Sarriko-On

Aproximación a las Ciencias Sociales desde la Teoría de los Juegos

ISBN: 978-84-691-7745-7

Juan Carlos Bárcena Ruiz

01-08

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Aproximación a las Ciencias Sociales desde la Teoría de los Juegos

Juan Carlos Bárcena Ruiz

Departamento de Fundamentos del Análisis Económico I

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universidad del País Vasco

Índice

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de los Juegos analiza problemas de decisión multipersonales en los que existe conflicto estratégico. En ellos, varios individuos toman decisiones teniendo en cuenta que el resultado de un juego depende tanto de su acción como de la de sus rivales. Tales problemas aparecen frecuentemente en las Ciencias Sociales. Un ejemplo de situación susceptible de ser analizada por la Teoría de los Juegos es la decisión por parte de los directores de los periódicos de qué portada poner en el periódico para atraer el mayor número de lectores posibles. El número de lectores que atraen depende también de las portadas que pongan sus rivales. La teoría de los juegos puede utilizarse también para analizar cualquier situación en la que los individuos se interrelacionen de manera estratégica, como una partida de ajedrez, juegos de cartas, decisiones políticas, etc.

Este curso tiene como objetivo presentar los principales conceptos y herramientas de la Teoría de los Juegos a alumnos de Ciencias Sociales. Se pretende que una vez realizado el curso los alumnos sean capaces de modelar en forma de juego cualquier situación en la que exista interacción estratégica, siendo capaces de analizarla de un modo formal y riguroso. El elemento central es el aprendizaje individual a través del trabajo personal. Los alumnos deben estudiar los temas que se proponen, buscando entender los conceptos que se plantean y ser capaces de aplicarlos para analizar problemas reales.

No se necesita ningún requisito matemático particular para realizar este curso, ya que se utilizan conceptos matemáticos sencillos, conocidos por cualquier alumno de Ciencias Sociales. Se prima lo intuitivo sobre lo formal por lo que las definiciones formales de teoría de juegos se evitan. Todos los conceptos que se usan en la asignatura son sencillos y se explican en el curso. El material que se va a presentar en el curso está pensado para un curso no presencial de manera que se presenta la teoría junto con ejemplos ilustrativos que es necesario estudiar y entender. Después de cada tema se proponen ejercicios de autoevaluación que deben ser realizados por el alumno. Después de los temas se proporcionan las soluciones para que el alumno verifique si los ha realizado correctamente. Por último, después de las soluciones de los ejercicios de autoevaluación se proponen varias tareas a realizar, con el objetivo de que el alumno verifique si entiende los conceptos.

Conocimientos que se pretenden obtener con este curso:

- Conocer los principales conceptos y herramientas de la Teoría de los Juegos.
- Aprender a modelar en forma de juego cualquier situación en la que exista interacción estratégica.
- Ser capaz de predecir el resultado de un juego, sabiendo explicar el motivo por el que se ha alcanzado dicho resultado.
- Como es obvio, no se busca llegar a un conocimiento profundo y exhaustivo de esta materia. Por el contrario, se pretende familiarizar al estudiante en las nociones básicas, fuentes y herramientas de de la Teoría de los Juegos.

Habilidades y destrezas que se obtienen con la realización del curso:

- Ser capaz de identificar cuándo existe interacción estratégica.
- Familiarizarse con los conceptos y términos de la Teoría de los Juegos.
- Comprender la teoría objeto de estudio.
- Analizar, resolver y sintetizar problemas prácticos.
- Ser capaz de aportar opiniones propias sobre diferentes juegos con base en argumentos de Teoría de Juegos.
- Buscar información relacionada con la temática de la asignatura.
- Fomentar en el alumno una perspectiva y actitud abierta y crítica que le permita usar las herramientas de Teoría de los Juegos para una mejor comprensión de la realidad.

2. CONCEPTOS BÁSICOS

La teoría de juegos analiza el comportamiento de los individuos que toman decisiones, cuando estos individuos son conscientes de que se ven afectados por las decisiones propias y ajenas. Por ejemplo:

- Cuando los supermercados de una ciudad eligen los precios de sus productos son conscientes de que sus ventas dependen no sólo del propio precio sino también de los precios que fijen los supermercados rivales. Si un supermercado pone ofertas y su rival no, sabe que atraerá una parte de los consumidores que compran en el supermercado rival.

- Cuando un jugador de ajedrez piensa su jugada es consciente de que ganar o perder depende de sus movimientos y de los de su rival. En el ajedrez, cada jugador debe pensar los posibles movimientos que puede realizar el rival antes de tomar la decisión de qué figura mover. De hecho, los buenos jugadores piensan por anticipado varios de sus próximos movimientos, teniendo en cuenta las posibles reacciones del rival a cada uno de sus movimientos.

Formalmente:

Un **juego** es una situación en la que los jugadores o participantes toman decisiones estratégicas, es decir, decisiones que tienen en cuenta las acciones y respuestas de los demás.

Como ejemplos de juegos podemos citar el ajedrez, el fútbol, la fijación de precios por las empresas en los mercados, etc. Las decisiones estratégicas que toman los jugadores les proporcionan unas ganancias o pagos. En el caso de las empresas que fijan los precios, las ganancias son sus beneficios. En el caso de una partida de ajedrez son los premios por ganar o perder.

Un objetivo clave de la teoría de los juegos es encontrar la **estrategia óptima** para cada jugador. Una **estrategia** es una regla o plan de acción para jugar. En el caso de la fijación de precios por los supermercados de una ciudad, una estrategia podría ser mantener el precio alto mientras que los rivales lo mantengan alto y bajarlo si los rivales lo bajan. La estrategia óptima para cada jugador es la que genera los mayores pagos posibles.

Vamos a centrarnos en el estudio de juegos en que los **jugadores** son **racionales**, en el sentido de que piensan en las consecuencias de sus actos y actúan buscando lo mejor para ellos (es decir, buscan obtener los mayores pagos posibles). Hay dos tipos de juegos: cooperativos y no cooperativos. Los describimos a continuación.

Un **juego cooperativo** es aquel en que los jugadores pueden realizar contratos vinculantes que les permitan mantener estrategias conjuntas. Un ejemplo es la negociación entre un comprador y un vendedor sobre el precio del producto. El precio se fija en un contrato, que puede hacerse cumplir por la ley. Esto obliga a las partes a respetar el acuerdo.

Un **juego no cooperativo** es aquel en que los jugadores no pueden realizar un contrato vinculante. No hay una autoridad externa que haga cumplir los acuerdos establecidos entre los jugadores. Por ello, para que un acuerdo se mantenga debe sostenerse por si mismo, es decir, respetar el acuerdo debe ser lo mejor para cada individuo. Por ejemplo, un grupo de empresas pueden acordar vender sus productos a un precio mínimo, pero si una de ellas se salta el acuerdo, las demás no pueden castigarla de ningún modo. Este es un acuerdo que no se puede plasmar en un contrato, dado que acordar precios es ilegal, por lo que no se puede ir ante un juez para que obligue a cumplir el acuerdo.

La situación anterior se ha dado en la industria farmacéutica. Varias empresas farmacéuticas (Hoffman-LaRoche, BASF y Rhone-Poulenc, entre otras) acordaron fijar precios y repartirse cuotas de mercado para la venta de determinadas vitaminas que se vendían en todo el mundo. Este acuerdo funcionó durante una década, entre los 80 y 90. Este acuerdo es ilegal, ya que va en contra de la competencia, por lo que estas empresas farmacéuticas recibieron fuertes multas en Estados Unidos y la Unión Europea.

En los juegos no cooperativos existe **interacción estratégica**.

Que exista **interacción estratégica** significa que cada jugador tiene que tener en cuenta que el resultado de un juego también depende de la conducta de los rivales.

Un ejemplo de interacción estratégica lo tenemos en el juego consistente en la subasta de una obra de arte. Si consideramos que las pujas que hacen los jugadores se tienen que introducir en un sobre cerrado, y que todos los sobres se abren a la vez, cada jugador tiene que pensar cuales serán las pujas de los otros jugadores antes de hacer la puja propia.

La teoría de los juegos no cooperativos es una herramienta importante para analizar la interacción estratégica entre jugadores. Permite analizar situaciones con pocos jugadores y donde lo que hace cada jugador influye sobre lo que hacen los demás. Los juegos no cooperativos, a su vez, pueden ser simultáneos o secuenciales.

Un **juego simultáneo** es aquél en que todos los jugadores eligen a la vez. Un ejemplo es la fijación de precios por los supermercados. Normalmente se suelen fijar a primera hora del día, sin saber el precio que fijan los supermercados rivales.

Un **juego secuencial o sucesivo**, es aquél en el que primero elige un jugador y después de observar su elección elige el otro. Un ejemplo es el ajedrez: primero eligen blancas, luego negras, y así sucesivamente.

Vamos a comenzar analizando en detalle los juegos simultáneos.

3. JUEGOS SIMULTÁNEOS

Un **juego simultáneo** es aquél en que todos los jugadores toman sus decisiones a la vez, es decir sin conocer la elección de los jugadores rivales.

En un juego simultáneo, aunque las decisiones de los jugadores pueden tomarse en diferentes momentos de tiempo, los jugadores no observan la decisión del rival. Un ejemplo es una subasta en la que cada jugador introduce su puja en un sobre cerrado. Por lo tanto, cada jugador no conoce la puja del rival al decidir la propia puja. Una vez que los jugadores han entregado su sobre, se abren todos a la vez y el que hizo la puja más alta gana, quedándose con el objeto subastado y pagando la cantidad que había pujado.

3.1. JUEGOS EN FORMA NORMAL

Los juegos simultáneos se suelen representar en **forma normal**. La forma normal de un juego indica:

- cuántos jugadores hay,
- cuál es su conjunto de estrategias,
- qué pagos reciben los jugadores en función de sus estrategias.

Por simplicidad nos limitaremos a juegos de dos jugadores. Denotamos por **jugadores** a los individuos que deben tomar una decisión. Al tomar una decisión los jugadores eligen una estrategia de su conjunto de estrategias factibles, buscando conseguir los mayores pagos o beneficios posibles.

Denotamos por **estrategia** de un jugador a la regla de elección que posee un jugador y que le dice que elección tomar, en cada momento del juego, en base a la información que posee.

Vamos a considerar inicialmente juegos en los que las **estrategias** son **puras**, es decir, juegos en los que la elección de una acción dada por un jugador se conoce con certeza.

3.1.1. Juego de la Inversión.

Supongamos que hay dos jugadores, por ejemplo dos empresas, denotadas por *A* y *B* que tienen que tomar simultáneamente una decisión. Tienen dos elecciones posibles: realizar una inversión estratégica o no hacerla. Ejemplos de inversiones estratégicas son la adquisición de una nueva tecnología o la mejora de la tecnología existente. En función de que se invierta o no, se pueden obtener los siguientes resultados:

- Si las dos empresas invierten, *A* gana 30 y *B* gana 8.
- Si ninguna empresa invierte, *A* gana 15 y *B* gana 4.
- Si sólo invierte la empresa *A*, *A* gana 40 y *B* gana 1.
- Por último, si sólo invierte la empresa *B*, *A* gana 10 y *B* gana 10.

Este ejemplo, dado que cada jugador tiene dos estrategias (invertir y no invertir), lo representamos usando una **matriz de pagos** con dos filas y dos columnas. A uno de los jugadores lo colocamos en las líneas (empresa *A*) y al otro en las columnas (empresa *B*). La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Empresa B	
		Invertir	*No invertir*
Empresa A	*Invertir*	30, 8	40, 1
	No invertir	10, 10	15, 4

Figura 1. Juego de la inversión.

La figura 1 es la forma normal del juego de la inversión. Muestra que:

• Hay dos jugadores: la empresa *A* y la empresa *B*.

• En este juego cada jugador tiene dos estrategias: Invertir y No invertir. El conjunto de estrategias de la empresa *A* se denota: E_A = {Invertir, No invertir}. Similarmente, el conjunto de estrategias de la empresa *B* se denota: E_B = {Invertir, No invertir}.

• Los pagos que reciben los jugadores están indicados en las diferentes casillas. Cada casilla corresponde a una combinación de estrategias, una para cada jugador. En cada casilla de la matriz de pagos, el número de la izquierda son los pagos de *A*, y el número de la derecha los pagos de *B*. Por ejemplo, la casilla superior derecha de la matriz de pagos corresponde a la situación en que *A* decide Invertir, mientras que *B* decide No invertir. Como resultado de estas decisiones, *A* gana 40 y *B* obtiene 1.

		Empresa B
		No invertir
Empresa A	*Invertir*	40, 1

3.2. RESOLUCIÓN DE UN JUEGO

Para resolver un juego hay que tener en cuenta que cada jugador se preocupa únicamente de sus ganancias. Por ello, para analizar el comportamiento de la empresa *A* vamos a representar la matriz de pagos del juego incluyendo únicamente sus ganancias:

		Empresa B	
		Invertir	*No invertir*
Empresa A	*Invertir*	30, --	40, --
	No invertir	10, --	15, --

Los pagos que puede recibir la empresa *A*, en función de las estrategias de los dos jugadores son los siguientes (nota: los pagos de *A* se miran por filas):

- Si la empresa *A* decide invertir, gana 30 si *B* invierte y 40 si *B* no invierte.

