro sistema que aquel que no lo hace (sección 4.2.8). Por último, se tomará en cuenta la objeción que consiste en hacer notar que los principios de conservación son una parte constitutiva de la mecánica newtoniana. Se aclarará este aspecto, evidenciando que la pérdida de la energía (cinética en el caso de ST1), no va en contra ni de la conservación de la energía que se puede deducir a partir de las leyes de Newton, ni de la conservación de la energía cuando ésta se considera como un concepto que va más allá de la energía mecánica. Se presentará, además, una generalización de supertareas basadas en colisiones elásticas que conservan la energía y el momento lineal –que llamaremos GSTC–, dejando así en alta sospecha la idea en que se basa esta última objeción (sección 4.2.9).

Ante todo esto, quedará claro que, a pesar de las diversas dudas que todas estas objeciones pueden suscitar, las supertareas que aquí nos incumben sí pueden considerarse newtonianas. El recorrido por estas objeciones nos ayudará también a realizar, a manera de caracterización, un listado, más completo que los que hasta la fecha se han presentado, de los requisitos que deben de cumplir los sistemas newtonianos (apartado 4.3).

Capítulo 5. En primer lugar, se precisará la idea de determinismo con la que se trabajará aquí, y se aclarará el sentido de concebir el determinismo como una propiedad de una teoría física –en concreto, de la mecánica clásica– (apartado 5.1).

En segundo lugar, se analizará la primera clasificación hecha para comprender el indeterminismo en supertareas como ST1 y ST3: supertareas que dependen de la falta de un límite superior en las velocidades y supertareas que dependen de un límite superior en el espacio entre las partículas. Se dejará claro que la clasificación hasta ahora propuesta (en [Earman y Norton 1998a] y en [Pérez Laraudogoitia 1999a]) de estas supertareas indeterministas no es excluyente y que, de hecho, ambas supertareas, ST1 y ST3, dependen de un límite superior en la distancia entre las partículas (apartado 5.2).

A continuación, se mostrará que la fuente del indeterminismo generado por supertareas como ST2 y ST3 es la trayectoria que ocasiona la desaparición de al menos una partícula (apartado 5.3). Una vez hecho esto, se ofrecerá una explicación de por qué es posible que el indeterminismo se presente en sistemas abiertos (en concreto, con cadenas causales abiertas), sistemas como las supertareas con las que aquí trabajamos (apartado 5.4).

Por último, se tratará con una de las fuentes del indeterminismo en supertareas como ST1: el reposo relativo de todas las partículas como estado final de la supertarea (apartado 5.5). A partir de dicha fuente, se presentará una generalización, que llamaremos Gμ1, de supertareas newtonianas bajo una relación de masas constante entre las partículas contiguas (sección 5.5.1). Con esto, se pondrá de manifiesto que entre los sistemas que incluye Gμ1 se encuentran dos hechos interesantes: el indeterminismo bajo reposo relativo sin punto de acumulación (y sin desapariciones de partículas), y la ejecución auto-excitaciones expansivas (sección 5.5.2). Para terminar, se mostrará que ciertos sistemas que aparentemente son causalmente desconectados, resultan no serlo bajo Gμ1 (sección 5.5.3).

Capítulo 6. En primer lugar, se comprobará que la imposición de los principios conservativos no implica la desaparición del indeterminismo en supertareas newtonianas (apartado 6.1). Para ello, se analizarán dos sistemas con evoluciones indeterministas. El primer sistema, que llamaremos GC, consiste en una variación de ST1, con la partícula inicialmente en movimiento enfrentando al conjunto en reposo por el lado abierto (sección 6.1.1); primeramente se discutirá una posible evolución de GC propuesta en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002] y se hará notar que tal evolución hace una suposición que no se justifica (sección 6.1.1.1); seguidamente, se presentará la colisión global (ideada por Pérez Laradogoitia [2005b]), evolución que rescata tal suposición a la vez que impone los principios conservativos (sección 6.1.1.2); a continuación, se discuten algunas dificultades de la aplicabilidad de la idea de colisión global a variaciones de GC (sección 6.1.1.3). El segundo sistema, que llamaremos 2DC (ideado por Pérez Laraudogoitia [2008]), es una supertarea en un espacio bidimensional (sección 6.1.2); primeramente, se presentarán dos procesos conservativos que pueden desarrollarse bajo la condición inicial especificada para 2DC (sección 6.1.2.1), para después presentar una distinción de supertareas newtonianas que resulta relevante a la hora de considerar la pérdida de la energía en ellas (sección 6.1.2.2).

En segundo lugar, se analizará la posibilidad de que existan supertareas que sean deterministas a la vez que no sean conservativas (apartado 6.2). Se comenzará presentando el proceso STMNC, una supertarea original no conservativa y no manifiestamente indeterminista (sección 6.2.1). En seguida se mostrará que una gama de sistemas de GSTC son indeterministas bajo la generalización Gμ1; con ello se sugerirá el indeterminismo para STMNC (sección 6.2.2). Para verificar tal sugerencia, se presentará una generalización, que llamaremos Gγ1, de supertareas indeterministas bajo reposo y distinta relación de masas (sección 6.2.3). Con ella, se mostrará que STMNC efectivamente es indeterminista, de la misma manera que otras supertareas que en la literatura se han presentado como deterministas (sección 6.2.4). Para terminar el apartado, se discutirá cómo es que, a pesar de Gγ1, todavía se puede decir que la generación del indeterminismo en STMNC está desvinculada de la generación de la energía en STMNC (sección 6.2.5).

En tercer lugar, se verá una forma más de entender el indeterminismo en supertareas estrictamente sucesivas como STMNC o ST1 (presentada ya por Atkinson y Johnson [2009]), a saber, la infinidad de ecuaciones para las velocidades que se conectan sucesiva y causalmente; esto demuestra que la reversión temporal de STMNC sí es un proceso indeterminista (apartado 6.3). Para verlo con rigor, se presentará una generalización, que llamaremos Gμ2, de supertareas newtonianas con un mismo estado final y una misma relación de masas entre partículas contiguas (sección 6.3.1), para después presentar una generalización, que llamaremos Gγ2, de supertareas newtonianas también con un mismo estado final pero con una relación de masas entre partículas contiguas distinta (sección 6.3.2). Con esto, allí mismo se verá que no podemos estar seguros, bajo esta forma de indeterminismo, que STMNC sea indeterminista. En seguida, se analizará el comportamiento de la energía en Gμ2 y Gγ2 (sección 6.3.3).

Finalmente, se hará una precisión de los grados en que la pérdida de la energía se encuentra conectada con los diversos tipos de indeterminismo que hemos analizado (apartado 6.4).

PRIMERA PARTE

LAS PARADOJAS DE ZENÓN FRENTE AL MOVIMIENTO DESCRITO POR LA MECÁNICA NEWTONIANA

1. La paradoja de Aquiles: ¿es factible una supertarea bajo el movimiento continuo?

Du siehst, mein Sohn,
zum Raum wird hier die Zeit.

Richard Wagner, *Parsifal*.

El origen del planteamiento de supertareas se remonta a uno de los argumentos más antiguos en la historia de la filosofía; a saber, la paradoja de Aquiles y la tortuga planteada por Zenón de Elea. Este argumento pertenece a un conjunto de paradojas que concluyen absurdos de la idea de movimiento. Dichas paradojas son cuatro y habitualmente reciben los siguientes nombres: 1) la dicotomía, 2) la paradoja de Aquiles y la tortuga, 3) la flecha y 4) el estadio.[6] Son las dos primeras (que, como veremos en seguida, se pueden reducir al mismo problema) las que se tratarán en el presente capítulo.

Además de hacer una presentación de la problemática originaria, este capítulo no sólo busca familiarizarse con ella, sino que busca comprender los aspectos relevantes que se encuentran en las diversas propuestas para solucionar la problemática. Lo que nos motiva a ello es, en primer lugar, que algunos de esos problemas aparecen de nuevo a la hora de tratar las supertareas newtonianas y, en segundo, que, al final de cuentas, no podemos descartar el hecho de que surja un problema análogo a la hora de analizar alguna supertarea (incluso alguna que este trabajo excluya). Si esto último es el caso, una solución análoga será de gran utilidad.

Por otro lado, cabe destacar que la paradoja de Zenón que aquí nos ocupará se refiere al movimiento físico. Ante una primera impresión, puede parecer que no es necesario tener una teoría física del movimiento para entender la paradoja.[7] Pero, bien

[6] Estas son sólo las paradojas del movimiento. Hay todavía más paradojas de Zenón: la paradoja de pluralidad, la paradoja de la medición, la paradoja de la división, por nombrar algunas. Se cree que Zenón llegó a plantear cerca de cuarenta paradojas (confróntese en [Bunch 1982: 191] o en [McLaughlin 1998: 281]).

[7] Incluso hay quien lo sostiene. García Pascua, por ejemplo, afirma que la "manera de abordar el problema es, según mi opinión, desde las matemáticas, que nos aportan todos los recursos racionales que necesitamos para tratar la cuestión de la infinita divisibilidad de la carrera entre Aquiles y la Tortuga" [García Pascua 2003: 219].

miradas las cosas, no es difícil percatarse que siempre que hablamos del movimiento físico, y aunque no tengamos nociones técnicas de ninguna teoría física reconocida por la comunidad científica, también tenemos siempre en mente una teoría física del movimiento. En caso contrario, ¿cuál sería entonces el sentido de las palabras que se refieren al movimiento? Por supuesto, la teoría que tiene en mente el lego en física es una teoría intuitiva, sin desarrollar y, muy probablemente, poco exitosa. Pero esto no quiere decir que el lego carezca de una teoría del movimiento cuando se refiere a semejante fenómeno. Debido a este hecho, es necesario recurrir a una teoría física del movimiento para interpretar la paradoja, para brindarle algún sentido, así como para proponer algunas soluciones.[8] Precisamente, como en este trabajo se hará primordialmente filosofía de la mecánica newtoniana, será ésta la teoría física con la que aquí trataremos la paradoja de Aquiles. Y, lo más importante, el modelo en un universo newtoniano del proceso planteado por Zenón, tendrá consecuencias para la mecánica newtoniana.

La estructura del capítulo es la siguiente. Primeramente, en el apartado 1.1, se hace una presentación y un planteamiento de las dos versiones de la dicotomía y de la paradoja de Aquiles. Seguidamente, el análisis se divide en dos cuestiones centrales: la primera, la posibilidad de atravesar una infinidad de puntos (apartado 1.2) y, la segunda, la posibilidad de realizar una infinidad de actos (apartado 1.3).

Respecto de la primera, el análisis en primer lugar se dirige hacia la distinción aristotélica del infinito potencial y el infinito actual, atendiendo el argumento de Aristóteles en la sección 1.2.1 y el argumento de Faris en la sección 1.2.2. En segundo lugar, se analiza en la sección 1.2.3 la célebre solución aritmética de la paradoja, que utiliza la noción de límite para definir una sumatoria infinita, y se aprovecha, pues utiliza algunos recursos de dicha solución, para presentar la solución newtoniana de la paradoja. En tercer lugar, se analiza en la sección 1.2.4 la ambigüedad presente en el término ‘siempre’ (o el término ‘nunca’) en el planteamiento de la paradoja y se muestra la argumentación inválida que provoca. En cuarto lugar, en la sección 1.2.5 se aclara si acaso el movimiento continuo asumido por la mecánica newtoniana demuestra la posibilidad de atravesar una infinidad de puntos.

En cuanto a la segunda cuestión, en la sección 1.3.1 se analizan dos argumentos a favor de un finitismo basado en la realidad y que objetan la realización de una infinidad de actos. En segundo lugar, en la sección 1.3.2 se presenta el modelo de la carrera *staccato*, modelo de trayectoria admitida por la mecánica clásica que demuestra la realización de la infinidad de actos. En tercer lugar, en la sección 1.3.3 se analizan dos objeciones hacia la posibilidad de la carrera *staccato*. Finalmente, para cerrar el capítulo, en el apartado 1.4 se enumeran cuatro aspectos importantes a tener en cuenta para el análisis de las supertareas, dos que conciernen a ciertos procesos infinitos (como el caso que plantea la paradoja) y otros dos que conciernen a la mecánica newtoniana en relación con la estructura infinita propia del espacio y el tiempo que asume para el movimiento de los objetos.

[8] Salmon también reconoce la suma importancia de este hecho: “It is of fundamental importance to remember that Zeno’s paradoxes are arguments concerning *physical* change, *physical* motion, and *physical* plurality. They are—so to speak—paradoxes of applied mathematics. No theory of pure mathematics can fully resolve them” [Salmon 1970: 33-4].

1.1. Los planteamientos de la paradoja: la imposibilidad conceptual del movimiento

Es ampliamente aceptado que la dicotomía y la paradoja de Aquiles, aunque se identifiquen como dos paradojas distintas, plantean básicamente los mismos problemas. Las reflexiones, los comentarios y propuestas de resolución que una merece, pues, también las merece la otra.[9] Ambos argumentos llegan a la desconcertante conclusión de que un corredor no puede alcanzar su meta o a su contrincante, aunque la meta se encuentre sumamente próxima, el contrincante sea muy lento, y el corredor no sufra ningún tipo de cansancio ni se tope con ningún obstáculo que le obligue reducir su rapidez.

Planteemos las paradojas. De la dicotomía existen dos versiones: la progresiva y la regresiva. La primera se puede plantear con las siguientes palabras. Un corredor, para alcanzar su meta, debe primero alcanzar la mitad del camino que inicialmente lo separa de ella. Llegado el corredor a ese punto, para llegar a su meta, debe antes alcanzar la mitad del camino que todavía le queda por recorrer. Una vez que alcance este último punto, si quiere alcanzar su meta, deberá alcanzar antes la mitad del camino que todavía le queda por recorrer. Y así sucesivamente. No importa cuántas mitades haya recorrido ni cuántos puntos haya alcanzado, al corredor siempre le quedarán muchas más mitades por recorrer y muchos puntos que alcanzar. Por lo tanto, el corredor nunca alcanza su meta.[10]

La versión regresiva de la dicotomía tiene una conclusión todavía más desconcertante. Plantea que un corredor, para alcanzar su meta, primeramente debe alcanzar la mitad del camino que inicialmente lo separa de ella. Pero para alcanzar este punto, debe alcanzar antes el punto correspondiente a la mitad de la primera mitad. Del mismo modo, para alcanzar este otro punto, antes debe alcanzar el punto que corresponde con la segunda mitad. Y así sucesivamente. Como siempre tiene un punto que alcanzar antes de cualquier meta o sub-meta que se proponga, por más cerca que éstas se encuentren de él, el corredor ni siquiera puede comenzar su recorrido.[11]

Por otro lado, la paradoja de Aquiles y la tortuga es muy parecida a la versión progresiva de la dicotomía, con la particularidad de que aquello que el corredor pretende alcanzar también se encuentra en movimiento. Con el fin de ser más ilustrativo, el planteamiento adopta un aire de fábula y asume que el corredor es Aquiles, “el de los pies ligeros”, el héroe homérico con habilidades atléticas considerables, mientras que el objeto en movimiento que persigue es una tortuga, un reptil constantemente caracterizado por una excesiva parsimonia en su andar. Como Aquiles es, sin duda alguna, considerablemente más veloz que la tortuga, ambos acuerdan que ella tome ventaja y que comience la carrera cierta distancia por delante del hijo de Tetis. La carrera da comienzo y los dos arrancan en el mismo instante. En el instante en que

[9] Esta apreciación ya la lleva a cabo Aristóteles: “Este argumento [la paradoja de Aquiles] es el mismo que el dicotómico” [*Física*: 239b18-19]. También lo nota Moore: “This [la dicotomía] is essentially the same as the paradox of Achilles and the tortoise” [Moore 1990: 25]. Faris también reconoce la equivalencia, señalando que se llega a ella tras una cambio de marco de referencia inercial: “the Achilles argument so interpreted [en el correspondiente marco de referencia inercial] is essentially the same as the Dichotomy” [Faris 1996: 30]. La misma apreciación de equivalencia también puede encontrarse en [Sainsbury 1988: 20] o en [Russell 1914: 178].

[10] Esta misma versión puede encontrarse en [Alper y Bridger 1997: 144], [Clark 2007: 181], [Erickson y Fossa 1998: 49] y [Olin 2003: 191].

[11] La misma versión se encontrará en [Clark 2007: 182], [Erickson y Fossa 1998: 49], [Rescher 2001: 59] y [Sainsbury 1988: 6].

Aquiles alcance el punto en el que la tortuga arrancó, ésta ya habrá recorrido, aunque pequeña, cierta distancia y se encontrará en un nuevo punto por delante de Aquiles. La carrera continúa, y en el instante en que Aquiles alcance ese nuevo punto, la tortuga habrá ya recorrido otra nueva distancia y alcanzado un nuevo punto por delante de Aquiles. La carrera continua, y Aquiles alcanza ese nuevo punto, pero en ese instante la tortuga se encontrará en un nuevo punto por delante de Aquiles. La carrera continúa… Y en todo punto nuevo que Aquiles alcance, la tortuga se encontrará en un punto más nuevo por delante. Es decir, siempre habrá una distancia, por más pequeña que sea, entre la tortuga y Aquiles. Por lo tanto, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.[12]

Como puede apreciarse, en ambas paradojas la imposibilidad por parte del corredor de cumplir su cometido viene ocasionada por la infinidad de puntos o de intervalos de espacio que tiene por recorrer. A primera vista, de ninguna manera es ingenuo pensar que es imposible terminar de recorrer una serie de puntos o segmentos que habitualmente se concibe como *interminable*. Habiendo apreciado esto, junto al acercamiento que pretendo con los problemas que más adelante enfrentaré, considero dos preguntas guía para abordar las propuestas que a continuación se van a analizar:

a) ¿Es posible atravesar una infinidad de puntos o de segmentos espaciales durante un intervalo de tiempo finito?
b) ¿Es posible realizar una infinidad de acciones en un intervalo de tiempo finito?

Ambas preguntas son pertinentes a una interpretación newtoniana del movimiento. La mecánica clásica asume un espacio y un tiempo que se extienden ilimitadamente. Asume también que cualquier región espacial, así como cualquier lapso de tiempo, es infinitamente divisible. Así, la mecánica newtoniana también asume una infinidad de puntos dentro de un intervalo espacial, al igual que una infinidad de instantes en un lapso de tiempo. Claramente, el movimiento referido por las dos paradojas puede interpretarse como un movimiento en un universo newtoniano. (Por universo newtoniano entiendo un mundo en el cual todos los objetos obedecen los supuestos y los principios de la mecánica newtoniana –un mundo que, naturalmente, no habitamos–). En este capítulo se mostrará que en dicho universo, la conclusión de Zenón no se sigue.

1.2. La posibilidad de atravesar una infinidad de puntos o segmentos

La fuente antigua de mayor relevancia de las paradojas de Zenón del movimiento es la *Física* de Aristóteles, en donde ya se proponen ideas para su solución.[13] Las versiones que Aristóteles da de las paradojas de Zenón no son en todos los casos muy claras, dando la impresión de que presuponía una familiaridad de su audiencia con los

---

[12] Por la celebridad que goza la paradoja, la literatura que ofrece una exposición de ella es abundantísima (se puede encontrar hasta en literatura ajena a la investigación y al tema, por ejemplo, en el libro 11, capítulo 1, de la monumental *Guerra y Paz* de Tolstoi). Buenas exposiciones se ofrecen en [Byers 2007: 132], [Clark 2007: 1], [Olin 2003: 3] y [Peijnenburg y Atkinson 2008: 188]. Cabe añadir también que, tomando como inspiración el célebre artículo de Lewis Carroll [1895], Hofstadter [1979: 29-32] ofrece un divertido y didáctico planteamiento en el que Aquiles mantiene un diálogo con la tortuga.

[13] Aunque en el *Parménides* de Platón ya se encuentra el argumento de la pluralidad planteado por Zenón, la fuente más antigua de las paradojas del movimiento es la *Física* de Aristóteles (confróntese en [Faris 1996: 2-3]).

argumentos.[14] La idea que brinda como solución a la paradoja de Aquiles (y a la dicotomía) es tan profunda y genial que, como veremos en algunas propuestas que páginas más adelante vamos a considerar (por ejemplo, en la sección 1.2.2 respecto a la paradoja de Aquiles y en la sección 4.2.3 respecto de las supertareas newtonianas), sigue siendo el fundamento de modernos replanteamientos y soluciones.

Aristóteles reconoce dos interpretaciones de la dicotomía. En primer lugar, aquella que sostiene la imposibilidad de recorrer un número infinito de subintervalos espaciales o trechos –interpretación que incumbe a la pregunta a)–, y en segundo lugar, aquella que ve la necesidad y la imposibilidad de enumerar cada uno de dichos subintervalos –interpretación que incumbe a la pregunta b)–. En cualquier caso, aunque en esta sección nos concentraremos en la interpretación que incumbe a a), para Aristóteles la respuesta que merece cada interpretación es la misma.[15]

Antes de exponer la respuesta de Aristóteles, es necesario mencionar un aspecto de la física aristotélica que juega un papel crucial para resolver la paradoja. En la teoría que Aristóteles tiene en mente, el espacio y el tiempo ya son considerados como continuos. Como cabría esperarse, la idea de continuidad del espacio y del tiempo en Aristóteles no es la misma que la que tenemos hoy en día:

> Entiendo por “continuo” lo que es divisible en divisibles siempre divisibles. […] entonces el tiempo tiene que ser necesariamente continuo. […] Y a la vez es también claro que toda magnitud [el espacio] será continua, ya que el tiempo y magnitud son divididos según las mismas e iguales divisiones [Aristóteles, *Física*: 232b25-233a12].

Aquí cabe plantearse una pregunta: si tenemos un espacio continuo (en el sentido aristotélico), ¿en dónde, en qué posiciones puedo llevar a cabo las divisiones? Planteada de otra manera, ¿qué números puedo atribuir a las posiciones en las que cada división es llevada a cabo? Por la concepción de continuidad recién citada, todo parece indicar que Aristóteles al menos aceptaba un orden denso del conjunto de números con los que puedo posicionar cada división (y con la que puedo medir cada longitud espacial o temporal). Es decir, al menos asumía –aunque no tuviera una definición clara de ellos, e incluso no los concibiera como *números*– el conjunto de los números racionales. Hoy en día, los racionales son considerados como un subconjunto más de los números reales.[16]

---

[14] Por ejemplo, un fragmento, no en el que se detecta la dicotomía, sino que el mismo Aristóteles presenta como tal, dice: “el movimiento es imposible, porque lo que se moviese tendría que llegar a la mitad antes de llegar al término final” [Aristóteles, *Física*: 239b12-13]. Se aprecia que Aristóteles presupone o una amplia familiaridad con el argumento o una fácil inferencia de la infinidad de mitades por parte de su audiencia.

[15] Lo afirma cuando reconoce ambas interpretaciones: “Tenemos que responder de la misma manera a quienes preguntan con el argumento de Zenón y piensan que si para recorrer una distancia cualquiera antes hay que recorrer siempre la mitad de la distancia, habrá entonces infinitas mitades, y es imposible recorrer un infinito, o a quienes sobre la base del mismo argumento plantean el problema de otra manera, y pretenden que, para que hubiese movimiento sobre la mitad del recorrido, habría que numerar antes la mitad que resulta de cada mitad, de manera que cuando la distancia total fuera recorrida se habría numerado un número infinito; pero todos reconocen que eso es imposible” [Aristóteles, *Física*: 263a4-11].

[16] Esto es sólo bajo algunas construcciones, o también en la práctica cotidiana que considera los números como dados. Por el contrario, en teoría de conjuntos, en donde se da una construcción de los números (que a su vez se conciben en sí como conjuntos) a partir de conjuntos, los racionales no son subconjuntos de los reales. El conjunto de ½ como racional no es el mismo que el conjunto de ½ como real. Existen varias formas de construir los reales. La más célebre en la actualidad consiste es definir los números reales como el conjunto de todos los cortes de Dedekind, donde a su vez un corte de Dedekind se define como un subconjunto x de los racionales $\mathbf{Q}$ que cumple que: a) $\varnothing \neq x \neq \mathbf{Q}$, b) $q \in x \wedge r < q \rightarrow r \in x$, c) x

De hecho, en física moderna, la continuidad del espacio y del tiempo no es más que la estructura correspondiente a los números reales adoptada por las posiciones –para el espacio– y los instantes –para el tiempo–:

> the continuity of the Cantorean line consists precisely in the complicated structural relatedness of (point) elements which is specified by the postulates for real numbers [Grünbaum, 1970 (1967): 190].

Aunque es interesante cuestionarse si acaso Aristóteles concebía los números (o magnitudes) reales (es decir, que incluyeran los racionales y los irracionales), la pregunta corresponde contestarla a los historiadores de la filosofía antigua. Bostock, por ejemplo, reconoce que Aristóteles tenía todos los elementos para hacerlo así.[17] Pero el punto que aquí considero interesante resaltar, es que la continuidad aristotélica no excluye a los números reales. Sin ningún problema, podemos encontrar divisibles siempre divisibles en los que las posiciones donde se efectúan las divisiones sean siempre números irracionales.

1.2.1. La distinción entre el infinito potencial y el infinito actual

Una vez planteada la idea de continuidad de Aristóteles, podemos pasar a la idea central en la que se fundamenta su solución que él da a la paradoja de Aquiles. La cuestión clave es que lo continuo, lo 'infinitamente divisible', para Aristóteles, no puede ser entendido de cualquier manera. Aristóteles distingue entre infinito actual e infinito potencial. Aquello que es infinitamente divisible en un sentido potencial se refiere a aquello que tiene una infinidad de posibilidades (¿potencialidades?) para dividirse. Por el contrario, aquello que es infinitamente divisible en un sentido actual se refiere a aquello que puede llegar a dividirse infinitamente o que ya se encuentra infinitamente dividido. Pues bien, Aristóteles sostiene que lo continuo, el espacio o el tiempo, es infinitamente divisible sólo en un sentido potencial. Es imposible tener un espacio o un tiempo actual e infinitamente dividido.[18] En consecuencia, Aristóteles ofrece la siguiente respuesta a la dicotomía:

> Al que nos pregunta si es posible recorrer algo infinito, sea en el tiempo o en una longitud, tendremos que responderle que en cierto sentido es posible y que en otro

---

no tiene un último miembro. Una explicación detallada puede encontrarse en [Enderton 1977: 111-21] o en [Moschovakis 2006: 201-22]. Por otro lado, una construcción sencilla en la que los racionales sí son un subconjunto de los reales puede encontrarse en [Byers 2007: 266-72].

[17] Bostock utiliza ejemplos de expresiones (o símbolos) para referirse a un número entero (7), a un racional (0.7) y a un irracional (√2). Enseguida comenta: "*We* refer to such amounts, as I have just done, by using an expression for a rational or irrational number in just the same way as we earlier used an expression for a natural number. But Aristotle, I imagine, would have proceeded more circuitously. The amount of duration that we call '0.7 minutes' he would perhaps characterize as 'the amount which bears to 1 minute the ratio of 7 to 10', and the amount of length that we call '√2 inches' he would no doubt refer to as 'the length of the diagonal of a square of side 1 inch'. He may well have recognized that there were amounts which he had no way of characterizing" [Bostock 2006 (1980): 140]. Los argumentos y los pasajes que fundamentan esta opinión escapan a los intereses del presente trabajo.

[18] Moore da una explicación valiosa de esta distinción: "(1) [infinito potencial] means that however great a natural number you consider, a trillion say, this body can be divided into even more parts. (2) [infinito actual] means that this body can be divided into a number of parts that is greater than any natural number you consider – and so infinite. Aristotle would have accepted (1), and he would have found (2) unintelligible" [Moore 1990: 42].

> no lo es. Si es un infinito actual, es imposible; pero si es potencial, es posible [Aristóteles, *Física*, 263b2-6].

Es decir, sí se pueden recorrer una infinidad de puntos o intervalos espaciales durante un tiempo finito, siempre y cuando estos puntos o infinitos sean potenciales. El motivo, según Aristóteles, es que, en caso de que los infinitos puntos o intervalos (espaciales o temporales) fueran actuales, el movimiento no sería continuo sino intermitente:

> Y si tales infinitas mitades se hicieran actuales, no se tendría un movimiento continuo, sino interrumpido; y esto es lo que evidentemente le ocurrirá a quien se ponga a contar a las mitades, porque un punto tendrá que ser contado como dos: será el punto final de una mitad y el punto inicial de otra, si lo contado no es un todo continuo singular sino dos mitades [Aristóteles, *Física*, 263a27-263b2].

El argumento de Aristóteles es circular.[19] Concluye un rechazo del infinito actual asumiendo que el infinito actual se debe rechazar. Explico. Todo parece indicar que Aristóteles asume que para *hacer* actuales las mitades hay que detenerse en el punto en el que hay que actualizar cada mitad (si no, ¿qué quiere decir Aristóteles cuando habla de un movimiento interrumpido?). Pero Aristóteles mantiene que no es posible detenerse una infinidad de veces, y por tanto no puede actualizarse la infinidad de divisiones (por otro lado, sería ingenuo pensar que Aristóteles rechazaba un número finito de paradas). Es decir, de la imposibilidad del infinito actual de paradas deduce la imposibilidad del infinito actual de divisiones. Resta, pues, preguntarle a Aristóteles: ¿por qué es imposible un infinito actual de paradas? La imposibilidad de completar una infinidad de paradas, o de actos, no es más que una idea intuitiva de Aristóteles –así como de algunos filósofos contemporáneos–. Esta idea deja de interesar a la presente sección ya que corresponde a la cuestión planteada por la pregunta b). Próximamente, en la sección 1.3.2, se verá que las concepciones del espacio continuo, del tiempo continuo y del movimiento continuo sí admiten una infinidad de movimientos intermitentes sin contradicción alguna. Se verá, pues, que, al menos bajo una interpretación newtoniana, la premisa de Aristóteles es falsa.

Cabe comentar una peculiaridad más de la distinción potencial-actual aristotélica del infinito. La posibilidad potencial de todo lo que no es infinito no excluye su posibilidad actual. Por ejemplo, una oruga no es actualmente una mariposa, pero sí lo es potencialmente. La actualidad de la mariposa, por supuesto, es posible a pesar de que anteriormente sólo era una potencialidad de la oruga. Con el infinito –según Aristóteles– las cosas son diferentes. La actualidad del infinito no es posible, aunque su potencialidad sí lo sea. Esta es una incoherencia del pensamiento aristotélico.[20] Ciertamente, los conjuntos y sistemas infinitos tienen propiedades a veces asombrosamente distintas de los conjuntos y sistemas finitos. Sin embargo, hasta ahora

[19] En cambio, Bostock no encuentra ningún argumento: "What is clear is that Aristotle begins by claiming that a magnitude such as a length is potentially but not actually 'infinite by division', and then goes on to expound the sense of this claim. It may be noted first that although he writes as if his claim were a conclusion from argument it is in fact nothing of the sort" [Bostock 2006 (1972-3): 116]. Enseguida, en el texto principal, explico el argumento que pienso que sí tiene Aristóteles.

[20] Así lo encuentra también Bostock: "it seems equally clear that the sense in which a finite line is potentially infinite by division is again that the process of continually dividing it exists potentially (i.e. *could* exist), and so it turns out in the end that in the sense in which a line is potentially infinite by division it may *also* be actually infinite by division. In that case, what has become of the claim that the infinite is potential but not actual?" [Bostock 2006 (1972-3): 117].

no hay ningún fundamento sólido para postular la actualidad de algo infinito como imposible.

1.2.2. El infinito actualmente dado

Aristóteles niega la realización del infinito. De una potencialidad del infinito, no podemos pasar a una actualidad del infinito. ¿Pero qué hay del infinito actual dado? Es decir, aquel que nunca ha sido potencial, sino que siempre ha estado allí, presente, dado, actual. Faris presenta un argumento que se encuentra estrechamente relacionado con esta consideración.

La conclusión de Faris consiste en rechazar el movimiento ante la existencia de un infinito actual. Si hay una secuencia infinita de marcas divisorias –argumenta Faris–, y si para pasar de un punto a otro hay que tocar *cada una* de las marcas actuales, entonces el corredor no alcanza su destino. De forma detallada, Faris construye en primer lugar un argumento tradicional de la dicotomía, desglosándolo en las siguientes premisas:

> (1) There is an infinite sequence Q_p of points between S and F (namely,
> the point half-way from S to F
> the point half-way from that point to F
> the point half-way from that point to F
> and so on).
> (2) If A moves from S to F, when it reaches F it has touched one by one all the points in Q_p.
> Therefore
> (a) If A moves from S to F, when it reaches F it has touched one by one all the points in an infinite sequence of points.
> (b) It is impossible to have touched one by one in a finite time all the points in an infinite sequence of points.
> Therefore
> (3) A does not move from S to F [Faris 1996: 11-2],

en donde S es el punto de partida (*starting-post*), F el punto que indica la meta (*finishing-post*) y A el corredor. El argumento es válido y merece varios comentarios.

En primer lugar, para aclarar el sentido del argumento, Faris se detiene a considerar la concepción de punto geométrico. Aunque acepta que no es capaz de definir con precisión lo que es un punto,[21] propone tomar la noción de divisibilidad como una idea previa a la noción de punto; así, un punto es una posible división y no una entidad que conforma o que se encuentra en el espacio.[22] Moore también apoya una concepción en la que los puntos no son los elementos conformadores de las figuras geométricas, sino las posiciones que podemos identificar: los puntos son los lugares donde las líneas terminan, se dividen, o se encuentran.[23] Ambas propuestas, que

[21] Lo hace cuando reconoce que “and we are unable to say explicitly what a point is” [Faris 1996, 21].

[22] La explicación es la siguiente: “The notion of divisibility is prior, we are suggesting, to that of point; it is not the case that we start with the notion of point and then say that physical space is infinitely divisible because there is an infinite number of points at which it could be divided. Rather, we start with the notion that space is infinitely divisible and hold that in virtue of this a geometry requiring an infinite number of points can be applied to it when a point is interpreted as being a possible division” [Faris 1996: 21]. La idea, que es interesante, es meramente intuitiva. Detrás de ella Faris no ofrece ningún argumento.

[23] Moore tampoco ofrece un argumento para sustentar la idea de punto, también interesante, que encuentra satisfactoria: “a line is something prior to – something that exists over and above – any set of

destierran a los puntos como partes constituyentes del espacio o de algunas entidades espaciales (como las curvas, los cuerpos, etc.) no dejan la cuestión libre de problemas. Con ellas nos podemos preguntar: ¿creamos un punto (por ejemplo, en la línea recta) a partir de una división, o dividimos identificando primero una posición? ¿Es posible realizar división alguna sin antes detectar una posición (que en primera instancia carece de cualquier número asignado)? ¿Es posible detectar una posición (nuevamente, sin número asignado) sin antes haber hecho un acto de división? ¿Hasta qué grado la división de una región espacial y la localización de una posición son la misma operación? Esta problemática, aunque sumamente interesante, escapa a los objetivos del presente trabajo. Sólo se dirá que existen fundamentos para considerar los puntos simplemente como posiciones en el espacio.[24] Esto de ninguna manera nos impedirá seguir los objetivos que este trabajo se ha planteado.

Sigamos con el argumento. La premisa (1) claramente es verdadera. De hecho, existe un número infinito de series infinitas de puntos distintas entre sí y de la serie que especifica el paréntesis incluido en la premisa. En el caso en el que el movimiento siga una trayectoria unidimensional (que es el caso estudiado por Faris, así como en el presente trabajo) la segunda premisa también es verdadera. Por su parte, (a) claramente se sigue de (1) y (2). Los problemas aparecen cuando consideramos la premisa (b), que de ninguna manera se sigue de las premisas que la anteceden. En la sección 1.3.2 veremos con detenimiento por qué –al menos en mecánica clásica, que es lo que aquí más nos incumbe– esta es una premisa falsa. Por lo pronto, veamos las consideraciones que hace Faris, y que lo llevan a posicionarse, al igual que Aristóteles, en contra de la posibilidad de un infinito actual.

Las consideraciones de Faris siguen la dirección aristotélica que reconoce el infinito potencial como posible pero el infinito actual como imposible. Esta posición la empieza planteando cuando, basándose en su concepción de punto, aclara el significado que le da a la premisa (1):

> our claim is that what is really meant by 'There is a point half-way from S to F' is 'The path from S to F could be divided by a perceptible mark into two equal parts'. The expression 'perceptible mark' may be abbreviated to 'mark' [Faris 1996: 22].

Faris exige que la marca sea actualizada físicamente pues la única forma de percibir una marca es que ésta haya sido actualizada. Aquí a Faris se le escapa un detalle importante. Cuando dice que un trayecto se puede dividir por una marca perceptible, cabe entonces preguntarle: ¿perceptible a los ojos de quién? ¿Qué aparato perceptivo es el criterio para clasificar una marca como perceptible? En otras palabras, ¿no podríamos dividir en dos partes la trayectoria entre S y F con una marca no perceptible? Es claro que sí. Porque unas marcas perceptibles para unos pueden no ser perceptibles para otros. Y no sólo eso,

---

points on it, […] This seems to me to be correct. Points are where lines *do* things, such as stop, or meet. […] Its end point is neither more nor less than where it stops. Points are, precisely, where lines do such things as stop. Lines themselves, for that matter, are where surfaces do such things as stop; and surfaces are where bodies do such things as stop" [Moore 1990: 158].

[24] El desarrollo de esta cuestión es de una extensión considerable. Una excelente referencia es el artículo de Roeper [1997], en el que se lee: "a point is a location in space. As a consequence, points are not the primary bearers of spatial properties and spatial relations, nor the primary objects of spatial mappings. This role belongs rather to the parts of space" [Roeper 1997: 251]. Esta construcción de los puntos espaciales considera a las regiones como los objetos fundamentales del espacio. Esta perspectiva, por supuesto, no está libre de controversias. Por ejemplo, Oppy comenta: "Even if it is true that points are unlovely, there is nothing in mere considerations of cardinality that give one reason to suppose that regions are more lovely" [Oppy 2006: 111].

podemos dividir la trayectoria con marcas no perceptibles; el hecho de que no podamos corroborar la existencia de dichas marcas es un asunto distinto. Esta observación podría no ser ningún problema para Faris, que va más lejos y no sólo exige que una marca sea perceptible para poderla tocar, sino que "only actual, not potential marks, can be touched" [Faris 1996: 23]. Y si hay que tocar una infinidad de marcas, entonces éstas tienen que estar actualizadas. Tras estas consideraciones, Faris reconstruye el argumento de la dicotomía como se muestra a continuación:

> (1') An infinite sequence Q'_p of dividing marks could be made between S and F (namely, a mark dividing SF into two equal parts,
> a mark dividing the part between that mark and F into two equal parts,
> a mark dividing the part between that mark and F into two equal parts, and so on). […]
> (2'') If such an infinite sequence of dividing marks has been made, than if A moves from S to F it has touched one by one every mark in that sequence when it reaches F. […]
> What will follow from (1') and (2'') is:
> (a') If such an infinite sequence of dividing marks has been made, then if A moves from S to F it has touched all the marks in an infinite sequence of marks when it reaches F.
> But from (a') and (b) what follows is […] only that
> (3') If such an infinite sequence of dividing marks has been made A does not move from S to F [Faris 1996: 22-3].

Esta reconstrucción también es una argumentación válida. Pero nuevamente la conclusión no es satisfactoria. Ahora la pregunta pertinente es: ¿y si dichas marcas divisorias ya estuvieran previamente hechas, es decir, si nadie las tuviera que dibujar o marcar, no alcanzaría el corredor su meta? No hay ningún motivo para dar una respuesta negativa a esta pregunta. Por supuesto, si tal fuera el caso, nunca podría verificarse que tal conjunto de marcas divisorias es infinito, porque el hecho de contar y traer a conciencia la cantidad contada nos ocupará siempre al menos un intervalo mínimo de tiempo, que en algún momento del conteo ya no podremos reducir. Pero no importa. No necesitamos contarlos para recorrerlos todos. Esto no es el caso ni siquiera para los conjuntos finitos. Nunca contamos –normalmente– las hojas que pisamos mientras caminamos por la calle, mas esto no nos impide tocar cada una de ellas.[25]

El error en el argumento reconstruido de Faris, así como en la construcción original, se encuentra en la premisa (b), que niega la posibilidad de tocar una infinidad de puntos, uno por uno, en un tiempo finito. Esta premisa no es verdadera (lo que se mostrará páginas más adelante, en la sección 1.3.2). Por lo pronto, lo que ahora nos enseña el análisis al argumento de Faris es que la inverificabilidad (por parte de todo ser humano) del infinito actual no implica su imposibilidad.

---

[25] Russell coincide en este punto: "But it is not essential to the existence of a collection, or even to knowledge and reasoning concerning it, that we should be able to pass its terms in review one by one. This may be seen in the case of finite collections; we can speak of "mankind" or "the human race", though many of the individuals in this collection are not personally known to us. We can do this because we know of various characteristics which every individual has if he belongs to the collection, and not if he does not. And exactly the same happens in the case of infinite collections: they may be known by their characteristics although their terms cannot be enumerated. In this sense, an unending series may nevertheless form a whole, and there may be new terms beyond the whole of it" [Russell 1914: 187]. Allis y Koetsier también acuerdan en este detalle: "As soon as one realizes that Achilles and the Tortoise do not consciously pass the infinitely many points that separate them from the finish in our mathematical model of the situation, the paradox disappears" [Allis y Koetsier 1995: 243].

1.2.3. La solución aritmética de la paradoja

Todavía no hemos analizado la paradoja de Aquiles bajo la mecánica clásica. Al hablar de movimiento en los subapartados anteriores, se ha hecho sin asumir explícitamente ninguna teoría del movimiento, dando así cabida, sobre todo, a la interpretación de la paradoja bajo teorías intuitivas. Pues bien, de aquí en adelante, restrinjamos nuestro análisis ateniéndonos a las consideraciones del movimiento que hace la mecánica newtoniana.

Comencemos por la solución aritmética, que brinda una respuesta afirmativa a la pregunta que cuestiona la posibilidad de recorrer una infinidad de intervalos de espacio (o de los puntos que delimitan dichos intervalos) durante un tiempo finito.[26] A diferencia de tomar el recorrido entero y subdividirlo infinitamente, esta solución consiste en hacer notar que tanto los intervalos de espacio como de tiempo que debe recorrer Aquiles o el corredor son cada vez menores, y que su suma, aunque tiene un número infinito de términos, tiene como resultado otro intervalo finito.[27] Por ejemplo, asignemos para la dicotomía una unidad de distancia entre el corredor y su destino. Supongamos también que el corredor avanza durante todo el recorrido con una velocidad constante de una unidad de longitud durante una unidad de tiempo. Así, avanzar media unidad de longitud le tomará media unidad de tiempo. Siguiendo el planteamiento de la dicotomía, el corredor tiene que avanzar $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ unidades de longitud (donde $n\in\{1, 2, 3, 4,\ldots\}$, los naturales a partir del 1), que las recorrerá en $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ unidades de tiempo. Ahora bien, por análisis matemático (ahora) elemental, se sabe que dicha serie infinita tiene un limite que corresponde a la distancia total. A saber, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$. Lo que nos indica que de la suma de un número infinito de cantidades finitas puede resultar un número finito.

Ciertamente, no todos aceptan que el límite de la serie infinita *es* la suma total de la serie. Knopp [1947: 102-3], por ejemplo, niega que la serie total, aunque sea convergente, alcance su límite, y aclara que 'la suma' es solo una expresión para referirse al límite de la serie convergente. Pero la postura de Knopp se fundamenta en un argumento falaz.[28] Además, si dirigimos la atención a algunos usos de las series

---

[26] Esta solución se remonta a Gregoire St. Vincent, pasando por Descartes, Peirce y Whitehead. Véase [Glazebrook 2001: 199].

[27] Esta solución es defendida, por ejemplo, por Quine: "the fallacy that emerges is the mistaken notion that any infinite succession of intervals of time has to add up to all eternity. Actually when an infinite succession of intervals of time is so chosen that the succeeding intervals become shorter and shorter, the whole succession may take either a finite or an infinite time. It is a question of a convergent series" [Quine 1966 (1962): 3-4]; por Rescher: "suspicion comes to focus on the contention of thesis (4) that an infinity of finite quantities cannot yield a finite total. […] an infinite number of increasingly diminishing quantities can indeed make up a finite total – as modern mathematics shows in such cases as: ½ + ¼ + 1/8 + … = 1. So here the dismissal of premises (4) as false eliminates the inconsistency and thereby dissolves the paradox" [Rescher 2001: 60]; y por Clark: "The solution was to define the sum of an infinite series as the *limit* to which the sequence of its successive partial sums converges" [Clark 1007: 1].

[28] Tras mostrar que la serie $\sum_{k=0}^{n}\frac{s}{2^k}$ para todo *n* es siempre menor a 2*s*, Knopp concluye: "The total gift therefore never reaches even the amount of 2*s*. And if we now, in spite of this, say that $\sum\frac{1}{2^n}$ *is equal* to 2, then we are really only using an abbreviated expression for the fact that the sequence of partial sums tends to the *limit* 2" [Knopp 1947: 103]. Pero del hecho de que la suma de *n* términos (de los cuales hay

infinitas, es inaceptable negar que el valor del límite *es* el valor de la suma total. Un ejemplo ilustrativo es el cálculo de áreas a partir de integrales. Cuando se resuelve una integral, lo que en realidad se obtiene es el límite de una sumatoria infinita que, cuando se trata de la integral de una función de una variable, se identifica con el área bajo la curva que representa el comportamiento de dicha función. Y no se pone en tela de juicio que el valor de dicho límite *es* el valor exacto del área bajo la curva.[29] Así, 'el área bajo la curva' no es una expresión que desorienta al principiante del concepto de integral, ni tampoco es simplemente otra expresión, utilizada por descuido o por mala costumbre, para referirse al límite de la serie infinita. El valor del área bajo la curva *es* el valor del límite de la serie infinita.[30] En la siguiente sección se verá que la mecánica newtoniana, al utilizar el concepto de integral en algunas de sus definiciones, depende de esta idea matemática.

Por otro lado, cabe mencionar que no todas las series o subdivisiones de intervalos, aunque sean cada vez más pequeñas, suman una cantidad finita. Por ejemplo, supongamos que queremos que un corredor recorra (en distancia y tiempo) la sucesión de los intervalos comprendidos por las magnitudes $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$. La carrera del corredor entonces no tendría fin ni en distancia ni en tiempo, ya que se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$.[31]

---

una cantidad finita) de una serie no alcanza su límite, no se sigue que la suma de la totalidad de términos de la serie no lo alcance. Aquí Knopp comete una falacia de composición: atribuye una propiedad de la parte, incluso de todas las partes, al todo, lo que no es ninguna necesidad. En la misma posición, Black niega que la suma en estos casos es una suma genuina: "To say that the sum of the series [100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 + …] is $111\frac{1}{9}$ is to say that if enough terms of the series are taken, the difference between the sum of that finite number of terms and the number $111\frac{1}{9}$ becomes, and stays, as small as we please. […] Since this is all that is meant by saying that the infinite series has a sum, it follows that the "summation" of all the terms of an infinite series is not the same thing as the summation of a finite set of numbers" [Black 1970 (1950-1): 70]. Es valiosa la explicación que Rescher ofrece en contra de este punto de vista: "Whoever thinks that this unfavourable series does not sum up to one but always falls short of it just does not understand the function that those three little dots are serving here: they stand for *et cetera*, meaning and *all* the rest" [Rescher 2001: 99].

29 En [Hughes-Hallett *et al* 2005: 248-52] se ofrece una explicación del concepto de integración y una demostración de que el valor de la integral, obtenido tras operar un límite a una sumatoria infinita, es exactamente el valor del área bajo la curva.

30 Por supuesto, éste no es un hecho trivial. En un libro consagrado a mostrar e ilustrar que el carácter creativo de las matemáticas está por encima del carácter lógico (que incluso así, nunca es abandonado), Byers [2007: 39-41] explica el salto creador que conlleva concebir que detrás de una suma infinita –un proceso– y de un número –un valor– hay una misma idea.

31 El resultado de la suma infinita de la serie convergente correspondiente a la Dicotomía se puede obtener operando un límite: $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}$. Es muy ilustrativo el caso la función continua de k cuando $k \in \mathbf{R}$: $\lim_{k\to\infty} f(k) = 1$ en donde $f(k) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k$. En la Figura 1.1 se aprecia este comportamiento de la función. En cambio, para la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$ se puede ver que cada una de las subsumas dispuestas en 2, 4, 16, … términos a partir del segundo, de tal manera que quede $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$, es cada una mayor que ½. Por lo que de la suma total no se obtiene ningún valor finito.

Con lo que hemos dicho, es fácil ver que, en mecánica clásica, la dicotomía no es más que un caso especial de la paradoja de Aquiles. Para este planteamiento, las fracciones correspondientes a cada intervalo dependerán de la velocidad de Aquiles, de la velocidad de la tortuga y de la distancia en ventaja que tome la tortuga al comienzo de la carrera. Asumamos que x_0 es la distancia que toma como ventaja la tortuga sobre Aquiles en el primer instante, y que k es la cantidad de veces que la velocidad constante de Aquiles es mayor sobre la velocidad constante de la tortuga ($v_a = kv_t$). De esta manera, y sabiendo que toda velocidad constante es igual al intervalo de espacio recorrido entre el tiempo transcurrido para recorrerlo ($v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$), Aquiles recorre una distancia total de $x_a = x_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{k}{k-1} \cdot x_0$, mientras que la tortuga atraviesa la distancia de $x_t = x_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k-1} \cdot x_0$. Así también, vemos que la suma de la secuencia infinita de distancias es finita y que el tiempo en que las recorren (y en el que Aquiles alcanza a la tortuga) también lo es: $t = \frac{x_a}{v_a} = \frac{x_t}{v_t} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{x_0}{v_a} = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{x_0}{v_t}$. Con lo que la paradoja queda resuelta. La dicotomía (versión progresiva) se puede mirar como un caso especial de la paradoja de Aquiles, en donde la tortuga toma ½ unidades de longitud como ventaja (x_0 = ½) y Aquiles es el doble de rápido que la tortuga (k = 2).

La solución aritmética, pues, por un lado reconoce que, como lo afirma Zenón, los corredores cruzan una infinidad de intervalos espaciales (y especifica cada uno de ellos); pero, por el otro lado, también reconoce que al cruzar esa infinidad de intervalos espaciales, el corredor también cubre la distancia necesaria para llegar a su meta en un tiempo finito.

1.2.4. El sentido de 'siempre' o de 'nunca' en el argumento

Incluso Aristóteles reconoce la existencia de un límite en la serie de trechos que describen los planteamientos de Zenón. El reconocimiento de dicho límite nos ayuda a encontrar una interesante falacia, que Aristóteles también detecta, y que se comete en el planteamiento habitual de los argumentos de Zenón. Esto se puede apreciar en el siguiente fragmento, en el que también se incluye, por ser la fuente antigua más importante, el planteamiento aristotélico de la paradoja de Aquiles:

> El corredor más lento *nunca* podrá ser alcanzado por el más veloz, pues el perseguidor tendría que llegar primero al punto desde donde partió el perseguido, de

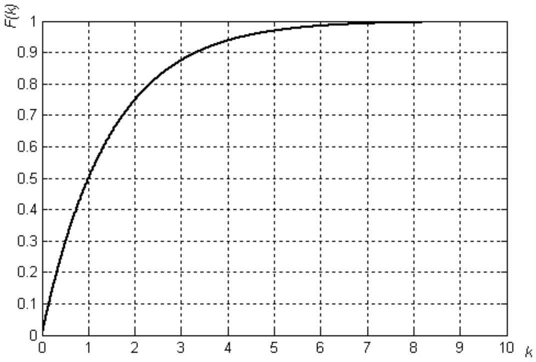


Figura 1.1. Comportamiento, cuando $k \in [0, 10]$, de la función f: **R** → **R** definida por $f(k) = 1-(1/2)^k$.

> tal manera que el corredor más lento mantendrá siempre la delantera. Este argumento es el mismo que el dicotómico, aunque con la diferencia de que las magnitudes sucesivamente tomadas no son divididas en dos. La conclusión es que el corredor más lento *nunca* será alcanzado y el procedimiento es el mismo que el del argumento por dicotomía (pues en ambos casos se concluye que no se puede llegar al límite si se divide la magnitud de cierta manera, aunque en éste se añade que incluso el corredor más veloz según la tradición tiene que fracasar en su persecución del que es más lento); por tanto la refutación tendrá que ser la misma en ambos casos. En cuanto al segundo, es falso pensar que el que va adelante no puede ser alcanzado; ciertamente, no será alcanzado *mientras* vaya delante, pero será alcanzado si se admite que la distancia a recorrer es finita [Aristóteles, *Física*: 239b15-29, mis cursivas].

Cuando Aristóteles afirma que el corredor más lento (la tortuga) "no será alcanzado *mientras* vaya delante" no está diciendo una obviedad, aunque así lo parezca. Y es que todos los puntos e intervalos que se apuntan en los argumentos de Zenón, son puntos e intervalos anteriores al momento en que el corredor presumiblemente alcanza su meta. Es decir, cuando en el planteamiento de la paradoja de Aquiles se llega a afirmar que

(p) en todo punto nuevo que Aquiles alcance, la tortuga se encontrará en un punto más nuevo por delante

para después "aclararlo" con las siguientes palabras:

(p') es decir, *siempre* habrá una distancia, por más pequeña que sea, entre la tortuga y Aquiles,

en realidad se está introduciendo un término ambiguo o incompleto que provoca el abandono de una precisión crucial. El hecho de que para cada nuevo punto (de los puntos que pertenecen a la sucesión descrita en el planteamiento) que Aquiles alcance, la tortuga *siempre* se encontrará por delante, no implica que ésta se encontrará durante una *eternidad* por delante del héroe. Porque este último 'siempre' se refiere a *todo momento* que pertenece a *la sucesión indicada* por el planteamiento, y no a *todo momento* de *todo el tiempo futuro posterior a la carrera*. Tomando en cuenta esta distinción, entonces, concluir a partir de (p') que

(q) Por lo tanto, Aquiles *nunca* alcanzará a la tortuga,

es un razonamiento inválido.

La descripción de la carrera que el planteamiento de Zenón nos ofrece es una descripción limitada que, así como no nos dice nada de lo que ocurre antes de que la carrera comience –siguiendo el aire de fábula, no sabemos, por ejemplo, si Aquiles estrechó o no la mano de la tortuga–, tampoco nos dice nada de lo que ocurre después de que Aquiles presumiblemente alcanza a la tortuga. Ni siquiera se dice nada del instante en el que los competidores presumiblemente se alcanzan.[32]

[32] Faris reconoce la ambigüedad del término 'siempre': "Now the persuasiveness of the argument results from a latent ambiguity in the word 'always' in the intermediate conclusion (2) [There is always a gap between Achilles and the tortoise]. […] but […] there are times later than all the times t_{-1}, t_0, t_1, … [cada uno de los instantes en los que Aquiles alcanza los puntos de la secuencia infinita]" [Faris 1996: 31-2]. Rescher también detecta la misma confusión: "a deep underlying equivocation is at work in the paradox

Muy probablemente, una de las razones por las que Aristóteles se percató de la ambigüedad que encierran los términos ‘siempre’ o ‘nunca’ es que, incluso bajo la teoría del movimiento que presumiblemente Zenón considera, es posible encontrar un punto en el que los corredores se encuentran. El argumento es simple. Supongamos que las velocidades de Aquiles y de la tortuga son tales que, por cada tramo de distancia recorrido por la tortuga, el héroe recorre el doble. La distancia inicial que separa a Aquiles de la tortuga es x_0. Así, cuando la tortuga recorra una nueva distancia x_0, Aquiles recorrerá una distancia $2x_0$, la distancia x_0 que inicialmente lo separaba del reptil más la nueva distancia x_0 que recorre la tortuga. Por lo tanto, en ese entonces Aquiles alcanza a la tortuga.

Bajo las mismas consideraciones, la mecánica newtoniana nos indica el mismo resultado –a éste nos referiremos como la ‘solución newtoniana’ de la paradoja–. Si Aquiles alcanza a la tortuga, entonces debe de existir un punto (de encuentro) $x_e > 0$ en el espacio que Aquiles y la tortuga comparten en un instante de (de encuentro) $t_e > 0$. ¿Existe tal punto? De entrada, según la mecánica clásica, no lo sabemos. Para averiguarlo, acudamos al concepto newtoniano de velocidad ($v = \frac{dx}{dt}$) y resolvamos para la velocidad de Aquiles y para la velocidad de la tortuga, ambas desde sus posiciones y tiempos iniciales hasta un punto y un instante hipotético que ambos corredores comparten. Así,

$$\int_0^{x_e} dx = v_A \int_0^{t_e} dt \qquad \text{y} \qquad \int_{d_0}^{x_e} dx = v_T \int_0^{t_e} dt \,. \tag{1.1}$$

De este sistema obtenemos que en un tiempo $t_e = \frac{d_0}{v_A - v_T}$ tanto Aquiles como la tortuga alcanzan la posición horizontal $x_e = \left(1 - \frac{v_T}{v_A}\right)^{-1} d_0$. (Recuérdese que las integrales en (1.1) no son más que los límites de sumatorias al infinito; o sea que, el argumento newtoniano que ahora se está dando incluye la solución aritmética). Ahora bien, esto nos indica que si $v_a < v_t$, entonces $x_e < 0$ y $t_e < 0$, es decir, que la posición y el instante en el que Aquiles coincide con la tortuga es anterior a la carrera; o sea, que Aquiles no alcanza a la tortuga. Por otro lado, si $v_a = v_t$, entonces $x_e = \infty$ y $t_e = \infty$, lo que quiere decir que no hay ninguna posición ni ningún instante que comparta simultáneamente Aquiles con la tortuga en todo el espacio y todo el tiempo del universo, ya que $\infty \notin \mathbf{R}$; en otras palabras, Aquiles jamás alcanza a la tortuga. Pero como nuestras condiciones iniciales consideran que $v_a > v_t$, entonces x_e y t_e toman valores finitos y mayores a cero. Aquiles, pues, alcanza a la tortuga en un tiempo finito.

Tanto la teoría intuitiva de Aristóteles (y suponemos, también, la de Zenón), como la mecánica clásica no sólo nos afirman que Aquiles alcanza a la tortuga, sino que nos indican el punto preciso y el tiempo en que ocurrirá el alcance. Con esto, es fácil percatarse que el planteamiento de Zenón concluye la imposibilidad de llegar a la meta con una descripción de la carrera que precisamente evade la inclusión de la meta. Para que quede completamente claro, obtengamos una función para la posición, y otra para el tiempo, que analice cada uno de los puntos nuevos que alcanza Aquiles, enumerados con el número natural $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, y veamos que sus imágenes excluyen, entre muchos otros, el punto y el instante en que el héroe presumiblemente alcanza al reptil.

---

as between ‘the sequence of catch-ups is *unending* (limitless) *in steps*’ and ‘the sequence of catch-ups is *unending* (limitless) *in time*.’ The two expressions have a different sense. For the catch-up sequence just does not cover the whole of the future, seeing that it converges to a final limit even as 1/2 + 1/4 + 1/8 + … converges to 1. Thus the steps of that sequence, even in endless totality, will only cover a finite timespan” [Rescher 2001: 99]. La misma apreciación también puede encontrase en [Black 1970 (1950-1): 69] y en [Ryle 1954: 50].

Por análisis algebraico sabemos que la suma de n términos de una serie convergente de razón r es

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 r^k = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, \tag{1.2}$$

donde a_1 es el primer término de la serie. Tomando en cuenta (como lo hicimos en la sección anterior) que Aquiles es dos veces más rápido que la tortuga (y por tanto, que de cada tramo espacial que Aquiles recorra, la tortuga recorrerá sólo la mitad: $r = ½$), a partir de (1.2), es directa la obtención de la distancias recorrida respectivamente por Aquiles $x_a(n)$ y la tortuga $x_t(n)$ en el momento n a partir de que la carrera comienza (en el momento 0):

$$x_a(n) = x_0\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \quad \text{y} \quad x_t(n) = x_0\left(2 - \frac{1}{2^{n}}\right). \tag{1.3}$$

Para obtener el tiempo, basta con considerar que la velocidad constante de un objeto es la distancia que recorre dividida por el tiempo en el que tarda recorrer dicha distancia. Así, de los resultados obtenidos en (1.3), obtenemos que, del momento 0 al momento n, el tiempo transcurrido es

$$t(n) = \frac{x_0}{v_a}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{x_0}{v_t}\left(2 - \frac{1}{2^{n}}\right), \tag{1.4}$$

Si, por simplicidad, trabajamos con unidades de distancia x_0 y unidades de velocidad v_a, (1.4) se expresa

$$t(n) = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right). \tag{1.5}$$

Así, de (1.3) podemos ver que la imagen de $x_a(n)$ es $\{0, 1, 3/2, 7/4, \ldots, 2-1/2^{n-1}, \ldots\}$, mientras que la imagen de $x_t(n)$ es $\{1, 3/2, 7/4, \ldots, 2-1/2^{n-1}, \ldots\}$, que son unos subconjuntos del intervalo real o, si se quiere (para hacer justicia a los tiempos de Zenón), racional $[0, 2)$. Del mismo modo, el tiempo expresado en (1.5) es una función cuya imagen es el conjunto $\{0, 1, 3/2, 7/4, \ldots, 2-1/2^{n-1}, \ldots\}$, también es un subconjunto del intervalo $[0, 2)$. Esto es relevante. Por más grande que sea n, cualquier *posición n* no dejará de referirse a una posición menor a 2 unidades de distancia. Y cualquier *momento n* no dejará de referirse a un instante menor a 2 unidades de tiempo transcurrido a partir del comienzo de la carrera. Pero, precisamente, tanto la solución aritmética como la newtoniana (e incluso la aristotélica) nos informan que Aquiles alcanzará a su adversario en el punto $x = 2$ y en el momento en el que el tiempo transcurrido son 2 unidades, posición y momento que no pertenecen al conjunto de *posiciones n* ni de *momentos n* del planteamiento de Zenón.

Esto muestra claramente cómo es que el desglose infinito que expone el planteamiento de Zenón, así como no nos cuenta nada de lo que sucede antes de que comience la carrera, nada nos cuenta de lo que acontece en el instante en el que Aquiles presumiblemente alcanza a la tortuga ni de ningún momento futuro. El planteamiento de Zenón no nos cuenta que Aquiles alcance a la tortuga, pero de ello no se puede deducir que nuestro héroe no alcanza al reptil. De la misma manera que de la fábula de Esopo no se puede deducir que la tortuga no se come a la liebre el siguiente día de su competición, simplemente porque el fabulista no nos lo cuenta. En la conclusión de Zenón, 'todo momento' no es la totalidad del tiempo, ni tampoco una eternidad futura. Es un subconjunto de instantes del intervalo temporal $[0, 2)$, instantes en los que Aquiles todavía no ha alcanzado a la tortuga. Por supuesto, a partir del mismo planteamiento de Zenón, tampoco se puede deducir que Aquiles alcance a la tortuga.[33] Para ello, es necesario acudir a otras consideraciones, como lo hace la solución aritmética, la mecánica newtoniana, e incluso la teoría aristotélica del movimiento, que enriquecen el planteamiento de Zenón, pero que también pagan el costo de definir una suerte para los corredores.

Es importante señalar que, interpretado bajo la mecánica newtoniana, el desglose infinito planteado por Zenón nos ayuda a comprender lo que hay detrás de las ecuaciones (1.1); a saber, que las trayectorias de movimiento, en un universo newtoniano, son trayectorias continuas. Y si la trayectoria es continua, entonces el límite de posiciones que sigue una trayectoria se tiene que corresponder con la posición que toma el cuerpo (que no desaparece) en el instante que se corresponde con el límite de instantes en los que se desenvuelve la trayectoria. Es decir, que si el cuerpo tiene una trayectoria tal que cruza por las posiciones $x = 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ (que tienen como límite $x = 2$) respectivamente en los instantes $t = 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$ (que tienen como límite $t = 2$), entonces, si el cuerpo en $t = 2$ existe, necesariamente se encuentra en $x = 2$.

Pero la continuidad del movimiento (en el sentido moderno) no está contemplada por el planteamiento de Zenón. El reconocimiento, pues, de la historia incompleta, que consiste en el desglose de una infinidad de puntos, planteada por Zenón, nos enseña una cuestión de suma importancia que conviene mantener en mente: que dicha historia no implica ni la posibilidad ni la imposibilidad de la carrera. La solución newtoniana que arriba hemos expuesto, así como las otras soluciones, no contradicen la historia referida por el planteamiento de Zenón. Otras consideraciones, supuestas, por ejemplo, bajo otras teorías del movimiento, podrían dar un fallo desfavorable para Aquiles. Una conclusión tal, sin duda, también puede ser consistente con el relato de Zenón.[34]

[33] Peijnenburg y Atkinson reconocen este hecho: “Zeno rules as we have now conceived them are silent about whether Achilles might attain any points other than the Zeno points. A fortiori they say nothing about whether or not Achilles might reach the particular non-Zeno point that is the limit point 1. He might or he might not: either possibility is compatible with these Zeno rules” [Peijnenburg y Atkinson 2008: 189]. En la misma línea, Benacerraf afirma: “In the racecourse, covering all the Z-points at least partially determines where you are: you cannot cover them all and remain in the Z-set” [Benacerraf 1970 (1962): 115]. Esta afirmación, sin embargo, no siempre es verdadera. Es verdadera –y esto es lo que parece ser que Benacerraf tiene en mente– si asumimos que las trayectorias del movimiento son continuas. En cuanto a terminología, ‘*Zeno points*’ o ‘*Z-points*’ es el conjunto de puntos indicados por la sucesión que especifica el planteamiento de la paradoja.

[34] Cabe comentar que, de hecho, existen replanteamientos de la paradoja de Aquiles en las que la suerte se torna adversa para el héroe. Bunch [1982: 200-2], por ejemplo, muestra que, si nos atenemos a la teoría general de la relatividad, en una carrera entre Aquiles y la tortuga que tiene lugar en las proximidades de un agujero negro, la ganadora definitiva es la tortuga. Por otro lado, Alper y Bridger [1997: 163] muestran que si nos atenemos a la mecánica cuántica, y conocemos con precisión la velocidad de Aquiles, entonces a partir de cierto número de pasos la imprecisión de la posición del corredor se vuelve descomunal, lo que es equivalente a no tener la menor idea del lugar donde se encuentra. Peor todavía, Silagadze [2005: 2893-6] muestra que si tomamos en cuenta las implicaciones de medir los subintervalos en la carrera, la mecánica cuántica dice que Aquiles ni siquiera puede comenzar la carrera. Al utilizar teorías distintas de la mecánica clásica, no corresponde a los objetivos del presente trabajo tratar con todos estos argumentos.

1.2.5. La versión regresiva y la falta de un primer punto

Aunque la mecánica clásica tiene un argumento a favor de un dictamen sobre la suerte del corredor, en este punto de la discusión en torno a la paradoja de Aquiles es justo plantearse la siguiente pregunta: ¿demuestra la mecánica newtoniana, bajo la idea de movimiento que asume, que el corredor atraviesa una infinidad de puntos cuando se mueve? La respuesta, que para algunos puede resultar decepcionante, es negativa. La mecánica newtoniana *no demuestra* sino que *asume* que el corredor, siempre que se mueve, atraviesa una infinidad de puntos. Esto se debe, a que asume un espacio continuo, un tiempo continuo y trayectorias continuas, y por tanto, cualquier cambio de posición implicará cubrir la totalidad de los puntos que se encuentran en la trayectoria que sigue.[35]

Viene al caso destacar ahora esta cuestión, porque lo que esta sección quiere señalar es que Zenón *tampoco demuestra* que es imposible atravesar una infinidad de puntos. De la misma manera, Zenón *asume* la imposibilidad de atravesar una infinidad de puntos. Esto se aprecia al analizar la versión regresiva de la dicotomía. Su conclusión se obtiene a partir de la siguiente argumentación:

> Como el corredor siempre tiene un punto que alcanzar antes de cualquier meta o sub-meta que se proponga, por más cerca que éstas se encuentren de él, ni siquiera puede comenzar su recorrido.

Es decir, como no hay un primer punto que alcanzar, como de su punto inicial a cualquier punto que se proponga como meta hay una infinidad de puntos, el corredor no puede iniciar su movimiento, no puede moverse. ¿De dónde se obtiene esta conclusión? Únicamente a partir de la premisa que afirma que el movimiento es imposible que se dé entre una infinidad de puntos. ¿De donde saca Zenón que el movimiento debe especificar un primer punto al que se movió? Solamente de suponer que todo movimiento debe especificar un primer punto. La versión progresiva sigue un razonamiento en la misma línea. Como no hay un último punto anterior a la meta esperada, como entre el punto inicial y el final hay una infinidad de puntos, el corredor no alcanza su meta.[36]

Habiendo notado estas asunciones hechas por la mecánica clásica, por un lado, y por los argumentos de Zenón, por el otro, pareciera ser que la discusión entre ambas posiciones no tiene ninguna dirección. Ni la mecánica clásica tiene que decir nada a los argumentos de Zenón (pues sólo puede negar una suposición suponiendo lo contrario), ni los argumentos de Zenón tienen nada que decir en contra de la mecánica newtoniana. Esto no es así cuando se toma en cuenta una de las interpretaciones contemporánea a las paradojas, a saber, la que considera que el argumento de Zenón en realidad defiende la imposibilidad de llevar a cabo un número infinito de actos durante un tiempo finito. Esta es la idea central que corresponde discutir en el siguiente apartado, donde entonces se verá que el papel de la mecánica newtoniana sí es relevante.

---

[35] Grünbaum también se percata de este hecho y por eso busca una justificación para considerar la continuidad del espacio y el tiempo: "What is required in order to refute Zeno's objections to the mathematical theory of motion is a proof that neither the denseness of its ordering of the constituent events of the motion nor such features of this process as are entailed by this denseness property constitute obstacles to its inception and consummation either ordinally or metrically" [Grünbaum 1970 (1955): 173].

[36] Peijnenburg y Atkinson aprecian un aspecto que apunta a la misma dirección: "Zeno's grand paradox shrivels into a mere tautology, stating no more than that a runner who is confined to Zeno points is confined to Zeno points" [Peijnenburg y Atkinson 2008: 189].

1.3. La posibilidad de realizar una supertarea

La paradoja de Aquiles se puede interpretar de la siguiente manera. Cuando Aquiles alcanza el primer punto (el punto de donde parte la tortuga), en realidad está llevando a cabo un primer acto. Cuando corre desde este primer punto y alcanza el segundo, realiza un segundo acto. Etc. Visto de esta manera, Aquiles, antes de alcanzar a la tortuga, o sea, para alcanzarla, tiene que llevar a cabo una infinidad de actos. ¿Es esto posible?

En este apartado se verá que, bajo un movimiento continuo según la modelización newtoniana de la carrera, esta pregunta merece una respuesta afirmativa. Esta respuesta se fundamenta en una modalidad de la carrera de Aquiles que, a diferencia de las interpretaciones habituales y superficiales, no consta de un avance con velocidad constante; a saber, la carrera *staccato*. Antes de tratarla y de considerar las diversas objeciones que se han presentado, es preciso tratar el origen de la cuestión.

1.3.1. Un finitismo basado en la realidad

La crítica más profunda a la solución aritmética es la suscitada por Max Black [1950-1] en un artículo en el que, por vez primera, se trata con profundidad la idea de una supertarea. Allí, Black niega que la solución aritmética resuelva la paradoja de Aquiles. La razón de esto es que –según Black– semejante solución asume la posibilidad de llevar a término una secuencia infinita de actos en un tiempo finito.[37] Es decir, que la solución aritmética asume la ejecución satisfactoria de una supertarea. Pues bien, la idea de supertarea –Black defiende– es una idea contradictoria.[38]

La idea principal en la que se basan los argumentos de Black (con cada una de sus supertareas que se tratarán con detenimiento en la sección 3.1.1) consiste en hacer notar que a cada acto de la secuencia infinita se le puede asignar un número natural, y que la lista de los números naturales es interminable. Él mismo reconoce que esta idea es la base de sus argumentos:

> every series of acts is like counting in requiring the successive doing of things, each having a beginning and end in space or time. And this is all that was used or needed in our arguments [Black 1950-1 (1970): 79].

Efectivamente, todos y cada uno de los actos de la serie infinita tienen un principio y un final. Antes del número n está el $n - 1$, y después del n el $n + 1$. Si dividimos infinitamente y tomamos el planteamiento de Zenón como una secuencia infinita de actos, en correspondencia con los números naturales, podemos también encontrar el punto inicial –en espacio y en tiempo– y el punto final de cada acto. Concretamente, si seguimos los intervalos que nos ofrece la solución aritmética, el acto n comienza en $1-\frac{1}{2^{n-1}}$ y finaliza en $1-\frac{1}{2^{n}}$ unidades de longitud o de tiempo. El problema para Black, y esto será manifiesto con mayor claridad cuando se analicen sus máquinas infinitas, es que no se puede especificar un último número del conteo ni un último acto de la secuencia, y por tanto no es nada claro que se pueda especificar un resultado total y consistente para la infinidad de actos. De la misma manera, tampoco se puede

[37] Lo manifiesta en el siguiente pasaje: “I have tried to show that the popular mathematical refutation of Zeno’s paradoxes will not do, because it simply assumes that Achilles can perform an infinite series of acts” [Black 1950-1 (1970): 80-1].

[38] Lo explicita claramente: “I am going to argue that the expression, ‘infinite series of acts’, is self-contradictory” [Black 1970 (1950-1): 72].

especificar ni un último punto ni un último instante de la secuencia total. Pero, no se puede simplemente porque no lo tiene.

Aunque Black es completamente consciente de que su argumento va en contra de *la idea* de una infinidad de actos, a favor de la inconsistencia lógica de semejante idea,[39] al final termina encontrando un aval de su argumento en la realidad:

> But Achilles is not called upon to do the logically impossible; the illusion that he must do is created by our failure to hold separate the finite number of *real things* that the runner has to accomplish and the infinite series of numbers by which we denote what he actually does. We create the illusion of the infinite task by the kind of mathematics that we use to describe space, time, and motion [Black 1970 (1950-1): 81, mis cursivas].

Vista la situación desde la realidad, es una obviedad que Aquiles alcanza a la tortuga en un número finito, e incluso pequeño, de pasos reales.[40] En este sentido, la respuesta más cabal que se le puede brindar a Zenón es: "vete a las murallas de Troya y ve tú mismo cómo Aquiles alcanza a tortugas y a troyanos". Pero ése no es el punto interesante en la discusión actual de las paradojas de Zenón. Se trata de discutir la consistencia entre las concepciones matemáticas adoptadas por las teorías físicas (que describen el movimiento de un mundo, semejante al que habitamos, con mayor o menor éxito) en la interpretación que hacen éstas de las paradojas de Zenón, no para conocer más la realidad ni para mero entretenimiento intelectual, sino para saber a qué atenernos al considerar ciertas teorías y concepciones. Por supuesto, un paso real no es igual a un paso conceptual. Pero precisamente la cuestión es: ¿cómo debe ser nuestro paso conceptual? ¿Cómo acotarlo, restringirlo?[41] Que sólo veamos pasos grandes, macroscópicos, ¿quiere decir que no pueda haber pasos arbitrariamente pequeños? Ya hemos visto que cualquier suerte para Aquiles es lógicamente consistente con la historia planteada por Zenón.[42] Dependiendo de la teoría física que consideremos, será el final de los corredores.[43] La mecánica newtoniana, al menos, nos permite modelar pasos arbitrariamente pequeños, y lo que ahora se busca discutir son los problemas que esta idea plantea, así como sus posibles consecuencias. Las alusiones a la realidad salen sobrando.

A diferencia de Black, que sólo encuentra un aval de su conclusión en la realidad, Wisdom fundamenta su posición en la realidad. En primer lugar aclara que

---

[39] Después de describer el funcionamiento de Alpha, su primera máquina infinita, hace el siguiente comentario: "I hope nobody will object that the wear and tear on such a machine would be too severe; or that it would be too hard to construct! We are dealing with the logical coherence of ideas, not with the practicability of mechanical devices" [Black 1970 (1950-1): 75].

[40] En la misma línea que Black, Bergson subraya: "Quand Achille poursuit la tortue, chacun de ses pas doit être traité comme un indivisible, chaque pas de la tortue aussi. Après un certain nombre de pas, Achille aura enjambé la tortue. Rien n'est plus simple" [Bergson 1959 (1907): 757].

[41] Alper y Bridger, siguiendo el mismo parecer, aclaran: "Conceptual runs exist solely in the mind and, in fact, are subject only to those conditions that a particular mind chooses to impose on them" [Alper y Bridger 1997: 155].

[42] Owen le hace a Black la misma observación: "It is just the case here that Achilles' movements have been so described that they have no last term, but not so that no subsequent state of affairs is compatible with his having completed the series" [Owen 1970 (1957-8): 146].

[43] Para ofrecer un ejemplo ilustrativo y un tanto pintoresco, Benacerraf [1970 (1962): 119] propone una teoría física en la que el corredor se encoje proporcionalmente al tramo que resta conforme avanza en la carrera. Al final de ella, el corredor (que en este caso es un genio) desaparece, y por tanto se puede concluir que no alcanza el punto que limita los puntos indicados por el planteamiento de Zenón. Por supuesto, si semejante teoría permitiera la discontinuidad en el tamaño de los objetos, un feliz alcance de Aquiles a la tortuga también sería lógicamente consistente con la historia pasada.

Black sólo muestra que la realización de una infinidad de actos es una idea contradictoria, mas no que es una idea falsa. Como de una idea contradictoria es lógicamente válido derivar cualquier conclusión, es necesario probar que la idea de supertarea es falsa para poder concluir que Aquiles no alcanza al reptil.[44] Con esto, Wisdom argumenta que la aceptación de una secuencia infinita de actos de hecho constituye una premisa falsa, sosteniendo que una distancia física (en el sentido de realidad física) no puede ser descrita como lo hace la paradoja en cuestión, sino que tan sólo puede consistir en un número finito de puntos físicos reales. Argumenta con las siguientes palabras:

> *A physical point, unlike a mathematical point, has some size, though this may be as small as we please. But, however small a physical point, since it has some size greater than zero, an infinity of them cannot be packed into a finite distance.* […] *Hence an infinite geometric series is inapplicable to a physical distance. I. e. a physical race cannot be described by repeated bisection, or Zeno's premiss is false* [Wisdom 1970 (1951-2): 88].

La única propiedad física del punto físico que Wisdom describe es que tiene un tamaño mayor a cero. Pero, entonces, cabe preguntarle a Wisdom: ¿qué son los puntos físicos? Si pertenecen al mundo físico, y son objetos físicos, ¿cuál es su peso, cuál es su color, su carga eléctrica? ¿Son unos balines diminutos o son los cuerpos que se forman cuando la tinta de las marcas hechas con un bolígrafo muy fino se condensa? Aquí, Wisdom confunde la representación gráfica de un punto con el concepto de punto real. En la sección 1.2.2 ya se comentó que hay buenas razones para concebir los puntos como posiciones espaciales. Son entidades físicas en tanto el espacio es una entidad física. Nuevamente, la cuestión interesante no es si podemos reproducir en la realidad una carrera desglosada como Zenón lo propone, sino conocer las consecuencias para la teoría que tiene la modelización de dicha carrera.

Este finitismo basado en la realidad, pues, zanja (y trivializa) la cuestión muy rápido. Pero su principal fallo consiste en asumir, por parte del ser humano, un dominio entero de la realidad; lo que está todavía muy lejos de corresponder a la situación humana. Ya se subrayó (en la sección 1.2.2) que la inverificabilidad del infinito no implica su imposibilidad, incluso en el mundo en que habitamos (¿cómo es ese mundo, si es que ontológicamente existe fuera de nosotros, más allá de las teorías que hasta ahora se han desarrollado?). Los modelos, las ideas, que tenemos del espacio y el tiempo son, hasta cierto grado, modelos exitosos y útiles. Las paradojas de Zenón son importantes para conocer sus implicaciones, problemas y limitaciones. A este respecto, un aspecto interesante que se encuentra en las contribucines de Black (además de sus penetrantes planteamientos de supertareas) y Wisdom, es el haber hecho notar cómo las matemáticas actuales, adoptadas por las teorías físicas para modelar las diversas entidades reales, siguen siendo en algunos aspectos muy lejanas a las intuiciones más cotidianas.[45]

---

[44] Lo explica de la siguiente manera: "To prove that the premiss is self-contradictory does not by itself show that the conclusion is false. […] for from a self-contradictory premiss all inferences are valid. Thus his conclusion that Achilles never catches the tortoise is validly derived" [Wisdom 1970 (1951-2): 84].

[45] Que algunos conceptos matemáticos (en concreto el infinito) se encuentren lejos de nuestras intuiciones, pero no que son contradictorios, es también subrayado por Alper y Bridger: "It is not mathematics which stands in the way of the infinite, but rather the intuition that anything which requires the performance of an infinite number of acts is inherently unintelligible, if not self-contradictory" [Alper y Bridger 1997: 153].

1.3.2. La carrera *staccato*: trayectorias newtonianas para ejecutar supertareas

Aunque no se puede verificar definitivamente, todo parece indicar que, en el mundo real, el mundo que habitamos, un número infinito de acciones no se puede llevar a cabo durante un tiempo finito. Pero, ¿sería posible en un universo newtoniano? Es decir, ¿es consistente la realización exitosa de una supertarea con el movimiento continuo que asume la mecánica newtoniana? En este apartado veremos que esta pregunta merece una respuesta afirmativa.

Para ello, nos concentraremos en una interpretación de la carrera descrita en la paradoja distinta a la que habitualmente se hace, y distinta a la que hasta ahora aquí se ha considerado. Lo más normal es asumir que el corredor viaja, durante toda su carrera, con una velocidad constante. Así, cada punto nuevo que alcanza, lo hace sin detenerse. Bajo esta interpretación, el finitista que desafía a la actualización de una infinidad de puntos durante el recorrido puede objetar que, en semejante carrera (con velocidad constante) la infinidad de puntos nunca es actualizada. De la misma manera, tampoco es actualizada una infinidad de actos.

La interpretación de carrera que aquí vamos a tratar aclara estas cuestiones ya que considera que el corredor detiene su marcha una infinidad de ocasiones. Así, cada lapso temporal que el corredor se encuentra en un punto sin avanzar puede ser aprovechado para "actualizar" un punto. (Utilizo entrecomillados porque líneas arriba he explicado por qué hablar de la actualización de un punto no es lo más conveniente; en cambio, hablar de *representar* un punto no ocasiona problemas). Además, cada tramo de espacio recorrido, cada subcarrera, sin ambigüedad alguna puede considerarse un acto distinto del resto. Esta carrera intermitente fue originalmente propuesta por Grünbaum y, tomando el término que denomina el tañer un instrumento musical de manera discontinua, la titula la carrera *staccato*. Asumiendo que la carrera se desenvuelve en una unidad de distancia durante una unidad de tiempo, la describe de la siguiente manera:

> the motion of another runner who is presumed to traverse the same unit space interval in the same unit time […] runs *intermittently* as follows: he interrupts his motion by $\aleph_0$ pauses of rest whose successive durations have the following geometrically decreasing magnitudes: 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, …, and so on ad infinitum. Thus the latter intermittent motion, which I shall call the "staccato" run, will serve as our prototype of the $\aleph_0$ operations [Grünbaum 1970: 203].

Es decir, en primer lugar, durante ½ de unidad temporal, el corredor avanzará un tramo espacial durante ¼ de unidad y dejará de avanzar durante el próximo ¼ de unidad. En seguida, durante ¼ de unidad temporal, el corredor avanzará otro tramo espacial durante 1/8 de unidad temporal y dejará de avanzar durante el próximo 1/8 de unidad. Y así sucesivamente.[46]

Nótese que este planteamiento no hace caso al tamaño de los tramos que el corredor cubre. Para adaptarlo al planteamiento de Zenón, sólo hay que considerar que la suma de las distancias de cualquier subconjunto de tramos no supera alguna distancia finita. Por otro lado, en mecánica clásica una gran mayoría de las trayectorias de movimiento son aquellas que siguen funciones continuas no sólo en su función de posición, sino también en las funciones de velocidad y aceleración (o sea, que la función

[46] Otras fuentes, además de la original por Grünbaum, en donde se encuentra el planteamiento de la carrera son [Burke 2000b: 1-3], [Earman y Norton 1998b: 234], [Moore 1990: 3-4] y [Pérez Laraudogoitia 2006: 433-4].

de posición respecto del tiempo sea derivable, al menos una segunda vez, en todo el intervalo considerado).[47] Grünbaum [1970: 214-6] ofrece una función de velocidad, original de Richard Friedberg, que otorga estas propiedades a las trayectorias. La velocidad de Friedberg, además, hace que la velocidad promedio en cada subcarrera sea sucesivamente decreciente.[48] Dicha velocidad viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \frac{1}{IK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+2} e^{-n^2} \cdot g(2^{n+2}[t-1+2^{-n}]) \tag{1.6}$$

en donde

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\csc^2 \pi x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \text{ o } x \ge 1 \end{cases}, \tag{1.7}$$

$K = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$, $I = \int_0^1 g(t)dt$, y t es el tiempo. A partir de (1.7) se aprecia que, a fin de que el argumento de $g(x) \neq 0$, $0 < 2^{n+2}[t - 1 + 2^{-n}] < 1$, es decir, $1-\frac{1}{2^n} < t < 1-\frac{3}{2^{n+2}}$. O sea, sólo si t se encuentra dentro de uno y sólo de un intervalo $\left(1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{3}{2^{n+2}}\right)$, la velocidad del corredor tendrá un valor distinto de cero. Por otro lado, integrando (1.6) en cada uno de estos intervalos, es fácil ver que la distancia total recorrida en cada uno de ellos viene dada por $\frac{e^{-n^2}}{K}$.

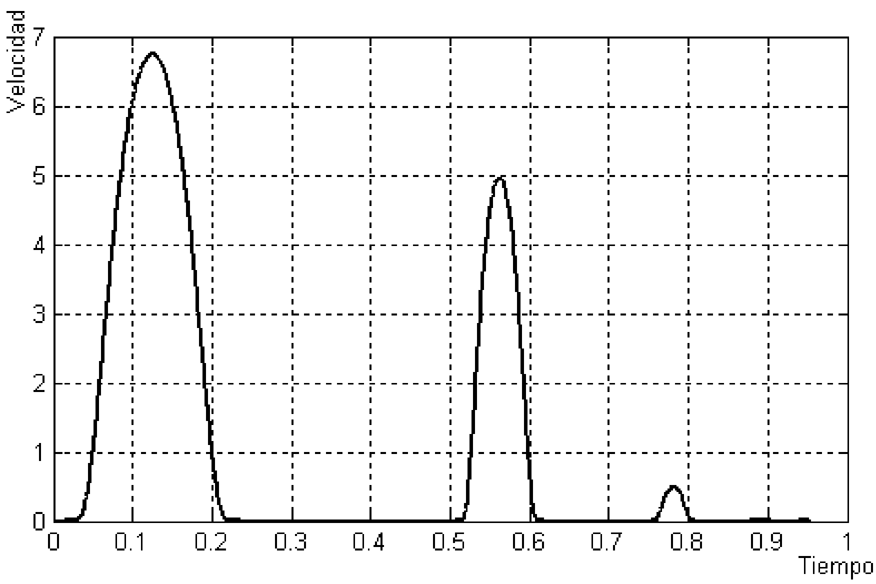


Figura 1.2. Comportamiento de la velocidad de Friedberg para la carrera *staccato* con respecto al tiempo.

Gráficamente, el comportamiento de la velocidad de Friedberg respecto del tiempo se encuentra representado en la Figura 1.2, donde se aprecia, para las primeras

[47] Hay excepciones a estas trayectorias. De hecho, las trayectorias de las supertareas que trataremos a partir del capítulo 4 presentan discontinuidades en la velocidad y aceleración; mas, en un sentido contemporáneo, es falso que no sean derivables. En la sección 4.2.5 se ofrece una explicación y justificación de este tipo de trayectorias para la mecánica clásica.

[48] Grünbaum nota que en una misma velocidad promedio para toda la carrera *staccato* produce una discontinuidad en la aceleración: "since there is a minimum velocity change (from zero to the average) during each of the $\aleph_0$ ever shorter time intervals, […] the acceleration function has an instant of infinite discontinuity at the terminal instant of rest-and-zero-acceleration" [Grünbaum 1970: 213].

subcarreras, los intervalos de tiempo en los que el corredor avanza. También se nota cómo a partir de la cuarta subcarrera la velocidad máxima que el corredor alcanza es bastante pequeña; esto no quiere decir que para alguna n muy grande la velocidad dentro del intervalo $\left(1-\frac{1}{2^n}, 1-\frac{3}{2^{n+2}}\right)$ sea cero, aunque así lo invite a pensar la representación limitada que aquí se presenta.

Ahora bien, bajo la misma función, también es posible modelar una carrera *legato* –nuevamente, se toma el nombre del tañido continuo de un instrumento– en la que el corredor realiza el mismo tipo de subcarreras, alcanzando una velocidad cero al final de cada una, pero sin detenerse por un lapso de tiempo. Sólo se "detiene" un instante.[49] Para este propósito, los cambios pertinentes para la velocidad de Friedberg hacen que ésta se exprese de la siguiente manera:

$$v(t) = \frac{1}{IK}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} e^{-n^2} \cdot g(2^{n+1}[t-1+2^{-n}])\,. \qquad (1.8)$$

El comportamiento de está función de velocidad se encuentra representado en la figura 1.3, en la que se aprecia una evolución tal como la hemos descrito.

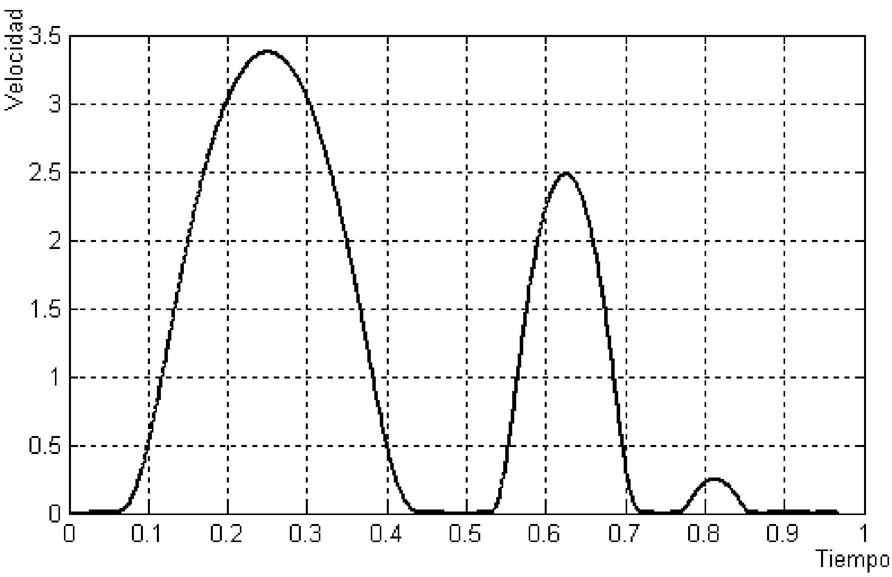


Figura 1.3. Comportamiento de la velocidad de Friedberg para la carrera *legato* con respecto al tiempo.

No hay ningún impedimento teórico para que un cuerpo reciba una fuerza que le imprima una velocidad según la función (1.6), o (1.8), en un universo newtoniano. Por lo tanto, en un universo tal, el corredor realiza una infinidad de carreras, cada una bien diferenciada de las otras, pudiéndosele considerar como un acto distinto de los demás. *En un universo newtoniano la ejecución de una supertarea es posible*.[50]

[49] En la sección 2.2.3 se hará ver que en algunas ocasiones no es exacto hablar de un estado instantáneo de movimiento o de reposo.

[50] Tras mencionar las particularidades de la velocidad de Friedberg, Earman y Norton llegan a la misma conclusión: "Newton's laws of motion then guarantee that the runner performs a supertask" [Earman y Norton 1998b: 234].

1.3.3. Dos objeciones a la carrera *staccato*

Ahora bien, la modelización de la carrera *staccato* (o *legato*) no está libre de objeciones. Burke defiende, precisamente, la idea contraria a la que se acaba mostrar en la sección anterior; a saber, que en un universo newtoniano es imposible ejecutar una carrera *staccato*:

> I argue that the [*staccato*] run is excluded by Newton's three laws of motion [Burke 2000b: 1].

Los argumentos de Burke son dos. Ambos apelan a la reversión temporal del proceso descrito por la velocidad de Friedberg, es decir, al proceso que consiste en la misma trayectoria sólo que recorrida en sentido contrario y con la correspondiente velocidad invertida para cada posición. Por otro lado, los dos argumentos cometen la misma falacia: atribuir una propiedad de las partes a la totalidad.

El primer argumento se basa en una modelización de la carrera que consiste en un número infinito de artefactos que provocan el movimiento de Aquiles. Cada uno de los artefactos (a los que llama *thrusters*) tiene la función de impulsar al corredor (que aquí se considera una masa puntual inerte, sin poder para autopropulsarse) la velocidad aceleradora de Friedberg correspondiente al intervalo de tiempo que transcurre. Una vez que alcanza la velocidad pico, el *thruster* deja de impulsar y Aquiles se desacelera por fricción, también bajo el patrón de Friedberg. Considerando que Aquiles inicia la carrera en la posición $x = 1$ con el objeto de terminarla en $x = 0$, Burke plantea su modelo con las siguientes palabras:

> For the purposes of this thought experiment, we'll think of Achilles as a point mass. And we'll imagine that each of the positive accelerations of Achilles is to result, not from his own efforts but from the eastward (1-ward) force exerted on him by a mechanical thruster. Located underground between each pair of successive Z-points is a thrusting device (one that is half as large in its east-west dimension as its successor to its east)[51]. As Achilles rests at each Z-point, the first thruster to his west rises from the ground behind him, and, at the appointed time, thrusts him forward from that Z-point (with just the accelerative force prescribed by Friedberg). When the thruster completes its thrust, Achilles is slowed by friction (at the rate prescribed by Friedberg) and thus brought to a stop at the next Z-point [Burke 2000b: 7].

De esta manera, una vez que el mecanismo entero termine su funcionamiento, es decir, cuando cada uno de los *thrusters* haya cumplido su función, Aquilles se encontrará en la posición $x = 0$. Así las cosas, Burke entonces propone una reversión temporal de este proceso, en el que Aquiles se encuentre inicialmente en $x = 0$ y todos los artefactos funcionen en la dirección opuesta. Observando este proceso, ofrece el siguiente argumento:

> where, at the end of the minute, do we find Achilles? It is obvious, I trust, that Achilles is still at the starting point. After all, no thruster propelled Achilles forward from that point. And Achilles did not propel *himself* forward from it. The infinity of thrusters to the east of Achilles would have propelled him on to point 1 if something had gotten him started. But the eastward thrusting thrusters to his east were

[51] Aquí Burke no toma en cuenta que los subintervalos espaciales bajo la velocidad de Friedberg no son los habituales ½, ¼, 1/8, etc. Este punto es irrelevante para su argumento.

powerless, individually and collectively, to exert a force on someone located to their west [Burke 2000b: 7].

El proceso revertido que Burke tiene en mente no se corresponde con el sistema del proceso original. Sin duda alguna, bajo el mecanismo de *thrusters* diseñado por Burke, Aquiles permanece en la posición inicial durante todo el funcionamiento de la maquinaria. No obstante, en el proceso original de Burke había un mecanismo responsable de imprimir fuerzas aceleradoras de la misma manera que había un mecanismo responsable de imprimir fuerzas desaceleradoras. Burke suprime este último mecanismo en su proceso revertido, logrando así sólo una reversión temporal de las trayectorias de los *thrusters* mas no de la trayectoria de Aquiles.[52] Pero, el hecho de que la trayectoria revertida de los *thrusters* no implique la trayectoria revertida de Aquiles, no implica que ésta no sea posible y acorde con la mecánica clásica.

De hecho, si también consideramos un mecanismo acelerador del proceso revertido correspondiente al mecanismo desacelerador del proceso original, podemos ver que la trayectoria revertida de Aquiles también es posible. Para este propósito, Pérez Laraudogoitia propone que cada uno de los *thrusters* (a los que él llama M_n, cada uno con el subíndice $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ correspondiente) realice tanto la función aceleradora como la desaceleradora.[53] Así las cosas, pone de manifiesto la falacia cometida por Burke:

> the fact that not M_n can take the particle away from $x = 0$ is not enough to conclude that – in the absence of any other possible influence – the particle cannot leave $x = 0$. We can actually consider the set of M_n as a new machine, 'super *M*', which obviously can exert a non-null force on the particle at points arbitrarily close to $x = 0$ […]. This is where the argument for dynamic impossibility breaks down. The M_n are individually incapable of setting somebody (Achilles) to their left in motion, but it does not follow that they are also incapable of doing so collectively. On the contrary, […] 'super *M*' has skills lacking in each individual M_n [Pérez Laraudogoitia 2006: 440-1].

Estoy de acuerdo. Así como en el proceso directo, del hecho de que ningún *thruster* M_n en particular deje a Aquiles en $x = 0$ no se sigue que el héroe no puede llegar a $x = 0$ bajo el efecto de la totalidad de M_n, en el proceso revertido tampoco se puede concluir que Aquiles no cambia de su posición $x = 0$ simplemente porque ningún *thruster* M_n en particular lo hace cambiar. Si la totalidad de las fuerzas involucradas en el mecanismo entero mueven a Aquiles de $x = 1$ a $x = 0$, la totalidad de las mismas fuerzas involucradas revertidas provocan el movimiento de Aquiles de $x = 0$ a $x = 1$. En cada uno de los tramos espaciales que Aquiles necesita recorrer para realizar la trayectoria revertida está bien identificado el *thruster* que actúa así como la velocidad que está imprimiendo.

---

[52] Pérez Laraudogoitia reconoce que apelar a fuerzas disipativas no justifica la conclusion de Burke: "in the presence of friction (and, therefore, of dissipative forces) the invariance of classical mechanics under temporal inversion breaks down, which means that Burke is not authorized to appeal to it to justify his conclusions" [Pérez Laraudogoitia 2006: 434]. En la sección 4.2.6 se profundizará este aspecto, y se pondrá de manifiesto la importancia de distinguir entre la reversibilidad de las trayectorias y la reversibilidad de los sistemas.

[53] Lo especifica en el siguiente pasaje: "I shall completely exclude the presence of forces of friction […], leaving to the mechanical thrusters the task of both accelerating and detaining Achilles" [Pérez Laraudogoitia 2006: 434].

El segundo argumento de Burke comete la misma falacia. También lleva a cabo su análisis al proceso revertido temporalmente, pero se concentra en el límite que tiene la dirección de la aceleración en el instante inicial de la carrera (al que llama T_0):

> Since the runner is initially at rest (and since there are to be no discontinuities in his speed), to head off in the direction of 1 he would have to *accelerate* himself in that direction, which is to say that his direction-of-acceleration function would have to have a right-hand limit at T_0 of 0º. But it will *not* have such a limit, if the runner runs as required, because the runner is required to vary between speeding up and slowing down (i.e., to vary between having a direction of acceleration of 0º and having one of 180º) infinitely often in every later neighborhood of T_0. Thus the runner is stymied. There is no way for him to begin his task [Burke 2000a: 216].

Se aprecia que, así como cada subcarrera de la carrera *staccato* tiene un límite en la dirección de la aceleración en el instante inicial, Burke exige un límite en la dirección de la aceleración en el instante inicial del proceso revertido entero. Nuevamente, comete el error de pensar que la carrera total, la totalidad de las carreras, tiene que compartir las propiedades que (incluso cada una de) las subcarreras manifiestan. Lo que no es ninguna necesidad. En cuanto a la falta de un límite para la dirección de la aceleración, la descripción de la carrera *staccato* está definida de esa manera, y así como el proceso original describe una posición final sin mostrar ningún límite entonces para la dirección de la aceleración, el proceso revertido muestra la misma falta de dicho límite en su posición inicial. Además, debemos tener presente que los procesos infinitos tienen algunas características (a veces contraintuitivas) que los procesos finitos no tienen. Este también es el caso de la carrera *staccato*. Una carrera compuesta de un número finito de subcarreras tiene en sus dos extremos una primera subcarrera y una última subcarrera, así como un límite para la dirección de la aceleración en cada extremo. En cambio, una carrera compuesta de un número infinito de carreras no tiene una primer subcarrera en al menos uno de sus extremos, y en ese extremo carente de una primera subcarrera también carecerá de un límite para la dirección de su aceleración.

Por otro lado, ¿cuál es el problema con que la dirección de la aceleración carezca de un límite? La cuestión que aquí Burke encuentra problemática es la presencia de una discontinuidad.[54] Antes de analizar el proceso revertido, comenta la carrera original (que comienza en $x = 1$ y termina en $x = 0$) y encuentra que la función de la dirección de la aceleración presenta una discontinuidad:

> Since the direction of the runner's acceleration changes from 0º to none to 180º to none infinitely often in every earlier neighborhood of *T*, his direction-of-acceleration function has no left-hand limit (and hence no limit) *at T*. Thus the function has a finite discontinuity at *T* [Burke 2000a: 211].[55]

---

[54] Es la discontinuidad, y no en la simple carencia del límite, el fundamento del argumento de Burke: "it is precisely by referente to certain direccional discontinuities that we can provide a strong argument for the *logical* impossibility of the staccato run" [Burke 2000a: 211].

[55] En el texto principal me concentro sólo en la discontinuidad que supuestamente presenta la función de la dirección de la aceleración porque me parece la más fuerte. Burke también señala una discontinuidad en la dirección de la trayectoria al final de la siguiente carrera *staccato* modificada: "let's ask the staccato runner to reverse direction after each of his aleph-null runs. He is to run exactly as specified by Grünbaum and Friedberg, except that he will run after each rest period in the direction opposite to the direction in which he ran after the preceding rest period. […] Now, since the direction of the back-and-forth runner changes from 0º (toward 1) to none (when the runner is at rest) to 180º (toward 0) to none infinitely often in every earlier neighborhood of T, his direction function has no left-hand limit at T. Thus that function has a finite discontinuity at T" [Burke 2000a: 212]. Pero entonces la discontinuidad señalada

Pero ésta es una asunción injustificada. En cinemática, nunca se ha exigido la continuidad de la dirección de la aceleración para las trayectorias legítimas.[56] Tan sólo se pide la continuidad de la función de la trayectoria, la función de la velocidad y la de la aceleración (y hay sus excepciones; confróntese sección 4.2.5). Pero lo peor de la asunción de Burke es que, si seguimos el concepto de continuidad exigido habitualmente a las funciones de aceleración, de velocidad o de posición, la dirección de la aceleración muestra discontinuidades en cada una de las subcarreras, incluso si tomamos cada una de ellas aisladamente.

La continuidad cinemática es la continuidad propia del cálculo infinitesimal. Y dicha continuidad en cálculo consiste no solamente en que una función tenga un límite en cada uno de los elementos de un dominio real (un intervalo de tiempo, por ejemplo), sino que el valor de dicha función en todos los puntos evaluados sea igual al límite de esa función en ese punto (véase [Christie 1976: 90-1] o [Hughes-Hallett *et al* 2005: 54]). Así las cosas, tómese el instante de cualquier subcarrera del *staccato* en el que la velocidad alcanza una magnitud máxima. En dicho instante, la dirección de la aceleración es nula. Pero, el límite desde la izquierda es 0º. Peor aún, el límite desde la derecha es 180º. Sin duda alguna, en cada subcarrera hay una discontinuidad de la función de la dirección de la aceleración. Este tipo de discontinuidades se encuentran en situaciones tan elementales como el lanzamiento libre de un objeto en dirección contraria a la dirección de algún campo gravitatorio (por ejemplo, arrojar una piedra hacia arriba desde la superficie terrestre sufre una discontinuidad en la dirección de su velocidad al volver hacia la superficie). La discontinuidad (en el sentido que se le da a la continuidad para las funciones que describen el movimiento en mecánica clásica) de la dirección de la aceleración o de la velocidad, pues, no es un criterio justificado para desacreditar la carrera *staccato*.

1.4. Sí es factible una supertarea bajo el movimiento continuo en mecánica newtoniana

El recorrido hecho en este capítulo por algunos argumentos que conciernen a la paradoja de Aquiles o a la dicotomía saca a la luz varios aspectos importantes que conviene tener presentes en los siguientes capítulos (e incluso en análisis de supertareas que este trabajo no incluye). Problemas similares surgirán, y por tanto no será extraño que dichos problemas merezcan reflexiones similares (aunque no es necesario por esto que la solución sea similar o análoga). Este capítulo, pues, proporciona un aprendizaje que nos ayudará a afrontar los problemas en los siguientes capítulos. Los puntos a tener en cuenta son los siguientes.

---

aquí no es invariante ante las transformaciones galileanas. Hay una infinidad de marcos de referencia inercial (cualquiera que viaje con una velocidad en dirección contraria y magnitud mayor a la velocidad pico de mayor magnitud en la carrera) en los que esa misma carrera presenta en todo momento una trayectoria hacia la misma dirección, y por lo tanto no hay tal discontinuidad en el punto final de la carrera.

[56] El mismo Burke reconoce que la literatura en cinemática nada dice al respecto: “So far as I can discover, the literature on kinematics does not address the kinematics acceptability of those discontinuities” [Burke 2000a: 211]. En una segunda ocasión: “Do these discontinuities mean that the back-and-forth run violates requirements recognized within kinematics? To this question I cannot offer a definite answer, since I have found in the literature on kinematics nothing that addresses the kinematic acceptability of the discontinuities in question” [Burke 2000a: 212].

1.- *La historia del planteamiento de Zenón no incluye el desenlace. Bajo las consideraciones hechas por Zenón, tanto el éxito de Aquiles como su fracaso en alcanzar a la tortuga son lógicamente consistentes con la historia que plantea*. No fue hasta que asumimos, adicionalmente al planteamiento original, una teoría del movimiento concreta y no intuitiva cuando pudimos establecer un estado concreto para Aquiles en el primer instante que ya no pertenece a la descripción del planteamiento. Replanteada la paradoja en un universo newtoniano, el estado dinámico en el instante límite a la descripción (que vendría caracterizado por la posición, la velocidad y la aceleración en ese instante), es consecuencia de la historia descrita (e interpretada con rigor, es decir, estableciendo una trayectoria concreta acorde con la historia) por el planteamiento junto con las leyes, postulados y consideraciones que hace la mecánica newtoniana.

2.- *Los conjuntos, procesos o sistemas infinitos tienen algunas características radicalmente distintas que sus subconjuntos, subprocesos o subsistemas finitos.* Ignorarlo puede conducir a razonamientos inválidos; y hay que cuidarse de no caer en ello. Esto es algo ya ampliamente sabido desde el desarrollo de la teoría de conjuntos. El mismo Cantor, creador de dicha teoría, se percató de semejantes propiedades en los conjuntos infinitos. Un ejemplo paradigmático lo ofrece la aritmética de números cardinales. La suma, por ejemplo, de dos cardinales finitos se obtiene operando una suma de la misma manera que como se lleva a cabo en aritmética elemental; en cambio, de la suma de dos cardinales infinitos resulta el mayor de los sumandos. Esto es consecuencia de definir la suma de cardinales como la cardinalidad del conjunto unión de cualquier par de conjuntos con cardinalidad igual a la de los sumandos.[57] En la paradoja de Aquiles, la peculiaridad de los conjuntos infinitos emerge al no encontrar un último punto que alcanzar o un último trecho que recorrer (o un primero, en la versión regresiva). Todo nuevo punto lo alcaza cuando recorre un trecho bien determinado, o bien, cuando recorre un subconjunto finito de trechos sucesivos bien determinado. La falacia de composición se comete cuando se atribuye al conjunto infinito de tramos una propiedad de cada uno de los subconjuntos sucesivos y finitos de tramos: atribuir al corredor como punto final el último punto del último tramo porque en los subtramos finitos el punto final del corredor coincide con el punto final del último tramo. Y al no encontrar dicho punto –que no se encuentra simplemente porque no existe– concluir que la carrera no tiene final. Por supuesto, la puesta en evidencia de esta falacia tampoco nos demuestra la conclusión contraria. Cuando fue el caso, la conclusión contraria se demostró teniendo en cuenta otras consideraciones. En este capítulo, hemos visto que la misma forma de razonar falazmente se comete cuando se defiende que la solución aritmética no resuelve la paradoja. También la cometen los dos argumentos de Burke en contra de la carrera *staccato*.

3.- *La mecánica clásica no demuestra la posibilidad, bajo las trayectorias continuas de un universo newtoniano, de atravesar una infinidad de puntos*. Sí, una de las asunciones fundamentales (pero quizás sin ningún fundamento, más allá de su enorme utilidad y riqueza) es que el espacio y el tiempo son continuos. Ante cualquier movimiento, pues, el objeto tendrá que atravesar una infinidad de puntos y una infinidad de instantes. Y concluir, tras un argumento que considera los principios y asunciones de la mecánica newtoniana, la posibilidad de atravesar una infinidad de puntos no es más que caer en una argumentación circular de lo más elemental: se concluye algo que ya se presupone. Por su parte, la asunción de un espacio y un tiempo continuo conduce a un problema en la definición de contacto entre cuerpos (en la sección 4.2.4 se profundizará

[57] Véase, por ejemplo, en el mismo Cantor [1915 (1895): 91 (485)] o en [Komjáth y Totik 2006: 52 y 266].

esta cuestión). Pero, por otro lado, es un modelo espacial y temporal sumamente eficaz, simple[58] y exitoso en la práctica científica.

4.- *La mecánica clásica sí demuestra la posibilidad, en un universo newtoniano, de realizar una infinidad de actos*. Esta idea es la principal contribución del modelo de trayectoria continua newtoniana descrito en la carrera *staccato*. Nos describe en qué momento se está llevando a cabo cada uno de los actos infinitos separados y distintos del resto de actos y nos dice, además, claramente el resultado final de semejante carrera. Esta trayectoria nos permitirá diseñar modelos newtonianos (en el capítulo 3) de supertareas que en un principio presentaban un final problemático y paradójico. Nos ayudará, también, a encontrar un desenlace concreto para dichos procesos según el modelo que se adopte.

[58] Forrest [1995] presenta un desarrollo del espacio y el tiempo discretos, en el que incluso se propone una definición de velocidad basada en derivadas. Allí salta a la vista una alta complejidad de dicho desarrollo, comparada con la simplicidad (auque a veces contraintuitiva) de la continuidad del espacio y el tiempo.

2. Continuidad, estado de movimiento instantáneo y relatividad: tres aspectos relevantes en mecánica newtoniana ante tres paradojas de Zenón

En este capítulo nos detendremos a aclarar tres aspectos de suma importancia para las supertareas enmarcadas en un mundo según la mecánica clásica. Son aspectos propios de la mecánica newtoniana que, por un lado, son problemáticos (y por ello la existencia de paradojas en referencia a ellos) y, por el otro, son cruciales para la comprensión de las trayectorias continuas de los procesos newtonianos que se tratarán en los próximos capítulos.

Ya se vio en el capítulo anterior (y concretamente en las secciones 1.2.3 y 1.2.5) que una de las asunciones cruciales para conocer el lugar de Aquiles y de la tortuga en el primer instante ajeno a la historia planteada de su carrera es la continuidad de la trayectoria con la que ambos personajes se mueven. Este es el primer aspecto que a continuación vamos a tratar. Se verá que la naturaleza de la continuidad de un espacio euclidiano no es favorable a lo que nuestras intuiciones nos dicen. En concreto, se mostrará, atendiendo a la paradoja de la división en todo lugar, y dando un argumento ilustrativo, que una trayectoria entendida como un conjunto continuo de posiciones es en esencia un conjunto de posiciones infinitamente fragmentado. La adyacencia o contigüidad de las posiciones de una trayectoria continua no es más que una intuición incorrecta con origen en la representación gráfica habitual de tal trayectoria. Las trayectorias continuas, según la mecánica clásica, son las únicas trayectorias que los objetos en movimiento pueden tomar y, por ello, aparecerán una y otra vez a lo largo de este trabajo.

El segundo aspecto a tratar es el estado instantáneo de movimiento. En mecánica clásica constantemente se habla de estados instantáneos que se concretan con el valor que toman las diversas propiedades de la trayectoria con que el cuerpo se mueve (posición, velocidad, aceleración). Sin embargo, nuestras intuiciones nos sugieren que tales propiedades informen sobre un estado de movimiento o de reposo. El planteamiento más agudo de la problemática es precisamente la paradoja de la flecha.

Se mostrará que en la mayoría de los casos se puede hablar coherentemente de un estado instantáneo de movimiento (o de reposo), mas que en el resto es preciso hablar de un estado de transición. Este último es el caso para el instante en el que ocurren algunas colisiones instantáneas elásticas, tipo de colisiones en las que se basan las supertareas newtonianas que este trabajo estudia.

Ambos aspectos, la continuidad de una trayectoria y los estados instantáneos, tienen una relación directa con el infinito. Una trayectoria continua es una sucesión infinita de posiciones con el mismo orden que los reales, y un estado instantáneo es la situación de un objeto en un instante de tiempo que pertenece a un lapso de tiempo también continuo. En cambio, la relatividad de Galileo, el tercer aspecto que abordaremos en este capítulo, no tiene una relación directa con el infinito. Indirecta sí, ya que muestra cómo el encuentro de dos cuerpos enfrentados requieren de un espacio infinitamente dividido. Por otro lado, en los capítulos que trataremos con supertareas newtonianas, mostrará ser un aspecto importante al que constantemente acudiremos (en la nota 55 del capítulo 1 ya hemos acudido a él para refutar una objeción de Burke a la carrera *staccato*). Este aspecto emerge en el análisis de la paradoja del estadio, ya que es la herramienta más utilizada (además de ser satisfactoriamente intuitiva) para resolverla. De esta manera, cerramos nuestro recorrido por las paradojas del movimiento planteadas por Zenón.

Cabe añadir que las contraintuiciones generadas por una trayectoria continua no deben ser motivo de sospecha. Y es que la estructura continua de las trayectorias también tiene intuiciones a su favor. Para ilustrarlo, a la hora de tratar con la paradoja de la flecha y del estadio, se considerará la concepción discreta (o atómica) del espacio y el tiempo.

La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, en el apartado 2.1 se trata con la continuidad de la línea recta (ejemplo de una trayectoria) atendiendo a la paradoja de la división en todo lugar. En la sección 2.1.1 se plantea dicha paradoja y se explican diversos modos de llevar a cabo el proceso infinito que el planteamiento sugiere. En seguida, en la sección 2.1.2, se analiza un proceso de división infinita que consiste en fragmentar y separar entre sí subsegmentos de la misma línea. Tras esto, en la sección 2.1.3, se muestra que una línea continua puede ser el resultado de haber ejecutado la división infinita con éxito. En segundo lugar, en el apartado 2.2 se trata con el estado instantáneo de movimiento atendiendo a la paradoja de la flecha. En la sección 2.2.1 se plantea la paradoja y la solución que tradicionalmente se brinda. En seguida, en la sección 2.2.2, se plantea la paradoja considerando el movimiento en un espacio y tiempo discretos, y se muestra que la conclusión paradójica se obtiene tras un razonamiento falaz. Tras esto, en la sección 2.2.3, se analizan los conceptos de velocidad y aceleración como posibles criterios para establecer un estado instantáneo de movimiento, concluyendo que ninguno de ellos es satisfactorio. Allí también se muestra que, a pesar de lo último, podemos establecer estados instantáneos de movimiento si atendemos a la trayectoria del móvil. Finalmente, en el apartado 2.3 se trata con la relatividad de Galileo y la paradoja del estadio. En la sección 2.3.1 se reconstruye (a partir de Aristóteles) la versión más aceptada de la paradoja. En seguida, en la sección 2.3.2, se plantea la paradoja considerando en movimiento en un espacio y tiempo discretos y se hace notar una implicación contraintuitiva que esto tiene para el movimiento. Tras esto, en la sección 2.3.3, se acude a las transformaciones de Galileo para resolver la paradoja.

2.1. La paradoja de la división en todo lugar: el continuo dividido

Este apartado busca aclarar la siguiente cuestión: *la continuidad gráfica de la línea es una idea distinta de la idea de continuidad geométrica de la línea*. Por un lado, la continuidad geométrica de una línea consiste en el orden requerido (en geometría analítica elemental, que es la utilizada para modelar las trayectorias en mecánica newtoniana) por los elementos de un intervalo real y que comparte todo el conjunto de puntos que pertenecen al segmento de línea. Por el otro lado, la continuidad gráfica de un línea es una idea intuitiva que surge de la construcción que se lleva a cabo con mayor facilidad de la representación gráfica de una línea: realizar un solo trazo desde un extremo a otro de la línea, sin despegar el instrumento de trazado del lienzo (o el papel o lo que sea) durante todo el trazo. A este trazo se le llama un trazo continuo. De esta manera, y hablando *gráficamente*, la continuidad geométrica de una línea consiste precisamente en una discontinuidad total, en un tramo espacial infinitamente discontinuo, infinitamente dividido, que requiere de una infinidad de trazos. Evidentemente, debido a la limitada capacidad del instrumento de trazado para adelgazar su trazo, esta característica distintiva de la continuidad geométrica es imposible de representarla fidedignamente. Por supuesto, estas características distintivas entre la continuidad geométrica y la continuidad gráfica no son algo ignorado. Grünbaum, por ejemplo, lo expone con claridad:

> The "continuity" of the *sensed* linear expanse consists essentially in its failure to exhibit visually noticeable gaps as the eyes scans it from one of its extremities to the other. There are no *distinct* elements in the sensed "continuum" of which the seen line presents itself as a structured aggregate. By contrast, the continuity of the Cantorean line consists precisely in the complicated structural relatedness of (point) elements which is specified by the postulates for real numbers [Grünbaum 1967 (1970): 190].

A pesar de esto, sigue habiendo explicaciones del orden continuo que lo describen como aquel orden que no deja huecos:

> Very roughly: an imposition of order on a set of things is *continuous* when it is not only true that between any two of them there is a third, but also that there are no 'gaps' [Moore 1990: 69].

Efectivamente, esta explicación es tan tosca (*rough*) que, si definimos los huecos (*gaps*) como los espacios vacíos de distancia $l > 0$ cuando $l \in \mathbf{R}$, entonces cualquier línea con elementos ordenados sólo densamente también es continua, ya que no se encuentran huecos de ese tipo. Lo peor es que, si definimos los huecos como los espacios vacíos de distancia $l > 0$ y $l < |x|$, cuando x es cualquier número real, ni siquiera el orden continuo se salva de poseer semejantes huecos.

Eso es precisamente lo que demuestra el análisis no-estándar: que podemos considerar otros números (a los que llama hiperreales) además de los considerados por un orden continuo manteniendo la consistencia lógica; que podemos considerar, sin incurrir en ninguna contradicción, números mayores al cero pero menores a cualquier número real mayor a cero.[59] Ciertamente, este es el motivo por el que Moore

[59] Una referencia recomendable, por su claridad, del análisis no-estándar es [Henle y Kleinberg 1979: 25-41]. Allí mismo se puede corroborar que, incluso añadiendo los hiperreales a los reales, la línea recta

entrecomilla el término ‘*gaps*’, reconociendo así que en un orden continuo no es exacto decir que no quedan huecos.[60]

A pesar del reconocimiento de la diferencia entre la continuidad gráfica y la continuidad geométrica, dicha diferencia es tan contraintuitiva que sigue ocasionando errores. Por ejemplo, en una contribución nada lejana en el tiempo, Glazebrook ignora la distinción en cuestión, llegando entonces a una conclusión incorrecta:

> A feature of density is that no two points touch, since they are always separated by more points. Density therefore precludes continuity [Glazebrook 2001: 201].

Pues bien, a continuación realizaré un análisis con el fin de apartar por completo la idea de continuidad gráfica de la idea de continuidad geométrica. El análisis que a continuación se hace, y que parte del planteamiento de la paradoja de la división en todo lugar, además de eliminar una ambigüedad presente en una de las respuestas brindadas por Bostock a la paradoja, resulta altamente ilustrativo para mostrar la diferencia entre la continuidad gráfica y geométrica (pues se vale a su vez de representaciones gráficas), contribuyendo así a disolver la contraintuición y, con esto, a evitar futuros errores. Con ello, comprenderemos con mayor claridad qué es la continuidad propia de cualquier trayectoria en mecánica clásica.

2.1.1. El planteamiento de la paradoja: ¿qué resulta de una línea infinitamente dividida?

Asumamos (como es ampliamente asumido) que un segmento finito y extenso de línea recta es infinitamente divisible. Cualquier segmento extenso producto de una división es a su vez divisible *ad infinitum*. Asumamos entonces que dicho segmento es sometido a un proceso que lo divide en su totalidad. En ese caso, es justo preguntarse:

(1) ¿Qué es lo que queda del segmento original?

No pueden ser segmentos extensos porque el proceso de división total no se habría completado. Pero tampoco pueden ser objetos inextensos, pues segmentos sin extensión no pueden componer un segmento extenso. Paradoja.[61]

Bostock enfrenta este problema adoptando cuatro perspectivas distintas y sugiere una respuesta para cada caso. Dichas perspectivas se basan en dos maneras de concebir la división de la línea y en dos maneras de concebir una división infinita de la línea. Presupone –y por esto es importante para nuestros objetivos– que la línea se encuentra

---

tampoco es continua en el sentido intuitivo, pues también es posible asumir consistentemente un sistema de hiperhiperreales (confróntese los teoremas en [Henle y Kleinberg 1979: 121-2]). Por demás, también se puede comprobar en [Henle y Kleinberg 1979: 43-9] que el concepto de continuidad geométrica discutido en el texto principal se corresponde también con la continuidad de los *reales* considerada por el análisis no-estándar.

[60] En el siguiente párrafo al que contiene el fragmento citado en el texto principal, Moore añade: “*non-standard analysis* […] conferred sense on the notion of an infinitesimal greater than 0 but less than any finite number” [Moore 1990: 69]. En una reciente contribución, Byers explica siguiendo los mismos pasos. En primer lugar sugiere que un orden continuo no tiene huecos: “Does the completeness of the real numbers actually guarantee that the real line has “no gaps”? Most mathematicians would say that it does” [Byers 2007: 232]; pero enseguida menciona el sistema de los hiperreales para afirmar, refiriéndose a él, que “in this system, even the real numbers have “gaps”!” [Byers 2007: 232].

[61] El mismo planteamiento de la paradoja se puede encontrar en [Bostock 1988: 260-1], [Harrison 1996: 273-4], [Moore 1990: 5] y [Sorabji 1983: 336-7].

en un espacio continuo. Las dos maneras de dividir la línea infinitamente es: 1) dividir la línea en cada punto que pertenece a un conjunto infinito numerable de puntos, y 2) dividir la línea en cada punto que pertenece a un conjunto infinito no numerable de puntos. Las dos maneras de llevar a cabo una división en una línea son: a) suprimir puntos de un segmento continuo de tal manera que cada segmento que ocupe el intervalo $[x_s, x_e]$ ocupará, tras la división, los intervalos $[x_s, x_w)$ y $(x_w, x_e]$ (naturalmente, $x_s < x_w < x_e$); y b) fragmentar y separar el segmento de la línea en dos segmentos de tal manera que, tras la división, cada segmento que ocupaba originalmente el intervalo $[x_s, x_e]$ ocupará los intervalos $[x_s, x_1)$ and $[x_2, x_3]$ del espacio unidimensional, con $x_s < x_e$, $x_s < x_1 < x_2 < x_3$ y $x_e + x_2 = x_3 + x_1$.

De esta manera, tenemos las cuatro perspectivas: 1a), 1b), 2a) y 2b); cada proceso de división infinita –1) y 2)– que, por un lado, realiza sus divisiones de tipo a) y, por el otro, divisiones de tipo b). Aquí trataré exclusivamente la infinita división de tipo 1b), el proceso que lleva a cabo un número infinito contable de divisiones de tipo b) sobre la línea. Por simplicidad, y para favorecer el objetivo ilustrativo de este apartado, también seguiré la sugerencia hecha por Bostock que consiste en considerar que el proceso entero dobla la distancia original entre los extremos (que aquí llamo x_s, de *startpoint*, y x_e, de *endpoint*). La respuesta a (1) que Bostock ofrece considerando el proceso de división 1b) es la siguiente:

> *there will be no complete line-segment remaining*, but we will not have separated any point of the original line by any definite gap from all of its former neighbours. That is, for any point of the line, and any distance you care to take, however small, there will be still be points of the original line within that distance of the given point [Bostock 1988: 262, mis cursivas].

Todo lo que dice Bostock en esta cita me parece correcto, excepto el primer enunciado –escrito en cursivas–, con el que discrepo profundamente.[62] Precisamente, lo que aquí voy a mostrar es que, una vez terminado un proceso como 1b), lo que resulta es un segmento completo y continuo de línea recta. Un segmento de línea recta continuo que dobla la distancia del segmento original.

2.1.2. Un proceso ilustrativo de división infinita

Analicemos ahora cómo sería un proceso de división infinita de tipo 1b), añadiendo la condición de que la operación entera dobla la distancia entre los extremos del segmento original, x_s y x_e. Supongamos también que esta división infinita se lleva a cabo en etapas, un número infinito de etapas, y, adoptando el estilo de Zenón, que cada etapa se divide por la mitad cada segmento de línea que se encuentra.

En el comienzo tendremos un segmento de línea que ocupa el intervalo $[x_s, x_e]$ entero. En la primera etapa, este segmento de línea se dividirá por la mitad, de lo que resultarán dos segmentos de línea que ocupan respectivamente los intervalos $\left[x_s, \frac{x_s + x_e}{2}\right)$

[62] Aquí se podría objetar que Bostock nunca dice que no se obtiene un segmento de línea continuo, sino sólo que no queda ninguno de los segmentos que gradualmente decrecen durante el proceso. De hecho, comenta que “we have ‘broken up’ the original line into ‘nothing but points’ and […] line with magnitude can indeed be put together from points without magnitude, provided there are ‘enough’ of them” [Bostock 1998: 262], lo que sugiere que no niega la posibilidad de aceptar un solo segmento de línea como resultado del proceso. Lo cierto es que Bostock tampoco dice la idea contraintuitiva: que lo que se obtiene tras el proceso es un solo segmento de línea; que es precisamente lo que yo aquí sostengo.

y $\left[x_e, \frac{3x_e - x_s}{2}\right]$. Cada uno de estos segmentos de línea serán divididos por la mitad en la segunda etapa, de lo que resultarán cuatro segmentos de línea que respectivamente ocuparán los intervalos $\left[x_s, \frac{3x_s + x_e}{4}\right)$, $\left[\frac{2x_s + 2x_e}{4}, \frac{x_s + 3x_e}{4}\right)$, $\left[x_e, \frac{5x_e - x_s}{4}\right)$ y $\left[\frac{6x_e - 2x_s}{4}, \frac{7x_e - 3x_s}{4}\right]$. Si seguimos dividiendo de esta manera, en la tercera etapa obtendremos ocho segmentos de línea que ocuparán respectivamente los intervalos $\left[x_s, \frac{7x_s + x_e}{8}\right)$, $\left[\frac{6x_s + 2x_e}{8}, \frac{5x_s + 3x_e}{8}\right)$, $\left[\frac{4x_s + 4x_e}{8}, \frac{3x_s + 5x_e}{8}\right)$, $\left[\frac{2x_s + 6x_e}{8}, \frac{x_s + 7x_e}{8}\right)$, $\left[x_e, \frac{9x_e - x_s}{8}\right)$, $\left[\frac{10x_e - 2x_s}{8}, \frac{11x_e - 3x_s}{8}\right)$, $\left[\frac{12x_e - 4x_s}{8}, \frac{13x_e - 5x_s}{8}\right)$, y $\left[\frac{14x_e - 6x_s}{8}, \frac{15x_e - 7x_s}{8}\right]$. En general, en la etapa de división n ($n \in \mathbf{N}_0$), resultarán 2^n segmentos de línea que ocuparán respectivamente los intervalos

$$\left[x_s, \frac{(2^n - 1)x_s + x_e}{2^n}\right),$$

$$\left[\frac{(2^n - 2)x_s + 2x_e}{2^n}, \frac{(2^n - 3)x_s + 3x_e}{2^n}\right),$$

$$\vdots,$$

$$\left[\frac{(2^n - (2^{n+1} - 4))x_s + (2^{n+1} - 4)x_e}{2^n}, \frac{(2^n - (2^{n+1} - 3))x_s + (2^{n+1} - 3)x_e}{2^n}\right)$$

y

$$\left[\frac{(2^n - (2^{n+1} - 2))x_s + (2^{n+1} - 2)x_e}{2^n}, \frac{(2^n - (2^{n+1} - 1))x_s + (2^{n+1} - 1)x_e}{2^n}\right].$$

Ahora bien, no es necesario asumir que, para obtener 2^n segmentos de línea, tenemos que ejecutar las divisiones recién descritas en n etapas. El proceso que se acaba de describir sirve sólo para fines explicativos, para ver claramente cómo se llevan a cabo las divisiones. Así, y puesto que no estamos haciendo ninguna consideración cinemática, también podemos asumir que el segmento de línea original se divide en 2^n (independientemente del n que se escoja) segmentos de línea en una sola etapa.

Sigamos considerando el proceso en etapas. Con el fin de dar una respuesta a la pregunta (1), consideremos ahora la localización que cada punto adquiere tras las divisiones realizadas en cada etapa. Tomemos un punto P del segmento original, posicionado en x_0; así $x_e \leq x_0 \leq x_s$. En la primera etapa, si x_0 es más pequeño que el punto medio del segmento original, es decir, si $x_0 < \frac{x_e - x_s}{2}$, entonces P mantendrá su posición x_0. Pero si x_0 es mayor o igual al punto medio, entonces P tomará la nueva posición $x_1 = x_0 + \frac{x_e - x_s}{2}$, será trasladado una distancia $\frac{x_e - x_s}{2}$ a la derecha de su posición original (asumiendo, claro está, que la región positiva del espacio unidimensional se encuentra a la derecha). En la segunda etapa, lo mismo ocurrirá con los puntos de los segmentos que resultaron de la primera etapa. Si P está posicionado en un punto menor que el punto medio del segmento izquierdo, entonces mantendrá su posición, que todavía será x_0. Si P es un punto del segmento izquierdo y se encuentra en una posición mayor o igual que el punto medio de ese segmento, entonces será trasladado a $x_2 = x_0 + \frac{x_e - x_s}{4}$. Si P pertenece al segmento derecho y está localizado en un punto menor al punto medio del segmento, entonces mantendrá la posición $x_0 + \frac{x_e - x_s}{2}$, pero si está localizado en un punto mayor o igual al punto medio de ese segmento, entonces tomará la posición $x_2 = x_0 + \frac{x_e - x_s}{2} + \frac{x_e - x_s}{4} = x_0 + \frac{3(x_e - x_s)}{4}$. En cada etapa tendremos el mismo patrón: si P se encuentra en una posición menor al punto medio del segmento resultado de la etapa anterior, entonces P mantendrá la posición adquirida (o mantenida) en la etapa anterior; si P se encuentra en una posición igual o mayor al punto medio del segmento resultado en la etapa anterior, entonces será trasladado a la derecha una distancia igual a la mitad de la distancia del segmento obtenido en la etapa anterior (véase la figura 2.1 para las primeras tres etapas).

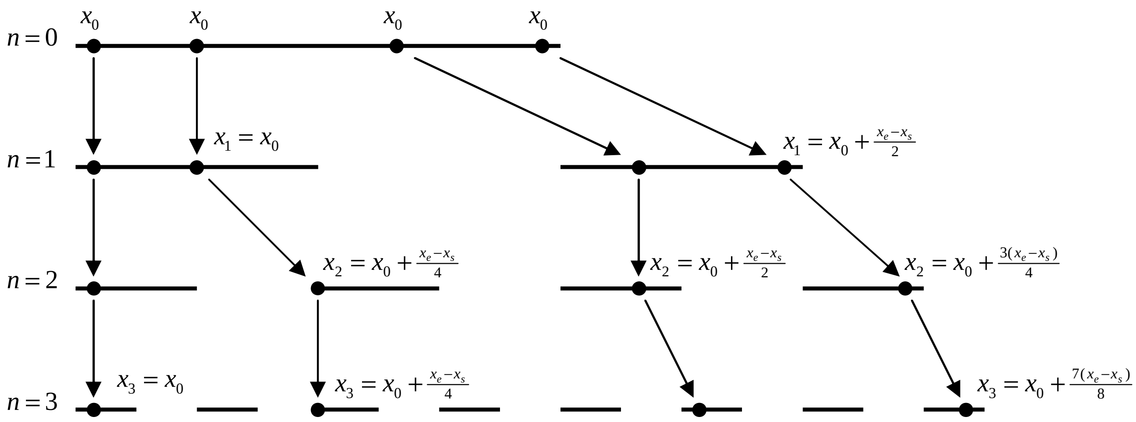


Figura 2.1. Posición que van tomando diversos puntos en las primeras tres etapas del proceso infinito de división.

Nótese que en cada etapa, P termina trasladado a la derecha de la posición original x_0 una distancia igual a la distancia de cada segmento que resulta en esa etapa multiplicada por el número de veces que cabe la distancia de cada segmento de línea resultado en esa etapa en la distancia que hay entre la posición original x_0 y el extremo derecho original x_s. Es decir, en la etapa n, el punto P, originalmente posicionado en x_0, tomará la posición

$$x_n = \begin{cases} x_0 + \frac{x_e - x_s}{2^n} Int\left(\frac{2^n (x_0 - x_s)}{x_e - x_s}\right) & \text{para todo } x_0 \in [x_s, x_e) \\ 2x_e - x_s - \frac{x_e - x_s}{2^n} & \text{cuando } x_0 = x_e, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde *Int* es la función *Int*: **R**→**Z** que mapea cualquier número real al número entero más grande menor o igual que dicho número.

Ahora sabemos la posición precisa que cualquier punto P localizado originalmente en x_0 tomará en la etapa n. Y ahora podemos preguntarnos dónde está todo punto P una vez que se ha ejecutado la división infinita. Tiene que estar en algún lugar pues, el tipo de división que estamos considerando, no suprime los puntos del segmento original. Es razonable pensar que la posición final la tomará en el límite de x_n cuando $n \to \infty$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 2x_0 - x_s \tag{2.2}$$

Para ver que éste es el límite, basta con probar que $|(2x_0 - x_s) - x_n| < \varepsilon$, cuando ε es un número real tan grande como se quiera. Por la definición de *Int*, sabemos que

$$x_s + \frac{x_e - x_s}{2^n} Int\left(\frac{2^n (x_0 - x_s)}{x_e - x_s}\right) \le x_0 < x_s + \frac{x_e - x_s}{2^n} Int\left(\frac{2^n (x_0 - x_s)}{x_e - x_s} + 1\right),$$

lo que equivale a

$$0 \le x_0 - x_s - \frac{x_e - x_s}{2^n} Int\left(\frac{2^n (x_0 - x_s)}{x_e - x_s}\right) < \frac{x_e - x_s}{2^n}. \tag{2.3}$$

Y entonces el límite queda probado: si hacemos que $\varepsilon = \frac{x_e - x_s}{2^n}$, un número real que sin duda es tan pequeño como se quiera (basta tomar un n lo suficientemente grade), y percatarse de que $x_0 - x_s - \frac{x_e - x_s}{2^n} Int\left(\frac{2^n (x_0 - x_s)}{x_e - x_s}\right) = |(2x_0 - x_s) - x_n|$, por lo que la desigualdad derecha de (2.3) puede reescribirse como $|(2x_0 - x_s) - x_n| < \varepsilon$.

Ahora sabemos la posición exacta que cada punto que pertenece originalmente a cualquier segmento continuo de línea toma cuando éste se somete al tipo de división infinita que aquí describimos.

2.1.3. Una línea continua como resultado de una división infinita

Ante el proceso descrito en la sección anterior, es preciso ahora dar respuesta a la pregunta: ¿qué queda del segmento original de línea continua tras el proceso de infinita división? La respuesta es: *un segmento de línea continua que dobla la distancia del segmento original*. Cada punto contenido en el segmento de línea original también se encuentra en el segmento resultante. Y ningún otro punto está contenido en este segmento resultante, aunque su longitud sea dos veces mayor que la del segmento original. Para esto es necesario que la cantidad de posiciones puntuales en el intervalo real $[x_s, x_e]$ sea la misma que en el intervalo real $[x_s, 2x_e - x_s]$. Precisamente, por teoría de conjuntos, sabemos que esto es así.

Ahora que se ha demostrado el límite (2.2), podemos saber la posición de cada punto que originalmente pertenece al segmento de línea posicionado en el intervalo $[x_s, x_e]$ tras una división infinita (del tipo que estamos tratando aquí). De acuerdo con este límite, esta posición viene dada por la función f: $[x_s, x_e] \to [x_s, 2x_e - x_s]$ (de intervalos reales) que mapea cada $x \in [x_s, x_e]$ a

$$f(x) = 2x - x_s. \qquad (2.4)$$

Es fácil ver que f posee una función inversa, lo que quiere decir que hay una correspondencia uno-a-uno entre los miembros del dominio y los miembros de la imagen de f. De hecho, la función inversa de f es la función f^{-1}: $[x_s, 2x_e - x_s] \to [x_s, x_e]$ que mapea cada $x \in [x_s, 2x_e - x_s]$ a

$$f^{-1}(x) = \frac{x + x_s}{2}.$$

Y como los dominios de f y f^{-1} son respectivamente los intervalos $[x_s, x_e]$ y $[x_s, 2x_e - x_s]$, y ambos intervalos son continuos, esto significa que todos los puntos que originalmente ocupan el intervalo $[x_s, x_e]$ entero (y solamente esos puntos), tras la infinita división (del tipo que aquí estamos tratando), ocuparán el intervalo $[x_s, 2x_e - x_s]$ entero. Es claro, pues, que lo que se obtiene es un segmento de línea continua que dobla la distancia del segmento original.

Este resultado sólo es válido si consideramos que los segmentos se mueven y parten bajo un movimiento continuo. Las instrucciones del proceso, plasmadas en la función (2.1), nada nos dicen de la división total. Pero no importa. Lo importante es tener claro que la división infinita puede dar como resultado un segmento de línea completo, o con otras palabras, que la actualización del límite de (2.1) es un estado consistente con la realización de cada una y de todas las divisiones especificadas por (2.1), independientemente de cómo se lleven a cabo tales divisiones. Sólo para fines visuales (y de ningún modo para fundamentarlo) es de gran ayuda considerar un movimiento de los puntos bajo una teoría incluso menos restrictiva que la mecánica clásica. Por ejemplo, consideremos que sólo se exige continuidad para las funciones de posición y no para las de velocidad y aceleración. Así, es trivial pensar en la trayectoria para cada punto: si cada etapa n se desarrolla en un intervalo de tiempo $1/2^n$, entonces en dicha etapa, todo punto mayor o igual al punto medio de cada segmento 2^{n-1}, llevará una velocidad constante $v = x_e - x_s$, mientras que todo punto menor al punto medio de cada segmento 2^{n-1} llevará una velocidad $v = 0$ (visualmente, este movimiento es el siguiente: inicialmente, en la etapa cero, todos los puntos se mueven con una velocidad;

en cuanto comienza la etapa 1, todos los puntos menores al punto medio del segmento toman una velocidad $v = 0$, mientras que el resto sigue con la velocidad que anteriormente llevaban; en cuanto empieza la etapa 2, las primeras mitades de los segmentos toman velocidad cero y el resto sigue con la misma, y así sucesivamente; el punto inicialmente en x_e nunca se detiene). Con un movimiento así, claramente, al final de todas las etapas, cuando $t = 1$ (suponiendo que la etapa 1 comienza en $t = 0$), todo $x \in [x_s, x_e]$ se encontrará según la función (2.4), independientemente de la velocidad que tomen entonces.

Repito, este proceso (difícil de modelar para objetos newtonianos) tan solo es una ilustración de una de las características del espacio y el tiempo considerados por la mecánica clásica: que el orden continuo de sus elementos puntuales o instantáneos es un orden total y esencialmente dividido, total y esencialmente fragmentado. Aquí cabe comentar una forma de dividir la línea especialmente importante que Bostock no incluye entre sus perspectivas. Consiste simplemente en hacer un corte, en dividir sin suprimir puntos ni separar segmentos de la línea. Concretamente, dividir el segmento de línea que ocupa el intervalo $[x_s, x_e]$ en los segmentos que ocupan $[x_s, x_w)$ y $[x_w, x_e]$ o $[x_s, x_w]$ y $(x_w, x_e]$, con $x_s < x_w < x_e$. Es importante notar que ningún punto del segmento que ocupa el intervalo $[x_s, x_w)$ es adyacente o toca el extremo x_w del segmento que ocupa $[x_w, x_e]$. Es claro, entonces, que éste es un tipo de división genuina. Y sugiere precisamente lo que aquí estamos ilustrando: que cualquier segmento de línea, entendido como los puntos de un intervalo espacial, es un segmento infinitamente dividido por definición.

Por otro lado, no debe extrañarnos que, tras la infinita división que aquí se ha descrito, de cardinalidad $\aleph_0$, posicione en sus correspondientes sitios finales a cada uno de los puntos del intervalo real especificado, que en conjunto tienen una cardinalidad mayor. Porque, precisamente, un número real no es más que un conjunto de números racionales (de cardinalidad $\aleph_0$).[63] Y así como la cardinalidad del conjunto que es cada número real no se corresponde con la cardinalidad de cualquier intervalo real, la cardinalidad del conjunto de pasos del proceso aquí descrito tampoco se corresponde con la cardinalidad de los elementos ("segmentos" inextensos o puntos) que resultan de ella.[64]

Finalmente, la cuestión filosóficamente importante que nos enseña el análisis que acabamos de realizar a la infinita división de la línea es la siguiente: mientras la línea se conciba como una entidad espacial constituida por todos aquellos puntos que se encuentran en ella, debemos aceptar que la línea continua es una línea infinitamente dividida. No nos debe extrañar, pues, que se puedan obtener líneas continuas tras un proceso de división infinita, pues incluso el segmento inicial ya es un segmento infinitamente dividido. La línea no posee la continuidad intuitiva que muestran las representaciones gráficas de la línea. La continuidad es división y fragmentación total y no, como intuitivamente se piensa, contigüidad total.

Ahora bien, ¿qué idea poner por delante, continuidad geométrica o continuidad gráfica? Sherry, por ejemplo, sugiere apreciar la continuidad geométrica como "an aggregate of unextended points as a model of a line, one which works in some circumstances, but fails in others" [Sherry 1988: 69]. Me parece que hoy en día la idea de continuidad geométrica está tan arraigada en la práctica científica (y tecnológica) que el agregado de puntos no es ya un modelo de una línea o curva gráfica, sino que la

[63] Construido como un corte de Dedekind. Véase nota 16.

[64] El proceso de división infinita descrito en el texto principal no debe confundirse con el proceso utilizado para construir el conjunto de Cantor. Bajo este último proceso, que de la misma manera consiste en una sucesión de pasos de cardinalidad $\aleph_0$, también se obtiene un conjunto con cardinalidad mayor a $\aleph_0$; en cambio, no resulta un segmento de línea continua (confróntese en [Byers 2007: 174-9]).

gráfica de una curva ha pasado a ser el modelo del agregado de puntos. Ambos no son más que modelos; uno construido por el desarrollo de ideas matemáticas y el otro construido por nuestro aparato perceptivo (todo indica que, a una escala microscópica, ninguna representación gráfica real cumple la contigüidad intuida al percibirla en una escala macroscópica). Así, pues, el movimiento es un fenómeno sensible que modelamos con ambos constructos. Tenemos un modelo gráfico de una trayectoria, y tenemos el modelo geométrico de dicha trayectoria. La mecánica newtoniana, que adopta el modelo geométrico como fundamento de las ideas del espacio, el tiempo y el movimiento, falla al no satisfacer las intuiciones que suscita la amplia utilización del modelo gráfico, mas no por ello cae en alguna contradicción. Sólo cae en contraintuiciones. En los próximos apartados (concretamente en las secciones 2.2.2 y 2.3.2), veremos algunas consecuencias de concebir el movimiento en un espacio y tiempo discreto (no newtoniano, claramente), y se verá que semejante concepción también suscita contraintuiciones.

2.2. La paradoja de la flecha: el estado instantáneo de movimiento

Al igual que la paradoja de Aquiles y de la dicotomía, la paradoja de la flecha concluye que la idea del movimiento de un objeto es una idea que acarrea una contradicción. Varios autores defienden que el programa global de Zenón, con sus paradojas del movimiento, era negar la consistencia de la idea del movimiento independientemente de si se adoptaba una concepción continua del espacio y del tiempo, o una concepción discreta. Para ellos, las dos paradojas del movimiento que se tratan en este capítulo tenían como objetivo mostrar lo absurdo de concebir el movimiento en un espacio y un tiempo discreto o atómico.[65]

El desafío que propone la paradoja de la flecha es el siguiente: ¿cómo es posible que podamos decir de un cuerpo que se encuentra en movimiento en un instante si en dicho instante no se mueve? Sin duda, para aclarar esta cuestión, es necesario tener un criterio claro para distinguir un objeto en movimiento. Este apartado tiene como objeto clarificar la idea de movimiento que utiliza la mecánica clásica, y bajo ésta dilucidar hasta qué punto tiene sentido hablar de un estado instantáneo de movimiento. Esto, por supuesto, nos ayudará a tener una solución (newtoniana) para la paradoja.

2.2.1. El planteamiento de la paradoja: estados instantáneos de reposo durante el movimiento

El argumento de la flecha requiere de pocas palabras para plantearse: en un instante dentro del vuelo de una flecha, este objeto sólo ocupa un espacio igual a su tamaño; es decir, no se mueve, se encuentra en reposo. Lo mismo se puede decir para cualquier instante de todo el vuelo. Por lo tanto, durante el intervalo de tiempo en el que la flecha

[65] Entre ellos podemos encontrar a Brochard [1954: 4], Glazebrook [2001: 273-4], Noël [1893: 107-9] y Renouvier [1875: 71-3]. Por el contrario, Faris [1996: 113-5] argumenta que atribuir semejante objetivo a las paradojas de Zenón es por completo dudoso; mientras que Owen [1970 (1957-8): 153-4] sostiene que dichas paradojas en conjunto tienen el objeto de atacar la idea de pluralidad.

mantuvo su vuelo, la flecha siempre estuvo en reposo.[66] Lo que contradice al hecho de que vuela y que se encuentra en movimiento.

En la *Física* de Aristóteles se presenta un argumento más conciso en el que se deja cabida tanto a la concepción continua del movimiento como a la atómica:

> Si siempre todo lo que está en algún lugar igual a sí mismo está en reposo, y si lo que se desplaza está siempre en un 'ahora' entonces la flecha que vuela está inmóvil [Aristóteles, *Física*: 239b5-8].

La solución que Aristóteles ofrece también es breve:

> Esto es falso, pues el tiempo no está compuesto de 'ahoras' indivisibles, como tampoco ninguna otra magnitud está compuesta de indivisibles [Aristóteles, *Física*: 239b8-9].

Aristóteles niega que el tiempo esté constituido de 'ahoras', de instantes, ya sean éstos puntuales (y de duración cero) o atómicos (de duración mínima constante, indivisible, mayor a cero), ya que cualquiera de los dos son indivisibles.[67] Esta respuesta está muy alejada de la respuesta tradicional que hoy en día se ofrece a la paradoja. Sin embargo, hay que aclarar que, con esta respuesta, Aristóteles está siendo, en este caso, coherente con su pensamiento. Recuérdese que para Aristóteles lo continuo era aquello que es divisible siempre en divisibles. Pues bien, si el tiempo es continuo (así lo consideraba Aristóteles), entonces el tiempo está constituido de divisibles siempre divisibles, y no de instantes indivisibles.

Es claro, pues, que Aristóteles no encuentra necesario (e incluso lo ve como una inconveniencia, y por eso la paradoja de Zenón) la introducción del concepto de instante o punto temporal en la concepción del tiempo. No obstante, hoy en día el concepto de instante tiene un papel importante en el uso común del lenguaje y de las teorías físicas más utilizadas. Un instante es en el tiempo lo que un punto en el espacio. Como consecuencia, un instante es una "posición"[68], de dimensión cero (o de dimensión mínima, bajo una concepción discreta), en el tiempo. Con esto, no es necesario que el conjunto de todos ellos sea lo que constituye el tiempo, sino sólo que son las posiciones temporales que se identifican en el transcurrir del tiempo.

La solución tradicional, que asume la existencia de instantes como tales (independientemente de si son o no constitutivos del tiempo), consiste en hacer notar que si la flecha se encuentra volando, y detectamos varios puntos de su vuelo, y reconocemos que en cada uno de esos puntos la flecha ocupa nada más que un espacio igual a ella (el espacio que ocupa si estuviera en reposo), esto no quiere decir que la flecha se encuentre en reposo. El hecho de que en un instante de su vuelo la flecha sólo ocupe una posición (tanto en espacio como en tiempo) no implica que ésta no se encuentre en movimiento. La paradoja de Zenón comete una equivocación: confunde el

---

[66] La misma versión del argumento se puede encontrar en [Alper y Bridger 1997: 144-5], [Arsenijević, Šćepanović y Massey 2008: 20], [Clark 2007: 11] y [Smith 2003: 264].

[67] Aristóteles describe el 'ahora' de la siguiente manera: "el 'ahora' es de algún modo el límite extremo del pasado y en él no hay nada de futuro, y es también el límite extremo del futuro y en él no hay nada del pasado; justamente por eso decimos que es el límite de ambos. […] quedará manifiesto también que el 'ahora' es indivisible" [Aristóteles, *Física*, 233b35-234a3].

[68] El término 'posición' se puede prestar a confusiones si se usa, como aquí, para designar un instante en el tiempo. La confusión se pierde si se realiza la representación geométrica del transcurrir del tiempo, una línea recta infinitamente divisible con una infinidad de posiciones. Más aún, en mecánica relativista, el espacio y el tiempo forman un mismo objeto conceptual, el espacio-tiempo, en el que el tiempo no es más que una dimensión más, y del que se puede hablar sin confusión en términos de posiciones.

hecho de que la flecha no lleve a cabo un movimiento durante un instante con el hecho de que se encuentre en reposo.[69] El estado dinámico de un cuerpo (movimiento o reposo), no se puede inferir de la posición que se tiene en un instante; es necesario saber también lo que ocurre en instantes próximos o en todo un intervalo de tiempo.[70] Qué es necesario saber de esos otros instantes es lo que se va a dejar en claro en la sección 2.2.3.

2.2.2. La concepción atómica del espacio y el tiempo: el desvelo de la falacia[71]

Antes, es justo detenerse en la implicación de concebir un espacio y un tiempo discretos para el movimiento de la flecha.[72] En un espacio tal, sólo se encontrarían como posiciones posibles regiones de tamaño mínimo mayor a cero. Así, un cuerpo ocuparía un determinado número de regiones mínimas ("átomos") y cada una de ellas las cubriría por completo. Para el caso del espacio, que puede considerarse bidimensional o tridimensional, lo normal es asumir "átomos" cuadrados o cúbicos, según sea el caso, para así evitar el problema de los intersticios.[73] El caso del tiempo se salva de esta cuestión, y considera instantes de duración mínima mayores que cero.

---

[69] Partidarios de esta solución son Sainsbury, que explica: "we are failing to distinguish between the claim – interpretable as true – that at each instant the arrow does not move, and the false claim that it is *at rest* at each instant" [Sainsbury 1988: 22]; y Rescher que escribe: "The fact that an arrow *does not move DURING* an instant (an instant, being of its very nature, too brief to allow the accomplishment of a movement) does not mean that an arrow *is not in motion AT this instant*" [Rescher 2001: 100], y posteriormente subraya: "The distinction between being in motion and accomplishing a movement is crucial for resolving this paradox because the former is actually compatible with instantaneity whereas the latter is not" [Rescher 2001: 101].

[70] Faris también subraya este punto: "It is not universally true that whatever is over against the equal is at rest; for what is in the now over against the equal is not at rest. The most we are entitled to say is that what is in, i.e. throughout, a time over against the equal is at rest" [Faris 1996: 46]. Rescher, discutiendo la misma cuestión, hace una interesante analogía. El hecho de que en un instante la flecha no se mueva en un instante, no significa que no se mueva en un intervalo, "any more than the fact that a single letter conveys no information means that a text inducing a great many of them cannot do so" [Rescher 2001: 100-1].

[71] McLaughlin [1998: 291] prefiere el término 'granular' para hacer referencia a esta concepción, ya que 'atómico' y 'discreto' tienen connotaciones que pueden prestarse a confusión. Aquí se seguirán utilizando los término 'atómico' y 'discreto', ya que 'granular' también puede provocar confusiones, por ejemplo, con el término utilizado en cristalografía de los metales.

[72] La problemática del espacio y el tiempo discreto es una cuestión un tanto amplia. Como este trabajo pretende profundizar en la mecánica clásica, que considera el espacio y el tiempo como continuos, esta es una cuestión que escapa a los intereses del mismo. Aquí sólo tomaremos los puntos al respecto que repercuten en la continuidad, por un lado, y en la conclusión a la paradoja de la flecha y el estadio (éste en el siguiente apartado). Contribuciones penetrantes en esta cuestión son [Forrest 1995], [Van Bendegem 1995] y [Davies 2003].

[73] Faris [1996: 49-73], Van Bendegem [1987: 296 y 1995:134] y Weyl [1949: 43], por ejemplo, consideran elementos cuadrados; Rogers [1968: 122], hexagonales; mientras que Davies [2003: 320-1], Forrest [1995: 331] y McDaniel [2007: 157] asumen elementos puntuales discretos sin ninguna forma específica. Ninguno comenta las siguientes dificultades: ¿cómo establecer qué disposición toman los elementos unitarios entre sí? ¿Cómo mostrar que hay o que no hay espacios intersticiales entre los elementos unitarios? Estas dificultades sugieren que estamos gráficamente atrapados en el concepto de espacio euclidiano, y que cualquier otro espacio (discreto o riemanniano, por poner dos ejemplos de distinta naturaleza) está condenado a ser representado gráficamente y a ser intuido en un espacio euclidiano. Aceptando esto, es fácil ver que, dependiendo del polígono que se considere como elemento último, habrá mejores o peores disposiciones entre ellos. Por ejemplo, como es bien sabido en cristalografía, en caso de asumir esferas como los elementos unitarios, el acomodo reticular fcc (cúbico

La concepción discreta o atómica del espacio presenta un problema incluso si prescindimos del movimiento. Suele llamarse el argumento del tejado (*the tile argument*) y consiste en mostrar la existencia de una magnitud de distancia prohibida por la misma atomicidad del espacio. Tómese, por ejemplo, un triángulo rectángulo en el plano euclidiano (espacio bidimensional). Supongamos que los catetos de este triángulo son de igual longitud y que dicha longitud mide un número m (natural) la unidad mínima espacial a (la distancia atómica), o sea, $m{\cdot}a$. Por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa de dicho triángulo forzosamente tendrá que medir $\sqrt{2}{\cdot}m{\cdot}a$, una distancia no permitida en el espacio atómico, ya que éste sólo permite distancias de $n{\cdot}a$ (con n = 1, 2, 3, …). Lo mismo sucede a la inversa, si tomamos la hipotenusa con la longitud mínima a, los catetos, si son iguales, resultarán de una longitud menor a la mínima. De aceptar, pues, la concepción atómica, tendríamos que mostrar ciertas reservas hacia el teorema de Pitágoras.[74]

Así las cosas, mostremos por el momento dichas reservas y concentrémonos en dilucidar cómo sería el movimiento de la flecha en un espacio discreto y en un tiempo discreto. Bien, considérese que la flecha ocupa solamente el espacio de una posición atómica x unidimensional y que el tiempo transcurre tras duraciones atómicas de "magnitud" d. En un primer instante, la flecha se encuentra en la posición x_1 y en ninguna otra. En el siguiente instante, también de duración d, la flecha se encuentra en la posición x_2 y en ninguna otra. Así, tenemos que en un lapso de tiempo $n{\cdot}d$ la flecha habrá pasado de la posición x_1 a la posición x_n.[75] Tal como si fuera una película de cine, en donde cada fotografía es una imagen inmóvil que se expone sucesivamente en duraciones imperceptibles de magnitud d. Así, a la flecha se le ve moverse, pero nunca se mueve. Es simplemente una sucesión de flecha inmóvil en posiciones diferentes. Bajo esta nueva concepción, el movimiento se entendería como el cambio de posiciones (por un extraño mecanismo), de un objeto que está siempre en reposo. El objeto siempre está inmóvil aunque se le vea cambiar de posiciones, aunque se le vea "moverse".[76] Pero si cambia de posición, ¿se mueve o no se mueve? Al final de cuentas, ¿qué es el movimiento?

Esta concepción del espacio y el tiempo sugiere la permanencia de la paradoja. Admite que el movimiento está hecho, esencialmente, de inmovilidades.[77] Para evitar

---

centrado en las caras) es el arreglo que deja un espacio intersticial menor (confróntese, por ejemplo, en [Duan y Guojun 2005: 56] o en todo el artículo de Hales [1997]).

[74] Según Forrest, el problema sugerido por el argumento del tejado no se debe más que a la representación de los elementos discretos en un espacio euclidiano: "We should not therefore take the tile paradigm literally, but rather as just a way of *representing* one possible discrete geometry using Euclidean space" [Forrest 1995: 330]. Por otro lado, en [Van Bendegem 1987] se construye un espacio discreto para el que, dentro de cierto rango de tamaño de las unidades, el problema se supera.

[75] Este es el caso en el que el objeto se mueve a la velocidad máxima que permite una sucesión de posiciones adyacentes. Con una velocidad menor, la inmediatamente menor a la máxima, por ejemplo, el objeto estaría un tiempo $2d$ en cada posición x. Forrest, basándose en la velocidad máxima característica de esta concepción, sugiere la velocidad de la luz como un punto a favor de la plausibilidad de la concepción discreta como modelo de la realidad: "there is a maximum speed for a particle with […] uniform motion in which at every moment the particle is displaced one unit. That is good news because it provides a way of understanding why no particle can go faster than some maximum speed which we can identify with that of light" [Forrest 1995: 337].

[76] Al analizar la concepción atómica, Faris también se percata de esta consecuencia: "Such an account has indeed strange implications but it is consistent with the unnatural interpretation of Zeno's conclusion, allowing as it does for an object to change place while always remaining at rest" [Faris 1996: 69].

[77] Bergson atribuye este resultado paradójico al mecanismo en el que funciona nuestro conocimiento: "Nous prenons des vues quasi instantanées sur la réalité qui passe, et, comme elles sont caractéristiques de cette réalité, il nous suffit de les enfiler le long d'un devenir abstrait, uniforme, invisible, situé au fond de l'appareil de la connaissance, pour imiter ce qu'il y a de caractéristique dans ce devenir lui-même. […]

esta concepción contradictoria, se puede pensar que el objeto en movimiento pierde su identidad, y que un objeto en "movimiento" es en realidad una sucesión de apariciones y desapariciones de cuerpos semejantes.[78] Esta anulación de la identidad plantea algunas cuestiones muy serias que la hacen poco plausible: ¿Por qué el objeto, que es distinto en cada instante, mantiene su aspecto, y en concreto su tamaño? ¿Por qué semejantes apariciones y desapariciones ocurren en una sucesión de posiciones adyacentes y no en cualquier posición arbitraria? Además, se podría entonces decir que durante el reposo, manteniendo la misma posición durante una sucesión considerable de instantes atómicos, el objeto no necesariamente es el mismo (¿cómo saber que sí lo es? ¿Cómo saber que no lo es?).

En el fondo, tanto en la concepción atómica, como en la concepción continua del espacio y el tiempo, la situación paradójica sólo permanece cometiendo (nuevamente) una falacia de composición. A partir de reconocer que en cada instante (sea atómico o sea continuo) de un intervalo de tiempo (continuo o discreto) la flecha no cambia de posición, no se mueve, no se sigue que en el conjunto entero (y en este caso, incluso en cualquier subconjunto) la flecha no se mueva –esta misma es la apreciación que hace la solución tradicional presentada en el apartado anterior–. Y por tanto, no demuestra, como afirman algunos (como Brochard [1954: 4] o Glazebrook [2001: 273-4]), la imposibilidad del movimiento bajo un espacio y un tiempo discreto. Por supuesto, a partir de la misma asunción tampoco se sigue que la flecha se mueve. Pero no importa, porque la afirmación de que la flecha se mueve en un intervalo de tiempo no se obtiene a partir de semejante asunción, sino de la definición misma de movimiento: que un mismo cuerpo se encuentre en dos lugares distintos tras el transcurrir del tiempo.

2.2.3. ¿Se puede hablar de un estado instantáneo de movimiento?

Una vez que ya nos hemos percatado que del hecho de que durante un instante un cuerpo no se mueve no podemos deducir que el estado de dicho cuerpo no es el movimiento, resta entonces responder la pregunta: ¿cómo saber si el estado instantáneo de un cuerpo es o no es el movimiento?

Antes de reflexionar sobre algún criterio para conocer si el estado instantáneo de un objeto es el movimiento, es necesario dejar claro qué es el movimiento. Una explicación sencilla, concisa, clarificadora, e incluso satisfactoriamente intuitiva, de la idea de movimiento la podemos encontrar en las siguientes palabras de Russell:

> Motion consists merely in the fact that bodies are sometimes in one place and sometimes in another, and that they are at intermediate places at intermediate times [Russell 1917: 84].

Pese a su precisión, esta explicación –que bien puede tomarse como una definición–[79] no nos informa del estado dinámico instantáneo de un cuerpo. Y es que ni siquiera tiene

---

le mécanisme de notre connaissance usuelle est de nature cinématographique" [Bergson 1907 (1959): 753].

[78] Esta idea, basada originalmente en un mundo según Malebranche, también es considerada por una gran cantidad de autores: Bigelow y Pargetter [1990: 68-70], Carroll [2002: 56-7], Faris [1996: 61], Meyer [2003: 99-100] y Tooley [1988: 243-4].

[79] La segunda parte de esta definición del movimiento se refiere sólo al movimiento en un espacio y tiempo continuos. En un espacio y tiempo discretos, si un objeto se mueve con una velocidad menor a la máxima, entonces no siempre ocupa una posición intermedia en tiempos intermedios. En el texto principal de esta sección sólo se discutirá el movimiento en un espacio y tiempo continuos –el

que interpretarse necesariamente referida a instantes. Los términos '*sometimes*' y '*one place*', así como '*intermediate places*' e '*intermediate times*', pueden bien interpretarse como intervalos espaciales y temporales no degenerados.

Ahora bien, el criterio que goza de un mayor prestigio para dictaminar si un cuerpo se encuentra en movimiento en algún instante es el valor de la velocidad que dicho cuerpo posee en dicho instante. Se puede enunciar con las siguientes palabras: *si la velocidad instantánea de un cuerpo es distinta de cero, entonces el estado instantáneo del cuerpo es el movimiento*. Este criterio asume, por supuesto, que la velocidad es la derivada de la trayectoria con respecto al tiempo: $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.[80]

Puesto que este concepto de velocidad instantánea es una idea genuina y originalmente newtoniana, nos incumbe mostrar aquí los inconvenientes que tiene a la hora de adoptarlo como criterio de movimiento instantáneo. Este criterio, al tener como fundamento la noción de derivada, nos asegura que, si la derivada de la trayectoria es distinta de cero (me refiero a una trayectoria continua y derivable, obviamente), entonces el cuerpo ocupa la posición en la que se encuentra en un instante, dentro de un intervalo continuo de instantes, exclusivamente en ese instante. En términos más precisos, si consideramos que el instante de dicha velocidad $v \neq 0$ es t_0 y la posición que se encuentra es x_0, entonces en todos los instantes de cierta infinidad de intervalos $(t_0 - \delta, t_0)$ y $(t_0, t_0 + \delta)$ –con δ lo suficientemente pequeña– la posición del cuerpo necesariamente será distinta de x_0. El cuerpo, pues, está en movimiento.

Este criterio padece una deficiencia, a saber, que lo inverso no es verdad: no es ninguna necesidad que, dado un intervalo de tiempo $(t - \delta, t + \delta)$ en el que en cada instante el cuerpo posee una posición distinta a la del resto de instantes, en todos los instantes del intervalo el cuerpo tenga una velocidad distinta de cero.[81] Este hecho lo ilustra un ejemplo bastante familiar. Supongamos que lanzamos una piedra en dirección vertical. El objeto se dirigirá hacia arriba pero, debido al campo gravitatorio, alcanzará una altura máxima, y emprenderá entonces la caída. Bien, en el instante en el que tiene la altura máxima, la velocidad del objeto es nula. Según el criterio de movimiento, el objeto no se encuentra en movimiento en ese instante. Sin embargo, la curva del desplazamiento con respecto al tiempo (una parábola) nos indica que, en cualquier instante cercano a dicho instante, no importa lo cerca que se encuentre, el objeto siempre tendrá otra posición; es decir, la posición correspondiente a la altura máxima no es más que otra posición entre una serie continua de posiciones.[82] ¿Se puede decir,

---

movimiento propio de la mecánica newtoniana–. Cabe comentar que, para un espacio y un tiempo discreto, basta suprimir esta segunda parte de la definición del movimiento para que sea satisfactoria.

[80] Así se considera, por ejemplo, en [Clark 2007: 11], [Erickson y Fossa 1998: 13], [Glazebrook 2001: 202-3], [Harrison 1996: 279], [Meyer 2003: 97], [Moore 1990: 43], [Papa-Grimaldi 2007: 138], [Salmon 1970: 24], [Smith 2003: 269] y [Zangari 1994: 192]. Por otro lado, contribuciones que muestran reserva al respecto son [Carroll 2002], [Lange 2005] y Owen [1957-8].

[81] Para conocimiento del autor, ninguna contribución que considera o discute la velocidad instantánea como criterio de movimiento hace esta observación.

[82] Por otro lado, Bigelow y Pargetter [1990] señalan un caso en el que la velocidad instantánea es distinta de cero en un instante que pertenece a un intervalo de tiempo en el que el objeto no experimenta ningún cambio de posición. El ejemplo consiste en tres esferas *A*, *B* y *C* de la misma masa colocadas horizontalmente; inicialmente, *A* se dirige con velocidad constante hacia *B* y *C* que se encuentran en contacto y en reposo; en el instante t_0 *A* colisiona con *B* de manera que "The velocity of *A* is transferred from *A*, through *B*, to *C*. There is a moment in time when *B* has velocity *v* – even though there is no appropriate time series of past or future positions for *B* which will yield velocity *v* as a limit" [Bigelow y Pargeter 1990: 67]. Ante esto, Meyer hace la siguiente observación: "this "velocity transfer theory" is neither a theorem of classical or relativistic mechanics, nor is it a conceptual truth about velocity. As any competent physicist will tell you, it is simply false. What is true is that there is an *energy* flow through *B* a t_0. But since that is a flow of potential energy, and not of kinetical energy, this does not support Bigelow

genuinamente, que el objeto en ese instante está en reposo? No obedece, al menos, a la definición del movimiento que arriba se ha dado.

Es importante observar que, aunque en ese instante la velocidad es cero, la aceleración no lo es. Es decir, en ese instante hay una fuerza no equilibrada actuando sobre el objeto. Esto sugiere otro criterio del movimiento: *si la fuerza total no equilibrada que en un instante actúa sobre un cuerpo es distinta de cero, entonces el estado instantáneo del cuerpo es el movimiento*. Efectivamente, es completamente a favor de nuestras intuiciones que, si una fuerza actúa sobre un cuerpo, la influencia de la primera en el último se manifiesta en movimiento. Además, esto se encuentra estrechamente relacionado con un rasgo de suma importancia en la mecánica newtoniana: la relatividad de Galileo. En el ejemplo expuesto en el párrafo anterior, si cambiamos de marco de referencia inercial en dirección vertical, entonces, en ese mismo instante, la velocidad no será cero (y la altura en dicho instante tampoco será la altura máxima). En cambio, para todo marco de referencia inercial, la aceleración instantánea (correspondiente a la fuerza gravitatoria aplicada), será la misma. Puesto de forma generalizada: en cualquier instante de la existencia de un cuerpo, siempre habrá un marco de referencia inercial en el que, para ese instante, le corresponda una velocidad instantánea igual a cero.[83] Pero entonces, ¿el cuerpo se mueve en ese instante o no se mueve?

Aunque parezca deseable que el movimiento sea un fenómeno invariante ante las transformaciones de Galileo, no tenemos más remedio que aceptar que el movimiento, ocurrido en un lapso de tiempo con una misma velocidad constante, es relativo al marco de referencia inercial. Es decir, para todo cuerpo, que durante todo un intervalo de tiempo viaja con velocidad constante, siempre habrá un marco de referencia inercial en el que se encontrará en reposo durante dicho intervalo de tiempo. Con la aceleración no sucede lo mismo. Independientemente del marco de referencia inercial en que observemos el cuerpo, la aceleración será la misma. Esto nos sugiere considerar la aceleración como un criterio objetivo de movimiento.

A pesar de esta ventaja que presenta la aceleración frente a la velocidad, la aceleración instantánea como criterio de movimiento instantáneo también es deficiente. En primer lugar, hay casos en los que una aceleración instantánea distinta de cero no implica distintas posiciones para los intervalos adyacentes al instante en cuestión. Por

---

and Pargetter's case" [Meyer 2003: 98]. Estoy de acuerdo, pues la velocidad –en mecánica clásica– es un concepto siempre referente a la trayectoria. Además, bajo el mismo artificio de Bigelow y Pargetter podemos encontrar un caso problemático para su "teoría de transferencia de velocidad": en vez de tres esferas, consideremos que tenemos cuatro esferas *A*, *B*, *C* y *D*; si t_0 es el instante en el que *A* ya no viaja con *v* y *B* posee –mas sin moverse– una velocidad *v*, ¿cuál es el instante en el que *C* posee una velocidad *v* –también sin moverse–? Contestar que el instante también es t_0 implica violar la conservación del momento y de la energía (que, debido a que la colisión es elástica, se tiene que cumplir). Para no hacerlo, se podría contestar que *B* y *C* en t_0 tienen alguna velocidad, menor que *v*, correspondiente al cumplimiento de los principios conservativos. O también que *B* posee *v* en t_0 y posteriormente *C* y *D* se mueven con alguna velocidad, menor que *v*, correspondiente al cumplimiento de los principios conservativos. Pero estas dos últimas respuestas son completamente *ad hoc*, y no se podrían ofrecer sin las indeterminaciones presentes en colisiones instantáneas entre más de dos cuerpos.

[83] Este hecho revela una función explicativa muy pobre por parte de la velocidad. Desde este punto de vista, el valor de una velocidad instantánea sólo nos especifica el marco de referencia inercial desde el que se mira el movimiento (o el reposo, según sea caso). O dicho de otra manera: la velocidad instantánea sólo nos dice qué curva seguirá la trayectoria dentro de toda una familia de curvas. A esta familia de curvas se le puede llamar movimiento objetivo, a pesar de que no podamos prescindir de un marco de referencia inercial para analizar el movimiento. ¿Qué determinará la familia de curvas? Las leyes del movimiento. Esto mismo es reconocido por Meyer: "What velocity explains, and what its causal relevance is, depends on what the laws of nature are" [Meyer 2003: 99]; y por Smith: "I do not expect the velocity to tell us about positions at later times. Only the laws of nature can do that" [Smith 2003: 279].

ejemplo, asumamos que a un cuerpo en el espacio unidimensional del eje-x se le aplica una fuerza total dada por la función

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \quad \text{para } t \leq 0 \\ &= 0 \quad \text{para } t > 0. \end{aligned}$$

Asumamos también que, a un tiempo $t = -2$, el cuerpo se encuentra en $x = 4$ con una velocidad $v = -4$. Así las cosas, y tomando las definiciones diferenciales de velocidad y aceleración, obtenemos que en el instante $t = 0$, el cuerpo estará en $x = 0$ con una velocidad $v = 0$. A partir de entonces, para todo tiempo $t \geq 0$, el cuerpo permanecerá en $x = 0$ con $v = 0$. Aunque el cuerpo tenga una fuerza distinta de cero en $t = 0$, permanece en la misma posición para todo tiempo posterior.

En segundo lugar, hay casos en los que la aceleración instantánea se ve en la misma situación que más arriba encontramos insatisfactoria para la velocidad; a saber, que tampoco es ninguna necesidad que, dado un intervalo de tiempo $(t - \delta, t + \delta)$ en el que en cada instante el cuerpo posee una posición distinta a la del resto de instantes, en todos los instantes del intervalo el cuerpo tenga una aceleración distinta de cero. Un ejemplo de esta situación se puede encontrar en la trayectoria de la carrera *legato*, ilustrada en la figura 1.3. En cada instante $t = 1 - \frac{1}{2^n}$ (con $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) el cuerpo se encuentra en una posición x_n con una aceleración cero, pero en todo instante $t \in \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ el cuerpo se encuentra en una posición distinta a x_n. La aceleración instantánea, pues, tampoco resulta ser un criterio satisfactorio para el movimiento instantáneo.

Estas apreciaciones dan la razón a Zenón en el siguiente sentido: no es tan directo dar un sentido al concepto de estado instantáneo de movimiento cuando la idea de movimiento en sí contempla más de un instante, el transcurso del tiempo. Así las cosas, tenemos simplemente que la velocidad instantánea nos dice el valor de la velocidad en un instante, y la aceleración instantánea nos dice el valor de la aceleración en un instante. Pero, como hemos visto, ninguna de las dos satisface por completo la idea del movimiento. Esto, me parece, recae en un motivo constantemente relegado y que enunciarlo resulta esclarecedor (y que además, dicho de una forma poco académica, lo tenemos en frente de nuestras narices): *la velocidad y la aceleración son conceptos que nos ayudan a entender y a describir el movimiento, pero ninguno de los dos, ni los dos en conjunto, constituyen en sí el concepto de movimiento.*[84] La dificultad, pues,

[84] Cabe entonces también preguntarse qué son la velocidad y la aceleración instantánea. Lange, por ejemplo, señala acertadamente que "velocity is *essentially* something to do with trajectory (and nothing more than that)" [Lange 2005: 450]. Ahora bien, ¿qué nos dicen de la trayectoria la velocidad instantánea y la aceleración? Respecto de la velocidad, el mismo Lange propone lo siguiente: "I propose that classical instantaneous velocity is something like a dispositional property, a tendency, a power, or a propensity. To be moving at t_0 in a given direction at 5 centimeters per second is to have certain *potential* trajectory—that is, to be *threatening* to proceed along a certain trajectory. It is to be disposed at t_0 to have a trajectory with a time-derivative *from above* at t_0 equal to 5 cm/s in the given direction" [Lange 2005: 453]. Discrepo en gran medida de la propuesta de Lange por las siguientes razones: delante de una velocidad instantánea, independientemente de cuál sea su valor, puede tenerse una infinidad de trayectorias que apunten a cualquier dirección, lo que nos deja en una situación bastante precaria para saber algo concreto de la trayectoria; peor aún, en mecánica clásica, el valor de cualquier velocidad instantánea de un objeto es compatible con el alcance de cualquier posición espacial en cualquier instante futuro. Basta con aplicar la fuerza adecuada. Siendo las cosas así, ¿cómo es posible que la velocidad indique una trayectoria potencial? Pero atención, esta última observación nos da una clave en cuanto a la aceleración: dependiendo de la fuerza –es decir, de la masa y la aceleración– el objeto tomará una determinada trayectoria. O sea, que la aceleración sí es como una propensión del objeto a tomar cierta trayectoria. Esto no es más que lo dicho en la nota anterior: la aceleración indica una familia de trayectorias (las trayectorias potenciales) y la velocidad determina cuál de esas trayectorias toma el objeto (el marco de referencia inercial con el que se mira el movimiento).

radica en querer una definición del movimiento con conceptos que no se corresponden al concepto mismo de movimiento.[85]

Por otro lado, definir diversas clases de movimiento a partir de las deficiencias de la velocidad y la aceleración para definir el movimiento instantáneo (como por ejemplo, estado instantáneo de movimiento por la izquierda para el caso en que la fuerza es distinta de cero pero sólo en la vecindad izquierda hay un cambio de posiciones, o estado instantáneo de reposo potencial para el caso en que la aceleración instantánea del cuerpo es cero pero en ambas vecindades se encuentra en otras posiciones), es complicar en demasía un concepto que intuitivamente debería de ser simple. El concepto de movimiento requiere de más de un instante y por tanto, en mecánica clásica, de un intervalo continuo entre instantes. Sólo se puede decir que el estado instantáneo de un cuerpo es el movimiento si el instante referido pertenece a un intervalo continuo y abierto en el que el cuerpo cubre un intervalo continuo de posiciones (todas ellas distintas). Sólo se puede decir que el estado instantáneo de un cuerpo es el reposo si el instante referido pertenece a un intervalo continuo y abierto en el que el cuerpo se encuentra siempre en la misma posición (y que, por supuesto, en cualquier otro marco de referencia inercial estará en movimiento).[86] ¿Y que se puede decir del estado en los instantes que son frontera entre el movimiento y el reposo? Mi propuesta es que, precisamente, semejante estado instantáneo es un estado de transición del movimiento al reposo o viceversa. De ninguna manera nos debe resultar descabellado el reconocimiento de semejantes estados, sobre todo cuando estamos asumiendo un tiempo continuo. La disyuntiva 'o estado de movimiento o estado de reposo' aplicable a los estados en intervalos de tiempo, no tiene por qué ser aplicable a los objetos en instantes.

Finalmente, cabe comentar que hay un reciente desarrollo que reconstruye el cálculo infinitesimal y que encuentra al concepto de velocidad instantánea satisfactorio como modelo de un estado de movimiento instantáneo. Sin embargo, este concepto se basa en una idea de instante completamente distinta, y que a su vez, recae en el rescate de la noción de infinitesimal. Pese a que, hasta la fecha de hoy, la inmensa mayoría de los planteamientos de la mecánica clásica relegan este desarrollo, no descarto que, con el tiempo, comience a formar parte de la teoría que entonces se conozca como mecánica newtoniana. Si esto es así, entonces se tendrá un criterio simple de movimiento instantáneo. La explicación de Bell es de gran valor, y con ella cierro el apartado:

> The Principle of Microstraightness yields an intuitively satisfying account of *motion*. For it entails that infinitesimal parts of (the curve representing a) motion are not degenerate 'points' where, as Aristotle observed millenia ago, no motion is detectable (or, indeed, even possible!), but are, rather, nondegenerate spatial segments just large enough to make motion over each one palpable. On this reckoning, states of motion are to be taken seriously, and not merely identified with their result: the successive occupation of a series of distinct positions. Instead, a state of motion is represented by the smoothly varying straight microsegment of its

[85] Alper y Bridger, en cambio, proponen que "One should not ask whether the arrow is moving *at* a particular time because time is a characteristic of motion, motion is change, and there is *no* change at a point. It is only when we are trapped by the verbal snare of speaking of motion at a point in time that we get confused" [Alper y Bridger 1997: 154-5]. No obstante, me parece mucho más interesante desarrollar conceptos para dar un sentido a la idea de estado instantáneo de movimiento, en vez de la simple eliminación de un oxímoron como 'movimiento instantáneo'.

[86] La misma idea ya se encuentra afirmada por Sainsbury: "An object is at rest at an instant just on condition that it is at the same place at all nearby instants; it is in motion at an instant just on condition that it is in different places at nearby instants" [Sainsbury 1988: 21], aunque se aprecia que relega el estado de los puntos frontera.

associated curve. This straight microsegment may be thought of as an infinitesimal 'rigid rod', just long enough to have a slope – and so, like a speedometer needle, to indicate the presence of motion – but too short to bend. It is thus an entity possessing (location and) *direction without magnitude*, intermediate in nature between a point and a Euclidean straight line [Bell 1998: 10].[87]

2.3. La paradoja del estadio y la relatividad galileana

La paradoja del estadio es la menos conocida o comentada de las cuatro paradojas del movimiento planteadas por Zenón, quizá por la simplicidad de la solución que goza una amplia aceptación, y que la hace ser, bajo este punto de vista, poco problemática. Sainsbury [1988], por ejemplo, ni siquiera la menciona en el capítulo que dedica a las paradojas de Zenón. Con su argumento Zenón concluye, tan extravagantemente como en el resto de sus paradojas, que un intervalo de tiempo es igual a su doble (¡lo que podría interpretarse como la afirmación de que 1 es igual a 2!).

2.3.1. El planteamiento y la interpretación tradicional de la paradoja

Al igual que en las paradojas anteriores, partamos del planteamiento aristotélico de la paradoja del estadio. Como no es del todo claro, reconstruyamos el planteamiento de tal manera que nos resulte un argumento coherente. El pasaje donde se encuentra se presentará fragmentado en cuatro partes para tratar de reconstruir paso por paso en diagramas lo que Aristóteles quiere decir. El primer fragmento dice:

> El cuarto argumento supone dos series contrapuestas de cuerpos de igual número y magnitud, dispuestos desde uno y otro de los extremos de un estadio hacia su punto medio, y que se mueven en dirección contraria a la misma velocidad. Este argumento, piensa Zenón, lleva a la conclusión de que la mitad de un tiempo es igual al doble de ese tiempo. El paralogismo está en pensar que un cuerpo ocupa un tiempo igual en pasar con igual velocidad a un cuerpo que está en movimiento y a otro de igual magnitud que está en reposo; pero esto es falso. Por ejemplo, sean *AAAA* cuerpos en reposo de igual magnitud, *BBBB* cuerpos en movimiento de igual número y magnitud que los *AAAA* y que parten desde un extremo de los *AAAA*, y sean *CCCC* cuerpos en movimiento iguales en número, magnitud y velocidad que los *BBBB* y que parten desde el otro extremo [Aristóteles, *Física*: 239b33-240a8].

[87] Aunque sin retomar la idea de infinitesimal, hay ideas parecidas que apuntan en esta dirección. Erickson y Fossa contempla la posibilidad de que un cuerpo en estado de movimiento instantáneo ocupe un volumen mayor al que ocupa en reposo: "A possibility apparently not discussed in the literature is that a moving arrow might effectively fill a larger amount of space than an arrow at rest. Thus, the paradox would fail because it would contain a false (ambiguous) premise; nevertheless, motion and atomic time would not be contradictory" [Erickson y Fossa 1998: 13]. Y basada en el principio de incertidumbre de la mecánica cuántica aplicado a las partículas elementales, Papa-Grimaldi propone la ocupación de un objeto macroscópico mayor a su volumen: "So why, one must ask, don't macro-objects behave like these final entities of which they are also constituted, whereas atoms, protons etc. do? How far up from these entities on the observational scale must one go to find an entity that behaves like a classical object? The answer, as I mentioned above and as one should expect by this theory, is of purely observational nature" [Papa-Grimaldi 2007: 148]. Aquí Papa-Grimaldi sugiere cometer una falacia de composición, pues no es ninguna necesidad que el objeto macroscópico posea las mismas propiedades que sus constituyentes microscópicos.

El diagrama que resulta de seguir este fragmento de Aristóteles se muestra a continuación en la figura 2.2:

				A1	A2	A3	A4				
B4	B3	B2	B1	⇨							
							⇦	C1	C2	C3	C4

Figura 2.2. Estado inicial del estadio. Las flechas indican que el conjunto de cuerpos alineados se encuentran en movimiento, así como la dirección del mismo.

En concreto, cuando Aristóteles expone su ejemplo, no menciona que los cuerpos posean velocidades en sentido contrario, pero esto sí se menciona líneas más arriba. De los cuerpos *CCCC* no se especifica de qué cuerpo es el extremo del que se parte. Como dice “el otro extremo”, se sobreentiende que es el de *A*. Las numeraciones se toman según la designación del ‘primer’ y ‘último’ del segundo fragmento:

> En primer lugar, cuando los *BBBB* y los *CCCC* se crucen entre sí, el primer *B* habrá alcanzado el último *C* en el mismo momento en que el primer *C* haya alcanzado al último *B* [Aristóteles, *Física*, 240a8-11].

O sea, en términos de los cuerpos numerados, *B*1 (el primer *B*) habrá alcanzado *C*4 (el último *C*) en el mismo momento en que *C*1 (el primer *C*) haya alcanzado *B*4 (el último *B*). Lo que es equivalente a decir que, si se interpreta el término ‘alcanzar’ como llegar a alinearse, los cuerpos se disponen como lo muestra el diagrama de la figura 2.3:

	A1	A2	A3	A4	
	B4	B3	B2	B1	⇨
⇦	C1	C2	C3	C4	

Figura 2.3. Estado del estadio posterior al representado en la figura 2.2, en el instante en el que los cuerpos están totalmente alineados.

La explicación de Aristóteles comienza a ser confusa en el tercer fragmento:

> En segundo lugar, como en ese momento el primer *C* habrá pasado a todos los *B* pero sólo a la mitad de los *A*, su tiempo en pasar a la mitad de los *A* será la mitad del tiempo ocupado para pasar a todos los *B*, ya que el primer *C* (dice Zenón) tendrá que ocupar un tiempo igual para pasar a cada uno de los *B* que para pasar a cada uno de los *A* [Aristóteles, *Física*, 240a11-13].

Aquí Aristóteles afirma que *C*1 pasa a los cuatro *B* y solamente a 2 de los *A*. Sin embargo, de la figura 2.2 a la figura 2.3 claramente se ve que, a diferencia de lo que Aristóteles dice, *C*1 pasa todos los cuerpos *B* (cuatro cuerpos) y todos los cuerpos *A* (también cuatro cuerpos). Ahora bien, para que este fragmento de Aristóteles tenga sentido, la interpretación más tradicional propone comenzar a tomar el recorrido de los cuerpos *B* y *C* justo en el centro de los cuerpos *A*, como lo muestra el siguiente diagrama en la figura 2.4:

		A1	A2	A3	A4		
B4	B3	B2	B1	⇨			
			⇦	C1	C2	C3	C4

Figura 2.4. Estado intermedio entre los representados en las figuras 2.2 y 2.3 del estadio, más acorde con el estado inicial referido por Aristóteles.

Debe notarse que esta configuración, a pesar de que no se corresponde con el estado inicial descrito en el primer fragmento (que decía que los cuerpos parten desde los extremos de *A*) no es un estado posterior inconsistente con el estado inicial, y que bien puede considerarse como un nuevo estado intermedio necesario a Aristóteles para realizar la observación que aquí hace. Además, este estado intermedio brinda al planteamiento coherencia con las ideas que Aristóteles atribuye a Zenón; de otra manera, la afirmación de que *C*1 pasa a los cuatro *B* y solamente a 2 de los *A* no se puede sostener. Finalmente, el cuarto fragmento dice así:

> En tercer lugar, en ese mismo tiempo todos los *B* habrán pasado a todos los *C*; porque, como el primer *C* ocupa el mismo tiempo para pasar a cada uno de los *A* y a cada uno de los *B* (así dice Zenón), el primer *C* y el primer *B* alcanzarán simultáneamente los extremos del estadio, ya que cada uno de ellos ocupa un tiempo igual para pasar a cada uno de los *A* [Aristóteles, *Física*, 240a13-18].

La palabras siguen prestándose a confusión, ya que no es fácil entender a Aristóteles cuando afirma que "en *ese mismo tiempo todos* los *B* habrán pasado a *todos* los *C*" (mis cursivas) ya que en el tercer fragmento decía que "en ese momento *el primer C* habrá pasado a *todos* los *B*". ¿Es posible que dado el *primer C* haya pasado a *todos* los *B*, entonces *todos* los *B* hayan pasado a *todos* los *C*? Es posible si y sólo si *todos* los *C* (el primero entre ellos) han pasado a *todos* los *B*. Esto sugiere el siguiente diagrama (figura 2.5):

			A1	A2	A3	A4			
					B4	B3	B2	B1	⇨
⇦	C1	C2	C3	C4					

Figura 2.5. Estado del estadio posterior al representado en la figura 2.3, cuando los cuerpos en movimiento justo ya no comparten ninguna posición horizontal.

O cualquier otro diagrama que muestre etapas posteriores dado el movimiento que se ha supuesto. Sin embargo, la interpretación que busca darle coherencia a este argumento presta atención a Aristóteles cuando se refiere a "ese mismo tiempo", es decir, el tiempo al que se refería en el tercer fragmento en el que "el primer *C* habrá pasado a todos los *B* pero sólo a la mitad de los *A*", o sea, en el que los cuerpos se disponían como lo muestra la figura 2.3. De esta manera, tiene sentido pensar que cuando Aristóteles dice en el cuarto fragmento que "*todos* los *B* habrán pasado a *todos* los *C*", se esté refiriendo a que el conjunto de los cuerpos *B* se encuentra alineado con el conjunto de los cuerpos *B*.

Todavía menos clara es la conclusión que Aristóteles atribuye a Zenón, y que se encuentra en el primer fragmento: "la mitad de un tiempo es igual al doble de ese tiempo". Si denominamos a ese intervalo de tiempo Δt, ¿cómo debemos de entender la descripción de Aristóteles? ¿Que $½\Delta t = 2\Delta t$ o que $½\Delta t = \Delta$t (o sea $½\Delta t = 2(½\Delta t)$)?[88] Para que tenga sentido lo que se ha reconstruido arriba es necesario tomarlo de la segunda manera.

Así las cosas, la reconstrucción que resulta del argumento puede enunciarse de la siguiente manera.[89] Supónganse tres filas de cuerpos del mismo tamaño dispuestos como lo muestra la figura 2.4. La primera fila (*A*) permanece en reposo. La segunda (*B*) y la tercera (*C*) se mueven a una misma velocidad en magnitud pero en direcciones

[88] Esta misma observación ya la hace Faris: "Is it being asserted that ½T = 2T or that ½T = T?" [Faris 1996: 78].
[89] Buenas exposiciones de la reconstrucción tradicional del argumento se pueden encontrar en [Erickson y Fossa 1998: 131-2], [Papa-Grimaldi 1996: 301], [Salmon 1970: 11] y [Rescher 2001: 101-2].

opuestas, tal como lo muestran las flechas del diagrama. Nótese que *B*1 se encuentra alineado con *A*2 y *C*1 con *A*3. Dada esta disposición en las posiciones y en las velocidades, en algún momento posterior la posición de las filas de cuerpos será como lo muestra el diagrama de la figura 2.3. *B*1 se encuentra alineado con *A*4, o sea que su extremo derecho recorrió la distancia correspondiente a dos cuerpos (*A*3 y *A*4). Pero al final del mismo intervalo de tiempo, *C*1 se encuentra alineado con *B*4, lo que nos indica que su extremo izquierdo recorrió la distancia correspondiente a cuatro cuerpos (*B*1, *B*2, *B*3 y *B*4). Así, si al extremo derecho de *B*1 le toma recorrer dos cuerpos en un tiempo Δt, entonces al extremo izquierdo de *C*1, que lleva la misma velocidad, le debe tomar el doble de tiempo ($2\Delta t$) recorrer el doble de espacio (cuatro cuerpos). Pero le toma Δt, por lo tanto un tiempo es igual a su doble.

Como comentario más inmediato se puede hacer a Zenón la siguiente pregunta: ¿Por qué considera el movimiento de la fila *B* con respecto a la fila *A*, y el movimiento de la fila *C* con respecto a la fila *B* y no también con respecto a la fila *A*? ¿Por qué no utiliza la misma unidad de medida, la misma escala, el mismo criterio, para medir el movimiento? Es ampliamente aceptado[90] que en esta cuestión radica el error de Zenón (se puede verificar en el primer fragmento de la versión de Aristóteles que incluso él ya ofrece esta solución). Incluso bajo una teoría intuitiva o primitiva del movimiento, no es correcto considerar el movimiento de un cuerpo con respecto a otro cuerpo también en movimiento de la misma manera que consideramos un cuerpo con respecto a otro cuerpo en reposo. Si tomamos en cuenta el movimiento de la fila *C* con respecto a la fila *A*, vemos que, al igual que la fila *B*, también recorre dos cuerpos. De la misma manera, si se toma en cuenta el movimiento de la fila *B* con respecto a la fila *C*, se verá que recorre cuatro cuerpos tal como lo hace la fila *C* con respecto a la fila *B*. La paradoja se resuelve al considerar las peculiaridades del movimiento relativo.

2.3.2. Un cruce sin encuentro: implicación del espacio y tiempo discretos para el movimiento

La reconstrucción de la paradoja llevada a cabo en la sección anterior deja abierta la posibilidad de considerar el movimiento en un espacio y tiempo discretos así como continuos. La paradoja del estadio, al igual que la de la flecha, es considerada como algunos como un argumento que tiene el fin de mostrar lo absurdo que resulta asumir un espacio y un tiempo discreto o atómico. Independientemente de si esto era el objeto de Zenón, en esta sección vamos a mostrar que dicha asunción tiene consecuencias contraintuitivas, mas que eso no demuestra su absurdidad.

Supongamos entonces, y volvemos a auxiliarnos con los diagramas, que cada cuerpo de las filas *A*, *B* y *C* del diagrama mostrado en la figura 2.4 ocupan la longitud mínima posible (la longitud atómica), y además que van a la velocidad máxima posible, es decir, la distancia mínima es recorrida en el tiempo mínimo (la duración atómica).

[90] Ejemplos de autores que aceptan esta solución son Owen: "This is the alleged puzzle, and plainly it depends on disregarding the relative motions of the bodies" [Owen 1957-8 (1970): 149]; Salmon: "It appears that Zeno had no appreciation of relative speed, assuming that the speed of C relative to B is the same as the speed of C relative to A" [Salmon 1970: 11]; Faris: "In the Stadium passage Aristotle says about Zeno's argument, what anyone might say, that it is fallacious because it depends on the false assumption that a body takes an equal time to pass at equal speed a body that is in motion and an equal-sized body that is at rest" [Faris 1996: 91]; y Rescher: "The resolution here lies in noting the equivocation of the idea of *speed* between an unrelativized and a relativized mode. […] We must simply avert the equivocation as between speed relative *to a fixed frame of reference* and *speed relative to the position of other particular objects*" [Rescher 2001: 102].

Así, durante el primer instante (atómico) los cuerpos se encontrarán tal como lo muestra la figura 2.4. Durante el siguiente instante, los cuerpos se dispondrán como lo muestra el siguiente diagrama (figura 2.6):

	A1	A2	A3	A4	
B4	B3	B2	B1	⇨	
	⇦	C1	C2	C3	C4

Figura 2.6. Siguiente estado del estadio al representado en la figura 2.4, en un espacio atómico, con cuerpos de mínimo tamaño y viajando con la rapidez máxima. En esta transición de estados, los cuerpos *B*1 y *C*1 nunca se encuentran alineados.

Finalmente, durante el tercer instante los cuerpos ocuparan las posiciones tal como lo muestra el diagrama en la figura 2.3.[91] Esta sucesión discreta de posiciones tiene consecuencias interesantes. En el primer instante (figura 2.4) *B*1 se encuentra adyacente con *C*1, y alineado con el lugar que ocuparía el cuerpo imaginario *C*0. En el segundo instante (figura 2.6) *B*1 se encuentra alineado con *C*2 mientras que *C*1 está alineado con *B*2. Finalmente, en el tercer instante (figura 2.3) *B*1 está alineado con *C*4 y *C*1 con *B*4. Esto quiere decir que *B*1 y *C*1 jamás se encuentran alineados. Ocurre un salto que no es muy acorde con nuestras intuiciones. De la misma manera, tampoco ocurren nunca las alineaciones de *B*1 con *C*3, *B*2 con *C*2, *B*3 con *C*1, *B*2 con *C*4, *B*3 con *C*3, *B*4 con *C*2 y *B*4 con *C*4.

Dada esta consecuencia, Owen concluye que bajo la asunción atómica del movimiento se demuestra que los cuerpos no pueden moverse en dirección contraria;[92] y Glazebrook sostiene que la paradoja del estadio demuestra que la concepción atómica del movimiento no es adecuada.[93] Estas conclusiones merecen dos comentarios. En primer lugar, las dos exigen una concepción continua del movimiento. Al exigir que dos cuerpos se alineen al cruzarse en direcciones contrarias lo que se está exigiendo es una infinita divisibilidad, se está exigiendo un momento y una distancia atómica más pequeña que la permitida por la concepción atómica. Estos saltos son inconsistentes con la concepción continua, pero si nos encontramos dentro del marco de la concepción atómica, ¿por qué apelar a una característica que pertenece a otro marco?[94] ¡La continuidad también tiene intuiciones a favor![95]

---

[91] Entre los que defienden que la concepción atómica es la interpretación debida a la interpretación de la paradoja se pueden contar a Gaye [1910: 115-6], Lee [1936:100], Ross [1936: 81-2] y Glazebrook [2001: 203-4].

[92] Lo concluye de la siguiente manera: “if bodies are made up of infinitesimal lengths, then even if bodies do move at the same speed they cannot move in opposite directions” [Owen 1957-8 (1970): 150].

[93] Glazebrook argumenta: “In the time one C passes one B, it has passed half an A. But this is impossible since there can be no half of the minimal. Under this reading, the Moving Rows, like the Arrow, denies the atomicity of distance in that it refutes the possibility that both time and space are finitely divisible” [Glazebrook 2001: 203-4].

[94] Grünbaum también realiza esta observación: “A2 and B1 did not cross each other at all. For given that instants are indivisible, all we can say is that at one instant A1 is over B1 and at the very next instant, A3 is over B1. Nothing has happened between the instants, since the supposition that A2 and B1 have crossed springs from the tacit but illicit assumption of denseness” [Grünbaum 1970: 248]. Hay que aclarar que Grünbaum utiliza otro diagrama gráfico para su análisis. Utiliza sólo tres cuerpos en cada línea y el orden numérico no coincide con la dirección del movimiento. Hacia la izquierda se dirige A1A2A3 y hacia la derecha se dirige B1B2B3. El salto del que habla es del momento en el que todos los cuerpos se encuentran alineados al siguiente momento atómico.

[95] Van Bendegem reconoce que el movimiento representa el punto más problemático de un espacio discreto y un tiempo discreto: “Of all the problems a discrete viewpoint has to deal with, this [el movimiento] is no doubt the hardest problem to tackle” [Van Bendegem 1995: 141].

En segundo lugar, ninguna de las dos conclusiones tiene relación con la conclusión de Zenón, que es donde reside la paradoja atribuida a él, de que el tiempo es igual a su doble. Lee, atendiendo a esto, presenta un argumento adoptando la concepción atómica con el objeto de que la conclusión de la paradoja se siga:

> For Zeno's argument it is necessary to assume […] that the only possible positions are those in which the various As, Bs, and Cs are in line. […] if we assume further that the only possible measure of the distance a body has travelled (and so of the time it has been travelling relative to any other body assumed to be travelling at the same speed) is the number of bodies it has passed, Zeno's conclusion will follow [Lee 1936:100].

Esto tiene una grave inconveniencia, y es que sólo se cumple para cuerpos de mínimo tamaño. En caso de que cada cuerpo tuviera un tamaño distinto, aún respetando los tamaños permitidos por la concepción atómica, la información de distancia recorrida sería de poca utilidad, ya que el decir dos cuerpos, cinco cuerpos, sin decir el tamaño en unidades atómicas de cada uno de ellos, podría denotar cualquier distancia. Además, Lee, al igual que Zenón, continúa relegando la relatividad del movimiento. Pero todavía hay algo peor. Faris acertadamente detecta que este criterio es aún más paradójico,[96] ya que si seguimos la sucesión en los diagramas de la figura 2.4-figura 2.6-figura 2.3, se aprecia que el cuerpo *B*1, por ejemplo, recorre una distancia de dos cuerpos (con respecto a *A*), mientras que *B*4 tan sólo recorre una distancia de un cuerpo.

En suma, de tener el espacio y el tiempo una estructura discreta, el movimiento relativo, el cambio de posiciones de un objeto con respecto a otro, tendrá peculiaridades que, además de ser completamente distintas al movimiento continuo, van en contra de ciertas intuiciones que tenemos acerca del movimiento. Este es el caso de la falta de alineación entre ciertos cuerpos que se mueven en dirección contraria. Repito, pues es relevante: el movimiento continuo, en un espacio y tiempo continuos, además de tener intuiciones en contra, tiene también intuiciones a favor.