- Si la empresa *A* decide no invertir, gana 10 si *B* invierte y 15 si *B* no invierte.

Para analizar el comportamiento de la empresa *B*, representamos la matriz de pagos del juego incluyendo únicamente sus ganancias:

		Empresa B	
		Invertir	*No invertir*
Empresa A	*Invertir*	--, 8	--, 1
	No invertir	--, 10	--, 4

Los pagos que puede recibir la empresa *B*, en función de las estrategias de los dos jugadores son los siguientes (nota: los pagos de *B* se miran por columnas):

- Si la empresa *B* decide invertir gana 8 si *A* invierte y 10 si *A* no invierte.

- Si la empresa *B* decide no invertir gana 1 si *A* invierte y 4 si *A* no invierte.

A continuación vamos a analizar cómo resolvemos un juego, es decir, como averiguamos la elección de cada jugador y los pagos que reciben. Para ello hay que definir primero en qué consiste el equilibrio de un juego.

> Un **equilibrio** es una combinación de estrategias que consiste en la mejor estrategia para cada uno de los jugadores del juego.

Diferentes conceptos de mejor estrategia llevan a diferentes conceptos de equilibrio.

3.3. ESTRATEGIAS DOMINANTES Y DOMINADAS.

El primero de los conceptos de mejor estrategia que vamos a utilizar es el de estrategia dominante. Vamos a utilizar las siguientes definiciones.

Una **estrategia dominante** es aquella que es óptima (es decir, que da los mayores pagos) independientemente de lo que elijan los demás jugadores.

Una **estrategia** está **dominada** si hay otra que da mayores pagos independientemente de cómo se comporten los demás jugadores.

Una estrategia **domina fuertemente** a otra si la primera da siempre mayores pagos independientemente de lo que elijan los demás jugadores.

Una estrategia **domina débilmente** a otra si los pagos de la primera son mayores o iguales que los de la segunda, siendo algunos de estos pagos estrictamente mayores.

Ilustramos los conceptos anteriores con un **ejemplo**. Consideremos el siguiente juego de dos jugadores. El jugador A posee tres estrategias, $a1$, $a2$ y $a3$, mientras que el jugador B tiene dos estrategias, $b1$ y $b2$. Ignoramos los pagos del jugador B para centrarnos en los de A. El jugador A se enfrenta a la siguiente matriz de pagos:

		Jugador B	
		$b1$	$b2$
	$a1$	2, --	2, --
Jugador A	$a2$	1, --	2, --
	$a3$	1, --	1, --

- La estrategia $a1$ de A tiene asociados pago 2 si B elige $b1$ y pago 2 si B elige $b2$.
- La estrategia $a2$ de A tiene asociados pago 1 si B elige $b1$ y pago 2 si B elige $b2$.
- La estrategia $a3$ de A tiene asociados pago 1 si B elige $b1$ y pago 1 si B elige $b2$.

Verificamos ahora si el jugador *A* tiene estrategias dominantes o dominadas:

- Para *A*, la estrategia *a*1 domina débilmente a la *a*2: el primer pago es mayor (2>1) y el segundo igual (2=2). Esto, a su vez, significa que la estrategia *a*2 es una estrategia dominada.

- Para *A*, la estrategia *a*1 domina fuertemente a la *a*3: el primer pago es mayor (2>1) y el segundo es también mayor (2>1).

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores podemos describir un primer concepto de equilibrio.

Un **equilibrio en estrategias dominantes** es una combinación de estrategias que consiste en la estrategia dominante para cada uno de los jugadores del juego.

Vamos a analizar si existe equilibrio en estrategias dominantes en el juego de la inversión (figura 1). ¿Qué estrategia debe elegir cada jugador en este juego? Empezamos por la de la empresa *A*. Lo mejor para esta empresa es invertir (miramos filas):

- Si *B* invierte, *A* gana 30 si invierte, y 10 si no invierte.

- Si *B* no invierte, *A* gana 40 si invierte, y 15 si no invierte.

Luego sea cual sea la estrategia que elige su rival, *A* gana más si invierte. En este caso invertir es la estrategia dominante para *A*. No invertir, por lo tanto, es una estrategia dominada para este jugador.

¿Qué sucede con *B*? Lo mejor para *B* también es invertir (miramos columnas):

- Si *A* invierte, *B* gana 8 si invierte, y 1 si no invierte.

- Si *A* no invierte, *B* gana 10 si invierte, y 4 si no invierte.

Luego sea cual sea la estrategia de su rival, *B* gana más si invierte. En este caso, invertir es la estrategia dominante para *B*. No invertir, por lo tanto, es una estrategia dominada para este jugador.

En base a lo anterior podemos enunciar las siguientes **afirmaciones**:

Afirmación 1: Si los jugadores tienen estrategias dominantes, las usan.

Afirmación 2: Los jugadores nunca usan estrategias dominadas.

En el juego anterior los dos jugadores tienen como estrategia dominante invertir, luego usarán esta estrategia. El resultado del juego es, por tanto, que ambos jugadores invierten, ganando 30 el jugador *A* y 8 el jugador *B*. Es un equilibrio en estrategias dominantes, ya que cada jugador está utilizando su estrategia dominante.

3.3.1. La programación de las televisiones.

Consideremos un juego en el que compiten por la audiencia dos cadenas de televisión, la *A* y la *B*. Los ejecutivos que deciden los programas que se emiten por televisión son conscientes de las preferencias de los teleespectadores. Vamos a suponer que, en la franja de máxima audiencia, se pueden emitir únicamente dos tipos de programas: un concurso o un programa cultural. Las cadenas eligen simultáneamente el tipo de programa que van a emitir las próximas semanas.

Cuando los responsables de las cadenas eligen el programa que van a emitir, buscan atraer al máximo número de televidentes. Suponemos, para simplificar, que un teleespectador ve la televisión únicamente si emiten el programa que le interesa. El 20% de la audiencia se interesa por los programas culturales, mientras que el 80% se interesa por los concursos. Si las dos cadenas emiten el mismo tipo de programa, la mitad de la audiencia es para cada cadena. Consideramos que los pagos de cada cadena coinciden con el porcentaje de la audiencia que captan. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Cadena B	
		Cultural	*Concurso*
Cadena A	*Cultural*	10, 10	20, 80
	Concurso	80, 20	40, 40

Figura 2. La programación de las televisiones.

La descripción de los pagos que reciben los jugadores es la siguiente:

• Si ambas cadenas emiten un programa cultural, solo se capta al 20% de la audiencia, y la mitad, el 10%, ve cada cadena. El 80% de la audiencia no ve la televisión.

• Si ambas cadenas emiten un concurso, se capta al 80% de la audiencia, y la mitad, el 40%, ve cada cadena. El 20% de la audiencia no ve la televisión.

• Si una cadena emite un programa cultural y la otra un concurso, la primera se lleva a toda la audiencia interesada en programas culturales (el 20%) y la segunda a los que prefieren los concursos (el 80%). En este caso, el 100% de la audiencia ve la televisión.

Vamos a comprobar que las dos cadenas tienen una estrategia dominante: emitir un concurso. Para ello hay que verificar que la estrategia emitir un programa cultural da mayores pagos que la estrategia emitir un concurso.

• Si la cadena A emite un programa cultural, obtiene el 10% de la audiencia cuando B también emite un programa cultural, y el 20% de la audiencia si B emite un concurso.

• Si la cadena A pone un concurso, obtiene el 80% de la audiencia si B emite un programa cultural y el 40% de la audiencia cuando B también emite un concurso.

Luego la cadena A siempre capta más audiencia, independientemente de lo que haga B, emitiendo un concurso. Lo mismo sucede para la cadena B. Como resultado, el equilibrio en estrategias dominantes es que ambas cadenas emiten un concurso, captando cada una el 40% de la audiencia.

El **equilibrio en estrategias dominantes** tiene una **pega**: no se cumple que todos los jugadores tengan estrategias dominantes en todos los juegos. Por ello, no siempre existe este equilibrio. Exigir que los jugadores tengan estrategias dominantes es un criterio muy riguroso. Veamos un ejemplo para verificarlo.

3.3.2. Juego de la inversión modificado.

Supongamos que cambiamos uno de los números de la matriz de pagos en el juego de la inversión:

		Empresa B	
		Invertir	*No invertir*
Empresa A	*Invertir*	30, 8	**10**, 1
	No invertir	10, 10	15, 4

Figura 3. Juego de la inversión modificado.

El cambio introducido en el juego es considerar que si *A* invierte cuando *B* no lo hace genera al jugador *A* pagos de **10** en vez de 40.

En este caso, como no hemos cambiado los pagos que recibe la empresa *B*, esta empresa sigue teniendo la misma estrategia dominante: invertir. Sin embargo, ahora la empresa *A* no tiene estrategia dominante:

- Si *B* invierte, *A* prefiere invertir ya que gana más que no invirtiendo (30>10).
- Si *B* no invierte, *A* gana más no invirtiendo (10<15).

Como resultado, este juego no tiene un equilibrio en estrategias dominantes ya que sólo uno de los jugadores posee una estrategia dominante.

Para que exista un equilibrio en estrategias dominantes todos los jugadores deben tener estrategias dominantes.

Un criterio menos exigente que el anterior es el de la **eliminación iterativa de las estrategias dominadas.** Parte del principio de que los jugadores, dado que son racionales, nunca usan estrategias dominadas. Por ello, sin un jugador sabe que su rival tiene una estrategia dominada la ignorará, ya que es consciente de que a su rival no le interesa usarla. De aquí llegamos al siguiente concepto de equilibrio.

Un equilibrio en **estrategias dominante iterativo** es una combinación de estrategias encontrada eliminando, en sucesivos pasos, las estrategias dominadas de cada jugador. A este concepto de equilibrio también se le denomina criterio de dominación.

En el juego de la inversión modificado (figura 3), la empresa *A* no tiene estrategias dominadas. Sin embargo sabe que no invertir es una estrategia dominada para *B*, por lo que la ignorará. Luego, cuando la empresa *A* tiene que elegir es como si se enfrentase al siguiente juego:

		Empresa B
		Invertir
Empresa A	*Invertir*	30, 8
	No invertir	10, 10

La empresa *A* sabe que *B* siempre invierte, ya que es su estrategia dominante. Por eso, en la matriz de pagos del juego hemos eliminado la columna correspondiente a la estrategia no invertir de *B*. Como resultado, *A* también invertirá, ya que si invierte gana 30, mientras que si no invierte gana 10. Luego el equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas consiste en que ambos invierten. La empresa *A* gana 30 y la *B* gana 8.

Vamos a ver a continuación dos ejemplos más para ilustrar los conceptos de equilibrio introducidos.

3.3.3. La protección de la huerta.

Supongamos un agricultor que tiene una pequeña huerta. Los productos de esta huerta se pueden recoger ya, aunque no están en el punto óptimo de maduración. Dejándolos unos días más tendrían mayor calidad y valor. El problema a que se enfrenta el agricultor es que hay unos individuos que se dedican a robar en las huertas. Por ello, posponer la recogida de los productos unos días podría significar quedarse sin productos. ¿Qué debería hacer el agricultor?

Vamos a modelar este juego de manera sencilla. Suponemos que los productos se pueden recoger en tres momentos de tiempo: HOY, MAÑANA y PASADO. Hay dos jugadores: el agricultor y los ladrones. Los pagos del juego los inventamos de manera que reflejen el juego que estamos planteando. Suponemos que los productos hoy valen 4, mañana 8 y pasado 12. Sólo uno de los dos jugadores pude obtener los productos. El que va primero a la huerta recoge los productos, el otro jugador no se lleva nada. En caso de coincidencia en el tiempo, recoge los productos el agricultor (los ladrones se van corriendo). La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Ladrones		
		HOY	MAÑANA	PASADO
	HOY	4, 0	4, 0	4, 0
Agricultor	MAÑANA	0, 4	8, 0	8, 0
	PASADO	0, 4	0, 8	12, 0

Analizando la matriz de pagos se observa lo siguiente:

- El agricultor no tiene estrategias dominantes ni dominadas.

- Para los ladrones, PASADO es una estrategia dominada (débil): esta estrategia genera siempre pago 0; la estrategia HOY les da pago 4 si el agricultor recoge los productos MAÑANA ó PASADO y 0 si los recoge HOY. Luego la estrategia HOY da pagos al menos tan grandes como la estrategia PASADO.