2.3.3. La solución bajo relatividad de Galileo

La conclusión de Zenón para la paradoja del estadio se encuentra, sin duda alguna, completamente fuera de la mecánica newtoniana. Ésta ofrece un tratamiento riguroso del movimiento relativo completamente satisfactorio a nuestras intuiciones. Dicho tratamiento, que no consiste más que en la aplicación de las transformaciones de Galileo, es uno de los pilares de la mecánica newtoniana, pues es una de las asunciones fundamentales de las leyes de Newton (más de esto en el apartado 4.1). Es un tratamiento que exige la medida del movimiento de todos los objetos respecto a un mismo objeto (no necesariamente un cuerpo) –cosa que Zenón no asume– que viaje con velocidad constante, y asegura la consistencia del movimiento entre todos los cuerpos si dicho objeto se asume en reposo, así como si cualquier objeto (con velocidad constante) que se tome como referente se asume en reposo. Por supuesto, esto implica que, si yo tomo como referente un determinado objeto en movimiento (con velocidad constante), y considero el reposo para tal objeto, entonces, visto desde esta nueva perspectiva (a la

[96] Lo expresa en el siguiente pasaje: "If it is true, other paradoxes emerge […]; for example, in the move from the figure 6.1 position [figura 2.4 en el texto principal del presente escrito] to the figure 6.2 position [figura 2.3] despite the fact that the Bs move en bloc the third B will have moved a longer distance than the last B, since it will have passed two As whereas the last B will have passed only one A" [Faris 1996: 93].

que se le llama marco de referencia inercial), las trayectorias de todos los cuerpos y objetos se verán modificadas (de tal manera, precisamente, que el objeto referente adquiera la trayectoria correspondiente al reposo). ¿Cómo se modifican? Esto es precisamente lo que nos indican las transformaciones de Galileo, que, para cualquier cuerpo *B* que se mueve con respecto a *A* (suponiendo que el objeto *A* se encuentra en movimiento con velocidad constante en la dirección del eje *x*), se expresan de la siguiente manera:

$$x_{B/A} = x_B - v_A t$$
$$y_{B/A} = y_B$$
$$z_{B/A} = z_B$$
$$t_{B/A} = t_B$$

Donde *x*, *y*, *z* son las coordenadas espaciales, *t* el tiempo y v_A la velocidad constante con la que se mueve el objeto *A* en el supuesto marco de referencia inercial "absoluto". Así, $x_{B/A}$ denota la coordenada *x* que toma el cuerpo *B* cuando se mueve con respecto a *A*. Lo mismo para el resto de las variables.

Nótese que el tiempo es el mismo, independientemente de *A* o de *B*, y por tanto la conclusión de Zenón queda descartada. Para ser más precisos, derivando la primera ecuación con respecto al tiempo obtenemos que la velocidad de *B* con respecto a *A* es $v_{A/B} = v_B - v_A$. Con esto, retomemos el agrupamiento de filas *A*, *B* y *C* como lo muestra el diagrama en la figura 2.4 y asumamos, como lo hace la mecánica clásica, un marco de referencia inercial. Escojamos el marco en donde el cuerpo *A* se encuentra en reposo. Así, un observador que se encuentra en el mismo marco de referencia inercial que *A* observa que *B* viaja con una velocidad con respecto a *A* $v_{B/A} = S$ y de la misma manera *C* se mueve con una velocidad $v_{C/A} = -S$ (donde *S* es un valor numérico correspondiente a una rapidez constante). La velocidad de *A* en este marco es $v_{A/A} = 0$. Con esto, podemos aplicar las transformaciones de traslación de Galileo. Si transformamos las velocidades con respecto a un marco inercial en donde el cuerpo *B* se encuentra en reposo tenemos que las velocidades de los cuerpos son $v_{B/B} = v_{B/A} - v_{B/A} = 0$, $v_{A/B} = v_{A/A} - v_{B/A} = 0 - S = -S$ y $v_{C/B} = v_{C/A} - v_{B/A} = -S - S = -2S$. Si hacemos lo mismo para un marco de referencia inercial con el cuerpo *C* en reposo tenemos que $v_{C/C} = v_{C/A} - v_{C/A} = 0$, $v_{A/C} = v_{A/A} - v_{C/A} = 0 - (-S) = S$ y $v_{B/C} = v_{B/A} - v_{C/A} = S - (-S) = 2S$. Estos valores para cada velocidad referidos a estos marcos de referencia inercial no varían, independientemente del marco de referencia de origen.

Teniendo ya esto y recordando que nuestras velocidades son constantes, para el cálculo del tiempo que tardan los cuerpos en pasar de la posición que manifiesta la figura 2.4 a la de la figura 2.3 podemos utilizar $\Delta t = \Delta x/v$. Así, si suponemos que $S = 2$ ul/ut (unidad de longitud por unidad de tiempo) y que cada uno de los cuerpos de cada fila mide 1 ul, el tiempo que le toma al extremo derecho de *B* llegar al extremo derecho de *A* es $\Delta t = \Delta x/v_{B/A} = 2$ ul/(2 ul/ut) = 1 ut. Ahora tomemos el marco de *B* y calculemos el tiempo en el que el extremo izquierdo de *C* alcanza el extremo izquierdo de *B*: $\Delta t = \Delta x/v_{C/B} = -4$ ul/ (–2(2 ul/ut)) = 1 ut. De esta forma ya no se confunden los movimientos relativos, y llegar a la conclusión de que un tiempo es igual a su doble es imposible.

Una última cuestión: ¿y si no exigimos –como Zenón– la referencia de todo el movimiento a un mismo objeto? Entonces tendríamos un movimiento de los cuerpos bastante anárquico. Podríamos medir, por ejemplo, el movimiento de un objeto en referencia al sistema de coordenadas la velocidad constante que se nos antoje, y de la misma manera postular entonces para cada objeto la velocidad a nuestro antojo. En este caso, la velocidad constante de los cuerpos no sería ningún parámetro útil para describir el movimiento.

SEGUNDA PARTE

LEGITIMIDAD DE LAS SUPERTAREAS NEWTONIANAS

3. El surgimiento de anomalías en supertareas newtonianas

A pesar de las diversas contraintuiciones que existen en torno al movimiento continuo, inmerso en un espacio y tiempo continuos, en los capítulos anteriores hemos visto que dicho modelo del movimiento no genera contradicción alguna. Vimos también que tal concepción permite trayectorias en las que se pueden identificar una infinidad de actos bien diferenciados unos de otros dentro de un intervalo de tiempo finito: trayectorias que, sin ambigüedad alguna, llevan a cabo una infinidad de desplazamientos –actos– distinguidos unos de otros por los intervalos en reposo que los separan en un tiempo finito. Trayectorias que llevan a cabo supertareas. Teniendo esto, podríamos pasar directamente a tratar las supertareas enmarcadas bajo la mecánica newtoniana. Sin embargo, existen argumentos, al margen del tipo de movimiento que se asuma, que atacan con fuerza la consistencia lógica de la idea de una supertarea. En este capítulo veremos que tales argumentos no se siguen, e ilustraremos con ejemplos (que asumen un movimiento continuo bajo la mecánica newtoniana) que hay supertareas consistentes con sus supuestos estados finales. Así, podemos estar seguros de que la idea de una supertarea, bajo el movimiento continuo, es una idea consistente. Esto, no obstante, no deja a las supertareas libres de problemas. Precisamente, presentaremos enseguida tres modelos de supertareas newtonianas –el tipo de procesos con los que trabajaremos en el resto del trabajo– que muestran la presencia en la mecánica newtoniana de características problemáticas: el indeterminismo, la pérdida de la energía, y la desaparición de objetos.

La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, el apartado 3.1 tratará con los argumentos que amenazan la consistencia lógica de las supertareas. En la sección 3.1.1 se abordarán las máquinas de Black; en la sección 3.1.1.1 se analiza el argumento de Black, y se muestra que es incorrecto. Tras ello, en la sección 3.1.1.2 se presentan una serie de modelos newtonianos para cada una de las máquinas y se especifica el estado final consistente con el proceso según cada modelo. En seguida, la sección 3.1.2 trata con la lámpara de Thomson. En la sección 3.1.2.1 se analiza el argumento de Thomson, y se muestra que no es válido. Tras ello, en la sección 3.1.2.2 se presentan modelos newtonianos para la lámpara y se muestra que, dependiendo del modelo que se tome, la lámpara terminará encendida o apagada en consistencia con el proceso que lo antecede. Seguidamente, el apartado 3.1.3 trata con el proceso descrito en la paradoja de Ross-Littlewood. En la sección 3.1.3.1 se analizan argumentos que prescinden de consideraciones cinemáticas, y se comprueba que con ello no queda claro el estado final del proceso. Tras esto, en la sección 3.1.3.2 se presentan modelos newtonianos para el proceso original y sus variaciones así como el estado final correspondiente a cada modelo. Una vez mostrada la consistencia de estas supertareas, el apartado 3.2 pasa a exponer los principales problemas o anomalías de las supertareas newtonianas basadas en colisiones elásticas. En la sección 3.2.1 se expone ST1, un modelo (célebre por su simplicidad) que presenta pérdida de la energía. En la sección 3.2.2 se expone ST2, un modelo que presenta la desaparición de sus partículas. En la sección 3.2.3 se expone ST3, un modelo que presenta escape al infinito. Los tres procesos, revertidos temporalmente, muestran formas del indeterminismo en mecánica newtoniana. Seguidamente, en la sección 3.4, se especifican los problemas más importantes de estas supertareas: el indeterminismo y la pérdida de la energía, problemas que trataremos a fondo en la tercera parte de este trabajo.

3.1. Modelos consistentes de supertareas bajo la mecánica newtoniana

Antes de que se propusieran las supertareas al margen de una teoría física con el objeto de demostrar que la idea de una infinidad de actos es una idea contradictoria (*self-contradictory*), Russell ya sugería que no hay ningún impedimento lógico para concebir semejante idea:

> Miss Ambrose says it is *logically* impossible to run through the whole expansion of π. I should have said it was *medically* impossible. […] The opinion that the phrase "after an infinite number of operations" is self-contradictory, seems scarcely correct. Might not a man's skill increase so fast that he performed each operation in half the time required for its predecessor? In that case, the whole infinite series would take only twice as long as the first operation [Russell 1996 (1935-6): 323].

El argumento de Russell es breve y no profundiza en la cuestión. A diferencia, los argumentos de Black y Thomson, que recurren al planteamiento de supertareas, son penetrantes. Estos, al sostener con tanta fuerza que la idea un número infinito de actos es contradictoria, amenazan en principio la consistencia lógica de las supertareas newtonianas que más adelante enfrentaremos. No podemos, pues, pasar por alto estos argumentos antes de adentrarnos en el análisis de las supertareas newtonianas.

A continuación se enfrentarán dichos argumentos. Se verá que son incorrectos y, por tanto, que no constituyen ninguna amenaza para las supertareas newtonianas que trataremos en el resto de los capítulos. Además, para alejar cualquier duda, se propondrán modelos, enmarcados en un universo newtoniano, para cada uno de los procesos, en los que conoceremos sin ambigüedad alguna el estado de cada objeto que interviene en todo instante del intervalo durante el que se llevan a cabo los procesos, así como del primer instante ajeno a dicho intervalo.

3.1.1. Las máquinas de Black: la idea de una supertarea es contradictoria

Seis son las máquinas de Black; a saber, Alpha, Beta, Gamma, Delta, Epsilon y Phi. El funcionamiento de la primera, Alpha, es descrito por el mismo Black con las siguientes palabras:

> Let us suppose that upon our left a narrow tray stretches into the distance as far as the most powerful telescope can follow; and that this tray or slot is full of marbles. Here, at the middle, where the line of marbles begins, there stands a kind of mechanical scoop; and to the right, a second, but empty tray, stretching away into the distance beyond the farthest reach of vision. Now the machine is started. During the first minute of its operation, it seizes a marble and transfers it to the empty tray; then it rests a minute. In the next half minute the machine seizes a second marble on the left, transfers it, and rest half-a-minute. The third marble is moved in a quarter of a minute, with a corresponding pause; the next in one eight of a minute; and so until the movements are so fast that all we can see is a grey blur. But at the end of exactly four minutes the machine comes to a halt, and we now see that the left-hand tray that was full seems to be empty, while the right-hand tray was empty seems full of marbles [Black 1970 (1950-1): 74-5].

Aunque Black no precisa el tamaño de los contenedores, es claro que ambos tienen la capacidad de contener un número infinito de bolas. Si el tamaño de cada bola es el mismo, entonces es necesario que el tamaño de los recipientes sea infinito. En caso contrario, sólo si el tamaño de las bolas decrece de tal manera que forma una suma convergente, entonces el recipiente puede ser finito. En cualquier caso, considerando que Alpha comienza a funcionar cuando el tiempo $t = 0$ (minutos), su primer descanso lo hará cuando $t = 1$. Volverá a arrancar cuando $t = 2$ y se tomará su segundo descanso cuando $t = 5/2$, y así sucesivamente. En general, Alpha retomará su funcionamiento en cuanto t tome un valor $T_a = 4\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ y su descanso en cuanto t tome un valor $T_b = 4\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}}$, en donde $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. De esta manera, a cada tiempo de funcionamiento T_a con n le corresponde un tiempo de descanso T_b con esa misma n.

Beta, la segunda máquina, funciona de forma paralela a Alpha, con la crucial diferencia de que sólo transfiere una bola:

> Let there be only *one* marble in the left hand tray to begin with, and let some device always return *that same marble* while the machine is resting [Black 1970 (1950-1): 75].

Para esta máquina tanto el recipiente izquierdo como el derecho pueden ser infinitos o finitos. De la misma manera que Alpha, Beta comienza sus etapas de transferencia cuando $t = T_a$ y sus etapas de reposo cuando $t = T_b$. Ahora bien, la única bola manipulada por Beta es regresada a su recipiente original (el izquierdo), mientras ésta se encuentra en reposo, por algún dispositivo (‘*some device*’) que no conocemos. Precisamente, ese dispositivo es la tercera máquina de Black, Gamma:

> I said, before, that ‘some device’ always restored the marble to its original position in the left-hand tray. Now the most natural device to use for this purpose is another machine – Gamma, say – working like Beta but *from right to left*. Let it be arranged that no sooner does Beta move the marble from left to right than Gamma moves it back again [Black 1970 (1950-1): 76-7].

Es decir que Gamma, al contrario de Alpha y Beta, comienza sus etapas de transferencia cuando $t = T_b$ y sus etapas de descanso cuando $t = T_a$. Es importante notar que tanto Beta depende de Gamma como ésta de aquélla. Beta, sin Gamma, no tendrá bola que transferir a partir de su segunda operación. Lo mismo sucederá a Gamma sin Beta. La una sin la otra no realiza nada más allá de transcurridos dos minutos. No es, pues, extraño ni ingenuo concebir este par de máquinas, al trabajar conjuntamente, como una sola máquina.

En cuanto a la cuarta y quinta máquina, al trabajar, como Beta y Gamma, conjuntamente, Black las describe también conjuntamente:

> Consider […] two machines, Delta and Epsilon, say, that begin to work with a single marble each, but in opposite directions. Let Delta start with the marble *a* and Epsilon with the marble *b*. Now suppose the following sequence of operations: while Delta transfers marble *a* from left to right in one minute, Epsilon transfers marble *b* from right to left; then Delta moves *b* from left to right in half a minute while Epsilon returns *a* from right to left during the same time; and so on, indefinitely, with each operation taking half the time of its predecessor [Black 1970 (1950-1): 78].

La característica más relevante de Delta y Epsilon es que nunca tienen descanso entre una operación y su contigua dentro de la sucesión infinita. Después de transferir la bola *a*, siempre tendrán que transferir inmediatamente la bola *b*. Y después de esta última transferencia, tendrán que transferir de nuevo la bola *a*. Al igual que Beta y Gamma, Delta y Epsilon también dependen la una de la otra. En el caso de que alguna de las dos faltara, la otra sólo podría llevar a cabo la primera operación. Por otro lado, el tiempo t en el que Delta y Epsilon comienzan cada nueva operación es $t = T_c = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$.

Máquina.	Número de bolas con las que trabaja.	Dirección de transferencia de las bolas.	Comienza a funcionar en los instantes…	Comienza a descansar en los instantes…	Trabaja conjuntamente con…
Alpha.	Infinitas.	Izquierda a derecha.	T_a.	T_b.	Ninguna.
Beta.	Una.	Izquierda a derecha.	T_a.	T_b.	Gamma.
Gamma.	Una.	Derecha a izquierda.	T_b.	T_a.	Beta.
Delta.	Dos (*a* y *b*).	Izquierda a derecha.	Comienza una nueva operación en cada T_c. Comienza con a y sigue con *b*-*a*-*b*-*a*-etc.	No descansa.	Epsilon.
Epsilon.	Dos (*b* y *a*).	Derecha a izquierda.	Comienza una nueva operación en cada T_c. Comienza con b y sigue con *a*-*b*-*a*-*b*-etc.	No descansa.	Delta.
Phi.	Infinitas. El tamaño total ocupa un espacio finito.	Izquierda a Derecha.	No se especifica. Puede ser T_a.	Puede ser T_b.	Ninguna.

Tabla 3.1. Las máquinas de Black y sus características.

Finalmente, la maquina Phi funciona de la misma manera que la máquina Alpha excepto por el tipo bolas con las que trabaja. Para este último caso, las bolas son sucesivamente más pequeñas de tal manera que la totalidad de ellas ocupa un espacio finito:

> a machine – Phi, say – transferring marbles that become progressively smaller in geometrical progression [Black 1970 (1950-1): 78-9].

Son seis máquinas y muchos los parecidos. Una se distingue de las demás tan sólo por la variación de ciertos matices. A continuación se pasará a hacer el análisis de los argumentos de Black, y posteriormente se presentarán modelos newtonianos de cada una de las máquinas. Con el fin de tener bien diferenciadas cada una de ellas en las próximas secciones, se presenta la tabla comparativa –tabla 3.1– con las características distintivas de cada máquina.

3.1.1.1. El argumento de Black falla

El argumento de Black, que pretende demostrar que la idea de la ejecución de una infinidad de actos es una idea contradictoria (*self-contradictory*), consiste básicamente en un ejercicio de comparación. Comparar cómo funciona una máquina para inferir lo que se puede decir de la otra. Comparar lo que sucede en las máquinas para inferir lo que le sucede a Aquiles en su carrera. La comparación crucial es la de Alpha con Beta (que, no se debe olvidar, se encuentra trabajando conjuntamente con Gamma):

> Imagine Alpha and Beta both at work side by side on their respective tasks: every time the one moves, so does the other; if one succeeds in its task, so must the other; and if it is impossible for either to succeed, it is impossible for *each* [Black 1970 (1950-1): 75].

Se aprecia que se hace la comparación suponiendo que, si una máquina logra realizar su tarea, la otra también, y si una no logra su cometido, la otra tampoco. Aquí es preciso dejar muy claro lo que se entiende por la tarea (‘*task*’ en la última cita) de cada máquina. Según Black, la tarea de Alpha es transferir del recipiente izquierdo al recipiente derecho un número infinito (en el caso de que los haya) de bolas. En cambio, la tarea de Beta es transferir una bola del recipiente izquierdo al derecho.[97] Como aquí nos estamos refiriendo a la tarea total o global de la máquina, llamémosle de aquí en adelante la supertarea de la máquina. Ante esto, Black concluye la contradicción que conlleva concebir que Beta ejecute satisfactoriamente su supertarea, y añadiendo la suposición de que si no es posible concluir la supertarea para una máquina, para la otra tampoco, concluye la contradicción de la idea que concibe la ejecución de una infinidad de actos:

> Now our machine, Beta, is in just this predicament: the very act of transferring the marble from left to right immediately causes it to be returned again; the operation is self-defeating and it is logically impossible for its end to be achieved. Now if this is

[97] La tarea de Beta en el siguiente fragmento de su texto sí es acorde con la descripción de su máquina: “The task, as in Alpha’s case, is to transfer an infinite series of qualitatively similar but different marbles; […] the task, as in Beta’s case, is constantly to transfer the *same* marble that is immediately returned to its original position” [Black 1970 (1950-1): 75]. Sin embargo, a lo largo de todo su argumento considera como tarea global, como supertarea, la que se indica en el texto principal. Por ejemplo: “If the result of the whole four minutes’ operation by the first machine [Beta] is to transfer the marble from left to right, the result of the whole four minutes’ operation by the second machine [Gamma] must be to transfer the marble from right to left. But there is only one marble and it must end somewhere! Hence neither machine can accomplish its task, and our description of the infinity machines involves a contradiction” [Black 1970 (1950-1): 77].

true for Beta, it must be true also for Alpha, as we have already seen [Black 1970 (1950-1): 76].

Pero, ¿se encuentran las supertareas que Black atribuye a sus máquinas de acuerdo con la descripción de las mismas? En el caso de Alpha sí. En cada instante T_a se comienza la transferencia de una bola de derecha a izquierda que termina en el siguiente instante T_b. A cada una de las bolas, aunque sean infinitas, le corresponde un intervalo de tiempo en el que fue tomada del recipiente izquierdo y dejada en el derecho. Y del recipiente derecho ya nada ni nadie las movió. La supertarea de Alpha es transferir, una por una, una infinidad de bolas.

El caso de la supertarea de Beta es distinto. Black considera que ésta es transferir una bola del recipiente izquierdo al derecho. Es decir, según Black, el resultado final de ejecutar la infinidad de operaciones de Beta debe ser el mismo que el resultado de ejecutar una sola operación de Beta. Sin embargo, esto no es acorde con la descripción. Si seguimos la descripción del funcionamiento de Beta, lo único que se puede saber es que la supertarea de ésta es transferir una infinidad de veces, en unos tiempos concretos, la misma bola del recipiente izquierdo al derecho. Pero precisamente esa infinidad de transferencias ocurren, todas ellas, antes de que transcurran cuatro minutos. Del lugar en el que la bola queda al término de esos cuatro minutos no se dice nada, y por lo mismo no se puede decir que el resultado final de Beta es dejar la bola en el recipiente derecho.[98] Así las cosas, es claro que no se puede concluir que la idea de la ejecución de una infinita sucesión de operaciones es contradictoria. La conclusión de Black no se sigue.[99]

Pese a ello, por lo pronto no se puede saber el lugar en el que está situada la bola al término de cuatro minutos de funcionamiento de las máquinas Beta y Gamma (algo similar ocurre con Delta y Epsilon). Ante esto es todavía difícil concebir la posibilidad de una máquina infinita. Como Thomson bien subraya más de una vez, la infinita posibilidad de operaciones no implica la posibilidad de una sucesión infinita de operaciones.[100] Así las cosas, ¿qué es lo que nos garantiza la posibilidad de una sucesión infinita de operaciones? Y en caso de que sea posible, ¿cómo saber el estado

[98] Grünbaum hace esta misma observación: “And he [Black] invokes the following false supposition: The assumption of the occurrence of all of Beta’s prescribed one-way transfers in a finite time, if true, *must* enable us to *deduce* that the marble will end up on the right side at the *first* instant t_1 [pasados los cuatro minutos] following *all* these transfers. If such deducibility does not obtain, Black feels entitled to conclude that Beta could not have effected the $\aleph_0$ one-way transfers in a finite time” [Grünbaum 1970: 242]. Earman y Norton también lo hacen: “All Black’s argument shows is that the history of transfers prior to 12:00 PM cannot determine the position of the marble at 12:00 PM. The arguments that yield a contradiction are merely *reductio* demonstrations of the untenability of assuming otherwise” [Earman y Norton 1998b: 243]. La versión de Earman y Norton asume que la máquina comienza la primera operación a las 12:59 y termina la supertarea a las 12:00 PM.

[99] Aunque Black acepta que el estado final de las cosas después de transcurridos los cuatro minutos del funcionamiento de las máquinas Beta y Gamma no se puede saber a partir de lo que sucede antes: “These considerations show, if I am not mistaken, that the outcome of the infinity machine’s work is independent of what the machine is supposed to have done antecedently” [Black 1970 (1950-1): 77], en ningún lugar (de la misma fuente) retira la consideración de la supertarea de Beta en su argumento.

[100] Thomson dice la misma idea de varias maneras: “to say that some operation can be performed infinitely often is not to say that a super-operation can be performed” [Thomson 1970 (1954-5): 90]; “to speak of an infinity of possibilities is not to speak of the possibility of infinity” [Thomson 1970 (1954-5): 92]; “People have, I think, confused saying (1) it is conceivable that each of an infinity of tasks be possible (practically possible) of performance, with saying (2) that it is conceivable that all of an infinite number of tasks should have been performed. They have supposed that (1) entails (2)” [Thomson 1970 (1954-5): 92]; “An infinity of possible machines is not the possibility of an infinity-machine” [Thomson 1970 (1954-5): 94].

de las cosas al final de su ejecución? Porque, si es posible, entonces, forzosamente hay un estado posterior a su ejecución consistente con su posibilidad. Necesitamos considerar suposiciones extra, ya que la definición de las máquinas tal como las describe Black no permite sacar una conclusión más plausible acerca del estado final de Beta, Gamma, Delta y Epsilon (estas dos simplemente se plantean para demostrar que la imposibilidad defendida por Black no radica en lo intervalos de tiempo inoperantes de Beta y Gamma). Cualquier lugar para la bola al final de la ejecución de la supertarea es consistente con la descripción de las máquinas. Lo mismo sucedía con la descripción que Zenón hace de la carrera entre Aquiles y la tortuga.

Y al igual que en la descripción de Zenón, considerar alguna teoría para interpretar los procesos de Black nos ayudará a conocer posibles estados finales de cada uno de los procesos. El siguiente apartado trata precisamente de elucidar la posibilidad de cada una de las máquinas de Black y su estado final, considerando la mecánica newtoniana, es decir, imponiendo las condiciones que el aparato conceptual que ésta utiliza a las descripciones hechas por Black. Se verá que hay algunas configuraciones que admiten la posibilidad de las máquinas y que admiten también un estado final consistente. Esto demuestra la falsedad de la conclusión de Black. La idea de una infinidad de operaciones no es contradictoria.

3.1.1.2. Modelos newtonianos: consistencia de los procesos de Black bajo mecánica newtoniana

Un comentario de Black nos muestra que él mismo está tentado a tomar en cuenta consideraciones teóricas del movimiento más allá de la descripción que brinda de sus máquinas; a saber, que al movimiento de una bola que oscila de un recipiente a otro, incrementando su frecuencia de oscilación conforme pasa el tiempo tal como ya ha sido descrita (para Beta, en concreto), le corresponde una representación gráfica (cuando se grafica posición contra tiempo) en la que hay una discontinuidad precisamente cuando $t = 4$.[101] Dicho brevemente, de existir tal bola en $t = 4$ y en alguna posición con semejante movimiento cuando $t < 4$, entonces la trayectoria de dicho objeto es discontinua. Y una trayectoria discontinua, además de ser intuitivamente desfavorable, no obedece a la inmensa mayoría de trayectorias permitidas por las teorías cinemáticas más exitosas.[102]

Black, sin embargo, no se apega rigurosamente a ninguna teoría. Atengámonos aquí a la mecánica newtoniana. Recordemos que un problema como el recién mencionado surge con la velocidad al considerar una misma velocidad promedio para cada subcarrera de la carrera *staccato*. De hecho, la carrera *staccato* es un modelo newtoniano acertado para las trayectorias de los objetos en movimiento de las máquinas de Black. Estos modelos muestran, nuevamente, que la ejecución de una supertarea no es una idea contradictoria. Además, vistas estas máquinas inmersas en un universo newtoniano, es posible saber el estado de las cosas para cada modelo tras haber

[101] Lo dice en el siguiente pasaje: “The motion of the marble is represented, graphically, by a curve with an infinite number of oscillations, the rapidity of the oscillations increasing constantly as approach is made to the time at which the machine comes at rest. Now to say that motion is continuous is to deny that any real motion can be represented by a curve of this character” [Black 1970 (1950-1): 77-8]. La misma observación la hace Grünbaum: “We noted that under Black’s conditions of a fixed positive separation of the two trays, there is the kinematic impossibility of a discontinuity in the position function to which he rightly calls attention” [Grünbaum 1970: 242].

[102] En la sección 3.2.2 se presentará una supertarea newtoniana que sirve como modelo a las máquinas de Black con esta frecuencia de oscilación creciente. La trayectoria, en vez de ser discontinua, es continua pero abierta, lo que significa que la partícula (o la bola) desaparece.

ejecutado satisfactoriamente una supertarea. Este estado, por supuesto, corresponderá exclusivamente al modelo diseñado. Bajo otras teorías, pues, no se descarta la posibilidad de otros estados finales.

No nos ocuparemos aquí de especificar detalles técnicos de las máquinas. Nuestras inquietudes en este trabajo son filosóficas, y por ello las cuestiones que nos ocupan en esta sección son, primero, asegurar e ilustrar que una supertarea no es una idea contradictoria y, segundo, corroborar que la mecánica newtoniana (la teoría sobre la que reflexionamos en el presente trabajo) brinda un estado final consistente con ella misma. Nos bastará, pues, con conocer que el movimiento de los objetos en los procesos de Black puede ejecutarse satisfactoriamente bajo trayectorias que los postulados de la mecánica newtoniana permiten.

El caso de las máquinas Alpha y Phi es sencillo. Simplemente hay que desplazar las bolas de un recipiente a otro. Lo más fácil es considerar un espacio bidimensional xy y establecer que toda posición con $x < 0$ está dentro del "recipiente" izquierdo y toda posición $x > 0$ dentro del "recipiente" derecho. De esta manera, la máquina Alpha sería un dispositivo que mueve, una tras otra, cada una de las bolas de un lado a otro. Un estado inicial sencillo consiste en colocar las bolas en fila, todas tangentes al eje y. Así, la máquina sólo movería horizontalmente a cada una de las bolas. Para hacer que Alpha funcione a la par que las máquinas oscilatorias (Beta-Gamma, por ejemplo), asumamos que el centro de cada bola está alejado del eje y la mitad de la distancia de Friedberg correspondiente a su turno (la velocidad de Friedberg será nuestro modelo de trayectoria para las máquinas oscilatorias). Para ello, es necesario aclarar que, si todas las bolas tienen un mismo diámetro, entonces no toda su área se encuentra dentro del "recipiente" izquierdo. Pero basta con saber que su centro sí lo está, y por tanto, que más de la mitad de la bola se encuentra en el lado izquierdo. Así las cosas, Alpha moverá cada bola con la correspondiente velocidad de Friedberg, según el turno de movimiento de cada una. Para evitar la ambigüedad del "recipiente" en que se encuentra cada bola, basta con asumir que cada bola tiene el diámetro de su correspondiente distancia de Friedberg. Así, inicialmente todas las bolas, y toda su área, se encontrarán a la izquierda del eje y, dentro del "recipiente" izquierdo, y terminarán, tras la ejecución de la supertarea, todas las bolas, y toda su área, a la derecha del eje y, en el "recipiente" derecho. Esta configuración puede ocupar un espacio finito, y por tanto es un buen modelo para la máquina Phi.

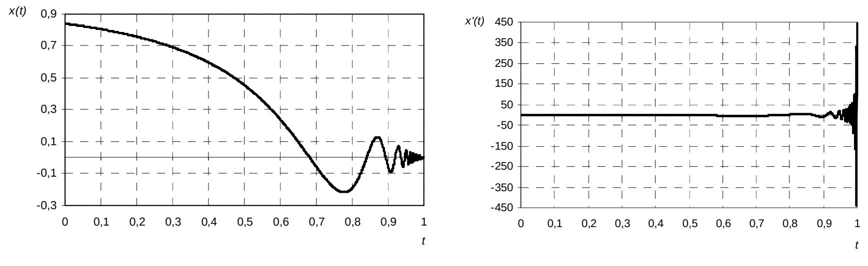
En cuanto a Beta y Gamma, recuérdese que trabajan conjuntamente y que una sin la otra no pueden llevar a cabo sus infinitas tareas. Consideremos, pues, una sola máquina: Beta-Gamma. La supertarea de ella sería llevar a cabo una oscilación infinita entre un recipiente y otro. Si queremos que la bola se encuentre en una posición en el espacio en el primer instante en el que la máquina ha terminado el proceso, entonces necesariamente el límite de la trayectoria debe ser dicho punto. Es decir, nos vemos obligados a modelar una máquina que imprime en la bola una trayectoria oscilante que converge a un punto, es decir, con oscilaciones cada vez más pequeñas. En este caso, la posición de la bola en todo momento será la que posea su centro. Y la posición a la que converge sería la que marca la línea divisoria entre los dos "recipientes". Así, claramente, la oscilación es de un "recipiente" al otro. Y el lugar final del centro de la bola, por lo tanto, sería precisamente la frontera entre ambos "recipientes". Ahora bien, si acudimos, nuevamente, a la velocidad de Friedberg correspondiente a la carrera *legato*, tenemos un modelo adecuado. La única modificación, que es sencilla, es establecer que cada una de las subcarreras impares (o pares, si se prefiere) tome la correspondiente velocidad en sentido negativo. Queda así garantizado un movimiento oscilatorio que converge a un punto que hay que tomar como frontera entre el “recipiente” derecho y el izquierdo. Así las cosas, Beta-Gamma ejecuta satisfactoriamente su supertarea y tiene, en el primer instante, una vez que ha terminado la supertarea, un estado concreto: la posición de la frontera ($x = 0$ en el caso en que se comience la supertarea en $x = -\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-(2n)^2}-e^{-(2n+1)^2}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}}$ y los subintervalos impares sean los que se cubran con velocidad negativa), una velocidad $v = 0$ y una aceleración $a = 0$.[103]

Cabe añadir que todavía hay más modelos para la máquina Beta-Gamma, y que ya se han presentado en la literatura. Estos sistemas tienen el inconveniente intuitivo (y tan sólo intuitivo), de que las partículas desaparecen del espacio (el argumento que lo muestra se expone en las secciones 3.2.2 y 3.2.3, y la problemática que genera en torno a la conservación de la masa se discute en la sección 4.2.1). En primer lugar, tenemos el sistema de Mather y McGehee [1975]. Earman y Norton ofrecen una descripción clara y simplificada de dicho proceso:

> Yet, it has been proven that Newtonian mechanics allows a closely related infinite transfer for idealized point mass particles! Consider four points mass particles confined to a line in Euclidean space. When the particles have positive separation they are assumed to interact via Newton’s $1/r^2$ law. If there is a binary collision the singularity is regularized on the model of the elastic bounce. If there is a triple collision the solution ceases to exist. Mather and McGhee (1975) established that there is a non-empty set of initial conditions for the particles such that as $t \rightarrow$ 12:00 PM, the particle positions obey the following conditions: $x_1(t) \rightarrow -\infty$, $x_3(t)$, $x_4(t) \rightarrow +\infty$, and the coordinate $x_2(t)$ of the messenger particle passes through 0 an infinite number of times, each time covering a larger distance than before, because it bounces back and forth an infinite number of times between binary collisions with particles 1 and 3. At 12:00 PM positions are no longer specified for the four particles. They have, so to speak, escaped to infinity [Earman y Norton 1998b: 243-4].

---

103 Una trayectoria más amigable, en términos algebraicos, con estas características sería la que indica la función $x(t) = (t - 1)\cdot\mathrm{sen}(1/(1 - t))$, con un comportamiento como el representado en la figura 3.1.a). Sin



a) b)

Figura 3.1. a) Comportamiento de la función $x(t) = (t - 1)\cdot\mathrm{sen}(1/(1 - t))$. b) Comportamiento de la función $x'(t) = \mathrm{sen}(1/(1 - t)) - (1/(1 - t))\cdot\cos(1/(1 - t))$.

embargo, la velocidad de semejante trayectoria es un tanto inconveniente. Si derivamos $x(t)$ obtenemos que $x'(t) = \mathrm{sen}(1/(1 - t)) - (1/(1 - t))\cdot\cos(1/(1 - t))$, que tiene un comportamiento como se muestra en la figura 3.1.b). Efectivamente, debido el factor que multiplica al coseno, se comprueba que la velocidad tiende a $\pm\infty$ conforme t se acerca a 1. Pero entonces encontramos una discontinuidad semejante a la carrera *staccato* con velocidad promedio constante para cada subcarrera. Es decir, a $t = 1$, la posición es $x = 0$ mientras que la velocidad presumiblemente es ¿$v = +\infty$ o $v = -\infty$? Además de esta ambigüedad entre el infinito negativo y positivo, una velocidad infinita, en mecánica newtoniana, no tiene ningún sentido físico. Cabe comentar, pues se presentará a continuación un caso en el texto principal, que esto no sería ningún problema si en $t = 0$ el objeto no estuviera en ningún lugar del espacio, es decir, que el objeto ya no existiese.

La interacción entre partículas es debida tan sólo a los efectos de la gravitación y a las colisiones, y no, como en los modelos anteriores, por el movimiento de un oscilador. Como los mismos Earman y Norton advierten,[104] este modelo tiene la dificultad de que la posición de la partícula oscilante es divergente, y tiende a estar, al final del proceso, en $x = \pm \infty$. Además de que es divergente, el infinito, como lugar, como posición no es ningún lugar del espacio newtoniano. En realidad, la partícula, al no encontrarse en ninguna posición real, desaparece del espacio newtoniano; preguntarse si "escapa" por el lado del infinito positivo o del negativo sale sobrando.

En segundo lugar, está el modelo de Pérez Laraudogoitia [1998a], que, por formar parte de las supertareas newtonianas que trataremos a profundidad, no se presentará hasta la sección 3.2.2. Basta con mencionar que es un modelo todavía más simple pues funciona sólo a base de colisiones elásticas y que, presenta, también como estado final, la desaparición de todas las partículas involucradas.

Finalmente, en cuanto a las máquinas Delta y Epsilon, podemos también considerarlas una sola máquina Delta-Epsilon. Cualquiera de los modelos para la máquina Beta-Gamma es apropiado. Lo único que se debe hacer es asumir que un par de máquinas Beta-Gamma trabajan paralelamente en otra coordenada y = constante, siempre con la misma velocidad pero en sentido contrario, de tal manera que la posición x_a de una máquina siempre guarda la relación $x_a = -x_b$ con la posición x_b de la otra. El estado final de cada bola ya es conocido.

3.1.2. La lámpara de Thomson: el estado final contradictorio

Sin lugar a dudas, la lampara de Thomson es la más célebre de las supertareas planteadas al margen de alguna teoría física. La problemática que plantea es básicamente la misma que la planteada por las máquinas de Black.[105] Por ello, las mismas herramientas que sirvieron para enfrentar el problema propuesto por Black también serán aquí de gran utilidad. En palabras del mismo Thomson, la lámpara funciona de la siguiente manera:

> There are certain reading lamps that have a button in the base. If the lamp is off and you press the button the lamp goes on, and if the lamp is on and you press the button the lamp goes off. So if the lamp was originally off, and you pressed the button an odd number of times, the lamp is on, and if you pressed the button an even number of times the lamp is off. Suppose now that the lamp is off, and I succeed in pressing the button an infinite number of times, perhaps making one jab one minute, another jab in the next half minute, and so on, according to Russell's recipe. After I have completed the whole infinite sequence of jabs, i.e. at the end of the two minutes, is the lamp on or off? It seems impossible to answer this question. It cannot be on, because I did not ever turn it on without at once turning it off. It cannot be off, because I did in the first place turn it on, and thereafter I never turned it off without at once turning it on. But the lamp must be either on or off. This is a contradiction [Thomson 1970 (1954-5): 94-5].

[104] Lo hacen con las siguientes palabras: "But there is a violation of the condition that the position of a particle at any instant can be obtained by taking the limit of its position at t as t approaches the instant in question; […] particle 2 would have to be at *both* positive and negative infinity at 12:00 PM" [Earman y Norton 1998b: 244].

[105] El mismo Thomson está de acuerdo en ello: "the argument given above about the reading lamp is virtually equivalent to one of Professor Black's arguments" [Thomson 1970 (1954-5): 96].

La semejanza con las máquinas de Black salta a la vista, en concreto con el par Beta-Gamma. Mientras que el estado de la lámpara oscila entre encendido y apagado una y otra vez, Beta-Gamma hace oscilar a la bola entre derecha e izquierda tantas veces como la lámpara.

Es conveniente dirigir la atención a un matiz: según la descripción de Thomson, en el primer minuto, se lleva a cabo un pinchazo (*jab*) al botón, en el segundo minuto, se realiza el segundo pinchazo, etc. Esto no es equivalente a que durante todo el primer minuto, la lámpara permanece encendida, durante el siguiente medio minuto, permanece apagada, etc. (o si se quiere, el primer minuto apagada, el siguiente medio encendida, etc.). Esto sólo dependerá del mecanismo con el que funcione la lámpara. Lo único que se dice, pues, es que durante cada intervalo de la sucesión infinita, un pinchazo se lleva a cabo. La lámpara se podría encender o apagar al principio de cada pinchazo, a la mitad, o al final. Este matiz brindará una mayor libertad a la hora de construir conceptualmente un modelo de la lámpara. Y en cualquier caso, la problemática a enfrentar es la infinidad de actos que se llevan a cabo y la consistencia del estado final con el proceso que lo precede.

3.1.2.1. El argumento de Thomson falla

El fragmento de Thomson recién citado no solamente ofrece una descripción del funcionamiento de la lámpara sino que, además, argumenta que una lámpara con semejante funcionamiento acarrea una contradicción. El argumento, que se encuentra en las últimas palabras del fragmento recién citado, se puede desglosar de la siguiente manera:

Asumamos que:
(1) La lámpara funciona tal como lo indica la descripción.
Como consecuencia de (1), tenemos que:
(2) al final de los dos minutos la lámpara no puede estar encendida, porque nunca se enciende sin volverse a apagar;
y que:
(3) al término de los dos minutos la lámpara no puede estar apagada, porque a cada acción de apagado, le sigue una de encendido.
Por otro lado:
(4) La lámpara forzosamente debe encontrase o encendida o apagada.
Entonces, de (2), (3) y (4):
(5) Contradicción.

Se aprecia que la argumentación de Thomson es una reducción al absurdo; se supone una idea y se deriva de ella una contradicción, lo que sugiere considerar la descripción de la lámpara (en este caso la suposición) como una idea contradictoria e inaceptable.[106] El error de Thomson radica en inferir que (1) implica (2) y (3). Si se mira bien la descripción de Thomson, se puede comprobar que nada dice del estado de la lámpara al término de los dos minutos. Sabemos exactamente el estado de la lámpara (encendido o apagado) al final de cada uno de los pinchazos (*jab*) realizados dentro de

[106] Sainsbury hace esta misma apreciación: "It proceeds by *reduction ad absurdum*: we suppose that it *can* complete such a series, and show that this supposition leads to an absurdity – that the lamp is neither on nor off at the supposed end of the series of tasks" [Sainsbury 1988: 14].

los dos minutos del funcionamiento planteado. Pero la descripción no dice nada acerca del instante en el que precisamente se terminan esos dos minutos.[107] La sucesión descrita por Thomson sólo abarca todos los intervalos de tiempo anteriores al instante en el que se completan dos minutos, sin incluir dicho instante. Así, ni (2) ni (3) se pueden seguir de (1), y la suposición (1), bajo este argumento, no resulta ser ni contradictoria ni inaceptable. En caso de poder detectar un último pinchazo entonces se podría saber el estado final de la lámpara, pero no hay tal último pinchazo. Y cualquier estado de la lámpara en tiempos $t \geq 2$, ya sea encendido o apagado, es consistente con la secuencia descrita por Thomson.[108] Esta situación nos es ya conocida: el planteamiento incompleto de Zenón de la carrera entre Aquiles y la tortuga nada nos decía acerca del instante en que presumiblemente se alcanzan. Deducir el éxito o el fracaso del héroe a partir de dicho planteamiento era igual de inválido. De la misma manera era incompleto el planteamiento de la máquina Beta-Gamma.

Ahora, en el caso de que asumamos que después de la secuencia infinita de actos la lámpara sigue existiendo (y es la suposición más natural), entonces la premisa (4) es completamente aceptable,[109] es decir, la lámpara forzosamente tiene que estar encendida o apagada. Es, pues, también natural preguntarse cuál es el estado de la lámpara en el instante preciso en el que han transcurrido dos minutos. Para responder a esta inquietud, Thomson comete una falacia al atribuir a dicho estado una característica que tienen los estados del proceso que describe: que a un estado *sólo* le antecede un único estado, el estado opuesto. Pero ésta no es ninguna necesidad; un estado también podría ser antecedido y resultado de un conjunto de estados. Que el estado a $t \geq 2$ sea igual a cada uno de los estados en $t < 2$ no implica que tenga un mismo antecedente que ellos.

De hecho, dada la descripción de Thomson, es imposible que al estado en $t \geq 2$ (supongamos que se mantiene constante) le anteceda un único estado. La ordinalidad del proceso nos ilustra este punto; mientras la sucesión de pinchazos es una sucesión de ordinalidad ω, y la sucesión de instantes del proceso descrito en los que la lámpara comienza a estar apagada o encendida también tiene una ordinalidad ω, la sucesión de instantes que así considera la pregunta por el estado de la lámpara al término de los dos minutos es de ordinalidad $\omega + 1$. Ante esto, si asumimos que el estado de encendido y apagado solamente lo adquiere la lámpara tras haber ocurrido un pinchazo, entonces tenemos un problema: entre la sucesión infinita de pinchazos y el instante $t = 2$ no hay tiempo para realizar dicho pinchazo. La sucesión de instantes asumida en la pregunta es

[107] Esta observación la hacen varios autores. Benacerraf escribe: "From this it follows only that there is no time *between* t_0 *and* t_1 at which the lamp was on and which was not followed by a time *also before* t_1 at which it was off. Nothing whatever has been said about the lamp *at* t_1 *or later*" [Benacerraf 1970 (1962): 107]; líneas más abajo también indica que "The instructions cover the sequence and the sequence only. Nothing was said about any number not in the sequence" [Benacerraf 1970 (1962): 109]. Sainsbury, en la misma línea, afirma: "The argument is not valid. The supposition that the infinite series has been completed does not lead to the absurdity that the lamp is neither on nor off. Nothing follows from this supposition about the state of the lamp *after* the infinite series of switchings" [Sainsbury 1988: 14]. Y Clark: "But the description of the supertask entails nothing about the lamp's state at one minute, since each switching in the unending series occurs before one minute is up" [Clark 2007: 3].

[108] Aclaración también hecha por Earman y Norton: "the lamp is not paradoxical since any lamp setting at 12:00 PM is compatible of the schedule of switching prior to 12:00 PM" [Earman y Norton 1998b: 237].

[109] Lo que también apunta Benacerraf: "Certainly, the lamp must be on or off at t_1 (provided that it hasn't gone up in a metaphysical puff of smoke in the interval), but nothing we are told implies which it is to be" [Benacerraf 1970 (1962): 108].

de ordinalidad $\omega + 1$, ¡pero en el intervalo de tiempo que ocurre dicha sucesión de instantes no puede desarrollarse una sucesión de pinchazos con ordinalidad $\omega + 1$![110]

Esto no es ningún problema si dejamos de asumir que el estado de encendido y apagado necesariamente lo adquiere la lámpara tras haber ocurrido un pinchazo. La condición de que el estado encendido o apagado es consecuencia de un pinchazo tan sólo pertenece a la sucesión de pinchazos descrita por Thomson, sucesión de ordinalidad ω. Así las cosas, el estado de la lámpara en el último instante de la sucesión de instantes con ordinalidad $\omega + 1$ no tiene por qué ser adquirido por un último pinchazo (a diferencia de una sucesión de pinchazos del tipo $\omega + 1$, en la que sí hay un último pinchazo, que seguramente causa que la lámpara tome un estado; mas dicho estado se dará tras una secuencia de instantes $\omega + 2$). Pero el estado de la lámpara en el instante $t = 2$ podría ser consecuencia no de un último pinchazo, sino de la sucesión infinita de pinchazos.[111] Es decir, la realización de la *totalidad* de pinchazos, ocasionará un estado para la lámpara en el instante $t = 2$. Los modelos que comentaremos en la siguiente sección mostrarán que, ateniéndonos a la mecánica newtoniana, este caso es posible.[112]

---

[110] Thomson no distingue entre la sucesión infinita de operaciones (que debe ser de tipo ω) y la sucesión infinita de puntos o instantes en los que se han finalizado cada sucesión de operaciones (que debe ser de tipo $\omega + 1$). En su crítica a Thomson, Benacerraf sí lo distingue: "In the case of the lamp, we have a sequence of order type ω, the lamp switchings, and a sequence of order type $\omega + 1$, the moments at which they take place plus the first moment after we're through, which must inexorably come" [Benacerraf 1970 (1962): 115].

[111] Es curioso que el mismo Thomson se percata de esta interesante idea: "we cannot ask whether the last jab was a switching on or a switching off. But we did not ask about a last jab; we asked about the net of total result of the whole infinite sequence of jabs, and this would seem to be a fair question." [Thomson 1970 (1954-5): 96-7]. Digo que es curioso porque, como lo indica la cita de la nota anterior, parece ignorar la idea. Thomson no se pregunta por el resultado total y final de una secuencia de tipo ω, sino que ve necesario la introducción de una secuencia de tipo $\omega + 1$, lo que sugiere que reclama una última operación.

[112] Como la teoría de conjuntos interna (*Internal Set Theory* o IST) por ahora se encuentra completamente fuera de las consideraciones de la mecánica clásica, no interesa a los objetivos del presente trabajo tratar con detenimiento el argumento de McLaughlin (que se basa en IST) en contra de la lámpara de Thomson. No obstante, cabe aquí presentar su argumentación: "For specificity, assume that counting is instantiated through the 'stroke method': one stroke is physically recorded each time the lamp changes state. Thus, after 1 and 7/8 minutes (on, off, on, off) the counter (a piece of paper, an abacus, an electronic device, etc.) reads, in stroke system notation, ||||. Of course, any other notation which provides a concrete link to the number 1 (one) would suffice, e.g., 4. What we are trying to avoid is abstract or indefinite representations, such as "*n*", by placing the counting process in the world. In order to accomplish the infinite task seemingly mandated by the modified Thomson's lamp, it is certainly necessary to count to some unlimited (and nonstandard) natural number *n*. But if this has been done, then *n* has been represented (by a numeral) as an object of 'conventional mathematics'. Hence, *n* must also be standard natural number. The contradiction completes the *reductio ad absurdum* and shows that the lamp cannot even complete a certain finite task; *a fortiori*, the infinite task (counting all of the natural numbers) cannot be completed. Thomson's lamp is dysfunctional" [McLaughlin 1998: 287]. No encuentro muy plausible el paso argumental que realiza McLaughlin al afirmar que cuando el conteo alcanza un número no estándar, entonces tal número tiene que poder ser representado por un objeto de las matemáticas convencionales. Más importante, tampoco encuentro necesario que para terminar el proceso de Thomson haya que alcanzar un número no estándar; para culminar el proceso es suficiente con contar cada uno de los naturales. En esta misma dirección Alper y Bridger aclaran: "The nonstandard natural number *n* can never be constructed because, as Nelson proves, anything that can be explicitly constructed using classical methods is a standard object. In some mystical sense, if it were possible to figure out *what n* is, then it could not be *that*" [Alper y Bridger 1997: 152].

3.1.2.2. Modelos newtonianos: consistencia del proceso de Thomson con su estado final bajo mecánica newtoniana

Dejemos de lado las consideraciones eléctricas y lumínicas en el proceso infinito de la lámpara de Thomson que, como la velocidad de arrastre, por ejemplo, impedirían no sólo procesos infinitos sino procesos finitos dentro de un lapso de tiempo de extrema pequeñez. Estas consideraciones no son esenciales. Lo importante es la consistencia *conceptual* de un estado de la lámpara dado un número de pinchazos, sea éste finito o infinito. De esta manera, pueden darse los pinchazos que se quieran, finitos o infinitos, mientras la lámpara carece de bombilla o mientras no está conectada al suministro. Una vez terminado el proceso, independientemente de si es finito o infinito, es totalmente concebible comprobar el estado de la lámpara colocando la bombilla en ella o conectándola a una fuente de energía.

Nuestro modelo se reduce entonces al movimiento (en un universo newtoniano) del interruptor, que abre y cierra el circuito. Nuevamente podemos acudir a la velocidad de Friedberg. Supongamos que inicialmente la lámpara consiste en un circuito que conecta en serie la fuente de energía, el interruptor y la resistencia que emite luz. Un primer pinchazo del mecanismo interruptor consistiría en alejar el trozo de conductor que se separa del circuito para abrirlo una distancia correspondiente a la primer subcarrera con una velocidad de Friedberg. Un segundo pinchazo en acercarlo con la misma velocidad en sentido contrario (para que cubra la misma distancia). El tercer pinchazo consistiría en alejar el trozo conductor una distancia correspondiente a la segunda subcarrera de Friedberg, el cuarto en cubrir el mismo recorrido con la velocidad en sentido contrario. Y así sucesivamente, el trozo conductor se retirará con la velocidad de Friedberg según su etapa y se volverá a acercar con la misma velocidad en sentido contrario. Tendremos así una lámpara que realiza un número infinito de pinchazos dentro de un intervalo de tiempo finito.

Bien. ¿Cuál es el estado final? Cuando realizamos un número finito de pinchazos sabemos sin problema alguno si la lámpara se encontrará encendida o apagada a la hora de conectarla a la corriente (de hecho, bastará saber si el número de pinchazos es par o impar). Pero, cuando ejecutemos el proceso infinito, ¿en qué estado encontraremos la lámpara a la hora de conectarla? Dada la descripción del modelo en el que el trozo conductor se aleja y se acerca según las distancias de Friedberg, y dada la continuidad de la trayectoria en mecánica newtoniana, indiscutiblemente la lámpara estará encendida a la hora de conectarla, ya que el circuito estará cerrado.[113]

Hay otra configuración, que trabaja exactamente bajo los mismos principios, en la que el estado final de la lámpara es el apagado. Basta cambiar el circuito y en vez de conectarlos en serie, conectar la fuente, el interruptor y la resistencia en paralelo. Así, cada vez que el trozo conductor del interruptor haga contacto con el circuito ocasionará un cortocircuito que dejará a la resistencia sin corriente, y cada vez que el trozo conductor pierda el contacto dejará a la resistencia en serie con la fuente. Dado el movimiento con el patrón de Friedberg y la continuidad del movimiento, el estado final del circuito es el cortocircuito y por tanto el estado final de la lámpara será el apagado.[114]

---

[113] La idea esencial y original del modelo es de Grünbaum [1970: 233-8].

[114] Esta ligera variación se encuentra por vez primera en [Earman y Norton 1998b: 237-8], que utilizan como mecanismo interruptor una bola conductoria indeformable que rebota una infinidad de veces con un coeficiente de restitución $0 < k < 1$; así, los tiempos sucesivos entre cada rebote son 1, k, k^2, k^3, …, que en total suman $1/(1-k)$. La bola, que tiene un cable conectado, cierra el circuito cuando hace contacto con la superficie en que rebota. La bola rebotante (*The bouncing ball*) fue una supertarea originalmente panteada

Estos modelos, además de mostrar la falta de contradicción conceptual de esta supertarea así como la posesión de un estado final también consistente (incluso con una teoría del movimiento como la mecánica newtoniana), ilustran el error de Thomson. En los modelos aquí expuestos, el estado final no es antecedido por un único estado (ya hemos visto que esto es imposible), sino por un conjunto de estados (infinito, necesariamente). Por supuesto, en estos modelos newtonianos, un estado de encendido o de apagado, final o intermedio, no es consecuencia del estado anterior, sino que es consecuencia (entre otras cosas) de *la posición* en la que se encuentra el trozo conductor que abre y cierra el circuito. Esto sugiere que un determinado estado de encendido o apagado no es consecuencia del conjunto finito o infinito de estados (de encendido o apagado) que le antecede. Pero en el caso de *la posición* final del conductor no hay duda; por la continuidad de la trayectoria, la posición final que ocupa el trozo conductor sí es consecuencia de todos los conjuntos continuos y adyacentes de posiciones que le anteceden.

3.1.3. La paradoja de Ross-Littlewood: un estado final distinto del límite

Aunque la paradoja de Ross-Littlewood fue planteada por los mismos años que las supertareas anteriores, no fue hasta la década de los noventa cuando se entabló una discusión filosófica sobre ella.[115] El planteamiento original lo exponen Allis y Koetsier con las siguientes palabras:

> Suppose that we possess an infinitely large urn and an infinite collection of balls labelled 1, 2, 3, and so on. There are exactly as many balls as there are natural (standard) numbers. Consider the following thought experiment. At 1 minute to 12 p.m. balls numbered 1 through 10 are placed in the urn, and ball 1 is withdrawn; at ½ minute to 12 p.m. balls numbered 11 though 20 are placed in the urn, and ball number 2 is withdrawn; at ¼ minute to 12 p.m. balls numbered 21 to 30 are placed in the urn and ball number 3 is withdrawn; at 1/8 minute to 12 p.m. balls numbered 31 to 40 are placed in the urn, and ball number 4 is withdrawn, and so on. How many balls are in the urn at 12 p.m. and what are their labels? [Allis y Koetsier 1991: 187].

Antes de tratar de responder a la interesante pregunta con la que finaliza el fragmento, y con la finalidad de tener bien estructuradas la clasificación de cada una de las versiones, veamos los planteamientos de las variaciones de la misma supertarea. La primera dice:

> Let us suppose that at 1 minute to 12 p.m. balls numbered 1 through 9 are placed in the urn, and instead of withdrawing a ball we add a zero to the label of ball number 1 so that its label becomes 10; at ½ minute to 12 p.m. balls numbered 11 through 19

---

por Bostock [1972-3: 120-6], sólo que con una bola deformable. Allí mismo ya se considera como mecanismo interruptor para la lámpara. Es interesante comprobar que la idea del indeterminismo detrás de los procesos infinitos en donde los estados sucesivos se encuentran causalmente conectados –cuestión que trataremos en el apartado 5.4– ya es sugerida por Bostock: "if the final position of the switch is not deducible from this information [los estados anteriores y la leyes físicas], then it is not determined by the causal laws which govern the operation of the switch, and so whatever happens there will have been a breakdown in causal determinism" [Bostock 1972-3: 125].

[115] Allis y Koetsier [1991] originalmente recogen el planteamiento del libro de Ross [1988]. Posteriormente, en Allis y Koetsier [1995], informan que el mismo planteamiento ya se encuentra en Littlewood [1953].

> are placed in the urn, and we added a zero to the label of ball number 2 so that it becomes ball number 20; at ¼ minute to 12 p.m., balls numbered 21 to 29 are placed in the urn and ball number 3 becomes number 30; at 1/8 minute to 12 p.m. balls numbered 31 through 39 are placed in the urn, and ball number 4 becomes 40, and so on. At each instant, instead of withdrawing the ball with the smallest label, we add a zero to its label so that its number is multiplied by 10. How many balls are in the urn at 12 p.m. and what are their labels? [Allis y Koetsier 1991: 188].

La segunda variación propone el siguiente proceso:

> First of all we stipulate that inside the urn there are as many places as there are natural numbers. The places are labelled 1, 2, 3, and so on. Secondly, the experiment is executed in the same manner as the second experiment but with one change: we prescribe that a ball shall always occupy the place with the corresponding label, *i.e.* a ball with label *n* must necessarily be put in place number *n*. This means that as soon as ball gets another label it must be moved to another place. As soon as ball number 1 gets label 10 it is moved to place number 10. As soon as its number becomes 100 it is moved to place number 100, etc. What is the situation at 12 p.m. in this thought experiment? [Allis y Koetsier 1991: 189].

Tenemos, pues, un planteamiento original y dos variaciones. Para el primero, en cada uno de los infinitos subintervalos de tiempo se introducen diez bolas al recipiente y se saca una, permaneciendo siempre cada una de las bolas con la misma marca; para las variaciones, son sólo nueve bolas las que ingresan en cada subintervalo de tiempo. Para la primera variación, las bolas cambian una infinidad de veces de marca o de nombre, pero permanecen en la misma posición, mientras que en la segunda variación cada bola cambia de marca de la misma manera pero ocupando una posición según la marca que posea, es decir, cambia constantemente de posición. Se aprecia que, a diferencia de las máquinas de Black y la lámpara de Thomson que en sus planteamientos originales parecían paradójicas por no tener un límite, la supertarea de esta sección se presenta paradójica precisamente por tener un límite.[116] Las máquinas de Black (Beta-Gamma) hacían oscilar una bola de izquierda y derecha, y la lámpara de Thomson pasaba constantemente del estado de encendido a apagado a encendido, etc. Conforme el tiempo pasaba, no había ninguna tendencia hacia un estado. En cambio, para la paradoja de Ross, conforme el tiempo pasa, el recipiente se encuentra cada vez más lleno, por lo que es natural pensar que el recipiente se encontrará con una infinidad de bolas (completamente lleno) al finalizar el proceso. Sin embargo, bajo ciertas consideraciones es posible concluir, para el planteamiento original, por ejemplo, que el recipiente termina vacío cuando dan las 12 p.m. En esto radica la apariencia paradójica.

3.1.3.1. Argumentos al margen del movimiento para el estado final

Tratemos primero las respuestas libres de consideraciones cinemáticas que merecen las preguntas planteadas por Allis y Koetsier. Si se considera el planteamiento original, se puede argumentar que el recipiente contiene una infinidad de bolas a las 12 p.m.: conforme avanza el tiempo, en cada subintervalo, se añaden diez bolas más y, como sólo se retira una, el número de bolas crece indefinidamente mientras se está

[116] Observación hecha ya por Earman y Norton: “While the Thomson lamp depends on the non-existence of a limit, another supertask [la paradoja de Ross-Littlewood] purports to be paradoxical precisely because a limit exists” [Earman y Norton 1998b: 239].

arbitrariamente más cerca de las 12 p.m. El recipiente tiende a contener una infinidad de bolas. Pero también se puede argumentar que el recipiente está vacío a las 12 p.m. Para ello basta con fijarse en cuáles bolas son las que quedan dentro. Si hay una infinidad de bolas, cada bola con la marca *n* (para todo $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) saldrá del recipiente, para no volver a entrar, en algún momento antes de que concluya de transcurrir un minuto. Entonces la bola marcada con el 1, la marcada con el 2, la marcada con el 3, etc., se encuentran fuera del recipiente a las 12 p.m. Pero, precisamente, esas bolas son todas las bolas. Por lo tanto, el recipiente se encuentra vacío a las 12 p.m.[117] ¿Cuál es el argumento correcto? ¿O son los dos incorrectos? (¡¿O correctos?!)

A primera vista, parece ser más convincente el argumento a favor de un recipiente vacío como estado final, pues dirige la atención al estado, en todo momento, de cada una de las bolas. Sabemos que *cada una* de las bolas terminará fuera del recipiente. No obstante, la primera variación de la paradoja apunta a reforzar el argumento a favor del recipiente con un número infinito de bolas como estado final. Si se ejecutan paralela y simultáneamente la primera variación y el proceso original, al final de cada subtarea los recipientes de cada proceso contendrán el mismo número de bolas, todas ellas con las mismas marcas. Conforme el tiempo transcurre, al parecer, ambos recipientes evolucionan de la misma manera.[118] Si ambos recipientes se encuentran cada vez más llenos, ¿cómo es que terminan en un estado tan distinto y tan distante? De un recipiente vacío a un recipiente con una infinidad de bolas hay una enorme diferencia. Una diferencia infinita.

La situación se torna más desconcertante con la segunda variación. Presenta también un recipiente que va aumentando su contenido de bolas con el mismo patrón. De la misma manera, si ejecutamos paralela y simultáneamente la primera y la segunda variación, los recipientes evolucionan exactamente igual, siempre teniendo dentro el mismo número de bolas e incluso las mismas bolas con las mismas marcas. Pero, para la segunda variación, y siguiendo la evolución de cada bola, se puede concluir que todas las bolas, una vez que entran al recipiente, no lo abandonan jamás (dentro del proceso), mas que a las 12 p.m. todos los sitios del recipiente están desocupados.[119] ¿Y dónde están las bolas? No abandonan el recipiente pero tampoco hay un sitio para ellas dentro de él.

En los párrafos anteriores se lee constantemente que los tres procesos *parecen* ser equivalentes. Lo subrayo porque los procesos, en realidad, son esencialmente distintos. En el proceso original, constantemente se sacarán bolas. En los otros dos no. En la primera variación, una vez que cada bola entra, no se mueve más. En la segunda variación seguirán moviéndose. Estos matices, estas pequeñas variaciones, hacen que la diferencia entre los procesos sea muy grande: al final de cada uno de los procesos el estado del recipiente y de las bolas es diferente. Incluso, durante la evolución de los

---

[117] Este es el mismo argumento que Ross sigue para concluir que el recipiente termina vacío: "Ross concludes that the urn is empty at 12 p.m. arguing as follows. Consider any ball, say ball number *n*, and that at some time prior to 12 p.m. (in fact, at $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ minutes to 12 p.m.) this ball is withdrawn from the urn. This means that for each *n*, ball number *n* is not in the urn at 12 p.m.; the urn must therefore be empty at that time" [Allis y Koetsier 1991: 188].

[118] Precisamente, Allis y Koetsier plantean la primera variación para resaltar esta cuestión: "The two experiments seem to be equivalent as regards the contents of the urn: at each instant before 12 p.m. they bring about precisely the same situation in the urn. Yet in the first experiment the urn is empty at 12 p.m., while in the second experiment the urn contains infinitely many balls at 12 p.m. This sounds paradoxical" [Allis y Koetsier 1991: 189].

[119] Es el mismo argumento expuesto por los que proponen la variación: "The following conclusions can be drawn: that infinitely many balls enter the urn, that no ball ever leaves the urn, and yet all places inside the urn are empty at 12 p.m.!" [Allis y Koetsier 1991: 189].

procesos ocurren cosas distintas.[120] Asumamos, por ejemplo, que ejecutamos los tres procesos materialmente con las mismas bolas dispuestas en el mismo orden (cada uno en periodos de tiempo que no se solapan, claro está), uno detrás de otro. En el caso del proceso original, la primera bola, con la marca 1, entra al recipiente y en un momento posterior saldrá de él. Para el proceso de la primera variación, esa misma primera bola entra al recipiente, no sale ya jamás de él (durante el proceso), ni siquiera se mueve. Pero constantemente cambia de marca. Ahora bien, cambia de marca pero sigue siendo la primera bola. En cuanto al proceso correspondiente a la segunda variación, esa misma primera bola, una vez que entra al recipiente, comenzará a cambiar de marca y a cambiar de posición. De la misma manera, cada bola tendrá una evolución distinta en cada proceso: en el original, entrará al recipiente, saldrá y no se moverá más; en la primera variación, entrará al recipiente y no se moverá más; en la segunda variación, entrará al recipiente, tras lo cual se moverá una infinidad de veces, intermitentemente, para ocupar una infinidad de posiciones dentro del mismo. Es importante hacer notar que estas observaciones consideran primordialmente el movimiento de las bolas en el proceso. No se considera que las bolas entran y salen del recipiente o que cambian de posición bajo un proceso de aparición y desaparición en lugares distantes. Lo más sensato, pues, es hacer un análisis de los procesos ateniéndonos a una teoría del movimiento. Esta será la tarea de la siguiente sección, en la que se interpretarán los procesos para un universo newtoniano. Por ahora, prescindamos de toda consideración física y veamos qué se puede decir.[121] (Se puede asumir, sin miedo a perder el rigor filosófico, que las bolas cambian de posición por teletransportación).

Veremos, nuevamente, que tenemos ante nosotros la descripción de una serie de procesos que, aunque sugieren ciertos estados para las 12 p.m., rigurosamente nada dicen del estado en dicho instante. Los mismos Allis y Koetsier aceptan que la

---

[120] Lo mismo se puede decir de la supertarea propuesta por Forrest: "Initially there is precisely one ball in the urn. In each interval I_n first a new ball is put in, then the urn is shaken and one of the two balls is taken out. The balls, we are to suppose, are qualitatively identical. Hence at each stage there are two possible qualitatively identical outcomes: either the ball which has just been put in is taken out, or the ball which was already there is taken out. Hence it is asserted, there are infinitely many qualitatively identical histories of the whole process. Of these just two are: (1) the initial ball remaining there the whole time and each new ball being taken out straightaway and (2) the initial ball being taken out in the first interval, and thereafter each ball being taken out in the interval after it was put in. In case (1) there is one ball left at the end. In case (2) there is no ball left at the end. Yet the two processes were, right up to the last moment, qualitatively identical" [Forrest 1999: 444]. Esto último es un error. Los procesos (1) y (2) son cualitativamente diferentes. Las operaciones llevadas a cabo en cada proceso son distintas, en uno se saca siempre la bola nueva mientras que en el otro se saca siempre la antigua. El hecho de que la urna se sacuda, lo que da la impresión de que los procesos son equivalentes, es irrelevante, ya que lo que al final cuenta es qué bola es la que se ha sacado. Los procesos (1) y (2) son cuantitativamente idénticos (lo mismo pasa con los procesos de Ross), y su resultado final se debe precisamente a que son cualitativa y esencialmente distintos.

[121] Van Bendegem defendiendo que la paradoja de Ross es una supertarea imposible, ofrece el siguiente argumento en el que se prescinde de toda consideración física: "the total sum S of balls in the urn at completion of the task, is $S = (10 - 1) + (10 - 1) + \ldots$ If we suppose that S is a finite number, thus including the special case $S = 0$, an inconsistency is easily derived. $9 + S = (10 - 1) + S = (10 - 1) + (10 - 1) + (10 - 1) + \ldots = S$. Hence, if S is finite, $9 = 0$. If this argument holds good […], then RP is an impossible super-task and neither conclusion […] should be accepted. Note that the argument is entirely independent of any continuity principle or any other kinematical assumption" [Van Bendegem 1994: 743]. Esto no es correcto. Si consideramos que S es un número finito no es permitido expresar que $S = (10 - 1) + (10 - 1) + \ldots$, sino que $S = (10 - 1) + (10 - 1) + \ldots + (10 - 1)$, que finalmente se simplifica a $S = n(10 - 1)$, donde n es un natural. Con esto, $9 + S = 9 + n(10 - 1)$, de lo que no se puede llegar concluir que $9 = 0$. Allis y Koetsier lo explican de otro modo: "Writing $S = (10 - 1) + (10 - 1) + \ldots$ means by definition $S = lim(10 - 1)n$, for $n \to \infty$. It implies that $S = \infty$ […], from which it is not difficult to derive a contradiction with the supposition that S is finite" [Allis y Koetsier 1995: 245].

descripción del proceso no dice nada del estado de las cosas a las 12 p.m.[122] De la misma manera como sucedía con las máquinas de Black y con la lámpara de Thomson, nada se puede inferir del final del proceso a partir de la descripción.[123] Este punto resulta ampliamente ilustrativo si se intenta obtener una función, a partir de la descripción, que nos describa la cantidad de bolas dentro del recipiente.

Concentrémonos en el planteamiento original. El tiempo (en minutos) que ha pasado a partir de las 11:59 al término de cada operación n (con $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) puede ser obtenido con la siguiente expresión:

$$t = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \tag{3.1}$$

Así, el conjunto de bolas que se encuentran dentro del recipiente después de la operación n es $B_{in} = \{n+1, n+2, ..., 10n\}$ y la cantidad de bolas dentro será

$$Q_{in} = \left|B_{in}\right| = 9n\,. \tag{3.2}$$

Con esto, a partir del número de acciones que se hayan realizado, podemos saber con precisión cuántas y cuáles bolas se encuentran dentro del recipiente. Ahora bien, es posible también tener esos mismos datos en función del tiempo. De (3.1) es fácil obtener que

$$n = 1 + Int\left(\frac{\ln\,(1-t)}{\ln \frac{1}{2}}\right) \tag{3.3}$$

y de esta manera, de (3.2) y (3.3) se obtiene que

$$Q_{in} = 9 + 9 \cdot Int\left(\frac{\ln\,(1-t)}{\ln \frac{1}{2}}\right). \tag{3.4}$$

---

[122] Lo manifiestan con las siguientes palabras: "*Logically speaking*, such an infinite sequence of acts, or the infinite sequence of intermediate states of affairs, implies *nothing whatsoever* concerning the state of affairs at 12 p.m. Something which is true before 12 p.m. need not be true at 12 p.m. Take the sentence 'It's before midnight' and the fact that it stops being a true sentence when midnight strikes" [Allis y Koetsier 1991: 190]. De la misma manera, Earman y Norton reconocen que la sola descripción no ayuda mucho a la hora de decidirse por una conclusión: "The difficulty is that there are two natural conditions each of which fix the number of balls in the vase at 12:00 PM, but at different values. And the account of the paradox does not clearly allow a choice between them" [Earman y Norton 1998b: 239].

[123] Van Bendegem, en un artículo que defiende finitísticamente el espacio y tiempo discretos, argumenta en contra de la finalización del proceso descrito por Ross con el siguiente argumento: "in terms of physical actions, the only type of action that takes place, is to move a ball from one location to another (either in or out of the urn). Nothing else is happening. But how did the urn end up empty? Not because there was a last ball in the urn and because that was removed from the urn, for there isn't one. But that is the only *physical action* 'available' that could have led to an empty urn" [Van Bendegem 1995: 128; mis cursivas]. Este argumento no es difícil de rebatir. Supongamos que tenemos un recipiente lleno con una infinidad de bolas que están marcadas y ordenadas 1, 2, 3, 4, …, …, –4, –3, –2, –1, y que cada una es sacada del recipiente durante el intervalo de tiempo que respectivamente sucede ½, ¼, 1/8, …, …, 1/8, ¼, ½ (en total dos minutos). La cardinalidad, tanto del conjunto de bolas {1, 2, 3, …} como la del conjunto {1, 2, 3, 4, …, …, –4, –3, –2, –1} es $\aleph_0$. Es decir, se llevan a cabo el mismo número de operaciones. Para la suposición hecha en esta nota, hay una última operación y, siguiendo el argumento de Van Bendegem, hay una última acción física que hace que el recipiente quede vacío. Este punto sugiere que es más problemático el hecho de que el conjunto de bolas sea un conjunto abierto que simplemente el hecho de que sea infinito. Precisamente, y volviendo al planteamiento original, como no se puede decir que hubo una última acción que sacara una última bola del recipiente, tampoco se puede decir que hubo una última acción que introdujera una última bola y la depositara en una última posición, por lo que tampoco es posible concluir que el recipiente termina lleno. Esto ilustra cómo de la descripción del conjunto abierto de operaciones no se puede concluir nada acerca de un elemento que es el borde pero que no pertenece a él. Otro comentario: Van Bendegem habla de acciones físicas (y por eso las cursivas), pero no sitúa esa acción en el marco de ninguna teoría física, por lo que el término *physical action* resulta vago.

De manera similar, la cantidad de bolas que se han sacado del recipiente se puede obtener por medio de la expresión:

$$Q_{out} = 1 + Int\left(\frac{\ln(1-t)}{\ln\frac{1}{2}}\right). \tag{3.5}$$

Es un ejercicio de análisis elemental obtener que las funciones mostradas en las expresiones (3.4) y (3.5), que se han propuesto para obtener el estado del recipiente a las 12 p.m. (t = 1), les corresponde como dominio el conjunto $\{t\text{: } t\in\mathbf{R} \text{ y } t < 1\}$. Pero, además, sabemos que nuestro proceso comienza a t = 0, lo que restringe el dominio que nos interesa al intervalo real [0, 1). Y es que estas funciones nos describen exactamente lo mismo que el planteamiento de Ross. Sabemos con precisión el estado del recipiente y de las bolas en cada instante dentro del intervalo $0 \leq t < 1$, mas del estado en el tiempo t = 1 nada se puede saber.

Si intentamos operar límites a estas funciones resulta ser que ambas tienden al infinito, lo que invita a concluir que tanto dentro como fuera del recipiente hay una infinidad de bolas.[124] En términos matemáticos, esto no es ningún problema. Recuérdese el planteamiento del hotel de Hilbert, que se encontraba completamente lleno de su infinidad de habitaciones, pero que se podían introducir todavía una infinidad de nuevos huéspedes. (Si el que ocupa la habitación 1 se cambia a la 11, el de la 2 a la 12, etc., entonces se pueden hospedar 10 huéspedes más. Esto se puede repetir una infinidad de veces).[125]

Las funciones recién presentadas no nos informan sobre qué bolas son las que se encuentran fuera y dentro. Una función del tiempo, para el planteamiento original, que nos indique el estado de cada bola sería la que se presenta a continuación:

---

[124] Holgate, con el mismo propósito, propone varias funciones (cabe aclarar que Holgate modifica la supertarea introduciendo solo dos bolas y sacando una en cada operación): "A point that comes out very strongly in the original discussion is that since the function is defined for the sequence $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$, the domain to be covered by any extension should be the open set $\{x\text{: } 0 \leq x < 1\}$, not the closed set $\{x\text{: } 0 \leq x \leq 1\}$and that the definition of the function x = 1 is a problem of a different nature from that of its definition in the intervals between values of $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$. It is however natural to want to complete the definition by setting $X_1 = \lim_{t\to 1}, X_t$ [the content of the urn at time t]. According to (i) [$X_t = X_{t_n} = n + 1$ when $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq t < 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$], (ii) [$X_t = n + 1 + 2^{n+1}(t - t_n)$] and (iii) [$X_t = -\log_2 (1 - t)$] we have $X_t \to \infty$ as $t \to 1$, and according to (iv) [$X_t = 0$, when $t \neq t_n$ for some integer $n > 0$] there is no limit, but 0 is a cluster point" [Holgate 1994: 302-3]. La expresión (iii) de Holgate es la misma que la expresión (3.3) del texto principal, en el que las demás no se consideran por no ser una manipulación directa a (3.1). En cualquier caso, Holgate no menciona que la función que indica las bolas que se sacan también tiende al infinito.

[125] El planteamiento del hotel de Hilbert puede encontrarse en [Byers 2007: 162], [Clark 2007: 94], [Moore 1990: 9] y [Erickson y Fossa 1998: 84-5]. De la misma manera, desde un punto de vista matemático, tampoco es problemático el hecho de que el número de bolas dentro del recipiente sea cada vez mayor y al final termine vacío. Earman y Norton lo explican: "What is puzzling is that the number count, which one moment is growing without bound, suddenly evaporates the next. In brief this evaporation is simply an artefact of our subtraction of one infinite set from another. It is surprising but not contradictory. Such evaporation cannot happen with the subtraction of finite sets, where our intuitions are developed" [Earman y Norton 1998b: 239].

$$x_i(t) = \begin{cases} 0, & 1 + Int\left(\dfrac{\ln(1-t)}{\ln\frac{1}{2}}\right) < \dfrac{i}{10} \\ 1, & \dfrac{i}{10} \leq 1 + Int\left(\dfrac{\ln(1-t)}{\ln\frac{1}{2}}\right) < i \\ 0, & 1 + Int\left(\dfrac{\ln(1-t)}{\ln\frac{1}{2}}\right) \geq i \end{cases}$$

donde i es la marca de cada bola (i = 1, 2, 3, 4, …, pero $i \in \mathbf{R}$ o, al menos, $i \in \mathbf{Q}$). Cuando la función toma el valor de 0 la bola se encuentra fuera del recipiente, y cuando toma el valor de 1 se encuentra dentro. Si operamos el límite de $x_i(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$, para todo i = 1, 2, 3, 4, …, $x_i(t)$ tiende a 0. Es decir, todas las bolas tienden a encontrarse fuera. Funciones similares se pueden obtener para la primera y segunda variación, que, tras operar el mismo límite, cada bola tenderá a estar dentro del recipiente. Nótese que en estas consideraciones no se ha dicho nada de cómo es el movimiento. Cada bola va de dentro a fuera libremente, recorriendo una trayectoria, teletransportándose, o como se prefiera.

Es difícil dejar a un lado las consideraciones físicas para el proceso de Ross, y es que la misma descripción parece hablar en términos físicos; las bolas, objetos físicos, entran, salen, se mueven, o sea, ejecutan acciones físicas. En esta sección se ha tratado de prescindir de estas consideraciones y como resultado hemos obtenido que no podemos saber con claridad si el recipiente está lleno o vacío al término del proceso. Si se mira el comportamiento del recipiente, se termina con un recipiente lleno y un exterior también lleno. Si se toma en cuenta cada bola, se llega a que cada una de ellas termina fuera.

3.1.3.2 Modelos newtonianos: consistencia del estado contraintuitivo final bajo mecánica newtoniana

Existen modelos del proceso de Ross-Littlewood que, al considerar el movimiento ateniéndonos a la mecánica newtoniana, tienen un estado preciso y claro a las 12 p.m. Los mismos Allis y Koetsier [1991: 191-3] proponen modelos, sin ahondar en muchos detalles, para los procesos que describen (al parecer, profundizar en los detalles no tiene repercusiones filosóficas relevantes; como se verá a continuación, la segunda variación sí merece una construcción más detallada). En dichos modelos se basan los que a continuación se presentarán, sólo que aquí, con la finalidad de mostrar la precisión del estado final, se conocerá la posición de cada bola a lo largo del proceso.[126]

Allis y Koetsier dividen un espacio bidimensional en dos, en donde una parte es el interior de recipiente y la otra el exterior. Para ser más precisos, supongamos que el

[126] Allis y Koetsier no manifiestan su apego a alguna teoría física en concreto. Tan sólo añaden el principio de continuidad para las trayectorias de los cuerpos: "*The position functions of all balls are at all instants* t *continuous functions of time*" [Allis y Koetsier 1991: 192]. En su crítica a ellos, Van Bendegem considera que los modelos deben de cumplir lo siguiente: "(K1) Infinite speeds are not allowed, (K2) Infinite accelerations are not allowed, (K3) There exists a largest speed L" [Van Bendegem 1994: 744]. Es claro que Van Bendegem, al considerar (K3), se atiene a la mecánica relativista o, como sugieren Earman y Norton, se pregunta por la posibilidad real del proceso: "the invocation of the relativistic constraint (*K*3) seems to us inappropriate since what is being claimed is not that Ross's paradox represents a physically impossible supertask in the actual world but a conceptually impossible supertask" [Earman y Norton 1998b: 240]. Como ya se ha dicho más de una vez, en este trabajo buscamos las consecuencias de este tipo de procesos para la mecánica clásica.

exterior del recipiente son todas las posiciones del plano *xy* tal que $x < 0$. El interior del recipiente es el resto del plano, es decir, todas las posiciones tal que $x \geq 0$. De esta manera, una bola se encontrará dentro del recipiente si su centro está posicionado de tal manera que su abscisa es $x \geq 0$ y fuera si $x < 0$.[127] Bien, basta considerar que cada bola *n* sólo se mueve en dirección horizontal, por ejemplo en $y = -n$, y que su diámetro es tal que ninguna bola colisiona con otra (o sea, menor a 1 si todas las bolas son del mismo diámetro). Así, sólo es necesario colocar su centro inicialmente en un posición *x* tal que pueda moverse en el tiempo requerido por la descripción del proceso a una posición dentro del recipiente.

Para ser más precisos, supongamos que el centro de cada bola *n* (tal que $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) se encuentra en la posición $\left(-\frac{e^{-(n-1)^2}}{2K}, -n\right)$. Así, puede moverse, con la correspondiente velocidad de Friedberg a cada fase *n*, a la posición $\left(\frac{e^{-(n-1)^2}}{2K}, -n\right)$. De esta manera, cada bola tiene tiempo de sobra para realizar su tarea. Para el proceso original, las primeras diez bolas entrarán en su correspondiente tiempo. La bola 1 en 1/4 de minuto, la bola 2 en 1/8, la bola 3 en 1/16, etc. Como todas comenzarán en el mismo instante, cuando la bola 1 termine su recorrido el resto ya llevará cierto tiempo ocupando su posición de reposo. En seguida, la bola 1 regresará al exterior con la velocidad contraria, tardando ¼ de minuto. Es claro, pues, que en la segunda operación del proceso las bolas tienen tiempo de sobra para realizar el debido movimiento. Cuando tienen ¼ de minuto para actuar, la bola 2 saldrá en 1/8 de minuto, mientras que la bolas 11 entra tan sólo en $1/2^{12}$ de minuto, y el resto en tiempos todavía menores. El mismo patrón seguirán las siguientes operaciones. Tenemos, pues, un modelo preciso del proceso original de Ross-Littlewood. Y, como en mecánica clásica la trayectoria de los cuerpos es continua, cada una de las bolas tiene una posición precisa a las 12 p.m. Cada bola *n* se encontrará en $\left(-\frac{e^{-(n-1)^2}}{2K}, -n\right)$, su posición inicial.

Como ya se ha dicho en la sección anterior, las variaciones del proceso son procesos cualitativa y esencialmente distintos al original (y entre ellos también). Esto queda claro cuando nos atenemos a consideraciones cinemáticas. En la primera variación las bolas sólo entran al recipiente, por lo que, considerando la misma velocidad de Friedberg que en el proceso original para cada una de ellas, realizan su operación satisfactoriamente. Una vez que ocupan su posición $\left(\frac{e^{-(n-1)^2}}{2K}, -n\right)$, permanecerán en ella durante el resto del proceso. Por lo tanto, por continuidad de las trayectorias, esa también es su posición a las 12 p.m. Como resultado final del proceso tenemos que todas las bolas se encuentran dentro del recipiente.[128]

[127] También podríamos suponer, como Van Bendegem [1994: 744], que la bola está dentro si todo el espacio que ocupa pertenece al recipiente. Con esto convendría, para visualizar el proceso más amigablemente (como también lo hace Van Bendegem), suponer bolas con un tamaño convergentemente decreciente. En cualquier caso, ambas interpretaciones del proceso arrojan un mismo estado final. Los problemas que mostrará la segunda variación también se encuentran considerando este matiz.

[128] Recordemos aquí que en la primera variación sólo entraban nueve bolas y a la primera de cada subtarea se le añadía un cero. Como resultado final, cada bola tendrá como marca un número natural estándar seguido de una infinidad de ceros. Esto pone un problema que, aunque parece ser de sumo interés matemático, escapa a los objetivos de este trabajo. La cuestión es: ¿qué número representa la representación que consiste en la representación de un número natural seguido de una infinidad de representaciones del 0? Sin duda alguna, no representa a ningún número natural. Ahora bien, ¿es posible construir un sistema numérico para el que dicha representación tenga un sentido claro y preciso? ¿Qué propiedades tendría semejante sistema?

Es pertinente comentar aquí la objeción de Van Bendegem a estos modelos. Volviendo al proceso original, y asumiendo que todas las bolas se encuentran ya dentro, realiza la siguiente consideración:

> Consider point A […]. It is the highest point of the disc that is on top of the row of discs 'in the urn'. Imagine that this point *A* is actually a pointer. As disc *n* is moved to the left, it covers a distance d_n in time t_n. *Likewise, the pointer moves the same distance*. Thus, if the task of moving disc *n* out is possible, so is the task of moving the pointer down. As the super-task is executed, point *A* will describe a downward movement. […] when the super-task is completed, point *A* must have come to a stop. Hence, the limit of v_n is 0, but as all terms are bounded below by a positive number, this implies an infinitely fast change in speed, or, to put it otherwise, an infinite acceleration [Van Bendegem 1994: 745-6, mis cursivas].

La respuesta de Allis y Koetsier es sencilla: el punto (*pointer*) al que Van Bendegem se refiere no es más que un punto virtual, y no un punto material o físico. Y el movimiento de los puntos virtuales definidos sí puede violar los principios que rigen el movimiento de los objetos o incluso de los puntos físicos.[129] Además, si seguimos estrictamente el movimiento de los discos que aquí hemos modelado, y consideramos que el tamaño de cada bola decrece según las distancias de Friedberg para que todas ocupen un espacio finito, la trayectoria del *pointer* no presenta ninguna discontinuidad, ya que recorrería, verticalmente, la distancia correspondiente al diámetro de cada bola con el correspondiente patrón de Friedberg.

En cuanto a la segunda variación, encontramos que es un proceso difícil del modelar con suma precisión. El problema está en posicionar la bola *n* en la posición 10*n* en tan sólo $1/2^n$ de minuto. En un universo newtoniano, en el que no hay un límite para las velocidades, esto puede hacerse con una velocidad, que alcanza magnitudes descomunales, pero que evoluciona según el patrón de Friedberg (el patrón de continuidad de cada periodo, y no el de disminución gradual entre periodos). En este caso, por continuidad de las trayectorias, las bolas tenderían a alejarse ilimitadamente hacia $-\infty$. De hecho, todo parece indicar que para este caso, a las 12 p.m., las bolas no se encuentran ni en el interior del recipiente ni en el exterior. ¡No están en ningún lugar del plano! ¡"Desaparecen", o "escapan" al infinito! Enseguida, en el próximo apartado, veremos que semejante destino para los cuerpos de ciertos procesos que ocurren en un universo newtoniano es posible. Otra posibilidad que satisface más a nuestras intuiciones es considerar que la posición *n* no viene dada por la ordenada $y = -n$ sino por la abscisa $x = \frac{e^{-(n-1)^2}}{2K}$.[130] De esta manera, las bolas sólo se moverían, como en los

---

[129] El argumento es impecable: "There must be a mistake in van Bendegem's kinematical analysis. It occurs on pp. 745-6 in van Bendegem [1994] where a particular point A after the execution of the super-task must suddenly come to a stop, which implies an infinitely fast change in speed. However, *A* is a virtual point while K1 through K3, of course, concern real points. Virtual points can undergo infinite accelerations without any problems as a simple example shows. Let us assume that we have a disc with radius 1 slowly rotating around its centre at the origin on the two-dimensional plane. Consider a *physical* point *P* on the edge of the disc, and the *virtual* point *A* which is the intersection of the *tangent* of the disc in *P* and the *x*-axis. When *P* moves from (0, 1) to (0, 1) as the disc rotates, *A* accelerates and moves to infinity on the positive *x*-axis. Then, just after *P* has passed (1, 0), *A* comes back from the negative *x*-axis. Clearly, while *P* is at (1, 0), *A* has an infinite speed and infinite acceleration" [Allis y Koetsier 1995: 246].

[130] Oppy afirma que no puede haber un mismo modelo de urna adecuado para los tres procesos: "I am at least tempted by the suggestion that the overall story of the Ross Urn is incoherent: there cannot be a single urn that accommodates all three of the stories told, even though, for each of the stories, there could be an urn that accommodates that story" [Oppy 2006: 81]. Pero el modelo de urna presentado aquí para la

modelos del proceso original y de la primera variación, en dirección horizontal. Y el cambio de posición $10^h n$ a $10^{h+1} n$ (con $h \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$) tan sólo consiste en moverse de $\left(\frac{e^{-(10^h n-1)^2}}{2K}, -n\right)$ a $\left(\frac{e^{-(10^{h+1} \cdot n-1)^2}}{2K}, -n\right)$. Con trayectorias continuas que sigan esta sucesión de puntos, cada bola que inicialmente tiene la marca *n* terminará, a las 12 p.m., en la posición (0, –*n*). Justo en el límite entre el interior y el exterior, pero que pertenece al interior del recipiente. (Por supuesto, se pudo haber definido el exterior y el interior del recipiente de tal manera que a las 12 p.m. encontráramos todas las bolas fuera).

3.2. Supertareas newtonianas: la aparición de anomalías

Tras este planteamiento exitoso de modelos para los procesos infinitos, con el que se muestra que la idea de una supertarea no es contradictoria y que, según el modelo, a cada planteamiento le corresponde un estado final preciso del proceso que sugiere, pudiera parecer que la interpretación de estos procesos bajo la mecánica newtoniana deja libre de problemas a los sistemas infinitos. Esto no es así. El planteamiento de algunas supertareas, ateniéndose a la mecánica newtoniana, plantea problemas que sugieren ciertas consecuencias para la misma mecánica newtoniana. En concreto, podemos detectar indeterminismo y pérdida de la energía, aspectos claramente anómalos a la teoría. Esto es relevante, ya que con el estudio de este tipo de sistemas newtonianos se está avanzando en el conocimiento de la teoría física que llamamos mecánica newtoniana. Así, con estudiar, analizar y diseñar supertareas posibles bajo la mecánica newtoniana perseguimos profundizar en el conocimiento de una teoría que todavía es de suma importancia para el quehacer humano.

En lo que resta del trabajo, nos concentraremos exclusivamente en las supertareas newtonianas que consisten en una sucesión infinita de colisiones elásticas entre partículas. A partir de aquí, cuando utilice el término ‘supertarea newtoniana’ me estaré refiriendo exclusivamente a un proceso de estas características, pese a que existan planteamientos de supertareas enmarcadas en mecánica newtoniana que no consisten exclusivamente en colisiones elásticas (ejemplo de ellas son los modelos presentados en el apartado anterior, así como los referidos en la nota 139). Veamos en qué términos son planteadas las supertareas newtonianas, así como las anomalías que surgen a partir de ellas.

3.2.1. ST1: el fallo de la conservación bajo colisiones conservativas

Comencemos por la supertarea newtoniana de mayor simplicidad y que fue originalmente propuesta por Pérez Laraudogoitia.[131] Además de ser un modelo de suma simplicidad es, sin duda alguna, el más célebre en toda la literatura dedicada a las supertareas newtonianas. Es de esencial importancia para el presente trabajo ya que es el punto de partida directo de sus contribuciones principales. El proceso que describe se desenvuelve de la siguiente manera:

---

segunda variación –considerar las posiciones en las abscisas y no en las ordenadas– también puede ser aplicado al los otros dos procesos, y por lo tanto la afirmación de Oppy es falsa.

[131] Esta no es la primer supertarea newtoniana propuesta en la literatura científica. Anteriormente a ella, Lanford [1975: 50-3] presenta un modelo de mayor complejidad pues, aunque se basa exclusivamente en una sucesión de colisiones elásticas entre partículas, requiere de un espacio bidimensional. El modelo de Lanford también es indeterminista.

> Assume a reference frame in which there is an infinite number of particles P_i, each one of mass m, at rest in the points $x_i = \frac{1}{2^i}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) while at the point x = 1, a particle P_0 of mass m and constant velocity v is moving towards P_1. After the collision, P_0 will remain at rest in x_1 = ½, while P_1 will approach and collide with particle P_2 at velocity v, P_2 at rest in x_2 = ¼. After this second collision P_1 will remain at rest in x_2 while P_2 will approach P_3 at velocity v, and so on. In general, for any $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, P_i will move during a certain interval of time at velocity v from $x_i = \frac{1}{2^i}$ to $x_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}$, but it will remain at rest in $x_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}$ [Pérez Laraudogoitia 1996: 81].

De esta manera, como una vez que toda partícula P_i se posiciona en $x = \frac{1}{2^{i+1}}$ (ahora ya estamos, por definición, ante un proceso enmarcado en la mecánica newtoniana, por lo que las trayectorias de las partículas también son continuas por definición) no cambia más su posición, se concluye que, una vez que se ha ejecutado la supertarea, todas las partículas se encuentran en reposo (véase la figura 3.2).[132] Llamaré a esta supertarea ST1, tal como la llama en varias ocasiones la literatura que hace referencia a ella.[133]

Es fácil ver que en este proceso ocurre una pérdida de la energía cinética. En el estado inicial todas las partículas están en reposo excepto P_0, que viaja con v, y por lo tanto la energía cinética total del sistema en ese momento es $\frac{1}{2}mv^2$. En el estado final, y sólo hasta que se termine de ejecutar la supertarea, todas las partículas se encontrarán en reposo, y por tanto la energía cinética total del sistema es nula. Es clara la pérdida de la energía cinética en este proceso.[134] No así los motivos de ello.

Otro rasgo relevante de esta supertarea es que aparece el indeterminismo. Si tomamos en cuenta la reversión temporal de este proceso (proceso también permitido por la mecánica clásica), entonces el conjunto infinito de partículas en reposo, dispuesto tal como lo indica el estado final, repentinamente se auto-excita (no hay una primera colisión, a cada partícula se le imprime movimiento debido a la colisión con una

[132] En [Pérez Laraudogoitia 1997b] también se describe el mismo proceso con dos diferencias irrelevantes: en vez de partículas interactúan esferas rígidas y extensas y en vez de que el conjunto infinito sea abierto por la izquierda lo es por la derecha. Aquí también se concluye, tras la mención del proceso inverso, el indeterminismo.

[133] Concretamente en [Alper y Bridger 1998], [Koetsier y Allis 1997] y [Pérez Laraudogoitia 1999b]. Sin embargo, en [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000], [Bridger y Alper 1999], [Pérez Laraudogoitia 2002b] y [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002] la llaman simplemente ST, por no necesitar distinguirla de otro modelo.

[134] Pérez Laraudogoitia también lo reconoce: "after the collision between P_0 and P_1 and after any period of time greater than or equal to $\frac{1}{2v}$ (therefore finite) has elapsed, the situation will be as follows: the particle P_i will be at rest in the point $x_{i+1} = \frac{1}{2^{i+1}}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$), that is to say all the particles will be at rest. This is the supertask, an illustration of how the total initial energy of the system of particles $\frac{1}{2}mv^2$ can disappear by means of an infinitely denumerable number of elastic collisions, in each one of which the energy is conserved" [Pérez Laraudogoitia 1996: 82]. Cabe mencionar que, para esta supertarea, la pérdida de la energía ocurre exclusivamente en el marco de referencia inercial en el que está planteada. En cualquier otro marco de referencia inercial, las partículas P_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) inicialmente tendrán la misma velocidad y la misma masa. Esto suma una cantidad infinita de energía, a la que, además, se le debe sumar la energía de P_0. En el estado final, todas las partículas llevarán la misma velocidad (y la misma masa), por lo que la energía total también es infinita. No obstante, hay variaciones de ST1 que presentan una pérdida de la energía en cualquier marco de referencia inercial (por ejemplo, el modelo de Atkinson [2007: 171-2] presentado en la sección 4.2.2 o el modelo original de este trabajo presentado en la sección 6.2.1).

partícula anterior). Es decir, el estado final de ST1 será ahora el estado inicial del proceso inverso, y tras una evolución del sistema en sentido inverso a ST1, el estado inicial de ST1 corresponderá al estado final (con las velocidades en sentido contrario a ST1) del proceso inverso. Ahora bien, el estado inicial de dicho proceso inverso coincide con el estado final del "proceso" que consiste en el mismo conjunto infinito de partículas en reposo durante cualquier intervalo de tiempo (es decir, el proceso que consiste en el reposo relativo constante de todas las partículas durante un lapso temporal). Aquí es donde surge el indeterminismo: la auto-excitación del conjunto infinito de partículas en reposo puede esperar cualquier lapso de tiempo. La ocurrencia de la auto-excitación es imprevisible. Pérez Laraudogoitia ilustra la reversión temporal de ST1 atendiendo a las posiciones de cada partícula:

> Let us consider the temporal inversion of the supertask described above. […] We take as base an initial configuration with point mass particles P_i, of mass m, at rest in points $x_i = \frac{1}{2^{i+1}}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) The complete system may be spontaneously self-excited in such a way that, after any interval of time afterwards which is greater than $\frac{1}{2v}$, we will have a system of infinite point mass particles P_i, of mass m, at rest in points $x_i = \frac{1}{2^i}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) together with a particle P_0 of mass m moving rightward from x_1 = ½ and following the rising values of x at velocity v. This form of self-excitation in the system is unforeseeable from the point of view of classical mechanics; it can take place at any instant and it may in fact repeat itself in time any number of times [Pérez Laraudogoitia 1996: 83].

Siguiendo también a la literatura, llamaré a este proceso TRST1 (a partir de Time Reversal SuperTask). Con la finalidad de facilitar la adquisición de una representación gráfica de esta supertarea, que nos ayudará a seguir la discusión en los siguientes capítulos, se ofrece la figura 3.2. Aquí, por ejemplo, se aprecia con mayor facilidad cómo es que el proceso de auto-excitación puede ocurrir y repetirse en cualquier momento: el subconjunto infinito P_1, P_2, P_3,… en la figura 3.2d) es igual al conjunto infinito P_0, P_1, P_2,… de la figura 3.2c). De hecho, cualquier subconjunto infinito de este modelo puede auto-excitarse.

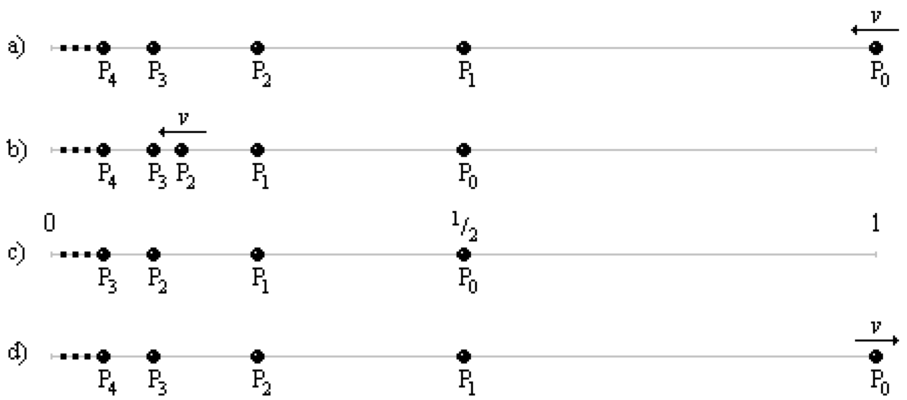


Figura 3.2. a) Estado inicial de ST1, en el que todas las partículas se encuentran en reposo, a excepción de P_0 que se dirige hacia ellas. b) ST1 ejecutándose; P_2 se dirige hacia P_3. c) Estado en el que todas las partículas se encuentran en reposo, correspondiente también al estado final de ST1, e inicial de TRST1. d) Estado final de TRST1.