- Todos los jugadores saben que PASADO es una estrategia dominada para los ladrones y que, por lo tanto, no la usan. Por ello, ambos jugadores ignoran esta estrategia. Es como si los jugadores se enfrentaran a al siguiente matriz de pagos:

		Ladrones HOY	MAÑANA
	HOY	4, 0	4, 0
Agricultor	MAÑANA	0, 4	8, 0
	PASADO	0, 4	0, 8

• Teniendo en cuenta que PASADO es una estrategia dominada para los ladrones, para el agricultor la estrategia PASADO está dominada por la estrategia HOY: la primera da siempre pago 0 y la segunda 4. Luego podemos ignorar la estrategia PASADO. Nos enfrentamos entonces a la siguiente situación:

		Ladrones HOY	MAÑANA
	HOY	4, 0	4, 0
Agricultor	MAÑANA	0, 4	8, 0

• Ahora, para los ladrones la estrategia MAÑANA, que da pago 0 siempre, está dominada por la estrategia HOY, que puede dar pago 0 o 4, luego la ignoramos. Nos enfrentamos entonces a la siguiente situación:

		Ladrones HOY
	HOY	4, 0
Agricultor	MAÑANA	0, 4

• Ahora, para el agricultor la estrategia HOY, que da pago 4, domina a la estrategia MAÑANA, que da pago 0.

Luego eliminando de manera iterativa las estrategias dominadas obtenemos que el agricultor recolectará los productos lo antes posible, HOY, para evitar que se los roben, aunque tengan menor calidad por no haber alcanzado su punto óptimo de maduración. El equilibrio del juego es {HOY, HOY}. El agricultor obtiene 4 y los ladrones 0.

3.3.4. Competencia estratégica entre países.

Supongamos que tenemos dos países, *A* y *B*. Hay una empresa que está estudiando en cuál de estos dos países instalarse. La empresa contrata trabajadores y genera rentas en el país que se instala, por lo que ambos países quieren atraer a la empresa. Sin embargo, la empresa contamina, lo que daña el medio ambiente del país en el que se instala. Para proteger su medio ambiente, cada país puede seguir una política medioambiental muy exigente o una poco exigente.

> *Un ejemplo que ilustra la situación anterior es el caso de la empresa multinacional química Elf Atochem. Esta empresa desplazó una de sus plantas productivas de Francia a España debido a la política medioambiental menos exigente existente en España. Greenpeace argumentó que la multinacional desplazó la planta productiva debido a la presión de la opinión pública francesa. El gobierno español, dada su menor valoración del medio ambiente, permitió que la empresa se localizara en su país debido a los efectos positivos sobre el empleo (El Correo Español, 7/10/93).*

Suponemos que el país *A* tiene algún tipo de ventaja (por ejemplo, mejores infraestructuras), por lo que si los países ponen la misma política medioambiental, la empresa se localiza en *A*. Si los países eligen distintas políticas, la empresa se localiza en el país con la política menos exigente.

Representamos el juego mediante la siguiente matriz de pagos:

		País B	
		Política muy exigente	*Política poco exigente*
País A	*Política muy exigente*	3, 0	0, 2
	Política poco exigente	2, 0	2, 0

• Si ambos ponen una política muy exigente, la empresa se localiza en *A*. En ese caso, suponemos que *A* gana 3, el valor de la riqueza (generación de empleo) que la empresa aporta al país. *B* gana 0, ya que la empresa no aporta nada a este país.

• Si ambos ponen una política poco exigente, la empresa se localiza en *A*. En ese caso, suponemos que *A* gana 2. Con la política muy exigente se gana más que con la política poco exigente, en caso de atraer la empresa, debido al menor daño medioambiental. *B* gana 0, ya que la empresa no aporta nada a este país.

• Si un país pone una política muy exigente y el otro una política poco exigente, la empresa se localiza en el país con la política poco exigente. Este país gana 2 y el otro gana 0.

Para *B*, el país en desventaja, poner una política poco exigente es una estrategia dominante (débil). Esto lleva a que *A* ponga también una política poco exigente para asegurarse que atrae la empresa. Esto motiva que muchos países (incluso avanzados) establezcan políticas medioambientales poco exigentes para atraer inversiones extranjeras.

4. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Los ejercicios de auto evaluación propuestos tienen un doble objetivo:

- que cada alumno verifique si sabe construir la matriz de pagos de un juego a partir de los datos proporcionados en el enunciado de un problema,
- que cada alumno compruebe si sabe resolver un juego utilizando los conceptos de equilibrio estudiados hasta el momento.

4.1. EJERCICIO1: GUERRA DE PRECIOS ENTRE GASOLINERAS.

Dos estaciones de servicio (*A* y *B*) compran gasolina a 75 céntimos de euro por litro y la venden a 78 céntimos. Entre las dos venden 1000 litros al día. Suponemos que en caso de poner el mismo precio, cada gasolinera obtiene la mitad de las ventas (es decir, 500 litros).

Un día determinado, uno de los dueños piensa en la posibilidad de vender la gasolina a un precio más barato. Los precios, que se indican en números enteros, son establecidos cada mañana por cada gasolinera independientemente, y permanecerán invariables todo el día (es decir, el juego es simultáneo). Los clientes compran en la gasolinera que pone el precio más barato.

Nota: no se puede vender sin beneficio, por lo que sólo hay tres precios posibles.

Preguntas:

1. Represente la matriz de pagos del juego situando a la gasolinera *A* en filas y a la *B* en columnas. Explique.

Pista: hay que pensar primero qué precios puede cobrar cada gasolinera. Después hay que calcular lo que gana cada gasolinera en función del propio precio y del fijado por el rival.

2. Calcule el equilibrio del juego. Explique.

4.2. EJERCICIO 2: LANZAMIENTO DE UN PENALTI.

Un jugador de fútbol debe lanzar un penalti. Para simplificar, suponemos que tiene sólo tres opciones: puede lanzarlo a la izquierda de la portería, al centro o a la derecha. El portero toma su decisión antes de observar hacia donde lanza el jugador. Si espera a ver hacia donde chuta el jugador, no le daría tiempo a reaccionar y le marcarían gol. El portero tiene también tres opciones: lanzarse a la derecha, quedarse en el centro o lanzarse a la izquierda.

Suponemos que si el portero se lanza para el lado que tira el jugador, para el penalti. Si se lanza para un lado diferente al que chuta el jugador, le meten gol. Si el portero para el penalti recibe pago 1, y el jugador recibe pago 0. Si el portero no para el penalti recibe pago 0, y el jugador recibe pago 1.

Preguntas:

1. Represente la matriz de pagos del juego situando al lanzador en filas y al portero en columnas. Explique.

2. Calcule el equilibrio del juego. Explique.

5. EL EQUILIBRIO DE NASH.

Buscar el equilibrio de un juego en base a las estrategias dominantes de los jugadores o eliminando las estrategias dominadas presenta un problema: implica utilizar criterios muy exigentes. Por ello, tanto el equilibrio en estrategias dominantes como el equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas no siempre existen. Lo verificamos con un ejemplo, **el juego de las monedas**, representado en la siguiente matriz de pagos:

		Jugador B	
		Cara	*Cruz*
Jugador A	*Cara*	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Figura 4. El juego de las monedas.

La historia detrás del juego anterior es la siguiente. Dos amigos están jugándose quién paga los cafés. Para ello utilizan el conocido juego de las monedas. Ambos jugadores ponen una moneda en su puño, y abren la mano a la vez. Esto significa que el juego es simultáneo dado que cada jugador tiene que tomar su elección sin conocer la elección del otro. Los pagos del juego, en función de las estrategias de los jugadores, son:

- Si salen dos caras o dos cruces gana *A* (pago 1) y pierde *B* (pago -1).
- Si sale una cara y una cruz, gana *B* (pago 1) y pierde *A* (pago -1).

Por pago 1 denotamos el beneficio o utilidad de ganar el juego y tomar el café gratis. Por pago -1 denotamos el perjuicio o desutilidad de perder el juego y pagar los cafés.

En este juego, los jugadores no tienen estrategias dominantes ni dominadas. Lo verificamos a continuación:

- Si *A* elige cara, gana 1 si *B* elige cara y -1 si *B* elige cruz.
- Si *A* elige cruz, gana -1 si *B* elige cara y 1 si *B* elige cruz.

Luego ninguna de las estrategias de *A* da siempre pagos mayores o iguales que la otra: si *B* elige cara *A* preferiría cara, mientras que si *B* elige cruz *A* preferiría cruz. Como resultado, *A* no posee una estrategia dominante. Lo mismo sucede para *B*.

Hay que buscar criterios de solución menos exigentes. Un concepto más débil de resultado razonable es el **equilibrio de Nash**. La definición de este equilibrio es la siguiente:

> En un juego de dos jugadores, *A* y *B*, un par de estrategias es un **equilibrio de Nash** si la estrategia de *A* es óptima dada la de *B*, y la estrategia de *B* es óptima dada la de *A*.

La definición anterior significa que si un par de estrategias es un equilibrio de Nash, ningún jugador, tomando la estrategia del otro jugador como dada, tiene incentivos a cambiar su estrategia. El equilibrio de Nash es adecuado para juegos simultáneos en que todos los jugadores eligen a la vez.

5.1. Cálculo del equilibrio de Nash en el juego de las inversiones.

Vamos a utilizar el juego de las inversiones para ver cómo se calcula un equilibrio de Nash. La matriz de pagos de este juego es:

		Jugador B	
		Invertir	*No invertir*
Jugador A	*Invertir*	30, 8	40, 1
	No invertir	10, 10	15, 4

Hemos visto que el equilibrio de Nash está formado por un par de estrategias tal que cada jugador elige su estrategia óptima (o **mejor respuesta**) dado lo que hace el otro. Entonces, el primer paso para buscar el equilibrio de Nash es tomar las estrategias de un jugador como dadas y buscar las mejores respuestas del otro. El motivo de este paso es que, como el juego es simultáneo, cada jugador ignora la elección del otro. Por ello, lo que hace cada jugador es pensar cuales son las posibles opciones que tiene su rival y calcular la mejor respuesta (es decir, su estrategia óptima) en cada caso. De esta manera podremos seleccionar los pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de cada uno de los jugadores, dada la estrategia de su rival. Por último, para calcular el equilibrio de Nash buscamos el conjunto de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los dos jugadores a la vez. Las obtenemos buscando la intersección de los pares de estrategias que implican una respuesta óptima de un jugador con los pares de estrategias que implican una respuesta óptima del otro jugador.

Empezamos tomando como dadas las estrategias del jugador A y buscamos las mejores respuestas del jugador B. Se ilustra en el esquema siguiente:

		Mejor respuesta de B
Estrategia de A	Invertir	→ Invertir (8>1)
	No invertir	→ Invertir (10>4)

El esquema anterior muestra que:

- Si tomamos como dada la estrategia invertir de A, la mejor respuesta de B es invertir, ya que si invierte gana 8 mientras que si no invierte gana 1.

- Si tomamos como dada la estrategia no invertir de A, la mejor respuesta de B es invertir, ya que si invierte gana 10 mientras que si no invierte gana 4.

Luego si B piensa que A va a invertir, su respuesta óptima será invertir mientras que si B piensa que A no va a invertir, su respuesta óptima será también invertir. Como resultado, hay dos pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de B:

{Estrategia de A, Estrategia de B} {Estrategia de A, Estrategia de B}

{Invertir, Invertir} y {No invertir, Invertir}. (1)

Nota: para evitar confusiones al denotar los pares de estrategias, en cada par, la primera estrategia será siempre la de A y la segunda la de B.

Repetimos el procedimiento tomando ahora como dadas las estrategias del jugador B y buscando las mejores respuestas del jugador A:

		Mejor respuesta de *A*
Estrategia de *B*	Invertir	→ Invertir (30>10)
	No invertir	→ Invertir (40>15)

El esquema anterior muestra que:

- Si tomamos como dada la estrategia invertir de *B*, la mejor respuesta de *A* es invertir, ya que si invierte gana 30 mientras que si no invierte gana 10.

- Si tomamos como dada la estrategia no invertir de *B*, la mejor respuesta de *A* es invertir, ya que si invierte gana 40 mientras que si no invierte gana 15.

Luego si *A* piensa que *B* va a invertir, su respuesta óptima será invertir mientras que si *A* piensa que *B* no va a invertir, su respuesta óptima será también invertir. Como resultado, hay dos pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de *A*:

{Estrategia de *A*, Estrategia de *B*} {Estrategia de *A*, Estrategia de *B*}.

{Invertir, Invertir} y {Invertir, No invertir}. (2)

Por último, buscamos el conjunto de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los dos jugadores a la vez. Las obtenemos buscando la intersección de (1) con (2), ya que en (1) tenemos los pares de estrategias que implican una respuesta óptima de *B* y en (2) los pares de estrategias que implican una respuesta óptima de *A*.

Solo hay un par de estrategias que cumpla lo anterior: {Invertir, Invertir}. Este sería el equilibrio de Nash del juego. En este caso, la estrategia elegida por cada jugador es óptima (es decir, es la mejor respuesta) dada la elección del otro. El par de estrategias {No invertir, Invertir} no es un equilibrio de Nash porque implica únicamente una respuesta óptima de *B*. El par de estrategias {Invertir, No invertir} no es un equilibrio de Nash porque implica únicamente una respuesta óptima de *A*.

5.2. UNA MANERA ALTERNATIVA DE CALCULAR EL EQUILIBRIO DE NASH.

Una manera alternativa de calcular el equilibrio de Nash es identificar primero todos los pares de estrategias posibles (entendiendo que en cada par de estrategias hay una estrategia de cada jugador) y analizar uno a uno si son equilibrios de Nash. Dado que cada jugador tiene dos estrategias, existen cuatro pares de estrategias posibles: {Invertir, Invertir}, {Invertir, No invertir}, {No invertir, Invertir} y {No invertir, No invertir}. Por ello, hay cuatro posibles equilibrios de Nash. Hay que verificar si estos cuatro pares de estrategias cumplen que la estrategia de cada jugador es óptima dada la estrategia del otro.