3.2.2. ST2: indeterminismo bajo creación *ex nihilo*

Subamos de orden. Tomando en cuenta, a partir de ST1, que un conjunto infinito de partículas con ciertas características puede auto-excitarse, es posible también modelar supertareas en las que no sólo se suceden un número infinito de colisiones, sino también un número infinito de auto-excitaciones. Así ocurre en ST2, en la que las partículas y su evolución se disponen como se expresa a continuación:

> Consider now a denumerable infinite set of particles having the same mass, at rest at the points $x_{\pm n} = \pm \frac{n}{n+1}$ ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) […]. Suppose now that the set of particles $P_{\pm n}$ self-excites spontaneously at instants $t_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^i}$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) at positive velocity $v_i = 2^{i+2}$ if i is odd and negative velocity $v_i = -2^{i+2}$ if i is even. Such a very special form of self-excitation is, of course, unpredictable, but for our purposes suffice it to know that it is possible […]. The time interval between self-excitations ith and i+1th is obviously $\Delta t_i = \frac{1}{2^{i+1}}$ and in it self-excitation ith covers the open spatial interval (–1, +1) at a velocity of value 2^{i+2} in a time t $= \frac{2}{2^{i+2}} = \frac{1}{2^{i+1}}$. Consequently, self-excitation ith disappears precisely at the instant from which self-excitation i+1th originates. […] every process of self-excitation-extinction has the effect of making each one of the particles $P_{\pm n}$ move a certain distance towards the right or towards the left. […] As a consequence of the above, all the particles oscillate increasingly quickly [Pérez Laraudogoitia 1998a: 260-1].

A simple vista no parece que ocurra nada relevante, nada más allá que un proceso ingenioso. Sin embargo, la magnitud de la velocidad que cada partícula va gradualmente adquiriendo provoca que la suposición (siempre natural para cualquier sistema newtoniano) de que cada partícula se encuentra en el espacio se contradiga con la continuidad (también natural para un mundo newtoniano) de las trayectorias de las partículas.[135] Como consecuencia de este hecho, Pérez Laraudogoitia encuentra que todas las partículas involucradas en el proceso desaparecen:

> the assumption that P_{+n_0} is at a certain point x_0 in unidimensional space at $t_0 = 1$ contradicts assumption […] that the world line of P_{+n_0} is continuous. Therefore, at $t_0 = 1$ P_{+n_0} cannot be at any point in space, but will have disappeared from it altogether. A similar line of reasoning obviously applies to particle P_{-n_0} ($n_0 \in \{1, 2, 3, \ldots\}$). Consequently, all the particles present at $t = 0$ will have disappeared at $t_0 = 1$ and space will be void of matter [Pérez Laraudogoitia 1998a: 262].

---

[135] Pérez Laraudogoitia muestra este hecho con el siguiente argumento: “Let us suppose that particle P_{+n_0} ($n_0 \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) is at a certain point x_0 at $t_0 = 1$, and take as the neighbourhood V of x_0 an interval of length δ centred around x_0 (where δ is a number smaller than the difference $x_{+(n_0+1)} - x_{+n_0}$. Then it is obvious that there does not exist a neighbourhood U of $t_0 = 1$ such that P_{+n_0} is at V at every instant $t \in U$, because there exist instants of time t_i and t_{i+1} arbitrarily close to $t_0 = 1$ (it is enough to select an i which is sufficiently big) at which P_{+n_0} is at $x_{+n_0} = \frac{n_0}{n_0+1}$ and $x_{+(n_0+1)} = \frac{n_0+1}{n_0+2}$, that is, at points separated by a distance bigger than δ, and, as a consequence, at least one of them will lie outside V” [Pérez Laraudogoitia 1998a: 261-2].

Con fines ilustrativos, en la figura 3.3 se ofrece una representación gráfica de los estados representativos de este proceso.

Esta supertarea suscita varios problemas. En primer lugar, parece ser que el proceso viola el principio de conservación de la masa. Tras la evolución descrita, el conjunto infinito de partículas desaparece, y toda la masa que inicialmente había en un espacio aislado (y que en total era infinita) se torna nula. Esta pérdida de masa arrastra consigo una pérdida de la energía cinética y del momento (en realidad, en mecánica newtoniana, no tiene sentido hablar de energía cinética o de momento lineal cuando un sistema carece de masa, cuando consiste sólo en un espacio vacío).

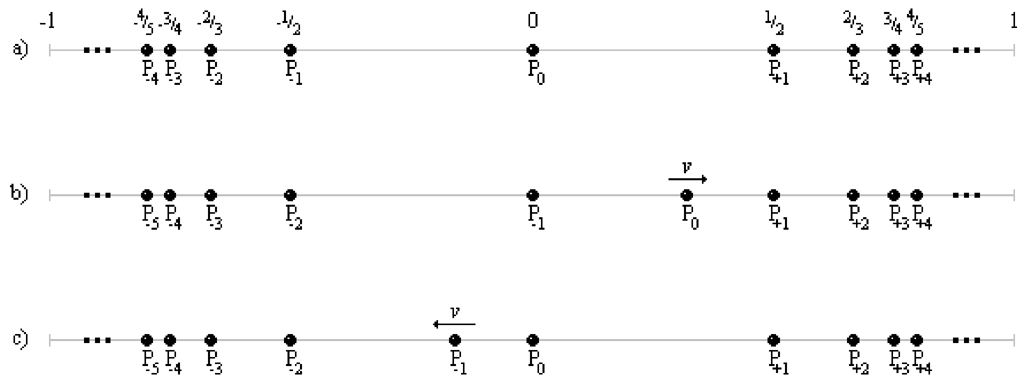


Figura 3.3. a) Estado inicial de ST2. b) Estado intermedio en proceso de auto-excitación-extinción en sentido positivo. c) Estado intermedio en proceso de auto-excitación-extinción en sentido negativo.

Por otro lado, el proceso inverso, TRST2, también es un proceso posible. En él, inicialmente se encuentra una región aislada (es decir, que no recibe ningún tipo de influencia desde el exterior) del espacio en la que aparecerán una infinidad de partículas interactuando de tal manera que ocurre el proceso revertido de ST2, para finalmente llegar a un estado de reposo relativo. Este proceso también es indeterminista, pues una región del espacio vacía y aislada puede permanecer indefinidamente vacía, y por tanto no hay forma de prever la ocurrencia de un proceso como TRST2.

Un comentario más. ST2 es un modelo preciso de la máquina Beta-Gamma de Black (presentada en la sección 3.1.1). Si consideramos, por ejemplo, que el recipiente izquierdo es la región que encierra el intervalo [–1/8, 1/8] y el recipiente derecho la región encerrada en [3/8, 5/8], la partícula P_0 va del recipiente izquierdo al derecho y viceversa una infinidad de veces. Bajo este modelo, ¿en cuál de los dos recipientes se encuentra la partícula justo cuando la supertarea se acaba de ejecutar? En ninguno, ni en ningún lugar de todo el espacio unidimensional. La partícula ha desaparecido.[136]

[136] Pérez Laraudogoitia también lo reconoce, cuando afirma que para ST2 "at t_0 = 1 all the $P_{\pm n}$ have disappeared from space (Black's marble would suffer the same fate)" [Pérez Laraudogoitia 1998a: 263].

3.2.3. ST3: escape al infinito bajo colisiones elásticas

A diferencia de ST2, la supertarea a la que llamo ST3 es una supertarea que no se basa en una infinidad de auto-excitaciones. No obstante, en ella cada partícula también colisiona una infinidad de veces con sus partículas contiguas. El proceso es el siguiente:

> Let us consider a unidimensional space, identified as the x axis, and situate our origin O on it. Let an infinite, enumerable set of point particles P_i ($i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) be distributed at $t = 0$ over this space, all particles being of identical mass and moving to the left, so that P_1 is at $x_1 = 2$ at velocity $v_1 = 1$, P_2 is at $x_2 = 4$ at velocity $v_2 = 2$,… and in general P_n is at $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + n - 2$ at velocity $v_n = 2^{n-1}$. Now it is easy to outline the evolution of P_1 from the initial moment $t = 0$ onward. P_1 will collide with P_2 at the point $x = 1 - 1 = 0$ at the moment $t = 2/1 = 2$ (since at $t = 0$ $x_1 = 2$) and will the become a prolongation P_2. P_1 cannot collide at a later stage with P_3 (since P_1 and P_3 are separated by P_2) but it will collide with a prolongation of P_3 (namely, P_2) at $x = 1 - 2 = -1$ at the instant $t = 2 + ½$ (since at $t = 2$ P_1 was at $x = 0$) becoming a prolongation of P_3. Note that P_1 will have run a unit distance, from $x = 0$ to $x = -1$, in a time $\Delta t = ½$ at a velocity $v = 2$. As a prolongation of P_3, P_1 will collide with a prolongation of P_4 at $x = 1 - 3 = -2$ at the instant $t = 2 + ½ + ¼$ (since at $t = 2 + ½$ P_1 was at $x = -1$) becoming a prolongation of P_4. So, P_1 will have run a unit distance, from $x = -1$ to $x = -2$, in a time $\Delta t = ¼$ at a velocity $v = 4$. By elementary induction we can immediately see that the description for any n will be as follows. As a prolongation of P_n, P_1 will come into collision with a prolongation of P_{n+1} at $x = 1 - n$ at the instant $t = 2 + ½ + ¼ + \ldots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}$ (since at $t = 2 + ½ + ¼ + \ldots + 1/2^{n-2}$ P_1 was at $x = 1 - (n - 1) = 2 - n$) becoming a prolongation of P_{n+1}. So, P_1 will have run a unit distance, from $x = 2 - n$ to $x = 1 - n$, in a time $\Delta t = 1/2^{n-1}$ at a velocity $v = 2^{n-1}$ [Pérez Laraudogoitia 1997a: 51-2].

Con fines ilustrativos, presentamos la figura 3.4, en la que se muestra el estado inicial del sistema así como el estado a un tiempo $t = 2 + ¼$.

Ante semejante escenario, Pérez Laraudogoitia defiende que la partícula p_1 desaparece del espacio en un tiempo finito. Al igual que para ST2, el argumento que aquí utiliza presenta una contradicción con el principio de continuidad:

> Let us suppose that, at the instant $t = 2 + \lim_{n\to\infty} 1/2 + 1/4 + \cdots + 1/2^n = 3$, P_1 is at point $x = r$ (r being any real number). In this case, the world line of P_1 would not be continuous at $t = 3$ because, if we take as $f(t)$ the function defined by the x coordinate of P_1, then $\lim_{t\to 3^-} f(t) = -\infty$ while $f(3) = r$. Since […] the world line of P_1 is continuous, it follows that at $t = 3$ the particle P_1 cannot be at any point in unidimensional space, from which it has therefore disappeared completely [Pérez Laraudogoitia 2007a: 52].

Y de la misma manera argumenta para el resto de las partículas.[137] Así, su conclusión es que a un tiempo "$t = 3$ all the particles present at $t = 0$ have disappeared into infinity leaving behind space void of matter" [Pérez Laraudogoitia 1997a: 53].

---

[137] El argumento para el resto de las partículas, aunque no es estrictamente el mismo que para P_1, por el hecho de que cada partícula P_n ($n \geq 2$) colisiona sucesivamente con sus dos partículas vecinas, se fundamenta en los mismos principios. Tras llamar $h(t)$ a la posición de P_2 y dar cuenta de que es decreciente, argumenta: "if $\lim_{t\to 3^-} h(t) = s$ (s being any real number), then P_2 could not have collided with P_1 at any point $x < s$. However, as we know that it collide, there is no real number that is $\lim_{t\to 3^-} h(t)$. From this, and the fact that $h(t)$ is nonincreasing , it follows that $\lim_{t\to 3^-} h(t) = -\infty$. Now we can make use of (1) [la continuidad de las trayectorias de las partículas], as in our analysis of P_1's motion, to deduce once again that at $t = 3$ the particle P_2 cannot be at any point in unidimensional space, but has disappeared

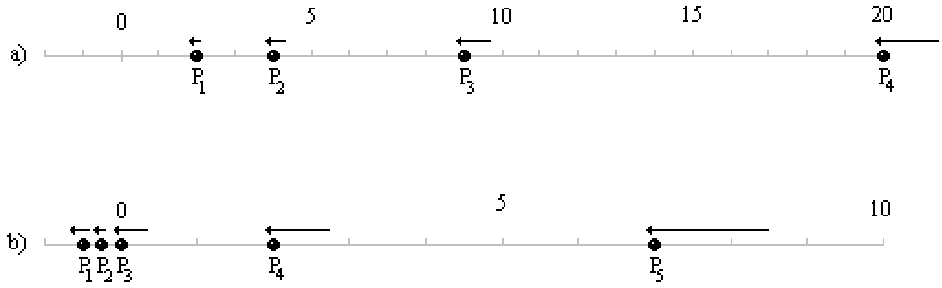


Figura 3.4. a) ST3 en su estado inicial (a $t = 0$). b) ST3 a $t = 2 + ¼$; P_1 ha adquirido una velocidad mayor a la de P_2; el impacto de P_3 con P_2 es inminente.

Cabe comentar que el "escape al infinito" de una partícula no es más que una *façon de parler* utilizada cuando la existencia de la partícula es contradictoria en el momento en que su límite tiende a infinito. En realidad, si la desaparición de una partícula aquí es consecuencia de asumir la existencia de ella junto con el principio de continuidad, no es necesario pensar que las partículas escapan al infinito, como si hubiera una región exterior a todo el espacio euclidiano. Efectivamente, en ST3 el límite de cada trayectoria a $t = 3$ es $-\infty$, pero precisamente en dicho instante las partículas no existen más, y por tanto el límite que tengan ya no nos informa de nada. (Otra forma de verlo: en cualquier momento anterior a $t = 3$, lo arbitrariamente cercano a $t = 3$ que se quiera, cualquier partícula se encontrará infinitamente lejos de la supuesta "región infinita").

Además de la desaparición de las partículas, en ST3 también encontramos indeterminismo. Nuevamente es posible plantearse el proceso temporalmente revertido. En él, el estado inicial consiste en el espacio (unidimensional) vacío de materia en el que repentinamente aparece un conjunto infinito de partículas.[138] Al igual que en TRST2, en TRST3 la aparición del conjunto infinito de partículas que presenta el proceso invertido es espontánea, puede ocurrir en un instante o en cualquier otro, siempre y cuando el espacio unidimensional se encuentre vacío de materia. La diferencia es que requiere de todo el espacio unidimensional vacío. No basta con una pequeña región.

3.2.4. Indeterminismo y pérdida de la energía: las anomalías centrales

Basta con la presentación de estas tres supertareas para ilustrar la emergencia de los dos problemas a los que se les prestará la mayor atención en lo que resta del presente trabajo: el indeterminismo y la pérdida de la energía en la mecánica newtoniana. Una teoría habitualmente considerada, por un lado, como determinista y, por el otro, que sólo describe sistemas conservativos.

---

completely from it" [Pérez Laraudogoitia 1997a: 53]. Ahora sí, este argumento utilizado para P_2 se extiende y aplica al resto de las partículas.

[138] Así lo expresa también Pérez Laraudogoitia: "the corresponding process generated by the temporal reversal of each of the collisions should also be possible – that is, the process leading to the sudden appearance in empty space of an infinite set of particles P_i" [Pérez Laraudogoitia 1997a: 54].

Como se acaba de presentar, las tres supertareas presentadas generan indeterminismo. Los procesos revertidos de cada una de ellas presentan un evento (o una sucesión de eventos) que puede ocurrir en cualquier momento, antes o después, o que incluso puede no ocurrir nunca. La mecánica newtoniana muestra así ser indeterminista ya que la ocurrencia de dicho evento en cualquier momento es parte de su descripción del universo (newtoniano).

Por otro lado, en ST2 y en ST3 ocurre la desaparición de todas las partículas, sugiriendo así una violación del principio de la conservación de la masa (esta cuestión se tratará en el siguiente capítulo, concretamente en la sección 4.2.1). De esta manera, la comprensión de la pérdida de la energía en estos modelos es trivial: fácilmente se ve que proviene directamente de la desaparición de las partículas masivas. A diferencia, la pérdida de la energía cinética que presenta ST1 es un problema más agudo ya que se presenta en un conjunto de partículas que permanece en el tiempo.

Así las cosas, los problemas de interés filosófico que plantean estos procesos son varios.[139] Respecto del indeterminismo, ¿por qué son indeterministas estos procesos? ¿Lo son simplemente porque son sistemas infinitos? ¿Cuáles son las fuentes del indeterminismo en cada caso, los mecanismos que posibilitan la emergencia de eventos indeterministas en este tipo de sistemas? ¿Es cualquier supertarea newtoniana indeterminista? En cuanto a la pérdida de la energía, ¿por qué se pierde la energía en estos procesos? ¿Simplemente porque son infinitos? ¿Se pierde la energía en cualquier supertarea newtoniana? ¿Es un hecho casual que la presencia del indeterminismo y la

[139] La misma discusión de estos problemas requerirá del planteamiento de otros modelos que se irán presentando a lo largo del desarrollo de los siguientes capítulos. La mayoría de estos modelos no son más que variaciones de los modelos presentados aquí. Así, por ejemplo, los modelos de Earman y Norton [1998a: 125-8] no son más que variaciones de ST3 creadas con el objeto de aclarar el indeterminismo en ST3; el modelo que llamaré GC (de Global Collision) es una variación de ST1 diseñada por Alper y Bridger [1998: 366] para introducir mayores problemas a las supertareas newtonianas; y el modelo de Atkinson [2007: 174-5] es también una variación de ST1 con masa total finita que también presenta una pérdida de la energía e indeterminismo. De la misma manera, los modelos originales que presento en este trabajo no serán más que variaciones o generalizaciones de ST1.

Cabe también hacer una breve mención de los modelos presentes en la literatura científica pero que, aunque algunos constituyen contribuciones importantes para el indeterminismo o la pérdida de la energía, no se abordarán en las próximas páginas por encontrarse fuera del marco de investigación propuesto para este trabajo. Podemos hacer la siguiente clasificación de estas supertareas excluidas: por un lado, aquellas que están planteadas en el marco teórico de la mecánica clásica pero que no consisten en la sucesión de colisiones elásticas, y por el otro, aquellas que están planteadas en el marco teórico de una teoría que no es la mecánica newtoniana.

Para el conocimiento del autor, sólo hay una supertarea newtoniana que no se basa en colisiones elásticas. Se trata de la supertarea indeterminista diseñada por Norton [1999: 1269-71] que consiste en una infinidad de partículas dispuestas en el espacio unidimensional, en donde cada partícula interacciona con sus partículas adyacentes por medio de resortes. Por otro lado, también se encuentran aquellos sistemas que, aunque son newtonianos e infinitos, no deben confundirse con supertareas. Por ello también se excluirán en este trabajo. De estas características es el modelo de Cooke [2003: 592-3] en el cual una infinidad de esferas colisiona inelástica y simultáneamente con otra esfera. Están también los modelos de Pérez Laraudogoitia [2001 y 2003a] en los que una infinidad de partículas interaccionan bajo gravitación, así como el modelo de Pérez Laraudogoitia [2002a] que consiste en la interacción por contacto de una infinidad de esferas, y su variación con masa finita total [Pérez Laraudogoitia 2007a: 24-5].

Por último, supertaras planteadas en un marco distinto al de mecánica newtoniana son los modelos de Pérez Laraudogoitia [1998b y 2007b: 728-30] y de Atkinson [2007: 175-8], modelos que se encuentran enmarcados por la teoría especial de la relatividad y que consisten en colisiones elásticas. Bajo la consideración relativista de espacio-tiempos de Malament-Hogarth se encuentran las supertareas planteadas por Earman y Norton [1993]. Y planteadas bajo la mecánica cuántica, están la supertareas propuestas por Norton [1999: 1279-96] y Bokulich [2003].

pérdida de la energía cinética se presenten en este tipo de procesos? ¿Qué relación guardan el indeterminismo y la pérdida de la energía en estos sistemas?

Este es el panorama global de problemas que se abordarán en la tercera parte del trabajo. Antes de pasar a ello, es conveniente detenerse ahora en los aspectos que amenazan el carácter newtoniano de lo que aquí hemos denominado 'supertareas newtonianas'. Si tales procesos en realidad no son newtonianos, entonces no tienen nada que decir sobre la mecánica newtoniana. El siguiente capítulo se dedica a aclarar esta cuestión.

4. ¿Cuándo es newtoniana una supertarea?

Nature and nature's laws lay hid in night.
God said, let Newton be, and all was light.

Alexander Pope, *Newton's epitaph*.

Los modelos presentados en el apartado 3.2 del capítulo anterior son ejemplos que muestran que la mecánica newtoniana presenta ciertas anomalías: indeterminismo, pérdida de la energía cinética, desaparición de partículas. Uno de los argumentos para defender que estos modelos no muestran la presencia de dichas anomalías en la mecánica newtoniana consiste en mostrar, precisamente, que dichos modelos no cumplen los requisitos para clasificarlos como newtonianos. Si los modelos tienen características que no se encuentran dentro del marco teórico que la mecánica newtoniana constituye, entonces no tienen absolutamente nada que decir de la mecánica newtoniana.

¿Son, pues, ST1, ST2, y ST3 modelos genuinamente newtonianos? ¿Qué conceptos constituyen a un sistema newtoniano? ¿Qué principios debe cumplir un sistema para poder considerarlo newtoniano? ¿Debe todo sistema al que se apliquen las leyes de Newton garantizar también el determinismo y la conservación de la energía? ¿Son el determinismo y la conservación de la energía consecuencias de las leyes de Newton? Este capítulo tiene como objetivo aclarar estas cuestiones. Para esto, se analizarán algunas características de las supertareas en cuestión que originan objeciones en contra de catalogarlas dentro de los sistemas newtonianos. Por supuesto, se tomará en cuenta, entre otras contribuciones, la discusión principal que al respecto se encuentra en la literatura, y que presenta dos posiciones enfrentadas. Por un lado, Pérez Laraudogoitia pretende mostrar con sus modelos cómo es que la presencia tanto del indeterminismo como de la falta de conservación de la energía en ciertos sistemas son deducibles a partir de las leyes de Newton (y sus asunciones), lo que invita a pensar que el determinismo y la conservación de la energía no son consecuencia de ellas.[140] A este

[140] No es necesario citar aquí algún fragmento en el que Pérez Laraudogoitia manifiestamente afirme esta posición, pues salta a la vista en los fragmentos presentados en el capítulo anterior. A lo largo de este capítulo también se irá corroborando que ésta es su posición.

parecer se suman Earman y Norton, subrayando que los sistemas conservativos y deterministas son la gran mayoría de los sistemas newtonianos y con los que normalmente se trabaja, mas no que éstos sean la totalidad de los sistemas newtonianos.[141] En dirección contraria, Alper y Bridger sostienen como idea principal que todo sistema newtoniano debe incluir en sus consideraciones el principio de la conservación de la energía, y que a todo sistema que lo viole, aunque cumpla las leyes de Newton (como es el caso de ST1), no se le puede considerar como newtoniano.[142] Fuera ya de esta discusión original, las recientes contribuciones de Atkinson también se posicionan a favor de la no conservación y del indeterminismo de estos sistemas newtonianos.[143]

La estructura del capítulo es la siguiente. En primer lugar, en el apartado 4.1, se hará un recordatorio de las leyes de Newton y de las ideas que estas leyes asumen, base de todos los sistemas que se asumen newtonianos. En más de una ocasión, este recordatorio será de gran utilidad dentro del análisis de algunas objeciones que van a considerarse. En segundo lugar, en el apartado 4.2, se consideran las objeciones. En la sección 4.2.1 se considerará una primera objeción, que consiste en advertir que supertareas como ST2 y ST3 aparentemente violan el principio de conservación de la masa. Se mostrará que dicha violación se basa en un principio intuitivo que resulta ser inconveniente, y que ante una formulación más adecuada del principio, las supertareas en cuestión no lo violan. La segunda objeción que se tomará en cuenta (en la sección 4.2.2) consiste en destacar el hecho de que ST1, ST2 y ST3 son sistemas con masa total infinita. Aunque en sí este hecho no tiene un buen fundamento para presentarse como problemático (dentro de la mecánica clásica), de cualquier modo se mostrará que existen sistemas con masa total finita en los que persiste la presencia del indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía. En la sección 4.2.3, se apreciará la objeción en contra del análisis local de la trayectoria de cada partícula, junto con la propuesta de un análisis global para las supertareas. Se verá que el análisis global presentado hasta ahora es altamente inconveniente, pues va en contra de ciertos supuestos básicos de las leyes de Newton. En la sección 4.2.4, se analizará la problemática en torno a la colisión de los cuerpos por contacto. Éste, aunque es un problema desafiante, no resulta ser exclusivo de las supertareas basadas en colisiones elásticas, sino de todos los sistemas newtonianos que presentan cuerpos en contacto (y en los que se incluyen una inmensa cantidad de sistemas que se presumen libres de anomalías). En la sección 4.2.5, se enfrentará el problema de la discontinuidad de la velocidad y la fuerza en el instante de la colisión entre partículas. Se verá que no asumir dicha discontinuidad acarrea peores inconvenientes y que, además, existe el utillaje matemático adecuado para modelar la discontinuidad junto con la derivabilidad de la velocidad en el instante de la colisión. En la sección 4.2.6, se considerará la objeción que sostiene que el proceso revertido de las supertareas presentadas en el capítulo anterior no es un proceso posible. Es decir, que la invariancia ante la reversión temporal de las leyes de Newton no implica la posibilidad del proceso revertido de los procesos

[141] Lo manifiestan, por ejemplo, en el siguiente pasaje: “the familiar Newtonian systems happen to be in the subclass of deterministic, energy conserving systems. But we should not turn this accident of the familiar into a necessity” [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 286].

[142] La idea principal de su crítica es ésta (idea que se discute en la sección 4.2.9). Se verá en el desarrollo del capítulo que también participan con otras objeciones.

[143] Junto con Peijnenburg, formula el siguiente comentario: “The provisional conclusion of all these considerations, agreed upon by all participants in the debate, is that we must bite the bullet and accept that the law of conservation of energy is indeed not sacrosanct. Apparently, there are situations in which the conservation law should be given up. This conclusion must be unexpected, and for some even unpleasant, but it is not paradoxical” [Peijnenburg y Atkinson 2008: 196].

originales. Se mostrará que los procesos revertidos sí son procesos posibles y por qué el criterio que lo muestra es el más plausible. En la sección 4.2.7, se examinará la posición finitista que defiende que los sistemas infinitos en sí son problemáticos. Se evidenciará que esto no es así. Para ello, se propondrá un sistema infinito que lleva a cabo una supertarea, y que carece de anomalías. En la sección 4.2.8, se valorará la observación que repara que los sistemas en cuestión no toman en cuenta los efectos gravitatorios. Se aclarará que en mecánica clásica un sistema que interacciona bajo efectos gravitatorios es otro sistema que aquel que no lo hace. Por último, en la sección 4.2.9, se tomará en cuenta la objeción que consiste en hacer notar que los principios de conservación son una parte constitutiva de la mecánica newtoniana. Se aclarará este aspecto, evidenciando que la pérdida de la energía (cinética en el caso de ST1), no va en contra ni de la conservación de la energía que se puede deducir a partir de las leyes de Newton, ni de la conservación de la energía cuando ésta se considera como un concepto que va más allá de la energía mecánica. Se presentará, además, una generalización de supertareas basadas en colisiones elásticas que conservan la energía y el momento lineal, dejando así en alta sospecha la idea en que se basa esta última objeción.

Ante todo esto, quedará claro que, a pesar de las diversas dudas que todas estas objeciones pueden suscitar, las supertareas que aquí nos incumben sí pueden considerarse newtonianas.[144] El recorrido por estas objeciones nos ayudará también, en el apartado 4.3, a realizar, a manera de caracterización, un listado, más completo que los que hasta la fecha se han presentado, de los requisitos que deben de cumplir los sistemas newtonianos.

4.1. Las leyes de Newton: la base de los sistemas newtonianos

> Newtonian Mechanics […], as commonly understood, consists of Newton's three laws of mechanics and their associated presuppositions and entailments [Wilson 2007: 173-4].

Esta afirmación de Wilson nos dice de forma brevísima en qué consiste la teoría que llamamos mecánica newtoniana. Efectivamente, como se puede comprobar en la literatura, ésta es la idea más común que se tiene de la teoría con la que aquí se trabajará.[145] Incluso Alper y Bridger, que defienden que modelos como ST1 y ST2 no

[144] Cabe añadir que, aunque fuera del objeto de la presente investigación, los procesos de supertareas tratados en el presente capítulo no son sistemas acordes ni con la mecánica relativista ni con la cuántica. En la última sección de [Alper y Bridger 1998: 367-8] se encuentran importantes observaciones al respecto: según el principio de incertidumbre en mecánica cuántica, al conocer con precisión la posición inicial de las partículas en ST1, la enorme incertidumbre en el momento implica que éstas deben encontrarse en movimiento. Por relatividad general, la fuerza gravitacional cerca de $x = 0$ será gigantesca, atrayendo y moviendo a todas las partículas. Además, el espacio-tiempo tendría una curvatura muy grande en la región cercana a $x = 0$. Por otro lado, aunque ST1 es posible según los principios de la relatividad especial, ST2 no, ya que la velocidad de la luz es alcanzada y superada por cada una de las partículas en cualquier marco de referencia inercial.

[145] Por ejemplo, Arya escribe: "Essentially classical or Newtonian mechanics is the study of the consequences of the laws of motion as formulated by Newton" [Arya 1998: 1]. Y aunque la mecánica newtoniana no sea la misma hoy que en los tiempos de Newton (esta observación será pertinente más de una vez en nuestra discusión principal), debe quedar claro que detrás de su planteamiento con lagrangianos o hamiltonianos se encuentra la misma teoría: "A great many of the applications of classical mechanics may be based directly on Newton's laws of motion. […] There are, however, a number of other ways of formulating the principles of classical mechanics. The equations of Lagrange and of Hamilton are examples. They are not new physical theories, for they may be derived from Newton's laws,

son newtonianos, exigen también que todo sistema al que se le clasifique como newtoniano debe cumplir las tres leyes de Newton.[146]

Recordemos, pues, las leyes de Newton. Pero antes de ello, es importante recordar también, de forma breve, algunas de sus presuposiciones: los conceptos de espacio, de tiempo, de posición, de velocidad, de aceleración y de los marcos de referencia inercial. La mayoría de estas presuposiciones están tan arraigadas en nuestra forma cotidiana de pensar, que constituyen algunas de nuestras intuiciones más elementales. Por esto mismo, resulta difícil expresarlas con una definición precisa.[147]

Tenemos, primeramente, que los objetos se encuentran en el espacio y el tiempo. Dicho intuitivamente, los objetos "habitan" un universo que se deposita, o se dibuja, en un "depósito", o en un "lienzo", conformado por el espacio y el tiempo. El espacio en mecánica clásica es un espacio euclidiano, continuo y tridimensional, aunque el análisis de los sistemas se puede reducir a un espacio bidimensional o unidimensional, como será el caso de los sistemas que aquí vamos a tratar. Por su parte, el tiempo es un espacio euclidiano continuo unidimensional. Si en algún momento (un punto de la línea del tiempo), o durante algún lapso de tiempo (un intervalo de la línea del tiempo), un objeto existe, entonces necesariamente ese objeto se puede localizar en algún punto del espacio. Si este objeto es un cuerpo extenso, su centroide se localizará en un punto, pero el cuerpo entero se localizará en la misma región del espacio que ocupa el conjunto infinito de puntos espaciales con la misma figura geométrica que el cuerpo en cuestión.

Ahora bien, un cuerpo en movimiento tendrá distintas posiciones conforme el tiempo transcurre. La velocidad es la razón de este cambio de posición respecto al tiempo, y en términos del cálculo infinitesimal, la velocidad instantánea se expresa por la ecuación diferencial $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$, donde $\boldsymbol{v}$ es la velocidad (vectorial), $\boldsymbol{x}$ la posición (también vectorial) y t el tiempo. De la misma manera, la velocidad instantánea puede cambiar conforme el tiempo pasa. La aceleración es la razón de este cambio de la velocidad con respecto al tiempo, que se expresa con la ecuación $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, donde $\boldsymbol{a}$ es la aceleración.

Estas definiciones no obedecen siempre a las ideas intuitivas que se suelen tener de los conceptos que definen. Intuitivamente, la velocidad es la rapidez con la que un objeto se mueve, mientras que la aceleración es el aumento de dicha rapidez. Pero estas nociones no son más que casos especiales de las nociones que las expresiones del párrafo anterior recogen. Para verlo claramente, basta con reparar que el concepto de velocidad newtoniano siempre incluye una dirección; un cuerpo puede viajar con la misma rapidez hacia delante o hacia atrás, pero no con la misma velocidad. Una rapidez hacia delante es una velocidad, y la misma rapidez hacia atrás es otra velocidad (en símbolos matemáticos, el vector de ambas velocidades tiene la misma magnitud, pero el signo de cada uno de sus componentes es respectivamente el contrario). De esta manera, un cambio de dirección también es una aceleración, pues es un cambio en la velocidad.

---

but they are different ways of expressing the same physical theory" [Symon 1971: 3]. La misma aclaración también se encuentra en [Arya 1998: 463] o en [Sussman y Wisdom 2001: 2-3].

146 Lo afirman junto con Earman y Norton: "A necessary condition for a system of particles to be Newtonian is that Newton's laws of motion are satisfied at all times" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 282].

147 Aclarar estos conceptos se encuentra fuera de los objetivos del presente trabajo, que se limitará a la utilización de ellos tal como la mecánica newtoniana habitualmente lo hace. Por más que sean todo un campo digno de investigación y reflexión, incluso la literatura en física no suele ocuparse de ellos. Cabe mostrar que existe la preocupación por esto: "The meanings of these primitive terms must be made clear by some means that lies outside of the physical theories being set up. We might, for example, simply use the terms over an over until their meanings become clear. This is the way babies learn language, […]. It has the disadvantage that we are never sure that our concepts have been given a precise meaning" [Symon 1971: 2].

Por su parte, debe quedar claro que ni el concepto de velocidad ni el de aceleración se corresponden con el concepto de movimiento (cuestión que ya se aclaró en la sección 2.2.3).

Por otro lado, un marco de referencia inercial es un sistema de coordenadas que se mueve con una velocidad constante respecto de un supuesto sistema de coordenadas en reposo absoluto (que a su vez también sería un marco de referencia inercial, pues podemos suponer que el primer marco es el que se encuentra en absoluto reposo y este último el que se mueve con una velocidad constante y de signo contrario). De esta manera, la aceleración es un invariante de la mecánica newtoniana: un cuerpo acelerado tendrá la misma aceleración en cualquier marco de referencia inercial.[148] Por el contrario, la velocidad no es un invariante y no hay forma de saber objetivamente si un cuerpo con velocidad constante se mueve o se encuentra en reposo.[149] A las transformaciones que llevan un sistema de un marco de referencia inercial a otro se le llaman transformaciones galileanas (éstas ya se presentaron en la sección 2.3.3, para solucionar la paradoja del estadio). La existencia de los marcos de referencia inercial, así como el hecho de que cualquier análisis que hagamos de cualquier sistema se realiza en uno de estos marcos, es uno de los supuestos distintivos de la mecánica clásica y, como se verá en seguida, se encuentra estrechamente relacionado con las leyes de Newton.

Este breve recordatorio de los supuestos en los que se basa la teoría nos ayudará a comprender mejor los comentarios de las leyes de Newton que se hacen a continuación.

La primera ley

Es la llamada ley de la inercia y suele enunciarse de la siguiente manera: *todo objeto continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que una fuerza actúe sobre él*.[150] Es decir, si no hay una fuerza que actúe sobre una partícula, ésta no tiene ningún motivo para cambiar su estado de reposo o de velocidad constante. Tomando esto en cuenta, es claro que para cada uno de los objetos sobre los que no actúa ninguna fuerza, siempre es posible encontrar un marco de referencia inercial en el que dicho objeto se encuentra en reposo. Es decir, esta ley nos dice también que los marcos de referencia inerciales pueden ser identificados tras el examen del movimiento de las partículas libres,[151] las partículas que no experimentan ninguna fuerza. Claramente, la primera ley asume la existencia de los marcos de referencia inercial. Incluso se afirma que la existencia de estos marcos es el contenido esencial de la primera ley.[152] Ahora bien, las partículas que no se encuentran en un estado de velocidad constante, son partículas que están aceleradas. La relación entre la fuerza que estas partículas experimentan y su aceleración precisamente es el asunto de la segunda ley.

La segunda ley

Hay varias formas de enunciarla. Una puede ser la siguiente: *la razón del cambio de momento de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que se le aplica, y su*

[148] Confróntese en [Lange 2002: 207] o en [Longair 1984: 87].
[149] Se puede confrontar en [Earman 1986: 34] o en [Lange 2002: 208].
[150] La misma formulación puede encontrarse en [Arya 1998: 5] o en [Symon 1971: 7].
[151] Véase, por ejemplo, [Hestenes 1986: 589].
[152] Por ejemplo en [Arya 1998: 6] y en [Kibble 1985: 7].

dirección es la misma que la de dicha fuerza aplicada.[153] Si sabemos que el momento (que representaremos con $\boldsymbol{p}$) se define como la masa (m) multiplicada por la velocidad, la expresión diferencial de esta ley es $\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a}$. Esta formulación en sí es, junto con la correcta interpretación de los símbolos que involucra, otra forma completa de expresar la segunda ley.[154] Con esto, es fácil ver que la primera ley no es más que un caso especial de la segunda ley: cuando a una partícula no se le aplica ninguna fuerza ($\boldsymbol{F} = \mathbf{0}$), la aceleración, o sea, la variación de la velocidad, también es nula, y por lo tanto su velocidad es constante.[155]

Ahora bien, la interpretación de esta ley no es del todo trivial. Por un lado, se puede interpretar como la definición del concepto de fuerza. Esto presenta un inconveniente; a saber, que excluye a las fuerzas que interaccionan en los objetos en reposo, como aquellas presentes en cualquier estructura estática.[156] Por el otro lado, la segunda ley se puede interpretar también como la definición del concepto de masa: la resistencia que opone un objeto a ser movido por una fuerza. Sobre esta definición nos ocuparemos en la siguiente sección.[157]

Sin el propósito de profundizar en este aspecto, sugiero que se dejen aparte los conceptos de fuerza y de masa (aunque sea esta ley la que mejor defina alguno de estos conceptos), y que se vea en la segunda ley simplemente una relación importante para describir (y para ayudarnos a predecir, por supuesto) el movimiento de los objetos acelerados.

La tercera ley

Aunque también se le llama la ley de reciprocidad, es muchas veces presentada como el principio de acción y reacción. Se enuncia así: *a toda fuerza aplicada por un primer objeto a un segundo objeto le corresponde una fuerza opuesta (misma magnitud, dirección contraria) que el segundo objeto aplica al primero*.[158] Su implicación más inmediata es que las fuerzas existen siempre en pares.

Aunque es un hecho que no afecta a los sistemas que el presente trabajo trata, cabe comentar que se puede interpretar que la tercera ley no siempre se cumple. Por ejemplo, no se cumple para las fuerzas que se propagan de un cuerpo a otro con velocidad finita.[159] Tampoco se cumple para las fuerzas que los campos imprimen en los cuerpos, ya que los cuerpos no reaccionan aplicando una fuerza al campo.[160] A pesar de

---

[153] Podemos encontrar la misma formulación en [Arya 1998: 5] o en [Symon 1971: 7].

[154] Confróntese en [Hestenes 1986: 590] o en [Kibble 1985: 6].

[155] Véase también en [Arya 1998: 7].

[156] El mismo Symon, quien acepta que la segunda ley como definición de fuerza nos ayuda a entender mejor las leyes de la física, hace esta importante observación: "Newton's discovery was not that force equals mass times acceleration, for this is merely a definition of "force". What Newton discovered was that the laws of physics are most easily expressed in terms of the concept of force defined in this way. […] The whole science of statics, which deals with forces acting in structures at rest, would be unintelligible if we took [la segunda ley] as our definition of force, for all accelerations are zero in a structure at rest" [Symon 1971: 8].

[157] Como se puede verificar en [Hestenes 1986: 590] o en [Longair 1984: 86].

[158] La misma formulación puede encontrarse en [Arya 1998: 5] o en [Hestenes 1986: 588].

[159] Confróntese en [Symon 1971: 9].

[160] Véase, por ejemplo, [Lange 2002: 163]. Este no es el caso de los campos gravitatorios, para los que cada fuerza sí tiene su par (véase [Longair 1984: 280]). Por otro lado, Kibble sostiene que las fuerzas generadas por campos electromagnéticos, aunque importantes en física clásica, no pertenecen a sistemas de mecánica clásica: "More serious is the existence of electromagnetic forces, which are of great importance even in the field of classical physics, but which cannot readily be accommodated in the

estas excepciones, se sigue aceptando la validez y la importancia de esta ley para la inmensa mayoría de los sistemas clásicos.

Una vez presentadas las leyes de Newton y sus presuposiciones, es importante tener presente que lo que hoy en día se concibe como mecánica newtoniana es una teoría distinta de la formulación originalmente planteada por Newton. La teoría original de Newton se ha ido gradualmente enriqueciendo, se le han añadido conceptos desarrollados desde otras teorías que contribuyen a la comprensión del movimiento, y se ha ido interpretando desde planteamientos matemáticos cada vez más poderosos. Truesdell, por ejemplo, reconoce:

> In the three books of the *Principia*, Newton displays in the highest every ability of a great theorist […]. But by no means did he give "classical" mechanics its present form, nor were his principles clear and definite enough to do so [Truesdell 1968: 91-2].[161]

Aún en nuestros días, la mecánica newtoniana sigue enriqueciéndose.[162] No podemos decir, pues, que su situación actual es definitiva. Este aspecto podría ser un obstáculo importante para el problema que trata este capítulo. Si la mecánica clásica es una teoría que no está terminada, ¿cómo es posible saber qué sistemas entran en su marco teórico? A pesar de esta situación, es posible dar unos requisitos mínimos que deben de cumplir los sistemas newtonianos; de otra manera no podríamos decir de ningún sistema que es newtoniano, lo que resulta escasamente convincente. Si en algún futuro algunos de los requisitos actuales se modifican, será para enriquecer a la teoría (como se ha venido haciendo en su desarrollo) y no para truncarla. Por esto mismo, no debemos temer que un sistema que hoy se reconoce como newtoniano, deje en un futuro de reconocerse como tal.

4.2 Objeciones en contra del carácter newtoniano de las supertareas

Aunque ST1, ST2, y ST3 son sistemas cuyas evoluciones cumplen las tres leyes de Newton del movimiento, así como sus asunciones básicas, también son sistemas con características que pueden ser el apoyo de objeciones al carácter newtoniano de dichos sistemas. A continuación, analizaremos tales características, para así mostrar que los sistemas en cuestión –y semejantes– sí son newtonianos.

---

framework of classical mechanics. The force between two charges in relative motion is neither central nor conservative, and does not even satisfy Newton's third law" [Kibble 1985:8].

[161] Esto también se afirma recientemente: "Newton's laws of motion in his Principia are far from those generally accepted today as 'laws of mechanics'. There is a *big* discrepancy between what modern readers (and teachers) deem Newtonian and what Newton actually did" [Maltese 2003: 199, mis cursivas].

[162] Por mencionar ejemplos, en la sección 4.2.5, se verá que las colisiones instantáneas se pueden ver ahora bajo teoría de distribuciones, desarrollo que no aparece hasta el siglo XX; en [Sussman y Wisdom 2001] se ve la teoría desde un planteamiento aún más novedoso, que pone más atención a las características de las trayectorias que a las descripciones simbólicas del movimiento; en [Bell 1998: 50-9], por otro lado, se muestran aplicaciones a sistemas newtonianos de un cálculo basado en infinitesimales nilpotentes.

4.2.1 El fallo de la conservación de la masa

Empecemos con una primera objeción posible: las supertareas ST2 y ST3 no son newtonianas porque violan el principio de la conservación de la masa. Esta posible objeción (que por cierto, hasta la fecha nadie ha manifestado) ya fue considerada tanto por Earman [1986] como por Pérez Laraudogoitia [1998a], que resuelven la cuestión precisando el principio de la conservación de la masa, enunciando así un principio que difiere de aquel que intuitivamente poseemos. Alper y Bridger, que sostienen que sistemas como ST2 y ST3 no son newtonianos, no oponen resistencia a esta precisión de la conservación de la masa, aceptando así la consideración de Earman y Pérez Laraudogoitia.

Aunque exista semejante consenso en esta cuestión, resulta interesante revisar la precisión considerada. Originalmente Earman la enuncia de la siguiente manera:

> Distinguish two principles of conservation of mass: (C1) particle world lines do not have beginning or end points and mass is constant along a world line, and (C2) for all time t_1 and t_2, the total mass at t_1 = the total mass at t_2. (C1), I claim, is a fundamental principle of classical physics, and it is satisfied even in the anomalous escape solutions. Further, if the laws of motion do not allow escape solutions, then (C1) entails (C2). Some people have been misled into thinking that (C2) is a basic law of classical physics because they have not recognized the possibility of escape solutions [Earman 1986: 38].

Esto, según Pérez Laraudogoitia, demuestra que (C1) es una formulación más apropiada del principio de conservación de la masa que (C2).[163] Aunque estoy de acuerdo en preferir (C1), me parece que la explicación de Earman es poco clara y se puede prestar a confusión. Sólo se dice que si no se reconoce la posibilidad de partículas que escapan al infinito, entonces hay una desorientación que provoca el considerar (C2) como principio básico de la física clásica. Lo que *parece* que pone las cosas al revés: en vez de que la conservación de la masa justifique la posibilidad de sistemas en donde ocurren escapes al infinito espacial, los sistemas con escapes al infinito justifican el principio de conservación.

Las cosas están bien puestas. La razón de anteponer los sistemas con escapes al infinito es que, si en mecánica newtoniana los rechazamos sólo porque presentan dichos escapes, entonces estamos rechazando también la validez de algunos marcos de referencia inercial, marcos que permiten la carencia de un límite para las velocidades involucradas en dichos sistemas (y que son las que, en el fondo, provocan los escapes al infinito). Podemos encontrar un marco de referencia en el que cualquier velocidad que participa en estas supertareas sea nula. Y por eso mismo, cada una de las velocidades que intervienen en estos procesos son velocidades válidas (que en conjunto ocasionan irremediablemente la desaparición de las partículas).

Además de esta observación, otro motivo de gran importancia para preferir (C1) radica en la concepción actual (incluso en mecánica newtoniana) que se tiene de la masa. En mecánica clásica, se pueden tener dos concepciones de la masa: (M1) la

[163] Así lo expresa en el siguiente pasaje: "Earman (1986) has demonstrated that (Q1) [(C2) en el pasaje citado de Earman] is not a good way of formulating the principle of the conservation of mass (within the framework of classical physics, to which we have limited ourselves throughout this paper), because it takes no account of escape solutions, that is, situations in which a particle escapes to spatial infinity in a finite amount of time, thus disappearing from space" [Pérez Laraudogoitia 1998a: 263].

cantidad de materia de la que está hecha un cuerpo;[164] y (M2) lo que mide la resistencia que opone un cuerpo para cambiar su movimiento, es decir, la medida de la inercia.[165] (M1) es la concepción tradicional, intuitiva, e incluso la que Newton considera[166] en sus definiciones. No obstante, es importante recordar que la mecánica newtoniana en nuestros días no es la misma teoría que la mecánica newtoniana en los tiempos de Newton. Desde entonces, el concepto de masa ha sufrido un cambio sustancial, y la preferencia actual en mecánica clásica por concebir rigurosamente la masa como lo dicta (M2) es unánime.[167] No debe resultar extraño que esta concepción de la masa, propia de la mecánica relativista,[168] se prefiera en la formulación de la mecánica newtoniana: en ésta, la masa entendida como (M2), además de que se identifica con el concepto relativista[169], mantiene su naturaleza aditiva,[170] propiedad intuitivamente atribuida a la masa entendida como (M1).

Tomando en cuenta (M2), la preferencia por (C1) es directa. Ya no es necesario concebir la masa como materia y por tanto la conservación de la masa se refiere a la conservación de la inercia. Y eso es precisamente lo que expresa (C1): la inercia de toda partícula es la misma en cada punto de su trayectoria.[171] Mas esto no implica que las partículas deban tener trayectorias tales que las mantengan en todo momento en alguna posición del espacio, que es lo que se necesita para que (C2) se cumpla. El principio de conservación de la masa entendida como (M1) se concebía como un principio de conservación de la materia, que intuitivamente exigía un enunciado (C2); y, como ya hemos visto, esto prohíbe trayectorias que, por relatividad galileana, no deberían estar prohibidas en mecánica newtoniana. La conservación de la masa formulada como (C1), pues, es un principio adecuado al concepto contemporáneo de masa y a la relatividad galileana. Es un principio adecuado a la mecánica newtoniana contemporánea.

4.2.2 La masa total infinita

Hay otra posible objeción que involucra a la masa. Consiste en hacer notar que ST1 (y en este caso ST2 y ST3 también) es un sistema con una masa total infinita. Allis y Koetsier son los únicos que han encontrado esta característica como ilegítima. La objeción se encuentra dentro de las siguientes observaciones:

> ST1 does not constitute a physical problem. From a physical point of view point masses without dimensions do not exist; the idealisation is sometimes useful but this is not the case when we are dealing with infinitely many pointmasses in a

[164] Por ejemplo, Lange escribe: “In classical physics, a body’s mass is often interpreted as the amount of some “stuff” of which the body is made. (Notice that classically, a body is made of *matter*, not of *mass*; its mass measures the amount of matter composing it)” [Lange 2002: 229].
[165] Tal como lo hacen, por ejemplo, Arya [1998: 6] o Davis [1986: 24].
[166] Confróntese en [Lange 2002: 254].
[167] Además de las dos fuentes referidas para la formulación de (M2) (véase nota 165), se pueden consultar [Hestenes 1986: 590], [Kibble 1985: 9-11], [Lange 2002: 169-70], [Sudarshan y Mukunda 1983: 3] y [Symon 1971: 6]. Hay casos, por ejemplo en todo [Davis 1986], en los que ni siquiera se hace la más mínima mención de la concepción (M1).
[168] Véase [Lange 2002: 232].
[169] Se refiere al concepto de masa inercial.
[170] Confróntese [Kibble 1985: 11].
[171] El principio de continuidad, es decir, el principio de la conservación de la masa de los fluidos en movimiento, no dice otra cosa. Dice que el diferencial de la masa δm en cualquier elemento diferencial de volumen δV en *movimiento con el fluido* se mantiene constante. Las partículas del fluido mantienen su inercia. Confróntese [Symon 1971: 314-17].

> bounded area and the distances between the pointmasses become arbitrarily small. Moreover, in ST1 the total mass is infinite, which is more than according to modern physical theory is available in the entire universe [Koetsier y Allis 1997: 310].

Antes de atender el comentario que hacen de la masa total, analicemos los comentarios que hacen sobre la idealización de las masas puntuales. En primer lugar, dicen que las masas puntuales no existen. Pero entonces cabe preguntarles: ¿qué es lo que en realidad existe? De todas las entidades físicas que las teorías físicas suponen existentes, ¿cuáles de ellas existen en la realidad y cuales de ellas no? Aunque es un tema que escapa a los objetivos del presente trabajo (a pesar del sumo interés que tiene para la filosofía), me aventuro a afirmar que es más acertado decir que ninguna entidad que una teoría asume como existente, existe en la realidad. Y en cualquier caso, la discusión interesante sobre estas supertareas no es la existencia de las entidades que ellas involucran, sino las consecuencias que tienen para la teoría que asume la existencia de dichas entidades.

En segundo lugar, dicen que la idealización de las masas puntuales, aunque a veces útil, no es útil para el caso en el que un número infinito de ellas se encuentra dentro de un espacio finito. Mas, ¿a partir de dónde se obtiene esta conclusión? Quizás Allis y Koetsier están pensando en términos de mecánica cuántica o de relatividad general, pero éstas no son las teorías que se han tenido en mente para diseñar ST1. Además, ¿cómo podemos estar seguros de que un modelo es útil o no? ¿De nuestra ignorancia de su utilidad podemos deducir su inutilidad? Claramente no. La utilidad de las geometrías de Riemann durante un periodo de tiempo fue ignorada, y poco se sospechaba que fueran un modelo tan bueno para describir el espacio-tiempo real.

Finalmente, dicen que la masa total infinita es mayor que la masa que la física moderna dicta hay en el universo entero. Esta objeción, además de ser irrelevante, es por completo refutable. Como se verá a continuación, los problemas principales que plantea ST1 son independientes de si la masa es infinita o no. Para mostrarlo, basta con presentar un modelo, variación de ST1, con masa finita total y que presenta indeterminismo y pérdida de la energía. Una consecuencia interesante de la masa finita total para este modelo es que la conservación de la energía falla en cualquier marco de referencia inercial.

Recordemos que ST1, vista desde cualquier otro marco de referencia inercial, no presenta un fallo de la conservación de la energía, pues tanto al principio como al final la energía es infinita. En cambio, el modelo que a continuación se expone, presenta el fallo de la conservación de la energía en todo marco de referencia inercial. Ante este matiz, Pérez Laraudogoitia [2007a: 22-3] hace la siguiente clasificación: violación en un *sentido débil* del principio de conservación, para los casos como ST1, y violación en un *sentido fuerte* del principio de conservación, para los casos como el que ahora se expone, y que llamaremos ST1A.

El modelo fue propuesto por Atkinson [2007: 171-4]. A excepción de las masas, la disposición de las partículas en su estado inicial es exactamente igual a ST1, es decir, cada partícula P_n ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) se encuentra en $x_n = 2^{-n}$; P_0 viajando con una velocidad $-u_0$ (siempre hacia la izquierda) mientras que el resto se encuentra en reposo. La masa de cada partícula es $m_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)} m_0$, de lo que resulta una masa total del sistema de $2m_0$. Así las cosas, y tras considerar la conservación del momento y de la energía para cada colisión, es directo llegar a la conclusión de que todas las partículas, al final de la supertarea, terminan con una misma velocidad $v_n = -\frac{1}{2} u_0$.

Es fácil ver el indeterminismo en ST1A: la reversión temporal también es un proceso posible, y en su estado inicial todas la partículas se encuentran con una misma velocidad (o en reposo, si se encuentra en el marco de referencia inercial apropiado), por lo que, teniendo dicha condición inicial, la supertarea revertida puede tardar cualquier lapso de tiempo para que comience su ejecución. Así, respecto al indeterminismo, estamos en la misma situación que con ST1.

Por otro lado, aunque el momento se conserva, la energía no lo hace. Y no lo hace en un sentido fuerte: el principio de la conservación de la energía se pierde en cualquier marco de referencia inercial. También es fácil verlo. Un cálculo elemental nos muestra que en el estado inicial la energía total es $\frac{1}{2}m_0u_0^2$, mientras que en el estado final es $\frac{1}{4}m_0u_0^2$. De la misma manera, en cualquier otro marco de referencia inercial, con una velocidad w respecto del reposo original, la energía inicial es $\frac{1}{2}m_0u_0^2 + m_0u_0w + m_0w^2$ mientras que la energía final es $\frac{1}{4}m_0u_0^2 + m_0u_0w + m_0w^2$ (w podría tener signo negativo, y por tanto afectar la suma, mientras que u_0 se refiere sólo a la magnitud, pues ya se ha considerado que en el marco original P_0 viaja siempre hacia la izquierda). De forma similar, se puede comprobar que tanto el momento inicial como el final es $-m_0u_0$. Y que en cualquier otro marco de referencia inercial con velocidad w, el momento inicial es $-m_0u_0 -2m_0w$, que también iguala al momento final.

Queda claro, pues, cómo la imposición de una masa finita a ST1 no destierra ni el indeterminismo ni el fallo de la conservación de la energía (aunque, al menos para este caso, sí destierra al fallo de la conservación del momento). En el capítulo 6, se presentará un modelo original, también con masa finita total, y con un fallo de la conservación de la energía, pero no manifiestamente indeterminista.

4.2.3 El análisis global de los sistemas infinitos

Con un talante aristotélico sobre el infinito, Alper y Bridger sostienen que las anomalías presentes en las supertareas que estamos estudiando se deben a un análisis inadecuado de los sistemas infinitos. El análisis apropiado, sostienen, debe considerar un infinito actual, completado, y no un infinito potencial:

> we argue that the paradoxical behaviour arises because the infinite systems are analyzed in terms of potential infinities. The collisions of the particles are considered separately and sequentially, rather than in terms of completed infinities in which the system is treated as a whole [Alper y Bridger 1998: 356].

La intención de Alper y Bridger por tener una herramienta que nos facilite el análisis global de los sistemas infinitos es altamente deseable. Sin embargo, se verá a continuación que la propuesta concreta que ellos brindan es altamente inconveniente, pues va en contra de uno de los supuestos básicos de la mecánica newtoniana (teoría que ellos intentaban reestablecer con su propuesta).

El modelo global de Alper y Bridger comienza definiendo vectores de dimensión infinita que representan el estado total del sistema infinito de partículas. A las posiciones de las partículas les corresponde un vector $\mathbf{X}(t) = (x_0(t), x_1(t), \ldots, x_n(t), \ldots)$, en donde $x_n(t)$ es la posición de la partícula P_n ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) . De igual manera, se definen los vectores infinitos para la velocidad $\mathbf{V}(t)$ y para la fuerza (o aceleración) $\mathbf{F}(t)$. Con esto, introduce dichos vectores en espacios de Hilbert:

> Since we will need to talk about continuity and smoothness, we define a metric to determine when two infinite vectors are close to each other. […]. Suppose $\mathbf{U} = (u_i)$. Then write: $\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} u_i^2}$; this is called the *norm* of $\mathbf{U}$. The set of all such

infinite dimensional vectors having finite norm (i.e., those whose components are square-summable) is called an ℓ^2 *Hilbert Space* [Alper y Bridger 1998: 360].

Bajo esta nueva perspectiva, consideran entonces la evolución de ST1, y con ella exigen una solución para las nuevas "ecuaciones del movimiento":

> it is reasonable to seek a solution for the equations of motion of the supertask, namely a pair of vector functions **X** : [0, 1/*v*] → $\mathscr{H}_1$ and **V** : [0, 1/*v*] → $\mathscr{H}_2$ satisfying equations
>
> (2a) [$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{V}(t)$] and
>
> (2b) [$\mathbf{V}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))/m$]
>
> with the appropriate initial conditions [Alper y Bridger 1998: 360].

Ante esto, finalmente argumentan que hay una discontinuidad de (2a) y (2b):

> for values of *t* arbitrarily close to $t = 1/v$, $\|\mathbf{V}(t)\| \geq v > 0$. Thus, the limit of $\mathbf{V}(t)$ as $t \to 1/v$ is not **0**. Since $\mathbf{V}(1/v)$ is equal to **0**, $\mathbf{V}(t)$ is discontinuous at $t = 1/v$. […] as $t \to 1/v$, the norm of **F** becomes arbitrarily large and cannot be close to 0, the norm of the zero vector. Thus $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$, like $\mathbf{V}(t)$, is discontinuous at $t = 1/v$ [Alper y Bridger 1998: 361].

El primer problema que presenta esta propuesta es que conduce a Alper y Bridger a plantear un argumento inválido. En el fragmento recién citado dicen que "the limit of $\mathbf{V}(t)$ as $t \to 1/v$ is not **0**" [*idem.*], pero esto es una conclusión falsa. El operador del límite opera sobre cada componente del vector, y cada componente tiende a 0 cuando *t* tiende a 1/*v*, por lo tanto $\mathbf{V}(t)$ sí tiende a **0**. El paso inválido del argumento consiste en partir de que $\lim_{t\to 1/v}\|\mathbf{V}(t)\| \neq \|\mathbf{V}(1/v)\|$, para concluir que $\mathbf{V}(t)$ es discontinua. Pero con esto lo único que Alper y Bridger demuestran es que la norma $\|\mathbf{V}(t)\|$ es discontinua, y no que el vector $\mathbf{V}(t)$ lo sea.[172] Esto, por tanto, no afecta a las leyes de Newton, que asumen que las funciones (2a) y (2b), y no las normas de sus vectores, sean continuas.[173]

Pero el motivo principal para rechazar la síntesis del comportamiento global representada por la norma de los vectores **X**, **V** y **F** es que su introducción en los sistemas infinitos viola el principio de relatividad de Galileo. Es decir, considerando esta norma como parte de las ecuaciones de Newton, entonces éstas no tendrían solución en cualquier marco de referencia inercial, si acaso en algún marco en concreto

[172] En un artículo posterior, Alper y Bridger cometen el mismo error, y hasta lo explicitan de forma más clara: "The stronger sense requires that the normed difference of $\mathbf{V}(t)$ and $\mathbf{V}(1)$ vanish in the limit […]: $\lim_{t\to 1^-}\|\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(1)\| = \mathbf{0}$. We can easily see that the limit condition fails in the stricter sense. The vector $\mathbf{V}(1) = \mathbf{0}$. […] At that time $\|\mathbf{V}(t) - \mathbf{V}(1)\| = 1$" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 284-5]. Por otro lado, se le debe a Pérez Laraudogoitia el hacernos notar este error: "To avoid misunderstandings, what one should conclude from the fact that $\|\mathbf{V}(1)\| = 0$ and $\lim_{t\to 1}\|\mathbf{V}(t)\| = 1$ is that the function $\|\mathbf{V}(t)\|$ is not continuous, and therefore not differentiable, at $t = 1$, i.e., that there is no $d\|\mathbf{V}(t)\|/dt$ at $t = 1$. But this does not lead to the collapse of Newton's laws which, as can be seen in (B) [$\mathbf{X}'(t) = \mathbf{V}(t)$ and $\mathbf{V}'(t) = \mathbf{F}(t)/m$], are formulated in terms of derivates of infinite vectors and not derivates of their l_2-norms" [Pérez Laraudogoitia 2002b: 160].

[173] Earman y Norton, que sostienen que es suficiente hacer un análisis de estas supertareas partícula por particula: "by tracking the behavior of each individual particle (and even their pairwise interactions), we would have no reason to declare any violation of Newton's laws" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 285], no hacen una crítica a Alper y Bridger, sino que se limitan a comentar simplemente que la propuesta de los últimos está añadiendo principios a los newtonianos: "Its properties are not to be stipulated by further legislation" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 285].

la tienen. El mérito de habernos hecho esta observación se debe por completo a Pérez Laraudogoitia [1999b y 2002b], ya que nadie había notado este grave fallo en la propuesta de Alper y Bridger.[174] Argumenta considerando nuevamente a ST1 y aclarando cómo en otros marcos de referencia inerciales la norma de **V** es infinita (en contra del mismo requerimiento establecido por Alper y Bridger) en tiempos en los que para el marco de referencia habitual la norma del mismo vector es finita:

> According to Galileo's principle of relativity, Newton's law in the form of (2a) and (2b) should also be applicable in any other inertial reference system (IRS). Take an IRS that moves at velocity $-w$ with respect to the system in which Alper and Bridger develop their argument (and as I myself do in my 1996). In this new IRS (which I call S^1) the components of infinite vector **F** do not change and their norm remains finite for $t < 1/v$. What happens to infinite vector **V**? Since for $t < 1/v$ it has infinite components of value $w \neq 0$, its norm is infinite. […] in S^1, vector **V** does not belong to $\mathscr{H}_2$ for $t < 1/v$ either, which means that in S^1 there would be no solution to (2a) and (2b), not even for $t < 1/v$ [Pérez Laraudogoitia 1999b: 316-7].

Alper y Bridger responden a Pérez Laraudogoitia que el modelo matemático de ellos sí conserva la invariabilidad galileana en relación con el centro de masa del sistema.[175] Pero esto, responde a su vez Pérez Laraudogoitia, es inconveniente para una teoría interesante ya que deja de lado una gran cantidad de sistemas infinitos de partículas: todos aquellos que no tienen un centro de masas.[176] Un ejemplo de ellos es ST3 o, para verlo más claro, un sistema infinito P_i de partículas con masa m posicionadas en $x_i = i$ ($i \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$). En este último caso, si P_0 lleva inicialmente una velocidad positiva v, la evolución del sistema es en todo momento determinista y conservativo. Pero entonces el constructo propuesto por Alper y Bridger no tendría ningún sentido ya que el sistema no tiene un centro de masa.

Todavía hay más. Si hacemos caso de la invariabilidad traslacional, considerar la invariancia galileana con respecto sólo al centro de masa también trae consigo consecuencias en contra del requerimiento de norma finita establecido por Alper y Bridger. Basta con trasladar ST1 (en su estado inicial, por ejemplo) en el eje de coordenadas una distancia finita desde el centro de masa al origen. Esto implicará que el vector de posiciones **X** tendrá siempre una norma infinita.[177]

---

[174] En el resto de la bibliografía, dentro del conocimiento del autor, en donde consta conciencia acerca de la propuesta de Alper y Bridger no se encuentra ninguna observación ni siquiera cercana al respecto. Se pueden confrontar los artículos anteriores a la presentación del resultado de Pérez Laraudogoitia: [Koetsier y Allis 1997] y [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000].

[175] Su respuesta la expresan así: "A Galilean transformation adds the same constant velocity, say w, to the velocity of each particle of the system. By the definition of the center of mass, this Galilean transformation also adds w to v_{CM} [la velocidad del centro de masa]. Consequently, each v_i' remains unchanged and so does its norm. […] We conclude that our Hilbert space model, interpreted as describing the motion relative to the center of mass, is Galilean invariant" [Bridger y Alper 1999: 328-9].

[176] La respuesta es la siguiente: "The idea is that the theory of Alper and Bridger is applicable to infinite systems, thereby giving us a global analysis of them. But resorting in these cases to the center of mass […] tends in general to be very problematic because infinite systems often lack a center of mass (defined by a process of going to the limit) or, more surprisingly, have a center of mass only at certain instants of time" [Pérez Laraudogoitia 2002b: 165].

[177] Ésta, también, es una apreciación de Pérez Laraudogoitia: "The situation becomes even worse for Bridger and Alper when one considers one of the most generally accepted requirements of invariance in classical physics, namely, translational invariance. Let us consider their version of ST (Bridger and Alper 1999, 326-7) and choose an inertial reference system (IRS) with its origin shifted to any finite distance h with respect to the center of mass of the system of particles (but at rest relative to it). In this new IRS (which I shall call S^2) the components of the infinite vectors **F** and **V** do not change and their norm

Finalmente, Alper y Bridger aceptan las respuestas de Pérez Laraudogoitia.[178] Aún así, proponen una nueva norma, pero que no resuelve todos los problemas que la anterior ocasionaba.[179] Queda, pues, sin aclarar si acaso las anomalías en las supertareas se deban al análisis partícula-por-partícula que se hace de ellas. Así también, queda pendiente el desarrollo de un constructo matemático que ofrezca satisfactoriamente un análisis global de los procesos dinámicos que plantean las supertareas newtonianas, que tal vez nos ayude a comprender las anomalías que éstas presentan en ciertas ocasiones. En cualquier caso, en los capítulos posteriores se explorarán otros caminos que se mostrarán fructíferos para la comprensión de dichas anomalías.

4.2.4 El contacto en el instante de la colisión

Las colisiones elásticas que se llevan a cabo en ST1, ST2 o ST3 ocurren en el instante en que un par de partículas se encuentran en contacto. La descripción de este contacto no es una tarea fácil. El problema se presenta incluso en las colisiones entre cuerpos extensos. Para plantearlo, basta con considerar la colisión entre un par de esferas con radio r. En el instante de la colisión, habrá entre ellas un punto de contacto que será o no ocupado, dependiendo de la descripción geométrica de las esferas.

Hay varias formas de describir geométricamente este par de esferas. Una es que ambas esferas sean cerradas, o sea, que ocupen su borde (es decir, que si posicionamos el centro de alguna de las esferas en el origen del espacio tridimensional, entonces cualquier eje (x, y o z) intersecciona con la esfera en el intervalo cerrado $[-r, r]$). Otra es que ambas esferas sean abiertas, o sea, que no ocupen su borde (es decir, que si posicionamos el centro de alguna de las esferas en el origen del espacio tridimensional, entonces cualquier eje intersecciona con la esfera en el intervalo abierto $(-r, r)$). Y otra más, es que una de las esferas sea abierta cuando la otra es cerrada.[180]

Los tres casos son problemáticos. En primer lugar, si ambas esferas son cerradas, entonces en el instante de la colisión el punto de contacto es ocupado por los dos cuerpos. Pero, ¿cómo puede ser posible que dos cuerpos ocupen un mismo punto? ¿No hay un solapamiento? ¿No hay una violación del principio de impenetrabilidad de la materia? Si un punto puede ser ocupado por dos cuerpos, ¿puede también ser ocupado por tres? ¿Por cuatro? ¿Por mil? ¿Por una cantidad infinita de cuerpos? ¿Un punto, inextenso, ocupado por una multitud de cuerpos? Difícil de concebir sin dejar de provocar cierta perplejidad.

---

remains finite for $t < 1$. What happens to infinite vector **X**? Since for $t < 1$ it has infinite components of value $\geq \alpha h \neq 0$ ($0 < \alpha \leq 1$ fixed), its norm is infinite. So, in S^2 the vector **X** does not belong to $\mathscr{H}_1$ either for $t < 1$" [Pérez Laraudogoitia 2002: 164].

178 Lo hacen en un artículo conjunto con Pérez Laraudogoitia: "For infinite dimensional vectors, AB [Alper y Bridger] had, in their previous work, used an extension of the Pythagorean norm [...]. As PL [Pérez Laraudogoitia] pointed out, the ℓ^2 norm [...] introduces several problems" [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 178].

179 La propuesta es la siguiente: "Many of these difficulties are remedied by introducing the 'Sup' norm. This norm is defined by (10) $\| z \| = \sup\{| z_i |\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ where 'sup' denotes the *supremum* or *least upper bound*" [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 179]. El defecto radica en que "the embedding using the Sup norm cannot be applied to unbounded systems because such systems involve vectors whose Sup norms are infinite" [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 179].

180 Por supuesto, también podemos describir una esfera con un hemisferio abierto y el otro cerrado. Lo mismo podemos hacer con sus cuartas partes, sus octavas partes, etc. Estas descripciones ya no aportan nada a la discusión.

En segundo lugar, si ambas esferas son abiertas, entonces en el instante de la colisión el punto de contacto no es ocupado por ninguno de los dos cuerpos. Pero entonces no parece ser que haya habido un contacto genuino. Hay un punto, desocupado, entre las dos esferas. ¿Realmente se le puede llamar a esto contacto?

En tercer lugar, si una esfera es abierta mientras la otra es cerrada, la primera impresión es que no hay ningún problema, pues en el instante de la colisión, además de que la unión de los radios de las esferas que cruzan el punto de contacto con sus centros es un intervalo continuo, y por tanto no hay un punto que falte por ocuparse, tampoco hay un punto que se encuentre ocupado a la vez por los dos cuerpos. Sin embargo, aparentemente no estamos legitimados a considerar una esfera como abierta en un tiempo y cerrada en otro posterior (o anterior). En caso contrario, ¿cuándo y cómo ocurre esta transformación? No parece haber ninguna explicación que no sea *ad hoc*. Por tanto, tenemos asumida en este caso la existencia tanto de esferas abiertas como de esferas cerradas. ¿Quiere decir esto que dos esferas cerradas, o dos abiertas, no pueden colisionar entre sí, puesto que la única descripción geométricamente coherente de una colisión es cuando ocurre entre un cuerpo cerrado y uno abierto?[181]

Además, si nos limitamos a describir la constitución de un cuerpo (aunque sea de un medio continuo) con los puntos que ocupa en el espacio, tampoco es del todo claro que la colisión entre una esfera abierta y una cerrada presente contacto. La esfera cerrada ocupa el punto de presumible contacto, mientras que el cuerpo abierto no ocupa ningún punto que sea adyacente (simplemente porque no lo hay) al punto de contacto. Los puntos del espacio son sitios en los que el cuerpo se puede posicionar, o en donde se puede ubicar alguna división y no los átomos infinitesimales que lo constituyen. No olvidemos (como ya se ilustró en el apartado 2.1) que el conjunto de los puntos del *espacio continuo*, es un conjunto infinitamente dividido. Por tanto, la descripción de cualquier cuerpo constituido por un *medio continuo* a partir de los puntos que ocupa en el *espacio continuo* es sospechosa.

Estos problemas pueden ser evitados si definimos el contacto entre dos cuerpos como la posición geométrica relativa en la que ambos cuerpos se encuentran separados entre sí por una distancia cero, o mejor dicho, cuando no hay una distancia que los separe. Desde luego, esta definición se refiere a la distancia menor entre los puntos de los bordes de los cuerpos (independientemente de que éstos pertenezcan o no al cuerpo), dejando lugar así a la posibilidad de que dos cuerpos entren en contacto en al menos un punto. Bien, esta definición evita el problema (y así es como en muchas ocasiones la práctica científica cotidiana se hace), pero no lo resuelve.[182]

Daré una respuesta, nada ambiciosa (pues este problema se encuentra fuera de los objetivos del trabajo), y la voy a dar atendiendo al argumento de Kline y Matheson [1987] en contra de la posibilidad lógica de la colisión (fundamentalmente, su

[181] Esta misma problemática entre el contacto de esferas cerradas con cerradas, abiertas con abiertas, y cerradas con abiertas, esta planteada en Lange [2002: 8-12].

[182] Motivado por las fuerzas de bajo rango, pero mostrando sus reservas, Atkinson apoya esta definición de contacto: “insistence on zero spatial separation, rather than a coincidence of points, is motivated by the physical idea of interaction by a short-ranged force, in the limit that the range is taken to zero. However, it must be admitted that the precise outcome would depend on the details of the model of the short-ranged force in question” [Atkinson 2008: 10]. Cabe incluir también la definición de colisión que ofrece Pérez Laraudogoitia: “definition of collision (by contact): two material bodies of additive mass A and B collide by contact at time *t* if and only if they have at *t* (although not immediately before *t*) a certain common point C and there is also a transfer of momentum between them at *t*” [Pérez Laraudogoitia 2005b: 325]. En donde “Two material bodies A and B are said to be of additive mass if the mass attributable to either A or B distributed in any set D of points of space is the sum of the mass attributable to A distributed in D plus the mass attributable to B distributed in D” [Pérez Laraudogoitia 2005b: 324]. Esta definición tampoco resuelve la cuestión.

argumento es en contra de la posibilidad lógica del contacto, y no de la colisión). El argumento lo plantean de la siguiente manera:

> (1) A collision between two bodies involves their touching.
> (2) If two bodies are touching, then they either occupy adjacent points in space or they spatially overlap.
> (3) Space is continuous.
> (4) No two bodies ever occupy adjacent points in space. (Since space is continuous, no spatial point is ever adjacent to another spatial point.)
> (5) It is impossible that two material bodies should spatially overlap.
> (6) Therefore, no two bodies ever touch.
> (7) Therefore, no two bodies ever collide [Kline y Matheson 1987: 509-10].

El argumento es válido, por tanto su crítica debe basarse en alguna de sus premisas. No podemos cuestionarnos la verdad de (1), (3) y (4), ya que las premisas (1), (3) son supuestos también de la mecánica newtoniana, mientras que la premisa (4) no es más que una consecuencia de la (3). En cambio, las premisas (2) y (5), aunque a primera vista son bastante razonables, requieren de precisar lo que sostienen y los términos que utilizan.

La premisa (2) parece ser en sí una definición de contacto, aunque enuncia dos consecuencias de una supuesta definición no explicitada. ¿Cuál podría ser una definición de contacto con estas consecuencias? Retomemos las esferas con radio *r*. El contacto con mayor aceptación (al menos como caso particular) era el de una esfera abierta con una cerrada. Sin embargo, en este caso los cuerpos no ocupan puntos adyacentes (pues en el espacio continuo no hay tales puntos) y, evidentemente, tampoco se solapan espacialmente. ¿Qué definición tienen entonces en mente Kline y Matheson? Como la premisa siguiente establece que el espacio es continuo, se me ocurre que en la premisa (2) Kline y Matheson todavía contemplan la posibilidad de un espacio discreto, que más adelante se anularía con la premisa (3). Y por eso, ponen como posibilidad de contacto los puntos adyacentes. Pero entonces dejan como única salida el solapamiento espacial. Pero esto, ni siquiera es necesario ante la definición que líneas arriba acabo de dar. Nuevamente, una esfera abierta en contacto (visto intuitivamente o incluso como arriba lo he definido) con una esfera cerrada no se solapan. No parece haber una definición satisfactoria para la premisa (2).[183]

Por su parte, Kline y Matheson aceptan que la consideración más interesante para descartar la premisa (2) es la que ellos llaman respuesta topológica.[184] Consiste simplemente en considerar todos los cuerpos como abiertos. Sin embargo, este caso tiene sus problemas. Además del punto espacial que se queda sin ser ocupado (en el caso de las esferas, como ya hemos visto más arriba), Kline y Matheson hacen notar una

---

[183] Según Kline y Matheson, la única definición de contacto que la premisa (2) no contempla es la de una distancia (mayor a cero) entre los cuerpos: "Premise (2) is much more certain. It seems to be logically exhaustive. The only apparent possibility that it seems to leave out is 'Two bodies are physically touching if they are within a certain distance (e.g. a micrometer) of each other'. This apparent possibility can quickly be discounted. If there is a finite distance between two bodies, those two bodies are not touching, no matter how small that distance is" [Kline y Matheson 1987: 512]. Como acabamos de ver, su premisa (2) tampoco contempla la definición que he dado, en la que la distancia entre los cuerpos es cero.

[184] Así lo manifiestan en el siguiente pasaje: "Suppose that no material bodies include their boundaries. […] If satisfactory, this account of touching falsifies premise (2) and hence invalidates our argument against collision. This is the most interesting response to our argument. We shall call it 'the topological response'" [Kline y Matheson 1987: 513].

cuestión que plantea un conflicto: la división de la materia.[185] Si un cuerpo es abierto y, por ejemplo, lo dividimos por la mitad (supongamos que es simétrico), y tenemos como resultado un cuerpo abierto, el otro cuerpo resultante entonces será semiabierto, es decir, cerrado por el contorno por el que se realizó la división. ¿Cómo puede ser esto si se supone sólo la existencia de cuerpos abiertos? Esta es una buena observación en contra de la llamada respuesta topológica.

En cualquier caso, es falso que dos cuerpos pueden ocupar puntos adyacentes, y por tanto la única opción que nos queda para que (2) sea verdadera es que los cuerpos se solapen espacialmente. Para esto, debemos precisar qué es el solapamiento geométrico y cuál es su sentido físico.

Esta definición también es crucial para aclarar (5). Podemos intentar una primera definición con las siguientes palabras: dos cuerpos se encuentran en solapamiento espacial si comparten al menos un punto del espacio. Esta es la definición que Kline y Matheson tienen en mente, pues así queda manifiesto cuando abogan a favor de considerar los puntos como volúmenes del espacio que se pueden ocupar:

> If we are going to accept the idea that spatial regions of zero volume exist, then we should also accept the idea that those regions can be occupied or not. And if we take these ideas seriously, then we should treat regions of zero volume seriously. Why should two material objects be able to share some spatial location but not be able to share spatial volume? […] Why can material objects share regions of zero volume but not regions of non-zero volume? [Kline y Matheson: 1987: 511-2].

Mi respuesta a estas preguntas es que dos objetos pueden compartir regiones con volumen cero precisamente porque dicho volumen es nulo. En un punto no hay volumen alguno. Un punto no encierra ningún volumen. Si lo encerrara, podríamos decir que encierra volúmenes de espacio de cualquier dimensión, incluso superior a tres. ¿Tiene sentido decir que cualquier punto en el espacio unidimensional, por ejemplo, encierra un volumen del espacio tridimensional? ¿O del espacio 453-dimensional? De hecho, un punto puede servir como la representación de un espacio 0-dimensional (en la medida en que éste tenga algún sentido). ¿O sea que en el espacio 0-dimensional hay un volumen tridimensional? Esto es inaceptable. Un espacio sólo contiene elementos de dimensionalidad igual o menor a la suya. Por tanto, cuando se acepta que un punto es una región con volumen cero, no se está asumiendo que allí existe un volumen, sino que, precisamente, allí no hay volumen alguno (o distancia alguna).

Esta es también mi respuesta a toda la problemática. Ante esta respuesta, se puede mantener la definición que arriba he dado de contacto. Así las cosas, propongo la siguiente definición de solapamiento espacial: dos cuerpos se encuentran en solapamiento espacial si comparten un volumen en el espacio. Un volumen mayor a cero, naturalmente, puesto que un volumen cero no es ningún volumen. La falsedad, por tanto, de la premisa (2) es clara. Así también, es claro que dos cuerpos cerrados en contacto no comparten ningún volumen, comparten una posición. Y dos cuerpos abiertos no comparten ningún volumen ni ninguna posición, pero tampoco se encuentran separados por ningún volumen, y por tanto también se puede decir que se encuentran en contacto.[186]

---

[185] Lo hacen con las siguientes palabras: "the topological response runs into problems once we realize that matter is divisible. […] Whichever way you cut the set, at least one of the resulting pieces will include one of its boundary points" [Kline y Matheson 1987: 514].

[186] En contra de Kline y Matheson [1987], y a favor de mi respuesta, cabe recordar aquí que existen desarrollos matemáticos contemporáneos en las que un punto no es una región del espacio sino tan solo una posición, una localización (véase sección 1.2.2 y nota 24).

Finalmente, aunque no voy a profundizar mucho más, cabe comentar que el problema se agudiza cuando consideramos el contacto entre dos partículas puntuales. En el instante de la colisión, las partículas no sólo entran en contacto sino que parece ser que una se "fusiona" con la otra. Pérez Laraudogoitia, por ejemplo, sugiere la siguiente posibilidad:

> one might consider, for example, that at the instant of collision between point particles, a new (ephemeral) particle is created which immediately disintegrates in the original ones [Pérez Laraudogoitia 2005b: 325].

Pero, en este caso, ¿cómo podemos estar seguros de que las partículas que surgen tras la colisión son las originales? ¿Cómo saber que no hubo un intercambio de masa? Por el principio de impenetrabilidad, podría contestarse. Pero, la "fusión" instantánea de las partículas puntuales en una sola partícula, ¿no viola también el principio de impenetrabilidad?

Se puede explicar, por un lado, que estas partículas nunca se "fusionan" sino que simplemente se encuentran localizadas en una misma posición. Después de todo, ¿qué otra cosa podríamos esperar del contacto entre dos partículas puntuales? También, por otro lado, se puede decir que las partículas puntuales simplemente son idealizaciones de los cuerpos extensos, para los que su tamaño puede ser despreciado; y que es necesario que ocupen una misma posición en el instante de contacto, pues así lo requiere la trayectoria que sigue el centroide del cuerpo que la partícula puntual representa.[187]

Definitivamente, el problema del contacto, ya sea entre cuerpos extensos o entre partículas puntuales, no es un problema trivial. No obstante, es importante resaltar que no es un problema que amenace a las supertareas que tratamos en mayor medida que a todos los sistemas dentro de la mecánica newtoniana que prescinden de los campos. Es, evidentemente, un problema presente en cualquier sistema finito de cuerpos que colisionan, y en el que no se contempla la presencia de ningún tipo de campo.[188]

4.2.5 La velocidad y la fuerza en el instante de la colisión

Las colisiones que ocurren en las supertareas presentadas tienen otra peculiaridad, aparentemente problemática, que radica en las velocidades y las fuerzas en el instante de la colisión. Uno se puede preguntar entonces cuál es la velocidad de dos partículas en el preciso instante en el que están colisionando, instante en el que se encuentran en contacto. ¿Tienen las partículas la misma velocidad que llevaban antes o ése es el primer instante en el que ya llevan su nueva velocidad? ¿No hubo un proceso de transformación de la velocidad de cada partícula? Un proceso de transformación tal se

[187] Así es considerado por Lorenzen, en su recorrido histórico de la mecánica de colisiones: "collision of two particles (which is what we call billiard balls if we want to forget the fact that they have finite size. One might also say "points of mass", but that would be asking a bit too much. I shall therefore continue to refer to particles. All it means is that their size can be disregarded)" [Lorenzen 1987: 206].

[188] De hecho, Lange resuelve la cuestión atendiendo a la presencia de los campos: "When two particles "collide", they do not touch, but they come near enough for each to feel a tremendous repulsive force from the other's field. So the two particles appear to bounce off each other. […] Although one body excludes any other from the locations it occupies, those locations can be occupied simultaneously by a field and matter" [Lange 2002: 35]. Esto resuelve el problema mirando a la realidad; no obstante, los sistemas que prescinden de campos también son teóricamente admisibles.

puede fácilmente concebir en cuerpos extensos elásticos o plásticos[189], en donde la colisión y el contacto no son instantáneos sino que ocurren a lo largo de un intervalo de tiempo. Pero ni siquiera para los cuerpos rígidos ocurriría este proceso, donde la colisión es instantánea. Hay pues, una clara discontinuidad en las velocidades de las partículas que colisionan. ¿Es esto aceptable?

Precisamente, una de las críticas que Alper y Bridger hacen a las supertareas newtonianas con las que trabajamos consiste precisamente en hacer notar esta discontinuidad en la colisión. En su primera contribución sostienen incluso que las ecuaciones de Newton no tienen sentido en todo instante en el que este tipo de colisiones ocurre.[190] Pero en este caso, las colisiones instantáneas entre partículas puntuales o entre cuerpos rígidos (que no cambian de forma durante la colisión) plantean una mayor dificultad. Si no aceptamos la discontinuidad de la velocidad en estas colisiones, estamos obligados a aceptar un suceso aún más extraño. Sería necesario asumir que existen ciertas fuerzas de repulsión de las que nada sabemos de su origen.[191] Por ejemplo, tomemos el caso de que una partícula en movimiento impacta con otra partícula de la misma masa que se encuentra en reposo. Para que la primera adquiera finalmente una velocidad 0 continuamente, sería necesario que la velocidad vaya disminuyendo conforme se acerca a la partícula en reposo. ¿Cómo es posible esto? Sólo aplicándole una fuerza que la haga desacelerarse, pero una fuerza tal es desconocida por completo en mecánica clásica. Además, dentro de ese proceso de desaceleración, la velocidad ya no sería la misma, y entonces ¿cómo es posible que la partícula que todavía se encuentra en reposo adquiera la velocidad original? Tendría que ser por una fuerza también desconocida por completo.

En su defensa, Pérez Laraudogoitia explica que la teoría de distribuciones resuelve el aparente problema que plantea dicha discontinuidad, ya que ésta trata con la diferenciabilidad de funciones aparentemente (o elementalmente, mejor dicho) no diferenciables. Su explicación es la siguiente:

> Now, the ‘infinite’ force that, at the moment of collision, originates the discontinuity at $F(t)$ and $V(t)$ that Alper and Bridger mention, causes no problem whatsoever. In fact it is quite normal to introduce it in (2b) [$\mathbf{V}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))/m$, ecuación de la segunda ley] as the functional $K{\cdot}\delta$ (where δ is called Dirac’s δ ‘function’ and K is a constant) and solve the differential equation resulting in the class of generalized functions, where the solution $V(t) = \frac{k}{m}{\cdot}\theta(t)$ is admitted. […] the discontinuities in force and velocity arising from a collision can be made

[189] Me refiero a materiales en régimen de elasticidad o en régimen de plasticidad, es decir, que cambian de forma durante la colisión y que la recuperan al final, para el primer caso, y que cambian de forma durante la colisión sin recuperarla totalmente al final, para el segundo.

[190] Lo explicitan de la siguiente manera: “In ST1 the velocity of the moving particles changes instantaneously from $-v$ to 0 when it collides, while the velocity of its collision partner changes instantaneously from 0 to $-v$. Consequently, Newton’s equations are not meaningful at any time at which a collision occurs” [Alper y Bridger 1998: 358]. Como se verá más adelante, en un artículo posterior cambian de dictamen.

[191] Este es el punto que Pérez Laraudogoitia ofrece como respuesta a Alper y Bridger [1998]: “If this were true, it would have disastrous consequences for theoretical mechanics. It would mean that null impact parameter collisions between point particles could not be dealt with in dynamics unless one postulated (as do Alper and Bridger) very special forces of repulsion, and in no case could collisions between point particles not interacting at a distance be dealt with. Even more serious would be the fact that dynamics could not deal with interaction by contact between rigid solids, as such collisions originate discontinuities in force and velocity of the kind that Alper and Bridger say violate ‘any of the fundamental principles of Newtonian mechanics’” [Pérez Laraudogoitia 1999b: 314].

compatible with the laws of Newtonian dynamics: distribution δ accounts for the former, distribution θ for the latter [Pérez Laraudogoitia 1999b: 315].

A manera de respuesta, Bridger y Alper [1999] critican la introducción de las distribuciones como modelo aceptable de las colisiones. Su crítica se basa en hacer notar que, si se considera la introducción de espacios de Hilbert para el análisis de las supertareas, resulta que el vector de fuerzas no es una distribución válida.[192] Pero, como acabamos de ver en la sección 4.2.3, la introducción de espacios de Hilbert es altamente inconveniente para la mecánica clásica.

Un punto importante emerge nuevamente en medio de esta discusión. En la sección 4.2.1 ya vimos que el concepto de masa, incluso en mecánica newtoniana, no es el mismo que en los tiempos de Newton. Lo mismo pasa ahora con el caso del modelo matemático para las colisiones instantáneas. Evidentemente, la teoría de distribuciones no existía en los tiempos de Newton, y es un ejemplo de cómo incluso el utillaje teórico de la mecánica clásica hoy en día sigue desarrollándose. Además, es importante mencionar que incluso expertos de la teoría de distribuciones aceptan sin chistar la aplicación de ellas para modelar este tipo de hechos físicos.[193]

Así las cosas, la discontinuidad de las velocidades y de las fuerzas en las colisiones instantáneas no son ningún problema. Al igual que Pérez Laraudogoitia, Alper y Bridger [2002] terminan aceptando que existen modelos matemáticos aceptables para su interpretación dinámica y que por lo tanto las discontinuidades en las colisiones no son más un problema; por el contrario, es una cuestión que se puede dejar de lado.[194]

4.2.6 La reversión temporal

El indeterminismo en las supertareas newtonianas que fueron presentadas en el capítulo anterior manifiestamente depende de la reversión temporal de los procesos que originalmente se proponen (por el contrario, la pérdida de la energía que ocurre tras estos procesos es independiente de dicha reversión). Un argumento, pues, en contra de

---

[192] Lo afirman en el siguiente fragmento: “with a reasonable interpretation of the norm for these tuples of distributions, the vector of forces is not a continuous functional, i.e., it is not a valid distribution. Thus, even if we model the forces by means of distributions, the resulting motion remains singular and non-Newtonian” [Bridger y Alper 1999: 330].

[193] Por ejemplo, Guest afirma que “as often happens in mathematics, the introduction of what first appear to be ‘artificial’ concepts eventually results in the emergence of a whole new field of study which not only makes further progress easier but also throws much light on the older problems. […] the attempts to ‘differentiate’ non-differentiable functions soon lead us into a powerful new branch of mathematics which the modern theory of Fourier transforms and partial differential equations could hardly do without. With regard to applications, we here find ourselves in the world of concentrated forces, *unit impulses*, point charges, point dipoles, point couples and *instantaneous changes in* voltage, current, *velocity* and displacement” [Guest 1991: 218, mis cursivas].

[194] Manifiestan su acuerdo de la siguiente manera: “PL [Pérez Laraudogoitia] and AB [Alper y Bridger] agree that for any isolated collision the discontinuities in velocity and acceleration of the two particles at the instant they collide is unimportant” [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 175-6]. Hay todavía una cuestión que cabe comentar. Más adelante escriben: “The discontinuities resulting from a collision can be treated mathematically by either using distribution functions, in particular Dirac delta function […], or by using smoothed force and velocity functions as suggested by Friedberg and discussed in detail by Grünbaum” [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 176]. No aclaran que la velocidad de Friedberg sólo funcionaría para ciertos cuerpos elásticos. De otro modo, para cuerpos rígidos y partículas puntuales, es necesario, como ya se explicó en el texto principal, suponer que existen fuerzas desaceleradoras y aceleradoras mientras los cuerpos todavía no se han tocado.

la presencia del indeterminismo en estas supertareas consiste en mostrar que la invariancia ante la reversión temporal de las leyes de Newton no es aplicable a estos procesos. Esta postura crítica fue adoptada, nuevamente, por Alper y Bridger. Antes de analizar su argumento y la discusión en torno, examinemos otros argumentos, esgrimidos por Hutchison, a favor de tesis aún más fuertes, y que aparentemente amenazan la reversibilidad temporal de la mecánica clásica entera.

Lo primero que necesitamos es introducir conceptualmente lo que es la invariancia de la reversión temporal. Earman expone una concepción simple para el caso de la mecánica de partículas:

> In the case of particle mechanics […]: if the history $t \rightarrow (\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$ is in accord with the laws, so is $t \rightarrow (\mathbf{x}(-t), -\mathbf{v}(t))$ [Earman 2002: 247].[195]

Es decir, si las leyes que rigen el movimiento permiten una trayectoria para una partícula, entonces también permiten la misma trayectoria pero con la partícula viajando en sentido contrario. Dicho de una manera ilustrativa, si las leyes permiten la trayectoria que una película muestra de un objeto que viaja de A hacia B, entonces las leyes también permiten la trayectoria que la misma película reproducida hacia atrás describe, que consistirá en el objeto que se mueve de B hacia A, siguiendo el mismo camino y con velocidades contrarias.

Es importante mencionar algunos puntos con relación a esta concepción. Primero, la invariancia del tiempo revertido es debida a una simetría que es característica de las leyes de Newton, y no de los sistemas que se analizan bajo las leyes de Newton. Por eso, la reversión temporal de ninguna manera debe entenderse como regreso al pasado de un sistema. Tampoco debe entenderse que el futuro de un proceso deba corresponder con el proceso especular del primero.[196] Segundo, la invariancia de las leyes se demuestra a partir de procesos para los que se asume la carencia de fuerzas no conservativas.[197] Esto no implica que las leyes no sean invariantes frente a la reversión temporal de algunos procesos con fuerzas disipativas. De hecho, la concepción de Earman recién citada (así como la escrita en las notas) implica que las leyes son invariantes ante cualquier proceso posible, independientemente de si involucra o no fuerzas disipativas.

Este tipo de fuerzas son la base del primer argumento de Hutchison, que propone un sistema elemental con fuerzas disipativas para mostrar que la mecánica clásica no es reversible. El sistema consiste en una partícula suspendida por un resorte. Actúan tres tipos de fuerzas: una debido al campo gravitatorio, otra a las propiedades del resorte (con constante K), y otra más debido a la fricción del aire y a las imperfecciones del resorte. Así, la ecuación que rige el movimiento de la partícula es $mx''(t) + Kx'(t) + Kx(t) = 0$ [Hutchison 1993: 311]. Pero, debido a la componente disipativa (la que

---

[195] En otro lugar, Earman da la definición de forma más general, pero menos clara, en términos de mundos posibles: “Suppose that the laws L are time translation invariant. They are then time reversal invariant just in case if $W \in \mathscr{W}_L$ then also $W^T \in \mathscr{W}_L$, where $W^T(t) = [W(-t)]^R$ with $[\,]^R$ being the state reversal operator” [Earman 1986: 131]. Donde W es un mundo posible, y $\mathscr{W}_L$ es el conjunto de mundos posibles admitidos por un conjunto de leyes.

[196] La explicación, por Earman, es la siguiente: “Time reversal invariance of the laws L does *not* imply that in a history $t \rightarrow D(t)$ in accord with L, then the future and the past are mirror images of each other in the sense that $D(-t) = {}^R D(t)$ and $D(t) = {}^R D(-t)$. […] In classical mechanics $D(0) = {}^R D(0)$ holds just in case the three velocities of all the particles vanish at $t = 0$. […] This is just an instance of the more general fact that contingent conditions don’t have to exhibit the symmetries of the laws that govern them” [Earman 2002: 254]. La misma explicación se puede encontrar en Davies [1974: 23-4].

[197] En [Davies 1974: 23] se ofrece una demostración para las ecuaciones elementales del movimiento.

depende de la velocidad), esta ecuación no es invariante ante la reversión temporal. Efectivamente, es conocido que, ante la inversión temporal, esta ecuación arroja soluciones que carecen de sentido físico, como la aceleración espontánea de la partícula a una velocidad infinita por el contacto con el medio disipativo.[198] Pero el ejemplo que da Hutchison, claramente, es un sistema admitido por la mecánica clásica. Y como ésta admite esta clase de movimientos irreversibles, advierte Hutchison,[199] entonces no se puede decir que mecánica clásica es una teoría reversible.

Una primera objeción a este argumento consiste en hacer notar que el calor que disipa la fuerza de la partícula no es más que el movimiento que se les transmite a las partículas que constituyen el medio en el que la primera se mueve, y que, por tanto, si también revertimos el movimiento de cada una de estas partículas, entonces el sistema mecánico es estrictamente reversible, pues el movimiento revertido de estas partículas ocasionará el movimiento revertido de la partícula originalmente modelada. Esta es una objeción que Hutchison considera, y que califica como seria.[200] Su respuesta a ella es simple: "*the original irreversible simulation remains a valid piece of classical mechanics*" [Hutchison 1993: 315]. Es decir, la mecánica clásica indudablemente estipula sistemas como el ejemplo de Hutchison en el que actúan fuerzas disipativas. En sí, es un sistema clásico e irreversible. (Cómo saber, por ejemplo, en términos clásicos, que las partículas del medio no describen trayectorias similares a la de la partícula modelada)[201]. Además, argumenta Hutchison, si aceptamos que el calor que produce la fricción puede ser revertidamente convertido en movimiento macroscópico, entonces lo hacemos al costo de hacer la termodinámica completamente reversible.[202]

Dentro de este primer argumento, Hutchison ofrece, además, un argumento para demostrar que "*every* system in which non-deterministic processes occur must have irreversible processes" [Hutchison 1993: 319]. Este "debe tener procesos irreversibles" no significa que algunos procesos indeterministas del sistema sean irreversibles, sino que todos los procesos indeterministas del sistema son irreversibles. De otra manera el argumento no se seguiría. El argumento lo expone con las siguientes palabras:

> Given our system is non-deterministic, there must be a state *A* from which the system does not evolve reliably: that is, the system can evolve (in some time *T*) into at least two different states. Let *B* be one of them, and let *B** be its time reversal (*i.e*., the state with configuration unaltered, but all velocities reversed.) Given also that the system is time-reversible, there must be some process Γ which takes the system from the state *B** to the state *A** (the time reversal of *A*) in time *T*—for the change from *A* to *B* sometimes occurs, and it sometimes takes time *T*, and it is (by assumption) reversible. Then this process Γ cannot be time reversible: for if it were,

[198] Precisamente, Davies [1974: 25] desarrolla un ejemplo con fricción para ilustrar este hecho.
[199] Lo hace en el siguiente pasaje: "it is evidently wrong to interpret the claim that classical mechanics is reversible as if this meant that all mechanical systems were reversible" [Hutchison 1993: 312].
[200] La misma descripción (intuitiva) de este sistema macroscópico irreversible en el que supuestamente se esconde un sistema reversible se halla tanto en [Hutchison 1993: 314] como en [Davies 1974: 26].
[201] Dicho más detalladamente, un cuerpo macroscópico puede tomar el movimiento bajo una fuerza no conservativa, lo que se explica con el movimiento de los cuerpos microscópicos que conforman el medio que opone resistencia. Ahora bien, si asumimos que los cuerpos microscópicos pueden tomar un movimiento de las mismas características, ¿cómo se explica la transformación de energía a ese nivel? Si descartamos tal asunción, ¿cuál es la justificación para hacerlo? Una buena exposición y discusión de las diferentes posiciones en torno a este interesante problema se encuentra en [Callender 2004].
[202] Lo dice con las siguientes palabras: "in so far as it [la presente objeción] preserves the claim that classical mechanics is reversible, it does so at the cost of making heat-conduction, gas-expansion, and the mixing of liquids reversible as well: *i.e*., it makes all thermodynamical systems fully reversible!" [Hutchison 1993: 315].

> the system would have to evolve reliably from A into B in time *T*. But it cannot do this, because (by hypothesis) the evolution of the system from state *A* is unreliable. So the presumption of both time-reversibility and indeterminism leads to a contradiction [Hutchison 1993: 319].

El argumento es válido y su conclusión parece ser buena pero, cuando realiza la reducción al absurdo, se nota que se refiere a una concepción de la reversión temporal distinta a la que arriba se ha escrito. Esta es una impresición de Hutchison. Para aclararlo, sigamos su argumento tomando la evolución de TRST1. El estado inicial del sistema, *A*, corresponde a la infinidad de partículas en reposo. A partir de dicho estado, el sistema puede evolucionar hacia al menos dos estados diferentes: una, *B*, que es el reposo, y otra, llamémosle *C*, que se corresponde con el estado final de TRST1. De esta manera, *B** es el reposo, y la evolución de *B** a *A**, también al reposo, es Γ. Ahora bien, si seguimos el argumento de Hutchison, tendremos que decir que el proceso Γ no puede ser revertido: si lo fuera, el sistema *necesariamente tendría que evolucionar de A a B*, pero esto, por hipótesis, no es así. Pero concluir que una evolución Γ que consiste simplemente en el reposo constante no es un proceso revertido de ninguna manera es convincente. Es importante notar que lo único que muestra el argumento de Hutchison es que, si *todo* proceso reversible es determinista, entonces *todo* proceso indeterminista es irreversible. Pero suponer que la reversibilidad implica el determinismo, suposición de la que depende el argumento, como se acaba de ver, es una premisa poco convincente. De hecho, ST1 sugiere la idea contraria, que la reversibilidad temporal no necesariamente implica el determinismo.

En una nota crítica a Hutchison, Savitt destaca la suposición de éste al distinguir entre dos concepciones de invariancia ante la reversión temporal. Una, que dicta que

> a theory *T* is *time reversal invariant*$_2$ under the following circumstances: a sequence of states $S_i \rightarrow S_f$ is dynamically possible (relative to the laws of *T*, of course) iff $(S_f)^R \rightarrow (S_i)^R$ in dynamical possible (relative to *T*). [Savitt 1994: 910];

y otra, que dicta que

> a theory, *T*, is *time reversal invariant*$_3$ iff S_i evolves to S_f, according to *T*, then $(S_f)^R$ must evolve to $(S_i)^R$. [Savitt 1994: 911].[203]

La primera, es equivalente a la de Earman que hemos escrito más arriba. La segunda, asume (como Hutchison en su argumento), entre otras cosas, que la reversibilidad de un proceso implica su determinismo. Savitt apunta certeramente que Hutchison muestra que la mecánica clásica no es *invariante ante la reversión temporal*$_3$, y no que no es *invariante ante la reversión temporal*$_2$.

¿Por qué preferir la *invariancia ante la reversión temporal*$_2$? El mismo Hutchison tiene la respuesta (aunque él no la especifica), que se muestra con un sistema que ofrece y que resulta ser indeterminista. El modelo es ejemplar (de aquí en adelante lo llamaremos HI), así que citamos por entero su planteamiento:

---

[203] Por supuesto, Savitt incluye una *invariancia ante la reversión temporal*$_1$, en términos más generales, que queda fuera de los puntos en discusión: "Suppose that some set of laws, *L*, are at least a significant component of a scientific theory, *T*. If these laws involve a time parameter, *t*, then one can define a *time reversal transform* as the mapping *t*: $t \rightarrow -t$. If the laws, *L*, are differential equations, then one can say that *T* is time reversal invariant1 if and only if every solution of *L* is mapped to a (not necessarily distinct) solution of *L* under the time reversal transform, *t*" [Savitt 1994: 908].

> A particle of mass 1 kg moves in a three-dimensional space under the action of a central force, repelling it from the origin with a force equal to $24r^{1/3}$ newtons when it is distant $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$ metres from the origin. At time 0, it is projected along the x-axis towards the origin with velocity 24 meters/second, from an initial distance of 8 meters. Its velocity is imagined reversed when it reaches the origin, and we ask whether classical mechanics will require that it return close to its original starting point. The motion towards the origin is governed by the differential equation $x'' = 24x^{1/3}$, with initial conditions $x(0) = 8$ and $x'(0) = -24$. This non-linear equation is easy to integrate (begin by multiplying both sides by x'), and yields solution $x(t) = 8(1 - t)^3$. So the particle reaches the origin when $t = 1$, and then $x' = 0 = x''$, so the particle is in equilibrium—stationary with no force acting on it [Hutchison 1995b: 230-1].[204]

Ante esto, concluye que el sistema no puede revertirse, que no puede adquirir el estado inicial original:

> we can predict the particle to remain stationary at the origin. But since the particle is stationary, its state is its own time reversal, so the subsequent motion of the particle—its perpetual rest at the origin—will be the time reversal we are seeking, so a classical mechanics conceived in terms of precise values fails to impose a return to the original condition [Hutchison 1995b: 231].

Pero tras esto, cae en una contradicción, pues reconoce que HI es indeterminista y que el sistema, tras el estado de reposo, puede evolucionar hacia cualquier dirección:

> the equation of motion […] has multiple solutions for the initial values $x = x' = 0$: this is why the system is non-deterministic. The particle can move away from the origin in any direction at all [Hutchison 1995b: 231].

Y precisamente, uno de los infinitos movimientos que puede tomar la partícula para alejarse del origen es el que corresponde con la reversión temporal del proceso original.

En términos precisos, el proceso original en el sistema de Hutchison es una partícula que a un tiempo $t = 0$ parte de la posición $x(0) = 8$ con una velocidad $x'(0) = -24$ y una aceleración $x''(0) = 48$, y que tras seguir la trayectoria que indican las ecuaciones $x(t) = 8(1 - t)^3$, $x'(t) = -24(1 - t)^2$ y $x''(t) = 48(1 - t)$, a un tiempo $t = 1$ se encontrará en la posición $x(1) = 0$ con una velocidad $x'(t) = 0$ y una aceleración $x''(t) = 0$, es decir, se encontrará en reposo. Nótese que la trayectoria que describen estas ecuaciones no obedecen al "reposo perpetuo" que Hutchison presume (y que es, por supuesto, una evolución posible aunque no, por ser la más intuitiva, la única), sino que predicen que a un tiempo $t = 2$ la partícula se encontrará en la posición $x(2) = -8$ con una velocidad $x'(2) = -24$ y una aceleración $x''(2) = -48$. Esta misma trayectoria, sólo que en sentido contrario, es la que nos indica la reversión temporal. Si tomamos nuevamente la fuerza del sistema original $x'' = 24x^{1/3}$ y la resolvemos bajo las condiciones de frontera $x(-1) = 0$ y $x'(-1) = 0$, es fácil ver que podemos obtener como solución $x(\mathrm{t}) = 8(1 + t)^3$, que también corresponde a la transformación $t{:}t \to -t$. Esta solución nos corrobora que el proceso revertido, aunque inicialmente está en reposo y ninguna fuerza actúa sobre él, evoluciona de manera distinta al reposo perpetuo. Evoluciona en sentido contrario al proceso original, tomando a un tiempo $t = 0$ la

[204] El comportamiento de la función que describe el movimiento de este sistema es de las mismas características que el comportamiento de la función que describe el movimiento en el domo de Norton. Este último sistema se tratará en el apartado 5.4.

posición $x(0) = 8$ con una velocidad $x'(0) = 24$ y una aceleración $x''(0) = 48$. A primera vista, se podría pensar que esta evolución va en contra de la primera ley de Newton, pues aparentemente la partícula abandona su reposo sin que ninguna fuerza se le aplique. Esto es incorrecto. La partícula no abandona su reposo mientras no se le aplica una fuerza. Según la trayectoria revertida, cuando $t = -1$ la fuerza es 0, claramente, y para todo $t > -1$ la fuerza que se le aplica a la partícula siempre es mayor a cero.

Definitivamente, el proceso original de Hutchison, HI, sí es reversible. Es un ejemplo diáfano para mostrar la falsedad de la suposición de Hutchison que arriba se apuntaba, ya que demuestra que los procesos revertidos sí pueden encontrarse en sistemas indeterministas y, por ello, constituir a su vez procesos indeterministas. Por este motivo, la formulación de la *invariancia ante la reversión temporal*$_2$ es preferible.

Hay una segunda objeción al argumento original de Hutchison (en el que se ponía un sistema con fuerzas disipativas). ¿No podría ser que exista una fuerza tal que imprima en la partícula una trayectoria inversa a la que describe el ejemplo de Hutchison? Intuitivamente, sí lo puede hacer. Una canica que se deja caer en un medio viscoso (aceite, por ejemplo) tiene cierta trayectoria. ¿No podríamos reproducir la trayectoria inversa aplicando, por ejemplo, el campo magnético adecuado? Intuitivamente, es claro que sí la podemos reproducir. Hutchison responde a esto que, en términos matemáticos, este tipo de inversiones son factibles pero que, con su debida interpretación física, deliberadamente se está dando un salto de un sistema a otro.[205] La canica cayendo en un medio aceitoso *no es el mismo sistema* que la canica subiendo inversamente bajo el efecto de un campo magnético. El segundo sistema no muestra la irreversibilidad del primer sistema como tal, sino sólo la irreversibilidad de las trayectorias.

El argumento de Hutchison, pues, se dirige en contra de la reversibilidad de un sistema entero y concreto, y no en contra de la reversibilidad de un proceso que pudiera ocurrir en diversos sistemas. Pero es esta última, y no otra, la reversibilidad que precisamente se contempla en la invariancia de las leyes.

El segundo argumento de Hutchison se fundamenta en las imprecisiones que en algunas ocasiones son utilizadas al trabajar con mecánica clásica. El argumento es el siguiente:

> A point particle, under the influence of no forces, is projected at time 0 along the s-axis with a velocity V from position $s = 0$. After T seconds, this particle will have position $s = VT$ and velocity V. […] let us presume the velocity liable to vary within the range $V \pm \delta V$. […] After time T, the particle's position will then be somewhere in the range $VT \pm \delta V \cdot T$, and its velocity will still be in the range $V \pm \delta V$. We now reverse the motion of the particle: i.e. we follow its motion given an initial position in the range $VT \pm \delta V \cdot T$ and an initial velocity range $-V \pm \delta V$. Will classical mechanics show that the particle returns to the time reversal of its original state

[205] Lo dice claramente en la respuesta a la distinción que hace Savitt: "when he [Savitt] asks whether the transformation from B^R to A^R is possible, he is asking the question: 'Is there a collection of forces that can be applied to the material components of the system that will allow this transformation?' By contrast, I ask a quite different question: 'Do interactions that already act within the system allow it?' […] though Savitt can […] obtain his reversed motions by maintaining the magnitudes of the forces unchanged, this often means that the physical interactions within the reversing systems are radically different from those in the forward motions. […] the reversing process is physically different from that which undergoes the forward motion" [Hutchison 1995a: 343-4]. Se aprecia, pues, que Hutchison no alega un fallo de la invarianza de las leyes de Newton (que prescinden de la naturaleza de las fuerzas) sino un fallo en la reversibilidad presente en la ontología newtoniana; ésta es la observación que lleva a cabo Callender: "Hutchison's real problem is not with the TRI [Time reversal invariance] of classical mechanics, but must instead lie with the classical ontology" [Callender 1995: 335].

> another T seconds later? NO! For all we can predict about the position then is that it will be somewhere in the range $(VT \pm \delta V \cdot T) - (V \pm \delta V)T = \pm 2\delta V \cdot T$ [Hutchison 1995: 227].

Este argumento contiene una suposición ambigua que presenta varios inconvenientes. Concretamente, ¿qué quiere decir Hutchison cuando asume que una velocidad es *capaz de variar* dentro de un rango $V \pm \delta V$? ¿Que la velocidad en sí no es constante? ¿Que hay una incertidumbre en la velocidad, o en el momento, tal como en mecánica cuántica? ¿O que sólo es posible conocer que la velocidad exacta se encuentra dentro de un rango? Si la velocidad en sí no es constante, entonces existen aceleraciones, y no estamos legitimados, debido al concepto diferencial de aceleración, a hacer el cálculo que Hutchison aquí lleva a cabo, ni siquiera para el proceso no revertido. Tendríamos que conocer la fuerza que hace variar a la velocidad dentro de ese rango e integrar la función para así obtener la posición final. Por otro lado, tampoco estamos legitimados a considerar, en un sistema clásico, una incertidumbre como la que la mecánica cuántica postula para el movimiento de las partículas. Ciertamente, Hutchison no hace esto, ya que en caso de considerar una incertidumbre como la cuántica, que vincula el momento de la partícula con su posición, la posición no se obtendría tras la multiplicación directa que él realiza.

La opción que nos queda es pensar que la velocidad constante y exacta de la partícula se encuentra dentro del rango $V \pm \delta V$. Esto también tiene sus problemas. En primer lugar, si asumimos un valor de $V = 0$, entonces tenemos que el rango en que se encuentra la velocidad es $0 \pm 0 = 0$. Por tanto, en un caso en que la partícula mantiene el reposo en un mismo punto mientras que, en cualquier otro marco de referencia inercial, la partícula se mueve de un punto preciso a otro del que perfectamente podemos saber su proceso revertido. Esto tiene una salida fácil, y es decir que δ no representa un porcentaje de V, sino que $\alpha = \delta V$ en sí es un valor concreto. Es decir, que la velocidad varía en un rango $V \pm \alpha$. Esto tiene una consecuencia indeseable, a saber, que nunca podríamos conocer o con precisión o sin casualidad (y por tanto, no ser conscientes de él) el marco de referencia inercial en el que la partícula se encuentra en reposo.

En cualquier caso, Hutchison comete un error algebraico elemental. Cuando un signo negativo afecta a un término que viene antecedido por los dos signos $\pm$, éstos se invierten. O sea, $-(V \pm \delta V)T = -V \mp \delta V$. Por lo tanto, el último cálculo algebraico en el argumento de Hutchison no da como resultado $\pm 2\delta V \cdot T$ sino precisamente 0. En otras palabras, el proceso revertido sí tiene como posición final el punto preciso que tenía como posición inicial del proceso original. Esta observación no sólo apunta al rigor algebraico, sino a un sentido físico preciso. Lo que aquí significa la inversión de signos $\pm$ a $\mp$ es que si la velocidad constante y exacta de la partícula se encuentra dentro del intervalo $(V, V + \delta V)$, entonces la velocidad revertida forzosamente se encontrará dentro del intervalo $(-V - \delta V, -V)$, y si la velocidad constante y exacta de la partícula se encuentra dentro del intervalo $(V - \delta V, V)$, entonces la velocidad revertida forzosamente se encontrará dentro del intervalo $(-V, -V + \delta V)$. Eso es lo que físicamente esperamos, aunque asumamos un cierto desconocimiento del valor exacto de una velocidad constante.

Ninguno de los argumentos de Hutchison amenaza a las supertareas newtonianas presentadas en el capítulo anterior. El último argumento, como se acaba de mostrar, radica en un error algebraico que repercute en el sentido físico del modelo. El argumento anterior, que demuestra que todos los procesos indeterministas deben de tener procesos irreversibles, se basa, como hemos visto, en una concepción de la reversión temporal incoveniente. El primer argumento, por su parte, es sólo aplicable a sistemas que involucran fuerzas no-conservativas; mas ninguna de las supertareas que trabajamos aquí involucra fuerzas no-conservativas.

Por otro lado, y en relación directa con las supertareas que nos ocupan, está el argumento de Alper y Bridger. En esencia, es el mismo argumento que Hutchison brinda para concluir que es imposible revertir el proceso en HI, sólo que tomando ST1 en consideración. Ante el estado inicial de TRST1, que es el reposo de todas las partículas, Alper y Bridger sostienen que la única evolución posible para dicho sistema es que éstas continúen en reposo.[206] Resulta muy natural pensar que un sistema aislado en reposo (que implica que ninguna fuerza exterior influya para cambiar tal estado estático) continúe en reposo. La respuesta a esta posición, dada por Pérez Laraudogoitia, también se fundamenta en las mismas consideraciones que se utilizaron para demostrar que HI sí es reversible: aunque en el momento en el que el sistema está en reposo la fuerza es nula, en cualquier momento posterior no necesariamente es así:

> if we assume that $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(-1/v) = 0$ for all $t > -1/v$ (as Alper and Bridger do, without apparently realising) then the only solution is indeed $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(-1/v)$ and $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(-1/v)$ for all $t > -1/v$; but if we assume that, for $t > -1/v$, some of the components of $\mathbf{F}(t)$ are non-null (specifically those representing forces on particles colliding binarily in a process of self-excitation) then the only solution corresponds to real variable vector functions $\mathbf{X}(t)$ and $\mathbf{V}(t)$ which, for $t > -1/v$, are not equal to $\mathbf{X}(-1/v)$ and $\mathbf{V}(-1/v)$ respectively, and whose components vary in accordance with what is required by this self-excitation. This possibility on indeterministic evolution in classical dynamics […] is a profound and interesting consequence of the local character of differential equations of motion [Pérez Laraudogoitia 1999b: 320-1].

La misma concepción de la reversión temporal de un sistema mecánico de partículas ayuda a visualizar esta posibilidad. Las fuerzas que llevan al reposo total, al invertirse, serán las fuerzas que lleven al sistema en reposo a la auto-excitación. Y toda partícula inicia su movimiento tras la colisión con otra partícula.

Como comentario final, cabe comentar que todo parece indicar que Alper y Bridger terminan aceptando la reversión temporal de las supertareas en cuestión. En [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002], contribución en la que los autores intentan terminar la discusión dejando claro las posiciones en coincidencia y discrepancia, no se discute el punto de la reversión temporal. Sólo en la introducción, hay un vestigio que hace pensar que Alper y Bridger finalmente conceden aceptabilidad a la reversión temporal:

> Extrapolating backwards in time, we see that some time δ_t earlier that t_0, the system was stationary. Thus we have self-excitation; a stationary system has spontaneously evolved into a moving one. In addition, the self-excitation can occur at any time so we have indeterminism [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 174].

En la actualidad, pues, no está en tela de juicio que los procesos revertidos de las supertareas que nos ocupan sean procesos posibles en mecánica newtoniana. El consenso, además, es amplio. En cualquier caso, el argumento a favor de la

[206] La explicación que dan es la siguiente: “Let us now return to the assumption that the initial state of TRST1 is $\mathbf{X}(-1/v) = (1/2, 1/4, 1/8, \ldots)$ and $\mathbf{V}(-1/v) = (0, 0, 0, \ldots)$ and integrate Newton’s equations from $t = -1/v$ to t = 0. At the initial time of TRST1, $t = -1/v$, the force on each of the particles is 0. Newton’s equations of motion for this system of particles, each of which is initially at rest, has a *unique* solution, namely the constant solution $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(-1/v)$ and $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}(-1/v)$” [Alper y Bridger 1998: 363].

reversibilidad de HI aquí presentado, en el que sólo se involucra una partícula, ilustra la legitimidad de aplicar la reversión temporal a las supertareas newtonianas en cuestión.

4.2.7 El número infinito de partículas

El número infinito de partículas involucradas en las supertareas expuestas en el apartado 3.2, podría ser otro motivo para dejarlas fuera del marco teórico de la mecánica newtoniana.

Alper y Bridger reconocen que los sistemas infinitos tienen un lugar en la actividad teórica de la física. Por ejemplo, en el concepto de límite termodinámico.[207] A pesar de ello, sostienen que éste no es el caso de sistemas como ST1:

> Supertasks like ST[1] and TRST[1], involving an infinite number of particles in a bounded region of space, are different. If they are studied using a framework in which Newtonian dynamics is reduced to a local particle-by-particle description, energy fails to be conserved and indeterminacy becomes possible. From the point of view of both the philosophy and practice of science, the failure of energy conservation is serious [Bridger y Alper 1999: 333-4].

Alper y Bridger no dejan completamente claro si el motivo aquí para rechazar ST1 y TRST1 es el número infinito de partículas en una región de espacio finita o el fallo del principio de conservación de la energía. El resto de la sección donde se encuentra este fragmento resulta igual de ambigua, pues aunque se titula "Modeling infinite bounded systems", a continuación sólo hablan de la importancia del principio de conservación de la energía.

En cualquier caso, atendamos por lo pronto a la infinidad de partículas, y dejemos el principio de conservación para la sección 4.2.9. El problema, entonces radica en que el número infinito de partículas se encuentra dentro de un espacio finito.[208] Esto se puede refutar de una manera muy sencilla. Y es que ST1 se puede plantear de tal manera que cada región finita del espacio contenga solamente un número finito de

---

[207] Lo reconocen con las siguientes palabras: "Do infinite systems, even indeterminate ones, have any place in physical theorizing? The answer is clearly yes. In statistical mechanics, the concept of the thermodynamic limit, in which the number of particles N and the volume they occupy V are both allowed to go to infinity while keeping N/V constant, is used in the analysis of systems containing an enormous (approximately 10^{24}), but finite, number of molecules [Balescu 1975, 72-78]" [Bridger y Alper 1999: 333]. En otro lugar, Pérez Laraudogoitia señala otros sistemas en donde idealizaciones infinitas son importantes para la actividad teórica física: "For example, all the known exact solutions for the equations of the theory of elasticity imply material bodies extended to infinity (something that would probably have caused major upsets long after Newton) and the same occurs with all the known exact solutions for the equations of fluid dynamics for the case of the external flows (solutions, moreover, that are essential to the study of, for example, the lift of aircraft)" [Pérez Laraudogoitia 2005a: 435]. Una contribución que se ocupa de ilustrar con ejemplos el papel relevante de idealizaciones infinitas con una aplicación directa a sistemas reales –péndulos, cinética química de la coagulación, difusión de partículas en fluidos, transferencia de calor por convección y equilibrio económico– es [Segel 1991].

[208] De hecho, según Alper y Bridger, el concepto de límite termodinámico admite una infinidad de partículas sólo porque éstas no se encuentran en una región finita del espacio. Esto lo explica Pérez Laraudogoitia con el siguiente argumento: "Since statistical mechanics is also studied using a framework in which Newtonian dynamics is reduced to a local particle-by-particle description, it is clear that, for Alper and Bridger, the reason that infinite systems can be considered in such mechanics lies in the fact that their infinite systems do not occupy a bounded region of space" [Pérez Laraudogoitia 2002b: 159].

partículas[209]. El modelo, que aquí llamaremos ST1P, que demuestra esto es el expuesto en [Pérez Laraudogoitia 1997b][210] y consiste simplemente en considerar las partículas puntuales de ST1 como esferas, todas ellas con un mismo diámetro, con sus centros posicionados sobre el eje x de tal manera que, inicialmente, la distancia, medida sobre ese mismo eje, que separa a cada par de partículas contiguas, es respectiva y sucesivamente 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, …, $1/2^i$, … De esta manera, el centro de cada partícula tendrá que recorrer la misma distancia que su correspondiente en ST1 para colisionar con su vecina, y la evolución entonces es exactamente igual que en ST1. Así, pues, queda claro cómo el indeterminismo o la pérdida de la energía no depende de que la infinidad de partículas de ST1 se encuentren confinadas en una región finita del espacio.

Ahora bien, también debe quedar claro que un sistema infinito, incluso confinado a una región finita de espacio, no implica la presencia de anomalías. Un ejemplo que pretende mostrar esto con claridad también es presentado por Pérez Laraudogoitia en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 180]. El modelo toma el nombre de 2D y consta de partículas puntuales ubicadas en parejas en el espacio bidimensional. En el tiempo $t = 0$, cada partícula P_{2n-1} ($n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) (con etiqueta impar) se encuentra posicionada en la posición $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right)$ viajando con una velocidad $\boldsymbol{v}_n = (1, 0)$, mientras que cada partícula P_{2n} (con etiqueta par) se encuentra en reposo en la posición $\left(1, \frac{n}{n+1}\right)$. En la figura 4.1 se representa este estado inicial. Así las cosas, a un tiempo $t = 1$, toda partícula impar habrá ya impactado con su correspondiente pareja, y una supertarea habrá sido ejecutada. En todo momento es posible encontrar una infinidad de regiones finitas, limitadas, de espacio, que encierren la totalidad de las partículas que constituyen esta supertarea.

A primera vista, esta supertarea no presenta anomalías. Y así es como lo creen Alper, Bridger y Pérez Laraudogoitia:

> Unlike ST[1] and TRST[1], 2D is free of paradoxes; both energy and momentum are conserved, there is no self-excitation, and particles are neither created nor destroyed [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 181].

Esto no es precisamente así. Si este proceso ocurre como tal, la energía se conservará, pero sí habrá indeterminismo. Es decir, pueden ocurrir eventos, en cualquier momento, que no están contemplados en el proceso descrito originalmente para 2D, y que modificarían la evolución de dicho proceso. ¿Cómo es esto? Bien, basta percatarse que, en la condición inicial de 2D (es decir, en $t = 0$), la disposición de las partículas pares consiste en una misma alineación que la de las partículas en ST1, sólo que en dirección vertical. Y por tanto en cualquier momento puede ocurrir una auto-excitación de ellas. Incluso cuando haya comenzado la supertarea originalmente descrita para 2D, habrá un subconjunto infinito de partículas pares podría auto-excitarse. También las partículas impares pueden auto-excitarse. Es fácil verlo si tomamos un marco de referencia inercial en el que las partículas impares se encuentren en reposo. Las partículas impares

[209] En la discusión entablada entre Alper y Bridger y Pérez Laraudogoitia, el término "partícula" se utiliza para referirse tanto a masas puntuales como a cuerpos extensos: "I use the term 'particle' in the same sense as Alper and Bridger (1998). As is clear from their discussion, Alper and Bridger (1998, 366) use the term 'particle' to refer to both termed point particles (of null size) and bodies of finite size. In Bridger and Alper (1999), no changes are introduced in this regard" [Pérez Laraudogoitia 2002b: 169]. Claramente, la variación de ST1 que a continuación se expone en el texto principal, requiere que las partículas sean cuerpos extensos.

[210] Así como en [Pérez Laraudogoitia 1999a: 138].

entonces se encuentran en reposo alineadas en una diagonal, teniendo así la posibilidad de una auto-excitación como en TRST1. De la misma manera que en las partículas pares, las impares tampoco tienen el impedimento de auto-excitarse porque el proceso descrito originalmente haya comenzado. Finalmente, cuando el proceso original haya concluido, las partículas pares tendrán la alineación original de las impares, y viceversa, y por tanto, también es posible que entonces ocurran auto-excitaciones.

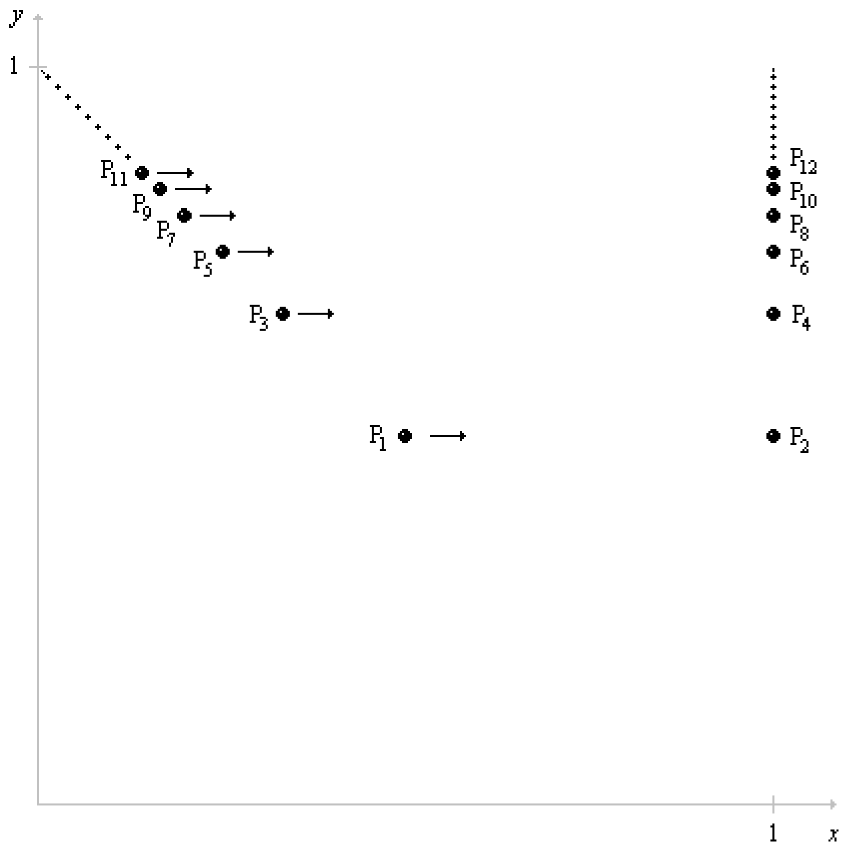


Figura 4.1. 2D en su estado inicial (a t = 0). Cada partícula con etiqueta impar se dirige la misma velocidad al encuentro de otra partícula con etiqueta par.

Esto tiene una solución sencilla, que consiste simplemente en posicionar a las partículas de tal manera que en ningún momento haya una alineación, en un espacio finito, de un número infinito de partículas. Por ejemplo (llamemos a este modelo 2DM1), pongamos que en el tiempo t = 0, cada partícula con etiqueta par P_{2n-1} se encuentra posicionada en el par de coordenadas $\left(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{n+1}{n+2}\right)$ viajando con una velocidad $\boldsymbol{v}_n$ = (1, 0), mientras que cada partícula con etiqueta par P_{2n} se encuentra en reposo en la posición $\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{n+1}{n+2}\right)$. Ante esta condición, a t = 1 una supertarea se habrá ejecutado.

2DM1, pues, es una supertarea libre de anomalías.[211] Es conservativa y es determinista. Y ahora sí se puede concluir que el hecho de que un sistema infinito se encuentre confinado a una región de espacio finito no es un motivo serio para rechazar sistemas como ST1. Así también, 2DM1 sugiere que anomalías como el indeterminismo

[211] Por supuesto, nunca podemos estar completamente seguros de que modelos como éste presenten anomalías que todavía no hayamos detectado. En cualquier caso, con lo que sabemos hasta ahora, es poco plausible que 2DM1 presente alguna anomalía.

y la pérdida (o ganancia) de la energía en los sistemas infinitos es una cuestión sutil y profunda, y que va más allá de la propuesta finitista. Una cuestión nada trivial.

En dirección contraria a la inquietud de Alper y Bridger que, como ya hemos visto en la sección 4.2.3, demandan un análisis global basado en la consideración de un infinito actual y no potencial, se encuentra la contribución de Cooke, que aboga por descartar los sistemas infinitos, de cualquier teoría física, por el hecho de que asumen un infinito actual de objetos físicos, asunción que está basada en el infinito actual aceptado en las matemáticas. Así, su contribución pretende demostrar que *cierto tipo* de infinito actual ocasiona incoherencias cuando se aplica a algún modelo físico:

> The intention would be to show that a *certain kind* of actual infinity was incoherent in a hypotetical objective universe, but because of the mathematical nature of infinity, not because of the nature of any particular set of physical laws. This is complicated by the fact that modern real-world physical laws assume set-theoretical mathematics. Within pure mathematics, the distinction between potential and actual has less importance, since a potential existence is an existence of sorts, whilst within set theory itself it has none [Cooke 2003: 591-2, mis cursivas].

Para ello presenta en su argumento un modelo infinito que se encuentra fuera de los objetivos del presente trabajo, ya que consiste en una infinidad de partículas (esféricas) que se acercan desde una infinidad de direcciones para colisionar simultáneamente con una esfera en reposo. Las colisiones son perfectamente inelásticas, pues las partículas en movimiento se incrustan en la esfera en reposo. Además, tampoco está claro que sea una supertarea, pues la colisión múltiple, al ser simultánea, bien puede considerarse como un solo evento. En cualquier caso, este modelo no es esencial[212] en el argumento de Cooke, sino meramente ilustrativo. La esencia de su argumento consiste en resaltar que distintas secuencias infinitas de objetos dan lugar a distintos estados, aunque posean la misma ordinalidad. Acude a la descripción de la paradoja de Ross, y se concentra en los estados intermedios de los procesos de adición y sustracción de las bolas al recipiente. Mientras el proceso de adición se está ejecutando, el recipiente gradualmente aumenta el número de bolas. En cambio, durante el proceso de sustracción, el recipiente siempre contiene la misma cantidad de bolas: $\aleph_0$. Ambos procesos los supone de ordinalidad ω.[213] Ante esto, y refiriéndose al proceso sustractivo, comienza su argumento:

> For this (ω + 1)-sequence, however, the intermediate states of the box (that is, it containing $\aleph_0$ balls, between the initial and final states of 0 and $\aleph_0$ balls respectively) are completely different to the intermediate states of the box for the (ω + 1)-sequence given by the balls-additions (which were natural numbers of balls in the box). The only changes to the state of the box are due to additions and removals of single balls, so the appearance of these two collections of intermediate states

[212] Este modelo puede tener cualquier momento total (incluso antes de la colisión, punto importante que Cooke no menciona), ya que se obtiene a partir de una suma que está compuesta de dos series divergentes alternantes. Con esto, Cooke muestra la presencia de indeterminismo en este modelo (véase en [Cooke 2003: 592-3]), para luego sugerir que el problema radica en la cantidad de partículas infinitas, pues éstas físicamente no obedecen ningún orden y por tanto su momento puede ser cualquiera.

[213] A este respecto, Cooke comete un grave error técnico. A la secuencia 1, 2, 3, 4, …, al tener un número $\aleph_0$ de elementos, le atribuye un último número $\aleph_0$. Y por eso, atribuye al proceso una ordinalidad $\omega + 1$. Así lo hace en el pasaje que a continución se cita en el texto principal, y lo explicita cuando habla del tiempo en que se ejecuta la supertarea: "after twice the time it took to put the first ball in the box there would be $\aleph_0$ balls in the box. We would have an (ω + 1)-sequence, for the number of balls in the box: 1, 2, 3 … $\aleph_0$" [Cooke 2003: 595]. Sin embargo, como es bien conocido, la secuencia 1, 2, 3, 4, … carece de un último elemento, aunque su cardinalidad sea $\aleph_0$, y por tanto su ordinalidad es ω.

> (with each element of one collection separated by $\aleph_0$ balls from those of the other) *may be due* to having allowed that the endless sequences of ball-additions and ball-removals could be completed, as would not be possible if there were indeed a distinction between actual and potential infinities. How these sequences have different intermediate states is reminiscent of how every single natural number is in the first (no more than) 0% of their totality, in their natural ordering. Whilst that property is a reasonable one for a potential infinity (of an endless sequence), *it can seem less plausible* as one possessed by any actual collection of objects [Cooke 2003: 595-6, mis cursivas].[214]

Se aprecia que su argumento carece de rigor. Tan sólo sugiere que la diferencia de estados *puede* deberse al hecho de haber permitido que los procesos infinitos se completen, y que *puede parecer* menos plausible que en una colección de objetos actual cualquier elemento pertenezca al primer 0% de su totalidad. De esta manera, Cooke sólo muestra la diferencia de los estados del recipiente en cada proceso, mas no la incoherencia que defiende que ocasiona un infinito actual de objetos.

De hecho, visto desde un punto de vista físico (es decir, acudiendo a alguna teoría que nos ayude a estudiar este proceso), los estados de ambos procesos son mucho menos incoherentes de lo que Cooke los exhibe. 2DM1, la modificación de 2D que líneas arriba acabamos de exponer, nos ayuda a aclarar esta cuestión. Supongamos que el recipiente es la región del espacio bidimensional *xy* comprendida por $x \geq 1$ y $0 < y < 1$, y que las partículas pares son las bolas que queremos meter al recipiente. Vista desde esta perspectiva, 2DM1 es un modelo perfecto para este proceso. La infinidad de partículas entra al recipiente en un tiempo finito (en $t = 1$). Ahora bien, un proceso de substracción es el inverso al de adición, y el proceso inverso que físicamente le corresponde a 2DM1 es su reversión temporal. Ésta tiene una ordinalidad ω^*, y claramente asigna al recipiente un estado intermedio acorde con su estadio intermedio en el proceso de adición: un número finito de partículas gradualmente disminuyendo, para el caso sustractivo, y un número finito de partículas gradualmente aumentando para el aditivo. Por tanto, la incoherencia que Cooke encuentra se debe a que atribuye como proceso inverso un proceso que, al menos físicamente, no se corresponde con el proceso inverso de mayor naturalidad.

Cooke es consciente del proceso con ordinalidad ω^*, pero lo rechaza, nuevamente, con una simple sugerencia y no con un argumento:

> One could argue that the ω^*-sequence was not implausible (and so could not be the root cause of the other paradoxes) because it is clear that, say, at any time when we have already begun to take a step, we have already moved $\aleph_0$ points. But conversely, if the root cause of these paradoxes were indeed the ancient distinction between potential en actual infinities, then this latter assumption would itself be invalid [Cooke 2003: 597].

Sí, si la distinción entre infinito actual y potencial fuera la raíz de estas paradojas, entonces la asunción de que hemos atravesado $\aleph_0$ puntos sería inválida. Pero ni los procesos incoherentes para una misma cardinalidad son paradojas (son contra-

[214] Hasta donde alcanzo a entender, en este fragmento está la idea central del argumento de Cooke. Esto podría no ser así, pues el artículo es bastante oscuro. Aunque su tesis es clara y simple, durante todo el hilo conductor de su artículo no logro encontrar con completa certeza cuál es el argumento. Una y otra vez profiere sugerencias, invitaciones hacia la misma inclinación, pero en ningún lugar un argumento trenzado, claro y contundente.

intuiciones), ni Cooke demuestra que la distinción entre infinito potencial e infinito actual sea la raíz del problema.

Un modelo como 2DM1, muestra rotundamente que el infinito actual de partículas en algún universo físico (newtoniano, es este caso)[215] no necesariamente es problemático. Efectivamente, sistemas como ST1, ST2 o ST3, no presentarían anomalías en caso de ser sistemas finitos; lo que nos indica que el número infinito de partículas es una condición necesaria, pero no suficiente, para que aparezcan algunas de estas anomalías. El número infinito de partículas en un sistema, entonces, no es ningún fundamento para excluir las supertareas que tratamos del marco teórico que constituye la mecánica newtoniana.

4.2.8 La falta de gravitación

Hasta la fecha, nadie ha objetado que las supertareas que aquí nos ocupan no son newtonianas porque en ellas no se considera el efecto gravitatorio entre las partículas. Incluso Alper y Bridger reconocen que, dentro de un universo newtoniano, esto no constituye ningún problema. Dan la siguiente explicación:

> The supertasks also neglect the mutual gravitational attraction of the particles. In Newtonian physics, it is legitimate to "turn off" the gravitational force describing the attraction between two gravitational masses because this force is independent of the laws of motion which describe the motion of inertial masses [Alper y Bridger 1998: 368].

En otras palabras, en mecánica newtoniana, un sistema que no considera los efectos gravitatorios es un sistema distinto a uno que sí considera las interacciones de tipo gravitatorio entre las partículas. De la misma manera que es distinto de un sistema que toma en cuenta la resistencia que opone el medio en el que se mueven las partículas, o de otro que contempla las cargas eléctricas de las partículas, o de otro que considera todas estas cosas a la vez.[216] Sin duda, el último es un sistema más adecuado para describir la realidad, pero, como filósofos de la ciencia, éste no es aquí nuestro interés. Como se ha comentado desde la introducción, nuestro interés es conocer las características del conjunto de ideas que constituyen la teoría llamada mecánica newtoniana, bajo la estrategia de estudiar algunos de los sistemas que esta teoría contempla. El caso de los sistemas con gravitación, aunque es de gran interés, se encuentra fuera de los objetivos del presente trabajo.

---

[215] Se pueden diseñar modelos, variaciones de 2DM1, para que esto también sea cierto tanto en relatividad especial como general. Basta con disminuir la masa gradual y apropiadamente a cada pareja de partículas y considerar que la velocidad de las partículas pares en su condición inicial no excedan la velocidad de la luz.

[216] Como ya se estableció en el capítulo anterior, los sistemas que incluyen los efectos de la gravitación están fuera de los objetivos de este trabajo. Debe quedar claro, de todos modos, que un sistema con interacciones de tipo gravitatorio en sí no es ninguna garantía para erradicar anomalías. En [Pérez Laraudogoitia 2003], por ejemplo, se presenta un sistema newtoniano en el que sólo hay interacciones gravitatorias y que resulta ser indeterminista. Peor aún, Atkinson [2008: 7-10] ofrece una supertarea relativista que presenta indetermismo y pérdida de la energía y que es prácticamente insensible a la consideración de las fuerzas gravitatorias.

4.2.9 El fallo de la conservación de la energía

Por último, consideremos la objeción que consiste en apreciar que los principios conservativos son principios constitutivos de la mecánica newtoniana. En esta posición, McAllister, por ejemplo, afirma que supertareas como ST1 no son newtonianas ya que "the principle of conservation of momentum or of energy […] can properly be claimed to form part of the laws of Newtonian physics" [McAllister 2004: 192-3]. Más fuerte aún es la posición de Alper y Bridger, que encuentran el cumplimiento del principio de conservación de la energía en todo sistema físico:

> No physical system, when analyzed using the appropriate theory, be it classical, relativistic, or quantum mechanics, has been found to violate the law of conservation of energy. The first law of thermodynamics, which states that the energy of an isolated system cannot change, is assumed to hold without exception [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 287].

Este pasaje señala un punto importante: la conservación de la energía no es en origen un principio aportado por la mecánica, sino por la termodinámica. En este caso, la idea de energía que se tiene en termodinámica se introduce a la mecánica clásica. Añadir ideas nuevas a las teorías no siempre es una acción ilegítima. Recordemos que la mecánica newtoniana contemporánea no es la misma en nuestros días que en los tiempos de Newton. Secciones atrás ya hemos visto cómo es que el concepto de masa se ha modificado sustancialmente, y cómo es que se han introducido constructos matemáticos contemporáneos con el fin de modelar una colisión instantánea. ¿No se ha añadido, con este mismo espíritu, el principio de la conservación de la energía? La actitud y la práctica científica habitual contemporánea tienden a dar una respuesta afirmativa a esta pregunta. Esta tendencia, sin embargo, no reduce el concepto de energía a energía mecánica (cinética más potencial), sino que lo extiende a otros tipos de energía. Symon, por ejemplo, reconoce:

> The conservation laws are in a sense not laws at all, but postulates which we insist must hold in any physical theory. If, for example, for moving charged particles, we find that the total energy, defined as ($T + V$), is not constant, we do not abandon the law, but change its meaning by redefining energy to include electromagnetic energy in such a way as to preserve the law. […] The conservation of this quantities is then not a physical fact, but a consequence of our determination to define them in this way [Symon 1971: 172].

La sola conservación de la energía mecánica es una idea que –todo parece indicar– fue concebida en primer lugar por Leibniz. Aunque esta formulación primitiva de la conservación de la energía se cumple en la mayoría de los sistemas mecánicos, es bien conocido que es un principio falso. En él sólo se consideran lo que ahora llamamos energía potencial y energía cinética.[217] Los sistemas que incluyen fuerzas de fricción en

[217] Truesdell menciona los términos precisos de esta formulación: "Leibniz […] introduced the concepts of *live force* and *dead force*. The dead force is only the old force of position, known to the schoolmen and nowadays called potential energy, but the live force is mass times velocity squared, twice what is now called kinetic energy. Leibniz asserted that the loss of dead force resulted in corresponding gain of live force" [Truesdell 1968: 105-6]. Aunque hay consenso sobre la originalidad de la idea de Leibniz, no resulta claro cuándo se comenzó a utilizar el término 'energía'. Por ejemplo, Von Laue expresa: "Leibniz (1646–1716) was the first to devote his attention to the product of mass and squared velocity, mq^2. […] Johannes Bernoulli (1667–1748) gave us the expression "*energy*", but this name did not gain the upper hand until later" [Von Laue 1949: 506-7]; mientras que, recientemente, Müller afirma: "The word energy

oposición al movimiento de un cuerpo, por ejemplo, y que no hemos dejado de clasificar como newtonianos, claramente no cumplen este principio.[218] De la misma manera, muchas de las supertareas newtonianas que aquí estamos tratando tampoco cumplen este principio primitivo. Así las cosas, la cuestión que ahora nos incumbe es: ¿cumplen nuestros sistemas newtonianos –las supertareas newtonianas– el principio de la conservación de la energía en un sentido contemporáneo, es decir, donde la idea de energía no se reduce a la idea de energía mecánica? ¿Por qué Atkinson, Earman, Norton y Pérez Laraudogoitia sostienen que la conservación de la energía falla?[219]

Como acabamos de decir, los sistemas mecánicos con fuerzas de fricción sí cumplen el principio de la conservación de la energía en un sentido contemporáneo, ya que la energía mecánica perdida por el sistema se transforma en energía térmica, de tal manera que la suma entre los tres tipos de energía (cinética, potencial y térmica) es la misma en todo momento. Aquí, el concepto inicial de energía, que se limitaba a energía mecánica (cinética y potencial) ha sido extendido hacia otros tipos de energía (concretamente, en térmica). No podemos afirmar lo mismo para las supertareas no conservativas que aquí nos ocupan. El argumento que lo muestra es simple. Es claro que en las supertareas newtonianas la energía mecánica (que en realidad sólo es cinética, al menos en todos los instantes en que las partículas no están colisionando) se pierde. Bien, si el principio de conservación se cumple, entonces dicha energía perdida debe transformarse en otro tipo de energía. ¿En qué tipo de energía se transforma? No hay teoría que posea y que explique un tipo de energía que satisfaga tal pérdida, así que no podemos decir en qué energía se transforma. Y mientras no especifiquemos la energía en que se transforma, no tendremos un concepto de energía lo suficientemente extendido y rico para que satisfaga el principio de conservación. No podemos, por lo pronto, hablar de una conservación de la energía (¿y si no de cuál?) en las supertareas newtonianas no conservativas.[220]

---

is a technical term invented by Thomas Young (1773-1829). […] Young used it as a convenient abbreviation for the sum of kinetic energy and gravitational potential energy of a mass and the elastic energy of a spring to which the mass may be attached" [Müller 2007: 9].

[218] A partir de las leyes de Newton, sólo se puede obtener la conservación de la energía (cinética + potencial) para sistemas en los que, precisamente, sólo intervienen fuerzas conservativas. Véase, por ejemplo, [Arya 1998: 45], [Davies 1986: 34] o [Kibble 1985: 39].

[219] Atkinson precisamente estudia este aspecto de las supertareas. Refiriéndose a supertareas como ST1, que se encuentran confinadas a un espacio finito, afirma que "in *classical mechanics* the total momentum is necessarily conserved, but energy can be lost (depending on the specific model for the masses)" [Atkinson 2007: 171]. La posición de Earman y Norton también es clara: "Adding extra conditions such as energy conservation is not uninteresting. But is not constitutive of Newtonian systems" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 285]; así como la de Pérez Laraudogoitia: "if the law of conservation of energy is a consequence of Newton's laws and these laws are not violated in ST1, how it is that energy is not conserved in ST1? However, there is no contradiction; what we have is a contraintuition. The conservation of energy is deduced from Newton's laws only for finite systems, and what ST1 shows is that what is valid for finite systems is not always valid for infinite systems" [Pérez Laraudogoitia 1999b: 318].

[220] Se podría señalar aquí que no existe tal concepto enriquecido de energía simplemente porque no hay otra teoría que se ocupe de otro tipo de energía y a la vez brinde un sentido físico preciso para los sistemas en cuestión, por el hecho de que tales sistemas no representan ningún suceso físico de la realidad. A esto hay que contestar que el hecho de que hasta el día de hoy no hayamos encontrado una aplicación para nuestros sistemas, no implica que nunca se encuentre alguna. Recordemos el caso de los espacios de Riemann, que inicialmente se veían como una mera abstracción, y que ahora un caso especial es el que mejor describe el espacio-tiempo que habitamos. Por otro lado, [Atkinson 2009: 14] sugiere que las supertareas newtonianas que terminan con todas sus partículas en reposo relativo podrían ser un modelo de colisiones perfectamente inelásticas, lo que convertiría a la energía mecánica perdida en energía térmica.

Se puede objetar que el principio de la conservación de la energía (bajo el concepto actual y extendido de energía) se tiene que cumplir siempre en mecánica clásica y que, por lo tanto, sistemas como ST1 o ST1A son simplemente no newtonianos. Pero como en seguida se mostrará (justo en el siguiente párrafo) existe una infinidad de supertareas newtonianas, que son sumamente semejantes a ST1, y que son conservativas, lo que sugiere con fuerza que la exclusión de ST1 o de ST1A por el sólo hecho de no ser conservativa es completamente *ad hoc*. Además, y todavía más importante, la aceptación del principio de la conservación de la energía (bajo el concepto extendido de energía) ha ganado amplia aceptación en la comunidad científica para ser aplicado en las diversas de teorías físicas *gracias a la extensión y enriquecimiento del concepto de energía y no gracias a la exclusión de sistemas no conservativos bajo un concepto limitado*. Ante la pérdida de la energía mecánica en los sistemas con fuerzas de fricción, no fueron eliminados dichos sistemas, sino que fue extendido el concepto de energía. ¿Por qué habríamos de excluir a sistemas como ST1, sistemas genuinamente mecánicos que cumplen escrupulosamente los principios newtonianos que *gobiernan el movimiento* de los cuerpos, en vez de extender todavía más la idea de energía? Como el desarrollo de teorías conlleva siempre la creación de ideas, es claro que la extensión del concepto de energía es la opción más interesante, la más enriquecedora; la eliminación de sistemas como ST1 es más bien la eliminación de un desafío, la eliminación de una oportunidad para llegar a ideas nuevas.[221]

Las supertareas newtonianas conservativas a las que nos referimos en el párrafo anterior son las incluidas en una generalización que llamaremos GSTC. Se basa en una variación muy simple de ST1. Su planteamiento en términos precisos es el siguiente. Inicialmente, digamos en un tiempo $t = 0$, toda partícula P_n ($n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$) se encuentra en la posición $x = 1 - 1/2^n$, en un marco de referencia inercial en el que todas las partículas P_n con $n > 0$ se encuentran en reposo, mientras que P_0 viaja con una velocidad v_0' hacia la derecha. La única diferencia sustancial con ST1 es que la masa m_{n+1} de cada partícula P_{n+1} guarda una relación $\mu = \frac{m_{n+1}}{m_n} < 1$ con la masa m_n de su partícula contigua P_n. Por tanto, la masa total m_T del sistema es finita, y se puede expresar como $m_T = m_0/(1-\mu)$.[222]

Ante este estado inicial, la partícula P_0 que viaja con v_0' colisionará con la partícula P_1 que se encuentra en reposo, tras lo cual P_0 continuará su movimiento con una velocidad v_0'' mientras que P_1 lo hará con una velocidad v_1'. Un poco después, la partícula P_1 que viaja con v_1' colisionará con la partícula P_2 que se encuentra en reposo, tras lo cual P_1 continuará su movimiento con una velocidad v_1'' mientras que P_2 lo hará con una velocidad v_2'. En general, ocurrirá una sucesión de colisiones de tal manera que la partícula P_n que viaja con v_n' colisionará con la partícula P_{n+1} que se encuentra en reposo, tras lo cual P_n continuará su movimiento con una velocidad v_n'' mientras que P_{n+1} lo hará con una velocidad v_{n+1}'. La sucesión de colisiones naturalmente ocurrirá así pues, como se puede ver intuitivamente a partir de la relación de masas, la velocidad final de la partícula P_{n+1}, v_{n+1}'', siempre es mayor que la velocidad final de la partícula P_n, v_n'', y por tanto P_n solamente colisiona una única vez con P_{n+1}. Habiendo visto esto, es fácil percatarse también de que la supertarea se ejecuta, pues en un instante posterior a $t = 0$, después de que transcurra un lapso de tiempo finito, P_0 se encontrará viajando

[221] Un recorrido histórico de la gradual extensión del concepto de energía puede encontrarse en [Müller 2007: 9-46].

[222] Concretamente, el modelo con μ = ½ ya es presentado por Atkinson [2008: 6-7] y por Pérez Laraudogoitia [2007a: 26].

con $v_0´´$ en el punto $x = 1$, y la sucesión de colisiones debió haber ya expulsado al resto de partículas hacia la región $x > 1$ del eje x.

En términos precisos, de cada colisión entre P_n, que inicialmente viaja con $v_n´$, y P_{n+1}, que inicialmente se encuentra en reposo, la conservación de la energía y el momento lineal nos indican que

$$v_n´´ = \frac{1-\mu}{1+\mu} v_n´ \tag{4.1}$$

y que

$$v_{n+1}´ = \frac{2}{1+\mu} v_n´ . \tag{4.2}$$

Por recursividad, a partir de (4.2) podemos obtener que

$$v_n´ = \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^n v_0´ . \tag{4.3}$$

que es la velocidad con la que cada partícula abandona el reposo tras su primera colisión (a excepción de P_0, que inicialmente ya viaja con $v_0´$, aunque también se puede suponer, mas no es ninguna necesidad, que su velocidad inicial fue obtenida por una colisión con alguna partícula que no forma parte del sistema que ahora modelamos). Así, sustituyendo (4.3) en (4.1), se obtiene la velocidad final de cada partícula:

$$v_n´´ = \frac{2^n(1-\mu)}{(1+\mu)^{n+1}} v_0´ . \tag{4.4}$$

Con (4.4) se puede verificar que $\frac{v_{n+1}´´}{v_n´´} = \frac{2}{1+\mu}$, y por tanto que la velocidad final de P_{n+1} es mayor que la velocidad final de P_n (tal como intuitivamente ya se había visto). Ahora bien, la ejecución de la supertarea terminará cuando cada partícula P_n haya recorrido el espacio que la separa de la partícula contigua P_{n+1}, y que es $\Delta x_n = 1/2^{n+1}$. Este espacio es recorrido con la velocidad $v_n´$. Sabiendo esto, junto con (4.3), podemos saber también que la supertarea termina en el instante de tiempo

$$t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta x_n}{v_n´} = \frac{2}{(3-\mu)v_0´} .$$

Es claro, pues, que se ejecuta con éxito una supertarea.

Por otro lado, el momento lineal inicial claramente viene dado por $m_0 v_0´$. Con (4.4), se obtiene que el momento final es igual:

$$P_f = \sum_{n=0}^{\infty} m_n v_n´´ = (1-\mu) m_0 v_0´ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \mu^n}{(1+\mu)^{n+1}} = m_0 v_0´ .$$

Lo mismo se puede decir de la energía, que en el instante inicial es $\frac{1}{2} m_0 v_0´^2$, mientras que al final de la supertarea es

$$E_f = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} m_n v_n´´^2 = \frac{1}{2}(1-\mu)^2 m_0 v_0´^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} \mu^n}{(1+\mu)^{2n+2}} = \frac{1}{2} m_0 v_0´^2 .$$

Todos los procesos descritos por GSTC, pues, conservan la energía. Por ello, son ejemplos que desacreditan el rechazo de supertareas como ST1A basado en el solo hecho de que presentan un fallo en la energía cinética. Dejan, además, algo claro que nos será útil en los próximos capítulos: el simple hecho de que el sistema sea infinito y que en el proceso no haya una última colisión, no son razones suficientes para que el proceso presente un fallo de la conservación de la energía cinética.

4.3 Requisitos para que una supertarea sea newtoniana

Dentro de los objetivos de este capítulo nos proponíamos encontrar una respuesta a las siguientes preguntas: ¿Qué principios debe cumplir un sistema para poder considerarlo newtoniano? ¿Qué conceptos constituyen a un sistema newtoniano? No daré una respuesta definitiva, por el simple hecho de que es muy probable que nunca exista una respuesta tal. Hoy en día, en que la mecánica newtoniana no es la teoría con el mayor prestigio en cuanto a descripción y predicción del universo que habitamos, la cuestión de qué principios, qué conceptos y qué constructos teóricos constituyen un universo newtoniano termina siendo una cuestión de consenso entre la comunidad científica. En el recorrido realizado en el capítulo, hemos visto cómo algunos conceptos se han modificado en el transcurso del tiempo. En concreto, hemos visto que el concepto de masa ahora es completamente distinto al concepto que el mismo Newton definió; con ello, se ha visto conveniente modificar el principio de conservación de la masa. También hemos visto que el utillaje matemático para modelar una colisión instantánea es un desarrollo que no se llevó a cabo hasta el siglo veinte. Asimismo, se vio que hay una tendencia a introducir a la mecánica newtoniana (al igual que al resto de las teorías físicas modernas) un principio originalmente ajeno a ella, a saber, el principio de la conservación de la energía, principio que la termodinámica lo plantea como su primera ley; esta introducción conlleva una ampliación del concepto de energía que va más allá de la energía meramente mecánica. Hemos visto que con el concepto actual de energía, el principio no se cumple todavía en algunos sistemas mecánicos newtonianos. En suma, nada nos asegura que la mecánica newtoniana no siga modificando en el futuro ciertos conceptos o que no prefiera nuevas herramientas para su modelización e interpretación del mundo. Incluso ante estos cambios, se le seguirá llamando mecánica newtoniana.[223]

Hestenes [1986: 582-9], quien también reconoce esta transformación de la teoría,[224] se atreve a enunciar una serie de principios constitutivos de la mecánica newtoniana. En primer lugar, enuncia una ley cero que describe la estructura de los conceptos del espacio y el tiempo, así como sus relaciones. Así, la ley cero incluye

a) la ley de orden espacial, que no es más que la especificación de la estructura matemática de un espacio tridimensional real ($\mathbf{R}^3$) y su debida interpretación física,
b) la ley de orden temporal,
c) la ley de continuidad para las trayectorias y
d) la ley de simultaneidad, que no se refiere a la simultaneidad de los eventos, sino que postula que para cada instante toda partícula se encuentra en una única posición.

[223] Más allá de esta reflexión, una actitud de reserva hacia la especificación tajante de los sistemas que son newtonianos es la de Malament. Discutiendo el domo de Norton –modelo que se presentará en el apartado 5.4– responde a la siguiente cuestión: “Is Newtonian particle mechanics a deterministic theory? […] My answer is: “It depends”. It depends on what counts as a proper “Newtonian system”, and that is not entirely clear (at least not to me)” [Malament 2008: 799].

[224] Dicho reconocimiento se aprecia en las siguientes palabras: “Newton’s original formulation of mechanics […] is not entirely satisfactory for several reasons. First, it is incomplete in the sense that not all major assumptions of the theory are explicitly spelled out. Second, in the last century Newtonian theory has undergone profound modifications and extensions which should be taken into account” [Hestenes 1986: 574].

Englobando todas estas leyes, Hestenes enuncia la ley cero de la siguiente manera: *todo objeto tiene una historia continua en el espacio y el tiempo*.[225] En segundo lugar, enuncia las leyes de la mecánica en las que, como cabe esperarse, se incluyen

e), f), g)) las tres leyes de Newton.

Junto con éstas, también enumera

h) la ley de superposición, que dice que cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, hay una fuerza resultante que es la suma vectorial de todas ellas y que produce el mismo efecto,

i) la ley de absoluta simultaneidad (esta sí, se refiere a la simultaneidad entre dos eventos, tal como se ha enunciado en el apartado 4.1),

j) el principio de interacción local y

k) el principio de relatividad de Galileo.

Estoy fundamentalmente de acuerdo con Hestenes. No obstante, el recorrido que se ha hecho en este capítulo sugiere la conveniencia de añadir algunos principios a éstos. Me atrevo a añadir, pues, dos principios más:

l) el principio de la conservación de la masa (que no de la materia), tal como se postuló en la sección 4.2.1,

m) el principio de impenetrabilidad, que es fundamental para el estudio de las colisiones y que enuncia que varios cuerpos no pueden ocupar simultáneamente una misma región del espacio.

Además de las razones dadas en la sección 4.2.9 para no incluir el principio de conservación de la energía, debe notarse aquí que todos los principios o leyes, de a) a m), contribuyen directamente en el movimiento de los cuerpos o partículas. ¿Qué tendría que hacer entre ellos un principio de la conservación de la energía, cuando la mecánica newtoniana no es una teoría que se ocupa de la energía sino del movimiento, y cuando el concepto extendido de energía –esta energía extendida es la que supuestamente se conservaría– no contribuye en nada a la caracterización del movimiento? De añadir el principio de la conservación de la energía (bajo el concepto actual más extendido) estaríamos adoptando un criterio de exclusión de sistemas mecánicos no conservativos (como ST1 o ST1A), y no un principio que nos ayude y enriquezca en la comprensión del movimiento.

Con todo esto, ya podemos responder a otra pregunta que planteamos al inicio del capítulo: ¿Son el determinismo y la conservación de la energía consecuencias de las leyes de Newton? La respuesta definitiva es la negativa. Se vio también en la sección 4.2.6 que hay sistemas que, bajo las leyes de Newton, adquieren estados que admiten más de una evolución futura, y no necesariamente son sistemas infinitos. Las leyes de Newton solas, pues, no garantizan ni el determinismo ni la conservación de la energía para todos los sistemas.

Finalmente, la pregunta que más nos interesa aquí: ¿Son ST1, ST2, ST3 modelos genuinamente newtonianos? La respuesta es afirmativa. A lo largo del capítulo hemos visto argumentos que amenazan el carácter newtoniano de estas supertareas. Se ha mostrado, en cada uno de los casos, que las supertareas salen a salvo de las supuestas amenazas. Ciertamente, vimos que hay algunos asuntos pendientes, como puede ser el problema que plantea los cuerpos en contacto, pero también vimos que estas cuestiones no son exclusivas de las supertareas que aquí nos incumben, sino de una gran cantidad de sistemas que sin chistar se asumen como newtonianos. ST1, ST2 y ST3 también cumplen cada una de los principios a)-m). Por lo tanto, podemos estar seguros de que las supertareas que consisten en la sucesión infinita de colisiones elásticas con las que

[225] Confróntese en [Hestenes 1986: 586].

en adelante trabajaremos son sistemas newtonianos. Su carácter indeterminista y no conservativo, por supuesto, es sumamente intrigante y, hay que aceptar, no es el carácter habitual de un sistema newtoniano. En los próximos capítulos se profundizará en la comprensión de estas dos anomalías.

TERCERA PARTE

ANOMALÍAS EN SUPERTAREAS NEWTONIANAS: EL INDETERMINISMO Y EL FALLO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

5. Las fuentes del indeterminismo en supertareas newtonianas

> And much harder is to suppose that all the particles in an infinite space should be so accurately poised one among another as to stand still in a perfect equilibrium. For I reckon this as hard as to make not one needle only but an infinite number of them (so many as there are particles in an infinite space) stand accurately poised upon their points. Yet I grant it possible, at least by a divine power; and if they were once so placed I agree with you that they would continue in that posture without motion for ever, unless put into new motion by the same power.
>
> Isaac Newton, *Second Letter to Bentley*.

El problema que se abordará en este capítulo es muy sencillo de plantear: ¿por qué supertareas como ST1, ST2 o ST3 son indeterministas? ¿Cuál es el motivo, la fuente por la cual estos sistemas muestran un comportamiento indeterminista? La búsqueda y el análisis que se hará aquí de las fuentes del indeterminismo en estos sistemas tiene dos pretensiones. La primera es la generalidad; es decir, que todas las supertareas –así como el resto de sistemas– que presenten tales fuentes serán también indeterministas. La segunda es la satisfacción intuitiva; es decir, que la fuente que genera el indeterminismo esté planteada de tal manera que nos muestre, nos enseñe, y así *veamos* por qué tales sistemas son indeterministas.

El capítulo se estructura de la siguiente manera. En primer lugar, en el apartado 5.1, precisaremos la idea de determinismo con la que aquí trabajaremos, y aclararemos el sentido de concebir el determinismo como una propiedad de una teoría física (en concreto, de la mecánica clásica). En segundo lugar, en el apartado 5.2, analizaremos la primera clasificación hecha para comprender el indeterminismo en supertareas como ST1 y ST3: supertareas que dependen de la falta de un límite superior en las velocidades y supertareas que dependen de un límite superior en el espacio entre las partículas. Dejaremos claro que la clasificación hasta ahora propuesta de las supertareas indeterministas no es excluyente, y que, de hecho ambas supertareas, ST1 y ST3, dependen de un límite superior en la distancia entre las partículas. En tercer lugar, en el apartado 5.3, defenderé que la fuente del indeterminismo generado por supertareas como ST2 y ST3 es la trayectoria que ocasiona la desaparición de al menos una partícula. En cuarto lugar, en el apartado 5.4, se ofrecerá una explicación de por qué es posible que el indeterminismo se presente en sistemas abiertos (en concreto, con cadenas causales abiertas), sistemas como las supertareas con las que trabajamos. En quinto lugar, en el apartado 5.5, se tratará con una de las fuentes del indeterminismo en supertareas como ST1: el reposo relativo de todas las partículas como estado final de la supertarea. A partir de dicha fuente, en la sección 5.5.1, se presentará una generalización, que llamaremos Gμ1, de supertareas newtonianas bajo una relación de masas constante entre las partículas contiguas. En la sección 5.5.2, se pondrá de manifiesto que entre los sistemas que incluye Gμ1 se encuentran dos hechos interesantes: el indeterminismo bajo reposo relativo sin punto de acumulación (y sin desapariciones de partículas), y las auto-excitaciones expansivas. Finalmente, en la sección 5.5.3, se mostrará que ciertos sistemas que aparentemente son causalmente desconectados, resultan no serlo bajo Gμ1.

5.1. El determinismo físico laplaciano: una precisión

A lo largo de todo el presente trabajo, al hablar del determinismo nos estamos refiriendo a la idea más elemental, tradicional, y a la vez más restrictiva del determinismo. Es la idea de que absolutamente todos los sucesos que ocurren se encuentran determinados, de que, a pesar de las apariencias de libertad o de agencia, ningún suceso pudo haber sido cambiado ni podrá serlo. ¿Quién o qué determina o fija tal historia? Visto desde un punto de vista teológico, un Dios o unos dioses, no necesariamente todopoderosos, pero lo suficientemente poderosos para tener el control absoluto de su propia creación. Visto desde un punto de vista meramente natural, son las leyes de la naturaleza las que determinan la historia fija.[226] Al ser aquí la filosofía de la física la disciplina bajo la cual trabajamos, este último es el punto de vista que aquí se adoptará: las leyes de la física son las que determinan una historia fija.

Dicho brevemente, y prescindiendo todavía de la existencia de leyes, un sistema físico determinista es aquel que presenta y sólo puede presentar una única evolución (una única sucesión de estados) a lo largo de todo el tiempo. En términos más detallados, si en un momento t_0 un sistema S presenta un estado concreto E_0, entonces a dicho sistema le corresponde una única historia concreta hacia el pasado P_0 (la sucesión de estados anteriores a t_0) y una única historia concreta hacia el futuro F_0 (la sucesión de estados posteriores a t_0). Como esto también se aplica al estado E_t que el sistema presenta en cada uno de los momentos t que pertenecen a la historia pasada P_0 y a la historia futura F_0, es claro que a su vez el estado E_0 únicamente se presenta ante una historia pasada P_0 y ante una historia futura F_0.[227]

Esto quiere decir que, en caso de que el determinismo sea verdadero en el mundo físico real, y de que tal mundo en verdad esté gobernado por leyes, todo lo que ocurra en una historia física estuvo, está, y estará completamente determinado por dichas leyes. Aquel, pues, que conozca la descripción completa del estado del mundo real en algún momento, así como todas las leyes que lo gobiernan, tendrá *acceso* al conocimiento preciso y completo del pasado y del futuro del mundo real.[228] Esta idea,

[226] Por 'historia' entiendo simplemente la sucesión (con un orden continuo) de los estados de un mundo.
[227] Nótese que la explicación de este párrafo no menciona todavía las leyes de la física. Efectivamente, un mundo determinado no necesariamente está determinado por leyes. No obstante, la interpretación física considera que son las leyes (y no un mero capricho de la naturaleza) las que fijan la historia de un mundo concreto, si es que lo fijan. Schaffer ofrece una explicación más directa basándose en la misma idea, pero añadiendo la influencia de las leyes: "a world is deterministic iff its total occurrent history is fixed by its occurrent state at any time plus its laws" [Schaffer 2007: 114].
[228] Esto no significa que el determinismo sea lo mismo que la predecibilidad. El determinismo ontológico del mundo no implica el conocimiento total de la historia de tal mundo. Sólo aquel que conozca completamente la descripción de un estado instantáneo y la totalidad de las leyes que rigen con precisión el mundo determinista podrá tener *acceso* a la descripción completa de la historia del mundo. La ignorancia de tal estado y de tales leyes no implica, pues, que el mundo en que vivimos en sí sea o no sea

que se remonta a discusiones filosóficas y teológicas clásicas,[229] fue manifestada y apoyada elocuentemente por Laplace, a tal grado que hoy en día se le denomina determinismo laplaciano. Las palabras con las que la explica, y que conforman un pasaje que ya es clásico, se transcriben a continuación:

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers, comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvemens des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait présent à ses yeux. L'esprit humain offre, dans la perfection qu'il a su donner à l'Astronomie, une faible esquisse de cette intelligence. Ses découvertes en Mécanique et en Géométrie, jointes à celle de la pesanteur universelle, l'ont mis à portée de comprendre dans les mêmes expressions analytiques, les états passés et futurs du système du monde [Laplace 1825: 3-4].

Aunque en un principio Laplace habla del determinismo del mundo, su explicación termina apuntando que las teorías del mundo que se han desarrollado se dirigen hacia una concepción determinista del mundo. Efectivamente, el único modo de acceder al conocimiento del mundo es bajo teorías del mismo. Toda discusión razonable, pues, sobre el determinismo del mundo real, se dirige en primer lugar a la discusión del determinismo en las descripciones del mundo hechas –o en los mundos posibles permitidos– por las teorías. Aquí nos concentraremos exclusivamente a los mundos que la mecánica clásica permite.

Una definición simple y rigurosa del determinismo laplaciano en términos de mundos físicamente posibles –mundos admitidos, por ejemplo, por el aparato teórico de alguna teoría–, la ofrece Earman con las siguientes palabras:

> Letting $\mathscr{W}$ stand for the collection of all physically possible worlds, […] we can define the Laplacian variety of determinism as follows. The world $W \in \mathscr{W}$ is

determinista. Una propuesta que identifica el determinismo con la predecibilidad pertenece a Popper, que define el determinismo (científico) con las siguientes palabras: "The doctrine of 'scientific' determinism is *the doctrine that the state of any closed physical system at any given future instant of time can be predicted, even from within the system, with any specified degree of precision, by deducing the prediction from theories, in conjunction with initial conditions whose required degree of precision can always be calculated (in accordance with the principle of accountability) if the prediction task is given*. […] we might add […] the requirement that it can be predicted, of any given state, *weather or not the system in question will ever be in this state*" [Popper 1982: 36-7]. Aunque buena cantidad de autores (por ejemplo, Earman [1986: 8-9], Roberts [2006: 198] y Weatherford [1991: 152-8]) consideran incorrecta esta postura por identificar el indeterminismo con la predecibilidad, es justo decir que Popper diferenciaba la doctrina metafísica del determinismo de la predecibilidad: "The metaphysical doctrine of determinism simply asserts that all events in this world are fixed, or inalterable, or predetermined. *It does not assert that they are known to anybody, or predictable by scientific means*. But it asserts that the future is as little changeable as is the past. Everybody knows what we mean when we say that the past cannot be changed. It is in precisely the same sense that the future cannot be changed, according to metaphysical determinism" [Popper 1982: 7-8, mis cursivas]. En realidad, cuando Popper habla de determinismo científico, está siempre refiriéndose a la predecibilidad. Como bien apunta Earman [1986: 8], este trato tiene consecuencias indeseables, ya que podríamos concluir el indeterminismo cuando sólo es válido concluir una incapacidad de predicción.

[229] En el atomismo de Demócrito se puede ya encontrar una concepción del determinismo bastante fuerte (confróntese en [Bailey 1964: 121]). En cuanto a la perspectiva teológica, la 'divina providencia' es una idea que introduce el determinismo con fuerza –y controversia– desde los escolásticos (véase en [Henry 2002]).

Laplacian deterministic just in case for any $W' \in \mathscr{W}$, if W and W' agree at any time, then they agree for all times [Earman 1986: 13].[230]

Con esto, la concepción del determinismo como propiedad de una teoría se encuentra a un paso. Una teoría –el conjunto de todas las ideas que engloba, con las entidades y los axiomas que asume– es determinista si todos los mundos que posibilita, todos los mundos que su marco teórico permite, son mundos deterministas. Un solo sistema físico –que puede constituir en sí un mundo o un submundo– admitido por el marco teórico de una teoría que muestre ser indeterminista, es suficiente para mostrar a su vez que tal teoría es indeterminista.[231] Aquí se encuentra una de las principales motivaciones del presente trabajo: si la mecánica newtoniana es una teoría indeterminista, ¿por qué lo es? ¿Cómo deben de ser los sistemas que así lo muestran?

Además de esta concepción del determinismo, hay otras formas de concebirlo que aquí no vamos a considerar por varios motivos: en algunos casos por ser concepciones inconvenientes, en otros por ser concepciones parciales, y en otros más simplemente por salirse del ámbito físico. Entre las concepciones inconvenientes se encuentra aquella que identifica el indeterminismo con la predecibilidad (como en [Popper 1982]), o la que identifica el determinismo con la inevitabilidad[232]. Concepciones parciales en física son las versiones más débiles del indeterminismo laplaciano que sólo miran en una dirección temporal. Una es el determinismo futurístico que se da cuando cualesquiera dos mundos posibles que coinciden en un instante, coinciden en todos los instantes posteriores. La otra, el determinismo histórico, se presenta cuando cualesquiera dos mundos posibles que coinciden en un instante, coinciden en todos los instantes anteriores.[233] En mecánica newtoniana, para cada

[230] Dicho de una forma menos árida: “if determinism is true, then no two possible worlds can completely coincide at any point unless they coincide at all points” [Weatherford 1991: 59]. Aquí Weatherford se basa explícitamente en la definición de Earman.

[231] El pionero en concebir el determinismo como propiedad de las teorías es Nagel [1953]. Su formulación se basa en la construcción de las teorías bajo leguajes formales. Como consecuencia de esto, Montague [1974 (1962): 303-4] encuentra que toda teoría entendida así es indeterminista de una forma distinta a la que se explica en el texto principal. Su argumento simplemente hace notar que existen más estados físicos posibles que enunciados de la teoría: las variables físicas pueden tomar una infinidad no numerable de valores, mientras que la teoría consta sólo de una cantidad numerable de enunciados. La reformulación de Montague [1974 (1962): 320-4], que salva esta deficiencia, es una antecedente a la formulación de Earman, sólo que en vez de hablar de mundos posibles habla de historias posibles a la luz de una teoría.

[232] Esta concepción es propuesta por Katsenelinboigen, que insiste en la existencia de grados de indeterminismo: “the degree of indeterminacy is the degree of *our* ability to change the path of a system as its contituent parts themselves change. If *our* ability to change the parts is finite, the occurrence of a particular event may be ultimately unavoidable. This is determinism, the case of an inevitable event. Indeterminacy, on the other hand, is characterized by avoidability or alterability of an outcome of an entire category of events rather than a single outcome” [Katsenelinboigen 1997: 12, mis cursivas]. Aunque es interesante la idea de grados de indeterminismo, la inconveniencia de esta concepción radica en que explica un aspecto difícil de probar en un sistema, el determinismo, con otra idea que, además de ser más vaga, es más difícil de probar en el mismo sistema: la inevitabilidad. Por otro lado, esta concepción del determinismo asume la existencia de agentes en posesión de cierta libertad (¿hay otra forma de entender la ausencia de inevitabilidad? ¿O por qué Katsenelinboigen habla de “nuestra” habilidad para cambiar el camino de un sistema?), lo que la hace relevante para el determinismo psicológico y biológico, mas no con el físico.

[233] Esta distinción puede encontrase en [Earman 1986: 13], [Montague 1962 (1974): 320-1], [Roberts 2006: 199] y [Schaffer 2007: 115]. Allí mismo, consideran también la variación de otros matices para definir tipos de determinismo aún más débiles. Montague añade el determinismo condicional, Earman el determinismo parcial, y Schaffer el determinismo regional y el determinismo aspectual. Se podría seguir

sistema que presenta una de estas situaciones, existe otro que presenta la contraria: la reversión temporal de un mundo posible también es un mundo posible. Así, aunque en mecánica clásica haya procesos que entren dentro de esta clasificación, la teoría en sí no puede caracterizarse exclusivamente con uno de estos tipos de determinismo. Finalmente, hay también concepciones del determinismo que escapan a la discusión directa del determinismo en los mundos posibilitados por las teorías físicas, como son el determinismo lógico, el determinismo teológico, el determinismo biológico o el determinismo psicológico.[234]

Quedémonos, pues, con el determinismo laplaciano simple para mirar a la mecánica newtoniana. Ahora bien, recordemos que la mecánica clásica es una teoría tradicionalmente reconocida como determinista. Este reconocimiento ya se aprecia en el pasaje clásico recién transcrito de Laplace, que alude al carácter determinista que sugieren la geometría y la mecánica (Laplace, sin duda alguna, tenía en mente la mecánica newtoniana de sus tiempos)[235], y se manifiesta también en las contribuciones que muestran el carácter indeterminista de la mecánica clásica.[236] Incluso hay autores que recientemente ofrecen argumentos a favor del carácter determinista de la mecánica newtoniana.[237]

De hecho, el arraigo a la tradición que propone considerar la mecánica newtoniana como una teoría determinista para algunos sugiere una actitud excluyente, discriminante, hacia los sistemas indeterministas. Wilson [1989], en una crítica a Earman [1986], defiende esta actitud sugiriendo que el reconocimiento del indeterminismo debería ir acompañado de una reconstrucción (*recasting*) matemática de

---

matizando para seguir definiendo variaciones de determinismos laplacianos, pero en ello no parece haber ningún objetivo interesante.

[234] El determinismo lógico es aquel que sostiene que todo enunciado es verdadero o falso independientemente del momento en el que se profiere o se piensa (véase, por ejemplo, en [Oaklander 1998: 191-2], que lo llama fatalismo lógico, o en [Von Wright 1984: 1-13]). El determinismo teológico es básicamente la idea de la predestinación del mundo, predestinación debida a un agente responsable de los acontecimientos de su creación (véase en todo [Craig 2007] o en [Henry 2002: 131]). El determinismo psicológico es aquel que sostiene que las acciones humanas, aparentemente voluntarias, no son más que manifestaciones determinadas por mecanismos deterministas que todavía no logramos desvelar (por ejemplo, en [Skinner 1953: 6-10]). El determinismo biológico está estrechamente relacionado con el anterior, pues de la misma manera sostiene que los procesos biológicos (entre ellos los mentales), aparentemente aleatorios o inesperados, son también manifestaciones determinadas de mecanismos deterministas (buenas explicaciones pueden encontrarse en [Dawkins 1982: 10-4] o en Rose [1997: 5-7]).

[235] Aunque es una cuestión que incumbe discutir a la historia del pensamiento científico, cabe comentar que Weatherford sostiene que la opinión actual prevalente sobre el determinismo en la mecánica clásica se debe en gran medida a Laplace: "He [Laplace] also is largely responsible for our contemporary view that Newtonian mechanics is a deterministic system" [Weatherford 1991: 55].

[236] Por ejemplo, ante algunos sistemas indeterministas Zimba propone deshacernos de tal prejuicio histórico: "give up the attempt to complete the Laws of Motion, and simply conclude—despite the prejudices of history—that Newtonian mechanics is, and has always been, an indeterministic picture of the universe" [Zimba 2008: 427]. Por otro lado, Roberts reconoce la posición tradicional, además de aceptar la conciencia contemporánea sobre el carácter indeterminista de la mecánica clásica: "Classical physics is traditionally viewed as the very paradigm of a deterministic physical theory […]. However, it is now known that classical physics is not deterministic, in either the predictability sense or the ontic sense" [Roberts 2006: 200].

[237] Por ejemplo, McAllister defiende que "There is no contingency in a Newtonian universe: all events in it are completely determined" [McAllister 2004: 195]. En el apartado 5.4 se presentará una crítica a su argumento. Por otro lado, Korolev, que presenta un argumento en contra del indeterminismo de la mecánica clásica bajo sistemas como el domo de Norton (vease el mismo apartado y la nota 254), no manifiesta tajantemente que la mecánica clásica sea determinista, mas también reconoce el arraigo de la idea "classical physics is often assumed to be a paradigm example of a fully deterministic physical theory" [Korolev 2007: 943].

la teoría.[238] Esta actitud excluyente surge del análisis que Wilson hace a los sistemas que involucran colisiones perfectamente elásticas, y explícitamente la manifiesta con las siguientes palabras:

> exclusionary attitude towards unwanted possibilities seems to me the only reasonable approach to the problems. […] we should excuse classical mechanics from any obligation to deal seriously with the close encounters of point particles. Accordingly, we simply erase such systems from the purview of particle mechanics [Wilson 1989: 523].

No es necesario detenernos más en la fundamentación de las colisiones elásticas instantáneas entre partículas o cuerpos rígidos (ya lo hemos hecho en la sección 4.2.5). Basta recordar que sí se ha realizado una reconstrucción matemática de tal idea bajo la teoría de distribuciones (que la penetrante crítica de Wilson no menciona). Además, e independientemente de esto, la actitud excluyente ante los sistemas indeterministas me parece poco interesante, pues en vez de enfrentar la problemática y proponer nuevos desarrollos y explicaciones, simplemente hace a un lado los especímenes incómodos. Después de todo, las características "indeseables" que se encuentran en ellos, como, por ejemplo, la perfecta elasticidad en una colisión, se encuentran en muchos otros sistemas que no son indeterministas (como cualquier colisión binaria unidimensional), y que con toda naturalidad reconocemos como newtonianos. Finalmente, cabe añadir, en contra de esta actitud excluyente, una cuestión que Weatherford señala y que resulta ser sumamente aguda:

> Suppose, then, we *ignore* the theoretical counter-examples. After all, they are extraordinarily artificial, and it seems unlikely that any such incident would ever occur. Then our hypothetical world of classical physics would be (let us assume) strictly deterministic. What would this *mean*? [Weatherford 1991: 195].

Weatherford no responde esta pregunta, pues la plantea retóricamente. No obstante, creo que el mensaje es claro. Semejante mundo hipotético (clásico) incluye un postulado, entre aquellos que conforman la mecánica newtoniana, que ordena la exclusión de tales procesos. Pero esto es aceptar el determinismo en los sistemas propios de la mecánica clásica porque queremos que haya determinismo; es aceptar el determinismo bajo un *fiat* (después de todo, si el determinismo es un postulado más, reconocerlo es algo trivial).[239] Por el contrario, lo que en este trabajo se defiende es que, bajo la teoría que

[238] Lo sugiere con las siguientes palabras: "My point is simply that accepting classical mechanics as indeterministic will require a considerable mathematical recasting of the entire edifice, not the mere acknowledgement of a breakdown" [Wilson 1989: 522].

[239] El cumplimiento de la condición de Lipschitz, que nos asegura que para una ecuación diferencial existe una única solución, y por tanto que la trayectoria que describe es determinista, es aceptado por algunos como parte de la mecánica clásica actual (por ejemplo, por Arnold [1989: 8]). Sin embargo, la inmensa mayoría de los textos ni siquiera la mencionan. Norton hace una apreciación importante sobre ella: "Since it [Lipschitz condition] is only sufficient, it may be too strong" [Norton 2008 (2006): 791]. O en otras palabras, al imponer la condición de Lipschitz podríamos estar excluyendo sistemas con fuerzas que no la cumplen pero que tampoco originan ningún tipo de indeterminismo. ¿Por qué habríamos de excluir también dichos sistemas (si existieran) cuando son deterministas? En la misma línea, Zimba señala que el determinismo en principio no ordena una suavidad como la impuesta por la condición de Lipshitz: "I don't think they [mathematicians] can be correct in saying that the smoothness conditions of their treatises are mandated by observed facts about determinism" [Zimba 2008: 427]. Dándole la razón, Zak [1994 y 1996] muestra que "in many cases the [Lipschitz] condition is not compatible with the physical nature of motions" [Zak 1998: 1183]. En cuanto a las supertareas newtonianas, Alper y Bridger [1999: 332-3] explican que algunas de ellas (por ejemplo la auto-excitación de TRST1), no cumplen la

ahora conocemos como mecánica newtoniana, una teoría que constituye un modelo para el movimiento de los objetos, el determinismo no es una consecuencia de las leyes y asunciones que en conjunto modelan tal movimiento.

Este es el talante que seguiremos en el resto del presente capítulo (así como del resto del trabajo), bajo el que buscaremos comprender las diversas fuentes del indeterminismo en las supertareas newtonianas.

5.2. Velocidades sin límite y límite para el espacio entre partículas: un primer acercamiento a las fuentes del indeterminismo

El primer acercamiento a las fuentes del indeterminismo o a los mecanismos responsables de la emergencia del indeterminismo en los sistemas ST1 y ST3, fue hecho por Earman y Norton. En primer lugar, indican que cada proceso puede llevar a cabo una supertarea gracias a un mecanismo, distinto en cada caso. ST1 se lleva a cabo gracias a que no hay un límite inferior para el tamaño de las cuerpos, a que el tamaño de cada cuerpo decrece sin ningún límite; es decir, dado el tamaño d_0 de P_0 (supongamos que es una esfera de diámetro d_0)[240], siempre hay un número real h tal que $0 < h < d_0$, lo pequeño que se quiera, junto con un natural n tal que cada diámetro d_n, d_{n+1}, d_{n+2}, d_{n+3}, ... de las esferas P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, … es menor a h. Por otro lado, ST3 se lleva a cabo gracias a que no hay un límite superior en las velocidades que pueden tomar los cuerpos, es decir, a que no hay un tope de velocidad que los cuerpos no puedan sobrepasar. La magnitud de la velocidad de cualquier partícula puede tomar un valor tan grande como se quiera. Ambos mecanismos los presentan de la siguiente manera:

> In order for these infinitely many collisions to realize a supertask, the rate at which they occur has to be accelerated so that infinitely many are completed in a finite time. The mechanism of this acceleration is essential to the conversion of a task into a supertask and it differs essentially in Laraudogoitia's two cases. In the example of Laraudogoitia [1997] [ST3], the rate of these collisions is accelerated by allowing there to be no upper bound on the velocities of the bodies. Thus the time between successive collisions can decrease without limit. In the case of Laraudogoitia [1996] [ST1], the rate of collision is accelerated by employing bodies with no lower limit to their size so that infinitely many can be enclosed within a finite volume of space. Thus the distances to be covered by the bodies between successive collisions can decrease without limit and the infinity of collisions be completed in a finite time– and this without arbitrarily great speeds [Earman y Norton 1998a: 124].

Bajo esto, Earman y Norton concluyen que la fuente del indeterminismo en cada uno de los casos es distinta una de otra. Cada una involucra los mecanismos recién mencionados con los que la supertarea se ejecuta con éxito:

---

condición de Lipschitz. No hay que irse tan lejos, cualquier colisión binaria perfectamente elástica la viola. Pero una colisión elástica instantánea es una idealización totalmente admisible.

[240] En el planteamiento original de ST1 se habla de partículas puntuales, pero bien puede replantearse suponiendo que cada cuerpo P_{n+1} tiene un tamaño menor que el cuerpo P_n de tal manera que la infinidad de cuerpos ocupen un lugar finito. Por ejemplo, que cada cuerpo P_n ($n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$), incluso con el mismo estado inicial, sea una esfera rígida de diámetro $d_n = 1/2^{n+1}$. Así las cosas, la supertarea se realizaría antes que lo indicado en el planteamiento original.

> We point out that the sources of the indeterminism are rather different in the two cases—one involves unbounded particle velocities, the other involves particles with no lower bound to their sizes [Earman y Norton 1998a: 123].

Se aprecia aquí un apego por parte de Earman y Norton a las teorías más exitosas de nuestro tiempo. Todo indica que lo que tienen en mente es que no debe resultar extraño que el indeterminismo esté presente en sistemas con características que los excluyen de la modelización bajo teorías más exitosas que la mecánica clásica. Un sistema que no tiene un límite superior para las velocidades es un sistema que no está permitido modelar bajo la mecánica relativista. De la misma manera, no nos debería extrañar el indeterminismo presente en un sistema que carece de un límite inferior para el tamaño de las partículas, cuando, por eso mismo, dicho sistema no se puede modelar bajo la mecánica cuántica.[241] No obstante, como se verá en las siguientes secciones de este capítulo, los mecanismos del indeterminismo de estas supertareas en mecánica clásica van mucho más allá de los aspectos que la hacen una teoría falsa o menos exitosa.

Ante la contribución de Earman y Norton, se puede hacer una clasificación de los mecanismos del indeterminismo presente en estos sistemas en dos tipos, tal como lo hace Pérez Laraudogoitia:

> the underlying mechanisms responsible for indeterministic behaviour. According to the authors, such mechanisms are of two types, mentioned in the titles to their sections 2 ('Supertasks that depend on there being no upper limit to velocities') and 3 ('Supertasks that depend on there being no lower bound to the size of the bodies') [Pérez Laraudogoitia 1999a: 137].

Sin embargo, esta clasificación es deficiente. Pérez Laraudogoitia encuentra un fallo: ST1 (la supertarea que supuestamente depende de la falta de un límite inferior para el tamaño de los cuerpos) puede replantearse de tal manera que se imponga un límite inferior al tamaño de los cuerpos, ocupando así un espacio infinito, pero obteniendo exactamente el mismo comportamiento. Este es precisamente el caso del modelo presentado en [Pérez Laraudogoitia 1997b] y que se vuelve a describir en [Pérez Laraudogoitia 1999a: 138]. Dicho modelo, que llamamos ya ST1P en la sección 4.2.7 (y al que también se hace referencia en la nota 132), es una sencilla modificación de ST1. En él, cada una de las partículas son consideradas esferas rígidas de un mismo diámetro d, cuyo centro está siempre posicionado en el eje x. En el estado inicial, el centro de P_1 está $d + ½$ a la izquierda del centro de P_0, el centro de P_2 a $d + ¼$ a la izquierda del centro de P_1 y, en general, el centro de P_{n+1} se encuentra $d + 1/2^{n+1}$ a la izquierda del centro de P_n (con $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$). Así, como las colisiones son perfectamente elásticas, una vez que P_0 colisione con P_1, ST1P se llevará a cabo en el mismo tiempo

[241] No es difícil comprobar que esta intuición, por parte de Earman y Norton, está históricamente arraigada: "Until the beginning of the twentieth century, Newton's laws were completely aplicable to all well-known situations. The difficulties arose when these laws were applied to certain definite situations: (a) to very fast moving objects (objects moving with speeds approaching the speed of light) and (b) to objects of microscopic size such as electrons in atoms. These difficulties led to modifications in the laws of Newtonian mechanics: (a) to the formulation of the special theory of relativity for objects moving with high speeds, and (b) to the formulation of quantum mechanics for objects of microscopic size. The failure of classical mechanics in these situations is the result of inadequacies in classical concepts of space and time" [Arya 1998: 2]. Por su parte, no hay duda de que ésa es la intuición que se encuentra en el fondo de la clasificación hecha por Earman y Norton. Queda patente cuando hablan de la carencia de límite inferior en el tamaño de los cuerpos: "Any matter theory that admits such bodies will admit pathologies" [Earman y Norton 1998a: 129].

que ST1 (siempre y cuando, por supuesto, la velocidad v inicial de P_0 sea la misma para ambos casos).

Está claro, pues, que la supertarea ST1 no depende de la carencia de un límite inferior al tamaño de las partículas y, por lo mismo, el indeterminismo que dicho sistema presenta es independiente de tal peculiaridad. Ante esto, Pérez Laraudogoitia propone modificar la clasificación de la siguiente manera:

> We can now classify supertasks generating indeterminism into two sorts:
> a) those which depends on there being no upper limit to velocities, and
> b) those which depend on there being an upper limit to the distance between bodies [Pérez Laraudogoitia 1999a: 138].

Esta clasificación merece dos comentarios importantes.

En primer lugar, es preciso notar que *todas* las supertareas indeterministas basadas en colisiones binarias en el espacio unidimensional son de tipo b).[242] En supertareas como ST3, la falta de un límite superior en las velocidades no es una condición suficiente ya que, aunque un sistema posea esta característica, basta suponer que las partículas están lo suficientemente alejadas como para que no logren llegar a término una supertarea. Lo que quiere decir que la distancia entre los cuerpos necesita tener un límite superior, o sea, que también sean sistemas de tipo b). Esto puede ilustrarse fácilmente modelando una variación para ST3, y que aquí llamaremos ST3M. Asumamos, pues, que un número infinito de partículas P_n ($n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) con masas iguales se encuentran en el espacio unidimensional. A $t = 0$, P_1 se encuentra en $x_1 = 0$ con una velocidad $v_1 = -1$, P_2 se encuentra en $x_2 = 1$ con una velocidad $v_2 = -2$, P_3 se encuentra en $x_3 = 5$ con una velocidad $v_3 = -4$ y, en general, P_{n+1} se encuentra en $x_{n+1} = n \cdot 2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ viajando con una velocidad $v_{n+1} = -2^n$. Este estado inicial es similar al estado inicial de ST3, con la única diferencia[243] de que las posiciones de las partículas son distintas. El hecho de que en el espacio (aunque sea unidimensional) haya tanto espacio nos permite modelar esta variación, posicionando a las partículas de tal manera que la distancia entre ellas es mayor que la distancia entre las correspondientes partículas de ST3. Esto hace que la evolución sea por completo diferente. A un tiempo $t = 1$ P_1 colisionará con P_2 en $x = -1$, intercambiando velocidades y así convirtiéndose P_1 (ahora con $v_1 = -2$) en la prolongación de P_2. En el tiempo $t = 2$, P_1 colisionará con la prolongación de P_3 en $x = -3$ convirtiéndose en dicha prolongación y adquiriendo una velocidad $v_1 = -4$. A $t = 3$, P_1 colisionará con la prolongación de P_4 en x = –7, convirtiéndose en ella y adquiriendo una velocidad $v_1 = -8$. En general, a un tiempo $t = n$, P_1 colisionará con la prolongación de P_{n+1} (que viaja con $v_{n+1} = -2^n$) en $x = -\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$, obteniendo entonces una velocidad $v_1 = -2^n$. Este proceso continúa con este comportamiento durante todo tiempo $t > 1$. A pesar de que el modelo consiste en un número infinito de partículas distribuidas en un espacio infinito y que no tiene un límite para sus velocidades, el proceso no termina jamás y nunca se logra ejecutar una supertarea. Por lo tanto, ST3 también depende de que exista un límite superior para la

[242] Esta aclaración no la hace Pérez Laraudogoitia, aunque la enunciación de su clasificación no lo descarta. Por su parte, Eaman y Norton invitan a pensar lo contrario cuando comentan: “We point out that the sources of the indeterminism are rather different in the two cases” [Earman y Norton 1998a: 123].

[243] Pérez Laraudogoitia [1997: 51] indica sólo la magnitud de las velocidades cuando las expresa numéricamente mientras que la dirección la especifica comentando que todas viajan hacia la izquierda. Aquí se prefirió indicar la dirección con el signo que antecede el número que indica la magnitud.

distancia que separa los cuerpos. Y claro está, el modelo (ST3M) no genera indeterminismo. El mismo tipo de modificación puede hacerse con cualquier sistema: alejar lo suficiente a las partículas unas a otras de tal manera que nunca se ejecute satisfactoriamente una supertarea. Por supuesto, los sistemas extendidos a lo largo de todo un espacio unidimensional infinito, como es el caso de ST3, necesitarán carecer de un límite superior para las velocidades, aunque por ello no dejen de ser de tipo b).

En segundo lugar, aunque el hecho de que toda supertarea indeterminista sea de tipo a) o de tipo b) no implica que toda supertarea de tipo a) o de tipo b) sea indeterminista, es preciso decir que aquí Pérez Laraudogoitia expresa que toda supertarea newtoniana, ya sea de tipo a) o de tipo b), es indeterminista.[244] Esta idea, que sólo con los elementos que hasta ahora hemos dado está injustificada, podría resultar verdadera. Sin embargo, asumirla como verdadera tiene un grave inconveniente, y es que conduce a una comprensión del indeterminismo un tanto superficial. Si es verdad que todas las supertareas newtonianas son sistemas indeterministas, ¿qué nos asegura que los mecanismos para ejecutar una supertarea satisfactoriamente son los mismos que la hacen indeterminista? Decir que el indeterminismo generado por estas supertareas depende de los mecanismos referidos en a) o en b) es un paso trivial que nos ayuda poco a la hora de querer entender el indeterminismo en estos sistemas. Tan trivial como decir que la presencia del cáncer de próstata en un ser humano depende de que dicho ser humano sea hombre (o sea, que tenga próstata) y que la presencia del cáncer de mama en un ser humano depende de que el ser humano sea mujer (es decir, que tenga glándulas mamarias). Esto no nos ayuda en nada a comprender la presencia del cáncer en las personas. De la misma manera, decir que el indeterminismo en las supertareas newtonianas depende de las características que la hacen supertarea, poco nos ayuda a comprender la presencia del indeterminismo en cada supertarea. Peor aún, entender el indeterminismo de estos sistemas en términos de los mecanismos que posibilitan la ejecución de la supertarea nos obstaculiza encontrar una fuente del indeterminismo –que quizá sea la misma– en procesos que nunca ejecutan una supertarea. De hecho, como veremos a continuación en el resto del capítulo, los mecanismos responsables del indeterminismo son más sutiles que las condiciones para que se logre ejecutar una supertarea.

5.3 La fuente del indeterminismo en ST2 y ST3

La falta de un límite superior para las velocidades, por supuesto, está estrechamente relacionada con el indeterminismo de supertareas como ST3. Sin ella, el sistema extendido en un espacio infinito no podrá ni siquiera ejecutar una supertarea, y difícilmente sería un sistema indeterminista. Sin embargo, como acabamos de ver en la sección anterior, dicha carencia de un límite superior tampoco es una garantía para que

[244] Así lo explicita en el pasaje que transcribo a continuación, y que pertenece a una justificación que Pérez Laraudogoitia brinda de su clasificación: “if the number of such bodies is finite no problem arises and the evolution of the system is perfectly deterministic in any finite interval of time; *this is in fact the paradigm of determinism*. So the number of bodies must be infinite. This in itself, is, however, *not enough*, […]. *What is required*, then, is that there exists a finite interval of time $\Delta_\alpha t$ in which the decomposition described above is not feasible, that is, an interval in which all the bodies belonging to some (at least one) not necessarily proper infinite subset S’ of S end up causally connected” [Pérez Laraudogoitia 1999a: 139, mis cursivas]. No encuentro otra interpretación de este pasaje que la siguiente: la condición suficiente que necesitamos para que el indeterminismo aparezca en un sistema infinito de partículas, es que éstas se encuentren causalmente conectadas en un tiempo finito de tal manera que ejecuten una supertarea.

se ejecute la supertarea. La falta de un límite superior para las velocidades es una condición necesaria, mas no suficiente, para que sistemas como ST3 ejecuten satisfactoriamente una supertarea que resulta ser indeterminista.

Sin duda alguna, es interesante conocer las condiciones suficientes y necesarias para que un sistema dado sea indeterminista. Pero más interesante es conocer el motivo por el cual dicho sistema es indeterminista; comprender, y *ver*, por qué el sistema es indeterminista. Dicho motivo, la fuente genuina, o el mecanismo responsable genuino, requerirá de ciertas condiciones para que se dé. Para dilucidar dicha fuente es conveniente mirar y analizar el estado en el que los sistemas presentan la bifurcación de su historia. En el caso de ST3, tenemos que mirar más bien el proceso revertido en el tiempo, TRST3. El momento de la bifurcación es el estado inicial, correspondiente con un espacio unidimensional totalmente vacío de materia. Puede evolucionar de dos formas: continuar con el espacio vacío indefinidamente o ejecutar la reversión temporal de ST3, o de cualquier otro modelo que presente como estado final un espacio unidimensional completamente vacío. En realidad, basta que desaparezca una sola partícula para que el sistema sea indeterminista. Planteado de forma general, si un sistema S_a presenta un proceso Q_a en el cual una partícula P_a desaparece en el momento t_f (el primer instante en el que la partícula ya no está), entonces su reversión temporal, TRQ_a, ocurre en un sistema indeterminista. Su estado inicial puede evolucionar de dos maneras: una, que el sistema evolucione sin que aparezca la partícula P_a; la otra, que ocurra precisamente TRQ_a, es decir, que el sistema evolucione con la aparición de P_a.