- {Invertir, Invertir} es un equilibrio de Nash si dada la estrategia del otro ningún jugador quiere cambiar su elección. Tomando como dada la estrategia Invertir de *A*, la mejor respuesta de *B* es invertir (8>1). Tomando como dada la estrategia Invertir de *B*, la mejor respuesta de *A* es invertir (30>10). Luego ninguno de los jugadores quiere cambiar su elección, dada la del otro, por lo que {Invertir, Invertir} es un equilibrio de Nash.

- Consideramos ahora el par de estrategias {Invertir, No invertir}. Tomando como dada la estrategia invertir de *A*, la mejor respuesta de *B* es invertir (8>1). Luego *B* prefiere cambiar su elección, ya que está mejor invirtiendo que no invirtiendo. Por tanto, este par de estrategias no es un equilibrio de Nash.

- Consideramos ahora el par de estrategias {No invertir, Invertir}. Tomando como dada la estrategia invertir de *B*, la mejor respuesta de *A* es invertir (30>10). Luego *A* prefiere cambiar su elección, ya que está mejor invirtiendo que no invirtiendo. Por tanto, este par de estrategias no es un equilibrio de Nash.

- Por último, consideramos el par de estrategias {No invertir, No invertir}. Tomando como dada la estrategia no invertir de *B*, la mejor respuesta de *A* es invertir (40>15). Luego *A* prefiere cambiar su elección, ya que está mejor invirtiendo que no invirtiendo. Por tanto, este par de estrategias no es un equilibrio de Nash.

6. PROBLEMAS DEL EQUILIBRIO DE NASH.

El concepto de equilibrio de Nash presenta varios problemas que enunciamos a continuación:

- **Problema 1**: No tiene porqué haber un único equilibrio de Nash.

- **Problema 2**: Puede no existir equilibrio de Nash.

- **Problema 3**: Un equilibrio de Nash puede implicar el uso de una estrategia dominada.

Vamos a mostrar estos problemas planteando para cada uno de ellos un juego diferente.

6.1. PROBLEMA 1: JUEGO DEL CUMPLEAÑOS.

Jon y Ana son dos niños de 8 años que van a la misma clase. Son amigos inseparables. Ambos han recibido invitaciones de cumpleaños de dos compañeros. Uno de los cumpleaños se celebra en el área de juegos Camelot y el otro en el área de juegos Chiquipark. Los dos cumpleaños se celebran el mismo día y a la misma hora. Jon y Ana tienen que decidir a qué cumpleaños ir. Para ambos lo mejor es coincidir en el mismo cumpleaños. El problema es que quieren ir al mismo cumpleaños pero tienen que decidir a cuál van sin saber la decisión del otro, ya que no han tenido tiempo de ponerse de acuerdo. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Ana	
		Camelot	*Chiquipark*
Jon	*Camelot*	2, 2	1, 1
	Chiquipark	1, 1	2, 2

La matriz de pagos refleja que los dos niños están mejor cuando coinciden en el mismo cumpleaños (pago 2) que cuando van a diferentes cumpleaños (pago 1). **Nota**: cualesquiera números que reflejen la situación hubieran servido para representar los pagos de los jugadores.

Calculamos a continuación el equilibrio de Nash. Empezamos buscando las respuestas óptimas de Jon para una estrategia dada de Ana:

		Mejor respuesta de *Jon*
Estrategia de *Ana*	Camelot	→ Camelot (2>1)
	Chiquipark	→ Chiquipark (2>1)

Luego los pares de estrategias que implican una mejor respuesta de Jon, dada la estrategia de Ana son:

{Camelot, Camelot} y {Chiquipark, Chiquipark}. (1)

Buscamos ahora las respuestas óptimas de Ana para una estrategia dada de Jon:

		Mejor respuesta de *Ana*
Estrategia de *Jon*	Camelot	→ Camelot (2>1)
	Chiquipark	→ Chiquipark (2>1)

Luego los pares de estrategias que implican una mejor respuesta de Ana, dada la estrategia de Jon:

{Camelot, Camelot} y {Chiquipark, Chiquipark}. (2)

Por último, buscamos el conjunto de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los jugadores a la vez, es decir, la intersección de (1) y (2). Dicha intersección muestra que el juego tiene dos equilibrios de Nash: {Camelot, Camelot} y {Chiquipark, Chiquipark}.

El hecho de que haya varios equilibrios de Nash plantea un problema: puede haber un fallo de coordinación, ya que la elección es simultánea. Los niños quieren ir al mismo cumpleaños, pero no saben si ir a Camelot o a Chiquipark. Como resultado, los niños podrían acabar asistiendo a diferentes cumpleaños a pesar de que quieren estar juntos.

Cuando hay múltiples equilibrios de Nash hay que buscar maneras de seleccionar uno de ellos. Una posibilidad es utilizar el concepto de **punto focal**.

Un **punto focal** es un equilibrio que se elige "por alguna razon".

Por tanto, se están haciendo **juicios de valor** para seleccionar equilibrios de Nash. Veamos un ejemplo. Supongamos una variación del juego del juego del cumpleaños, en el que los niños valoran más encontrarse en el Camelot que en el Chiquipark porque tiene actividades más divertidas. La matriz de pagos del juego debería tener pagos que reflejaran esta valoración, por lo que hay que modificarla. La nueva matriz de pagos sería, por ejemplo:

		Ana	
		Camelot	*Chiquipark*
Jon	*Camelot*	4, 4	2, 1
	Chiquipark	1, 2	3, 3

Si los niños se encuentran en el Camelot se lo pasan mejor (pago 4) que si se encuentran en el Chiquipark (pago 3). Además, cuando están juntos, sea donde sea, están mejor que si no coinciden. En este último caso, el que va a Camelot obtiene pago 2 mientras que el que va a Chiquipark obtiene pago 1.

Al igual que antes, el juego tiene dos equilibrios de Nash: {Camelot, Camelot} y {Chiquipark, Chiquipark}. Sin embargo hay un punto focal: {Camelot, Camelot}. En este caso no es posible un fallo de coordinación. Sin coordinarse los dos niños irían a Camelot, ya que valoran más encontrase en Camelot (pago 4) que en Chiquipark (pago 3).

6.2. PROBLEMA 2. JUEGO DE LAS MONEDAS.

Consideramos el juego de las monedas para ilustrar la posibilidad de inexistencia de equilibrio de Nash. La matriz de pagos de este juego es:

		Jugador B	
		Cara	*Cruz*
Jugador A	*Cara*	1, -1	-1, 1
	Cruz	-1, 1	1, -1

Cálculamos a continuación el equilibrio de Nash. Empezamos buscando las respuestas óptimas de *A* para una estrategia dada de *B*:

		Mejor respuesta de *A*
Estrategia de *B*	Cara	→ Cara (1>-1)
	Cruz	→ Cruz (1>-1)

Los pares de estrategias que implican una mejor respuesta de *A*, dada la estrategia de *B*, son:

{Cruz, Cruz} y {Cara, Cara}. (1)

Buscamos ahora las respuestas óptimas de *B* para una estrategia dada de *A*:

		Mejor respuesta de *B*
Estrategia de *A*	Cara	→ Cruz (1>-1)
	Cruz	→ Cara (1>-1)

Los pares de estrategias que implican una mejor respuesta de *B*, dada la estrategia de *A*, son:

$$\{\text{Cruz, Cara}\} \text{ y } \{\text{Cara, Cruz}\}. \qquad (2)$$

Por último, buscamos los pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los jugadores a la vez. En este caso, la intersección de (1) y (2) es el conjunto vacío. Luego no existe equilibrio de Nash. El motivo es que un jugador gana cuando pierde el otro. En el juego, *A* intentará elegir lo mismo que *B*, mientras que *B* tratará de elegir lo contrario que *A*. Hay que tener en cuenta que, dado que el juego es simultáneo, los jugadores toman su decisión sin observar la de su rival.

6.3. PROBLEMA 2. VARIANTE DEL JUEGO DEL CUMPLEAÑOS.

Volvamos al juego del cumpleaños. Ambos niños vuelven a recibir invitaciones de cumpleaños de dos compañeros: uno de los cumpleaños se celebra en el Camelot y el otro en el Chiquipark. Los dos cumpleaños se celebran el mismo día y a la misma hora. Jon y Ana tienen que decidir a qué cumpleaños ir. Ana, que está muy enfada con Jon porque ha hecho algo que la ha molestado, quiere ir al cumpleaños en que no se encuentren. Jon, por el contrario, quiere seguir encontrándose con Ana. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Ana	
		Camelot	*Chiquipark*
Jon	*Camelot*	2, 0	1, 2
	Chiquipark	1, 2	2, 0

Nota: la matriz de pagos del juego se ha modificado para que represente la nueva situación. Cuando están juntos, Jon obtiene pago 2 y Ana pago 0. Cuando están separados, Jon obtiene pago 1 y Ana pago 2. En este juego tenemos una situación similar al juego de las monedas.

Siguiendo el procedimiento para calcular el equilibrio de Nash se puede comprobar que no existe equilibrio. El motivo es que Jon quiere encontrarse con Ana mientras que Ana intenta evitarle.

6.4. Problema 3. Un equilibrio de Nash puede implicar una estrategia dominada.

Para ilustrar este problema, consideramos el juego representado por la siguiente matriz de pagos:

		Jugador B		
		$B1$	$B2$	$B3$
	$A1$	1, 1	-2, 1	-1, 1
Jugador A	$A2$	-1, -1	1, -1	-1, 1
	$A3$	1, -1	-1, -1	1, -1

Figura 5.

En este juego cada jugador tiene tres estrategias. Los pagos en función de las estrategias de los jugadores se representan en la figura 5. Es fácil comprobar que este juego tiene un único equilibrio de Nash: $\{A1, B1\}$. De otro lado, la estrategia $A1$ está dominada débilmente por la estrategia $A3$. Luego el equilibrio de Nash anterior implica una estrategia dominada. El problema es, entonces, que $\{A1, B1\}$ es un equilibrio de Nash, pero como la estrategia $A1$ está dominada, el jugador A nunca la usaría.

7. ALGUNOS RESULTADOS DE INTERÉS.

Vamos a enunciar a continuación algunos resultados de interés que se deducen de las secciones anteriores.

RESULTADO 1: Todo equilibrio en estrategias dominantes es equilibrio de Nash.

Todo equilibrio en estrategias dominantes es un equilibrio de Nash ya que la estrategia dominante de un jugador es siempre su mejor respuesta, sea lo que sea lo que hace su rival.

RESULTADO 2: No todo equilibrio de Nash es equilibrio en estrategias dominantes.

Un juego, como hemos visto, puede tener equilibrio de Nash y sin embargo los jugadores no tienen porqué tener estrategias dominantes, ya que este concepto es más exigente que el de equilibrio de Nash. Esto sucede, por ejemplo, en el juego del cumpleaños.

RESULTADO 3: Todo equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas es equilibrio de Nash.

Todo equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas es equilibrio de Nash ya que para buscar el equilibrio iterativo eliminamos las estrategias dominadas, es decir, las que no son una mejor respuesta.

RESULTADO 4: No todo equilibrio de Nash es un equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas.

Este resultado se puede probar con el juego de la figura 5. Hemos visto que el equilibrio de Nash de este juego es $\{A1, B1\}$. Sin embargo, el equilibrio iterativo eliminando las estrategias dominadas es $\{A3, B3\}$.

El equilibrio de Nash es adecuado únicamente cuando las decisiones se toman simultáneamente. En general, es un equilibrio demasiado débil cuando tenemos decisiones secuenciales.

8. ALGUNAS APLICACIONES DEL EQUILIBRIO DE NASH.

Vamos a ver a continuación cómo el concepto de equilibrio de Nash es útil para analizar diferentes situaciones en las que surge interacción estratégica.

8.1. ELECCIÓN DEL TIPO DE GESTOR.

Una de las características de las empresas modernas es que hay una separación entre la propiedad y la gestión, de manera que los dueños de las empresas no las dirigen sino que contratan a gestores para que desempeñen esta tarea. Por ello, el tipo de gestor que se contrate para dirigir la empresa es crucial, ya que su estilo de dirección marcará el éxito o fracaso de la empresa.

Vamos a suponer, por simplicidad, que en el mercado de trabajo existen únicamente dos tipos de gestores: aquellos con talento para fomentar la demanda y aquellos con habilidad para reducir costes. El esfuerzo realizado por el gestor para fomentar demanda puede llevarse a cabo de diferentes maneras: actividades de promoción, mejorar el servicio a los clientes o identificar nuevos mercados para el producto. Las actividades reductoras de costes pueden ser, por ejemplo, identificar fuentes de suministros más baratas o asignar de manera más eficiente los diferentes recursos de la empresa.