El indeterminismo en esta situación, claramente, se genera gracias a la aparición espontánea de partículas. Bien, ¿por qué aparecen? Porque en el proceso directo desaparecen. ¿Y cómo es que en proceso directo desaparecen? En la sección 3.2.2 ya se presentó el argumento: porque aceptar que tales partículas se encuentran en alguna posición recae en una contradicción con la continuidad de sus trayectorias. Como hay un instante a partir del cual ninguna posición del espacio es coherente con su trayectoria, las partículas en ese momento desaparecen.

El mecanismo por el cual desaparece una partícula, y por el cual este tipo de sistemas son indeterministas, ahora es claro:

> α) el movimiento de una partícula tal que en cada subintervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1})$ (con $n \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$), cuya magnitud es el correspondiente término de la serie convergente $\sum_{n=0}^{\infty}(t_{n+1} - t_n)$, la partícula cubre una distancia mayor a un límite inferior s.

En el caso de ST3, esto ocurre gracias a que al menos una partícula adquiere velocidades cada vez mayores, dentro de un intervalo de tiempo finito, en una proporción tal que toda distancia que la partícula cubre con cada velocidad nueva tiene un mismo límite inferior. Como ya hemos visto en la sección anterior, para que esto ocurra no basta, aunque sea necesario, que el sistema no tenga un límite superior en las velocidades, sino además, que las partículas estén espacialmente dispuestas para que la(s) partícula(s) que desaparece(n) adquiera(n) nuevas velocidades en la proporción debida y el tiempo debido.

¿Qué otras condiciones deben cumplir sistemas como ST3 para que presenten la fuente α)? A primera vista existe la tendencia a pensar que un espacio infinito también es una condición necesaria. Earman y Norton intentan mostrar que el indeterminismo generado por esta fuente no depende de la infinidad del espacio.[245] Para ello proponen una variación bidimensional de ST3, que aquí llamaremos ST3EN. Consiste en una esfera negra (P_1) que adquiere un movimiento oscilatorio por colisionar sucesivamente con una infinidad de esferas blancas (P_{n+1}, con $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$). (El “color” en este modelo es irrelevante para el resultado que quiere mostrar; es simplemente una etiqueta supuesta de las esferas para distinguir el conjunto al que pertenecen). En el estado inicial, a un tiempo $t = -1$, el centro de la esfera negra P_1 se encuentra en la coordenada $(0, -1)$ con una velocidad $\boldsymbol{v} = (0, 1)$. De $t = 0$ a $t = 1$ colisionará una infinidad de veces, para modificar la componente x de su velocidad y mantener la componente y, con las esferas blancas que se aproximan por ambos costados (la evolución de esta trayectoria se representa gráficamente en la figura 6.1): con la primera, P_2, colisionará a $t = 0$ cuando su centro esté en $(0, 0)$, con la segunda, P_3, a $t = ½$ cuando su centro se encuentre en $(1, ½)$, con la tercera, P_4, a $t = 3/4$ en $(0, 3/4)$, con la cuarta, P_5, a $t = 7/8$ en $(0, 7/8)$, y en general, colisionará con P_{2n} a $t = 1 - 1/2^{2(n-1)}$ en $(0, 1 - 1/2^{2(n-1)})$ y con P_{2n+1} a $t = 1 - 1/2^{2n-1}$ en $(1, 1 - 1/2^{2n-1})$. Esto quiere decir que:

> The initial velocities and positions of the white spheres are set so that this y-velocity of the black sphere is unaltered but its x-velocity rises according to the following schedule:
>
> to +2 after the collision with the white sphere 1 [P_2]
> to –4 after the collision with the white sphere 2 [P_3]
> to +8 after the collision with the white sphere 3 [P_4]
> to –16 after the collision with the white sphere 4 [P_5]
> etc.
>
> Since the black sphere must cover an x-distance of unity between collisions, it follows that the time to complete all collisions is just $1 = ½ + ¼ + 1/8 + 1/16 + \ldots$ If the collision with the white sphere 1 is at $y = 0$, $t = 0$, then the x-coordinate of the black sphere oscillates increasingly rapidly between 0 and 1 during the course of the time $t = 0$ to $t = 1$ with its value becoming indeterminate at $t = 1$ [Earman y Norton 1998a: 127].[246]

Este estado final que Earman y Norton atribuyen a su proceso es incorrecto, pues concluyen que la posición de la partícula negra es indeterminada, y no que desaparece. Pero, repito, la partícula desaparece en el tiempo $t = 1$ porque, si suponemos que entonces se encuentra en alguna posición, caemos en contradicción con la continuidad de la trayectoria de la partícula. La posición de la partícula a $t = 1$ sería indeterminada en caso de que en ese instante más de una posición fuera consistente con toda su trayectoria anterior. Claramente, éste no es el caso.[247]

---

[245] Recuérdese que ellos no se refieren a la fuente α), sino a la falta de un límite superior en las velocidades: “spatial infinity is inessential in that once there is no upper bound to velocities, indeterminism can arise without any communion with spatial infinity” [Earman y Norton 1998a: 125]. Véase también el apartado 5.2.

[246] Hay un notable distanciamiento de este modelo con ST3. ¿Por qué considerarlo como una variación de ST3? Porque lo es. En realidad, es una variación de una variación de ST3. Esta última consiste en la misma ST3 con las siguientes modificaciones: P_1 tiene una velocidad $\boldsymbol{v}_1 = (0, 1)$, cada una de las partículas P_n restantes se encuentra en una coordenada y distinta (por ejemplo $y = 1 - 1/2^n$) pero avanza con la velocidad de ST3 de tal manera todas colisionan sucesivamente con P_1 (imprimiéndole una velocidad $\boldsymbol{v}_1 = (v_{x,n+1}, 1)$) antes de $t = 1$ (confróntese [Earman y Norton 1998a: 125-6]). Así, ST3EN es este mismo proceso sólo que con las partículas pares viajando desde la izquierda de tal manera que la partícula negra adquiere el movimiento oscilatorio descrito.

[247] Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper explican con claridad la distinción entre desaparición e indeterminación en este tipo de procesos: “It is important to note that “disappearance” must be distinguished from “indeterminateness”. Disappearance means that the particle is nowhere, i.e., it no

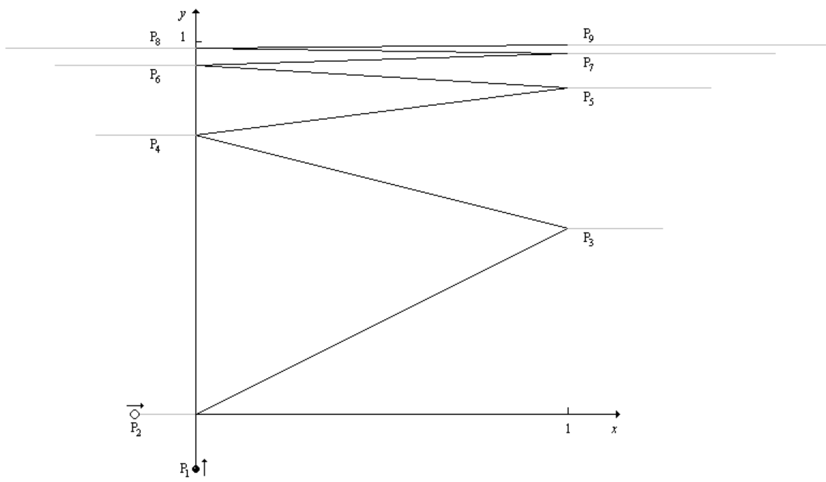


Figura 6.1. ST3EN antes de que ocurra la primera colisión. Se muestran la partícula negra y la primera partícula blanca previamente a la colisión entre ambas. Se aprecia también las proyecciones de las trayectorias de las primeras partículas blancas (en gris), así como la proyección de la trayectoria oscilatoria de la partícula negra ante las primeras colisiones.

Por otro lado, ST3EN no cumple rigurosamente lo que Earman y Norton buscan, ya que dicho modelo sí requiere de un espacio infinito. De la descripción de la evolución de velocidades recién citada es fácil ver que la velocidad de cada esfera P_{2n} antes de que colisione con la esfera negra es $v_{2n} = +2^{2n-1}$ y de cada esfera P_{2n+1} es $v_{2n+1} = -2^{2n}$. Para hacer las cosas más simples, supongamos que las esferas son partículas puntuales (esta modificación no afecta en nada a la idea que a continuación se quiere plasmar). Así, para que se efectúen las colisiones según la descripción de Earman y Norton, en el tiempo $t = 0$, por ejemplo, cada una de las partículas P_{2n} tendrá que encontrarse en la coordenada $(2 - 2^{2n-1}, 1 - 1/2^{2(n-1)})$, mientras que cada una de las partículas P_{2n+1} tendrá que estar en $(2^{2n} - 1, 1 - 1/2^{2n-1})$. Se observa aquí que las componentes x del conjunto infinito de partículas blancas requieren que el espacio carezca de un límite en su tamaño, al menos en su dimensión horizontal x. Es claro, pues, que el modelo de Earman y Norton requiere de un espacio infinito. No obstante, la motivación de Earman y Norton al querer mostrar que este tipo de indeterminismo no depende de un espacio infinito apunta a dejar claro que la aparición de las partículas desde el "infinito espacial" (o el "escape al infinito", en el proceso directo) no es un mecanismo esencial en el indeterminismo de los procesos que presentan α). Dicha motivación se aprecia en el siguiente comentario a ST3EN:

> Indeterminism arises in this supertask. The positions and velocities of all the spheres prior to $t = 1$ fail to specify the position of the black sphere at $t = 1$. However, the indeterminism does not arise from the spontaneous appearance of particles of disturbances *at spatial infinity* [Earman y Norton 1998a: 127-8, mis cursivas].[248]

Este aspecto sí que es mostrado con el modelo ST3EN. A pesar de que hay un aumento progresivo y sin límites de la magnitud de la velocidad de la esfera negra, no hay

longer exists. Indeterminateness, on the other hand, means that the particle may be somewhere, but we cannot determine what its position is" [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 176].

[248] Lo podemos apreciar también en el siguiente pasaje, anterior a la presentación de sus variaciones de ST3: "The indeterminism arises from bodies, particles or excitations spontaneously materializing *from spatial infinity*" [Earman y Norton 1998a: 125, mis cursivas].

manera de ver que ésta escapa al infinito. Ahora bien, cabe comentar nuevamente (ya se hicieron algunos comentarios al respecto en la sección 3.2.3), y dejar claro que lo que sucede cuando una partícula "escapa al infinito", como en ST3, es exactamente lo mismo que sucede cuando desaparece, como en ST3EN. En ambos casos la(s) partícula(s), en el instante terminal, no se encuentra(n) en ningún lugar en el espacio. Esto de ninguna manera implica que la(s) partícula(s) se adentre(n) en alguna región de una nueva dimensión. En el caso de los "escapes al infinito", como el límite de la posición de la partícula en dicho instante es infinito, intuitivamente se tiende a pensar que la partícula alcanza el infinito, como si éste fuera una región real (en el mundo de la mecánica clásica) exterior al espacio. Pero tal región no es una región reconocida por la mecánica clásica. No por lo pronto. Llamar "escape al infinito" a estos casos no es más que una *façon de parler* cuando el límite de la trayectoria tiende a infinito.

Debe quedar claro, además, que la fuente α) no necesariamente requiere de un espacio infinito, pese a que ST3EN no es un modelo que lo muestre. La muestra la tenemos en la supertarea ST2, que claramente presenta α) y se desarrolla durante todo momento, y en cualquier dirección temporal, en una región finita del espacio. Sin embargo, y sin lugar a dudas, ST2 depende de las auto-excitaciones de TRST1, pues no hay otro modo de que las partículas en dicho sistema adquieran velocidades cada vez mayores y sin ningún límite, lo que implica que, para este caso, la fuente α) depende a su vez de la fuente de ST1. Esta fuente la trataremos a profundidad a partir del apartado 5.5. Por lo pronto, es fácil ver que la fuente de ST1 no es ni necesaria ni suficiente para que un sistema presente α): no es necesaria porque ST3 presenta α) prescindiendo de las autoexcitaciones de TRST1 o ST2; no es suficiente precisamente porque TRST1, que es indeterminista, en ningún momento presenta α).

Además, la fuente α) tampoco necesita de una masa total infinita, aunque el número de partículas sea infinito. Para verlo, basta replantear ST3EN de tal manera que las masas de las bolas blancas decrezcan monotónicamente para formar los términos de una serie convergente. Así, a cada partícula con su correspondiente masa le corresponderá una posición concreta y una velocidad concreta para que la bola negra tenga el movimiento original descrito en ST3EN.

Ante este panorama, pareciera que, aunque haya un conjunto, llamémosle CN1, de condiciones necesarias que en sí es suficiente para el cumplimiento de α), éste podría no ser exclusivo, es decir, podría haber otro conjunto de condiciones necesarias, llamémosle CN2, distinto de CN1 que en sí también sea suficiente para que se presente α). Independientemente de si éste es el caso para la fuente α), podemos decir, sin temor a equivocarnos, que hay dos condiciones necesarias para que una supertarea newtoniana sea indeterminista a partir de α); es decir, en caso de que haya unas condiciones CN1 y otras CN2, habría al menos dos condiciones necesarias pertenecientes a CN1∩CN2. Primero, es necesario que las velocidades que a los cuerpos les son permitidas tomar carezcan de un límite superior. Segundo, es necesario que haya un límite superior para la distancia entre las partículas.

Por otro lado, aunque escape a los intereses de este trabajo (por ser sistemas en los que las partículas interactúan bajo la ley newtoniana de gravitación $1/r^2$), cabe comentar brevemente que la fuente α) también puede presentarse en sistemas con un número finito de partículas. Lo que deja claro que un número infinito de partículas no es una condición necesaria para que un sistema presente α). Un ejemplo es el sistema modelado por Mather y MacGhee [1975], en el que cuatro partículas confinadas en un espacio unidimensional interactúan según la ley $1/r^2$. Dentro de un intervalo de tiempo finito, tres de las partículas "alcanzan" el infinito, una por un extremo y otras dos por el otro, mientras que la partícula restante colisiona una infinidad de veces oscilando entre las demás.[249] Además, las colisiones perfectamente elásticas tampoco son una condición necesaria para que surja el indeterminismo a partir de α). Xia [1992] proporciona un sistema en el que cinco cuerpos interactúan (también bajo la ley newtoniana $1/r^2$) sin colisionar jamás y en el que en un tiempo finito ocurren escapes al infinito.[250]

Vemos así que ciertas condiciones necesarias están condicionadas a ciertos tipos de sistemas. ST2, sin un número infinito de partículas, jamás presentaría indeterminismo a partir de α). Como acabamos de ver, éste no es el caso para el modelo de Mather y McGhee. La posesión de un número infinito de partículas es una condición necesaria para la emergencia del indeterminismo a partir de α) en ciertos sistemas, pero en otros no.

La búsqueda, pues, de las condiciones suficientes y necesarias para la presencia de alguna fuente del indeterminismo en nuestro sistemas, además de ser una tarea compleja, consta de la realización de una clasificación que probablemente nunca sea exhaustiva. Lo más importante para comprender el indeterminismo en las supertareas es conocer su fuente genuina en sus diversas manifestaciones. Entiendo como fuente genuina no sólo una condición suficiente ni un conjunto de condiciones necesarias que conjuntamente implican el indeterminismo, sino a la situación (o al conjunto de condiciones) que nos muestran e ilustran por qué un sistema es indeterminista. Explícitamente esto se ha hecho en esta sección. Aún así, no deja de ser relevante el conocimiento de las condiciones necesarias para que se presente dicha fuente, pues esto nos va a indicar las posibilidades de que tal fuente se manifieste en sistemas que pertenecen a mundos establecidos por otras teorías. En este sentido, la apreciación hecha por Earman y Norton sobre la necesidad de una carencia de un límite para las velocidades para que los sistemas sean indeterministas es relevante. Claramente, la teoría de la relatividad (especial y general) descarta la existencia de sistemas como ST2 y ST3, así como el tipo de indeterminismo generado por α). A pesar de su prestigio y del interés que suscita, esta teoría no es objeto de estudio en este trabajo.

En suma, hasta aquí podemos asegurar que para que la situación descrita por α) se presente, es necesario que el sistema no imponga un límite superior a las velocidades de los cuerpos, a la vez que imponga un límite superior a la distancia que separa unos cuerpos con otros.

---

[249] Al comentar estos sistemas, Earman y Norton también reconocen que hablar de “escapes al infinito” no es más que una forma de expresar que el límite que tienen las trayectorias es infinito, y no que las partículas se encuentran en una región que nos es un tanto inaccesible: “In the case of particles 1, 3, and 4, we have a ready answer to the question of where the particles went: 1 went to negative infinity; 3 and 4 went to positive infinity. But these infinities are not *bona fide* places in space. The notion that the particle 3 is “at spatial infinity” is an intuitively comforting fable that cannot bear scrutiny” [Earman y Norton 1998b: 244]. Sin embargo, cometen un error cuando especifican el lugar de las partículas a partir del instante en el que “alcanzan” el límite: “The correct answer to where are the particles at 12:00 PM is that their positions are indeterminate, or, more precisely, that the second condition of world line continuity fails to specify them” [Earman y Norton 1998b: 244]. Earman y Norton, claramente, concluyen que las partículas siguen en algún lugar en el espacio, aunque no sepamos decir cual. Pero ya hemos visto que la continuidad de las trayectorias no falla a la hora de especificar un lugar para las partículas. La continuidad de las trayectorias implica que las partículas no puedan ocupar ninguna posición.

[250] Describir estos modelos a detalle nos tomaría una gran cantidad de páginas, labor innecesaria para los objetivos que persigue este trabajo. Incluso, podemos encontrar que [Saari 2005], un libro consagrado al problema de los N-cuerpos, prescinde de tal descripción, comentando: “A complete and careful description of Xia’s construction would require a separate book” [Saari 2005: 170]). Explicaciones ilustrativas pueden encontrarse, para el modelo de Mather y McGhee, en [Earman 1986: 36] y, para el modelo de Xia, en todo [Saari y Xia 1995].

5.4 ¿Por qué es posible el indeterminismo en sistemas abiertos?

Comentando sistemas que presentan "escapes al infinito" (y concretamente, el modelo de Xia [1992]) Earman afirma que no podemos esperar que los sistemas abiertos sean sistemas deterministas:

> The time reverse of such a process is an example of "space invaders", particles appearing from spatial infinity without any prior warning. To put it crudely, you can't hope to have Laplacian determinism for open systems, and for the type of interaction under discussion, the entire universe is an open system [Earman 2004: 4].

Se aprecia que, en este caso, la noción de 'sistema abierto' apunta principalmente al espacio infinito, espacio que además de no tener un final por ninguno de sus extremos, no impone ninguna barrera a "influencias exteriores".[251] Pero insisto, los "invasores", las partículas que aparecen, no provienen de ninguna otra dimensión exterior (ni siquiera espacial) al espacio contemplado por estos sistemas.

Dejaré claro en esta sección que, para comprender el indeterminismo que puede surgir en algunos sistemas, la noción de 'sistema abierto' no se limita al espacio abierto. En términos más precisos, la situación que le da cabida al indeterminismo en estos sistemas consiste en que *la cadena causal es abierta*, situación que no necesariamente va acompañada de un espacio abierto. Para mostrarlo, atenderé a un argumento que intenta mostrar precisamente lo contrario: que la mecánica clásica es determinista debido a que la cadena causal que imponen sus leyes es infinita en ambos extremos (abierta en ambos extremos), hacia el pasado y hacia el futuro.

El argumento se debe a McAllister [2004: 198-9] y se puede plantear de la siguiente manera. En primer lugar, es necesario asumir (lo que es totalmente plausible y hasta natural) que cierto sistema tiene un estado en un instante. Un estado viene caracterizado por sus parámetros cinemáticos: las masas, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones.[252] En un determinado momento, pues, un sistema tiene el estado E. Ahora bien, supongamos que existe un estado IC_A (IC a partir de '*initial conditions*') anterior al estado E que junto con las leyes de la mecánica newtoniana LN determinan completamente el estado E. A su vez, existe un estado IC_B anterior a IC_A que junto con las leyes LN determinan completamente el estado IC_A. De igual manera, existe un estado IC_C anterior a IC_B que junto con las leyes LN determinan completamente el estado IC_B. Y así sucesivamente… A partir de estas premisas, McAllister concluye:

---

[251] Sí, Earman relaciona la 'apertura' espacial no solo con los extremos infinitos (lo que es técnicamente correcto), sino también con el libre acceso de invasores desde el "exterior" (lo que es intuitivamente favorable, pero que en sí es un error). Dos líneas adelante del pasaje transcrito en el texto principal, afirma que una de las formas para desterrar el indeterminismo en estos sistemas es "to impose boundary conditions at spatial infinity to rule out space invaders" [Earman 2004: 4]. En otro lugar sugiere exactamente lo mismo: "it is hopeless to try to establish determinism for a system which is not closed to outside influences." [Earman 1986: 33]. Como se acaba de explicar en la sección anterior, sistemas como ST2 muestran que los "invasores" del espacio pueden presentarse incluso en regiones confinadas. Es evidente también que para ST2 se puede considerar un espacio confinado cerrado, es decir, con una primera y una última posición, e incluso como un sistema físico cerrado, que no recibe influencias desde el exterior.

[252] Una concepción de estado, debo decir, que me parece acertada: "instantaneous values of the kinematical parameters – masses, positions, velocities, and accelerations – characterizing the state of a physical system" [McAllister 2004: 193].

> the causal chain is infinite in both directions. Newtonian physics admits no processes by which a physical system can arise from or vanish into nothing. This holds also for the physical system consisting of the universe in its entirety: notwithstanding Newton's personal conviction that the universe was created by God, such an event is forbidden by the laws of Newtonian physics [McAllister 2004: 199].

Aquí McAllister realiza una argumentación incorrecta, pues a partir de que una cadena causal sea infinita no se sigue que ésta deba extenderse a lo largo de la totalidad del tiempo, y por tanto no se puede concluir que un sistema no puede surgir *ex nihilo*. Por lo mismo, tampoco se puede concluir que un universo newtoniano no es contingente, o determinista.[253] Explicado brevemente, una cadena causal infinita completamente determinista puede ajustarse dentro de un intervalo de tiempo (a, b). Y de aquí no podemos concluir –a menos que lo asumamos, lo que haría de ésta una argumentación circular– que el estado en el tiempo $t = a$ determina completamente la cadena causal que tiene por delante.

Para que quede claro, miremos algunos ejemplos. TRST2 y TRST3 son sistemas adecuados para ilustrar esta situación. A partir de un espacio vacío surge la evolución revertida de ST2 o ST3, en donde cualquier estado que se quiera tomar de dichas evoluciones tiene detrás una cadena causal infinita que lo determina completamente. Veamos la cadena causal que antecede al estado final de TRST3 suponiendo que entonces el tiempo es $t = 0$. Tal estado corresponde al estado inicial de ST3 con las velocidades de las partículas revertidas: $v_n = 2^{n-1}$ (hacia la derecha) en $x_n = 2x_{n-1} + n - 2$ ($x_1 = 2$). Tal estado (E) tiene un evento antecedente (IC_A) que junto con las leyes *LN* lo determinan completamente –en realidad tiene muchos estados antecedentes que lo determinan completamente (cada posición de las partículas con sus correspondientes parámetros dinámicos: una infinidad), pero para fines ilustrativos el más adecuado es la colisión–, a saber, la colisión de p_1 (que viajaba con $v_1 = 2$) con p_2 (que viajaba con $v_2 = 1$) en $x = 0$ y $t = -2$, en donde intercambian velocidades. Este estado (IC_A) también tiene un evento antecedente (IC_B) que junto con las leyes *LN* lo determinan completamente: la colisión de p_1 (que viajaba con $v_1 = 4$) con p_2 (que viajaba con $v_2 = 2$). La secuencia de colisiones deterministas entre p_1 y p_2 (y entre cada par de partículas contiguas) que anteceden al estado E es infinita. Claramente, en este proceso, hay una secuencia de estados que junto con las leyes *LN* forman una cadena causal infinita completamente determinista que se limita al intervalo de tiempo (–3, 0). Pero, como bien sabemos, el estado a $t = -3$, que se corresponde con un espacio unidimensional vacío de materia, no determina junto con las leyes *LN* la cadena causal que acabamos de describir.

Esta situación también la podemos encontrar en sistemas más sencillos y que no presentan evoluciones que provienen o terminan en la desaparición de sus entidades. Un ejemplo sumamente ilustrativo de este tipo de sistemas es el domo de Norton, que él mismo modela de la siguiente manera:

---

[253] Es justo decir que este paso argumentatativo no es en sí el argumento completo de McAllister. Tras esta subconclusión, que entonces toma como premisa, muestra "(i) that no contingency is introduced into the Newtonian universe by the initial conditions of physical systems in the universe, and (ii) that the claim that the Newtonian universe as a whole has contingent properties leads to incoherence" [McAllister 2004: 191]. Estoy de acuerdo que estas conclusiones se siguen de sus premisas. Sin embargo, como se muestra en el texto principal, la premisa que asume una cadena causal extendida a lo largo de la totalidad del tiempo infinito no está justificada.

> The dome […] sits in a downward directed gravitational field, with acceleration due to gravity g. The dome has a radial coordinate r inscribed on its surface and is rotationally symmetric about the origin $r = 0$, which is also the highest point of the dome. The shape of the dome is given by specifying h, how far the dome surface lies below this highest point, as a function of the radial coordinate in the surface, r. For simplicity of the mathematics, we shall set $h = (2/3g)r^{3/2}$. (Many other profiles, though not all, exhibit analogous acausality). A point-like unit mass slides frictionlessly over the surface under the action of gravity. The gravitational force can only accelerate the mass along the surface. At any point, the magnitude of the gravitational force tangential to the surface is $F = \mathrm{d}(gh)/\mathrm{d}r = r^{1/2}$ and is directed radially outward. There is no tangential force at $r = 0$. That is, on the surface the mass experiences a net outward directed force field of magnitude $r^{1/2}$. […] Equation (3)
>
> $$[r(t) = (1/144)\,(t - T)^4 \quad \text{for } t \geq T$$
> $$= 0 \quad \text{for } t \leq T$$
>
> where $T \geq 0$ is an arbitrarily chosen constant] describes a point mass sitting at rest at the apex of the dome, whereupon at an arbitrary time $t = T$ it spontaneously moves off in some arbitrary radial direction [Norton 2003: 9].

El indeterminismo es evidente. *T* puede tomar cualquier valor mayor a cero. La caída de la masa deslizante, si es que llega a ocurrir, puede retrasarse indefinidamente. Pese a ello, es sencillo ver que una vez que la bola cae, hay una cadena causal infinita consistente con el indeterminismo. Asumamos un estado *E* en el cual la bola está ya deslizándose sobre el domo. Llamemos *D*, por otro lado, al estado anterior a *E* en el que la bola se encuentra, por un último instante, en la cima del domo experimentando una fuerza nula. Así las cosas, entre el estado *E* y el estado *D* hay otro estado IC_A que junto con las leyes *LN* determinan el estado *E*. De la misma manera, entre el estado IC_A y el estado *D* hay un estado IC_B que junto con las leyes *LN* determinan el estado IC_A. Y así sucesivamente, podemos especificar, con un talante dicotómico reversivo, una sucesión infinita de estados conectados causalmente, todos ellos posteriores a *D* y que desembocan en *E*.[254] Es claro, pues, que la existencia de una cadena causal infinita determinista entre estados no implica la inexistencia de un estado que junto con las leyes de la mecánica clásica sea incapaz de determinar la cadena causal infinita que en cierta evolución tiene por delante.[255] Un mismo estado puede ser el resultado de más de una cadena causal infinita, y por lo tanto la reversión temporal de dicho estado no podrá determinar por cuál de los procesos revertidos evolucionar.

---

[254] Korolev critica el indeterminismo del domo notando que no cumple la condición de Lipschitz. Concluye que esto se debe a que se asume un domo totalmente rígido: "The only way to generate non-Lipschitz spontaneous motion of the mass down the dome is to have an absolutely rigid dome; any diversion from actual infinity in the elasticity coefficient would result in the mass staying on top forever" [Korolev 2007: 955]. La rigidez total, no obstante, no es una asunción injustificada, pues existen una gran cantidad de sistemas que también la adoptan y que son deterministas (el suelo o los planos inclinados normalmente se idealizan asumiendo una rigidez absoluta). Por otro lado, Malament [2008: 804-15] profundiza en la singularidad de la cima del perfil del domo, sin mantener una posición frontalmente contraria. A esto, Norton advierte que: "while the surface admits a curvature singularity at its apex, the tangent to the surface is everywhere defined. Hence it is more differentiable than another surface routinely appearing in Newtonian texts, a tabletop with a sharp edge formed by the intersection of two flat surfaces. At the edge, both curvature and tangent are undefined" [Norton 2008 (2006): 794-5]. Sobre los defectos de la condición de Lipschitz véase nota 239.

[255] En esencia, Norton manifiesta la misma idea cuando observa: "We are tempted to think of the instant t = T as the first instant at which the mass moves. But that is not so. It is the *last* instant at which the mass does *not* move. There is no first instant at which the mass moves. […] there is no first instant of motion and thus no first instant at which to seek the initiating cause" [Norton 2003: 11].

La misma situación encontramos en ST1.[256] Cada colisión de la auto-excitación tiene una cadena infinita de colisiones gracias a la cual adquiere el movimiento. Sin embargo, estas auto-excitaciones son indeterministas; así como pueden ocurrir, pueden no ocurrir. Hay dos fuentes que ocasionan el indeterminismo en ST1. La primera, que llega a ser bastante simple, la trataremos en lo que resta del capítulo. La segunda, que también está estrechamente relacionada con las cadenas causales infinitas, no la trataremos hasta el próximo capítulo (apartado 6.3), pues constituye un gran apoyo en el análisis de la relación entre el indeterminismo y la pérdida de la energía en este tipo de sistemas.

5.5 El reposo relativo como estado final: una forma simple de entender el indeterminismo en ST1

Zimba, en una reciente contribución sobre el indeterminismo en mecánica newtoniana, se plantea la siguiente situación:

> Suppose all of the particles of the universe should happen to come at rest at the same time, in positions so arranged that all of the forces on every particle balance to zero at that time. What would happen next? Or rather, what does Newtonian mechanics say will happen next? [Zimba 2008: 417].

Una respuesta inmediata es que tal sistema continúa en reposo. No obstante, si revertimos temporalmente las fuerzas que llevaron a semejante sistema al reposo total, tendremos entonces un conjunto de fuerzas capaces se sacar dicho sistema de tal reposo. Así, otra respuesta es que ocurre la reversión temporal del proceso original. El problema aquí es que la condición inicial de tal reversión temporal no sólo se presenta ante el estado final de la situación planteada, sino en cualquier momento de la evolución correspondiente al reposo. La reversión temporal puede esperar cualquier intervalo de tiempo antes de ocurrir, y puede incluso nunca ocurrir. Esta es la idea, puesta en términos generales, de un sistema que irremediablemente presentará indeterminismo. Es, pues, una de las condiciones suficientes para que un sistema sea indeterminista. Estamos ante un mecanismo genuino del indeterminismo.

El artículo de Zimba presenta varios sistemas indeterministas, pero relega por completo los modelos de supertareas existentes en la literatura, así como sus resultados. Es fácil apreciar, sin embargo, que la situación de ST1 es exactamente la misma a la que Zimba describe. Lo mismo sucede en el modelo STA1 de Atkinson, en el que originalmente todas las partículas terminan con una misma velocidad. La situación es la misma ya que hay un marco de referencia inercial en el que el estado final de las partículas es el reposo. La idea, pues, del indeterminismo que surge del reposo se puede extender al reposo relativo, tal como lo hace la generalización de Pérez Laraudogoitia [2007b] (que entre sus casos incluye tanto ST1 como STA1).[257]

---

[256] Por cierto, McAllister niega el indeterminismo de los sistemas como ST1 tomando como base el principio de conservación de la energía, y apelando a la contribución de Alper, Bridger, Earman y Norton [2000]. En la sección 4.2.9 ya se dio un argumento en contra de esta postura.

[257] Él mismo explicita que ésta es su idea base: "The idea is to arrange things so that, as a result of the collisions, all the material bodies involved are left at relative rest. The temporal inversion from the final state achieved leads to (at least) two possible future evolutions: one is permanent relative rest and the other is spontaneous self-excitation leading to the temporal inversion of the state that was the initial state in the direct temporal process" [Pérez Laraudogoitia 2007b: 725].

La generalización es la siguiente (de aquí en adelante llamaré GPL1). En primer lugar se asume una cantidad infinita (numerable) de partículas puntuales en el espacio unidimensional con masa total finita. La masa m_n de cada partícula P_n ($n \in \{1, 2, 3, \dots\}$) guarda una relación $\gamma_n = m_{n+1}/m_n$ con la masa m_{n+1} de la partícula P_{n+1}. Inicialmente, la partícula P_1 se aproxima con una velocidad constante positiva a P_2, mientras que el resto de las partículas P_2, P_3, P_4, … se encuentran en reposo, cada P_{n+1} a la derecha de P_n y posicionada de tal manera que hace posible la ejecución de una supertarea que consiste en la sucesión infinita de colisiones binarias.[258] Así, P_1 colisionará con P_2, tras lo cual ésta colisionará con P_3. De la misma manera, posteriormente colisionará P_3 con P_4, y en general, P_{n+1}, tras colisionar con P_n, colisionará con P_{n+2} una sola vez. Bajo la conservación de la energía y del momento en la colisión de P_n (que inicialmente viaja con v_n') con P_{n+1} (que inicialmente se encuentra en reposo), sabemos que, tras dicha colisión, las partículas adquirirán respectivamente velocidades

$$v_n'' = \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_n' \tag{5.1}$$

y

$$v_{n+1}' = \frac{2}{1+\gamma_n} v_n' . \tag{5.2}$$

Por recursividad, de (5.2) se obtiene que

$$v_{n+1}' = 2^n v_1' \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\gamma_k} . \tag{5.3}$$

Así, de (5.1) y (5.3), tenemos que cada partícula P_{n+1} terminará con una velocidad

$$v_n'' = \frac{2^{n-1}(1-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})(1+\gamma_{n-2})\cdots(1+\gamma_1)} v_1' . \tag{5.4}$$

Haciendo que $v_{n+1}'' = v_n''$, se encuentra, a partir de (5.4), que las relaciones de masas entre partículas contiguas deben cumplir que

$$\gamma_{n+1} = \frac{1+\gamma_n}{3-\gamma_n} . \tag{5.5}$$ [259]

Así, todos los sistemas que cumplan con las condiciones iniciales especificadas por esta generalización junto con la condición (5.5), son supertareas indeterministas. El estado final, que consiste en el conjunto infinito de partículas viajando con la misma velocidad (y que corresponde al reposo relativo), mostrará indeterminismo tanto si lo revertimos como si no lo revertimos temporalmente: en cualquiera de los casos hay un marco de referencia inercial en el que la velocidad de todas las partículas se corresponde con la velocidad final revertida en la que termina cada una de las supertareas incluidas.

Con la finalidad de entender mejor algunos aspectos en torno al indeterminismo generado por este mecanismo, y de extendernos a otro tipo de sistemas, a continuación presentaremos otra generalización basada en esta misma idea. Más tarde (en el apartado 6.3), esta misma generalización nos será de utilidad para poner en evidencia el otro mecanismo del indeterminismo presente en este tipo de sistemas.

---

[258] En [Pérez Laraudogoitia 2007b: 725-6] la colocación de las partículas es la especular, y la velocidad v_1' viaja a la izquierda. Los cambios del texto principal son irrelevantes.

[259] Es interesante notar que la función $f(x) = (1 + x)/(3 – x)$ tiene un punto fijo indiferente en $x = 1$. Si $x < 1$, la función es atractiva hacia el punto fijo (lo que en (5.5) implica la posibilidad de sistemas con masa finita total), mientras que si $x > 1$ la función es repulsiva desde el punto fijo (lo que en (5.5) implica una masa infinita total del sistema). Este aspecto tiene relevancia a la hora de considerar la energía.

5.5.1 Gμ1: Generalización de supertareas indeterministas bajo reposo final y una misma relación de masas

Al igual que la generalización presentada en [Pérez Laraudogoitia 2007b], la que a continuación presento aquí basa su modelización en el indeterminismo provocado por el reposo relativo en el que todas las partículas terminan. Pero difiere en tres aspectos. En primer lugar, en mi generalización el estado inicial de un subconjunto infinito de partículas no se limita al reposo relativo, ni tampoco se limita a estar posicionado dentro de un espacio confinado. En segundo lugar, en cada caso particular que pertenece a la generalización, la relación de masas entre cada par de partículas contiguas es la misma. En tercer lugar, la estrategia a seguir no consiste en fijar una misma velocidad final para todas las partículas, sino en fijar una velocidad nula para todas ellas (que, por supuesto, en cualquier otro marco de referencia inercial corresponderá a una misma velocidad final).

La idea central es la adquisición sucesiva del reposo por parte de las partículas. Así, supongamos que tenemos una infinidad de partículas puntuales P_0, P_1, P_2,… en el espacio unidimensional. Consideremos que a un tiempo $t = 0$ la partícula P_0 viaja con una velocidad constante $v_0{}' > 0$, mientras que el resto de las partículas están dispuestas de tal manera que a $t = \frac{1}{v_0{}'}$ P_0 colisiona con P_1, a $t = \frac{3}{2v_0{}'}$ P_1 colisiona con P_2, a $t = \frac{7}{4v_0{}'}$ P_2 colisiona con P_3 y, en general, a un tiempo $t = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0{}'}$ la partícula P_{n-1} colisiona con la partícula P_n ($n \in \{1, 2, 3, 4,\ldots\}$). Toda partícula P_n colisionará en primer lugar con P_{n-1} y en segundo lugar con P_{n+1}, tras lo cual no volverá a colisionar con ninguna partícula. La partícula P_0, por su parte, sólo colisionará con P_1, después de lo cual no volverá a colisionar con ninguna partícula. Así las cosas, a un tiempo $t = 2$, una supertarea se habrá ejecutado. Ahora bien, para hacer de ésta una supertarea indeterminista bajo el mecanismo del reposo relativo, establezcamos que en su segunda colisión (primera colisión para P_0) cada partícula adquiere una misma velocidad. Por simplicidad, escojamos el marco de referencia inercial en el que dicha velocidad es cero. Además, limitémonos a modelar los casos en los que la masa m_n de toda partícula P_n guarda una relación constante $\mu = \frac{m_n}{m_{n-1}}$ con la masa m_{n-1} de la partícula P_{n-1}.

Hasta aquí el modelo en términos generales. Resta ahora especificar las posiciones y las velocidades de cada partícula en el tiempo $t = 0$ para que las cosas sucedan tal como las hemos diseñado. Con este propósito, llamemos v_n a la velocidad de toda P_n en $t = 0$, y $v_n{}'$ a la velocidad que toda P_n obtiene al colisionar con P_{n-1}, que por su parte lleva una velocidad $v_{n-1}{}'$ para finalmente adquirir $v_{n-1}{}'' = 0$. (Así, no debe entenderse que $v_0{}'$ haya sido obtenida por P_0 en una colisión en algún $t > 0$). Con esto, y a partir de los principios de la conservación de la energía y el momento de cada colisión, colisión de la partícula P_{n-1} con P_n, tenemos que

$$0 = \frac{1-\mu}{1+\mu} v_{n-1}{}' + \frac{2\mu}{1+\mu} v_n \tag{5.5}$$

$$v_n{}' = \frac{2}{1+\mu} v_{n-1}{}' - \frac{1-\mu}{1+\mu} v_n . \tag{5.6}$$

De (5.6) podemos ver que $v_n = \frac{2}{1-\mu} v_{n-1}{}' - \frac{1+\mu}{1-\mu} v_n{}'$, a partir de lo cual, y tras sustituir en (5.5), se obtiene que $v_n{}' = \frac{1+\mu}{2\mu} v_{n-1}{}'$, de donde resulta claro que

$$v_{n-1}{}' = \frac{(1+\mu)^{n-1}}{2^{n-1}\mu^{n-1}} v_0{}' . \tag{5.7}$$

Por otro lado, de (5.5) se sabe que

$$v_n = -\frac{1-\mu}{2\mu} v_{n-1}' . \tag{5.8}$$

Así, sustituyendo (5.7) en (5.8), obtenemos que

$$v_n = -\frac{(1-\mu)(1+\mu)^{n-1}}{2^n \mu^n} v_0' . \tag{5.9}$$

Obtengamos ahora las posiciones. Para ello, llamemos x_n a la posición de la partícula P_n en $t = 0$ y x_n' a la posición en donde la misma partícula colisiona con P_{n-1} para adquirir una velocidad v_n', y en donde P_{n-1} adquiere el reposo (y por lo que $x_{n-1}'' = x_n'$). Por su parte, x_0' es la posición de P_0 (que viaja con v_0') al tiempo $t = 0$. Con esto podemos expresar el tiempo transcurrido en el que toda P_{n-1} viaja con v_{n-1}', es decir, el tiempo que transcurre desde que P_{n-2} choca con P_{n-1} hasta que P_{n-1} choca con P_n. Para el caso particular de $n = 1$, es decir, para la partícula P_0, el intervalo de tiempo al que nos referimos partiría de $t = 0$ hasta el tiempo en el que colisiona con P_1. Este intervalo de tiempo viene dado por

$$\Delta t_{n-1}' = \frac{1}{2^{n-1} v_0'} = \frac{x_n' - x_{n-1}'}{v_{n-1}'} . \tag{5.10}$$

Por otro lado, el tiempo que tarda P_n en recorrer la distancia entre su posición inicial, x_n, y el punto en el que choca con P_{n-1}, x_n', es

$$t_n' = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0'} = \frac{x_n' - x_n}{v_n} . \tag{5.11}$$

Obtengamos primero x_n'. De (5.10) tenemos que $x_n' = \frac{v_{n-1}'}{2^{n-1} v_0'} + x_{n-1}'$, de donde, sustituyendo (5.7), se obtiene que

$$x_n' = \frac{(1+\mu)^{n-1}}{2^{2(n-1)} \mu^{n-1}} + x_{n-1}' . \tag{5.12}$$

De (5.12), claramente se ve que

$$x_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1+\mu)^{k-1}}{2^{2(k-1)} \mu^{k-1}} + x_0' , \tag{5.13}$$

y como $\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+\mu)^{k-1}}{2^{2(k-1)} \mu^{k-1}} = \frac{2^{2n}\mu^n - (1+\mu)^n}{2^{2(n-1)} \mu^{n-1} (2^2 \mu - (1+\mu))}$, entonces

$$x_n' = \frac{2^{2n}\mu^n - (1+\mu)^n}{2^{2(n-1)} \mu^{n-1} (2^2 \mu - (1+\mu))} + x_0' . \tag{5.14}$$

Ahora bien, para (5.14) hay una excepción, a saber, cuando el denominador de la fracción es cero, es decir, cuando $\mu = \frac{1}{3}$. Para este caso se ve que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}}{2^{2(k-1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = n$. Por lo tanto,

$$x_n' = n + x_0' \tag{5.15}$$

para el caso exclusivo en que $\mu = \frac{1}{3}$.

Obtengamos ahora x_n. A partir de (5.11) podemos ver que $x_n = x_n' - \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{v_n}{v_0'}$. Y si en esta expresión sustituimos (5.9), obtenemos que

$$x_n = x_n' + \frac{(2^n - 1)(1-\mu)(1+\mu)^{n-1}}{2^{2n-1} \mu^n} . \tag{5.16}$$

Si en (5.16) sustituimos (5.14), finalmente obtenemos que

$$x_n = \frac{1}{2^{2(n-1)} \mu^{n-1}} \left[\frac{2^{2n}\mu^n - (1+\mu)^n}{2^2 \mu - (1+\mu)} + \frac{(2^n - 1)(1-\mu)(1+\mu)^{n-1}}{2\mu} \right] + x_0' . \tag{5.17}$$

Mas para el caso exclusivo en el que $\mu = \frac{1}{3}$, de (5.15) y (5.16) se obtiene que

$$x_n = 2^n + n - 1 + x_0´. \tag{5.18}$$

Sabemos ya las posiciones y las velocidades de cada partícula en el tiempo $t = 0$ y sabemos cómo va a evolucionar el sistema. Sin embargo, a lo largo de toda la modelización hemos asumido que toda partícula P_n colisiona primero con P_{n-1} que con P_{n+1}. ¿De verdad sucede tal evolución? Para verificarlo, necesitamos probar que $t_n´ = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0´}$, el tiempo en el que P_{n-1} colisiona con P_n, es menor que el tiempo en el que P_n colisionaría con P_{n+1} en caso de que estas dos partículas se encontraran aisladas. Si llamamos x_h a la posición en la que se daría esta colisión hipotética, entonces el tiempo sería

$$t_h = \frac{x_h - x_n}{v_n} \tag{5.19}$$

o

$$t_h = \frac{x_h - x_{n+1}}{v_{n+1}}. \tag{5.20}$$

Del sistema (5.19) (5.20) obtenemos que $x_h = \frac{v_{n+1}x_n - v_n x_{n+1}}{v_{n+1} - v_n}$, y que

$$t_h = \frac{x_n - x_{n+1}}{v_{n+1} - v_n}. \tag{5.21}$$

Para el caso exclusivo en el que $\mu = \frac{1}{3}$ es preciso considerar (5.9), (5.18) y (5.21) para obtener que el tiempo $t_h = \left(2 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0´}$, que claramente es mayor a $t_n´$. Para el resto de los casos, se consideran (5.9), (5.17) y (5.21) para obtener que el tiempo

$$t_h = \left(2 - \frac{\mu^2 - 6\mu + 1}{2^n(1-\mu)^2}\right)\frac{1}{v_0´}.$$

Así, para que $t_h > t_n´$, se debe cumplir que

$$\left(2 - \frac{\mu^2 - 6\mu + 1}{2^n(1-\mu)^2}\right)\frac{1}{v_0´} > \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0´}.$$

Como $v_0´ > 0$, basta con probar que

$$\frac{\mu^2 - 6\mu + 1}{2^n(1-\mu)^2} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

desigualdad que se cumple siempre y cuando

$$\mu > -1. \tag{5.22}$$

Pero, por definición, $\mu > 0$, por lo que (5.22) siempre se cumple. Y por lo tanto, $t_h > t_n´$, es decir, P_{n-1} siempre colisiona con P_n antes de que P_n choque con P_{n+1}.

En resumen, esta generalización de supertareas, que en adelante llamaremos Gμ1, describe el siguiente proceso. A un tiempo $t = 0$ la partícula P_0 se encuentra en $x_0´$ con una velocidad $v_0´$, mientras que cada una de las demás partículas se encuentra en $x_n = \frac{1}{2^{2(n-1)}\mu^{n-1}}\left[\frac{2^{2n}\mu^n - (1+\mu)^n}{2^2\mu - (1+\mu)} + \frac{(2^n - 1)(1-\mu)(1+\mu)^{n-1}}{2\mu}\right] + x_0´$ (para el caso exclusivo de μ = 1/3, $x_n = 2^n + n - 1 + x_0´$) viajando con una velocidad $v_n = -\frac{(1-\mu)(1+\mu)^{n-1}}{2^n\mu^n}v_0´$. Así, a un tiempo $t_n´ = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{v_0´}$ toda partícula P_{n-1} colisionará con la partícula P_n en la posición $x_n´ = \frac{2^{2n}\mu^n - (1+\mu)^n}{2^{2(n-1)}\mu^{n-1}(2^2\mu - (1+\mu))} + x_0´$ (para el caso exclusivo de μ = 1/3, $x_n = 2^n + n - 1 + x_0´$), con lo que P_{n-1} adquiere el reposo mientras que P_n adquiere una velocidad

$v_n{}' = \left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^n v_0{}'$. De esta manera, a un tiempo $t = 2/v_0{}'$ una supertarea se habrá ejecutado y todas las partículas se encontrarán en reposo (cada P_{n-1} en $x_{n-1}{}'' = x_n{}'$).

5.5.2 Particularidades de Gμ1: indeterminismo bajo reposo relativo sin punto de acumulación y auto-excitaciones expansivas

La reversión temporal de estas supertareas también es un proceso posible. Dicho proceso consiste en una auto-excitación que es indeterminista, pues su estado inicial (que corresponde al estado final de las supertareas recién modeladas) es el reposo relativo de todas las partículas, que puede prolongarse durante cualquier lapso de tiempo antes de que ocurra la auto-excitación. Dependiendo de la relación de masas μ, la evolución posible de estos procesos revertidos tiene características distintas. Hagamos una clasificación de ellos, a partir del análisis de la distancia inicial entre cada par de partículas contiguas y la velocidad con la que cada partícula termina tras la auto-excitación del sistema.

La posición con la que cada partícula inicia en reposo claramente es $x_{n-1}{}'' = x_n{}'$. Así, a partir de (5.14), se obtiene que la distancia inicial entre cada par de partículas contiguas P_n y P_{n-1} es

$$\Delta x_n = x_n{}'' - x_{n-1}{}'' = \left(\frac{1+\mu}{4\mu}\right)^n .$$

Donde fácilmente se aprecia que cuando $(1+\mu)/(4\mu) \geq 1$, o sea, cuando $\mu \leq 1/3$, Δx_n es la unidad o tiende a infinito junto con n. En otras palabras, el estado inicial carece de un punto de acumulación. Por otro lado, también se aprecia que cuando $(1+\mu)/(4\mu) < 1$, o sea, cuando $\mu > 1/3$, Δx_n tiende a cero junto con n de tal manera que $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta x_n$ es convergente. Es decir, el estado inicial es un sistema en reposo con un punto de acumulación.

En cuanto a la velocidad, a partir de (5.9) se sabe que la velocidad final, tras la auto-excitación, de cada partícula P_n es $v_n{}^* = -v_n$, que también se puede expresar como

$$v_n{}^* = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^n v_0{}' .$$

Donde fácilmente se aprecia que, cuando $\mu > 1$, $v_n{}^*$ tiende a cero por la izquierda conforme n tiende a infinito (pues el primer factor será un número entre –1 y 0, mientras que el segundo será un número entre 0 y 1 elevado a la n). Es decir, en el estado final, cada partícula P_{n-1} terminará alejándose de su partícula contigua P_n hacia la izquierda; en particular, P_0 llevará la velocidad mínima $-v_0$ (pero con una magnitud máxima). Por otro lado, se aprecia también que, si $\mu = 1$, toda partícula P_n terminará en reposo (pues el primer factor es 0), mientras que la partícula P_0 termina alejándose del resto. Finalmente, también es fácil ver que, cuando $\mu < 1$, $v_n{}^*$ tiende a infinito (positivo) junto con n (pues el segundo factor así lo hace, y el primero es un número entre 0 y 1).

Ante esto, tenemos cuatro casos con distintas evoluciones:

I) $\mu > 1$. Tenemos un conjunto de partículas infinito con masa total infinita. La masa es mayor conforme crece n. La totalidad de partículas están siempre posicionadas dentro de un espacio finito con un punto de acumulación a la derecha. Su estado inicial es el reposo relativo, que espontáneamente se podrá auto-excitar de tal manera que, tras ello, cada partícula termina con una velocidad negativa (hacia la izquierda), que crece desde un mínimo $-v_0$ hasta un máximo 0 (que ninguna partícula posee) conforme crece n. Basta con percatarse que a cualquier tiempo posterior a la auto-excitación siempre habrá una infinidad de partículas que, debido a sus velocidades, se encontrarán tan cerca como se quiera al punto de acumulación original (basta con tomar un n lo suficientemente grande). Es decir, con esta evolución, el sistema mantiene su punto de acumulación.

II) $\mu = 1$. Proceso correspondiente TRST1 (sólo que con el punto de acumulación especular). P_0 termina con una velocidad $-v_0$ y el resto de las partículas en reposo.

III) $1/3 < \mu < 1$. Tenemos un conjunto de partículas infinito con masa total finita. La masa es menor conforme crece n. Inicialmente, la totalidad de las partículas se encuentran en reposo relativo y están posicionadas dentro de un espacio finito con un punto de acumulación a la derecha. Con este estado inicial, el sistema se podrá auto-excitar de tal manera que, tras ello, cada partícula P_n termina con una velocidad positiva (hacia la derecha) que crece ilimitadamente conforme crece n, mientras que P_0 termina con una velocidad $-v_0$ (hacia la izquierda). En otras palabras, el conjunto infinito de partículas (excepto P_0) cruza el punto de acumulación y se expande, instantáneamente, a lo largo de una región infinita del espacio. Esto se ve fácilmente si nos percatamos que, a cualquier tiempo posterior al comienzo de la auto-excitación (incluso antes de que el proceso se haya completado), habrá una infinidad de partículas que, debido a sus velocidades, se encontrarán tan lejos como se quiera del punto de acumulación original (basta con tomar un n lo suficientemente grande). Es decir, una vez que la auto-excitación ha comenzado, el sistema pierde su punto de acumulación. Es ésta la gama de sistemas que presenta una auto-excitación expansiva.[260] Tras ocupar una región finita del espacio, los sistemas instantáneamente pasan a ocupar una región infinita de manera indeterminista.

IV) $0 < \mu \leq 1/3$. Tenemos un conjunto de partículas infinito con masa total finita. La masa es menor conforme crece n. Inicialmente, la totalidad de las partículas se encuentran en reposo relativo posicionadas a lo largo de un espacio infinito, de tal manera que P_0 se encuentra en algún punto del espacio mientras que el resto se extiende infinitamente hacia su derecha. Claramente, el sistema con este estado inicial carece de un punto de acumulación, pero se podrá auto-excitar de tal manera que cada partícula P_n termina con una velocidad positiva (hacia la derecha) que crece ilimitadamente conforme crece n, mientras que P_0 termina con una velocidad $-v_0$ (hacia la izquierda). Estos sistemas, pues, en ningún momento tienen un punto de acumulación.[261]

Cabe comentar que todos estos sistemas con estas evoluciones también pueden ser planteados en términos de cuerpos extensos. Nótese también que, a pesar de la carencia de un límite para las velocidades de las partículas característica de las auto-excitaciones expansivas, estos sistemas no presentan ni el "escape al infinito" ni la

[260] Las supertareas de GSTC también expanden sus partículas instantáneamente a lo largo de una región infinita del espacio (que para el caso de μ = ½ ya se encuentra expresado en [Pérez Laraudogoitia 2007a: 26]). La diferencia es que, mientras que GSTC lo hace con una supertarea de ordinalidad ω, esta gama de casos de Gμ1 lo hace con una supertarea de ordinalidad ω^*.

[261] Este es un aspecto novedoso de la generalización Gμ1, pues no existen en la literatura sistemas indeterministas bajo el reposo (relativo) de sus partículas como estado final que a la vez se encuentren extendidos a lo largo de una región infinita del espacio. ST3, que sí está extendida a lo largo de una región espacial infinita, es indeterminista bajo α), y no bajo reposo relativo. ST1P, sí es indeterminista bajo reposo relativo y está extendida a lo largo de una región infinita del espacio; no obstante, reducido a partículas puntuales, es un sistema que sí necesita un punto de acumulación para ser indeterminista. Este no es el caso para Gμ1 con $0 < \mu \leq 1/3$.

desaparición de alguna de las partículas. Toda partícula, en todo momento, tiene una posición perfectamente bien ubicada.

5.5.3 Consecuencia de Gμ1: sistemas espacialmente extendidos con colisiones globalmente dependientes

Una consecuencia importante de esta generalización (y en concreto de los casos que cubre $0 < \mu \leq 1/3$) es que *el indeterminismo en supertareas newtonianas debido al reposo relativo como estado final de la supertarea no depende de que la configuración del sistema posea en algún momento un punto de acumulación*. Esto a su vez tiene una importante consecuencia, y es que muestra que algunos sistemas que no son manifiestamente indeterministas son de hecho indeterministas. Concretando más, procesos que parece ser que involucran exclusivamente colisiones globalmente independientes en realidad involucran colisiones globalmente dependientes.

Antes de poner esto en evidencia, atengámonos a la definición que Pérez Laraudogoitia brinda de colisiones globalmente independientes:

> suppose that the particles of the set P evolve (during a finite period of time) exclusively by means of an infinite number of elastic, deterministic collisions between them following the process *PR* from the initial condition C given at the instant t_0. For each $q \in P$, let Pq be the set of particles of P causally connected with q (obviously through elastic collisions) during the process *PR* from the initial condition C. We shall say that the collisions involved in *PR* (from C) are globally independent when, for each $q \in P$, Pq is finite and there is one sole evolution possible for q from C [Pérez Laraudogoitia 2008: 365].

A partir de esto, aquí llamaré 'colisiones globalmente dependientes' a las colisiones de un proceso que no son globalmente independientes. Tras esta definición técnica, Pérez Laraudogoitia presenta entonces una gama de procesos que consisten en una sucesión infinita de colisiones elásticas globalmente independientes:

> let us suppose a process Q in which, for each $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, the particles P_{2n} and P_{2n-1} are small spheres the centers of which move permanently in the coordinate plane $X_n = n$ and that they collide head-on in $t_n = 1/n$ at the point in space $X_n = n$, $Y_n = 0$, $Z_n = 0$. Although the infinite collisions take place in a unit interval of time we would be hard put to call this a supertask, since the collisions are globally independent in an evident sense (as reflected in my technical characterization of global independence): they take place in arbitrarily remote spatial regions with no possible connection between them [Pérez Laraudogoitia 2008: 365].

Pues bien, aunque las colisiones de Q ocurran en regiones espaciales arbitrariamente alejadas, hay casos concretos de Q en los que las colisiones sí se encuentran conectadas, al grado que no es posible en algunos casos determinar, por ejemplo, si P_{2n-1} colisionará primero con P_{2n} o con P_{2n+2}. El motivo es que hay casos en los que el conjunto infinito de partículas (por ejemplo, la totalidad de las partículas P_{2n-1}, o P_{2n} si intercambiamos las etiquetas), *en sí* pueden tener una conexión causal sucesiva bajo colisiones elásticas. Para poner en evidencia esta conexión tomemos un caso ilustrativo de nuestra generalización.

Antes de ello, es necesario hacer una aclaración para hacer justicia a Pérez Laraudogoitia. Cuando él afirma que el proceso Q involucra sólo colisiones globalmente independientes, se está refiriendo exclusivamente a supertareas que en todo momento tienen una energía cinética total definida (es decir, que no es “infinita”).[262] Así, estrictamente él no está diciendo que todos los sistemas que presentan el proceso Q involucran colisiones globalmente dependientes. Y entonces, lo cierto es que, también hablando estrictamente, él tampoco afirma que existen procesos Q que involucran colisiones que no son globalmente independientes, que es lo que precisamente aquí se mostrará.[263]

Hecha esta aclaración, tomemos el caso de Gμ1 en el que $\mu = 1/3$, que arroja números relativamente agradables y que, por lo mismo, resulta un ejemplo ilustrativo. Para este caso, que llamaremos STM1, tenemos un número infinito de partículas P_{i-1} ($i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) en el espacio unidimensional correspondiente al eje x. A un tiempo $t = 0$, P_0 viaja con una velocidad constante $v_0' = v$ (donde v es cualquier escalar mayor a cero) y se encuentra en $x_0 = 0$. En ese mismo instante, P_1 se encuentra en la posición $x_1 = 2$ viajando con una velocidad constante $v_1 = -v$, P_2 se encuentra en $x_2 = 5$ con una velocidad $v_2 = -2v$, P_3 se encuentra en $x_3 = 10$ con una velocidad $v_3 = -4v$ y, en general, en el instante $t = 0$ toda partícula P_i se encuentra en la posición $x_i = 2^i + i - 1$ viajando con una velocidad constante $v_i = -2^{i-1}v$. Ante este estado inicial, y tomando en cuenta la conservación de la energía y de la cantidad del movimiento para las colisiones entre partículas, es fácil ver que el sistema evolucionará de la siguiente manera. A un tiempo $t = \frac{1}{v}$ la partícula P_0 colisionará con la partícula P_1 en $x = 1$, adquiriendo entonces P_0 una velocidad $v_0'' = 0$ y P_1 una velocidad $v_1' = 2v$. Posteriormente, a un tiempo $t = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v}$, P_1 colisionará con P_2 en $x = 2$, adquiriendo así P_1 una velocidad $v_1'' = 0$ y P_2 una velocidad $v_2' = 4v$. Tras ello, a un tiempo $t = \frac{1}{v} + \frac{1}{2v} + \frac{1}{4v}$, P_2 colisionará con P_3 en $x = 3$, con lo que P_2 adquiere una velocidad $v_2'' = 0$ y P_3 una velocidad $v_3' = 8v$. En general, a un tiempo $t = \frac{1}{v}\left(2 - \frac{1}{2^{i-1}}\right)$, P_{i-1}, que lleva una velocidad $v_{i-1}' = 2^{i-1}v$, colisionará con P_i, que lleva una velocidad $v_i = -2^{i-1}v$, en la posición $x = i$, obteniendo entonces P_{i-1} una velocidad $v_{i-1}'' = 0$ y P_i una velocidad $v_i' = 2^i v$. Con lo cual, a un tiempo $t = \frac{2}{v}$, habrán ocurrido un número infinito de colisiones y toda partícula P_{i-1} se encontrará en reposo en la posición $x_{i-1} = i$. La reversión temporal, TRSTM1, claramente es una auto-excitación de estas partículas extendidas a lo largo de una región espacial infinita a partir del reposo.

Ahora bien, si consideramos la totalidad de partículas en TRSTM1 como un subconjunto de la totalidad de partículas que involucra Q, es posible encontrar casos para los que las colisiones no son globalmente independientes y que resultan ser indeterministas. En particular, tomemos el caso en el que el proceso Q ocurre en el sistema que especifican las siguientes condiciones iniciales C, y que llamaremos 2DM2: cada par de partículas P_{2n} y P_{2n-1} tienen una misma masa $m_{2n} = m_{2n-1}$ mientras que cada par de partículas P_{2n} y P_{2n+2}, así como cada par P_{2n-1} y P_{2n+1}, guardan una relación de masas constante $\mu = \frac{m_{2n+2}}{m_{2n}} = \frac{m_{2n+1}}{m_{2n-1}} = \frac{1}{3}$; en el tiempo $t_0 = 0$ cada partícula P_{2n-1} se encuentra en reposo en la posición $\boldsymbol{r}_{2n-1} = (n, 0, 0)$, mientras que cada partícula P_{2n} se

[262] Lo explicita al principio de su artículo: “I shall concentrate exclusively on supertasks with defined energy (for example, the energy in a supertask involving infinitely many identical particles with non-uniformly bounded velocities is not well defined, as the total energy will be “infinite”)” [Pérez Laraudogoitia 2008: 364-5].

[263] Por más que esto quepa esperarse, no es una cuestión trivial, ya que también hay procesos Q que, además de carecer de una energía definida, sólo involucran colisiones globalmente independientes. De ningún modo es evidente, a primera vista –y menos sin Gμ1–, cuáles son los sistemas que involucran colisiones globalmente independientes y cuáles no.

encuentra en la posición $\boldsymbol{r}_{2n} = (n, 1/n, 0)$ viajando con una velocidad $\boldsymbol{v}_{2n} = (0, -1, 0)$. Esta configuración inicial se encuentra representada en la figura 5.2. Así las cosas, la evolución de 2DM2 puede ser exactamente como lo describe el proceso Q: cada par de partículas P_{2n} y P_{2n-1}, que sólo se mueven en el plano $X_n = n$ (en realidad, en el modelo 2DM2 las únicas partículas que se mueven son las designadas por P_{2n}), colisionan en el tiempo $t_n = 1/n$ en el punto $\boldsymbol{r}_{2n} = \boldsymbol{r}_{2n-1} = (n, 0, 0)$.

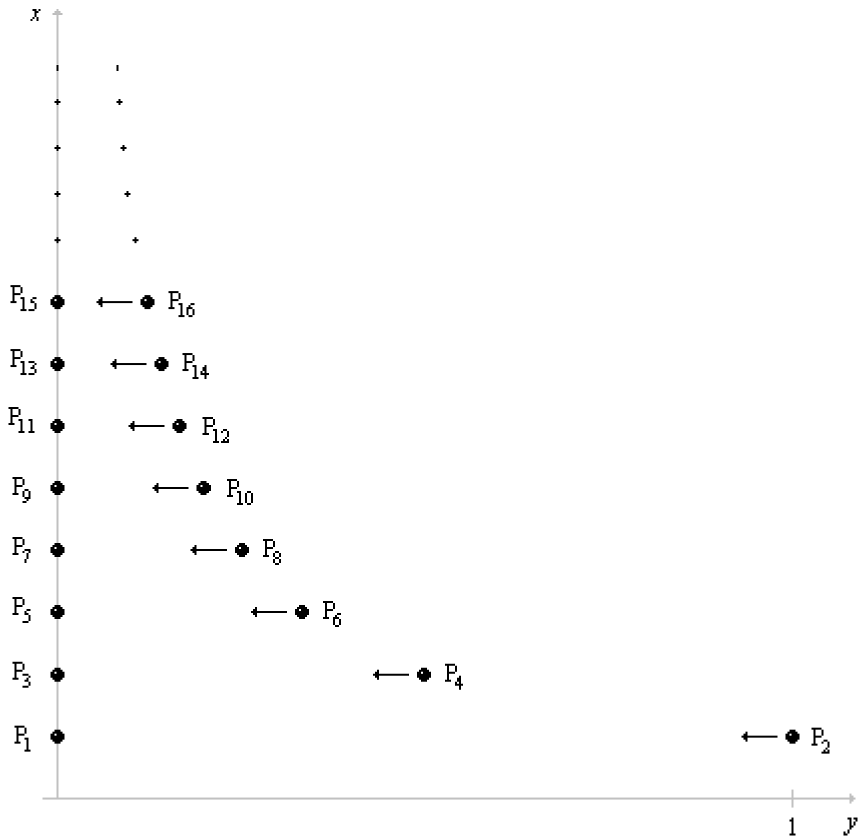


Figura 5.2. Estado inicial (a $t_0 = 0$) del modelo 2DM2; cada partícula con etiqueta par se dirige frontalmente, con la misma velocidad y desde distintas posiciones que el resto de partículas pares, a la correspondiente partícula en reposo con etiqueta impar.

Pero ésta no es la única evolución posible, ya que podemos considerar que el conjunto (o algún subconjunto) de partículas que se encuentran en el eje-x en algún momento dado, se corresponde con el conjunto de partículas del estado inicial del sistema TRSTM1; dicho brevemente, que TRSTM1 es un subsistema de 2DM2. Una vez hecha esta apreciación, es fácil ver que 2DM2 puede evolucionar de una manera distinta al proceso Q descrito en el párrafo anterior. A un tiempo $t_{n+1} = 1/(n+1)$, por ejemplo, todas las partículas P_{2n+2}, P_{2n+4}, P_{2n+6}, P_{2n+8}, … habrán chocado respectiva y frontalmente (en dirección y) con las partículas P_{2n+1}, P_{2n+3}, P_{2n+5}, P_{2n+7}, …, las primeras adquiriendo el reposo y quedando en la posición $\boldsymbol{r}_{2n} = (n, 0, 0)$ mientras que las segundas se alejan de ese mismo punto con una velocidad $\boldsymbol{v}_{2n-1} = (0, -1, 0)$. Cabría esperarse que a $t_n = 1/n$ la partícula P_{2n-1} choque de la misma manera con P_{2n}, pero podría suceder también que el conjunto P_{2n+2}, P_{2n+4}, P_{2n+6}, P_{2n+8}, …, ahora alineado en el eje-x, se auto-excite de la misma manera que TRSTM1 con una velocidad tal que la partícula P_{2n-1} colisione antes con P_{2n+2} (en dirección x) que con P_{2n} (en dirección y). Claramente, 2DM2 es un sistema indeterminista.

Nótese que, aunque el proceso Q que consiste en el choque frontal (en dirección y) sucesivo de cada partícula P_{2n-1} con P_{2n} es un proceso en el que cada colisión es "independiente" de las demás en el sentido de que cada par P_{2n-1}-P_{2n} sufre el mismo choque frontal si lo aislamos del resto de partículas, no es independiente en el sentido en el que especifica la definición de Pérez Laraudogoitia. Tal proceso, en caso de que se corresponda con el sistema que acabamos de presentar (2DM2), viola las dos condiciones de independencia global: (i) cada partícula P_n está potencialmente conectada causalmente con un número infinito de partículas (todas las que en un momento dado se encuentran alineadas en el eje-x con $x > x_n$) y (ii) para cada partícula P_n existe más de una evolución posible en términos de colisiones elásticas.

En realidad, para que ocurra este tipo de proceso indeterminista, la separación s entre cada par de partículas contiguas alineadas en el eje-x puede ser tan grande como se quiera, siempre y cuando la relación de masas constante μ entre cada par de partículas contiguas sea menor a 1. Para verlo, retomemos el planteamiento original de Gμ1 y hagamos una ligera modificación. En vez de especificar el tiempo para cada colisión, asumamos que toda partícula P_{n-1} adquiere el reposo en $x_{n-1}'' = x_n' = sn$. Así, tomando en cuenta (5.7), el intervalo de tiempo en el que cada partícula P_{n-1} viaja con velocidad v_{n-1}' es

$$\Delta t_{n-1}' = \frac{x_n' - x_{n-1}'}{v_{n-1}'} = \left(\frac{2\mu}{1+\mu}\right)^{n-1} \frac{s}{v_0'} . \tag{5.23}$$

El tiempo, pues, en el que P_{n-1} adquiere el reposo es

$$t_{n-1}' = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k' = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)\left[1 - \left(\frac{2\mu}{1+\mu}\right)^n\right]\frac{s}{v_0'} \tag{5.24}$$

que, como $\mu < 1$, converge cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, esta modificación, ejecuta una supertarea satisfactoriamente. Y la reversión temporal, el sistema infinito de partículas en reposo, cada una separada una distancia s de sus contiguas, y con una relación de masas $\mu < 1$, tendrá la posibilidad de auto-excitarse (por supuesto, bajo esta modificación, ningún caso se corresponde con una auto-excitación expansiva).[264] Definitivamente, la separación s de las partículas alineadas en el eje-x de 2DM2 puede ser tan grande como se desee sin temor a desterrar el indeterminismo del sistema.[265]

---

[264] Aquí hemos asumido que P_{n-1} (que viaja con v_{n-1}') colisiona con P_n (que viaja con v_n) antes de que ésta colisione con P_{n+1} (que viaja con v_{n+1}). Precisamente eso es lo que sucede. Como $t_n' = (x_n' - x_n)/v_n$, con (5.9) sabemos que a $t = 0$ P_n se encuentra en

$$x_n = \left[\left(\tfrac{1+\mu}{2\mu}\right)^n + n - 1\right]s . \tag{5.n1}$$

Así, si consideramos que sólo tenemos en el espacio unidimensional el par de partículas P_n y P_{n+1} posicionadas en x_n y x_{n+1} y con velocidades v_n y v_{n+1} respectivamente, obtenemos que el tiempo hipotético en el que colisionarían, expresado en (5.21) y tomando en cuenta (5.9) y (5.n1), también se puede expresar

$$t_h = \left(\tfrac{1+\mu}{1-\mu} + \tfrac{(2\mu)^{n+1}}{(1-\mu)^2(1+\mu)^{n-1}}\right)\tfrac{s}{v_0'} . \tag{5.n2}$$

Buscamos que se cumpla la desigualdad $t_{n-1}' < t_h$, que para este caso, con (5.24) y (5.n2), equivale a la siguiente desigualdad:

$$-(2\mu)^n < -\tfrac{(2\mu)^{n+1}}{\mu-1} .$$

Como aquí nos referimos sólo a los casos en los que $\mu < 1$, el miembro derecho de la desigualdad siempre es mayor a cero, y por lo tanto la desigualdad siempre se cumple. P_{n-1} colisiona con P_n antes de que ésta colisione con P_{n+1}.

[265] Esto no quiere decir que las supertareas que engloba Gμ1 no dependan de un límite superior para el espacio entre sus partículas. Para cada caso, cada s y μ que se tomen, cada par de partículas (contiguas y no contiguas) necesitarán un límite superior en la distancia que las separa para ejecutar satisfactoriamente la supertarea. La infinita posibilidad del tamaño de s no implica que en cada caso (cada s) las partículas

La generalización Gμ1, pues, nos ayuda a comprender de qué manera, sistemas que aparente e intuitivamente son deterministas y que involucran sólo colisiones globalmente independientes, en realidad son indeterministas e involucran colisiones globalmente dependientes. Esto, por supuesto, entendido bajo el indeterminismo que se encuentra detrás del reposo relativo de las partículas en el estado final de una supertarea newtoniana.

Es interesante añadir que no sólo los procesos *Q* con energía definida son globalmente independientes. Por ejemplo, si a 2DM2 lo modificamos de tal manera que cada una de las partículas tenga la misma masa, entonces tenemos un proceso *Q* con energía infinita y colisiones globalmente independientes. No es posible una auto-excitación por parte de las partículas que se encuentran alineadas en el eje-*x*. Piénsese en ST1 con las partículas extendidas a lo largo de una región infinita: no es posible llevar a término la supertarea y, por lo tanto, la configuración de partículas que corresponde cuando el tiempo $t \to \infty$ (y que una de ellas se corresponde con las partículas del eje-*x* de la modificación de 2DM2 en cuestión) no puede auto-excitarse, por más grande que sea la velocidad de auto-excitación esperada.

Para terminar, podemos considerar que los sistemas contemplados por la generalización Gμ1, al poseer inicialmente una energía no definida (infinita), son de escaso interés para la comprensión de la pérdida de la energía. Es cierto que no son sistemas tan interesantes pues, a diferencia, para los sistemas con energía bien definida en todo momento y en todo marco de referencia inercial, podemos hablar en términos precisos de la cantidad de energía que se pierde (si se pierde). Sin embargo, no dejan de tener un grado de interés ya que, pese a la carencia de una energía bien definida en algunos momentos,[266] no se destierra por completo la pérdida de la energía: de una energía infinita pasan a tener, al completarse el proceso, una energía finita bien definida. Por último, Gμ1 es un modelo que nos ilustrará de una manera muy sencilla otra forma de ver el indeterminismo de los sistemas que engloba. Como dicha forma del indeterminismo se encuentra bien enmarcada dentro de la discusión entre la relación del mismo con la pérdida de la energía (en las supertareas newtonianas), me reservo su explicitación al siguiente capítulo (apartado 6.3).[267]

---

puedan posicionarse arbitrariamente. Es difícil, por ejemplo, que con una separación no constante entre partículas contiguas $s_{n+1} = s_n + e^n$ sea posible que la supertarea logre ejecutarse. En general, para todo μ es posible encontrar una separación para que la sucesión de colisiones tome un tiempo infinito.

[266] Me refiero a los casos con $\mu < 1$. El resto de casos, con $\mu \geq 1$, tienen una energía infinita en todo momento en cualquier otro marco de referencia inercial.

[267] Es interesante, además, darse cuenta de que el momento lineal en las supertareas de Gμ1 se conserva cuando $\mu < 1$, es decir, cuando la masa total es finita; esto pese a que las velocidades iniciales de las partículas carecen de un límite. Por un lado, sabemos que el momento final es nulo, pues es el reposo de todas las partículas. Por otro lado, el momento inicial viene dado por

$$P_{ini} = m_0 v_0{}' + \sum_{k=1}^{\infty} m_k v_k \,.$$

Introduciendo (5.9) y las correspondientes relaciones de masa, se obtiene que

$$P_{ini} = m_0 v_0{}' - m_0 v_0{}'(1-\mu)\sum_{p=1}^{\infty} \tfrac{(1+\mu)^{p-1}}{2^p} \,.$$

Como $\mu < 1$, la sumatoria de esta última expresión es convergente; concretamente $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1+\mu)^{p-1}}{2^p} = \frac{1}{1-\mu}$. Por lo tanto, el momento lineal inicial también es nulo.

6. El fallo de la conservación de la energía y su relación con el indeterminismo

Hasta aquí, nuestra discusión sobre el indeterminismo en supertareas newtonianas se ha hecho al margen de la pérdida de la energía (o ganancia, según la ordinalidad con que se vean). A primera vista, parece ser que hay una conexión entre el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía mecánica en las supertareas newtonianas. Por un lado, las supertareas incluidas en $G\mu 1$ son indeterministas a la vez que no conservativas; por otro, las supertareas incluidas en GSTC son deterministas –al menos así lo hemos manifestado hasta ahora– a la vez que conservativas. ¿Es casual la presencia conjunta de estas anomalías? ¿Es casual la carencia conjunta de estas anomalías? ¿En qué grado podemos decir que el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía se encuentran relacionados en las supertareas newtonianas? Profundizar en estas cuestiones es el objetivo principal que persigue el presente capítulo. Como en el capítulo anterior, seguiremos profundizando en las fuentes del indeterminismo, pero, debido al contexto de la problemática que aquí nos motiva, ahora también haremos siempre caso de la pérdida de la energía en las supertareas newtonianas. Cabe advertir que, a lo largo de todo el capítulo, cuando hablemos de energía, nos estaremos refiriendo exclusivamente a la energía mecánica (cinética más potencial) de un sistema. Aunque en mecánica newtoniana se puedan aceptar conceptos de energía más ricos que la sola energía mecánica, la pérdida de ésta en las supertareas newtonianas no deja de ser intrigante y contraintuitiva. Avanzar en la comprensión de esta pérdida, es también un objetivo que persigue el presente capítulo.

La estructura del capitulo es la siguiente. En primer lugar, en el apartado 6.1, comprobaremos que la imposición de los principios conservativos no implica la desaparición del indeterminismo en supertareas newtonianas. Para ello, analizaremos dos sistemas con evoluciones indeterministas. En la sección 6.1.1 se analiza el primer sistema, que llamaremos GC; en la sección 6.1.1.1 se discute una posible evolución de GC propuesta en [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002] y se hace notar que tal evolución hace una suposición que no se justifica; en la sección 6.1.1.2 se presenta la colisión global, evolución que rescata tal suposición a la vez que impone los principios conservativos; en la sección 6.1.1.3 se discuten algunas dificultades de la aplicabilidad de la idea de colisión global a variaciones de GC. En la sección 6.1.2 se analiza el segundo sistema, que llamaremos 2DC; en la sección 6.1.2.1 se presentarán dos procesos conservativos que pueden desarrollarse bajo la condición inicial especificada para 2DC; en la sección 6.1.2.2 se presentará una distinción de supertareas newtonianas que resulta relevante a la hora de considerar la pérdida de la energía en ellas. Tras esto, en el apartado 6.2, analizaremos la posibilidad de que existan supertareas que sean deterministas a la vez que no sean conservativas. En la sección 6.2.1 presentaremos STMNC, una supertarea no conservativa y no manifiestamente indeterminista. En la sección 6.2.2, mostraremos que una gama de sistemas de GSTC son indeterministas bajo la generalización Gμ1; con ello sugeriremos el indeterminismo para STMNC. Para verificar tal sugerencia, en la sección 6.2.3, se presenta una generalización, que llamaremos Gγ1, de supertareas indeterministas bajo reposo y distinta relación de masas. Con ella, en la sección 6.2.4, mostraremos que STMNC efectivamente es indeterminista, así como otras supertareas que en la literatura se han presentado como deterministas. Para terminar el apartado, en la sección 6.2.5 se discute cómo es que, a pesar de Gγ1, todavía se puede decir que la generación del indeterminismo en STMNC está desvinculada de la generación de la energía en STMNC. En el siguiente apartado, el apartado 6.3, veremos una forma más de entender el indeterminismo en supertareas estrictamente sucesivas como STMNC o ST1, a saber, la infinidad de ecuaciones para las velocidades que se conectan sucesiva y causalmente; esto demuestra que la reversión temporal de STMNC sí es un proceso indeterminista. Para verlo con rigor, en la sección 6.3.1 se presenta una generalización, que llamaremos Gμ2, de supertareas newtonianas con un mismo estado final y una misma relación de masas entre partículas contiguas, mientras que en la sección 6.3.2 se presenta una generalización, que llamaremos Gγ2, de supertareas newtonianas también con un mismo estado final pero con una relación de masas entre partículas contiguas distinta. En seguida, en la sección 6.3.3, se analiza el comportamiento de la energía en Gμ2 y Gγ2. Finalmente, en el apartado 6.4, se hace una precisión de los grados en que la pérdida de la energía se encuentra conectada con los diversos tipos de indeterminismo que hemos analizado.

6.1. La imposición de los principios conservativos no implica la desaparición del indeterminismo

Comencemos por ver que hay sistemas en los que el cumplimiento de los principios conservativos no surte siempre el efecto de eliminar el indeterminismo presente en las supertareas newtonianas. En el primer caso, se analizará una evolución posible ante la imposición de tales principios a un sistema problemático. En el segundo caso, se analizarán sistemas con evoluciones naturalmente conservativas. Se verá que en ninguno de los dos casos presenciaremos el destierro del indeterminismo. No se puede responsabilizar, por lo tanto, al fallo de los principios conservativos del indeterminismo que surge en las supertareas newtonianas.[268]

---

[268] Es decir, no es verdadero para las supertareas newtonianas que la conservación implique el determinismo. En otras palabras, no es verdadero que el fallo del determinismo implique el fallo de la conservación. Pérez Laraudogoitia parece decir lo contrario cuando afirma: “I shall prove that there are dynamics systems whose indeterministic evolution implies the violation of the laws of conservation of

6.1.1. El problema originario de la colisión global: una partícula en contra de un conjunto abierto de partículas

Trataremos en primer lugar un sistema al que llamaré GC (de Global Collision) y cuyo estado inicial consta de una sencilla pero crucial variación del estado inicial de ST1. Esta variación fue originalmente propuesta por Alper y Bridger y es aún más problemática que ST1, ya que su misma evolución, y no sólo su estado final, es una fuente rica de problemas. El planteamiento original es el siguiente:

> Consider, first the set-up as in ST1 with particles at points $1/2^i$, i = 1, 2, 3, … Suppose instead of particle P_0 approaching from the right, P_0 approaches from the left, passing through $x = -1$ at $t = 0$ with unit velocity (rightward). What can we say about the evolution of this system? [Alper y Bridger 1998: 366].

En realidad, la colisión global no es más que una propuesta para la evolución de este sistema. (Así, independientemente de si se acepta o no tal evolución, seguiré llamando al sistema GC). Bajo esta idea, que impone una evolución conservativa, resulta que GC es un sistema indeterminista. Antes de presentar y tratar las evoluciones que generan el indeterminismo en este sistema, veamos una propuesta de evolución que la antecede.

6.1.1.1. La desaparición de la partícula P_0

Tomemos, pues, el modelo GC. De $t = 0$ a $t = 1$ P_0 viajará con velocidad constante de $x = -1$ a $x = 0$; así, en el instante $t = 1$, P_0 se encontrará en $x = 0$. Hasta aquí, nada fuera de lo normal ha sucedido. Ahora, ¿qué sucede con el sistema entero para el tiempo $t > 1$? En la misma contribución que plantean el problema, Alper y Bridger sugieren que semejante sistema es incompatible con la mecánica newtoniana. El argumento se muestra a continuación:

> On the one hand, it is impossible to name any particle that is hit by P_0. P_0 cannot hit P_i because in order to do so P_0 must have passed through P_{i+1}, the particle lying immediately to the left of P_i. We conclude that P_0 cannot hit *any* particle. On the other hand, if P_0 does not hit any particle, then its motion is undisturbed, and it arrives at, for example, position $x = ½$ at time $t = 3/2$. But there is a particle, namely P_1 at $x = ½$. P_0 must hit P_1, contradicting the conclusion that P_0 hits none of the particles. […] The systems described in this section are clearly incompatible with Newtonian mechanics [Alper y Bridger 1998: 366-7].[269]

La primera parte del razonamiento es correcta. Si P_0 colisiona con una partícula, por el principio de impenetrabilidad, tiene que ser con la primera, pero no hay una primera

energy and momentum in the strong sense" [Pérez Laraudogoitia 2007a: 23]. Sin embargo, aquí él se refiere a una variación del sistema presentado en [Pérez Laraudogoitia 2002a], del que aquí no nos ocupamos por no consistir en sistemas basados en colisiones elásticas.

[269] En otro lugar, junto con ellos, Earman and Norton también concluyen: "Both Alper and Bridger (1998, 366-7) and Earman and Norton (1998, 129-30) have described a system in which Newton's laws are violated. In their example, if particle P_0 […] were initially at some position x, with $x > 1$, and were to approach the remaining particles from the *right* with velocity $v = -1$, Newton's laws will fail when P_0 arrives at $x = 1$" [Alper, Bridger, Earman y Norton 2000: 291]. En este caso, el sistema ST1 está posicionado especularmente, en vez de que cada partícula se encuentre en $x = 1/2^n$, se encuentra en $x = 1 - 1/2^n$. Por su parte, el sistema al que se refiere en [Earman y Norton 1998] no consiste en partículas puntuales, sino en discos en contacto y en rotación.

partícula.[270] Es decir, bajo el principio de impenetrabilidad, P_0 no puede colisionar con ninguna P_i ($i \geq 1$), pues tendría que atravesar la infinidad de partículas que le anteceden. La segunda parte del razonamiento, en cambio, contiene una asunción un tanto débil. Asume que, por el hecho de que la partícula P_0 no colisiona con ninguna partícula P_i, el movimiento de P_0 no sufre ninguna alteración.[271] Por supuesto, es intuitivamente desfavorable a nuestras intuiciones que P_0 altere su movimiento sin antes colisionar con una partícula concreta. Pero recordemos que lo que es cierto para los sistemas finitos, no necesariamente es cierto para los sistemas infinitos (recordemos también que relegar esta cuestión conduce muchas veces –como precisamente sucede cuando se asume esta premisa– a cometer una falacia de composición). Si P_0 se enfrenta con velocidad constante a un conjunto finito, necesitará colisionar con una partícula concreta para alterar su movimiento. Enseguida veremos que esto no es ninguna necesidad cuando P_0 se enfrenta a un conjunto infinito, como es el caso de GC.

De hecho, en una contribución posterior, Alper y Bridger abandonan tal suposición y proponen que para tiempos $t > 1$ la partícula P_0 desaparece. Esta conclusión la obtienen basándose en el principio

> (P5) A particle P_i has disappeared by time t^* if for any position a, the assertion $x_i(t^*) = a$ leads to a contradiction [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 175].

Que es el mismo principio bajo el que se concluyen las desapariciones que ocurren en ST2 y ST3. Así, brindan el siguiente argumento:

> At time $t = 1$, nothing special happens. P_0 is at $x = 0$, but since none of other particles are either at $x = 0$ or to the left of $x = 0$, there are no collisions. Now choose some time t_1, $t_1 > 1$. Where is P_0 at this time? Suppose it is at $x = a$, where $a > 0$. We can find an integer j such that $1/2^j < a$. But then, by the principle of impenetrability, particle P_0 must have either collided with P_j before P_0 reached $x = a$ or else P_0 collided with some other particle which is to the left of P_j. In either case, P_0 stops moving before it reaches $x = a$. Thus, P_0 is not at $x = a$ for any $a > 0$. It is *equally clear* that it cannot be at any other position $a \leq 0$ either. Since the only restriction on t_1 is that it is greater than 1, assumption (P5) tells us that P_0 must vanish at all times after $t = 1$ [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 184, mis cursivas].

[270] También Allis y Koetsier consideran este modelo un caso imposible de tratar por la mecánica Newtoniana: "the discussion between Pérez Laraudogoitia and Alper & Bridger concerns question like 'What is precisely Newtonian mechanics?' and 'Does it include the systems of pointmasses of ST1 or not?' There are several good reasons not to include the system of pointmasses of ST1. […] as Alper & Bridger point out, if the particle P_0 is initially at $x = -1$, moving with a constant positive velocity $+v$, it is very unclear how we are supposed to write down equations of motion. In this case there is a lot of mass in the way of the moving particle, but at what time does the first collision take place?" [Koetsier y Allis 1997: 310-1]. Koetsier y Allis plantean esta pregunta retóricamente, como si no existiera una respuesta para ella, y el planteamiento presupone que P_0 tiene que encontrarse con una primera partícula; pero no hay una partícula tal. Retomando la dicotomía, también podemos preguntar cuál es el tiempo en el que el corredor alcanza un primer punto, pero ya hemos visto que no hay ningún primer punto (ni primer instante). Esto no es ningún impedimento para que el corredor avance. De manera análoga, si con esa primera colisión (la de la pregunta de Koetsier y Allis) nos referimos a una colisión global, entonces, como se verá en el texto principal, sí podemos saber el tiempo en el que ocurre.

[271] Atkinson atribuye el error de esta suposición al concepto de colisión que se tiene detrás: "Concerning Alper and Bridger's contention that the new ball cannot be brought to rest at the origin because there is no Zeno ball with which it could collide, that depends on how one understands the meaning of the word 'collision'. One says that two systems collide at a given time if they have zero spatial separation at that time, rather than that one point of one system is coincident with a point of the other" [Atkinson 2008: 10]. Claramente, Atkinson aquí también apoya la idea de colisión global.

Así, pues, abandonan la suposición de que el movimiento de P_0 no puede ser alterado si no colisiona con ninguna partícula concreta. En esta ocasión aceptan que el movimiento de la partícula se altera de tal manera que ésta desaparece en cuanto $t > 1$. El argumento que ahora ofrecen es válido, pero una de las premisas no es verdadera. Ciertamente, es claro que la partícula P_0 no puede estar, para tiempos $t > 1$, en alguna posición $x = a > 0$, y el argumento que dan es correcto. Sin embargo, afirman también que es *igual de claro* que P_0 no pueda estar en una posición $x = a \leq 0$, y aquí se echa en falta un argumento que nos lo muestre. Por supuesto, intuitivamente es difícil imaginar de qué manera la partícula P_0 tome una posición $x = a \leq 0$, pero esta intuición no es ningún argumento (sólido) de tal evolución. La colisión global, precisamente, es una evolución en la que se abandona esta premisa y que, además, resulta ser compatible con la mecánica newtoniana. Por ello, es también un argumento en contra de la premisa que afirma que la partícula P_0 no puede estar en una posición $x = a \leq 0$.

Antes de presentar la idea de colisión global y su consistencia con los principios de la mecánica newtoniana, es interesante añadir que en la misma contribución, Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper presentan una evolución de GC en la que, aunque P_0 también desaparece para $t > 1$, la energía y el momento se conservan. La explicación es como sigue:

> Consider once again AB's supertask [GC] in which a particle approaches from the left. After the completion of this supertask, assume a self excitation à la TRST[1]. We then have the following scenario: A particle, P^*, approaches from the left (moving rightward) and disappears at $t = 1$. Then self-excitation occurs, resulting in a sequence of collisions of particles with their right hand neighbors [Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper 2002: 186].

De esta manera, si la auto-excitación de las partículas inicialmente en reposo ocurre bajo la misma velocidad v en la que la partícula P_0 (o mejor, P^* para este ejemplo concreto) viaja inicialmente, la energía y el momento lineal claramente se conservan. En realidad, esta evolución es una idea previa a la idea de colisión global. La diferencia crucial es que en la colisión global se abandona la premisa que afirma que P_0 no puede estar en una posición $x = a \leq 0$ para tiempos $t > 1$.

6.1.1.2. La solución bajo la idea de colisión global: el rescate de los principios conservativos mas no del indeterminismo

Tenemos que la condición inicial de GC, a un tiempo $t = 0$, consiste una partícula P_0 que se encuentra en $x = -1$ con una velocidad constante $v = 1$ mientras que toda partícula P_i (con $i \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) se encuentra en reposo en $x_i = 1/2^i$. Ante esta condición inicial, Pérez Laraudogoitia [2005b] sostiene que es posible que, en el tiempo $t = 1$, ocurre una colisión global, y que tal evolución es acorde a la mecánica newtoniana. La idea de colisión global que propone es la siguiente: en $t = 1$ P_0 colisiona globalmente con el conjunto entero de partículas P_i ($i \geq 1$), es decir, aunque no colisiona con ninguna partícula P_i en particular, sí colisiona globalmente con el conjunto infinito de partículas de tal manera que es una colisión en donde se conserva el momento y la energía (si es elástica). Dicho brevemente, P_0 no interactúa con una sola partícula P_i, sino con todas ellas en conjunto.[272] Una vez que tenemos esta idea base, la cuestión ahora es saber cómo es la evolución que resulta de semejante colisión, y ver si acaso es compatible con la mecánica newtoniana.[273]

La propuesta de Pérez Laraudogoitia asume que, de la misma forma que en todas las supertareas que aquí tratamos, todas las colisiones (incluyendo la colisión global) entre las partículas son elásticas. Tomemos que para un tiempo $t > 1$ cada partícula P_0, P_1, P_2, P_3,… tiene respectivamente una velocidad v_1, v_2, v_3, v_4,… Como para $t \leq 1$ P_0 viaja con una velocidad $v = 1$ mientras que el resto de las partículas se encuentran en reposo, tenemos entonces que la conservación del momento y de la energía se pueden expresar respectivamente en las siguientes relaciones:

$$1 = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots \tag{6.1}$$

$$1 = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots \tag{6.2}$$

En primer lugar, Pérez Laraudogoitia asume que la partícula P_0 transfiere todo su momento lineal y toda su energía cinética al conjunto de partículas P_i ($i \geq 1$). Con esto, tenemos ya una evolución posible y precisa tras una colisión global: en el tiempo $t = 1$ la partícula P_0 llega a la posición $x = 0$ con velocidad $v = 1$, donde colisiona globalmente con el conjunto de partículas P_i ($i \geq 1$) para adquirir, en $t > 1$, una velocidad $v_0 = 0$ mientras que el conjunto P_i ($i \geq 1$) ejecuta una excitación idéntica a TRST1: en momentos muy concretos cada partícula P_i, y únicamente ella, viaja con una velocidad constante $v_i = 1$. Una evolución de estas características, cuyos estados iniciales se encuentran representados respectivamente en las figuras 6.1a) y 6.1b), claramente cumple con los principios conservativos expresados en (6.1) y (6.2).

Aunque la idea de colisión global es interesante como solución al problema que plantea el sistema GC, es todavía más interesante que, siendo una evolución compatible con la mecánica newtoniana, es una evolución que resulta ser indeterminista a pesar de que se impone la conservación de la energía y del momento. Y es que la evolución descrita en el párrafo anterior no es la única que GC puede desarrollar tras una colisión global. Para mostrarlo, Pérez Laraudogoitia asume que P_0, en vez de adquirir tras la colisión global una velocidad $v_0 = 0$, adquiere una velocidad $v_0 < 0$ (que explícitamente es el abandono de la suposición de Alper y Bridger señalada en la sección anterior: que P_0 no puede estar en una posición $x = a \leq 0$ para tiempos $t > 1$). Rescribiendo las ecuaciones (6.1) y (6.2) respectivamente como

$$1 - v_0 - \Sigma = v_1 + v_2 \tag{6.3}$$

$$1 - v_0^2 - \Sigma^* = v_1^2 + v_2^2, \tag{6.4}$$

en donde $\Sigma = v_3 + v_4 + v_5 + \ldots$ y $\Sigma^* = v_3^2 + v_4^2 + v_5^2 + \ldots$, en [Pérez Laraudogoitia 2005: 328-9] se pone en evidencia que, asumiendo una $v_0 < 0$, (6.1) y (6.2) admiten soluciones

[272] En [Angel 2001] se propone un sistema en el que un objeto en reposo interactúa globalmente con una infinidad de esferas (que en pares enfrentan al cuerpo con una velocidad cada vez mayor, y con un volumen cada vez menor, según crecen los subíndices, tendiendo todo par con subíndice $n + 1$ a colisionar con el cuerpo antes que todo par con subíndice n), con el cual sugiere una colisión sin contacto. Como respuesta, Pérez Laraudogoitia argumenta la necesidad de auto-excitaciones de tipo TRST2 en tal sistema, con lo que concluye que “neither Angel’s model, nor any other, may be adduced as proof of impact without contact in classical mechanics” [Pérez Laraudogoitia 2003b: 323]. Posteriormente, [Pérez Laraudogoitia 2006b] propone una variación de este mismo sistema, con anillos en vez de pares de esferas, en donde se evitan las indeterminaciones de las colisiones triples del anterior; en este caso, y sin involucrar ninguna supertarea, concluye la desaparición del cuerpo.

[273] La desaparición de P_0 sugerida por Alper y Bridger también constituye una interacción global con el conjunto entero de partículas P_i. Me limito, sin embargo, a utilizar el término ‘colisión global’ únicamente a la interacción entre una partícula y un conjunto abierto de partículas cuando tal interacción sea por contacto y conserve la energía y el momento lineal (al menos en un marco de referencia inercial).

para $0 < v_1 \neq v_2 > 0$ si se cumplen las siguientes condiciones: a) $1-\sqrt{2}\sqrt{1-\Sigma^*} < \Sigma < 1$, b) $0 \leq \Sigma^* < 1$, c) $\Sigma < 1 - v_0$ y d) $\Sigma^* < 1 - v_0^2$.[274]

¿Cómo es una evolución que cumple estas condiciones? Tenemos que $v_0 < 0$, y que $0 < v_1 \neq v_2 > 0$. Asumamos además que $v_i = 0$ para todo $i \geq 3$ y que $v_0 > -1$, lo que hace que a), b), c) y d) se cumplan. Por lo tanto, si P_1 tiene una velocidad $v_1 > 0$ y P_2 una velocidad $v_2 > 0$, entonces v_1 anteriormente le fue transmitida a P_1 por P_2, a P_2 por P_3, a P_3 por P_4, y así sucesivamente. De la misma manera, v_2 le fue transmitida a P_2 por P_3, a P_3 por P_4, a P_4 por P_5, y así sucesivamente. Es decir, inmediatamente después de t

[274] La condición a) obtenida por Pérez Laraudogoitia no es la misma que la escrita en el texto principal. Su condición, $1-\sqrt{2}\sqrt{1-\Sigma^*} < \Sigma < 1+\sqrt{2}\sqrt{1-\Sigma^*}$, que llamaremos a'), se deduce de un análisis deficiente. Tras establecer que (6.3) y (6.4) pueden expresarse como $a = v_1 + v_2$ y $b = v_1^2 + v_2^2$, escribe: "Verifying that solutions exist for v_1 and v_2 which are positive and different if and only if $a > 0$, $b > 0$ and $2b > a^2$ is an exercise in elementary analytical geometry" [Pérez Laraudogoitia 2005b: 328]. Pero posteriormente a un ejercicio de geometría analítica elemental se obtiene que $0 < v_1 \neq v_2 > 0 \leftrightarrow a > 0 \wedge b > 0 \wedge 2b > a^2 > b$. Pérez Laraudogoitia no considera la condición $a^2 > b$. Considerémosla ahora: $a^2 > b$ equivale, de (6.3) y (6.4), a $(1 - v_0 - \Sigma)^2 > 1 - v_0^2 - \Sigma^*$, o sea, a $2v_0^2 + 2(\Sigma - 1)v_0 + \Sigma^2 - 2\Sigma + \Sigma^* > 0$, lo que implica que

$$v_0 < \frac{1-\Sigma-\sqrt{-\Sigma^2+2\Sigma-2\Sigma^*+1}}{2} \tag{6.n1}$$

o que

$$v_0 > \frac{1-\Sigma+\sqrt{-\Sigma^2+2\Sigma-2\Sigma^*+1}}{2}. \tag{6.n2}$$

Para que (6.n1) y (6.n2) tengan un sentido físico, es necesario que $-\Sigma^2 + 2\Sigma - 2\Sigma^* \geq 0$, o sea, que

$$1-\sqrt{2}\sqrt{1-\Sigma^*} \leq \Sigma \leq 1+\sqrt{2}\sqrt{1-\Sigma^*}, \tag{6.n3}$$

que es igual a la condición a'); para que a su vez (6.n3) tenga un sentido físico es necesario que

$$\Sigma^* \leq 1. \tag{6.n4}$$

Ahora bien, (6.n1) nos garantiza que v_0 puede tomar valores negativos. Pero de la condición $2b > a^2$ se deduce (véase en [Pérez Laraudogoitia, 2005: 329]) que

$$\frac{1-\Sigma-\sqrt{-2\Sigma^2+4\Sigma-\Sigma^*+4}}{3} < v_0. \tag{6.n5}$$

Entonces, de (6.n1) y (6.n5) es necesario que

$$\frac{1-\Sigma-\sqrt{-2\Sigma^2+4\Sigma-6\Sigma^*+4}}{3} < \frac{1-\Sigma-\sqrt{-\Sigma^2+2\Sigma-2\Sigma^*+1}}{2}, \tag{6.n6}$$

que es una igualdad un tanto compleja. Como estamos buscando condiciones que nos garanticen que hay soluciones para (6.1) y (6.2) de tal manera que $0 < v_1 \neq v_2 > 0$, establezcamos, para hacer las cosas simples, que

$$\Sigma < 1. \tag{6.n7}$$

Entonces, de (6.n6) y (6.n7) se sigue que (6.n6) se debe cumplir si $\frac{\sqrt{-\Sigma^2+2\Sigma-2\Sigma^*+1}}{2} < \frac{\sqrt{-2\Sigma^2+4\Sigma-6\Sigma^*+4}}{3}$, o sea, si

$$\Sigma^2-2\Sigma-6\Sigma^*+7 > 0. \tag{6.n8}$$

Ahora bien, de (6.n8) podemos tomar $y = \Sigma^2-2\Sigma-6\Sigma^*+7$, una parábola que se abre hacia arriba (cuando el eje y es el vertical y el eje Σ es el horizontal en un plano cartesiano), y ver que $y = 0$ cuando $\Sigma = 1 \pm \sqrt{6}\sqrt{\Sigma^*-1}$, y entonces cuando $\sqrt{\Sigma^*-1}$ es un número imaginario no habrá punto alguno en que la parábola toque o cruce el eje Σ, o sea, que $y > 0$. Por lo tanto, (6.n8) se cumple cuando

$$\Sigma^* < 1 \tag{6.n9}$$

y

$$\Sigma \in \mathbf{R} \tag{6.n10}$$

Finalmente, a) se obtiene considerando las restricciones establecidas por (6.n3), (6.n7), (6.n10), y a'). También se puede apreciar que considerando (6.n4) y (6.n9), b) permanece igual. Por su parte, c) y d), que se obtienen a partir de (6.3) y (6.4) considerando que $0 < v_1 \neq v_2 > 0$, también permanecen iguales.