La evidencia muestra que los gestores destacan en una o unas pocas tareas, pero que ninguno es brillante en todas. La historia pasada y reciente muestra ejemplos. Pierre Du Pont y Alfred Sloan desarrollaron innovaciones organizativas y contables para coordinar las actividades entre departamentos en General Motors, que redujeron los costes en esta empresa. De otro lado, gestores como Richard Bradson (Virgin), Luciano Benetton (Benetton) y Bill Gates (Microsoft) tienen un gran talento para vender sus productos.

Vamos a analizar un caso particular del problema anterior, aquel en el que la actividad de fomentar demanda tienen rasgo de bien público, en el sentido de que se fomenta la demanda propia y la del rival. Este caso puede ilustrarse mediante la siguiente matriz de pagos:

		Empresa B	
		Gestor que fomenta demanda	*Gestor que reduce costes*
Empresa A	*Gestor que fomenta demanda*	50, 50	40, 60
	Gestor que reduce costes	60, 40	50, 50

Si ambas empresas contratan el mismo tipo de gestor, ganan lo mismo (cada una de ellas gana 50). Si una empresa contrata un gestor que fomenta demanda, mientras que la otra contrata un gestor que reduce costes, la segunda empresa se aprovecha del la primera. El motivo es que se beneficia de la actividad de fomento de la demanda de la otra empresa, mientras que se reserva todo el beneficio de la reducción de costes. Esto lleva a que la primera empresa gane 40, mientras que la segunda gana 60.

El equilibrio de Nash de este juego es que ambas empresas contratan gestores que reducen costes. El motivo es que si una empresa contrata a un gestor que fomenta demanda, su rival se beneficiaría de ello sin pagar nada a cambio. Se puede comprobar también que contratar un gestor que reduce costes es una estrategia dominante (fuerte) para ambos jugadores.

8.2. POLÍTICA COMERCIAL ESTRATÉGICA Y COMPETENCIA INTERNACIONAL.

Vamos a considerar el **mercado internacional de aviones comerciales**. El desarrollo y la producción de un nuevo tipo de avión está sujeto a fuertes economías de escala. Por ello, a una empresa sólo le compensa desarrollar un nuevo avión si espera vender muchos. Supongamos que Boeing (EE.UU.) y Airbus (Unión Europea, U.E.) están considerando la posibilidad de desarrollar por separado un nuevo avión. Sólo se pueden obtener beneficios positivos si el nuevo tipo de avión lo produce una única empresa. En este caso, la empresa que produce el avión gana 50 y la que no lo produce, 0. Si las dos empresas producen el avión las dos tendrían pérdidas por valor de -5. Cada empresa tiene dos estrategias posibles: producir el avión o no producirlo. La matriz de pagos del juego es:

		Boeing	
		Producir	*No producir*
Airbus	*Producir*	-5, -5	50, 0
	No producir	0, 50	0, 0

Este juego tiene dos equilibrios de Nash: {Producir, No producir}, {No producir, Producir}. En cada uno de ellos sólo una de las empresas produce el avión. Dado que para ambas empresas es mejor producir el avión que no hacerlo, esto podría llevar a un fallo de coordinación. Ambas empresas podrían decidir producir el avión, lo que las llevaría a obtener pérdidas, o ambas podrían decidir no producir el avión, por lo que ambas obtendrían 0.

La U.E. prefiere que sea Airbus quien produzca el nuevo avión. Supongamos que se compromete a subvencionar a Airbus antes de que Boeing haya decidido producirlo. Si la U.E. se compromete a pagar una subvención de 15 a Airbus en caso de producir el avión, independientemente de lo que haga Boeing. En caso de producir, Airbus gana -5+15=10 si Boeing produce y 50+15=65 si Boeing no produce. La matriz de pagos del juego sería:

		Boeing	
		Producir	*No producir*
Airbus	*Producir*	**10**, -5	**65**, 0
	No producir	0, 50	0, 0

Ahora Airbus obtiene beneficios con el nuevo avión, independientemente de lo que haga Boeing. La subvención causa que Airbus tenga una estrategia dominante: producir. Como resultado, a Boeing no le interesa producir el avión ya que tendría pérdidas. El equilibrio del juego, por tanto, es que Boeing no produce y Airbus sí.

En este juego se podría dar la situación contraria. El gobierno de EE.UU puede decidir dar una subvención a la producción de aviones militares de Boeing. Esta subvención es utilizada para desarrollar componentes que son útiles para el avión de uso civil. Esto permitiría a Boeing abaratar costes en caso de producir el avión de uso civil. Suponemos que ese ahorro en costes, en caso de producir, es de 15. La matriz de pagos del juego es ahora:

		Boeing	
		Producir	*No producir*
Airbus	*Producir*	-5, **10**	50, 0
	No producir	0, **65**	0, 0

Ahora tenemos la situación contraria del juego anterior. A Boeing le interesa producir el avión independientemente de lo que haga Airbus. El equilibrio de Nash del juego es ahora que Boeing produce el avión mientras que Airbus no lo hace.

9. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.

Los ejercicios de auto evaluación propuestos tienen como objetivo que cada alumno compruebe si sabe calcular el equilibrio de Nash de un juego.

9.1. EJERCICIO 1. LA COMPETENCIA POR LA AUDIENCIA

Dos cadenas de televisión rivales, la Cadena *A* y la Cadena *B*, deben decidir qué programa emitir en la hora de máxima audiencia (las 22:00 horas). Únicamente se pueden emitir tres tipos de programas: concurso, serie o cultural. El 50% de la audiencia ve la televisión sólo si emiten un concurso, el 40% la ve sólo si emiten una serie, y el 20% restante la ve si emiten un programa cultural. Los pagos de las cadenas vienen recogidos por el porcentaje de la audiencia que captan. Si las dos cadenas ponen el mismo tipo de programa, la mitad de la audiencia es para cada una.

Preguntas:

1. Represente la matriz de pagos del juego. Explique.

2. ¿Existe alguna estrategia dominada? ¿Cuál? Explique.

3. Calcule el equilibrio de Nash del juego. Explique.

9.2. EJERCICIO 2. PIEDRA, PAPEL Y TIJERAS.

Suponga que dos jugadores, *A* y *B*, deben elegir simultáneamente piedra, papel o tijeras. Los jugadores ponen su mano con la forma que represente su elección y la muestran a la vez. En este juego, la piedra gana a las tijeras, las tijeras ganan al papel, y el papel gana a la piedra. El que gana obtiene pago 1 y el que pierde -1. Si ambos eligen lo mismo, ambos obtienen pago 0.

Preguntas:

1. Represente la matriz de pagos del juego. Explique.

2. Calcule, si existe, el equilibrio de Nash del juego. Explique.

10. LAS ESTRATEGIAS MAXIMIN.

El concepto de equilibrio de Nash parte de que los individuos son individualmente racionales, lo que significa que cada individuo toma la elección que le proporciona el mayor de los pagos posible. La estrategia de cada jugador depende no sólo de su propia racionalidad sino también de la de su adversario, ya que existe interacción estratégica. Sin embargo, depender de la estrategia del adversario puede ser una limitación que puede acarrear grandes pérdidas si el jugador rival toma decisiones que no son racionales.

Un tipo de estrategia adecuada cuando el jugador rival puede no ser racional es la **estrategia maximin**.

Una **estrategia maximin** es aquella que maximiza la ganancia o pago mínimo que puede obtenerse.

Para analizar este tipo de estrategia vamos a considerar una variante del juego de la inversión. En este juego hay dos empresas idénticas que tienen que decidir si invierten o no en aumentar su capacidad productiva. Si ninguna invierte, ambas ganan 50. Sin embargo, si ambas invierten en aumentar su capacidad productiva, las empresas producirían excesivamente y las dos empresas perderían 100. Si sólo una invierte, la que invierte obtiene una ventaja sobre su rival, obteniendo mayores beneficios a costa del rival; la que invierte gana 60 y la que no lo hace pierde 10. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Empresa B	
		Invertir	*No invertir*
Empresa A	*Invertir*	–100, –100	60, –10
	No invertir	–10, 60	50, 50

Este juego tiene dos equilibrios de Nash:

$$\{\text{Invertir, No Invertir}\}, \{\text{No Invertir, Invertir}\}.$$

En cada uno de ellos sólo una empresa invierte. Sin embargo, dado que el que invierte está mejor que el que no lo hace, podría haber un fallo de coordinación. En ese caso ambos invertirían y cada uno perdería 100. Si las unidades que consideramos son millones de euros, las empresas podrían tener una gran pérdida. Además, si una empresa no es racional, podría decidir invertir sin pensar en las consecuencias de su decisión. Esto generaría pérdidas a la otra empresa, siendo estas muy fuertes en caso de tomar también la decisión de invertir.

Dada la posibilidad de tener fuertes pérdidas, las empresas podrían optar por utilizar una estrategia conservadora como la maximin. A cada estrategia se le asocia el peor de lo pagos posible, eligiéndose la estrategia que asegura la menor pérdida.

Para cada jugador:

- A la estrategia invertir se le asocia el pago –100, ya que si el otro jugador invierte obtiene –100 mientras que si no invierte gana 60.

- A la estrategia no invertir se le asocia el pago –10, ya que si el otro jugador invierte obtiene –10 mientras que si no invierte gana 50.

Comparando los pagos que hemos asociado a cada estrategia tenemos que a la estrategia invertir se le asocia el pago –100, y a la estrategia no invertir el pago –10. Luego la estrategia que maximiza el pago mínimo que puede obtenerse (estrategia maximin) es no invertir. Así se evita la posibilidad de perder –100. Como resultado, si las dos empresas utilizan estrategias maximin ninguna de ellas invertiría.

11. LAS ESTRATEGIAS MIXTAS.

Las **estrategias** estudiadas hasta ahora se denominan **puras**, ya que los jugadores eligen una determinada estrategia con certeza. Una estrategia pura es una regla de elección que le dice al jugador qué elegir. Sin embargo, existen juegos en los que no existe equilibrio de Nash en estrategias puras. En estos juegos puede existir equilibrio de Nash si los jugadores emplean **estrategias mixtas**. Una estrategia mixta es una regla de elección que le dice al jugador con qué probabilidad elegir.

Una **estrategia mixta** es aquella en la que cada jugador elige aleatoriamente entre dos o más opciones posibles, en base a un conjunto de probabilidades preespecificadas.

Un ejemplo donde se utilizan estrategias mixtas es en el juego de las monedas. Si jugamos repetidamente a este juego y no cambiamos de elección, nuestro rival se dará cuenta por lo que nos acabará ganando. Para ganar en este juego hay que cambiar de estrategia de vez en cuando para que el rival no pueda predecir cual va a ser nuestra elección. Algo similar sucede a los futbolistas que tienen que lanzar los penaltis en sus equipos. Si siempre lanzan el balón al mismo lado de la portería los porteros se darán cuenta, por lo que es probable que paren el penalti. Por ello, para que el portero no pueda predecir a que lado de la portería va a ir la pelota, los jugadores suelen elegir aleatoriamente el lado al que lanzan.

El **juego de las monedas** no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras. En este juego cuando uno gana el otro pierde. A cada jugador le gustaría adivinar la jugada del otro y que el otro no adivine la suya. Este juego puede tener un equilibrio si consideramos estrategias mixtas. La matriz de pagos del juego es:

		Jugador B	
		Cara, q	*Cruz,* $1-q$
Jugador A	*Cara,* p	1, –1	–1, 1
	Cruz, $1-p$	–1, 1	1, –1

Cuando los jugadores juegan estrategias mixtas, asocian a cada estrategia pura una probabilidad:

- el jugador A elige cara con probabilidad p y cruz con probabilidad $1-p$,
- el jugador B elige cara con probabilidad q y cruz con probabilidad $1-q$.

Este juego tiene dos estrategias puras para cada jugador: cara y cruz. La estrategia mixta elegir cara con probabilidad 1 y cruz con probabilidad 0 equivale a la estrategia pura cara. La estrategia mixta elegir cara con probabilidad 0 y cruz con probabilidad 1 equivale a la estrategia pura cruz.

Los jugadores deben decidir la probabilidad con la que eligen una determinada estrategia pura. Esta probabilidad es la que maximiza su ganancia esperada.

La **ganancia esperada** o valor esperado de un juego es la media de los valores correspondientes a todos los resultados posibles ponderada por las probabilidades.

Ilustramos el concepto de ganancia esperada con un ejemplo. Si un juego permite ganar la cantidad X con probabilidad r y la cantidad Y con probabilidad $1–r$, la ganancia esperada del juego es: $rX + (1–r)Y$. Consideremos un juego en el que tirando un dado, gano 1100 si sale el 1 y pierdo 100 si sale cualquier otro número. Entonces, puedo ganar $X=1100$ con probabilidad $r=1/6$, ya que hay seis números en un dado y sólo gano si sale el 1. Obtengo $Y=–100$ si sale un número distinto del 1, lo que sucede con probabilidad $1–r=5/6$. Luego la ganancia esperada de este juego es: 1100(1/6) – 100(5/6) = –100.

El concepto de equilibrio de Nash para estrategias puras no sirve con estrategias mixtas, por lo que hay que redefinirlo. En el caso del juego de dos jugadores que estamos considerando:

El par de estrategias mixtas $\{p, q\}$ forma un **equilibrio de Nash en estrategias mixtas** si la estrategia mixta de cada jugador es la mejor respuesta a la estrategia mixta del otro jugador.

Vamos a calcular en primer lugar la mejor respuesta del jugador A para una estrategia mixta dada del jugador B, elegir cara con probabilidad q. Entonces:

- Si el jugador A elige **cara**, gana 1 cuando B elige cara, lo que sucede con probabilidad q, y gana –1 cuando B elige cruz, lo que sucede con probabilidad $1–q$. Luego la ganancia esperada de elegir cara es:

$$(1)\, q + (–1)\, (1–q) = 2\, q – 1.$$

• Si el jugador A elige **cruz**, gana -1 cuando B elige cara, lo que sucede con probabilidad q, y gana 1 cuando B elige cruz, lo que sucede con probabilidad $1-q$. Luego la ganancia esperada de elegir cruz es:

$$(-1)\, q + (1)\, (1-q) = 1 - 2q.$$

Además hay que tener en cuenta que el jugador A asocia una probabilidad a cada posible elección: elige cara con probabilidad p y cruz con probabilidad $1-p$. Por lo tanto, su ganancia esperada es:

$$p\,[2\,q - 1] + (1 - p)\,[1 - 2q] = (1 - 2\,q) + 2\,p\,(2\,q - 1).$$

Vemos ahora cómo varía la ganancia esperada del jugador A con p:

• La ganancia esperada de A **crece** con p si $(2q-1)>0$, lo que sucede cuando $q>1/2$. Luego para $q>1/2$ la ganancia esperada de A es máxima para $p=1$ (línea que une los puntos III y IV de la figura 6).

• La ganancia esperada de A **decrece** con p si $(2q-1)<0$, lo que sucede cuando $q<1/2$. Luego para $q<1/2$ la ganancia esperada de A es máxima para $p=0$ (línea que une los puntos I y II de la figura 6).

• Por último, la ganancia esperada de A **no varía** con p si $(2q-1)=0$, lo que sucede cuando $q=1/2$. Esto significa que para $q=1/2$ la ganancia esperada de A no varía con p, por lo que p puede tomar cualquier valor entre 0 y 1 (línea que une los puntos II y III de la figura 6). En este caso A está indiferente entre elegir cara o cruz ya que gana lo mismo para todo p.

Gráficamente, la función de reacción de *A* es:

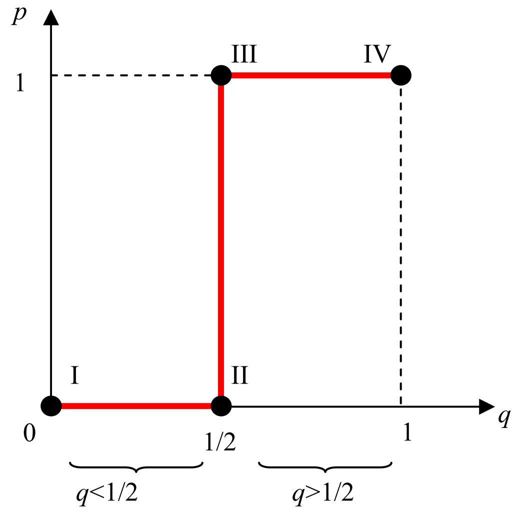


Figura 6. Función de reacción del jugador *A*.

Vamos a calcular ahora la mejor respuesta del jugador *B* para una estrategia mixta dada del jugador *A*, elegir cara con probabilidad *p*. Entonces:

- Si el jugador *B* elige **cara**, gana –1 cuando *A* elige cara, lo que sucede con probabilidad *p*, y gana 1 cuando *A* elige cruz, lo que sucede con probabilidad 1–*p*. Luego la ganancia esperada de elegir cara es:

$$(-1)\,p + (1)\,(1-p) = 1 - 2\,p.$$

- Si el jugador *B* elige **cruz**, gana 1 cuando *A* elige cara, lo que sucede con probabilidad *p*, y gana –1 cuando *A* elige cruz, lo que sucede con probabilidad 1–*p*. Luego la ganancia esperada de elegir cruz es:

$$(1)\,p + (-1)\,(1-p) = 2\,p - 1.$$

Además hay que tener en cuenta que el jugador *B* elige cara con probabilidad *q* y cruz con probabilidad 1–*q*, por lo que su ganancia esperada es:

$$q\,[1 - 2\,p] + (1-q)\,[2\,p - 1] = (2p - 1) + 2\,q\,(1 - 2p).$$

Vemos ahora cómo varía la ganancia esperada del jugador *B* con *q*:

• La ganancia esperada de *B* **crece** con *q* si $(1–2p)>0$, lo que sucede cuando $p<1/2$. Luego para $p<1/2$ la ganancia esperada de *B* es máxima para $q=1$ (línea que une los puntos I y II de la figura 7).

• La ganancia esperada de *B* de**crece** con *q* si $(1–2p)<0$, lo que sucede cuando $p>1/2$. Luego para $p>1/2$ la ganancia esperada de *B* es máxima para $q=0$ (línea que une los puntos III y IV de la figura 7).

• Por último, la ganancia esperada de *B* **no varía** con *q* si $(1–2p)=0$, lo que sucede cuando $p=1/2$. Esto significa que para $p=1/2$ la ganancia esperada de *B* no varía con *p*, por lo que *p* puede tomar cualquier valor entre 0 y 1. (línea que une los puntos II y III de la figura 7). En este caso, *B* está indiferente entre elegir cara o cruz ya que gana lo mismo para todo *q*.

Gráficamente, la función de reacción de *B* es:

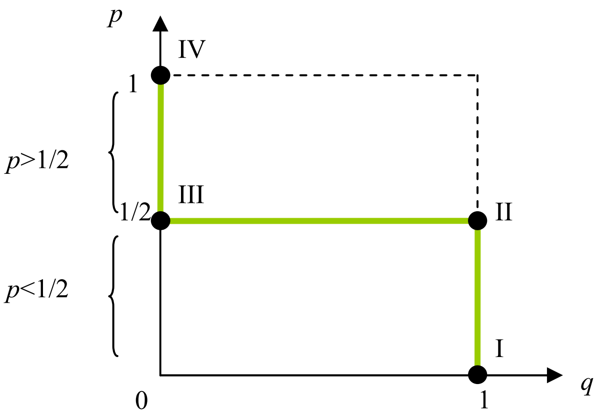


Figura 7. Función de reacción del jugador *B*.

Una vez calculada la mejor respuesta de cada jugador para una probabilidad dada de elegir cara del otro jugador, buscamos ahora el equilibrio del juego. Es decir, buscamos los valores de p y q que implican una mejor respuesta de ambos jugadores a la vez. Los obtenemos buscando el punto de corte entre las funciones de reacción de los dos jugadores (figura 8).

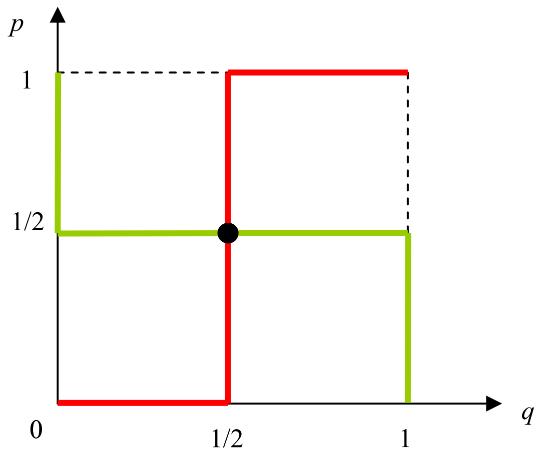


Figura 8. Equilibrio del juego.

Hay un único punto de corte de las funciones de reacción de los dos jugadores. Luego existe un único equilibrio de Nash en estrategias mixtas: $\{p=1/2, q=1/2\}$.

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas se puede calcular de manera más sencilla utilizando el denominado **método de igualación de pagos**. Este método parte del hecho de que un jugador que seleccione una estrategia mixta estará indiferente entre dos estrategias puras. El punto de corte entre las funciones de reacción de los dos jugadores está en la zona de sus funciones de reacción en las que, como hemos visto, los jugadores están indiferentes entre elegir cara o cruz.

El jugador A está indiferente entre las estrategias puras cara y cruz si dan la misma ganancia esperada, es decir, si: $1–2p=2p–1$, lo que sucede para $p=1/2$. Dado que el juego es simétrico (es decir, es idéntico para los dos jugadores), haciendo lo mismo para el jugador B obtenemos $q=1/2$.

11.1. EL JUEGO DE LA CARRERA.

Pedro y Pablo son dos amigos que siempre quieren ser los primeros en todo. Lo más importante para cada uno de ellos es ganar a su amigo. Van a hacer una carrera hasta la iglesia del pueblo. Cada uno va a ir por un camino diferente, y ambos caminos tienen la misma longitud. Los dos jugadores quieren ganar la carrera. Cada jugador tiene dos opciones: esforzarse mucho o esforzarse poco. Si ambos jugadores se esfuerzan mucho llegarían a la iglesia a la vez, por lo que empatarían y además estarían muy cansados obteniendo utilidad –10. Si un jugador se esfuerza mucho y el otro poco, el primero gana la carrera obteniendo utilidad 10 y el otro la pierde, obteniendo utilidad 0. Por último, si ambos se esfuerzan poco, ninguno gana, pero como se han cansado poco esto les genera pagos 1. La matriz de pagos del juego es la siguiente.

		Pedro	
		Esforzarse mucho, q	*Esforzarse poco, 1–q*
Pablo	*Esforzarse mucho, p*	–10, –10	10, 0
	Esforzarse poco, 1–p	0, 10	1, 1

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: {Esforzarse mucho, Esforzarse poco}, {Esforzarse poco, Esforzarse mucho}. Dado que hay dos equilibrios, ¿Cómo saben los jugadores cual será el equilibrio resultante? Aunque los jugadores hablen entre ellos, no está claro que puedan llegar a un acuerdo sobre quien gana la carrera.

Para resolver este juego utilizamos el **método de igualación de pagos**. Hemos visto que en el equilibrio en estrategias mixtas, cada jugador debe estar indiferente entre esforzarse mucho o esforzarse poco. Los pagos esperados de las estrategias puras para Pedro son:

- Ganancia esperada si elige esforzarse mucho: $(-10)\,p + (10)\,(1-p) = 10 - 20\,p$.
- Ganancia esperada si elige esforzarse poco: $(0)\,p + (1)\,(1-p) = 1 - p$.

Igualamos los pagos esperados: $10-20p=1-p$. Luego para $p=9/19$, Pedro está indiferente entre esforzarse mucho o poco.

Los pagos esperados de las estrategias puras para Pablo son:

- Ganancia esperada si elige esforzarse mucho: $(-10)\ q + (10)\ (1-q) = 10 - 20\ q$.

- Ganancia esperada si elige esforzarse poco: $(0)\ q + (1)\ (1-q) = 1 - q$.

Igualamos los pagos esperados: $10-20q=1-q$. Despejando se obtiene $q=9/19$. Como el juego es simétrico, ambos jugadores eligen la misma probabilidad: $p=q=9/19$.

11.2. EL JUEGO DE COGER EL PAÑUELO.

Dos niños, Pedro y Pablo, están jugando al juego de coger el pañuelo. El juego consiste en lo siguiente. Un tercer niño se coloca entre ambos sujetando un pañuelo y Pedro y Pablo deben decidir si lo cogen o no. Si ambos tratan de cogerlo, ambos pierden recibiendo pago –1. Si uno intenta cogerlo y el otro no, el primero gana 1 mientras que el otro no obtiene nada. Por último, si ningún jugador intenta coger el pañuelo los dos ganan 0. La matriz de pagos del juego es la siguiente.

		Pablo	
		Coger, q	*No coger, $1-q$*
Pedro	*Coger, p*	–1, –1	1, 0
	No coger, $1-p$	0, 1	0, 0

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: {Coger, No coger}, {No coger, Coger}. Sin embargo, hay un único equilibrio en estrategias mixtas.

Para resolver este juego vamos a usar el método de igualación de pagos. Los pagos esperados de las estrategias puras para Pedro son:

- Ganancia esperada si coge el pañuelo: $(-1)\ q + (1)\ (1-q) = 1 - 2\ q$.

• Ganancia esperada si no coge el pañuelo: $(0)\ q + (0)\ (1–q) = 0$.

Igualando los pagos esperados: $1 – 2\ q = 0$, por lo que $q=1/2$.

Los pagos esperados de las estrategias puras para Pablo son:

• Ganancia esperada si coge el pañuelo: $(–1)\ p + (1)\ (1–p) = 1 – 2\ p$.

• Ganancia esperada si no coge el pañuelo: $(0)\ p + (0)\ (1–p) = 0$.

Igualando los pagos esperados: $1 – 2\ p = 0$, por lo que $p=1/2$. Por tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es: $p=q=1/2$.

12. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.

Los ejercicios de auto evaluación propuestos tienen como objetivo que cada alumno compruebe si sabe calcular las estrategias maximin de los jugadores y que verifique si sabe calcular el equilibrio en estrategias mixtas de un juego.