= 1, cuando la colisión global ocurre, el subconjunto de partículas P_i ($i \geq 1$) comienza a ejecutar simultáneamente dos procesos TRST1, cada uno con una velocidad distinta (un proceso, claro está, se desenvolverá más rápido que el otro). Al final del proceso, P_1 termina con v_1 (que forzosamente será mayor a v_2) y P_2 con v_2, mientras que P_0 se encuentra viajando con una velocidad v_0 hacia la izquierda, alejándose del sistema de partículas P_i ($i \geq 3$) que a su vez termina en reposo.[275] Una representación gráfica de este estado final se encuentra en la figura 6.1c).

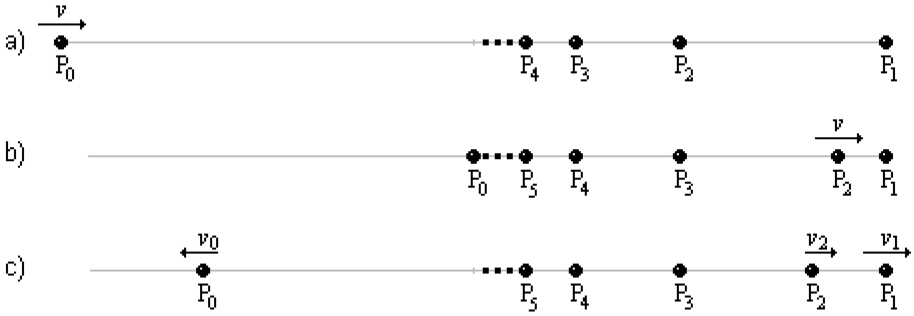


Figura 6.1. Colisión global de P_0 con P_i ($i \geq 1$) en el sistema GC. a) Algún instante anterior a la colisión global en GC; P_0 viaja con velocidad unitaria mientras el resto de partículas está en reposo. b) Algún instante posterior a la colisión global bajo la cual P_0 adquiere el reposo y el conjunto P_i ($i \geq 1$) ejecuta TRST1 con velocidad unitaria. c) Algún instante posterior a la colisión global bajo la cual P_0 adquiere una velocidad $v_0 < 0$ y el conjunto P_i ($i \geq 1$) ejecuta simultáneamente dos procesos TRST1 con velocidades $0 < v_1 \neq v_2 > 0$.

Lo más relevante de este proceso es que, aunque se sabe que el sistema P_i ($i \geq 1$) se excitará con dos velocidades (o quizá con más)[276], no se sabe de qué magnitud serán las mismas. Si la partícula P_0, tras la colisión global con el conjunto P_i ($i \geq 1$), adquiere una velocidad $v_0 < 0$, entonces el conjunto P_i ($i \geq 1$) puede excitarse con dos velocidades distintas y mayores a cero v_1 y v_2. Pero hay una gama infinita de valores que estas velocidades podrían tomar. Por ejemplo, si escogemos un valor para v_1 de tal manera que $0 < v_1 < 1$ y los sustituimos en $v_2 = \frac{1-v_1+\sqrt{1+2v_1-3v_1^2}}{2}$, obtenemos entonces una velocidad $v_0 = 1 - v_1 - v_2 < 0$ que satisface (6.3) y (6.4) (o (6.1) y (6.2)). Estas posibilidades son infinitas y todas ellas son acordes con la conservación del momento lineal y de la energía cinética. Cualquiera de estos valores que tomen las velocidades es igual de compatible con los principios de la mecánica newtoniana. El sistema GC es indeterminista bajo la colisión global, un proceso que es estrictamente conservativo.[277]

---

[275] Como explicación complementeria, transcribimos la que nos brinda Pérez Laraudogoitia: “To see how this solution can be understood in terms of the excitation of the system of particles P_i ($i \geq 1$), it is a good idea to reinterpret (1) [(6.1)] and (2) [(6.2)] such that, with v_0 remaining as the velocity of P_0 after the global collision, the v_i ($i \geq 1$) will be the velocities of the particles P_i ($i \geq 1$) involved, but without presupposing any correspondence of subindices (i.e., that v_1 is the velocity of P_1, v_2 that of P_2, and so on). After the global collision we have a $v_0 < 0$ (the withdrawal velocity of P_0) and two positive and distinct velocities v_1 and v_2, which may be velocities of different particles in different times t (t >1)” [Pérez Laraudogoitia 2005b: 329-30].

[276] Esto todavía no se ha explicitado, pero tampoco tiene mucho interés hacerlo. Es suficiente saber que, el sistema puede excitarse bajo una colisión global con dos procesos simultáneos de TRST1 cuyas velocidades son distintas, y que en tal caso la evolución que presenta es indeterminista.

[277] La colisión global parece contradecir a Pérez Laraudogoitia cuando en una contribución posterior dice: “all indeterministic supertasks known to date lead to the non-conservation of energy” [Pérez Laraudogoitia 2008: 367]. Sin embargo, en esta nueva contribución, además de referirse a la conservación de la energía en un sentido fuerte (es decir, que se cumple en todo marco de referencia inercial), se refiere

Para terminar la sección, recordemos que en la sección anterior vimos que Alper y Bridger descartan, sin ofrecer ningún argumento, la posibilidad de que P_0 tome una velocidad $v_0 < 0$ para $t > 1$. Ciertamente, la adquisición de esta velocidad por parte de P_0 es un tanto contraintuitiva, y una explicación adicional que ayude a disolver la contraintuición es valiosa. Una explicación de estas características la tenemos al mirar a la reversión temporal de la colisión global. En semejante proceso tenemos inicialmente que, a un tiempo $t < -1$, la partícula P_0 viaja con $v_0 > 0$ hacia el conjunto abierto de partículas P_i ($i \geq 1$) mientras que P_1 y P_2 viajan respectivamente con $0 > v_1 \neq v_2 < 0$ listas para desencadenar, cada una por su parte, una supertarea ST1 sobre el resto de partículas P_i ($i \geq 1$) que tienen por delante. Así las cosas, a un tiempo $t = -1$ cada partícula P_i ($i \geq 1$) se encontrará con una velocidad nula, mientras que la partícula P_0 adquiere una velocidad $v = -1$.[278] A tiempos $t > -1$, la partícula P_0 se alejará de P_i ($i \geq 1$) por la izquierda con $v = -1$, mientras que P_i ($i \geq 1$) continuará en reposo (siempre y cuando se siga conservando la energía). Esta explicación ayuda a posicionar la idea de colisión global a favor de nuestras intuiciones, ya que resulta natural, según el estado inicial de la reversión temporal descrita, que P_1, por medio de las partículas P_i ($i \geq 2$), y que P_2, por medio de las partículas P_i ($i \geq 3$), transmitan su momento y energía a P_0.

6.1.1.3. ¿Es aplicable la idea de colisión global a otros sistemas?

Hay motivos para dudar de la aplicabilidad de la idea de colisión global a sistemas semejantes a GC. La inquietud surge con el planteamiento de una variación de GC en donde la masa total es finita. Esta variación es un sistema, además, que resulta ser mucho más interesante debido a que en todo marco de referencia inercial podría tener una energía bien definida –una energía finita–.[279] Esto es importante ya que, precisamente, la imposición de la conservación de la energía está encerrada en la idea de colisión global.

Tomemos por ejemplo el caso en el que todas las partículas P_i ($i \geq 1$) guardan una relación de masas constante $\mu = ½$ entre partículas contiguas, y que la masa de P_1 es

---

exclusivamente a supertareas de ordinalidad ω o ω^*; la ordinalidad de la colisión global es $1 + \omega^*$ o $\omega + 1$.

[278] Este proceso revertido de la colisión global original a su vez es otra colisión global. Sin embargo, la evolución revertida no parece ser indeterminista (bajo tal colisión global). Puede pensarse que, como resultado de este proceso revertido, el sistema evoluciona justo como evoluciona la colisión global original. Esto parece imposible si mantenemos la imposición de la conservación del momento lineal y la energía. Si tal evolución se presentara, en tiempos $t < -1$ y $t > -1$ la energía claramente sería la misma en todo momento; sin embargo, en $t = -1$ todas las partículas P_i ($i \geq 1$) tendrían una velocidad nula y, para que se conservara el momento y la energía, P_0 deberá tener una velocidad distinta a v_0 o $-v_0$. Pero no parece haber ningún sentido no *ad hoc* para que P_0 tome por un solo instante una velocidad de esas características.

[279] A este respecto, Pérez Laraudogoitia [2007a: 22] hace una distinción importante: en una supertarea ocurre una pérdida de la energía en un sentido fuerte cuando la pérdida se da en todo marco de referencia inercial (como en ST1A), mientras que ocurre una pérdida de la energía en un sentido débil cuando la pérdida de la energía se da exclusivamente en un marco de referencia inercial (como en ST1). Sin duda, son de mayor interés los sistemas que pierden la energía en un sentido fuerte. Hay que añadir, sin embargo, que la pérdida de la energía en un sentido fuerte no implica una energía bien definida –finita– del sistema en todo momento. Puede ocurrir que en todo marco de referencia inercial el sistema pase de tener una energía finita a una energía infinita, o viceversa. Por otro lado, en [Pérez Laraudogoitia 1998b: 505-6] el autor propone, ante ST1 y ante la conservación de la energía en el resto de marcos de referencia inerciales, comprender la conservación de la energía introduciendo una energía de reposo; como él mismo reconoce [Pérez Laraudogoitia 2007a: 24], esta propuesta fracasa dada la existencia de sistemas para los que la energía se pierde en un sentido fuerte.

la misma que la de P_0. Si el estado inicial de este sistema, a $t = 0$, es idéntico que el de GC salvo las masas de las partículas, ¿cuál o cuáles son las evoluciones posibles para $t > 1$? ¿Qué ocurre tras una colisión global de P_0 con P_i ($i \geq 1$) en esta variación de GC?

La conservación de la energía cinética y del momento lineal expresados en el sistema (6.1) (6.2), para este caso quedan expresadas como

$$1 = v_0 + v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{4}v_3 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}v_n + \cdots \tag{6.5}$$

$$1 = {v_0}^2 + {v_1}^2 + \frac{1}{2}{v_2}^2 + \frac{1}{4}{v_3}^2 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}{v_n}^2 + \cdots \tag{6.6}$$

Aunque el sistema (6.5) (6.6) tenga soluciones del mismo tipo que se encontraron para (6.1) (6.2), no es directo hacer la misma interpretación que entonces se hizo para el sistema GC originario. Si hay valores de $v_0 < 0$ y de v_1 y v_2 tal que $0 < v_1 \neq v_2 > 0$ que satisfacen (6.5) (6.6) mientras que el resto de velocidades son nulas, no es nada claro que tal sea el resultado de una excitación (o varias) que se haya(n) propagado a partir del punto de acumulación. Para que P_1 obtenga una velocidad v_1 y P_2 una velocidad v_2 de esas características, tuvieron antes que haber colisionado con las precedentes partículas que, debido a la relación de masas que existe entre ellas, es sumamente difícil que obtengan el reposo.

Si seguimos como estrategia la búsqueda de las evoluciones que el subconjunto P_i ($i \geq 1$) desarrolla para terminar con un reposo total de sus partículas (tal como se encuentra inicialmente), para luego ver si acaso alguno de esos procesos revertidos en el tiempo pueden desencadenarse como consecuencia de una colisión global, también nos encontramos con una tarea altamente compleja. Por ejemplo, hasta ahora conocemos que el caso $\mu = ½$ de Gµ1 es un proceso que termina con todas sus partículas en reposo y cuyo estado final se corresponde con el estado inicial del subconjunto P_i ($i \geq 1$). Sin embargo, no es posible que una reversión temporal, o un conjunto de reversiones temporales, de Gµ1 con $\mu = ½$ se desencadenen tras una colisión global con P_0. Como ya se explicó en la sección 5.5.2, debido a la velocidad de cada partícula (expresada en (5.9) para el caso $\mu = ½$), la excitación de P_i ($i \geq 1$) sería expansiva y, por tanto, una vez que ha comenzado, un número infinito de partículas tienen velocidades tales que necesitan la región $x < 0$ para moverse libremente. Ante esto, puede pensarse que la partícula P_0 escapa al infinito o, mejor dicho, desaparece. Si tal fuera el caso, tenemos, de todas formas, que la energía no se conserva (pues la ejecución de la reversión temporal de Gµ1 brinda una energía infinita al subsistema P_i ($i \geq 1$)), no cumpliendo así la imposición de la conservación de la energía en la cual se basa la idea colisión global. Así las cosas, en caso de que exista una excitación del subconjunto P_i ($i \geq 1$) resultado de una colisión global y consistente con la conservación de la energía y del momento para GC con $\mu = ½$, tal excitación tiene que ser distinta a la reversión temporal de Gµ1.

Es interesante notar aquí que para que un conjunto infinito de partículas P_1, P_2, P_3, P_4, … (acomodados espacialmente en el mismo orden) que interactúan exclusivamente bajo colisiones elásticas binarias termine en reposo, es necesario que las partículas adquieran una por una y sucesivamente el reposo definitivo[280]. Es decir, si t_1 es el instante en el que P_1 adquiere el reposo definitivo, t_2 el instante en que P_2 adquiere el reposo definitivo y, en general, t_n el instante en el que P_n adquiere el reposo definitivo

[280] Por 'reposo definitivo' aquí me refiero al reposo que obtiene la partícula en cuestión para no volver a salir del reposo *durante* todo el proceso que desenvuelve el sistema completo que lo lleva al reposo de todas sus partículas como estado final. Estrictamente hablando, no es un reposo definitivo ya que, una vez que el proceso termine, el sistema evidentemente puede auto-excitarse para sacar de tal reposo a la partícula en cuestión.

(con $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), entonces $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots$ (esto no impide que en algún momento alguna partícula ya esté en reposo, lo pierda durante el proceso, para final y definitivamente volverlo a obtener). Para mostrarlo, asumamos que P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1} se encuentran con velocidades distintas a cero, que P_n se encuentra con velocidad igual a cero y que P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3}, … con velocidades distintas a cero. Ahora bien, si asumimos que la partícula P_n (con subíndice $n > 1$) ya no sale más del reposo (es decir, que ya ha obtenido el reposo definitivo), entonces el conjunto P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1} tiene que obtener el reposo por sí mismo. Pero esto es imposible; para una colisión elástica binaria no es posible que de cada par de partículas que participan en la colisión, ambas partículas terminen en reposo. Por lo tanto, sean como sean las colisiones (elásticas binarias) entre P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1}, al menos una partícula terminará con una velocidad distinta de cero. Por lo tanto, el conjunto de partículas P_1, P_2, P_3, …, P_{n-1} no puede obtener el reposo definitivo antes que P_n. Así, P_1 tiene que obtener el reposo definitivo antes que P_2; P_1 y P_2 tienen que obtener el reposo definitivo antes que P_3; P_1, P_2 y P_3 tienen que obtener el reposo definitivo antes que P_3; y en general, P_1, P_2, P_3, …, P_n tienen que obtener el reposo definitivo antes que P_{n+1}. Por ello, hay una supertarea estrictamente sucesiva en la que las partículas obtienen el reposo en estricta sucesión; es decir, independientemente y por complejas que sean las colisiones que las partículas lleven a cabo, habrá una última supertarea que consiste en una sucesión de últimas colisiones, en las que cada partícula obtiene el reposo definitivo sucesivamente. Ahora bien, la supertarea de estas características y en la que, además, sólo se llevan a cabo tales últimas colisiones, es indudablemente la correspondiente a Gμ1. Pero como ya hemos visto en el párrafo anterior, la correspondiente reversión temporal de Gμ1 no puede ser una evolución posible resultado de la colisión global. Por lo tanto, tras una colisión global, las partículas del subconjunto P_i ($i \geq 1$) deberán colisionar entre sí antes de ejecutar la última colisión descrita por Gμ1. Aquí surge un problema, a saber, que especificar un proceso que evolucione con tales colisiones es una tarea sumamente compleja. Es una tarea, además, que presupone que existe una evolución consistente de esas características; pero esta es una suposición de la que, por lo pronto, no podemos estar seguros.

Llegamos aquí a un estado de incertidumbre relevante. Por un lado, se puede creer que existe un proceso de colisiones elásticas entre las partículas P_i ($i \geq 1$) tal que sea consistente con la idea de colisión global. Por el otro lado, se puede tomar la posición antagónica: ser escéptico de la existencia de una evolución de tales características. Cualquiera de las dos posturas carece de pruebas convincentes. Los que abogan por la primera, tienen que mostrar que, independientemente de las masas de las partículas P_i ($i \geq 1$) (y cuando la masa total sea finita, si se quiere hacer sentido de la conservación de la energía en todo marco de referencia inercial; el caso de $\mu = ½$ es tan solo un ejemplo), existe al menos una evolución basada en colisiones elásticas consistente con la idea de colisión global. A los que se inclinan por la posición contraria, les queda por mostrar que hay al menos un sistema de partículas P_i ($i \geq 1$) con masa total finita que no puede tomar una evolución consistente con la idea de colisión global. Todo parece indicar que, en caso de que sea posible encontrar una prueba de alguna de estas dos posiciones, su búsqueda no deja de ser una tarea considerablemente ambiciosa.[281]

En cualquier caso, la incertidumbre actual de la cuestión invita a considerar la idea de colisión global como una idea que carece de la solidez suficiente; al menos para

[281] Al final de [Atkinson y Johnson 2009] los autores prometen un próximo artículo que aborda el problema de la colisión global. Ignoro por completo si alguna de las reflexiones hechas en esta sección también serán expuestas allí, así como los resultados que allí se proyecta presentar.

algunos sistemas (sistemas que, además, son más interesantes debido a la energía definida que involucran). Cabe señalar, que esto no es un motivo para descartar la idea de colisión global aplicada a sistemas como GC. Se ha probado que es una idea consistente con la mecánica newtoniana y con los principios conservativos. Esta prueba es una explicación no *ad hoc* de por qué la idea de colisión global se aplica a GC, por ejemplo, aunque no se aplique a otros sistemas. Puede haber una tendencia a pensar que, si la colisión global se aplica a algunos sistemas en los que una partícula enfrenta a un conjunto abierto de partículas, entonces deberá aplicarse a todos los sistemas de esas características. Hacer esto sería imponer una nueva legislación que mande la consistencia de una colisión global para todos los sistemas que se consideren newtonianos. Pero esto no parece ser correcto; sobre todo si todos estos sistemas tienen una evolución consistente con los principios que conforman la mecánica newtoniana e incluso, si se desean imponer, con los principios conservativos. Sería una extensión innecesaria de la mecánica newtoniana. La incertidumbre, pues, sobre la aplicabilidad de la idea de colisión global en algunos sistemas (por ejemplo, en GC con $\mu = ½$) no implica que estos sistemas no sean newtonianos. Lo único que esta incertidumbre sugiere es que, quizá, sea más razonable considerar otro tipo de procesos como resultado de la interacción de P_0 con el conjunto abierto P_i ($i \geq 1$). Tal vez la desaparición de P_0 para el tiempo $t > 1$, que ya se explicó en la sección 6.1.1.1, sea la evolución más plausible para esos sistemas.

6.1.2. Supertareas bidimensionales: indeterminismo y conservación prescindiendo de la idea de colisión global

Para todo aquel que estime, ya sea partiendo de las consideraciones con las que cerramos la sección anterior o en cualesquiera otras, que la colisión global, aunque metafísicamente aceptable, es una idea físicamente inaceptable (en términos siempre de una teoría física), es preciso mostrar que hay supertareas indeterministas, que prescinden por completo de la idea de colisión global, y en las que el principio de conservación de la energía (al igual que el principio de conservación del momento) se cumple.

6.1.2.1. Dos supertareas bidimensionales conservativas ante un mismo estado inicial

Un ejemplo de este tipo de supertareas, recientemente fue propuesto por Pérez Laraudogoitia [2008: 367-75]. Consiste en un sistema infinito de partículas P_1, P_2, P_3, P_4, … posicionadas en un espacio bidimensional. En el estado inicial (digamos a un tiempo $t = 0$) todas las partículas se encuentran posicionadas sobre el eje x, de tal manera que las partículas con índice impar P_{2n+1} están en la posición $x_{2n+1} = \frac{2}{3}\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)$ mientras que las partículas $P_{2(n+1)}$ con índice par se encuentran en la posición $x_{2(n+1)} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{4^n-1}{4^n}\right)$ (en donde $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$). Además, toda partícula con índice impar viaja en este instante con una velocidad constante $\boldsymbol{v}_{2n+1} = (\cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$ a la vez que toda partícula con índice par lleva una velocidad constante $\boldsymbol{v}_{2(n+1)} = (-\cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{4})$; la magnitud de la velocidad de todas las partículas, pues, es la unidad, las impares en dirección a la diagonal de 45º sobre el eje x y las pares en dirección a la diagonal de

135º sobre el eje x. Tal estado inicial, de este sistema que llamaremos de aquí en adelante 2DC, está representado en la figura 6.2.

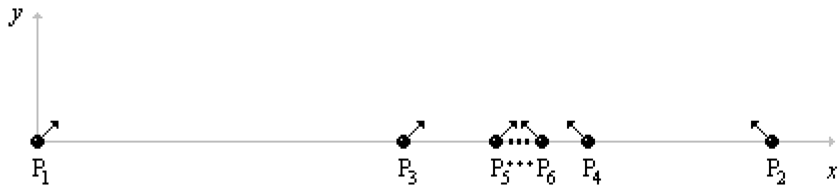


Figura 6.2. Estado inicial del sistema 2DC. Las partículas con etiqueta impar están posicionadas en $x_{2n+1} = (2/3)(4^n - 1)/4^n$ y las de etiqueta par en $x_{2(n+1)} = 1 - (1/3)(4^n - 1)/4^n$ sobre el eje x. Las partículas impares tienen una velocidad constante unitaria $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y las impar $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

¿Cómo evoluciona el sistema ante semejante condición inicial? Pérez Laraudogoitia muestra que, bajo los principios de la mecánica newtoniana, hay al menos dos procesos acordes con dicha condición inicial. Uno, llamado supertarea A, en el que ocurre en términos precisos lo siguiente:

> Each particle P_{2n+1} collides once and only once with $P_{2(n+1)}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$), and these are the only collisions that occur [Pérez Laraudogoitia 2008: 370].

En el otro, llamado supertarea B, ocurre en términos precisos lo siguiente:

> Each particle P_{2n+1} collides once and only once with P_{2n} ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$), and these are the only collisions that occur [Pérez Laraudogoitia 2008: 373].

Ambas son supertareas de ordinalidad ω^*; no podemos, pues, hablar de una primera colisión simplemente porque no la hay. Podemos, sin embargo, describir regresivamente cada supertarea. En el caso del proceso A, P_1 describirá una trayectoria en diagonal (en 45º sobre el eje x) para terminar colisionando con P_2 que también describe una trayectoria en diagonal (en 135º sobre el eje x); tiempo antes, y describiendo trayectorias respectivamente paralelas, P_3 colisiona con P_4; un poco antes, P_5 colisiona con P_6, que también habían seguido trayectorias respectivamente paralelas; y así sucesivamente. En el caso del proceso B, P_1 describirá una trayectoria diagonal (en 45º sobre el eje x) pero no colisionará con ninguna partícula debido a que tiempo antes P_3, que viajaba describiendo una trayectoria diagonal (en 45º sobre el eje x) colisiona con P_2 que viajaba describiendo una trayectoria diagonal (en 135º sobre el eje x); anteriormente, P_5 colisiona con P_4 describiendo trayectorias respectivamente paralelas; antes de esto, y también describiendo trayectorias respectivamente paralelas, P_7 colisiona con P_6; y así sucesivamente. Puestas de forma gráfica, las trayectorias que siguen las primeras partículas (que serán las últimas en colisionar) en estos procesos, desde el estado inicial hasta la colisión con su correspondiente pareja en cada caso, están representadas en la figura 6.3.

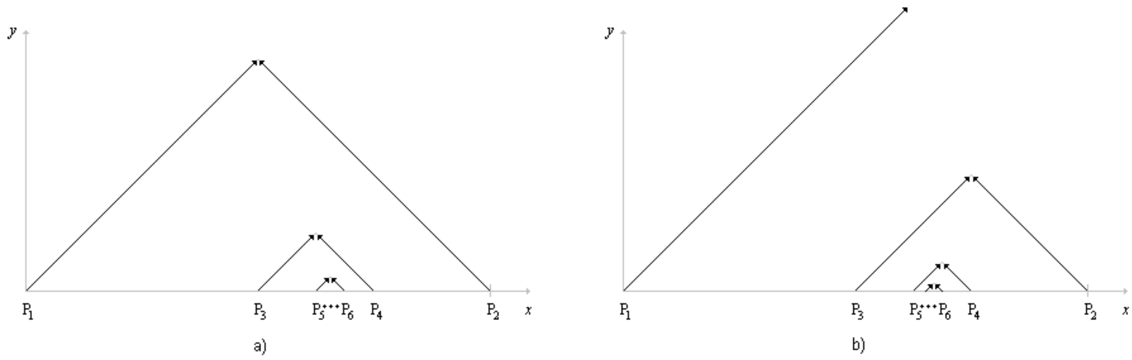


Figura 6.3. Dos evoluciones posibles para 2DC. a) Supertarea A: cada partícula P_{2n-1} colisiona únicamente con la partícula P_{2n}. b) Supertarea B: cada partícula P_{2n+1} colisiona únicamente con la partícula P_{2n}. En ambos casos: no ocurre ninguna otra colisión; $n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Hay que añadir que, en cada caso, la colisión de cada par de partículas ocurre de la siguiente manera: la partícula de masa menor choca frontalmente con la partícula de masa mayor, de tal manera que la partícula de masa menor, que describe una trayectoria perpendicular con respecto a la partícula de masa mayor, transfiere momento y energía en dirección de la trayectoria de la partícula de masa menor, mientras que el momento y la energía en dirección de la trayectoria de la partícula de masa mayor se mantiene en cada una de las partículas.[282] Bajo colisiones de estas características, las trayectorias que siguen cada partícula, posteriormente a la colisión especificada, no interceptan a ninguna otra partícula para impedir o modificar las colisiones que restan ejecutarse según se ha especificado. Así las cosas, las supertareas A y B son procesos auto-consistentes. No me detendré en comentar la consistencia de estas supertareas; la demostración de que es así (que se encuentra detallada en [Pérez Laraudogoitia 2008: 370-5]), además de seguir un desarrollo largo, me parece indiscutiblemente correcta.[283]

[282] Por ejemplo, si un par de partículas *P* de masa 2*m* y *Q* de masa *m* viajan respectivamente con velocidades (0, 1) y (1, 0), tras una colisión como la especificada en el texto principal las partículas obtendrán respectivamente las velocidades (2/3, 1) y (–1/3, 0). (Este, por supuesto, no es el único resultado posible de una colisión binaria en un espacio bidimensional). Nótese que este mismo ejemplo, visto en un marco de referencia inercial que se mueve con una velocidad (0, 1) respecto del original, las partículas tienen respectivamente velocidades iniciales (0, 0) y (1, –1) y como velocidades finales (2/3, 0) y (–1/3, –1); el intercambio de momento y de energía no se limita a la dirección del eje que la velocidad (1, –1) de *Q* sigue como trayectoria. Esta observación es importante para la siguiente nota.

[283] Me permitiré, sin embargo, dar una explicación gráfica que resulta ser elegante. Hay un marco de referencia inercial del sistema 2DC (tomemos el caso de A) en el cual inicialmente las partículas impares se encuentran en reposo sobre el eje *x* mientras que las pares, también sobre el eje *x*, viajan hacia las partículas en reposo. Aquí parece que el conjunto de partículas pares tendría que colisionar globalmente con el conjunto de partículas impares. No obstante, como se explicó al final de la nota anterior, tras una colisión binaria que se da en un espacio bidimensional entre partículas que inicialmente siguen un eje como trayectoria, las partículas pueden obtener velocidades que las saquen del eje inicial de trayectoria. Nuestras partículas aquí no están confinadas a un espacio unidimensional (una colisión binaria en un espacio bidimensional es en sí un sistema indeterminado). Es, de hecho, bajo la imposición de una evolución concreta para toda colisión –que por eso no se restringe a un espacio unidimensional– que se muestra que, aún así, el sistema 2DC es conservativo pero indeterminista. Tenemos, pues, en el nuevo marco de referencia inercial, que los dos conjuntos de partículas inicialmente se enfrentan –un primero en reposo y un segundo que se enfrenta al primero con velocidad constante–, y que conforme chocan en pares abandonan la dirección del eje *x*. Las partículas que ya han colisionado (siempre en pares), por tanto, no impiden que las partículas que no han colisionado colisionen tal como se especifica, pues claramente se encuentran fuera de su curso (parten del eje *x* hacia el exterior de él mientras las demás siguen en el eje *x*). Por su parte, cada par de partículas que colisiona no alcanza a ningún otro par de partículas que anteriormente ha colisionado: cada partícula impar (para el caso de A) se encuentra inicialmente en reposo en una posición distinta de las demás, por lo que cada colisión ocurre en una

Lo interesante aquí es destacar que las supertareas A y B en las que el sistema 2DC puede evolucionar son procesos conservativos a pesar del indeterminismo que implican para 2DC, y por tanto, que el indeterminismo en supertareas newtonianas no necesariamente está conectado al fallo del principio de la conservación de la energía.

6.1.2.2. Supertareas de tipo I y tipo II: una distinción importante para la conservación de la energía

A estas alturas de la discusión, es interesante hacer una distinción entre dos tipos de supertareas newtonianas:

Supertareas newtonianas de tipo I: supertareas newtonianas de ordinalidad ω o ω^* para las que *no* se puede hacer una partición de subsistemas (distintos al sistema completo) en la cual la evolución de cada uno de los subsistemas sea independiente de la evolución de cualquier otro subsistema.

Supertareas newtonianas de tipo II: supertareas newtonianas de ordinalidad ω o ω^* para las que se puede hacer una partición de subsistemas (distintos al sistema completo) en la cual la evolución de cada uno de los subsistemas sea independiente de la evolución de cualquier otro subsistema.

Las supertareas A y B de 2DC claramente son de tipo II. La partición cuyos subsistemas son cada par de partículas que colisionan, en cada caso, evolucionarán tal y como evolucionan incluso si se encontraran aislados del resto de subsistemas. Nótese que el hecho de que las supertareas A y B sean de tipo II no implica que el sistema 2DC sea determinista; la independencia de la evolución entre los subsistemas en una evolución determinada de un sistema no implica que tal evolución sea la única que pueda tomar tal sistema y que, por tanto, sea determinista. De la misma manera, la supertarea descritas por el proceso Q del sistema 2DM2, así como los proceso planteado originalmente para 2D y 2DM1, también son supertareas de tipo II, no así los procesos de 2DM2 o 2D en los que ocurre una auto-excitación de las partículas alineadas en un eje. Por otro lado, las supertareas ST1, ST2, ST3, ST1A, así como las incluidas en GSTC, por ejemplo, son supertareas de tipo I. Aunque en ellas siempre podremos encontrar un subsistema cuya evolución es independiente del resto, a saber, el sistema que incluye todas las partículas P_1, P_2, P_3, …, P_n (excluyendo, evidentemente, el subsistema que incluye la totalidad de partículas, tal como lo hemos definido), la evolución del resto de los subsistemas siempre dependerá, para que evolucione tal como la supertarea en cuestión describe, de la evolución que desarrolle este primer subsistema; el resto de sistemas, considerados aisladamente, no podrá describir la subevolución correspondiente a la supertarea en cuestión (esto no implicará, de ninguna manera, que tales subsistemas sean deterministas o que no puedan ejecutar por sí mismos otras supertareas). Por su parte, la colisión global en el sistema GC no es ni de tipo I ni de tipo II, pues su ordinalidad es $1 + \omega^*$ (mientras que su reversión temporal es de ordinalidad $\omega + 1$).

---

coordenada distinta, y como todo par de partículas termina con el mismo par de velocidades, cada partícula que ha colisionado se encuentra fuera del curso del resto de partículas que ya han colisionado (y si se encontraran en el mismo curso –sobre un mismo eje–, tampoco colisionarían, ya que la magnitud de las velocidades es la misma). El caso de B es análogo.

La distinción entre supertareas de tipo I y tipo II es importante debido a que resulta natural que en las supertareas de tipo II la energía se conserve.[284] Si en cada subsistema la energía se conserva, y cada subsistema evoluciona de la misma manera si lo aislamos del resto, y así el intercambio de energía entre cada subsistema es nulo incluso entre subsistemas adyacentes, entonces la energía total del sistema debe conservarse.[285] Para comprender mejor la diferencia entre la conservación de la energía en supertareas de tipo I y de tipo II, es útil atender a expresiones generales de la energía de cada caso. Para el caso concreto de 2DC, que es una supertarea de tipo II, miremos a su reversión temporal (para que la supertarea sea de ordinalidad ω). En un estado inicial, toda partícula P_n (con $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) tiene una velocidad que designamos por v_n. Así, la energía inicial total viene dada por la expresión

$$T_{Ini} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} m_q v_q^{\,2} .$$

En la colisión entre cada par de partículas, éstas obtienen velocidades que llamaremos v_n'. De esta manera, en términos generales, la energía intermedia total –la energía del sistema en un momento dado en el que no ha terminado de ejecutar la supertarea– tendrá la siguiente forma:

$$T_{Int} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k} m_p v_p'^{2} + \frac{1}{2}\sum_{q=k+1}^{\infty} m_q v_q^{\,2} ; \qquad (6.7)$$

ya que un número k par de partículas habrá colisionado, cada una de las cuales habrá adquirido una velocidad v_n' (con $n \leq k$) mientras que el resto, que todavía no habrá colisionado, continúa con velocidad v_n (con $n > k$). Finalmente, cuando la supertarea termine su ejecución, todas las partículas involucradas[286] en la supertarea habrán adquirido su correspondiente velocidad v_n', por lo que la energía final es:

$$T_{Fin} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p'^{2} . \qquad (6.8)$$

Ahora, si la energía se conserva, la energía intermedia T_{Int} debe ser igual a la energía final T_{Fin}; y el límite de la primera cuando $k \to \infty$ debe ser igual al límite de la segunda cuando $k \to \infty$, de lo que resulta, con (6.7) y (6.8), que

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p'^{2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p'^{2} .$$

[284] En un principio Norton encontraba una fuerte conexión entre la energía infinita y el indeterminismo en sistemas infinitos: "a system of infinite bodies of unit mass each moving with unit velocity has the same energy as the same system with each mass moving with two units of velocity. In each case, the total energy is infinite. With only a little further thought, one can see that such supertask systems can spontaneously acquire energy and momentum and sustain indeterministic time developments" [Norton 1999: 1268]. Teniendo en cuenta las supertareas de tipo II (con energía bien definida), y los sistemas como ST1A, es muy poco plausible que el indeterminismo en supertareas newtonianas tenga alguna conexión con la energía infinita.

[285] Pérez Laraudogoitia expresa la misma idea con las siguientes palabras: "The conservation follows directly from the fact that each particle present undergoes precisely one collision, in which the energy (and linear momentum) is conserved. […] these subsystems [cada par de particulas que colisiona] do not mutually exchange either energy or momentum, remaining isolated from each other. The energy and the momentum will therefore be conserved […] if they are conserved in each subsystem" [Pérez Laraudogoitia 2008: 372].

[286] En el sistema de la supertarea B, por ejemplo, la partícula P_1 nunca colisiona y sigue con la misma velocidad todo el tiempo. Esto no afecta en nada a las afirmaciones hechas en el texto principal, pues claramente, aunque P_1 forma parte del sistema, no forma parte de la supertarea que conserva o no conserva la energía.

Lo que es trivialmente verdadero. Esta trivialidad, sin embargo, explica también por qué es natural que en las supertareas de tipo II (y en concreto, en A y B) la energía se conserve.

A diferencia, la energía en las supertareas de tipo I, y concretamente, la energía en las supertareas que trata el presente trabajo, tiene expresiones donde no se encuentra tal trivialidad. En las supertareas estrictamente sucesivas tenemos, como estado inicial, una partícula P_1 con velocidad v_1' y el resto de partículas P_{n+1} (con $n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) con velocidad v_{n+1}. La energía inicial, pues, se puede expresar como

$$T_{Ini} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=2}^{\infty} m_q v_q^2 . \tag{6.9}$$

Como la supertarea es estrictamente sucesiva, las únicas colisiones que ocurren consisten en el choque, para toda n, de la partícula P_n que viaja con velocidad v_n' con la partícula P_{n+1} que viaja con velocidad v_{n+1}, y que como resultado obtienen velocidades v_n'' y v_{n+1}' respectivamente. Así, en un momento dado en el que la supertarea ha comenzado pero no ha sido concluida, tendremos un número k de partículas con velocidad v_n'' (con $n \leq k$), una única partícula con velocidad v_{k+1}' y una infinidad de partículas con velocidad v_n (con $n < k$). En tal momento dado, la energía total del sistema viene dada por la expresión

$$T_{Int} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{k} m_p v_p''^2 + \frac{1}{2} m_{k+1} v_{k+1}'^2 + \frac{1}{2} \sum_{q=k+2}^{\infty} m_q v_q^2 . \tag{6.10}$$

Cuando la supertarea concluya, todas las partículas P_n tendrán una velocidad v_n''. La energía final, pues, de la supertarea viene dada por

$$T_{Fin} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p''^2 . \tag{6.11}$$

Ahora bien, si la energía se conserva, la energía intermedia T_{Int} debe ser igual a la energía final T_{Fin}; y el límite de la primera cuando $k \to \infty$ debe ser igual al límite de la segunda cuando $k \to \infty$, de lo que resulta, con (6.10) y (6.11), que

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p''^2 + \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} m_{k+1} v_{k+1}'^2 = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} m_p v_p''^2 ;$$

lo que quiere decir que, en supertareas de tipo I estrictamente sucesivas la energía se conserva si y sólo si

$$\lim_{k\to\infty} m_{k+1} v_{k+1}'^2 = 0 .\text{[287]} \tag{6.12}$$

[287] Atkinson [2007: 174-5] ya calcula la pérdida de la energía y del momento de una supertarea sucesiva operando el límite a este término intermedio. La diferencia está en que Atkinson sólo considera los casos en los que el estado inicial de la supertarea es la primera partícula en movimiento y el resto en reposo. Como se ve en el texto principal, considerar una mayor generalidad (considerar los casos en que inicialmente el resto de las partículas no se encuentran necesariamente en reposo) no tiene repercusiones en la aplicación este límite. Hay, no obstante, una repercusión importante para el momento lineal. En el mismo lugar, Atkinson demuestra que el momento lineal, en toda supertarea sucesiva con masa finita total, se conserva: si suponemos que no se conserva, es decir, que el límite del producto $m_{k+1}v_{k+1}'$ cuando k tiene a infinito es distinto de cero, entonces, como la masa m_{k+1} debe tender a cero (pues la total es finita), la velocidad v_{k+1}' debe tender a infinito; de igualar (6.9) con (6.10) es fácil ver que $m_1 v_1'^2 > m_{k+1} v_{k+1}'^2$, lo que es imposible si $m_{k+1}v_{k+1}'$ tiende a cero cuando v_{k+1}' tiene a infinito; por lo tanto, el momento necesariamente se conserva. Esta misma argumentación no se puede aplicar al planteamiento general expuesto en el texto principal: dado que inicialmente el resto de las partículas no están en reposo, de igualar (6.9) con (6.10) no podemos asegurar que $m_1 v_1'^2 > m_{k+1} v_{k+1}'^2$, y por tanto tampoco podemos aplicar la misma reducción al absurdo para demostrar que el momento lineal, mientras la masa total sea finita, siempre se conserva.

Esta es una interesante forma de ver que no es un hecho trivial que las supertareas de tipo I, y concretamente las estrictamente sucesivas, sean necesariamente conservativas. De hecho, por los procesos que conocemos (así como los que se propondrán en las siguientes secciones), se sabe que esto en realidad es falso. Existen supertareas de tipo I no conservativas. Por consiguiente, su correspondiente límite expresado en el miembro izquierdo de (6.12) no es igual a cero. Nuevamente, el ejemplo con ST1 resulta ser sumamente ilustrativo ya que para tal caso resulta evidente que (6.12) no se cumple.

Con el sistema 2DC, pues, y habiendo notado que puede evolucionar ejecutando la supertarea A o la supertarea B, Pérez Laraudogoitia muestra que el indeterminismo en supertareas newtonianas no necesariamente está conectado al fallo de la conservación de la energía. Dicho con mayor precisión, Pérez Laraudogoitia muestra que el indeterminismo en supertareas newtonianas de tipo II no necesariamente está conectado al fallo la conservación de la energía. Queda claro, pues, que existen supertareas conservativas que constituyen evoluciones indeterministas de determinados sistemas. No obstante, la cuestión que queda abierta y que no deja de ser de sumo interés es la siguiente: ¿existen sistemas indeterministas bajo el desencadenamiento de diversas supertareas de tipo I y que al menos dos de esas supertareas sean conservativas? ¿Está el indeterminismo, al igual que en las supertareas de tipo II, no necesariamente conectado con el fallo de la conservación de la energía en supertareas de tipo I?

Planteada en términos más generales –y ambiciosos–, la pregunta es: ¿qué relación guarda el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía en supertareas newtonianas de tipo I? No daremos una respuesta exhaustiva a esta última pregunta pero, en lo que resta de este capítulo, adoptaremos una perspectiva diferente a la adoptada en el presente apartado, y daremos pasos concretos hacia la respuesta que merece.

6.2. La existencia de supertareas deterministas no conservativas

En la sección anterior hemos analizado procesos que, pese a que son indeterministas, son conservativos en toda la variedad de evoluciones que hemos podido conocer de ellos. Estas supertareas muestran que hay procesos conservativos a la vez que indeterministas y, por tanto –y más importante–, que el indeterminismo presente en una supertarea newtoniana no implica la presencia del fallo de la conservación de la energía.

En el presente apartado analizaremos la idea que va en dirección contraria: la plausibilidad sobre la existencia de supertareas newtonianas que sean no conservativas y que a la vez sean deterministas. Es decir, la idea de que el determinismo en una supertarea newtoniana no implique el cumplimiento del principio de la conservación de la energía. Puesta de una forma directa y asertiva, la hipótesis puede enunciarse de la siguiente manera:

(A) Existen supertareas newtonianas de tipo I deterministas que no son conservativas.

Al menos un ejemplo que sea determinista a la vez que no conservativo, bastará para probar que (A) es verdadera. Claramente, esta hipótesis a su vez hace una importante asunción:

(B) Existen supertareas newtonianas de tipo I deterministas.

Semejante asunción, que resulta ser muy fuerte, se ha hecho más de una vez en la literatura de supertareas newtonianas. Por ejemplo, recientemente se afirma lo siguiente:[288]

> New examples with finite total mass have clearly revealed that there is no instrinsic connection between deterministic supertasks and the non-conservation of energy: there are cases of deterministic supertasks where energy is conserved and cases where it is not [Pérez Laraudogoitia 2008: 366].[289]

En el presente apartado presentaremos un ejemplo original que es presumiblemente (dadas las formas de indeterminismo que se han presentado en la literatura) determinista y no conservativo, que en sí constituye un argumento a favor de la hipótesis (A). Tras ello, mostraremos que dicho ejemplo presenta un proceso que sí es indeterminista. El argumento para mostrarlo consiste en la presentación de una modalidad del indeterminismo en las supertareas que, pese a que se fundamenta en un mecanismo ya conocido, es ignorada hasta ahora en la literatura. Esta modalidad del indeterminismo es la idea más interesante, y trae como consecuencia que la hipótesis (A) está todavía por probarse. La asunción (B), por supuesto, también carece de un fundamento contundente.

6.2.1. STMNC: una supertarea no conservativa y no manifiestamente indeterminista

Modelemos una supertarea no manifiestamente indeterminista (cerciorándonos de que el estado final no es el reposo relativo de todas las partículas) y llamémosle STMNC. En primer lugar, hagamos algunas consideraciones generales. Asumamos una cantidad infinita de partículas puntuales en el espacio unidimensional con masa total finita. La masa m_n de cada partícula P_n ($n \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$) guarda una relación $\gamma_n = m_{n+1}/m_n$ con la masa m_{n+1} de la partícula P_{n+1}. Asumamos también un proceso en un marco de referencia inercial de tal manera que, inicialmente, la partícula P_1 se aproxima con una velocidad constante positiva a P_2, mientras que el resto de las partículas P_2, P_3, P_4, … se encuentran en reposo, cada P_{n+1} a la derecha de P_n y posicionada de tal manera que hace posible la ejecución de una supertarea que consiste en la sucesión infinita de colisiones binarias. Así, P_1 colisionará con P_2, tras lo cual ésta colisionará con P_3. De la misma manera, posteriormente colisionará P_3 con P_4, y en general, P_{n+1}, tras colisionar con P_n, colisionará con P_{n+2} una sola vez.

Bajo la conservación de la energía y del momento en la colisión de P_n (que inicialmente viaja con $v_n{'}$) con P_{n+1} (que inicialmente se encuentra en reposo), sabemos que, tras dicha colisión, las partículas adquirirán respectivamente velocidades

---

[288] Otro lugar en el que se encuentra esta asunción es [Pérez Laraudogoitia 2007a: 26], en donde se presenta el caso de $\mu = ½$ de la generalización STC como determinista; en breve, en la sección 6.2.2, se mostrará que esto no es así. Uno más es [Pérez Laraudogoitia 2007b], en donde se presenta toda una gama de supertareas con masa finita como deterministas; en la sección 6.2.4, se mostrará que esto tampoco es así.

[289] En una comunicación personal, Pérez Laraudogoitia aclaró al autor que en este fragmento, por supertareas deterministas y no conservativas, se refiere, por ejemplo, a ST1 en su planteamiento original y directo (sin tomar en cuenta la reversión temporal), que presenta una evolución "predecible" y no conservativa. Allí mismo reconoció que, efectivamente, tomando en cuenta la reversión temporal, el sistema es en todo momento indeterminista.

$$v_n'' = \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_n' \tag{6.13}$$

y

$$v_{n+1}' = \frac{2}{1+\gamma_n} v_n' . \tag{6.14}$$

Por recursividad, de (6.14) se obtiene que

$$v_{n+1}' = 2^n v_1' \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\gamma_k} . \tag{6.15}$$

Así, de (6.13) y (6.15), tenemos que cada partícula P_{n+1} terminará con una velocidad

$$v_{n+1}'' = \frac{1-\gamma_{n+1}}{1+\gamma_{n+1}} 2^n v_1' \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\gamma_k} . \tag{6.16}$$

Por otro lado, la energía cinética inicial es $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2$. Sabiendo, también por recursividad, que $m_{n+1} = \gamma_n \gamma_{n-1} \cdots \gamma_2 \gamma_1 m_1$, y tomando (6.16), tenemos entonces que la energía cinética final viene dada por

$$T_f = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \left(\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{2n} (1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} \right]. \tag{6.17}$$

Ahora bien, para asegurarnos de que la sucesión de colisiones se dé tal como hemos especificado, requerimos que $v_{n+1}'' < v_{n+2}''$, es decir, tomando en cuenta (6.16), necesitamos que $(1 - \gamma_{n+1})(1 + \gamma_{n+2}) < 2(1 - \gamma_{n+2})$, que equivale a

$$(3 - \gamma_{n+1})\, \gamma_{n+2} < 1 + \gamma_{n+1}. \tag{6.18}$$

Una vez que hemos hecho estas consideraciones generales, el modelo de cada sistema consta tan solo de especificar la masa de cada una de las partículas (o bien, especificar la relación de masas entre partículas contiguas). De esta manera, nuestra supertarea STMNC es aquella que tiene $m_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ como masa de cada partícula P_n. Como se sabe que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, sabemos también que la masa total de este sistema es $\frac{\pi^2}{6} - 1$, una masa total finita. Por otro lado, es fácil ver que la condición (6.18) se satisface ya que, sustituyendo la relación de masas, que en este caso es $\gamma_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$, la desigualdad (6.18) equivale a $0 < 1$, desigualdad que se cumple independientemente del valor que tome n.

Probemos ahora que STMNC presenta una pérdida de la energía al ejecutarse por completo. A partir de (6.17), se ve que podemos expresar la pérdida de la energía con la desigualdad $\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \left(\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \right)^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{2n} (1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} \right] < \frac{1}{2} m_1 v_1'^2$, que, para nuestro modelo, equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{2n} (1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2} \prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} \right] < 1 - \left(\frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} \right)^2 = \left(\frac{12}{13} \right)^2 . \tag{6.19}$$

Es posible verificar que la desigualdad (6.19) se satisface. Nuestras relaciones de masas indican que el producto $\prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{(2k^2+6k+5)^2}$. Puesto de esta manera, es fácil percatarse de que cada término $\frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{(2k^2+6k+5)^2} < \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{(2k^2+6k+4)^2} = \frac{1}{2^2}$; así, sabemos que el producto $\prod_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} < \frac{1}{2^{2n}}$. Por lo tanto, de la sumatoria en (6.19) (el miembro extremo izquierdo), cada término $\frac{2^{2n}(1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} < \frac{(1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2}$. Y como bajo nuestras relaciones de masas se obtiene que $\frac{(1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2} = \frac{(2n+5)^2}{(2n^2+10n+13)^2} < \frac{(2n+5)^2}{(2n^2+9n+10)^2} = \frac{1}{(n+2)^2}$, entonces, finalmente encontramos que (6.19), efectivamente, se cumple:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2^{2n}(1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2}\right] < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} < \left(\frac{12}{13}\right)^2.$$

Hay, pues, una pérdida de la energía cuando STMNC culmina su ejecución.

Cabe comentar que STMNC es un proceso sumamente parecido a los procesos conservativos que se encuentran incluidos en la generalización presentada en [Pérez Laraudogoitia 2007b: 726–8] (que en la sección 6.2.4 presentaremos como GPL2) con la única –pero crucial– diferencia de que STMNC no conserva la energía. Esta diferencia probablemente es un reflejo de que GPL2 se limita a una relación de velocidades finales $v_{n+1}'' = \frac{1}{\alpha} v_n''$ con $\alpha > 0$ y constante, mientras que la supertarea STMNC presenta una mayor complejidad. Partiendo de (6.16), y tomando en cuenta nuestras relaciones de masas, se puede verificar que STMNC tiene una relación de velocidades finales entre partículas contiguas $\frac{1}{\alpha_{n+1}} = \frac{v_{n+2}''}{v_{n+1}''} = \frac{4n^3+38n^2+120n+126}{4n^3+38n^2+120n+125}$; v_{n+2}'' claramente es mayor a v_{n+1}''. La pérdida de la energía mostrada en el párrafo anterior y esta tendencia a la unidad de la relación de velocidades invita a pensar que ninguna velocidad final rebasa un límite concreto por más que $v_{n+2} > v_{n+1}$. Esto lo podemos asegurar si nos percatamos de que la velocidad final, tras sustituir nuestra relación de masas en (6.16), se puede expresar como $v_{n+1}'' = 2^n v_1'\left(\frac{2n+5}{2n^2+10n+13}\right)\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)^2}{2k^2+6k+5}$. Del producto en esta expresión podemos ver que cada término $\frac{(k+2)^2}{2k^2+6k+5} < \frac{(k+2)^2}{2k^2+6k+4} = \frac{(k+2)}{2(k+1)}$; por lo tanto, $\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)^2}{2k^2+6k+5} < \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+2)}{2(k+1)} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$. Tenemos entonces que $v_{n+1}'' < \frac{(2n+5)(n+2)}{2(2n^2+10n+13)}v_1' < \frac{(2n^2+10n+13)}{2(2n^2+10n+13)}v_1' = \frac{1}{2}v_1'$. Las velocidades forman una progresión monotónicamente creciente pero convergente.

Con las modalidades de indeterminismo que hasta ahora se han presentado en la literatura, el proceso STMNC se clasificaría como una supertarea newtoniana determinista y no conservativa. Así, es un modelo que confirma nuestra hipótesis (A). No obstante, veremos en seguida que hay motivos importantes para dudar del carácter determinista de esta supertarea.[290]

[290] En [Atkinson y Johnson 2009: 9-10] se ofrece otro ejemplo con las mismas características que STMNC. Concretamente, cuando la masa $m_n = 24m_0/((n+1)(n+2)(n+3)(n+4))$. Sin embargo, Atkinson y Johnson no señalan la relevancia del ejemplo para la pérdida de la energía en relación con el indeterminismo. Sugieren que este tipo de supertareas son indeterministas, aunque no ofrecen una demostración de ello. El indeterminismo que sí se demuestran con su planteamiento es el de la reversión temporal de estas supertareas. Esta forma de indeterminismo la trataremos con detalle en el apartado 6.3.

6.2.2. Auto-excitaciones expansivas en GSTC: una sugerencia de indeterminismo en STMNC

La modelización de la generalización Gμ1 no es un simple ejercicio laborioso de álgebra elemental. Es un ejemplo que nos ayuda a *ver* cómo es que el mecanismo del indeterminismo que consiste en el reposo relativo de todas las partículas como culminación de las supertareas es más poderoso de lo que se ha presentado hasta ahora en la literatura. En la sección 5.5.3 ya vimos cómo la generalización Gμ1 mostraba que ciertos sistemas que aparentemente son deterministas, en realidad son indeterministas. En esta ocasión, acudiremos de nuevo a ella para mostrar que algunos sistemas de GSTC, que en la sección 4.2.9 presentamos como no manifiestamente indeterministas, son indudablemente indeterministas. Esto nos llevará, a su vez, a visualizar de qué manera la supertarea STMNC podría ser indeterminista.

Recordemos que, para los casos de Gμ1 en los que $1/3 < \mu < 1$, la reversión temporal consiste en una auto-excitación expansiva: a partir de una cantidad infinita de partículas en reposo confinadas a un espacio finito, con un punto de acumulación, el sistema puede auto-excitarse espontáneamente de tal manera que, a partir de un instante cualquiera (¡que no de cualquier instante!), una infinidad de partículas se encuentra viajando más allá de la posición del punto de acumulación original (que ya han atravesado) extendiéndose a lo largo de una región infinita de espacio de tal manera que no conforman ya ningún punto de acumulación. Por otro lado, recordemos que toda supertarea de GSTC, mientras no haya terminado de ejecutarse, tiene un conjunto infinito de partículas en reposo confinadas en un espacio finito con un punto de acumulación. Ante esto, no es difícil percatarse de que un subconjunto del estado inicial de GSTC puede corresponderse exactamente con el estado inicial de la reversión temporal de Gμ1. Por lo tanto, en caso de que la distancia y las masas entre las partículas correspondientes coincida, podemos estar seguros de que todas las supertareas de GSTC con $1/3 < \mu < 1$ son supertareas indeterministas, ya que antes de que terminen de ejecutar la supertarea podrán experimentar una auto-excitación expansiva tal como ocurre en la reversión temporal de los procesos de Gμ1.[291]

Ante este panorama, cabe entonces plantearse la siguiente pregunta: ¿no será posible también que la supertarea STMNC sea indeterminista de la misma forma en que las supertareas de GSTC lo son? Es decir, ¿es posible que un subconjunto de partículas de STMNC, que se encuentran en reposo y con un punto de acumulación mientras que la supertarea no haya terminado de ejecutarse, experimente una auto-excitación del mismo tipo que experimentan los procesos revertidos de Gμ1? Si ese es el caso, entonces nuestra supertarea STMNC es indeterminista. Esto todavía no es posible saberlo con Gμ1, ya que los procesos que incluye se limitan sólo a aquellos que guardan una misma relación de masas entre partículas contiguas. Para responder a la pregunta, pues, es necesario dar un paso más hacia la generalidad, y averiguar de qué manera es posible que este tipo de auto-excitaciones ocurran en sistemas en los que las diversas partículas contiguas no guardan la misma relación de masas.

[291] En realidad, todos los sistemas incluidos en GSTC son indeterministas bajo este mecanismo, al menos si toda partícula P_n se encuentra posicionada inicialmente en $x = 1 - 1/2^n$. Esto quedará demostrado en la sección 6.2.4.

6.2.3. Gγ1: Generalización de supertareas newtonianas indeterministas bajo reposo y distinta relación de masas

Asumamos una supertarea que consta de una sucesión infinita de colisiones perfectamente elásticas entre partículas puntuales con una evolución semejante a la de la generalización Gμ1, sólo que ahora, generalicemos más y asumamos que la relación de masas entre partículas contiguas $\gamma_n = m_{n+1}/m_n \neq m_{n+2}/m_{n+1} = \gamma_{n+1}$. No obstante este paso hacia una mayor generalidad, reduzcamos nuestros casos a aquellos en los que $\gamma_n < 1$, para toda $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. En el instante inicial $t_0´ = 0$ una primera partícula P_0 se encuentra en $x_0´ = 0$ viajando con una velocidad $v_0´ > 0$, mientras que cada una de las partículas restantes P_{n+1} (con $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$) se encuentra en la posición x_{n+1}, con $x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3} < \ldots$, viajando con una velocidad v_{n+1}, con $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$ Posteriormente, en el instante $t_1´ > t_0´$, la partícula P_0 colisiona con la partícula P_1 en $x_0´´ = x_1´ = 1/2$, con lo que P_0 adquiere una velocidad $v_0´´ = 0$ mientras que P_1 adquiere una velocidad $v_1´$. Tras ello, en el instante $t_2´ > t_1´$, la partícula P_1 colisiona con la partícula P_2 en $x_1´´ = x_2´ = 3/4$, con lo que P_1 adquiere una velocidad $v_1´´ = 0$ mientras que P_2 adquiere una velocidad $v_2´$. En general, en el instante $t_{n+1}´$, la partícula P_n colisiona con la partícula P_{n+1} en $x_n´´ = x_{n+1}´ = 1 - 1/2^{n+1}$, con lo que P_n adquiere una velocidad $v_n´´ = 0$ mientras que P_{n+1} adquiere una velocidad $v_{n+1}´$. Nótese que la modelización de esta generalización fija las posiciones de las colisiones al provocar el reposo en una de las partículas en vez de fijar los instantes de dichas colisiones, como se hace al modelar Gμ1. Esto puede sugerir que algunos sistemas incluidos en esta generalización no logran ejecutar nunca una supertarea. En breve se mostrará que para los casos en que $\gamma_n < 1$ (los casos que aquí nos interesan), la totalidad de colisiones sucesivas ocurren en un intervalo de tiempo finito, ejecutando así satisfactoriamente una supertarea que tiene como estado final la totalidad de partículas en reposo.

Una vez presentado este modelo general de supertareas, precisemos en primer lugar las velocidades que requiere la evolución descrita. Se conoce, por la conservación de la energía y el momento en una colisión elástica, el siguiente sistema de ecuaciones que relaciona las velocidades involucradas en cada una de las colisiones descritas en el párrafo anterior (colisión en la que inicialmente P_n viaja con $v_n´$ y P_{n+1} con v_{n+1}, para terminar con $v_n´´ = 0$ y $v_{n+1}´$ respectivamente):

$$0 = \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_n´ + \frac{2\gamma_n}{1+\gamma_n} v_{n+1} \tag{6.20}$$

$$v_{n+1}´ = \frac{2}{1+\gamma_n} v_n´ - \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_{n+1}. \tag{6.21}$$

A partir de (6.21) se ve que $v_{n+1} = \frac{2}{1-\gamma_n} v_n´ - \frac{1+\gamma_n}{1-\gamma_n} v_{n+1}´$, con lo cual, sustituyendo en (6.20), se obtiene que

$$v_{n+1}´ = \frac{1+\gamma_n}{2\gamma_n} v_n´. \tag{6.22}$$

De (6.22), es fácil ver que

$$v_1´ = \frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0} v_0´$$

$$v_2´ = \left(\frac{1+\gamma_1}{2\gamma_1}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0}\right) v_0´$$

$$v_3´ = \left(\frac{1+\gamma_2}{2\gamma_2}\right)\left(\frac{1+\gamma_1}{2\gamma_1}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0}\right) v_0´$$

$$\vdots$$

$$v_{n+1}' = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n}\right)\cdots\left(\frac{1+\gamma_0}{\gamma_0}\right)v_0' . \qquad (6.23)$$

Por otro lado, de (6.20) se sabe que

$$v_{n+1} = -\frac{1-\gamma_n}{2\gamma_n}v_n' . \qquad (6.24)$$

Así, tomando en cuenta (6.23) en (6.24), también es fácil ver que

$$v_1 = -\frac{1-\gamma_0}{2\gamma_0}v_0'$$

$$v_2 = -\frac{1-\gamma_1}{2\gamma_1}\left(\frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0}\right)v_0'$$

$$v_3 = -\frac{1-\gamma_2}{2\gamma_2}\left(\frac{1+\gamma_1}{2\gamma_1}\right)\left(\frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0}\right)v_0'$$

$$\vdots$$

$$v_{n+2} = -\frac{1}{2^{n+2}}\frac{1-\gamma_{n+1}}{\gamma_{n+1}}\left(\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n}\right)\cdots\left(\frac{1+\gamma_0}{\gamma_0}\right)v_0' . \qquad (6.25)$$

Ahora bien, para que $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$, debemos añadir una restricción (que limita un poco más nuestra generalización, pero que de ninguna manera amenaza los intereses que aquí perseguimos). De (6.25) sabemos que toda velocidad v_{n+1} dirige a P_{n+1} hacia la izquierda (puesto que, al tener $\gamma_n < 1$, tenemos también que $v_{n+1} < 0$), y por tanto, para asegurarnos de que $v_{n+1} > v_{n+2}$, es suficiente que $|v_{n+2}| > |v_{n+1}|$; lo que implica, también tomando en cuenta (6.25), que

$$\frac{|v_{n+2}|}{|v_{n+1}|} = \frac{(1-\gamma_{n+1})(1+\gamma_n)}{2\gamma_{n+1}(1-\gamma_n)} > 1 ,$$

que, como $\gamma_n < 1$, a su vez equivale a la siguiente desigualdad:

$$\gamma_{n+1} < \frac{1+\gamma_n}{3-\gamma_n} . \qquad (6.26)$$

Esta es la restricción que debemos añadir, para asegurarnos de que $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$, en los sistemas que esta generalización contempla.

Con esto, comprobemos ahora que, independientemente de la posición x_{n+1} que deba tener cada partícula P_{n+1} para que viaje de x_{n+1} a x_{n+1}' con una velocidad v_{n+1}, la sucesión de colisiones de hecho ocurre tal como se ha especificado en la descripción de la supertarea, es decir, que P_{n+1} (cuando viaja con v_{n+1}) colisiona con P_n (que viaja con v_n') antes de colisionar con P_{n+2} (que viaja con v_{n+2}). En primer lugar, como P_{n+1} recorre de x_{n+1} en $t_0' = 0$ a x_{n+1}' en t_{n+1}' con una velocidad constante v_{n+1}, sabemos que $v_{n+1} = \frac{x_{n+1}' - x_{n+1}}{t_{n+1}'}$, de donde claramente se ve que

$$x_{n+1} = x_{n+1}' - t_{n+1}'v_{n+1}. \qquad (6.27)$$

Por otro lado, ya hemos especificado anteriormente que t_{n+1}' es el instante en el que la partícula P_{n+1} adquiere la velocidad v_{n+1}' tras colisionar con P_n, que entonces adquiere el reposo. Especificamos también que tal colisión ocurre en la posición

$$x_{n+1}' = 1 - 1/2^{n+1}. \qquad (6.28)$$

Por tanto, cada partícula P_n recorrerá la distancia comprendida desde x_n' hasta x_{n+1}' con la velocidad v_n', y en un intervalo de tiempo $t_{n+1}' - t_n' = \frac{x_{n+1}' - x_n'}{v_n'} = \frac{1}{2^{n+1}v_n'}$. De donde vemos entonces que

$$t_1' = \frac{1}{2v_0'}$$

$$t_2{'} = \frac{1}{2v_0{'}} + \frac{1}{2^2 v_1}$$

$$t_3{'} = \frac{1}{2v_0{'}} + \frac{1}{2^2 v_1{'}} + \frac{1}{2^3 v_2{'}}$$

$$\vdots$$

$$t_{n+1}{'} = \frac{1}{2v_0{'}} + \frac{1}{2^2 v_1{'}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} v_n{'}}. \tag{6.29}$$

Ahora bien, lo que queremos probar es que P_{n+1} (que parte en $t_0{'} = 0$ de x_{n+1} con v_{n+1}) colisiona con P_n en $x_{n+1}{'}$ y $t_{n+1}{'}$ antes de que colisione con P_{n+2} (que parte en $t_0{'} = 0$ de x_{n+2} con v_{n+2}) en un punto hipotético x_h y en un tiempo hipotético t_h. Dicho tiempo hipotético claramente se puede expresar de dos maneras

$$t_h = \frac{x_h - x_{n+1}}{v_{n+1}} \tag{6.30}$$

$$t_h = \frac{x_h - x_{n+2}}{v_{n+2}}. \tag{6.31}$$

Del sistema (6.30) (6.31) obtenemos que la posición hipotética es $x_h = \frac{v_{n+2}x_{n+1} - v_{n+1}x_{n+2}}{v_{n+2} - v_{n+1}}$, y que el tiempo hipotético es

$$t_h = \frac{x_{n+1} - x_{n+2}}{v_{n+2} - v_{n+1}}. \tag{6.32}$$

Con toda esta simbología que hemos especificado, lo que queremos probar es simplemente que

$$t_{n+1}{'} < t_h. \tag{6.33}$$

Si sustituimos (6.27) en (6.32), (6.33) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$t_{n+1}{'} < \frac{(x_{n+1}{'} - x_{n+2}{'}) + (t_{n+2}{'} v_{n+2} - t_{n+1}{'} v_{n+1})}{v_{n+2} - v_{n+1}}. \tag{6.34}$$

Como nos estamos ateniendo sólo a los casos en los que $|v_{n+2}| > |v_{n+1}|$, y además sabemos, de (6.25), que ambas velocidades son negativas, entonces (6.34) se puede multiplicar por $(v_{n+2} - v_{n+1})$ (factor que cambiará el sentido de la desigualdad), para obtener que

$$(t_{n+1}{'} - t_{n+2}{'})v_{n+2} > x_{n+1}{'} - x_{n+2}{'}. \tag{6.35}$$

De (6.28) se sabe que $x_{n+1}{'} - x_{n+2}{'} = -\frac{1}{2^{n+2}}$, y de (6.29) que $t_{n+1}{'} - t_{n+2}{'} = -\frac{1}{2^{n+2} v_{n+1}{'}}$. Si esto lo sustituimos en (6.35), y multiplicamos ambos miembros por (-2^{n+2}), obtenemos que (6.35) equivale a la siguiente desigualdad:

$$\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}{'}} < 1.$$

Si sustituimos (6.24) en v_{n+2}, esta última desigualdad se puede reescribir como

$$-\frac{1-\gamma_{n+1}}{2\gamma_{n+1}} < 1,$$

que equivale a

$$\gamma_{n+1} > -1. \tag{6.36}$$

Pero por definición $\gamma_{n+1} > 0$, por lo que (6.36) siempre se cumple. Por lo tanto, (6.34) también se cumple o, lo que es lo mismo, toda P_{n+1} colisiona con P_n antes de que pueda colisionar con P_{n+2}.

Para terminar de mostrar que la generalización que aquí hemos modelado corresponde a sistemas que ejecutan satisfactoriamente una supertarea, debemos mostrar que el tiempo total para que ocurran la totalidad de colisiones, que se puede expresar como (el límite de $t_{n+1}{'}$ (expresado en (6.29)) cuando $n \to \infty$)

$$t_T{}' = \frac{1}{2v_0{}'} + \frac{1}{2^2 v_1{}'} + \frac{1}{2^3 v_2{}'} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1} v_n{}'} + \cdots, \tag{6.37}$$

es un tiempo finito. El tiempo $t_T{}'$ expresado en (6.37) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$t_T{}' = \frac{1}{2v_0{}'}\left(1 + \frac{v_0{}'}{2v_1{}'} + \frac{v_0{}'}{2^2 v_2{}'} + \cdots + \frac{v_0{}'}{2^n v_n{}'} + \cdots\right). \tag{6.38}$$

Ahora bien, es claro que para que la condición

$$v_0{}' < v_1{}' < \ldots < v_n{}' \tag{6.39}$$

se cumpla, basta simplemente que para toda n $v_n{}' < v_{n+1}{}'$, lo que, sustituyendo (6.22), equivale a

$$\gamma_n < 1. \tag{6.40}$$

Como nuestra generalización se reduce precisamente a los casos en los que (6.40) se cumple, los sistemas que incluye, por tanto, cumplen también (6.39). Y entonces resulta claro que la siguiente desigualdad también se cumple:

$$t_T{}' = \frac{1}{2v_0{}'}\left(1 + \frac{v_0{}'}{2v_1{}'} + \frac{v_0{}'}{2^2 v_2{}'} + \cdots + \frac{v_0{}'}{2^n v_n{}'} + \cdots\right) < \frac{1}{2v_0{}'}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right);$$

ya que de (6.39) y (6.40) se sabe que $\frac{v_0{}'}{v_n{}'} < 1$, y por tanto, cada uno de los términos de la sumatoria expresada dentro del paréntesis del miembro izquierdo es menor a su respectivo término de la sumatoria expresada dentro del paréntesis del miembro derecho de la desigualdad (con excepción del primero, que es igual). Es archiconocido que la sumatoria del miembro derecho es convergente, y por lo tanto, esta desigualdad muestra que el tiempo total de la supertarea $t_T{}'$ (que hemos expresado en (6.38)) es un tiempo finito.

En resumen, las supertareas que incluye la generalización Gγ1 pueden describirse de la siguiente manera. Tenemos un número infinito de partículas P_0, P_1, P_2, …, P_n, … que se encuentran en un espacio unidimensional (pongamos el eje x). Para toda n (con $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$), la masa m_n de cada partícula P_n guarda una relación $\gamma_n = m_{n+1}/m_n$ con la masa de la partícula P_{n+1}, de tal manera que $\gamma_n < 1$, $\gamma_n \neq \gamma_{n+1}$ y $\gamma_{n+1} < \frac{\gamma_n + 1}{3 - \gamma_n}$. Inicialmente, en el tiempo $t' = 0$, la partícula P_0 se encontrará viajando con una velocidad constante $v_0{}' > 0$ en $x_0{}' = 0$, mientras que cada una del resto de las partículas P_{n+1} se encontrará viajando con una velocidad constante v_{n+1} (tal como se expresa en (6.25)) y en un posición x_{n+1} (tal como se expresa en (6.27)), con $x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3} < \ldots$ y con $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$ (desigualdad que toma en cuenta el signo negativo de cada velocidad, que las dirige hacia la izquierda, con lo que $|v_{n+1}| < |v_{n+2}| < |v_{n+3}| < \ldots$). Así las cosas, en el instante $t_{n+1}{}'$ (expresado en (6.29)), la partícula P_n colisiona con la partícula P_{n+1} en $x_n{}'' = x_{n+1}{}' = 1 - 1/2^{n+1}$, con lo que P_n adquiere una velocidad $v_n{}'' = 0$ mientras que P_{n+1} adquiere una velocidad $v_{n+1}{}'$ (expresada en (6.23)). De esta manera, a partir del tiempo $t_T{}'$ (expresado en (6.37) o en (6.38)), una sucesión infinita de colisiones elásticas habrá ocurrido, y cada partícula P_n se encontrará en reposo en su posición final $x_n{}'' = 1 - 1/2^{n+1}$.

6.2.4. Auto-excitaciones en STMNC bajo Gγ1: indeterminismo en STMNC

La reversión temporal de las supertareas que la generalización Gγ1 incluye también son procesos posibles dentro del marco teórico de la mecánica newtoniana. En tales procesos revertidos, inicialmente tenemos un conjunto infinito de partículas confinados en un espacio finito y con un punto de acumulación. El sistema, obviamente, puede continuar en reposo por un tiempo indefinido, mas también puede (a partir de un instante cualquiera) ejecutar la reversión temporal del proceso especificado en Gγ1. Los procesos revertidos, pues, de los procesos incluidos en Gγ1 son procesos indeterministas.

Una vez que sabemos esto, es muy sencillo mostrar que la supertarea STMNC es un proceso indeterminista. Así como la generalización Gμ1 muestra cómo una gran cantidad de supertareas de la generalización GSTC son indeterministas, la generalización Gγ1 muestra cómo STMNC (junto con otros procesos) es una supertarea indeterminista. Mientras que la supertarea STMNC no haya terminado de ejecutarse, habrá un subconjunto infinito de partículas, que inicialmente se encontraban en reposo, que aún se encontrarán en reposo. Pues bien, ese subconjunto de partículas puede auto-excitarse de tal manera que lleva a cabo la reversión temporal del proceso correspondiente que incluye la generalización Gγ1.[292] Por lo tanto, el sistema STMNC podrá evolucionar adoptando el proceso que se describe en el planteamiento original (en la sección 6.2.1), o bien experimentando una auto-excitación de un subconjunto infinito de partículas cuando la supertarea no ha terminado de ejecutarse, tal como en el presente párrafo se sugiere.

Es sencillo verificar que el sistema STMNC se encuentra entre los sistemas que Gγ1 contempla. Primero, es evidente que todas las partículas P_n de STMNC pueden disponerse inicialmente en la posición $x_n = 1 - 1/2^n$, posición correspondiente a la posición inicial en los procesos revertidos de Gγ1 (el hecho de que la partícula desencadenante de STMNC tenga un índice $n = 1$ en vez de $n = 0$ es irrelevante). Segundo, también es evidente que en STMNC $\gamma_n < 1$, ya que $\gamma_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$ $\forall n$. Tercero y último, necesitamos que la restricción expresada en la desigualdad (6.26) se cumpla; precisamente, sustituyendo las relaciones de masas de STMNC en dicha expresión, llegamos a que la desigualdad en este caso equivale a $0 < 1$, que en sí es una desigualdad satisfecha independientemente del valor de n. Definitivamente, la supertarea STMNC es un proceso indeterminista, y por lo tanto, no es un ejemplo que muestre que el fallo de la conservación de energía en las supertareas newtonianas pueda presentarse aislada del indeterminismo. La auto-excitación bajo Gγ1 del subconjunto de partículas en reposo mientras STMNC no termina de ejecutarse está representada gráficamente en la figura 6.4.

Es importante señalar que este tipo de indeterminismo en STMNC no pudo haber sido detectado bajo las generalizaciones de supertareas indeterministas basadas en el reposo relativo como estado final que hasta ahora han sido expuestas en la literatura. En [Pérez Laraudogotita 2007b: 726] la relación de masas requerida es $\gamma_{n+1} = \frac{1+\gamma_n}{3-\gamma_n}$, mientras que en [Atkinson y Johnson 2009:11] la relación de masas requerida es $\gamma_n = \frac{\lambda+n-1}{\lambda+n+1}$ (donde λ es un valor arbitrario). Claramente, la relación de masas de STMNC, que es $\gamma_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2}$, no cumple con ninguna de las dos condiciones.

---

292 Es claro que el subconjunto de partículas no constituye la totalidad de las partículas involucradas en Gγ1. Esto no constituye ningún problema para la auto-excitación del subconjunto infinito de partículas en cuestión, ya que para que ocurra la auto-excitación del estado inicial en el proceso revertido de Gγ1 no es necesario la presencia de un subconjunto finito de partículas P_0, P_1, P_2, P_3, …, P_n, independiente del natural n concreto que se quiera tomar. Para verlo, piénsese simplemente que el proceso revertido con la totalidad de partículas no ha concluido y, por tanto, que todavía hay un número n de partículas P_0, P_1, P_2, P_3, …, P_n en reposo. Es evidente que, si suprimimos tales partículas, la auto-excitación también pudo haber ocurrido, ejecutando exactamente la misma evolución exclusivamente con las partículas ahora involucradas.

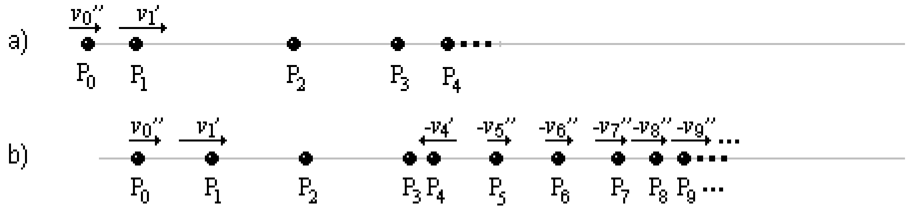


Figura 6.4. Auto-excitación en el sistema que ocurre STMNC y en sistemas afines. a) STMNC en algún momento posterior a la colisión de P_0 con P_1 y anterior a la colisión de P_1 con P_2. b) Momentos después, se presenta una auto-excitación, bajo la reversión temporal de Gγ1, de un subconjunto infinito todavía en reposo. Las velocidades de P_0 y P_1 corresponden a las descritas en STMNC, las de P_4, P_5, P_6, … a las descritas en Gγ1 con sentido revertido.

Ahora bien, las auto-excitaciones que ocurren en los procesos de Gγ1 revertidos temporalmente también tienen implicaciones importantes para algunos de los sistemas newtonianos considerados hasta ahora por la literatura. Tras la presentación de GPL1, Pérez Laraudogoitia [2007b] presenta otra gama de sistemas (a la que llamaré GPL2) como deterministas. Los procesos de GPL2 tienen como condición inicial, en cuanto a posiciones y velocidades, la misma que GPL1. La sucesión de colisiones binarias también es la misma. La diferencia es que los procesos en GPL2 se modelan de tal manera que las velocidades finales de las partículas contiguas guardan una relación $v_{n+1}''=\frac{1}{\alpha}v_n''$. Así, las relaciones de masa deben guardar la siguiente relación:

$$\gamma_{n+1}=\frac{2\alpha-1+\gamma_n}{2\alpha+1-\gamma_n}. \tag{6.41}$$

Pérez Laraudogoitia comienza presentando esta generalización con una afirmación bastante fuerte. En términos precisos, dice:

> I shall show now that the indeterminism and non-conservation of energy found in the previous section are not characteristic of the type of systems considered there [los sistemas de la generalización GPL1] in the following precise sense: both *can* disappear simply by changing (even under the same initial conditions) the masses of the particles involved [Pérez Laraudogoitia 2007b: 726, mis cursivas].

La interpretación que encuentro correcta de este enunciado es la siguiente: el hecho de cambiar las masas de los sistemas de GPL1 da como resultado una de dos cosas: o que todos los sistemas resultantes son deterministas, o que los sistemas resultantes se pueden clasificar en dos tipos, uno en los que el indeterminismo se mantiene y otro en los que el indeterminismo desaparece.[293] La cuestión importante que Pérez Laraudogoitia aquí sugiere es que existen supertareas newtonianas deterministas (y así lo sugiere también el título de la sección en la que analiza esta idea: '*Classical mechanics, determinism and non-violation of the laws of conservation*'), y eso es precisamente lo que pretende mostrar con la generalización GPL2. Pese a lo fuerte de la afirmación inicial, más adelante, tras analizar su generalización, y al enunciar su

[293] Otra interpretación que existe de esta afirmación es la siguiente: que el hecho de cambiar las masas de los sistemas de GPL1 da como resultado sistemas que presumiblemente son deterministas, es decir, sistemas para los que no hay ninguna certeza de que sean indeterministas, y por lo tanto que *cabe la posibilidad* de que de hecho sean deterministas. Esta interpretación es incorrecta. Afortunadamente, la lengua inglesa distingue la 'posibilidad' como falta de certeza (*may*) de la 'posibilidad' como capacidad (*can*). Al utilizar el segundo término, el enunciado citado afirma claramente la capacidad del indeterminismo de desaparecer al cambiar las masas de las partículas.

conclusión acerca de la gama más interesante de casos, su afirmación respecto al indeterminismo muestra bastante prudencia:

> If $\alpha < 1$, the attractor $x = 2\alpha - 1$ guarantees that the total mass of the system is finite and is the most interesting case. After all the collisions have taken place, the particles disperse, moving progressively away from each other so that the final state is not a state of relative rest. The temporal inversion of this final state does not now appear to lead to the possibility of indeterministic evolution, *at least* not in the obvious form seen in the previous section: the binary collisions that took place in the direct process will simply occur in inverse direction [Pérez Laraudogoitia 2007b: 727, mis cursivas].

Aunque no sea la reversión temporal de estos sistemas la que nos lleve a la posibilidad de una evolución indeterminista de las supertareas en cuestión, resulta ser que tales procesos sí son indeterministas. Otras supertareas revertidas temporalmente, en concreto una gama de Gγ1, son las que nos llevan a la posibilidad de que las supertareas de la generalización GPL2 con $\alpha < 1$ tengan una evolución indeterminista. Así como antes de que terminara la ejecución de STMNC un subconjunto infinito de partículas podía experimentar una auto-excitación de tal manera que dicho subconjunto ejecutara la reversión temporal del sistema correspondiente de Gγ1, de la misma manera las supertareas de la generalización GPL2 con $\alpha < 1$, mientras no hayan terminado de ejecutarse, podrán experimentar una auto-excitación (ejecutando también la reversión temporal del sistema correspondiente de Gγ1) del conjunto de partículas que todavía se encuentra en reposo.

Es sencillo verificar que los sistemas de GPL2 con $\alpha < 1$ se encuentras entre los sistemas que Gγ1 contempla. Primero, es evidente que todas las partículas P_n de GPL2 con $\alpha < 1$ pueden disponerse inicialmente en la posición $x_n = 1 - 1/2^n$, posición correspondiente a la posición inicial en los procesos revertidos de Gγ1. Segundo, (6.41) se corresponde con una función $f(x) = \frac{2\alpha-1+x}{2\alpha+1-x}$, que tiene dos puntos fijos: $x = 1$ que es un atractor cuando $\alpha > 1$ y un repulsor cuando $\alpha < 1$, y $x = 2\alpha - 1$ que es un repulsor cuando $\alpha > 1$ y un atractor cuando $\alpha < 1$. Como explícitamente la generalización se limita a los casos en que $\alpha < 1$ y la masa total es finita, tomar algún $\gamma_n > 1$ implica, por la repulsión de $x = 1$, que la masa total sea infinita. Por lo tanto, necesariamente $\gamma_n < 1$. Tercero y último, necesitamos que la restricción expresada en la desigualdad (6.26) se cumpla; precisamente, sustituyendo la relación de relaciones de masas (6.41), llegamos a que la desigualdad en este caso equivale a $\gamma_n < 1$ que, como acabamos de ver, se cumple. Con esto se pone de manifiesto, definitivamente, que las supertareas de GPL2 con $\alpha < 1$ son procesos indeterministas.

Esto no es todo. En la sección 6.2.2 probamos que las supertareas de la generalización GSTC son indeterministas en la gama $1/3 < \mu < 1$. Quedaba una laguna importante ya que la gama de casos en los que $0 < \mu \leq 1/3$, y para la cual no probamos la presencia del indeterminismo, es de gran interés debido a que la masa total del sistema es finita. Pues bien, la generalización Gγ1 muestra que las supertareas de GSTC con $\mu < 1$ son indeterministas. Exactamente de la misma manera que lo hemos probado para STMNC y para GPL2 con $\alpha < 1$: antes de que termine de ejecutarse una supertarea de GSTC, tenemos una infinidad de partículas que podrían auto-excitarse ejecutando la reversión temporal correspondiente de Gγ1. También es fácil verificar que esto es así. Primero, es claro que cada partícula P_n de GSTC inicialmente puede colocarse en una posición $x_n = 1 - 1/2^n$. Segundo, GSTC se limita a los casos en los que $\mu = m_{n+1}/m_n = m_{n+2}/m_{n+1} = \gamma_n = \gamma_{n+1} < 1\ \forall n$. Tercero, con estas últimas relaciones de masas podemos expresar la desigualdad (6.26) en términos exclusivos de μ; así tal desigualdad se expresa como $(\mu - 1)^2 > 0$, que evidentemente se satisface siempre. Con esto se pone de manifiesto, definitivamente, que las supertareas de GSTC con $\mu < 1$ son procesos indeterministas.

Hemos comprobado, pues, que muchas supertareas (un infinidad, en realidad) que hasta ahora no se habían presentado como indeterministas, sí son supertareas manifiestamente indeterministas; esto, además, se ha hecho utilizando el mismo mecanismo del indeterminismo bajo el cual se ponía en duda el indeterminismo en tales procesos: se sugería que, por el hecho de que los procesos de GPL2 (o de GSTC) no tenían el reposo relativo de todas sus partículas como estado final, no podían ser indeterministas bajo el reposo relativo de todas las partículas resultante de una supertarea; se suponía que, como los procesos de GPL2 (o de GSTC) no terminan en reposo relativo y por tanto su reversión temporal de los correspondientes procesos no puede ocurrir en ningún instante, la reversión temporal de alguna otra supertarea distinta a la de los procesos de GPL2 (o a la de los procesos GSTC) no podía ocurrir. O al menos se dejaba relegada por completo la posibilidad de que ocurriera. Hemos comprobado aquí que esto de hecho es posible; concretamente, hemos visto que la reversión temporal de algunos procesos de Gγ1 puede ocurrir en el transcurso de la ejecución de los procesos de GPL2 (y de GSTC); así como de STMNC y otros muchos más.

Así, la generalización Gγ1 es un modelo de supertareas que complementa a la generalización GPL1 en cuanto al indeterminismo entendido bajo el reposo relativo como estado final de una supertarea. Ahora, ¿por qué GPL1, que al igual que Gγ1 es diseñada para mostrar el indeterminismo de algunos sistemas bajo supertareas que tienen el reposo de todas sus partículas como estado final, no incluye todos los sistemas que incluye la generalización Gγ1? El motivo es simple: porque los procesos de GPL1 no sólo culminan con el reposo relativo de todas sus partículas, sino que a su vez son modelados para que tengan un estado inicial en el que un subconjunto infinito de partículas se encuentra también en reposo relativo. A diferencia, los procesos de Gγ1, que también culminan con el reposo relativo de todas sus partículas, son modelados para que su estado inicial sea explícitamente distinto al del reposo relativo de cualquier subconjunto de partículas. Esta distinción entre los procesos de GPL1 y Gγ1 tiene una consecuencia interesante para el indeterminismo que presentan: mientras que los procesos de GPL1 presentan una evolución indeterminista inclusive antes de que termine de ejecutarse la supertarea (una auto-excitación de algún subconjunto infinito que todavía se encuentre en reposo relativo), los procesos de Gγ1 no presentan su evolución indeterminista hasta que termine de ejecutarse la supertarea (una vez que haya un conjunto infinito de partículas en reposo relativo). Todo esto, por supuesto, bajo el mecanismo de reposo relativo.

6.2.5. Rescatando la hipótesis: la generación de la pérdida de la energía desvinculada de la generación del indeterminismo

Se puede pensar que el indeterminismo en STMNC manifestado en la sección anterior no es ningún hallazgo importante. Puede notarse, al final de cuentas, que desde hace tiempo[294] es conocido que sistemas como STMNC son trivialmente indeterministas bajo TRST2. Siempre que tengamos un intervalo espacial abierto, de distancia mayor a cero y vacío de materia, en un sistema durante un intervalo de tiempo mayor a cero, es

[294] Desde la publicación de [Pérez Laraudogoitia 1998a].

posible que ocurra una auto-excitación TRST2. Sin duda alguna, éste es el caso del sistema en el que ocurre STMNC: hay una infinidad de intervalos espaciales con las características mencionadas entre cada par de partículas contiguas, al menos mientras no se haya terminado de ejecutar la supertarea.[295]

Esto es indudablemente cierto. Sin embargo, TRST2 tiene una masa infinita y, por lo tanto, en cualquier otro marco de referencia inercial distinto al marco en el que se describe, carece de una energía definida. Como STMNC es importante, precisamente, debido a la pérdida de la energía que presenta, la ejecución espontánea de TRST2 en algún momento de la ejecución de STMNC no es bienvenida a la hora de tratar de comprender la pérdida de la energía y su relación con el indeterminismo. Por el contrario, el caso de Gγ1 bajo el sistema de STMNC tiene una energía bien definida en todo momento. Para comprobarlo, y como sabemos ya que la masa total del sistema es finita, es suficiente con demostrar que el límite de la energía de la partícula P_n que lleva la velocidad intermedia $\frac{1}{2}m_n v_n'^2$ cuando $n \to \infty$ también tiene un valor finito (pues este límite es la energía que el sistema pierde; esto se aprecia al operar el límite cuando $k \to \infty$ en (6.10) y (6.11)). De (6.23), y por la definición de la relación de masas γ_n en Gγ1 es fácil llegar a que $\frac{1}{2}m_n v_n'^2 = \frac{1}{2}m_0 v_0'^2 \prod_{k=0}^{n} \frac{(1+\gamma_k)^2}{2^2\gamma_k}$, por lo que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}m_n v_n'^2 = \frac{m_0 v_0'^2}{2}\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\gamma_k)^2}{2^2\gamma_k}. \tag{6.42}$$

Así, simplemente tenemos que mostrar que el producto infinito en el miembro derecho de (6.42) converge. Si sustituimos la relación de masas de STMNC en tal producto, obtenemos que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(k+1)^2+(k+2)^2}{2(k+1)(k+2)}\right)^2. \tag{6.43}$$

Ahora bien, es conocido que un producto infinito de la forma $\Pi(1 + a_k)$ es convergente si y sólo si la suma Σa_k es convergente.[296] Es posible reescribir (6.43) de la forma $\Pi(1 + a_k)$; en tal caso el término

$$a_k = \frac{(2k+3)^2}{\left(2(k+1)(k+2)\right)^2}. \tag{6.44}$$

De esta manera, sólo nos resta probar que Σa_k según (6.44) es convergente. Para ello basta darse cuenta de que $a_k = \frac{(2k+3)^2}{2^2(k+1)^2(k+2)^2} < \frac{(2k+4)^2}{2^2(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{1}{(k+1)^2}$, es decir, que cada término de Σa_k según (6.44) es menor que cada término de una conocida serie convergente. Por lo tanto, Σa_k según (6.44) es convergente; así, el producto (6.43) también es convergente y el límite (6.42) tiene un valor finito para nuestro caso. Por lo tanto, la energía que se pierde con la ejecución de Gγ1 bajo la misma relación de masas que STMNC es finita, lo que quiere decir que la supertarea tiene una energía bien definida (aunque no necesariamente conservada) durante toda su evolución.

Ahora bien, a pesar de que queda manifestado el indeterminismo en STMNC bajo Gγ1, hay todavía un sentido importante en el cual la pérdida de la energía que se presenta en la culminación de STMNC se encuentra desvinculada del indeterminismo.

---

[295] También tenemos una región infinita vacía de materia en todo momento: la región del espacio unidimensional izquierda al sistema de partículas. No obstante, son más interesantes los intervalos espaciales especificados en el texto principal, ya que también constituyen una condición que posibilita la ejecución de TRST2 en un espacio acotado para STMNC.

[296] Confróntese teoremas de convergencia de productos infinitos en [Knopp 1947: 220].

Es importante notar que los procesos que hacen que una supertarea de ordinalidad ω sea indeterminista son siempre supertareas de ordinalidad ω^*.[297] STMNC, por ejemplo, es de ordinalidad ω mientras que el proceso que la hace indeterminista, la reversión temporal del proceso correspondiente de Gγ1, es de ordinalidad ω^*. Ahora bien, este último proceso, en caso de que ocurra, ocurre siempre antes de que STMNC termine de ejecutarse. Pero entonces, si tales procesos ocurren, impiden la ejecución de STMNC así como la pérdida de la energía generada concretamente por su culminación. Así las cosas, el indeterminismo que la reversión temporal de Gγ1 ofrece a STMNC no parece ser muy relevante para la pérdida de la energía que esta última ocasiona. Uno no parece estar muy relacionado con la otra. Este panorama plantea las siguientes cuestiones: ¿existe alguna supertarea newtoniana de ordinalidad ω^* que se pueda ejecutar una vez que la energía se pierde bajo STMNC? ¿La ejecución total de STMNC, junto con la pérdida de la energía que conlleva, dispone al conjunto de partículas para el indeterminismo? ¿Genera STMNC indeterminismo en el mismo sentido en el que genera la pérdida de la energía?

En cuanto STMNC termine de ejecutarse, en cada instante cada par de partículas P_n y P_{n+1} se encontrarán respectivamente en posiciones x_n y x_{n+1} tales que $x_n < x_{n+1}$; además, llevarán respectivamente velocidades constantes v_n'' y v_{n+1}'' tales que $v_n'' < v_{n+1}''$. Así las cosas, la distancia $x_{n+1} - x_n$ entre cada par de partículas crecerá conforme el tiempo transcurre, por lo que no parece que las partículas tengan la posibilidad de volver a encontrarse. Una vez, pues, que STMNC se ejecuta completamente, las partículas se irán alejando unas de otras. No existe –no al menos manifiestamente–, alguna supertarea de ordinalidad ω^* que las partículas, tal como quedan una vez que ejecutan STMNC por completo, sean capaces de ejecutar. El conjunto de partículas, al ejecutar STMNC, parece ser que queda indispuesto para ejecutar alguna otra supertarea ω^* que haga del sistema de partículas un sistema indeterminista.

Así, pues, la ejecución de STMNC no genera indeterminismo en el mismo sentido en el que genera la pérdida de la energía. Sin ambigüedad alguna, la energía del sistema que ejecuta STMNC se pierde justo cuando termina su ejecución. STMNC es una supertarea que genera una pérdida de la energía. Por el contrario, el indeterminismo bajo Gγ1 deja de presentarse una vez que STMNC se ejecuta satisfactoriamente. La ejecución de STMNC, por un lado, genera una pérdida de la energía, y por el otro, bloquea la posibilidad de procesos indeterministas de tipo Gγ1. Aunque de esto no podemos concluir que la pérdida de la energía en STMNC está desvinculada del indeterminismo en general, sí podemos asegurar que la pérdida de la energía está desvinculada del indeterminismo entendido bajo el reposo relativo en el que terminan todas las partículas tras la ejecución satisfactoria de una supertarea. La pérdida de la energía en supertareas de tipo I, pues, no está vinculada a una fuente concreta de indeterminismo.

[297] Por las razones ya expuestas en el texto principal, dejamos aquí de lado los procesos TRST2, cuya ordinalidad es $\omega^* \cdot (\omega^* + \omega)$.

6.3. Una forma más de entender el indeterminismo en supertareas de tipo I

Aunque el indeterminismo en STMNC se bloquea al terminar de ejecutarse –al menos como está manifestado hasta ahora–, es justo mostrar que la reversión temporal de STMNC sí es indeterminista bajo procesos distintos a la reversión temporal de Gγ1.

La clave para darse cuenta de ello es notar que ST1, por poner el ejemplo más ilustrativo, no solamente es indeterminista bajo el reposo relativo en el que terminan todas sus partículas. También es indeterminista debido a que las auto-excitaciones que pueden presentarse, pueden hacerlo con cualquier magnitud de velocidad. Además de las dos posibilidades que ya hemos visto –auto-excitarse o mantener el reposo– existe una diversidad infinita de posibilidades: la auto-excitación puede ser con una velocidad de cualquier magnitud. Esta misma forma de indeterminismo también se encuentra, en términos precisos, pese a su complejidad, en los procesos Gµ1 y Gγ1. En estos procesos las auto-excitaciones pueden identificarse con el valor de $v_0´$ (del cual dependen el resto de las velocidades). Como bien se puede observar, en (5.19) y (6.28), las posiciones de las partículas que están en reposo antes de la auto-excitación son independientes de $v_0´$. Por lo tanto, $v_0´$ puede tomar cualquier magnitud (por el posicionamiento de las partículas, la dirección siempre tendrá que ser la misma). Así, las reversiones temporales de Gµ1 y Gγ1, además de las dos posibilidades que ya hemos visto –auto-excitarse o mantener el reposo– tienen una diversidad infinita de posibilidades: pueden auto-excitarse con una velocidad $v_0´$ de cualquier magnitud.

En el presente apartado mostraremos que la reversión temporal de GSTC, así como la reversión temporal de otra modelización que incluye una mayor generalidad (en la que se incluye la reversión temporal de STMNC), también son indeterministas bajo este mismo principio. La idea central es la siguiente: el estado final que se obtiene en las supertareas incluidas en GSTC también puede ser obtenido, por los mismos conjuntos de partículas, bajo condiciones iniciales distintas a las establecidas en la generalización GSTC. De esta manera, los procesos revertidos de GSTC son indeterministas: pueden evolucionar de tal manera que ejecutan el proceso revertido de GSTC, o bien, evolucionar ejecutando el proceso revertido de la supertarea distinta que tiene un mismo estado final que GSTC. ¿Cómo es esta otra supertarea?

En este apartado presentaremos en términos precisos cómo pueden ser dichas supertareas distintas a GSTC. Probaremos con ello que la reversión temporal de los procesos involucrados en GSTC, así como de una generalización de supertareas más amplia (en la que se incluye la reversión temporal de STMNC), son indeterministas y, lo que es más importante, se comprobará que la forma de entender el indeterminismo explicada en el segundo párrafo de esta sección es aplicable a una gama muy amplia de supertareas newtonianas.

Esta forma entender el indeterminismo para las supertareas es la idea principal en la que se basa la generalización de Atkinson y Johnson [2009].[298] A continuación

[298] En términos formales esta idea consiste en que, debido a iteratividad infinita de las ecuaciones de las velocidades, éstas admiten una infinidad de velocidades iniciales como solución a un único estado final. Esta idea de entender el indeterminismo ya viene especificada por Norton en su discusión sobre el domo: “What is essential […] is that the set of equations is infinite. Otherwise, if there are just *n* equations, the iterative construction will likely fail at the *n*th step” [Norton 2006: 21]. (Este fragmento, junto con la sección a la que pertenece, ‘When Determinism is Exceptional or Generic’, fueron suprimidos para la publicación en [Norton 2008 (2006)]). Por su parte, y refiriéndose ya a la reversión temporal de las supertareas, Atkinson y Johnson manifiestan: “One solution of the equations of motion is the precise inverse of the forward process, but it is not the only solution” [Atkinson y Johnson 2009: 8].

vamos a modelar un par de generalizciones basadas en este reciente resultado con el fin de acercarnos hacia la gama de casos de supertareas newtonianas de tipo I para las que esta forma de indeterminismo es aplicable. Esto, además de aclarar los puntos especificados en el párrafo anterior, nos será de utilidad para aclarar, hasta cierto grado, la posibilidad del indeterminismo de STMNC depués su ejecución (y no sólo del indeterminismo de su proceso revertido). Es preciso señalar la ligera variación entre el planteamiento de Atkinson y Johnson y las generalizaciones que aquí presento: mientras que el planteamiento de ellos apunta hacia una generalidad exhaustiva (que, por supuesto, es altamente deseable), de manera que no cuidan de especificar la relación de masas entre las partículas ni las distancias entre las mismas en algún estado inicial concreto para que los procesos que contemplan sean auto-consistentes,[299] las generalizaciones que vamos a presentar a continuación se restringen a una gama de casos para los que la ejecución de las supertareas, la sucesión especificada de colisiones, sean procesos auto-consistentes. Aquí, además, modelaremos nuestras generalizaciones explicitando los estados iniciales en términos de las velocidades iniciales posibles de la primera partícula.