12.1. EJERCICIO 1. EL JUEGO DE LOS GAMBERROS I

Julio es el flamante dueño de un deportivo descapotable. Debe decidir si va a dar un paseo con su deportivo poniéndole la capota o sin la capota. Hay unos gamberros que en ocasiones se dedican a lanzar globos con agua a los coches que pasan desde un puente. La matriz de pagos del juego es:

		Gamberros	
		Lanzar globos	*No lanzar globos*
Julio	*Con capota*	1, 0	–1, 1
	Sin capota	–10, 10	10, –5

Suponga que julio emplea una estrategia maximin. Los gamberros asocian a cada estrategia el pago más alto, y eligen la que asegura el pago más alto. Calcule el resultado del juego. Explique. ¿Se mojará Julio?

12.2. EJERCICIO 2. EL JUEGO DE LOS GAMBERROS II

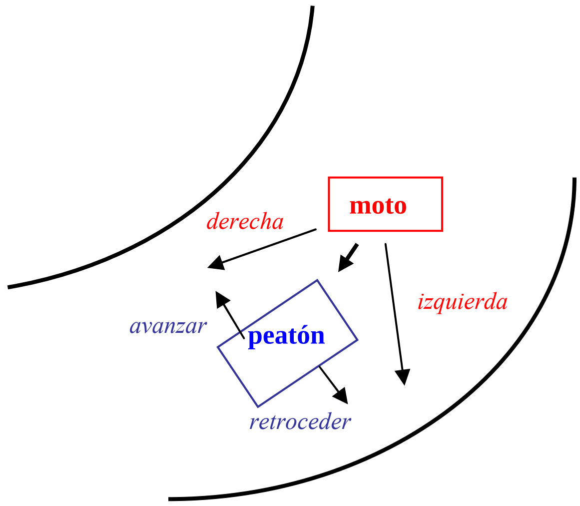
Julio es el flamante dueño de un deportivo descapotable. Debe decidir si va a dar un paseo con su deportivo poniéndole la capota o sin la capota. Hay unos gamberros que en ocasiones se dedican a lanzar globos con agua a los coches que pasan desde un puente. La probabilidad de que Julio salga a pasear con la capota puesta es p. La probabilidad de que los gamberros lancen los globos es q. La matriz de pagos del juego es:

		Gamberros	
		Lanzar globos, q	*No lanzar globos, $1–q$*
Julio	*Con capota, p*	1, 0	–1, 1
	Sin capota, $1–p$	–10, 10	10, –5

Calcule el equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego. Explique. ¿Cuál es la probabilidad de que Julio se moje?

12.3. EJERCICIO 3. JUEGO DE LA COORDINACIÓN.

Un motorista toma una curva con poca visibilidad, encontrándose frente a frente con un peatón que está cruzando la carretera. No tiene tiempo de frenar, por lo que se enfrenta a dos opciones: girar a su izquierda o a su derecha (por simplicidad, excluimos la opción de seguir recto, que parece la más peligrosa). El peatón, que ve que se le echa la moto encima tiene también dos opciones: avanzar o retroceder. La situación aparece ilustrada en la figura siguiente:



El motorista decide girar a la izquierda con probabilidad q. El peatón retrocede con probabilidad p. La matriz de pagos del juego es:

		Motorista	
		Izquierda, q	*Derecha*, $1-q$
Peatón	*Retroceder*, p	$-1, -1$	$1, 1$
	Avanzar, $1-p$	$1, 1$	$-1, -1$

Habría accidente si peatón y motorista se mueven en la misma dirección. En ese caso, ambos obtienen utilidad –1. Si ambos se mueven en direcciones contrarias, se libran del accidente, y ambos obtienen utilidad 1.

Calcule el equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego. Explique. ¿Cuál es la probabilidad de que el motorista atropelle al peatón?

13. EL DILEMA DEL PRISIONERO.

El juego denominado comúnmente como el dilema del prisionero describe la siguiente situación. Se interroga en habitaciones separadas (sin comunicación posible) a dos personas que han cometido conjuntamente un delito. La única manera de imputarles el delito es si alguno de los dos confiesa, aportando pruebas del delito. Cada persona tiene la posibilidad de confesar, y así implicar a la otra persona, o no confesar.

- Si los dos confiesan, van a la cárcel lo que les genera unos pagos (o desutilidad) de –2.
- Si sólo uno confiesa, al que confiesa le dejan libre por cooperar lo que le genera pagos 1 (por el alivio de no ir a la cárcel), mientras que el que no confiesa va a la cárcel con una mayor condena por no confesar y ser culpable (pagos –3).
- Si ninguno confiesa, los dos quedan libres, ya que no hay pruebas del delito cometido, obteniendo ambos unos pagos de 0.

La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Prisionero B	
		Confesar	*No confesar*
Prisionero A	*Confesar*	–2, –2	1, –3
	No confesar	–3, 1	0, 0

Normalmente cabría esperar que los dos individuos que han cometido el delito tengan el acuerdo de no confesar, para quedar así libres. Sin embargo, en este juego la estrategia confesar genera mayores pagos que la estrategia no confesar, independientemente de lo que haga el otro jugador. Luego confesar es una estrategia dominante para ambos jugadores, por lo que ambos confiesan; cada jugador obtiene unos pagos de –2. Este resultado es perjudicial para los dos jugadores. Si hubiesen cooperado manteniendo el acuerdo de no confesar, ambos estarían mejor, ya que habrían quedado libres obteniendo el pago 0. El contexto no cooperativo, que hace que los acuerdos no sean obligatorios, lleva a que cada uno persiga su propio interés lo que ocasiona un resultado peor a ambos que la cooperación.

El interés de este juego, como veremos en las próximas secciones, proviene de que existen muchas situaciones que presentan la misma estructura.

13.1. CÓMO CONSEGUIR COOPERACIÓN

Hay varias posibilidades para conseguir que se mantenga la cooperación, respetándose los acuerdos:

- Represalias o amenazas: el jugador que no coopera podría sufrir las represalias del otro. Por ejemplo, en el caso de los delincuentes del juego anterior, si un jugador confiesa el otro podría vengarse. El miedo a la venganza del otro podría llevar a que ninguno de los jugadores esté dispuesto a confesar.

- Si el juego se repite muchas veces, la cooperación podría darse porque interesa a los jugadores que en un futuro haya cooperación. Si un jugador no coopera hoy es difícil que el otro jugador quiera cooperar con el en el futuro.

Vamos a analizar a continuación varias situaciones en las que surge el dilema del prisionero.

13.2. DOBLE O MITAD.

La cadena de televisión autonómica ETB2 emitió durante cierto tiempo el programa "Doble o mitad", en el cual dos jugadores intentaban conseguir un premio de 24.000 €. Tenían dos opciones: decir que querían la Mitad del premio, lo que significaba repartirse el premio entre los dos, o que querían el Doble, lo que significaba que querían quedarse con todo el premio. Los jugadores tomaban su decisión simultáneamente sin conocer, por tanto, la elección del rival.

- Si ambos jugadores elegían Mitad, cada uno recibía 12.000 €.
- Si ambos elegían Doble, nadie ganaba nada.
- Por último, si uno decía Doble y el otro Mitad, el primero ganaba 24.000 € y el segundo nada.

En este juego, cada jugador tenía que convencer a su rival de que cooperar y repartirse el premio era beneficioso. El problema que existía es que nada obligaba a respetar los acuerdos. Si algún jugador no respetase el acuerdo, el otro no podría impedírselo. Durante el tiempo en que se emitió el programa, la mayoría de las veces se obtuvo como resultado que ambos jugadores declaraban doble, por lo que nadie ganaba nada. Cada jugador intentaba convencer a su rival de que cooperase, con la intención de no cumplir el acuerdo y llevarse todo el premio. Para explicar el resultado de este juego construimos primero la matriz de pagos:

		Jugador B	
		Mitad	*Doble*
Jugador A	*Mitad*	12.000, 12.000	0, 24.000
	Doble	24.000, 0	0, 0

Se puede comprobar que los dos jugadores tienen una estrategia dominante (débil): elegir Doble. Esta estrategia asegura a cada jugador pagos mayores o iguales que la otra estrategia, sea lo que sea lo que elige el otro jugador. Luego hay un equilibrio en estrategias dominantes: {Doble, Doble}. Cada jugador gana 0 €, cuando cooperando habría podido ganar 12.000 €.

13.3. LA REFORMA DE LAS PENSIONES.

Todos los partidos políticos argumentan que el sistema actual de pensiones no es sostenible y que en un futuro puede haber problemas para pagarlas. A pesar de esta afirmación, ninguno de los partidos que ha llegado al poder ha realizado una reforma sustancial del sistema de pensiones. El motivo es que el colectivo de pensionistas es numeroso, por lo que el partido que emprendiera tal reforma perdería con alta probabilidad las siguientes elecciones.

Para analizar formalmente la cuestión anterior, vamos a considerar que hay dos partidos políticos que están compitiendo en unas elecciones. Reformar el sistema de pensiones es importante para el futuro del país, por lo que los partidos deben decidir si proponen una reforma de las pensiones o no. Cada partido prepara su programa electoral sin conocer el programa del otro (juego simultáneo). El principal objetivo de cada partido es ganar las elecciones. Los dos partidos anuncian simultáneamente en ruedas de prensa sus programas al comienzo de la campaña electoral. Cada partido tiene dos estrategias: proponer una reforma del sistema de pensiones (Reformar) o no proponerla (No reformar). Por ello hay cuatro pares de estrategias. Las vamos a valorar, asignando pagos mayores cuanto más valorada sea la estrategia. Numeramos los pagos de 1 a 4.

- Para cada partido lo mejor es no proponer una reforma y que la proponga el rival, ya que así se gana las elecciones. El partido que no propone la reforma obtiene el pago más alto, 4, mientras que el que la propone obtiene el pago más bajo, 1.

- Otra posibilidad es que ambos propongan una reforma. En este caso, se reformaría el sistema de pensiones, lo que es bueno para los dos partidos, que obtendrían pago 3. En este caso las elecciones se decidirían en base a otras promesas electorales.

- Por último, si ningún partido propone una reforma, no se reformaría el sistema de pensiones y las elecciones se decidirían en base a otras promesas electorales. Esta situación no es buena para los partidos, por lo que ambos obtendrían pago 2.

La matriz de pagos del juego es la siguiente.

		Partido B	
		Reformar	*No reformar*
Partido A	*Reformar*	3, 3	1, 4
	No reformar	4, 1	2, 2

En este juego los dos partidos tienen una estrategia dominante (fuerte): no proponer una reforma del sistema de pensiones. Por ello, el resultado del juego es que no hay reforma. Sin embargo, si cooperasen y propusieran un acuerdo de reforma de las pensiones ambos partidos estarían mejor. El problema es que, aunque los partidos lleguen un acuerdo para hacer una reforma del sistema de pensiones, nada garantiza que lo cumplan. El día que comience la campaña electoral y se hagan públicos los programas, los partidos podrían no respetar el acuerdo para intentar ganar las elecciones.

13.4. DESMANTELAMIENTO DEL ARSENAL NUCLEAR

Vamos a analizar la situación histórica que se planteó después de la guerra fría en la cual Estados Unidos (EEUU) y la antigua Unión Soviética (URSS) tenían que decidir si desmantelaban sus arsenales nucleares. Cada país tenía dos estrategias: desmantelar su arsenal nuclear o no desmantelarlo. Por ello, hay cuatro pares de estrategias. Valoramos las posibilidades de 1 a 4, denotando con un número más alto que la opción es mejor.

- Lo mejor para cada país es no desmantelar su arsenal (pago 4) y que el otro si lo destruya (pago 1).

- Una opción intermedia es que ambos desmantelen sus arsenales (pago 3 para ambos).

- Una opción peor que la anterior es que nadie destruya su arsenal (pago 2 para ambos.

La matriz de pagos del juego es la siguiente.

		URSS	
		Desmantelar	*No desmantelar*
EEUU	*Desmantelar*	3, 3	1, 4
	No desmantelar	4, 1	2, 2

No desmantelar el arsenal nuclear es una estrategia dominante (fuerte) para ambos países. Luego el resultado del juego es que ninguno de los países desmantela su arsenal nuclear. Este juego presenta la situación del dilema del prisionero. Ambos países están mejor si los dos destruyen su arsenal que si ninguno lo hace, pero ninguno de ellos desmantela su arsenal debido al miedo a que el otro no lo haga, lo que le dejaría totalmente desprotegido.

13.5. DESTRUIR LA COSECHA.

Hay dos agricultores, *A* y *B*, que producen manzanas y que abastecen un mercado local. La cosecha de manzanas de ese año ha sido de 10 toneladas. Cada uno de los agricultores produce 5 toneladas. Los agricultores saben que cuantas menos manzanas lleven a vender al mercado, más caro pueden venderlas. Si los agricultores pueden ganar más dinero destruyendo una parte de su cosecha, ya que aumenta el precio de mercado de las manzanas, ¿por qué no lo hacen?