6.3.1. Gμ2: Generalización de supertareas newtonianas con un mismo estado final y misma relación de masas

Modelemos en primer lugar supertareas que tienen el mismo estado final que GSTC; llamemos a esta generalización Gμ2. Recordemos que en el estado inicial de GSTC la partícula P_0 se aproxima con velocidad v_0' al resto de partículas mientras que éstas se encuentran en reposo. Es decir, la velocidad v_0' tiene un valor constante, digamos que $v_0' = \Omega > 0$, mientras que $v_n = 0\ \forall n$. Con esto, una vez que la supertarea se ejecuta por completo –con el proceso descrito en la sección 4.2.9– sabemos, de (4.3), que cada partícula termina viajando con una velocidad

$$v_n'' = \frac{2^n(1-\mu)}{(1+\mu)^{n+1}}\Omega\,. \tag{6.45}$$

Ahora bien, lo que queremos modelar son estados iniciales distintos bajo los cuales todas las partículas también terminen con la velocidad según se expresa en (6.45). Sabemos, por la conservación de la energía y del momento inicial en cada colisión entre toda partícula P_n y P_{n+1}, que las velocidades resultantes del choque se pueden expresar en función de las velocidades anteriores al mismo, tal como se muestra a continuación:

$$v_n'' = \frac{1-\mu}{1+\mu}v_n' + \frac{2\mu}{1+\mu}v_{n+1} \tag{6.46}$$

$$v_{n+1}' = \frac{2}{1+\mu}v_n' - \frac{1-\mu}{1+\mu}v_{n+1}\,. \tag{6.47}$$

De (6.47) es fácil ver que

$$v_1' = \frac{2}{1+\mu}v_0' - \frac{1-\mu}{1+\mu}v_1$$

$$v_2' = \frac{2}{1+\mu}\left(\frac{2}{1+\mu}v_0' - \frac{1-\mu}{1+\mu}v_1\right) - \frac{1-\mu}{1+\mu}v_2$$

[299] Es preciso aclarar aquí que Atkinson y Johnson plantean dos modelos. Uno, general, que es al que me refiero en este fragmento del texto principal, y otro, en el que todas las partículas terminan en reposo relativo. Para este último, Atkinson y Johnson sí restringen su generalización a una gama de sistemas, especificando unas relaciones de masas concretas.

$$v_3{'}=\frac{2}{1+\mu}\left(\frac{2}{1+\mu}\left(\frac{2}{1+\mu}v_0{'}-\frac{1-\mu}{1+\mu}v_1\right)-\frac{1-\mu}{1+\mu}v_2\right)-\frac{1-\mu}{1+\mu}v_3$$

$$\vdots$$

$$v_n{'}=\left(\frac{2}{1+\mu}\right)^n v_0{'}-\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\left[\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)^{n-1}v_1+\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)^{n-2}v_2+\cdots+\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)v_{n-1}+v_n\right]. \qquad (6.48)$$

Por otro lado, a partir de (6.46), tenemos que

$$v_{n+1}=\frac{1+\mu}{2\mu}v_n{''}-\frac{1-\mu}{2\mu}v_n{'}. \qquad (6.49)$$

Ahora, como queremos encontrar procesos que tengan velocidades finales exactamente igual que en GSTC, introducimos (6.45), además de (6.48), en (6.49) para obtener que

$$v_{n+1}=\frac{1-\mu}{2\mu}\left[\left(\frac{2}{1+\mu}\right)^n(\Omega-v_0{'})+\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\left[\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)^{n-1}v_1+\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)^{n-2}v_2+\cdots+\left(\tfrac{2}{1+\mu}\right)v_{n-1}+v_n\right]\right]. \qquad (6.50)$$

Es un paso sencillo obtener v_{n+2} a partir de (6.50); tras comparar el resultado con la misma (6.50), se ve fácilmente que

$$v_{n+2}=\frac{2}{1+\mu}v_{n+1}+\frac{(1-\mu)^2}{2\mu(1+\mu)}v_{n+1}=\frac{1+\mu}{2\mu}v_{n+1}.$$

Lo que implica que

$$v_{n+2}=\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^{n+1}v_1. \qquad (6.51)$$

Ahora, para el caso n = 0 sabemos de (6.45) que $v_0{''}=\frac{1-\mu}{1+\mu}\Omega$, mientras que de (6.49) sabemos que $v_1=\frac{1+\mu}{2\mu}v_0{''}-\frac{1-\mu}{2\mu}v_0{'}$; si sustituimos lo primero en lo segundo, tenemos que $v_1=\frac{1-\mu}{2\mu}(\Omega-v_0{'})$, que tras sustituir a su vez en (6.51), sabemos finalmente que

$$v_{n+1}=\left(\frac{1-\mu}{2\mu}\right)\left(\frac{1+\mu}{2\mu}\right)^n(\Omega-v_0{'}). \qquad (6.52)$$

De (6.52) se ve que es conveniente que $v_0{'} \geq \Omega$ para que el sistema ejecute una supertarea. El factor que está elevado a la n, como $\mu < 1$, es mayor a 1 y crece junto con n, además de que nos asegura que $|v_{n+1}| \leq |v_{n+2}| \leq |v_{n+3}| \leq \ldots$ Por lo tanto, si $v_0{'} < \Omega$ el signo de v_{n+1} es positivo y tendremos que $v_{n+1} < v_{n+2} < v_{n+3} < \ldots$ (todas con signo positivo), lo que indica que, si también $v_0{'} < v_{n+1}$, las partículas nunca colisionan. Por el contrario, si $v_0{'} > \Omega$ el signo de v_{n+1} es negativo y tendremos que $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$ (todas con signo negativo), lo que nos abre la posibilidad de que las partículas en algún momento se alcancen para ejecutar la supertarea sucesiva.

Queda por ahora obtener las posiciones de las partículas en algún momento dado para que esta posibilidad se actualice. No es necesario, sin embargo, especificar tales posiciones para asegurarnos que la sucesión de colisiones ocurre en estricta sucesión y de manera autoconsistente. Es suficiente simplemente con mostrar que existen condiciones iniciales que son consistentes con la sucesión de colisiones tal como se especifica. Precisamente, las condiciones iniciales que lo muestran son las que aquí mejor vienen al caso: las reversiones de los estados finales que corresponden a un tiempo posterior a la finalización de la supertarea revertida. Miremos, pues, a los procesos revertidos. Claramente, si las posiciones iniciales de las partículas (para el proceso no revertido) tienen un punto de acumulación, entonces el caso de referencia $v_0{'}$ = Ω desencadena la sucesión de colisiones tal como el modelo lo especifica; su reversión temporal, por lo tanto, también es un proceso consistente con la sucesión revertida de colisiones. Pues bien, partiendo de esta reversión temporal en concreto, y con cualquier valor $v_0´ \geq \Omega$ con el que se auto-excite el sistema, P_{n+1} tendrá que adquirir la velocidad $-v_{n+1}$ (es decir, la revertida de la expresada en (6.52) y que resulta positiva) antes de que P_n adquiera la velocidad $-v_n$ (que también resulta positiva). Como $-v_n < -v_{n+1}$ y P_n adquiere $-v_n$ en una posición menor que la posición en la que P_{n+1} adquirió $-v_{n+1}$, entonces P_n no puede volver a alcanzar a P_{n+1}. Esto, por supuesto, sin perder generalidad: en el proceso revertido, una vez que una partícula adquiere su velocidad final (la velocidad inicial (6.52) revertida), no vuelve a colisionar con otra partícula. Así, este camino libre que tienen las partículas en el proceso revertido, es exactamente el mismo camino libre que tienen en el proceso directo. Por lo tanto, aunque no sepamos con precisión cuál es la posición inicial de las partículas en Gμ2, podemos estar seguros que existen posiciones que ejecutan la sucesión de colisiones en estricta sucesión.[300]

Las supertareas que engloba la generalización Gμ2 se pueden resumir de la siguiente manera. Tenemos un conjunto infinito de partículas P_0, P_1, P_2, P_3, … posicionadas en el espacio unidimensional (digamos el eje x) en ese mismo orden: la posición de cada P_n siempre es menor a la posición de cada P_{n+1} (excepto cuando colisionan, que tendrán la misma posición). Inicialmente la partícula P_0 se encuentra viajando con una velocidad $v_0´ \geq \Omega$ (tómese como Ω cualquier número real mayor a cero) mientras que el resto de las partículas viajan con una velocidad v_{n+1} tal como se expresa en (6.52). P_1 colisionará una sola vez con P_2, tras lo cual P_2 colisionará una sola vez con P_3 y, en general, P_n colisionará una sola vez con P_{n+1}. Cuando la supertarea se ejecuta satisfactoriamente, cada partícula se encontrará viajando con una velocidad $v_n´´$ tal como se expresa en (6.45). Ahora bien, las velocidades expresadas en (6.45) tan sólo dependen de Ω. Es decir, para cada Ω que se tome, hay una infinidad de posibilidades (cualquier $v_0´ \geq \Omega$) en donde las partículas tienen las velocidades precisas para ejecutar una supertarea que resulta en un mismo estado final. Así las cosas, es directo darse cuenta que la reversión temporal es un proceso indeterminista: un mismo estado inicial tiene ante sí una infinidad de posibles evoluciones que desarrollar. Por lo tanto, la reversión temporal de GSTC es indeterminista: puede evolucionar ejecutando exactamente GSTC revertido o bien ejecutando alguna otra supertarea incluida en Gμ2.

6.3.2. Gγ2: Generalización de supertareas newtonianas con un mismo estado final y distinta relación de masas

Es interesante dar un paso más hacia la generalidad, y verificar que esto también podría darse en sistemas en los que los diversos pares de partículas contiguas no guardan una misma relación de masas, es decir, que $\gamma_n = m_{n+1}/m_n \neq m_{n+2}/m_{n+1} = \gamma_{n+1}$ (debido a que Gγ2 contiene a Gμ2, pudimos haber prescindido de la presentación de esta última; sin embargo, Gμ2 es valiosa, por su simplicidad considerable, no sólo para fines ilustrativos sino para resultados posibles en un futuro). Ante esta generalidad, habrá casos en los que posiblemente la supertarea de referencia no ocurre de manera sucesiva (¡o tal vez nunca llega a ejecutarse una supertarea!). Para asegurarnos de que la cadena de colisiones es rigurosamente sucesiva, limitemos nuestra generalización para los casos en que toda $\gamma_n < 1$ y que las velocidades finales $v_0´´ < v_1´´ < v_2´´ < … < v_n´´ < …$

[300] Este argumento, que garantiza la auto-consistencia de los procesos que pueden ocurrir, es un punto relevante que no se encuentra en la generalización de Atkinson y Johnson [2009]. Es importante señalar que esta garantía de la auto-consistencia no implica que las partículas puedan tomar cualquier posición como estado inicial para que los procesos sean auto-consistentes.

El caso que tomaremos de referencia consiste en una supertarea en la que, inicialmente, P_0 viaja con velocidad $v_0' = \Omega > 0$ al encuentro de P_1 que está en reposo al igual que el resto de partículas, que en conjunto poseen un punto de acumulación. De manera general, sabemos, por la conservación del momento lineal y de la energía en cada par de de partículas P_n y P_{n+1}, que las velocidades resultantes de la colisión se pueden expresar en función de las velocidades antes del choque, y de su relación de masas, de la siguiente manera:

$$v_n'' = \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_n' + \frac{2\gamma_n}{1+\gamma_n} v_{n+1} \tag{6.53}$$

$$v_{n+1}' = \frac{2}{1+\gamma_n} v_n' - \frac{1-\gamma_n}{1+\gamma_n} v_{n+1}. \tag{6.54}$$

Así, para el caso de referencia que tiene $v_{n+1} = 0$ y $v_0' = \Omega$, tenemos, de (6.53), que

$$v_0'' = \tfrac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0}\Omega, \tag{6.55}$$

mientras que, de (6.54), sabemos que

$$v_{n+1}' = \frac{2^{n+1}}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)}\Omega$$

que, tras tomar en cuenta (6.53) y (6.55), nos lleva a obtener que

$$v_n'' = \frac{2^n(1-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)}\Omega. \tag{6.56}$$

De (6.56) se obtiene que la condición que hemos impuesto, a saber, que $v_n'' < v_{n+1}''$, equivale a que

$$\gamma_{n+1} < \frac{1+\gamma_n}{3-\gamma_n}, \tag{6.57}$$ [301]

que es la misma restricción (6.26) obtenida para Gγ1. La presente generalización, pues, también se limita a los casos en donde esta relación entre las relaciones de masa se cumple.

Hasta aquí es el modelo completo del caso de referencia. Ahora lo que queremos obtener son otras condiciones iniciales para obtener un mismo estado final, para que así la reversión temporal de esta supertarea sea un proceso indeterminista. Así, pues, de (6.54) tenemos que

$$v_1' = \frac{2}{1+\gamma_0} v_0' - \frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} v_1$$

$$v_2' = \frac{2}{1+\gamma_1}\left(\frac{2}{1+\gamma_0} v_0' - \frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} v_1\right) - \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} v_2$$

$$v_3' = \frac{2}{1+\gamma_2}\left(\frac{2}{1+\gamma_1}\left(\frac{2}{1+\gamma_0} v_0' - \frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} v_1\right) - \frac{1-\gamma_1}{1+\gamma_1} v_2\right) - \frac{1-\gamma_2}{1+\gamma_2} v_3$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} v_{n+1}' = {} & \frac{2^{n+1}}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)} v_0' - \left(\frac{2^n(1-\gamma_0)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)} v_1 \right. \\ & \left. + \frac{2^{n-1}(1-\gamma_1)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_1)} v_2 + \cdots + \frac{2(1-\gamma_{n-1})}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})} v_n + \frac{(1-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)} v_{n+1}\right). \end{aligned} \tag{6.58}$$

[301] Esta restricción no se incluye en el planteamiento de Atkinson y Johnson [2009]. Como se verá en seguida, es importante para la auto-consistencia de los procesos que incluye.

Por otro lado, de (6.53) sabemos que $v_{n+1} = \frac{1+\gamma_n}{2\gamma_n} v_n´´ - \frac{1-\gamma_n}{2\gamma_n} v_n´$, de donde obtenemos, sustituyendo (6.55), por un lado que

$$v_1 = \frac{1-\gamma_0}{2\gamma_0}(\Omega - v_0´) \qquad (6.59)$$

y sustituyendo (6.56) y (6.58), por otro lado, que

$$\begin{aligned} v_{n+2} = {} & \frac{2^n(1-\gamma_{n+1})}{\gamma_{n+1}(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)}(\Omega - v_0´) + \frac{1-\gamma_{n+1}}{2\gamma_{n+1}}\left(\frac{2^n(1-\gamma_0)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_0)}v_1 \right. \\ & \left. + \frac{2^{n-1}(1-\gamma_1)}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})\cdots(1+\gamma_1)}v_2 + \cdots + \frac{2(1-\gamma_{n-1})}{(1+\gamma_n)(1+\gamma_{n-1})}v_n + \frac{(1-\gamma_n)}{(1+\gamma_n)}v_{n+1}\right) \end{aligned} \qquad (6.60)$$

Ahora bien, (6.60) ya es una expresión general, bajo la cual obtener v_{n+3} (también como expresión general) es un paso simple. Si a esta expresión de v_{n+3} le separamos el sumando que multiplica v_{n+2}, no es difícil darse cuenta que el resto de la expresión es una función de v_1, v_2, …, y v_{n+1}, de la misma manera que lo es v_{n+2}. De hecho, una vez que nos percatamos de esta peculiaridad, es sencillo ver que dicho resto de expresión de v_{n+3} se puede reescribir en términos exclusivos de v_{n+2}, puesto que contiene los términos precisos de v_{n+2}, de tal manera que v_{n+3} se puede escribir, ahora con el sumando reescrito en términos de v_{n+2} más el sumando originalmente separado, de la siguiente manera:

$$v_{n+3} = \frac{2\gamma_{n+1}(1-\gamma_{n+2})}{\gamma_{n+2}(1+\gamma_{n+1})(1-\gamma_{n+1})}v_{n+2} + \frac{(1-\gamma_{n+2})(1-\gamma_{n+1})}{2\gamma_{n+2}(1+\gamma_{n+1})}v_{n+2} = \frac{(1-\gamma_{n+2})(1+\gamma_{n+1})}{2\gamma_{n+2}(1-\gamma_{n+1})}v_{n+2} \qquad (6.61)$$

Además, a partir de (6.59) y de (6.60), se ve que también $v_2 = \frac{(1-\gamma_1)(1+\gamma_0)}{2\gamma_1(1-\gamma_0)}v_1$, por lo que sabemos entonces, mejor que (6.61), que

$$v_{n+2} = \frac{(1-\gamma_{n+1})(1+\gamma_n)}{2\gamma_{n+1}(1-\gamma_n)}v_{n+1}. \qquad (6.62)$$

Por lo tanto, con (6.59) y (6.62), podemos expresar ya todas las velocidades iniciales de toda partícula P_{n+1} en términos de la velocidad inicial de la partícula P_0 en el caso de referencia, Ω, y de la velocidad de la misma partícula en cada uno del resto de los casos, $v_0´$:

$$v_1 = \frac{1-\gamma_0}{2\gamma_0}(\Omega - v_0´)$$

$$v_2 = \frac{(1-\gamma_1)(1+\gamma_0)}{2^2\gamma_1\gamma_0}(\Omega - v_0´)$$

$$v_3 = \frac{(1-\gamma_2)(1+\gamma_1)(1+\gamma_0)}{2^3\gamma_2\gamma_1\gamma_0}(\Omega - v_0´)$$

$$\vdots$$

$$v_{n+2} = \left(\frac{1-\gamma_{n+1}}{2^{n+2}\gamma_{n+1}}\right)\left(\frac{1+\gamma_n}{\gamma_n}\right)\left(\frac{1+\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{1+\gamma_0}{\gamma_0}\right)(\Omega - v_0´). \qquad (6.63)$$

De (6.63) se ve que es conveniente que $v_0´ \geq \Omega$ para que el sistema ejecute una supertarea. Como toda relación de masas $\gamma_n < 1$, el resto de los factores expresados en (6.63) –todos los distintos a $(\Omega - v_0´)$– son mayores a cero. Así, si $v_0´ > \Omega$, el signo de v_{n+1} es negativo. Con esto, también es conveniente que $v_{n+1} > v_{n+2} > v_{n+3} > \ldots$, pero como todas tienen un signo negativo, nos basta con saber que $|v_{n+1}| < |v_{n+2}| < |v_{n+3}| <$ …., que se cumplirá cuando $|v_{n+1}/v_{n+2}| < 1\ \forall n$. Pero, de (6.63), sabemos que esta desigualdad equivale a que $\gamma_{n+1} < \frac{1+\gamma_{n+1}}{3-\gamma_{n+1}}$, que es lo mismo que (6.57), por lo que se cumple para la gama de sistemas que nos hemos restringido.[302] De esta manera, existe la posibilidad de que las partículas en algún momento se alcancen para ejecutar la supertarea sucesiva.

Para ver que esta posibilidad es actualizable, faltaría especificar las posiciones que las partículas deben tomar para realizar la supertarea sucesiva. Sin embargo, debido a la monotonicidad que hemos especificado para las velocidades, el argumento presentado a este respecto para los procesos Gμ2 también es perfectamente válido y aplicable para Gγ2.[303]

En resumen, los procesos de la generalización Gγ2 se pueden describir de la siguiente manera. Tenemos un conjunto infinito de partículas P_0, P_1, P_2, P_3, … posicionadas en el espacio unidimensional en ese mismo orden: la posición de cada P_n siempre es menor a la posición de cada P_{n+1} (excepto cuando colisionan, que tendrán la misma posición). Inicialmente la partícula P_0 se encuentra viajando con una velocidad $v_0' \geq \Omega$ (cualquier real mayor a cero) mientras que el resto de las partículas viajan con una velocidad v_{n+1} tal como se expresa en (6.63). P_1 colisionará una sola vez con P_2, tras lo cual P_2 colisionará una sola vez con P_3 y, en general, P_n colisionará una sola vez con P_{n+1}. Cuando la supertarea se ejecuta satisfactoriamente, cada partícula se encontrará viajando con una velocidad v_n'' tal como se expresa en (6.55). Ahora bien, las velocidades expresadas en (6.55) tan sólo dependen de Ω. Es decir, para cada Ω que se tome, hay una infinidad de posibilidades (cualquier $v_0' \geq \Omega$) en donde las partículas tienen las velocidades precisas para ejecutar una supertarea que resulta en un mismo estado final. Con esto, es directo darse cuenta que la reversión temporal es un proceso indeterminista: un mismo estado inicial tiene ante sí una infinidad de posibles evoluciones que desarrollar.

Para finalizar, una vez que tenemos esta generalización, es de sumo interés percatarse que la forma del indeterminismo bajo la cual es modelada podría manifestarse también en los procesos no revertidos de las supertareas. Por ejemplo, ¿podría ser algún estado posterior a la ejecución de STMNC un estado que se corresponda con la reversión temporal de alguna otra supertarea? Si la respuesta es afirmativa, entonces la supertarea STMNC también es un sistema indeterminista en momentos posteriores a su ejecución. La cuestión, sin embargo, es compleja. En cualquier caso, se puede notar que existen dificultades para que una auto-excitación de este tipo ocurra. En los estados posteriores a la ejecución de STMNC las partículas tienen velocidades tales que $v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_n < \ldots$; si la reversión temporal de otra

---

[302] Aunque este planteamiento no es más que una concreción del realizado por Atkinson y Johnson [2009], ellos no expresan las velocidades iniciales como aquí se hace en (6.63), en términos exclusivos de las relaciones de masa, la velocidad inicial de P_0 en el proceso de referencia y en el proceso alternativo. Una expresión de este tipo es importante para el análisis de la auto-consistencia de los procesos que involucra, como se pone de manifiesto en este fragmento del texto principal. Es justo añadir que ellos también hacen un comentario de este talante posteriormente a la presentación de un ejemplo concreto (señalado ya en la nota 290), para el que sí expresan las velocidades iniciales en estos términos. El comentario manifiesta conciencia sobre la dificultad de estos procesos: "However, with $\gamma > \beta_0$ additional collisions will take place. The nature of these collisions, which depend crucially upon spatial locations as well as velocities, has not been analyzed. It is expected to be quite complicated" [Atkinson y Johnson 2009: 10]. Es importante aclarar que aquí Atkinson y Johnson están hablando del estado final de la auto-excitación, y no del estado inicial del proceso directo. De esta manera no hay una inconsistencia entre su condición puesta en reserva $\gamma > \beta_0$ y mi condición recomendada $v_0' \geq \Omega$.

[303] Nótese aquí que he cuidado de expresar esto como posibilidad. Es decir, si tal supertarea es posible, su ejecución es auto-consistente. Ahora bien, ¿podría no ser posible? Sí. Debido a que no hemos especificado las distancias que debe haber entre las partículas, seguramente habrá una serie de distancias entre partículas con las cuales la sucesión infinita de colisiones no pueda llevarse a término, y por tanto la supesta auto-excitación del sistema correspondiente no será posible, al menos no en estos términos.

supuesta supertarea tiene dichas velocidades en su estado inicial, entonces las velocidades finales de su proceso directo deben ser tales que $-v_1 > -v_2 > -v_3 > \ldots > -v_n > \ldots$ Pero entonces, hay una dificultad para que tal estado final llegue a darse: como v_{n+1} es mayor en magnitud que v_n, la partícula P_{n+1} podría colisionar, antes de que el resto de partículas obtengan las velocidades finales deseadas, con P_n; es decir, que el estado final deseado de velocidades que gradualmente van adquiriendo las partículas, se puede perder, debido a las posibles colisiones entre ellas bajo tal estado, en un momento anterior a la obtención definitiva de dicho estado final deseado. Esta dificultad, por supuesto, podría (aunque no lo sabemos con seguridad) superarse con cierto distanciamiento de las partículas. El problema de esto es que tal distanciamiento tendría que ser tal que la supertarea se logre ejecutar con éxito. Además, tal distanciamiento deberá ser tal que se corresponda con el distanciamiento de las partículas de algún estado posterior a STMNC en alguna de sus configuraciones. En definitiva, aunque bajo el mecanismo del indeterminismo especificado por Atkinson y Johnson cabe la posibilidad de que el sistema que ejecuta STMNC sea indeterminista una vez que la supertarea culmina, cabe también la posibilidad de que no lo sea.[304] Esta es una cuestión de sumo interés que queda por aclarar.

6.3.3. El comportamiento de la energía en Gμ2 y Gγ2

Es interesante conocer ahora cómo se comporta la energía en las supertareas de las generalizaciones Gμ2 y Gγ2.

Empecemos por Gμ2. Por un lado, a partir de la relación de masas y de las velocidades finales en (6.45), podemos ver que la energía final viene dada por

$$T_{Fin} = \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{2^{2n} \mu^n}{(1+\mu)^{2n}} = \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 . \tag{6.64}$$

Por el otro lado, tomando en cuenta también la misma relación de masas, y con las velocidades iniciales en (6.52), tenemos que la energía inicial se puede expresar como

$$T_{Ini} = \frac{1}{2} m_0 v_0'^2 + \frac{1}{2} m_0 (\Omega - v_0')^2 \mu \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(1+\mu)^{2n}}{2^{2n} \mu^n} . \tag{6.65}$$

Puede observarse que cuando $v_0' = \Omega$ la energía se conserva, ya que (6.64) y (6.65) se reducen a lo mismo, tal como se espera por el conocimiento que tenemos de la conservación en GSTC. También puede observarse que la sumatoria en (6.65) es una serie divergente para cualquier valor de μ (pues cada término de la sumatoria es siempre mayor a la unidad, independientemente de n). Por lo tanto, cuando $v_0' \neq \Omega$, la energía inicial es infinita. Tenemos así, en estos casos, una pérdida de la energía, pero no tenemos una energía bien definida en todo momento.

El caso de Gγ2 es considerablemente más complejo. Es posible, no obstante, hacer observaciones interesantes. Por un lado, a partir de la relación de masas y de las velocidades finales en (6.56), podemos ver que la energía final viene dada por

---

[304] Ellos también reconocen, sin entrar en detalles, que la falta de especificación de unas condiciones iniciales concretas amenazan el indeterminismo de estos procesos: “Since a spontaneous wave of motion of arbitrary energy may originate from the origin at any time whatsoever, it is strictly undetermined what the velocity of any ball will be from one moment to the next. A ready objection to such a muddled situation is that the initial condition has not been fully specified” [Atkinson y Johnson 2009: 20].

$$T_{Fin} = \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 \left[\left(\frac{1-\gamma_0}{1+\gamma_0} \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2(n+1)}(1-\gamma_{n+1})^2}{(1+\gamma_{n+1})^2} \prod_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{(1+\gamma_k)^2} \right]. \tag{6.66}$$

Por el otro lado, tomando en cuenta también la misma relación de masas, y con las velocidades iniciales en (6.59) y (6.63), tenemos que la energía inicial se puede expresar como

$$T_{Ini} = \frac{1}{2} m_0 v_0{'}^2 + \frac{1}{2} m_0 (\Omega - v_0{'})^2 \left[\frac{(1-\gamma_0)^2}{2^2 \gamma_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma_{n+1})^2}{2^{2(n+2)} \gamma_{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{(1+\gamma_k)^2}{\gamma_k} \right]. \tag{6.67}$$

Verificar que la energía final (en (6.66)) es igual a la energía inicial (expresada en (6.67)) es una tarea de considerable complejidad. Cuando $v_0{'} = \Omega$ las cosas se simplifican bastante. Dentro de estos casos entra precisamente STMNC, el caso que aquí más nos interesa, para el que ya se probó que la energía final es menor que la energía inicial. Aunque no sepamos el valor preciso de la energía final, sabemos con seguridad que es una energía bien definida.

Es interesante verificar que la energía inicial (6.67) para el caso correspondiente al mismo conjunto de partículas que STMNC también está bien definida. En la sección 6.2.5 ya probamos que el límite de la energía cuando $n \to \infty$ en Gγ1 para STMNC es finito, lo que implica que la energía inicial en Gγ1 para STMNC está bien definida (ya que tal límite es la energía perdida). Pues bien, tomando en cuenta (6.25), llegamos a que la energía inicial de Gγ1 es

$$T_{Ini} = \frac{1}{2} m_0 v_0{'}^2 + \frac{1}{2} m_0 v_0{'}^2 \left[\frac{(1-\gamma_0)^2}{2^2 \gamma_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma_{n+1})^2}{2^{2(n+2)} \gamma_{n+1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{(1+\gamma_k)^2}{\gamma_k} \right], \tag{6.68}$$

que para el caso de STMNC es una energía finita. Aquí se puede observar que el factor que multiplica al segundo sumando del miembro derecho (todo lo que está dentro de los corchetes) en (6.68) es exactamente igual al factor que multiplica al segundo sumando del miembro derecho en (6.67). Por lo tanto, la energía en Gγ2 para STMNC (la expresada en (6.67)) también es finita. La energía también está bien definida.

En suma, la supertarea STMNC es de sumo interés, pues ella misma, las auto-excitaciones posibles bajo Gγ1, y la diversidad de evoluciones posibles de su reversión temporal bajo Gγ2, son todos ellos procesos con una energía bien definida en todo momento.

6.4. Precisando la relación de la pérdida de la energía con el indeterminismo en supertareas newtonianas

El recorrido realizado en este capítulo resulta relevante para aclarar la relación que el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía guardan en supertareas newtonianas.

En las supertareas que consisten en colisiones globales de una partícula con un conjunto abierto de partículas, la conservación de la energía no se presenta como una consecuencia de la evolución del sistema que la ejecuta. Por el contrario, la evolución es una consecuencia de la imposición del principio de la conservación de la energía (así como del principio de la conservación del momento). No se presenta, precisamente, porque así se impone, ni una pérdida ni una ganancia de la energía. Así, no tiene mucho sentido hablar de una relación indeterminismo-fallo de la conservación de la energía en procesos para los que previamente sabemos, con seguridad, que no hay tal fallo de la conservación de la energía. Sin embargo, el indeterminismo encontrado que puede presentarse en una colisión global guarda cierta relación con la conservación de la energía. Las velocidades que las partículas pueden tomar se obtienen precisamente bajo las ecuaciones correspondientes a los principios conservativos, y la diversidad de soluciones que permiten son las que hacen el proceso indeterminista. Si miramos a las ecuaciones, debe notarse que este indeterminismo es totalmente análogo al indeterminismo presente en colisiones instantáneas entre más de dos cuerpos. Tenemos sólo dos ecuaciones (la conservación de la energía y la conservación del momento) y más de dos variables incógnitas (las velocidades de cada cuerpo después de la colisión): es natural que existan una infinidad de soluciones, con un sentido físico preciso, para cada colisión de estas características. Esto es precisamente lo que ocurre en el proceso descrito en la sección 6.1.1.2: tenemos sólo dos ecuaciones con una infinidad de incógnitas.

En las supertareas de tipo II, a diferencia de las colisiones globales, la conservación de la energía no es una característica previamente impuesta. No obstante, también es natural que la energía se conserve. El motivo de esto ya se explicó en la sección 6.1.2.2: puede hacerse una partición del proceso en la que cada subproceso resulta independiente del resto; si en cada subproceso de éstos la energía se conserva, entonces la energía del proceso total también debe conservarse. Este es el caso para las supertareas A y B que puede presentar el sistema 2DC (analizada en la sección 6.1.2.1). Así, aquí tampoco tiene mucho sentido hablar de una relación indeterminismo-fallo de la conservación de la energía, pues son procesos para los que previamente sabemos, con seguridad, que no presentarán un fallo de la conservación de la energía. Ahora bien, la conservación que estos procesos presentan no parece tener ninguna relación relevante con el indeterminismo que generan. El indeterminismo en las supertareas de tipo II se debe primordialmente a la disposición espacial de las partículas, aspecto que no modifica en nada a la conservación de un sistema que naturalmente es conservativo.

Las supertareas de tipo I son las más problemáticas y, por ello, las más interesantes. Algunas veces presentan una pérdida de la energía mientras que en otras ocasiones la energía se conserva; algunas veces el indeterminismo que generan es evidente mientras que en otras no hay una forma clara de ver que sean generadoras de indeterminismo. ¿Cuál es la relación que guardan el indeterminismo y el fallo de la energía en este tipo de procesos? Para acercarnos a la respuesta que merece esta pregunta es útil mirar a las fuentes del indeterminismo y de la pérdida (o ganancia) de la energía por separado. Es útil también, distinguir entre supertareas de tipo I las cuales terminan (si la ordinalidad es ω) o comienzan (si la ordinalidad es ω^*) en el reposo relativo de todas sus partículas y las supertareas de tipo I que terminan (si la ordinalidad es ω) o comienzan (si la ordinalidad es ω^*) con un estado distinto al reposo relativo de todas sus partículas.

En las supertareas de tipo I que terminan con el reposo relativo (ST1, ST1A, STM1, GPL1, Gμ1, Gγ1, por mencionar las que aquí se han tratado), la relación entre el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía es clara. Debido al reposo relativo en el que terminan (claro está, cuando su ordinalidad es ω), la generación del indeterminismo es indiscutible: una vez que la supertarea se ha ejecutado, siempre se podrá ejecutar la reversión temporal del mismo proceso. Por su parte, la pérdida de la energía también está omnipresente en estos casos: en el marco de referencia inercial en el que todas las partículas terminan en reposo, el estado inicial del sistema debe tener al menos una partícula en movimiento, por lo que su energía inicial necesariamente es mayor a cero; por el contrario, en el estado final, todas las partículas se encontrarán en reposo, por lo que la energía final necesariamente es nula.[305] Se puede entender, pues, que el reposo relativo en el que todas las partículas terminan tras una supertarea newtoniana no sólo es una fuente del indeterminismo, sino también de la pérdida de la energía para el sistema. En suma, en supertareas de tipo I que terminan con todas sus partículas en reposo relativo siempre habrá una generación de indeterminismo acompañada de una pérdida de la energía.

Para las supertareas de tipo I que no terminan en reposo relativo, es conveniente profundizar más en el origen del indeterminismo y del fallo de la conservación de la energía en los casos en que se presentan. Ya hemos visto en el apartado 6.3 que la fuente del indeterminismo en estas supertareas es primordialmente la falta de una última ecuación, que conecta causalmente el movimiento de una partícula con el movimiento de otra, y que posibilita en algunos casos que una gran cantidad de estados iniciales (cuando la ordinalidad de la supertarea es ω) se corresponda con un mismo estado final; la reversión temporal de estos casos (donde la ordinalidad será ω^*) es indeterminista, pues un mismo estado inicial tiene ante sí una gran cantidad de evoluciones posibles. No hay una última ecuación simplemente porque no hay una última partícula.

Por su parte, el fallo de la conservación de la energía ocurre cuando las expresiones (6.9), (6.10) y (6.11) no son iguales, es decir, cuando cierto valor numérico no es el mismo para el estado inicial que para el estado final. Esto, por supuesto, no ocurre cuando el número de partículas (y de ecuaciones que conectan causalmente el movimiento) es finito. No obstante, no es una necesidad que la conservación de la energía falle en este tipo de procesos por el sólo hecho de ser infinitos (ejemplos de ello son GSTC y GPL2). Pese a ello, el hecho de que aquí no haya una última partícula también juega un papel importante. Es valiosa la analogía que Atkinson utiliza de la carrera de Aquiles –finalmente, hemos tenido que volver a ella– para comprender el fallo de la conservación en ST1. La carrera que plantea es de relevos y la describe de la siguiente manera:

> An […] analogy would be a relay race, in which a clone of Achilles is stationed at each Zeno point. The original Achilles starts his run from the zeroth Zeno point and passes the baton to his clone at the first Zeno point, who then runs to the next clone, passing on the baton, and so forth. […] Read now ‘Zeno ball’ for ‘Achilles clone’, and ‘momentum’ for ‘baton’, and the problem is not so much that momentum has disappeared in a puff of metaphysical smoke, and that there is no ball at the limit point to carry it away [Atkinson 2008: 11].

Bien, esta analogía funciona perfectamente bien para comprender la pérdida del momento y de la energía en ST1, pero ¿podemos extender esta misma idea, para comprender la pérdida de la energía, a procesos distintos de ST1, a procesos de tipo I cuyas partículas no terminan en reposo relativo? La respuesta es afirmativa. En la sección 6.1.2.2 también vimos que, en los casos en que la energía no se conserva, el límite de la energía que lleva la partícula P_n antes de adquirir su velocidad final (así como su energía final) es distinto de cero. Pues bien, podemos hacer una analogía con la carrera de relevos que plasme este hecho perfectamente para que nos ayude a comprender, con una mayor generalidad, la pérdida de la energía de las supertareas en cuestión.

[305] Por supuesto, los procesos que en todo momento tienen una energía bien definida son los más interesantes para analizar esta cuestión; esto, no obstante, no impide que la pérdida de la energía no ocurra en el resto de procesos, al menos en un marco de referencia inercial.

Por ejemplo, aplicada a las supertareas de GSTC, que son conservativas, tenemos una carrera que podemos describir de la siguiente manera: Aquiles comienza con un testigo (un *baton*, el objeto que cada corredor lleva para pasarlo a su relevo y así probar que ha llevado a cabo por completo su recorrido) mientras que sus clones empiezan la carrera con las manos vacías; cuando Aquiles alcanza el primer clon, en vez de pasarle el testigo completo, le da tan sólo un trozo del mismo, quedándose Aquiles con el resto; cuando el primer clon alcanza al segundo clon, en vez de pasarle el trozo completo que inicialmente lleva, le da tan sólo un trozo del mismo, quedándose el primer clon con el resto; y así sucesivamente. Al final de la carrera, Aquiles y cada clon tienen un trozo concreto del testigo original, y si todos los clones juntan con Aquiles los trozos que cada uno tiene en las manos, resultará nuevamente el testigo completo original. Análogamente, si leemos 'energía' por 'testigo' y 'partícula' por 'clon', podemos entender intuitivamente cómo es que la energía en GSTC se conserva.

No sucede lo mismo para la analogía correspondiente a STMNC. En esta carrera, Aquiles también comienza con un testigo mientras que sus clones empiezan la carrera con las manos vacías; cuando Aquiles alcanza el primer clon, en vez de pasarle el testigo completo, le da tan sólo un trozo del mismo, quedándose Aquiles con el resto (que es más pequeño que el trozo dado al clon); cuando el primer clon alcanza al segundo clon, en vez de pasarle el trozo completo, le da tan sólo un trozo del mismo, quedándose el primer clon con el resto (que es más pequeño que el trozo dado al segundo clon); y así sucesivamente, de tal manera que a lo largo de todos los relevos, habrá un pedazo de testigo original que nunca va a ser arrancado y retenido por ningún clon. O sea, al final de la carrera, Aquiles y cada clon tienen un trozo concreto del testigo original, pero si todos los clones juntan con Aquiles los trozos que cada uno tiene en las manos, resultará un nuevo testigo con un tamaño menor al original. Y es que hubo un pedazo de testigo original que fue pasado por cada uno de los clones pero que no fue mantenido por ninguno de ellos. Retomando la analogía, este pedazo de testigo corresponde al límite (expresado en (6.42)) de la energía de cada partícula P_n antes de obtener su velocidad final; es la energía que se pierde.

Podemos generalizar todavía más, y suponer que en la carrera inicialmente tenemos que Aquiles y todos los clones tienen cada uno un testigo de tamaño distinto, y que todos esos testigos juntos forman un testigo de un tamaño determinado (el testigo total inicial). Cuando Aquiles alcanza al primer clon, Aquiles le pasa un trozo de su testigo mientras que el primer clon le pasa a Aquiles otro trozo del suyo; tras el intercambio, cada corredor forma un nuevo testigo con los dos trozos con que termina: el trozo recibido y el trozo retenido. De la misma manera, cada par de clones intercambian un trozo del testigo de cada uno, formando cada uno un nuevo testigo con los trozos resultantes del intercambio. Ante este panorama, ¿de qué depende que el testigo total inicial sea del mismo tamaño que el testigo total final? De que el testigo total inicial se distribuya y reparta en su totalidad por medio de las transferencias de trozos entre cada par de clones; de que no haya un trozo de ningún testigo que sea sucesivamente transferido sin ser retenido por ningún clon. Análogamente, ¿de qué depende que la energía total inicial sea la misma que la energía total final? De que la suma de energías iniciales iguale a la suma de energías finales; de que el límite (expresado en (6.12)) de la energía de la partícula P_n antes de obtener su velocidad final sea igual a cero.

La carrera recién descrita es una analogía que explica de una manera satisfactoriamente intuitiva el origen de la pérdida de la energía en supertareas de tipo I estrictamente sucesivas. Así, pues, ya que conocemos hasta este grado las fuentes del indeterminismo y del fallo de la conservación de la energía en supertareas de tipo I, queda todavía por responder a la cuestión: ¿guardan alguna relación? Depende de lo que entendamos por relación, así como de los grados con los que se puede concebir una relación entre dos cosas. Definitivamente, a diferencia de las supertareas de tipo I que terminan en el reposo relativo de todas sus partículas (y que no son más que una gama de casos particulares de las supertareas de tipo I estrictamente sucesivas), las supertareas de tipo I estrictamente sucesivas no necesariamente fallan en los principios conservativos por el hecho de ser indeterministas, ni viceversa; ni lo primero implica lo segundo, ni lo segundo implica lo primero. Habiendo explicado de una forma intuitiva el origen de ambos aspectos, no es difícil ver por qué esto es así. Por un lado, el indeterminismo dependerá de que haya varias soluciones para la evolución que el sistema puede tomar tras un mismo estado (que podemos considerar como inicial) y que dichas soluciones sean consistentes con las posiciones que las partículas pueden tomar. Por otro lado, la pérdida de la energía dependerá de que la energía inicial no se distribuya por completo a lo largo de todo el sistema por medio de cada una de las colisiones. Claramente, una situación no tiene por qué presentarse junto a la otra.

No podemos, sin embargo, decir que la relación entre el fallo de la conservación de la energía y el indeterminismo es nula, y que el hecho de que ambos se presenten no es más que una "bonita" casualidad. De hecho, aunque la presencia de uno no siempre viene acompañada de la presencia del otro, la relación entre ambos es un tanto sutil. Basta con percatarse que ambas anomalías desaparecen si el conjunto de partículas es finito. Es, pues, necesario (mas no suficiente) para la presencia de una u otra que el sistema sea infinito. En resumen, podemos afirmar que la fuente del indeterminismo y la fuente de la pérdida de la energía en supertareas de tipo I estrictamente sucesivas son completamente distintas y, que en este sentido, la relación entre ambas anomalías no es muy estrecha; pero también podemos afirmar que para la presencia de ambas fuentes es indispensable que el sistema sea infinito, y por tanto, que ambas anomalías tienen una característica en común que las ata, provocando que en muchos sistemas se presenten juntas. El hecho de que ambas anomalías dependen de la infinitud de los sistemas en donde se presentan era un aspecto un tanto evidente desde el comienzo del trayecto investigador que da lugar a este trabajo, no así el hecho de que éste es el único aspecto que encontramos común a ambas.

7. Conclusión

La mecánica newtoniana, una teoría que, si bien no goza del mayor éxito entre las teorías vigentes que estudian el movimiento físico, sigue siendo de suma importancia para el quehacer científico y tecnológico actual, es una teoría indeterminista y no conservativa. Dicho en términos más precisos, si la realidad física fuera newtoniana, es decir, si el comportamiento de los objetos que conforman el mundo en que vivimos se rigiera exclusivamente por el aparato teórico que constituye la mecánica newtoniana, entonces existirían situaciones en las que, en caso de que se presentaran, los objetos físicos ejecutarían procesos indeterministas y no conservativos. Esto va en contra de dos concepciones que imperan en torno a la mecánica newtoniana. Por un lado, se concibe la mecánica newtoniana como una teoría en la que todos sus procesos son deterministas: dadas unas condiciones iniciales, un sistema sólo puede tener una única evolución. Por el otro lado, impera la idea de que el principio de la conservación de la energía tiene una validez universal: todo proceso físico, independientemente de la teoría con el que se describa, conserva la energía. Por supuesto, la mayoría de los procesos que ocurren en un mundo newtoniano son deterministas y conservativos, mas de aquí no se sigue que todos los procesos así lo sean.

El hecho de la presencia de estas dos anomalías en algunos procesos newtonianos, así como la comprensión del mismo, se ha venido profundizando en los últimos años bajo el estudio de las supertareas newtonianas, procesos que se presentan en un mundo newtoniano y que consisten en una sucesión infinita de colisiones perfectamente elásticas entre partículas dentro de un intervalo de tiempo finito. Es esta misma estrategia para profundizar en el conocimiento de ambas anomalías la que ha seguido este trabajo. Por su parte, se ha puesto un especial interés en la comprensión de la relación que guardan ambas anomalías. Se ha considerado, además, que avanzar en el conocimiento de cada anomalía por separado nos puede brindar luz sobre la relación de ambas y, a su vez, que el conocimiento de la relación entre ambas en sí también es conocimiento de las anomalías en particular. Ambas perspectivas, pues, son mutuamente enriquecedoras.

El principal resultado, pues, que se ha obtenido en este trabajo se consiguió puntualmente con el análisis y la reflexión en torno a la supertarea newtoniana que nombré STMNC, y que fue presentada en la sección 6.2.1. Esta supertarea es un modelo original que presenta una pérdida de la energía pero que no manifiesta trivialmente indeterminismo. Se tenía la sospecha, al inicio de la realización de este trabajo, que las fuentes del indeterminismo y del fallo de la conservación de la energía son distintas de tal modo que no siempre se presentan conjuntamente en las supertareas newtonianas. De esta manera, se pensaba también que dicha diferencia entre ambas anomalías permite la existencia de supertareas newtonianas que no conservan la energía pero que son deterministas. A primera vista, STMNC sería un ejemplo que apunta hacia la corroboración de tal sospecha. Sin embargo, como el análisis realizado lo muestra, esto no es exactamente así. ¿En qué grado esto es y no es así?

Por un lado, en la sección 6.2.4 he mostrado que, estrictamente hablando, STMNC es de hecho un proceso indeterminista. Esto se hizo construyendo una generalización de supertareas (un planteamiento de supertareas en términos generales aplicables a toda una gama de casos concretos) que son indeterministas bajo el reposo relativo en el que terminan todas sus partículas; no es difícil ver el indeterminismo en estos sistemas, puesto que la reversión temporal de los mismos tiene al menos dos evoluciones posibles: mantener el reposo indefinidamente o ejecutar el proceso revertido de la supertarea original (es decir, auto-excitarse). El modelo de esta generalización, que llamé Gγ1, se presentó en la sección 6.2.3. Ahora bien, entre los sistemas que Gγ1 abarca, se encuentra un sistema cuyas partículas se corresponden con el sistema de partículas de STMNC, y el estado de las partículas que dispone a la auto-excitación de la reversión temporal de Gγ1 lo comparte un subconjunto infinito de partículas de STMNC cuando no ha terminado de ejecutarse. Por tanto, un subconjunto de partículas del sistema que ejecuta STMNC, puede auto-excitarse imprevisiblemente bajo Gγ1 siempre y cuando STMNC no haya acabado de ejecutarse. De este modo, STMNC muestra ser un proceso indeterminista. Es importante señalar la originalidad de la generalización Gγ1: las generalizaciones de supertareas indeterministas bajo reposo relativo presentadas en la literatura, de Pérez Laraudogoitia [2007b] o de Atkinson y Johnson [2009], se reducen a una relación de masas entre partículas que no incluyen a STMNC. Con estas últimas, pues, no es posible notar este tipo de indeterminismo en STMNC. Esta importante característica de Gγ1 se debe a que, al modelarla, no se impuso un estado inicial de las partículas para buscar una relación de masas entre ellas sino, al contrario, se impuso una gama de relaciones de masa para buscar el estado inicial de las partículas. Es de suma importancia añadir que, al modelar Gγ1, se ha mostrado que todos los procesos que incluye son auto-consistentes, es decir, que la sucesión de colisiones ocurre exactamente tal como se modela.

Por otro lado, he señalado (en la sección 6.3.3) que, a pesar de los resultados más recientes expuestos en la literatura, una vez que STMNC culmina, no queda claro si el sistema que la ejecuta es o no es indeterminista. Bajo la idea del indeterminismo manifestada por Atkinson y Johnson [2009], que consiste en notar que una infinidad de supertareas puede llevar a un mismo estado final, y por tanto que un mismo estado inicial –del sistema revertido– tiene ante sí la posibilidad de ejecutar o una u otra supertarea entre una gran cantidad de ellas, se modeló (en la sección 6.3.2) la generalización Gγ2, bajo la cual se pone de manifiesto que la reversión temporal de STMNC sí es indeterminista, pues hay diversas supertareas que comparten el mismo estado final de STMNC. No obstante, se señaló que la posibilidad de que el sistema se auto-excite tras la ejecución de STMNC, posibilidad que cabe bajo el mismo principio utilizado por Atkinson y Johnson, no es muy clara. Es decir, existen dificultades de que haya supertareas auto-consistentes cuyo estado final revertido sea igual al estado de STMNC en algún momento posterior a su ejecución. En suma, por lo pronto no es posible asegurar que el sistema que ejecuta STMNC sea determinista o indeterminista después de la culminación de dicha supertarea.

En conjunto, con las generalizaciones Gγ1 y Gγ2 se ha avanzado en la elucidación de la relación que guarda el indeterminismo con la pérdida de la energía en supertareas newtonianas. Se ha comprobado, acudiendo a Gγ1, que antes de que STMNC culmine, el proceso es indeterminista. De este modo, estrictamente hablando, se ha visto que STMNC es una supertarea indeterminista. Sin embargo, tomando en cuenta la generación de la pérdida de la energía, no es claro todavía si esta generación favorece la aparición de más indeterminismo; no es claro que al culminar STMNC, al perder la energía, el sistema pueda mostrar un comportamiento indeterminista.

Todo este análisis en torno a STMNC sugiere con fuerza que las fuentes del indeterminismo y la fuente del fallo de la conservación de la energía son distintas, impulsando así, en un sentido afirmativo, la sospecha que inicialmente teníamos; de hecho, como se señaló en el apartado 6.4, el único aspecto en común que se encontró en torno a la generación de ambas anomalías en las supertareas newtonianas es la infinitud de los procesos y sistemas en los que ocurren. Sin embargo, de la existencia definitiva de alguna supertarea que no conserve la energía pero que sea determinista –una situación que, considero, puede ocurrir en un mundo newtoniano a pesar de la presencia abrumadora que ha mostrado tener el indeterminismo en las supertareas newtonianas– no hemos podido dar cuenta. Por supuesto, que STMNC no sea una supertarea de tales características, no implica que no haya algún otro sistema que ejecute un proceso tal. El hecho de que el indeterminismo en las supertareas newtonianas ha mostrado su presencia en una gran cantidad de casos y de situaciones, no imposibilita la existencia de supertareas newtonianas deterministas. En cualquier caso, demostrar que de hecho hay supertareas deterministas no conservativas, o que no lo puede haber, es una cuestión interesante que hoy en día sigue abierta.

A pesar de la relevancia de haber mostrado el indeterminismo auto-consistente de STMNC para la comprensión de la relación de la pérdida de la energía con el indeterminismo en las supertareas newtonianas, en este trabajo también se han obtenido resultados, que vistos de manera independiente son valiosos por sí mismos, pero que además, han tenido, unos más, otros menos, una influencia positiva para aclarar algún aspecto del indeterminismo, de la pérdida de la energía y de su relación en STMNC. En otras palabras, el análisis en torno a las anomalías de STMNC realizado en el capítulo 6 se ha enriquecido –y en algún caso hasta inspirado– en resultados obtenidos en capítulos anteriores.

El resultado que más influencia tuvo para el análisis y para las consecuencias de STMNC es el análisis de la generalización Gμ1 así como las consecuencias que mostró tener. Esta generalización, que se presentó en la sección 5.5.1, establece el indeterminismo en las supertareas que incluye bajo el mismo mecanismo utilizado para Gγ1: el reposo relativo de todas las partículas del sistema como estado final de la supertarea. La generalización se limitó a una misma relación de masas para cada par de partículas contiguas. Viendo la generalización de manera independiente, resultó ser de gran ayuda para visualizar cómo es que ciertas supertareas que aparentemente (debido a su extensión espacial infinita) sólo involucran colisiones globalmente independientes en realidad no lo hacen. Concretamente, se diseñó un modelo bidimensional de nombre 2DM2, que se incluye dentro de procesos que presumiblemente son deterministas, pero que resulta ser indeterminista bajo la reversión temporal de un caso específico de Gμ1. Esto es importante ya que muestra que las supertareas newtonianas indeterministas bajo el reposo relativo de su estado final no necesitan estar confinadas en un espacio finito ni el conjunto de sus partículas tener un punto de acumulación. Ahora bien, la importancia de Gμ1 para STMNC se encuentra en el indeterminismo que muestra para algunos sistemas. Concretamente, en la sección 6.2.2, se muestra que una gama de supertareas incluidas en la generalización GSTC son indeterministas bajo Gμ1, de manera que un subsistema del sistema que ejecuta GSTC puede ejecutar, antes de que GSTC culmine, una auto-excitación que se corresponda con el debido proceso revertido de Gμ1. Y precisamente, STMNC es una supertarea de un comportamiento muy similar a las supertareas de GSTC –con la diferencia de su relación de masas, la pérdida de la energía, y la ocupación espacial de su estado final–. Con las cosas así, el desarrollo de Gγ1 no fue más que un intento exitoso para trasladar las consecuencias que tiene Gμ1 para GSTC a las consecuencias que pudiera tener Gγ1 para STMNC.

Otro resultado de especial relevancia para la reflexión de las anomalías de STMNC es la distinción de supertareas newtonianas propuesta en la sección 6.1.2.2. Por un lado, tenemos las supertareas de tipo I, que son aquellas supertareas (de ordinalidad ω o ω^*) para las que es *imposible* hacer una partición de subsistemas en la cual la evolución de cada uno de los subsistemas sea independiente de la evolución de cualquier otro subsistema. Por otro lado, tenemos las supertareas de tipo II, que son aquellas supertareas (de ordinalidad ω o ω^*) para las que es *posible* hacer una partición de subsistemas en la cual la evolución de cada uno de los subsistemas sea independiente de la evolución de cualquier otro subsistema. Esta distinción entre diversas supertareas es de suma importancia para comprender el carácter conservativo o no conservativo de las mismas y, por supuesto, para comprender la relación que el indeterminismo pueda guardar con la pérdida de la energía. Y es que, como en esa misma sección se muestra, las supertareas newtonianas de tipo II necesariamente son conservativas. Por lo tanto, el indeterminismo que pueda haber en supertareas de tipo II (que lo puede haber, como se ilustra en la sección 6.1.2.1 acudiendo a los modelos de Pérez Laraudogoitia [2008]) no tiene ninguna relación con la pérdida de la energía, pues ésta no existe en supertareas de este tipo. Este no es el caso de las supertareas newtonianas de tipo I, ya que en ellas la energía (así como el momento lineal) no siempre se conserva (como es el caso de STMNC); y como ya es bien sabido, hay supertareas de tipo I que son indeterministas. La relación, pues, de la conservación de la energía y el indeterminismo en supertareas de tipo I no es una cuestión trivial. De esta manera, queda manifiesto que nuestra supertarea STMNC se encuentra entre los procesos de mayor interés. Para el análisis del comportamiento de la energía en estos dos tipos de supertareas (I y II), se siguió la estrategia de Atkinson [2007 y 2008] que, para conocer si una supertarea sucesiva es conservativa o no, obtiene el límite del término de la energía de la partícula *n*, tras su primera colisión y previamente a su segunda colisión, cuando *n* tiende a infinito. Si el límite es cero, la supertarea conserva la energía; si es distinto de cero, no conserva la energía. A este respecto, es interesante señalar que aquí se mostró cómo es que la estrategia de calcular este límite se extiende también a supertareas sucesivas que tienen como condición inicial un estado de algún conjunto infinito de partículas distinto del reposo relativo. Así las cosas, esta estrategia también es útil para conocer si las supertareas de Gγ2, cuyo debido caso muestra el indeterminismo de la reversión temporal de STMNC, conservan o no la energía.

Por otro lado, el señalamiento sobre la escasa posibilidad de que el sistema que ejecuta STMNC sea indeterminista después de que la supertarea culmine también se encuentra influenciado por otros resultados. En primer lugar, con el análisis realizado sobre las primeras propuestas para comprender el indeterminismo (en la sección 5.2), se argumentó (en la sección 5.3) que la fuente del indeterminismo en sistemas como ST2 y ST3 se debe a la desaparición –y por tanto al mecanismo de tal desaparición– de partículas. El reconocimiento de esta fuente es mucho más esclarecedor que la clasificación hecha por Earman y Norton [1998a] y enmendada por Pérez Laraudogoitia [1999a], pues nos ayuda a comprender el porqué del indeterminismo en estos sistemas. Además, respecto a esta última clasificación, en la sección 5.2 se aclaró –se eliminó la ambigüedad prevaleciente hasta entonces– que todas las supertareas newtonianas indeterministas dependen de la existencia de un límite superior para la distancia entre sus partículas, incluso las supertareas indeterministas que dependen de la falta de un límite superior para las velocidades. Esta es la cuestión relevante para STMNC, pues claramente apunta la importancia que tienen las posiciones que toman las partículas en un momento dado para que el sistema sea indeterminista. Este punto, pues, es uno de los orígenes de la puesta en duda de que el sistema de STMNC sea indeterminista tras su culminación. En segundo lugar, y reforzando el mismo punto, en la sección 6.1.1 se analizó el sistema GC junto con la colisión global, evolución para tal sistema propuesta por [Pérez Laraudogoitia 2005b] y que es conservativa a la vez que indeterminista. Concretamente, en la sección 6.1.1.3 se señaló que, a pesar de que la colisión global es una evolución consistente con un sistema en el que todas las partículas tienen una misma masa, no es nada claro que lo sea en sistemas para los que las masas de las partículas contiguas sean distintas, al menos no en todos los casos. Allí mismo se advirtió que un sistema, por ejemplo, con una relación de masas $\mu = ½$ entre partículas contiguas, no puede evolucionar bajo la reversión temporal de Gµ1 como la colisión global lo sugiere, debido al carácter expansivo de la excitación que presumiblemente desencadena la colisión global en tal sistema. Este punto, además de ser relevante para la búsqueda de una evolución plausible y consistente de este tipo de sistemas (una cuestión que en sí misma es un problema intrigante), también nos ilustra que tanto la relación de masas entre partículas como la relación de distancias entre las mismas son parámetros que muchas veces repercuten en el tipo de evolución que desarrolla el sistema y, por lo tanto, no deben ser relegadas a la hora estudiar las posibles evoluciones indeterministas. Así, el tomarlas en cuenta para los diversos estados del sistema que ejecuta STMNC nos ayudó a mantener reservas frente a la posibilidad de que haya indeterminismo en algún tiempo posterior a la culminación de la supertarea.

Asimismo, con la inquietud de comprender con mayor profundidad el indeterminismo, no sólo de las supertareas newtonianas, sino de los sistemas infinitos en general, se ofreció una explicación y precisión del indeterminismo en sistemas abiertos (en la sección 5.4). Esto, claramente, engloba la fuente del indeterminismo en sistemas como ST2 y ST3, que involucran la desaparición de sus partículas, pero también engloba el indeterminismo en sistemas como ST1 y STMNC, e incluso a otros modelos distintos de las supertareas propuestos en la literatura como, por ejemplo, el domo de Norton [2003] o el modelo HI. Se hizo notar, que la apertura más importante para el indeterminismo en este tipo de sistemas no es la propia del espacio abierto o del conjunto de partículas abierto, sino el de la cadena causal abierta. Por supuesto, la apertura del espacio y la apertura del conjunto de partículas posibilitan en gran medida la apertura de la cadena causal. La cuestión se abordó realizando una crítica a un argumento esgrimido por McAllister [2004] que sostiene que el mundo de la mecánica newtoniana es determinista debido a que las cadenas causales son infinitas. La crítica consiste en señalar que lo primero no se sigue de lo último, pues una cadena causal aunque sea infinita se puede confinar en un intervalo temporal finito; y precisamente, aunque cada uno de los estados instantáneos del sistema dentro de la cadena causal infinita se encuentre causalmente conectado con el resto de estados, no es una necesidad que se encuentre causalmente conectado con los estados anteriores a dicha cadena causal infinita. Se ilustró, además, cómo éste es precisamente el caso de las supertareas newtonianas con las que aquí se ha trabajado. La importancia de esta aclaración sobre el carácter indeterminista de los procesos que aquí nos ocuparon es evidente y se reflejó en la última fuente del indeterminismo que tratamos (en el apartado 6.3).

Ahora bien, todos estos resultados sobre el indeterminismo, sobre el fallo de la conservación de la energía y sobre la relación de ambas anomalías en mecánica newtoniana, sólo cobran sentido si los sistemas bajo los cuales se han obtenido son sistemas genuinamente newtonianos y los procesos que ejecutan son lógicamente consistentes. Así, dado su carácter fundamental, estos aspectos son de suma importancia para el resultado principal del presente trabajo. Aquí también hemos obtenido resultados que nos reafirman ambos aspectos, fundamentales para ST1, STMNC y para todas las supertareas newtonianas.

En cuanto al carácter newtoniano de las supertareas newtonianas, se ha presentado (en la sección 4.3) una lista de requisitos mínimos para que un sistema físico pueda ser catalogado como newtoniano. Esta lista tiene dos aspectos interesantes que la distancian de la caracterización presentada por Hestenes [1986].[306] Primero, la lista aquí presentada es más amplia que la de este último. El principio de la conservación de la masa, por ejemplo, es un principio que consideré conveniente incluir y que no se encuentra en el listado de Hestenes. Segundo, mientras que Hestenes presenta su lista basándose exclusivamente en la práctica científica predominante, aquí no se osa enunciar un listado hasta no hacer un recorrido por algunos problemas conceptuales. Dicho con mayor precisión, además de tomar en cuenta la práctica científica, aquí se ha hecho un recorrido por cuestionamientos que dificultan la clasificación teórica de algunos sistemas (como el de las supertareas newtonianas con las que trabajamos); una clasificación, además, que es de crucial importancia para las consecuencias que tales sistemas tienen para la teoría. Por supuesto, como se comentó en el capítulo 4, esta lista no es definitiva por la sencilla razón de que la mecánica newtoniana no es una teoría definitiva. Gracias al desarrollo de nuevas teorías, y debido a que la mecánica newtoniana no es una teoría muerta o caída en desuso, la mecánica newtoniana no se ha negado a enriquecerse adoptando ideas de otras teorías. Como se señaló también en este capítulo, éste es el caso para la idea de masa y la idea de energía. Este enriquecimiento de la idea de energía, es importante comentar, no implica la conservación de la misma en mecánica newtoniana (esto se ha explicado en la sección 4.2.9). De esta manera, se ha dejado claro que supertareas como ST1, ST1A y STMNC, pese al conjunto de problemas conceptuales que gira en torno a ellas, son procesos genuinamente newtonianos.

Se comprobó también (en el capítulo 3) que la idea de una supertarea, independientemente de si es newtoniana o no, es una idea auto-consistente que no conlleva ninguna contradicción. Una cuestión interesante que se desarrolló en la discusión entablada en dicho capítulo es el modelo presentado (en la sección 3.1.3.2) de la segunda variación de la paradoja de Ross bajo trayectorias admitidas por la mecánica newtoniana, y que es igualmente adecuado tanto para la primera variación como para el

[306] Pérez Laraudogoitia, Bridger y Alper [2002] también ofrecen un listado. Sin embargo, es importante señalar que aquí ellos no buscan caracterizar los sistemas admitidos por la mecánica newtoniana, sino ofrecer una serie de principios de talante axiomático dirigidos exclusivamente al conocimiento del comportamiento de supertareas basadas en colisiones perfectamente elásticas. No es de extrañar, pues, la falta manifiesta de algunos principios importantes. Por ejemplo, ni siquiera están enunciadas explícitamente las tres leyes de newton.

planteamiento original. Este modelo demuestra definitivamente, como contraejemplo, que la sospecha de Oppy [2006] de que no existe un modelo de una urna coherente con los tres procesos planteados conjuntamente en [Allis y Koetsier 1991] es falsa. De esta manera, el modelo de la paradoja de Ross que aquí proponemos reafirma y enriquece el hecho de que una supertarea –newtoniana o no newtoniana, conservativa o no conservativa, bajo STMNC o bajo GSTC– es una idea libre de contradicciones.

Este modelo de la paradoja de Ross, así como las supertareas newtonianas con las que hemos tratado el indeterminismo y el fallo de la conservación de la energía, asumen un espacio continuo y un tiempo continuo. De hecho, como ya se comentó desde la introducción, la ejecución de supertareas en un mundo newtoniano es posible gracias al orden continuo del espacio y el tiempo que asume la mecánica newtoniana. Por tanto, tales ideas también son fundamentales para el resultado principal de este trabajo: dicho resultado sólo cobra sentido si las ideas del espacio y el tiempo que asume la mecánica newtoniana se encuentran libres de contradicciones. La cuestión no es trivial pues tales ideas traen consigo algunas contraintuiciones, señaladas por argumentos tan antiguos como la filosofía misma, que sugieren con fuerza la existencia de algunas contradicciones.

De esta manera, aquí también queríamos mostrar que las contraintuiciones –resaltadas por las paradojas de Zenón– en torno a las ideas del espacio y tiempo continuos son consistentes con la ejecución de una supertarea en un mundo newtoniano. A este respecto, se ha especificado (en la sección 2.2.3) cuándo es adecuado hablar de un estado de movimiento instantáneo. Esto no sólo contribuye al esclarecimiento de la solución tradicional de la paradoja de la flecha –que consiste en hacer notar que el hecho de que un cuerpo no se mueva “durante” un instante no implica que el estado del cuerpo en dicho instante no sea el movimiento– aclarando el sentido de la idea de estado de movimiento instantáneo al que la solución recurre, sino que arroja luz sobre los conceptos de velocidad instantánea y aceleración instantánea asumidos en la mecánica newtoniana. Tras mostrar que existe una arraigada tendencia a identificar el estado instantáneo de movimiento de un cuerpo con la magnitud instantánea de su velocidad distinta de cero, se ha puesto en evidencia por qué esto es incorrecto. Se ha señalado, además, que hacer lo mismo con la aceleración instantánea también es inconveniente. Se advirtió –y esto una es parte importante de este resultado– que esto resulta ser así por la sencilla razón de que tanto la idea de velocidad como la idea de aceleración no se corresponden con la idea del movimiento. Así, señalando los instantes que en algunas trayectorias continuas no resulta claro si su estado es el movimiento o el reposo, he propuesto concebir tales instantes como instantes de transición del reposo al movimiento o del movimiento al reposo. Esto es importante para la comprensión de las trayectorias en un mundo newtoniano ya que, de esta manera, tenemos una forma, que nos libra de ciertas ambigüedades, de caracterizar los distintos instantes de la trayectoria de un cuerpo que se mueve en un espacio continuo y en un tiempo continuo. Esta sugerencia, además, tiene su repercusión a la hora de perseguir la comprensión de las supertareas newtonianas que aquí tratamos y diseñamos (como STMNC). En ellas ocurren colisiones binarias perfectamente elásticas, en donde los cuerpos, por ejemplo (dependiendo del marco de referencia inercial en el que se encuentren), pasan instantáneamente de tener una velocidad nula a tener una velocidad distinta de cero (o viceversa). Pues bien, un estado de transición en el instante de la colisión no sólo es acorde con las apreciaciones de la sección 2.2.3, sino con el mismo carácter transitorio que se espera como resultado de una colisión entre dos cuerpos (independientemente de si es elástica o no).

También dentro de la discusión donde se mostró que las contraintuiciones del espacio y el tiempo continuos son consistentes con la ejecución de una supertarea, se propuso un proceso (en la sección 2.1.2) de división infinita de una línea recta. Este proceso ilustra que la idea de continuidad geométrica de una línea recta concebida como un conjunto de puntos –ordenados bajo la estructura de los números reales– es una idea muy distinta de la continuidad gráfica de la representación gráfica de la misma línea. La continuidad geométrica asume un orden que deja al conjunto de puntos en una fragmentación radical, ningún punto adyacente a otro, mientras que la continuidad gráfica sugiere una contigüidad perfecta de todos los elementos. De esta manera, la continuidad gráfica no es ninguna ilustración de la continuidad geométrica. Por supuesto, esta idea es una idea ampliamente conocida desde hace tiempo (al menos por la comunidad de matemáticos). Sin embargo, la idea de un proceso como el presentado aquí, aunque no demuestra ninguna idea nueva, es valiosa porque, al ser una idea que requiere de perspectivas gráficas, ayuda a poner a favor de nuestras intuiciones una cuestión que sigue estando en contra de ellas. Es un proceso gráfico que sí ilustra un aspecto importante la idea de continuidad geométrica de una línea recta. Aspecto que comparte la estructura del espacio y el tiempo considerados por la mecánica newtoniana, así como las trayectorias del movimiento que siguen los cuerpos en un mundo newtoniano. Tenemos una idea, pues, que nos ayuda a comprender –dada la posición intuitivamente favorable en que nos deja– el aspecto que posibilita la ejecución de supertareas en un mundo newtoniano.

Además, en la discusión de la paradoja de Aquiles –el planteamiento originario de las supertareas– se realizó una objeción (en la sección 1.3.3) a Burke [2000a] sobre su argumento en contra de la carrera *staccato*. Aunque la carrera *staccato* fue planteada hace bastante tiempo por Grünbaum [1970], el argumento original de Burke no es antiguo. Consiste básicamente en hacer notar que la trayectoria propuesta por Grünbaum para la carrera *staccato* tiene velocidades y aceleraciones cuyas funciones de dirección son discontinuas. Mi objeción a ello es simple, y consistió en señalar que la continuidad de las trayectorias exigida por la mecánica newtoniana es, en el caso más restrictivo, sobre las funciones de posición, velocidad y aceleración, y no sobre las funciones que arrojan la dirección de la velocidad o la aceleración. Además, se señaló que si el criterio de Burke fuera apropiado, no solamente la carrera *staccato* sería una trayectoria prohibida en mecánica newtoniana, sino cada una de sus subcarreras, así como una gran cantidad de otras trayectorias. De esta manera se ve que, incluso con el reciente argumento de Burke, las trayectorias que posibilitan las supertareas (con las que trabajamos y con las que no) son consistentes con la mecánica newtoniana.

Cuestiones abiertas para una investigación futura

Para terminar, es justo reconocer las cuestiones que quedan abiertas para la continuidad de esta investigación en el futuro. Al presentar el resultado principal de este trabajo al principio de esta conclusión, se comentó ya que queda pendiente por demostrar que el sistema que ejecuta la supertarea STMNC es, o no es, indeterminista en momentos posteriores al primer instante en el que la supertarea ha culminado. Esta no es la única cuestión que queda pendiente de aclarar. Refiriéndonos todavía a STMNC, queda por verse si hay alguna supertarea "privilegiada", dentro de las supertareas en las que puede evolucionar la reversión temporal de STMNC bajo Gγ2, que sea conservativa; si son varias las supertareas con estas características, entonces quedará mostrado que la presencia del indeterminismo en supertareas de tipo I (y no de tipo II, como ya se ha mostrado) no necesariamente se presenta junto con un fallo de la conservación de la energía. Por supuesto, probar esto en términos más generales, y no centrarse sólo en STMNC, es una cuestión interesante digna de explorarse. También hablando en términos generales, queda todavía por mostrar que existe (o que no puede existir) un sistema que ejecute una supertarea de tipo I que no sea conservativa y que sea determinista en todos los instantes de su evolución; que sea determinista antes, durante y después de la ejecución de la supertarea.

Otra de las cuestiones interesantes que siguen abiertas, como campo para investigaciones futuras, es la comprensión del fallo de la conservación del momento lineal en las supertareas newtonianas y su relación con el indeterminismo, así como su relación con el fallo de la conservación de la energía. En Atkinson [2008] se puede ver que la naturaleza de la pérdida del momento es muy parecida a la de la pérdida de la energía (de hecho, originalmente Atkinson plantea la analogía de la carrera de relevos, tomada en el apartado 6.4, para analizar el momento y no la energía). Sin embargo, la relación con el resto de anomalías no es clara. Aunque Atkinson [2007] demuestra que para una masa finita total en una supertarea newtoniana que tiene un estado inicial con una sola partícula en movimiento relativo, aquí se ha señalado que (en la nota 287), bajo el mismo argumento, esto no es una necesidad para supertareas con un estado inicial distinto. Pero se señaló en la nota 267 que las supertareas de Gμ1 –que tienen dicho estado inicial distinto– sí conservan el momento. Por tanto, queda pendiente comprobar si en realidad el momento se conserva para la totalidad de supertareas newtonianas con masa finita total.

La relación de la pérdida de la energía y el momento en mecánica clásica difiere en gran medida de la relación entre ambas anomalías en mecánica relativista ya que, como señala Pérez Laraudogoitia [2007b], la presencia conjunta de ambas anomalías es necesaria debido a la estrecha relación conceptual que guardan el momento, la energía y la masa. Precisamente, otra cuestión pendiente para una investigación futura es el grado en el que los resultados obtenidos aquí para las supertareas newtonianas pueden extenderse hacia otras teorías y, principalmente, las consecuencias que tales extensiones, cuando sean admisibles, tienen para las mismas teorías. Al trabajar aquí con procesos mecánicos, lo natural es intentar extender las cosas hacia la mecánica relativista o hacia la mecánica cuántica. No deja de ser interesante, sin embargo, considerar la posibilidad de una extensión análoga con los mismos fines hacia procesos de naturaleza distinta al movimiento, como, por ejemplo, los procesos termodinámicos.

Referencias bibliográficas

Allis, V.; Koetsier, T. [1991]: 'On Some Paradoxes of the Infinite', *British Journal for the Philosophy of Science* **42**, 187-94.

Allis, V.; Koetsier, T. [1995]: 'On Some Paradoxes of the Infinite II', *British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 235-47.

Alper, J. S.; Bridger, M. [1997]: 'Mathematics, Models and Zeno's Paradoxes', *Synthese* **110**, 143-66.

Alper, J. S.; Bridger, M. [1998]: 'Newtonian Supertasks: A Critical Analysis', *Synthese* **114**, 355-69.

Alper, J. S.; Bridger, M.; Earman, J.; Norton, J. D. [2000]: 'What is a Newtonian System? The Failure of Energy Conservation and Determinism in Supertasks', *Synthese* **124**, 281-93.

Angel, L. [2001]: 'A Physical Model of Zeno's Dichotomy', *British Journal for the Philosophy of Science* **52**, 347-58.

Aristóteles: *Física*. [de Echandía, G. (ed. y trad.) [1995]. Madrid: Gredos].

Arnold, V. I. [1989]: *Mathematical methods of Classical Mechanics*, segunda edición. New York: Springer-Verlag.

Arsenijević, M.; Šćepanović, S.; Massey, G. J. [2008]: 'A New Reconstruction of Zeno's *Flying Arrow*', *Apeiron* **XLI**, 1-43.

Arya, A. P. [1998]: *Introduction to Classical Mechanics*, segunda edición. New Jersey: Prentice Hall.

Atkinson, D. [2007]: 'Losing Energy in Classical, Relativistic and Quantum Mechanics', *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **38**, 170-80.

Atkinson, D. [2008]: 'A Relativistic Zeno Effect', *Synthese* **160**, 5-12.

Atkinson, D; Johnson, P. W. [2009]: 'Non-conservation of Energy and Loss of Determinism. I. Infinitely many colliding balls', *Foundations of Physics* **39**, en prensa (DOI: 10.1007/s10701-009-9306-9).

Bailey, C. [1964]: *The Greek Atomists and Epicurus*. New York: Russell & Russell.

Balescu, R. [1975]: *Equilibrium and Non Equilibrium Statistical Mechanics*. New York: John Wiley & Sons.

Bell, J. L. [1998]: *A Primer of Infinitesimal Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Benacerraf, P. [1962]: 'Tasks, Super-Tasks, and the Modern Eleatics', *Journal of Philosophy* **LIX**, 765-84. Reimpreso en Salmon [1970], 103-29.

Bergson, H. [1907]: *L'Evolution créatice*. Paris: Alcan. Reimpreso en Bergson, H. [1959]: *Œuvres*. Paris: Presses Universitaires de France.

Bigelow, J.; Pargetter, R. [1990]: *Science and Necessity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Black, M. [1950-1]: 'Achilles and the Tortoise', *Analysis* **XI**, 91-101. Reimpreso en Salmon [1970], 67-81.

Bokulich, A. [2003]: 'Quantum measurements and supertasks', *International Studies in the Philosophy of Science* **17**, 127-36.

Bostock, D. [1972-3]: 'Aristotle, Zeno, and the Potential Infinite', *Proceedings of the Aristotelian Society* **73**, 37-51. Reimpreso en Bostock [2006], 116-27.

Bostock, D. [1980]: 'Aristotle's Account of Time', *Phronesis* **25**, 148-69. Reimpreso en Bostock [2006], 135-57.

Bostock, D. [1988]: 'Time and the Continuum', *Oxford Studies in Ancient Philosophy* **6**, 255-70.

Bostock, D. [2006]: *Space, Time, Matter, and Form: Essays on Aristotle's Physics*. Oxford: Clarendon Press.

Bridger, M.; Alper, J. S. [1999]: 'On the Dynamics of Pérez Laraudogoitia's Supertask', *Synthese* **119**, 325-37.

Brochard, M. V. [1954]: *Études de philosophie ancienne et de philosophie moderne*. Paris: J. Vrin.

Bunch, B. H. [1982]: *Mathematical Fallacies and Paradoxes*. New York: Van Nostrand Reinhold.

Burke, M. B. [2000a]: 'The Impossibility of Superfeats', *The Southern Journal of Philosophy* **XXXVIII**, 207-20.

Burke, M. B. [2000b]: 'The Staccato Run: a Contemporary Issue in the Zenonian Tradition', *The Modern Schoolman* **LXXVIII**, 1-8.

Butterfield, J.; Earman, J. (eds.) [2007]: *Philosophy of Physics*. Amsterdam: Elsevier.

Byers, W. [2007]: *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Callender, C. [1995]: 'The Metaphysics of Time Reversal: Hutchison on Classical Mechanics', *British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 331-40.

Callender, C. [2004]: 'A Collision between Dynamics and Thermodynamics', *Entropy* **6**, 11-20.

Cantor, G. [1895]: 'Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre', *Mathematische Annalen* **46**, 481-512. Reimpreso y traducido al inglés en: Cantor, G. [1915]: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Chicago: Open Court, 85-136.

Carroll, J. W. [2002]: 'Instantaneous Motion', *Philosophical Studies* **110**, 49-67.

Carroll, L. [1895]: 'What the Tortoise Said to Achilles', *Mind* **4**, 278-80.

Christie, D. E. [1976]: *Basic Topology*. New York: Macmillan.

Clark, M. [2007]: *Paradoxes from A to Z*. Segunda edición. London: Routledge.

Cooke, M. C. [2003]: 'Infinite Sequences: Finitist Consequence', *British Journal for the Philosophy of Science* **54**, 591-9.

Craig, W. L. [2007]: ‘Creation and Divine Action’, en Meister, C.; Copan, P. (eds.): *The Routledge Companion to Philosophy of Religion*. London: Routledge, 318-28.

Davies, E. B. [2003]: ‘Quantum Mechanics does not require the Continuity of Space’, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **34**: 319-28.

Davis, A. D. [1986]: *Classical Mechanics*. Orlando: Academic Press.

Dawkins, R. [1982]: *The Extended Phenotype*. Oxford: Oxford University Press.

Deleuze, G.; Guattari, F. [1991]: *Qu’est-ce que la philosophie?* Paris: Les Éditions de Minuit. Traducción al español: Deleuze, G.; Guattari, F. [1993]: *¿Qué es la filosofía?* Barcelona: Anagrama.

Duan, F.; Guojun, J. [2005]: *Introduction to Condensed Matter Physics* **1**. Singapore: World Scientific.

Earman, J. [1986]: *A primer on Determinism*. Dordrecht: Reidel.

Earman, J. [2002]: ‘What Time Reversal Invariance Is and Why It Matters’, *International Studies in the Philosophy of Science* **16**, 245-64.

Earman, J.; Norton, J. D. [1993]: ‘Forever is a Day: Supertasks in Pitowsky and Malament-Hogarth Spacetimes’, *Philosophy of Science* **60**, 22-42.

Earman, J.; Norton, J. D. [1998a]: ‘Comments on Laraudogoitia’s ‘Classical Particle Dynamics, Indeterminism and a Supertask’’, *British Journal for the Philosophy of Science* **49**, 123-33.

Earman, J.; Norton, J. D. [1998b]: ‘Infinite Pains: The Trouble with Supertasks’, en Morton, A.; Stich, S. (eds.): *Benacerraf and His Critics*, Oxford: Blackwell, 231-61.

Enderton, H. B. [1977]: *Elements of Set Theory*. Orlando: Academic Press.

Erickson, G. W.; Fossa, J. A. [1998]: *Dictionary of Paradox*. Lanham: University Press of America.

Faris, J. A. [1996]: *The Paradoxes of Zeno*. Aldershot: Avebury.

Forrest, P. [1995]: ‘Is space-time discrete or continuous? – An empirical question’, *Synthese* **103**, 327-54.

Forrest, P. [1999]: ‘Supertasks and Material Objects’, *Logique et Analyse* **167-168**, 441-6.

García Pascua, J. E. [2003]: ‘Aquiles, la Tortuga y el infinito’, *Revista de Filosofía* **28**, 215-36.

Gaye, R. K. [1910]: ‘On Aristotle Physics Z ix 239b33-240a18’, *Journal of Philology* **XXXI**, 95-116.

Glazebrook, T. [2001]: ‘Zeno Against Mathematical Physics’, *Journal of the History of Ideas* **62**, 193-210.

Grünbaum, A. [1955]: ‘Modern Science and Refutation of the Paradoxes of Zeno’, *The Scientific Monthly* **LXXXI**, 234-39. Reimpreso en Salmon [1970].

Grünbaum, A. [1967]: ‘Zeno’s Metrical Paradox of Extension’, en *Modern Science and Zeno’s Paradoxes*, Middletown: Wesleyan University Press, 115-135. Reimpreso en Salmon [1970], 176-199.

Grünbaum, A. [1970]: ‘Modern Science and Zeno’s Paradoxes of Motion’, en Salmon [1970], 200-250.

Guest, P. B. [1991]: *Laplace Transforms and an Introduction to Distributions*. New York: Ellis Horwood.

Hales, T. C. [1997]: ‘Sphere Packings, I’, *Discrete & Computational Geometry* **17**: 1-51.

Harrison, C. [1996]: ‘The Three Arrows of Zeno’, *Synthese* **107**: 271-92.

Henle, J. M.; Kleinberg, E. M. [1979]: *Infinitesimal Calculus*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Henry, J. [2002]: 'Causation', en Ferngren, Gary B. (ed.): *Science & Religion: A Historical Introduction*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Hestenes, D. [1986]: *New Foundations for Classical Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hitchcock, C. (ed.) [2004]: *Contemporary Debates in Philosophy of Science*. Malden, MA: Blackwell.

Hofstadter, D. R. [1979]: *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid*. New York: Basic Books.

Holgate, P. [1994]: 'Discussion: Mathematical Notes on Ross's Paradox', *British Journal for the Philosophy of Science* **45**, 302-4.

Hughes-Hallet, D.; Gleason, A.; McCallum, W. G.; *et al* [2005]: *Calculus: Single and Multivariable*, 4ª edición, New Jersey: John Wiley & Sons.

Hutchison, K. [1993]: 'Is Classical Mechanics Really Time-reversible and Deterministic?', *British Journal for the Philosophy of Science* **44**, 307-23.

Hutchison, K. [1995a]: 'Differing Criteria for Temporal Symmetry', *British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 341-7.

Hutchison, K. [1995b]: 'Temporal Asymmetry in Classical Mechanics', *British Journal for the Philosophy of Science* **46**, 219-34.

Katsenelinboigen, A. [1997]: *The Concept of Indeterminism and its Applications*. Westport, Connecticut: Praeger.

Kibble, T. W. B. [1985]: *Classical Mechanics*, tercera edición. London: Longman.

Kline, A. D.; Matheson, C. A. [1987]: 'The Logical Impossibility of Collision', *Philosophy* **62**, 509-15.

Knopp, K. [1947]: *Theory and Applications of Infinite Series*, segunda edición en inglés. New York: Hafner Publishing.

Koetsier, T.; Allis, V. [1997]: 'Assaying Supertasks', *Logique et Analyse* **159**, 291-313.

Komjáth, P.; Totik, V. [2006]: *Problems and Theorems in Classical Set Theory*. New York: Springer.

Korolev, A. [2007]: 'Indeterminism, Asymptotic Reasoning, and Time Irreversibility in Classical Physics', *Philosophy of Science* **74**, 943-56.

Lanford, O. E. [1975]: 'Time Evolution of Large Classical Systems', en Moser, J. (ed.): *Dynamical Systems: Theory and Applications*, Berlin: Springer-Verlag, 1-111.

Lange, M. [2002]: *An Introduction to the Philosophy of Physics: Locality, Fields, Energy, and Mass*. Oxford: Blackwell Publishers.

Lange, M. [2005]: 'How Can Instantaneous Velocity Fulfill Its Causal Role', *The Philosophical Review* **114**, 433-68.

Laplace, P. S. [1825]: *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Quinta edición. Paris: Bachelier.

Lee, H. D. P. [1936]: *Zeno of Elea*, Cambridge: Cambridge University Press.

Littlewood, J. E. [1953]: *A Mathematician's Miscellany*. London: Methuen.

Longair, M. S. [1984]: *Theoretical Concepts in Physics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lorenzen, P. [1987]: 'Collision Mechanics and Dynamics', *Synthese* **71**, 204-18.

Malament, D. B. [2008]: 'Norton's Slippery Slope', *Philosophy of Science* **75**, 799-816.

Maltese, G. [2003] 'The Ancients' Inferno: the Slow and Tortuous Development of "Newtonian" Principles of Motion in the Eighteenth Century', en Becchi, A., *et al*., *Essays in the history of mechanics*. Basel: Birkhäuser Verlag, pp. 199-221.

Mather, J.; McGehee, R. [1975]: 'Solutions of the collinear four body problem which become unbounded in finite time', *Lecture Notices in Physics* **38**, 573-97.

McAllister, J. W. [2004]: 'Absence of Contingency in the Newtonian Universe', *Foundations of Science* **9**, 191-210.
McDaniel, K. [2007]: 'Distance and Discrete Space', *Synthese* **155**, 157-62.
McLaughlin, W. I. [1998]: 'Thomson's Lamp is Dysfunctional', *Synthese* **116**, 281-301.
Meyer, U. [2003]: 'The Metaphysics of Velocity', *Philosophical Studies* **112**, 93-102.
Montague, R. [1962]: 'Deterministic Theories', *Decisions, Values and Groups* **2**, 325-70. Reimpreso en Thomason, R. H. (ed.) [1974], *Formal Philosophy: Selected Papers of Richard Montague*. New Haven: Yale University Press, 303-59.
Moore, A. W. [1990]: *The Infinite*. London: Routledge.
Moschovakis, Y. [2006]: *Notes on Set Theory*, segunda edición. New York: Springer.
Müller, I. [2007]: *A History of Thermodynamics: The Doctrine of Energy and Entropy*. Berlin: Springer.
Nagel, E. [1953]: 'The Causal Character of Modern Physical Theory', en Feigl, H.; Brodbeck, M. (eds.): *Readings in the Philosophy of Science*. New York: Appleton-Century-Crofts, 419-37.
Noël, M. G. [1893]: 'Le mouvement et les arguments de Zénon d'Elée', *Revue de Métaphysique et de Morale* **1**, 107-25.
Norton, J. D. [1999]: 'A Quantum Mechanical Supertask', *Foundations of Physics* **29**, 1265-302.
Norton, J. D. [2003]: 'Causation as Folk Science', *Philosophers' Imprint* **3 (4)**, 1-22. Reimpreso en Price, H.; Corry, R. (eds.) [2007]: *Causation, Physics, and the Constitution of Reality*. Oxford: Clarendon Press, 11-44.
Norton, J. D. [2006]: 'The Dome: An Unexpectedly Simple Failure of Determinism', Preparado para el simposio *The Vagaries of Determinism and Indeterminism: Philosophy of Science Association Biennial Conference*. Vancouver. Disponible en: http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002943/01/Norton.pdf [Accedido el 10 de junio de 2009]. Reimpreso y editado en: Norton, J. D. [2008]: 'The Dome: An Unexpectedly Simple Failure of Determinism', *Philosophy of Science* **75**, 786-98.
Oaklander, L. N. [1998]: 'Freedom and the New Theory of Time', en Le Poidevin, R. (ed.): *Questions of Time and Tense*. Oxford: Clarendon Press, 185-205.
Olin, D. [2003]: *Paradox*. Chesham: Acumen.
Oppy, G. [2006]: *Philosophical Perspectives on Infinity*. Cambridge: Cambridge University Press.
Owen, G. E. L. [1957-8]: 'Zeno and the Matematicians', *Proceedings of the Aristotelian Society* **LVIII**, 199-222. Reimpreso en Salmon [1970], 139-63.
Papa-Grimaldi, A. [1996]: 'Why Mathematical Solutions of Zeno's Paradoxes Miss the Point: Zeno's One and Many Relation and Parmenides' Prohibition', *The Review of Metaphysics* **50**, 299-314.
Papa-Grimaldi, A. [2007]: 'The presumption of movement', *Axiomathes* **17**, 137-54.
Peijnenburg, J.; Atkinson, D. [2008]: 'Achilles, the Tortoise, and Colliding Balls', *History of Philosophy Quarterly* **25**, 187-201.
Pérez Laraudogoitia, J. [1996]: 'A Beautiful Supertask', *Mind* **105**, 81-3.
Pérez Laraudogoitia, J. [1997a]: 'Classical Particle Dynamics, Indeterminism and a Supertask', *British Journal for the Philosophy of Science* **48**, 49-54.
Pérez Laraudogoitia, J. [1997b]: 'On indeterminism in classical dynamics', *European Journal of Physics* **18**, 180-1.
Pérez Laraudogoitia, J. [1998a]: 'Infinity Machines and Creation Ex Nihilo', *Synthese* **115**, 259-65.

Pérez Laraudogoitia, J. [1998b]: ‘Some Relativistic and Higher Order Supertasks’, *Philosophy of Science* **65**, 502-17.
Pérez Laraudogoitia, J. [1999a]: ‘Earman and Norton on Supertasks that Generate Indeterminism’, *British Journal for the Philosophy of Science* **50**, 137-41.
Pérez Laraudogoitia, J. [1999b]: ‘Why Dynamical Self-Excitation is Possible’, *Synthese* **119**, 313-23.
Pérez Laraudogoitia, J. [2001]: ‘Indeterminism, Classical Gravitation and Non-Collision Singularities’, *International Studies in the Philosophy of Science* **15**, 269-724.
Pérez Laraudogoitia, J. [2002a]: ‘Just as Beautiful but not (Necessarily) a Supertask’, *Mind* **111**, 281-7.
Pérez Laraudogoitia, J. [2002b]: ‘On the Dynamics of Alper and Bridger’, *Synthese* **131**, 157-71.
Pérez Laraudogoitia, J. [2003a]: ‘An Infinite System with Gravitation’, *Synthese* **135**, 339-46.
Pérez Laraudogoitia, J. [2003b]: ‘Taking Self-Excitations Seriously: On Angel’s Initial Condition’, *British Journal for the Philosophy of Science* **54**, 319-26.
Pérez Laraudogoitia, J. [2005a]: ‘Achilles’ Javelin’, *Erkenntnis* **62**, 427-38.
Pérez Laraudogoitia, J. [2005b]: ‘An Interesting Fallacy Concerning Dynamical Supertasks’, *British Journal for the Philosophy of Science* **56**, 321-34.
Pérez Laraudogoitia, J. [2006a]: ‘A Look at the Staccato Run’, *Synthese* **148**, 433-41.
Pérez Laraudogoitia, J. [2006b]: ‘Global Interaction in Classical Mechanics’, *International Studies in the Philosophy of Science* **20**, 173-183.
Pérez Laraudogoitia, J. [2007a]: ‘Avoiding Infinite Masses’, *Synthese* **156**, 21-31.
Pérez Laraudogoitia, J. [2007b]: ‘Supertasks, Dynamical Attractors and Indeterminism’, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **38**, 724-31.
Pérez Laraudogoitia, J. [2008]: ‘Energy Conservation and Supertasks’, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **39**, 364-79.
Pérez Laraudogoitia, J.; Bridger, M.; Alper, J. S. [2002]: ‘Two Ways of Looking at a Newtonian Supertask’, *Synthese* **131**, 173-89.
Popper, K. R. [1982]: *The Open Universe: An Argument for Indeterminism*. London: Hutchinson.
Quine, W. V. O. [1962]: ‘Paradox’, *Scientific American* **206**, 84-96. Reimpreso en Quine, W. V. O. [1966]: *The Ways of Paradox and other Essays*. New Yok: Random House, 1-18.
Renouvier, C. [1875]: *Essais de critiques générales* **1**. Paris: Armand Colin.
Rescher, N. [2001]: *Paradoxes*. Chicago: Open Court.
Roberts, J. T. [2006]: ‘Determinism’, en Sarkar, S.; Pfeifer, J. (eds.): *The Philosophy of Science: An Encyclopedia* **1**, New York: Routledge, 197-208.
Roeper, P. [1997]: ‘Region-based Topology’, *Journal of Philosophical Logic* **26**, 251-309.
Rogers, B. [1968]: ‘On Discrete Spaces’, *American Philosophical Quarterly* **5**, 117-24.
Rose, S. [1997]: *Lifelines: Biology, Freedom, Determinism*. London: Allen Lane.
Ross, S. [1988]: *A first Course in Probability*, tercera edición. New York: Macmillan.
Ross, W. D. [1936]: *Aristotle’s Physics*. Oxford: Clarendon Press.
Russell, B. [1914]: *Our Knowledge of the External World*, reimpresión de 1995, London: Routledge.
Russell, B. [1917]: ‘Mathematics and Metaphysicians’, en *Mysticism and Logic*, 74-96. London: Allen & Unwin.

Russell, B. [1935-6]: 'The Limits of Empiricism', *Proceedings of the Aristotelian Society* **XXXVI**, 131-50. Reimpreso en Slater, J. G. (ed.) [1996]: *The collected papers of Bertrand Russell* **10**, 313-28. London: Routledge.
Ryle, G. [1954]: *Dilemmas*. Cambridge: Cambridge University Press.
Saari, D. G. [2005]: *Collisions, Rings, and Other Newtonian N-Body Problems*. Providence: American Mathematical Society.
Saari, D. G.; Xia, Z. [1995]: 'Off to infinity in finite time', *Notices of AMS* **42**, 538-46.
Sainsbury, R. M. [1988]: *Paradoxes*. Cambridge: Cambridge University Press.
Salmon, W. C. (ed.) [1970]: *Zeno's Paradoxes*. Indianapolis: Bobbs-Merril.
Savitt, S. F. [1994]: 'Is Classical Mechanics Time Reversal Invariant?', *British Journal for the Philosophy of Science* **45**, 907-13.
Schaffer, J. [2007]: 'Deterministic Chance?', *British Journal for the Philosophy of Science* **58**, 113-40.
Segel, L. A. [1991]: 'The Infinite and the Infinitesimal in Models for Natural Phenomena', *Reviews of Modern Physics* **63**, 225-38.
Sherry, D. M. [1988]: 'Zeno's Metrical Paradox Revisited', *Philosophy of Science* **55**, 58-73.
Silagadze, Z. K. [2005]: 'Zeno Meets Modern Science', *Acta Physica Polonica B* **36**, 2887-929.
Skinner, B. F. [1953]: *Science and Human Behavior*. New York: The Free Press.
Smith, S. R. [2003]: 'Are instantaneous velocities real and really instantaneous?: an argument for the affirmative', *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **34**, 261-80.
Sorabji, R. [1983]: *Time, Creation and the Continuum*. London: Duckworth.
Sudarshan, E. C. G.; Mukunda, N. [1974]: *Classical Dynamics: a Modern Perspective*. New York: John Wiley & Sons.
Sussman, G. J.; Wisdom, J. [2001]: *Structure and Interpretation of Classical Mechanics*. Cambridge, MA: The MIT Press.
Symon, K. R. [1971]: *Mechanics*, tercera edición. Reading, MA: Addison-Wesley.
Tabachnikov, S. [2005]: *Geometry and Billiards*. Providence: American Mathematical Society.
Thomson, J. [1954-5]: 'Tasks and Super-Tasks', *Analysis* **XV**, 1-13. Reimpreso en Salmon [1970], 89-102.
Tooley, M. [1988]: 'In Defense of the Existence of States of Motion', *Philosophical Topics* **16**, 225-54.
Truesdell, C. [1968]: *Essays in the History of Mechanics*. Berlin: Springer-Verlag.
Van Bendegem, J. P. [1987]: 'Zeno's Paradoxes and the Tile Argument', *Philosophy of Science* **54**, 295-302.
Van Bendegem, J. P. [1994]: 'Ross' Paradox is an Impossible Super Task', *British Journal for the Philosophy of Science* **45**, 743-48.
Van Bendegem, J. P. [1995]: 'In Defence of Discrete Space and Time', *Logique et Analyse* **150-151-152**, 127-50.
Von Laue, M. [1949]: 'Inertia and Energy', en Schilpp, Paul Arhur (ed.): *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. La Salle: Open Court, 503-33.
Von Wright, G. H. [1984]: *Truth, Knowledge and Modality*. Oxford: Basil Blackwell.
Weatherford, R. [1991]: *The Implications of Determinism*. London: Routledge.
Weyl, H. [1949]: *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*. Princeton: Princeton University Press.
Wilson, J. [2007]: 'Newtonian Forces', *British Journal for the Philosophy of Science* **58**, 173-205.

Wilson, M. [1989]: ‘Critical Notice: John Earman’s *A Primer on Determinism*’, *Philosophy of Science* **56**, 502-32.
Wisdom, J. O. [1951-2]: ‘Achilles on a Physical Racecourse’, *Analysis* **XII**, 67-72. Reimpreso en Salmon [1970], 82-8.
Wittgenstein, L. [1922]: *Tractatus Logico-Philosophicus*. London: Kegan Paul. Edición bilingüe alemán-español: Wittgenstein, L. [1987]: *Tractatus Logico-Philosophicus*. Segunda edición. Madrid: Alianza Editorial.
Xia, Z. [1992]: ‘The existence of noncollision singularities in Newtonian systems’, *Annals of Mathematics* **135**, 411-68.
Zak, M. [1994]: ‘Postinstability Models in Dynamics’, *International Journal of Theoretical Physics* **33**, 2215-80.
Zak, M. [1996]: ‘Irreversibility in Thermodynamics’, *International Journal of Theoretical Physics* **35**, 347-82
Zak, M. [1998]: ‘Non-Lipschitz Approach to Quantum Mechanics’, *Chaos, Solitons, and Fractals* **9**, 1183-98.
Zangari, M. [1994]: ‘Zeno, Zero and Indeterminate Forms: Instants in the Logic of Motion’, *Australasian Journal of Philosophy* **72**, 187-204.
Zimba, J. [2008]: ‘Inertia and Determinism’, *British Journal for the Philosophy of Science* **59**, 417-28.

Índice de supertareas y generalizaciones

A continuación se especifican los números de las páginas en donde se encuentran los planteamientos detallados de los modelos referidos con siglas o abreviaturas a lo largo del trabajo.