Vamos a responder a la pregunta anterior planteando un juego sencillo. Suponemos que los agricultores acuerdan destruir la mitad de su cosecha (es decir, 2.5 toneladas cada uno). Este acuerdo no es vinculante, ya que no pueden comprometerse por escrito a destruir la mitad de su cosecha para elevar los precios de las manzanas (es ilegal). Suponemos que la demanda de manzanas en el mercado local es tal que si entre los dos ofrecen 5 toneladas (es decir, los dos respetan el acuerdo), el precio de cada tonelada es 1000 €. Si entre los dos venden 7.5 toneladas (es decir, sólo uno respeta el acuerdo), el precio de cada tonelada baja a 700 €. Por último, si entre los dos venden 10 toneladas (es decir, nadie respeta el acuerdo), el precio de cada tonelada baja a 450 €.

La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Agricultor B 2.5 *toneladas*	*Agricultor B* 5 *toneladas*
Agricultor A	2.5 *toneladas*	2500, 2500	1750, 3500
Agricultor A	5 *toneladas*	3500, 1750	2250, 2250

- Si se venden 5 toneladas en total, cada agricultor gana: 2.5x1000=2500.
- Si se venden 7.5 toneladas en total, el agricultor que vende 2.5 toneladas gana: 2.5x700=1750; el agricultor que vende 5 toneladas gana: 5x700=3500.
- Por último, si se venden 10 toneladas en total, cada agricultor gana: 5x450=2250.

Este juego tiene la estructura del dilema del prisionero: aunque los dos agricultores pueden ganar más manteniendo el acuerdo de destruir la mitad de la cosecha, para los dos es una estrategia dominante vender sus 5 toneladas de manzanas. Esto lleva a que no se mantenga el acuerdo y que, por tanto, los agricultores no cooperen. Como resultado, en equilibrio ambos venden 5 toneladas de manzanas.

14. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.

Los ejercicios de auto evaluación propuestos tienen como objetivo que cada alumno compruebe si es capaz de identificar cuándo se da el dilema del prisionero en un juego.

14.1. EJERCICIO 1. EL JUEGO DE LAS GASOLINERAS

Considere una variante del juego de la guerra de precios entre las gasolineras en la que sólo es posible fijar dos precios: 76 y 77. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Gasolinera B	
		76	77
Gasolinera A	76	500, 500	1100, 0
	77	0, 1100	1000, 1000

Verifique que este juego lleva a un dilema del prisionero. Explique.

14.2. Ejercicio 2. Los vertidos en el lago

Dos ciudades vecinas están situadas en la orilla de un lago. Vierten sus residuos en dicho lago, lo que lo contamina. Tienen que decidir si limpian sus vertidos o si no lo hacen.

- Si ambas ciudades limpian sus vertidos, ambas obtienen pagos 2. Aunque tienen que pagar la limpieza de los vertidos, disfrutan de un lago limpio.

- Si ninguna ciudad limpia sus vertidos, ambas obtienen pagos –2. Aunque no tienen costes de limpiar, el lago está contaminado y no pueden disfrutar de él.

- Si sólo una ciudad limpia sus vertidos, ésta obtiene utilidad –3, ya que paga el coste de limpiar sus vertidos pero no puede disfrutar del lago completamente limpio. La ciudad que no limpia sus vertidos obtiene utilidad 3, ya que no paga el coste de la limpieza y el lago no está muy contaminado.

Preguntas:

1. Forme la matriz de pagos del juego.

2. ¿Presenta este juego la estructura del dilema del prisionero? Explique.

15. JUEGOS SUCESIVOS O SECUENCIALES

Los juegos analizados hasta ahora son juegos en los que cada jugador toma su decisión sin conocer la elección de su rival, es decir, los jugadores eligen simultáneamente. Sin embargo, en los juegos secuenciales o sucesivos primero elige un jugador y después de observar su elección elige el otro. Un ejemplo es el juego del ajedrez: primero eligen blancas, luego negras, y así sucesivamente. Para analizar este tipo de juegos se les representa en forma extensiva.

15.1. LA FORMA EXTENSIVA DE UN JUEGO

La forma extensiva de un juego especifica:

• el orden en que eligen los jugadores,

• el conjunto de elecciones posibles de cada jugador y la información de que disponen cuando les toca elegir,

• los pagos en función de las elecciones.

Vamos a considerar un juego en el que hay dos empresas, *A* y *B*, que tienen que decidir de manera secuencial si realizan una inversión. La situación del juego se representa mediante un **árbol**. El árbol del juego es el siguiente:

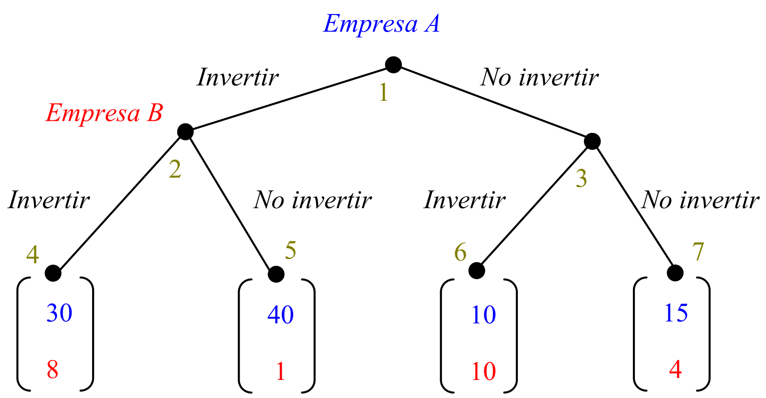


Figura 9. Juego sucesivo

Suponemos que toda la estructura del árbol es **información común**, lo que significa que cada empresa conoce la estructura del árbol y además sabe que su rival también la conoce.

Este árbol representa una situación en la que:

- Primero elige la empresa *A* y luego elige la *B*. La empresa *B* observa la elección de la *A* antes de tomar su propia decisión.

- Las opciones de cada empresa, cuando le toca elegir, son dos: invertir o no invertir.

Los "puntos gordos" que aparecen en el árbol se denominan nodos; están numerados del 1 al 7.

> Un **nodo** es un punto del juego en el que un jugador toma una decisión o el juego se acaba.

Los nodos 1 a 3 son **nodos de decisión** ya que en ellos alguna de las empresas toma una decisión. Los nodos 4 a 7 son **nodos terminales** ya que en ellos el juego se acaba.

- En el nodo 1, la empresa *A* tiene que elegir entre invertir o no invertir.

- En el nodo 2, la empresa *B* observa que la *A* ha decidido invertir; dada la decisión tomada por su rival, *B* tiene dos opciones: invertir o no invertir.

- En el nodo 3, la empresa *B* observa que la *A* ha decidido no invertir; dada esta decisión, *B* tiene dos opciones: invertir o no invertir.

- En los nodos 4 a 7 el juego se acaba.

Los pagos que recibe cada empresa se muestran en los vectores de pagos. Por ejemplo, si *A* elige invertir en el nodo 1 llegamos al nodo 2. En este nodo, si *B* elige invertir llegamos al nodo terminal 4. Los pagos que obtienen las empresas son:

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{pagos de } A \\ \rightarrow \text{pagos de } B \end{array}$$

La forma extensiva también se puede utilizar para representar **juegos simultáneos**. Consideramos el juego de la inversión de la figura 9, pero suponiendo que ambas empresas eligen a la vez. El árbol del juego es el siguiente:

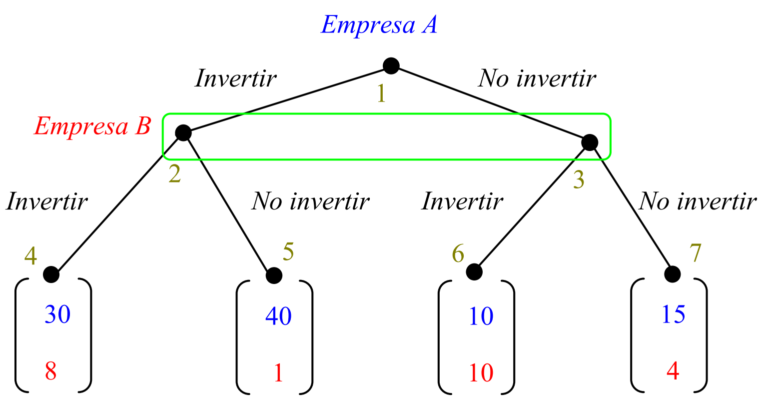


Figura 10. Juego simultáneo

El óvalo que rodea los nodos 2 y 3 indica que la empresa *B* no conoce toda la información. Estos dos nodos, al estar dentro del óvalo, no se pueden distinguir. Es decir, cuando le toca elegir a la empresa *B* no sabe si está en el nodo 2 o en el 3, por lo que no sabe si la empresa *A* ha elegido invertir o no invertir. La empresa *A* elige primero sin saber la elección de la *B*, ya que la elección de esta última no se toma hasta que no ha elegido la *A*. Por tanto, cada empresa elige sin conocer la elección de su rival, por lo que es como si eligieran simultáneamente.

Existe **información perfecta** en un juego cuando los jugadores saben en que nodo del árbol están cuando les toca elegir. En el juego de la figura 9 las dos empresas saben en que nodo están cuando les toca elegir, por lo que existe información perfecta. Sin embargo, en el juego de la figura 10, la empresa *B* no sabe en que nodo está cuando le toca elegir, por lo que no existe información perfecta.

Cuando consideramos juegos secuenciales en los que existe información perfecta, el concepto de equilibrio adecuado es el Equilibrio Perfecto en Subjuegos (EPS). Este equilibrio es un refinamiento del equilibrio de Nash que elimina algunas de sus deficiencias. La idea de este equilibrio es seleccionar equilibrios de Nash que exijan que la conducta de cada jugador sea siempre óptima.

Para obtener el EPS hay que calcular primero las estrategias de los jugadores. En el caso de los juegos sucesivos, las estrategias de los jugadores son más complejas que en el caso de los juegos simultáneos. En estos últimos, las estrategias de los jugadores coinciden con sus elecciones.

Una **acción o elección** de un jugador es la decisión que toma en un nodo concreto del árbol del juego.

En el juego de la figura 10 los dos jugadores tienen que tomar una única decisión, por ello estrategias y elecciones coinciden. En el caso de los juegos sucesivos las elecciones y las estrategias no tienen porqué coincidir.

La **estrategia** de un jugador es una lista de acciones que incluye una acción para cada uno de los nodos que el jugador puede distinguir (y en los que potencialmente podría tener que tomar una decisión).

En los juegos sucesivos las estrategias de los jugadores pueden recoger más de una acción. En el juego de la figura 9, la empresa *B* tiene que pensar lo que haría en el nudo 2 y lo que haría en el nudo 3. Por ello, la estrategia de la empresa *B* debe mostrar dos elecciones, una en cada nudo.

15.2. EL EQUILIBRIO PERFECTO EN SUBJUEGOS

El concepto de equilibrio adecuado para juegos sucesivos es el Equilibrio Perfecto en Subjuegos. A continuación vamos a ver la notación necesaria para definir este concepto de equilibrio. Definimos un **subjuego** como un subconjunto del árbol inicial tal que:

1. Sabemos con certeza en que nodo comienza el subjuego.

Un subconjunto de un árbol como el mostrado en la figura 11 no es un subjuego, porque el jugador que tiene que elegir no sabe con certeza en que nodo está cuando le toca elegir. Puede estar en los nodos 2 o 3, pero lo desconoce.

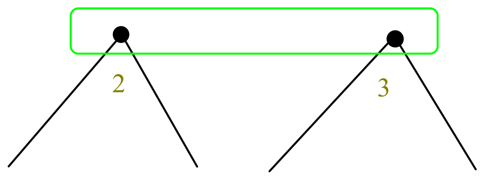


Figura 11.

2. Si un nodo está en el juego, también lo están sus sucesores. Los sucesores de un nodo son aquellos que tienen lugar en el árbol, una vez que el nodo ha sido alcanzado.

En la figura 12, los nodos 2 y 3 son sucesores del nodo 1; los nodos 2 y 3 no tienen sucesores. El subconjunto del árbol rodeado en la figura 12 no es un subjuego porque 2 es un sucesor de 1 y no se ha incluido.

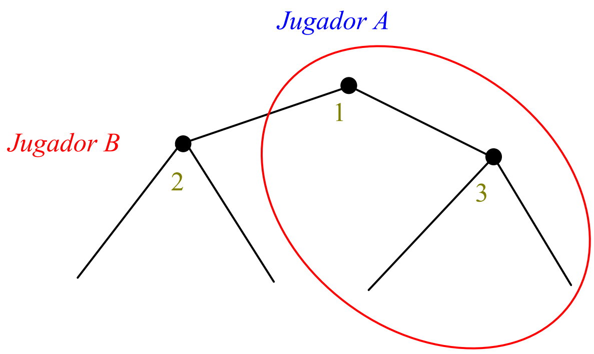


Figura 12.

El juego representado en la figura 12 tiene tres subjuegos: el que comienzan en el nodo 1 (incluyendo sus sucesores), el que comienza en el nodo 2 y el que comienza en el nodo 3. Los representamos en la figura 13 rodeándolos con óvalos.

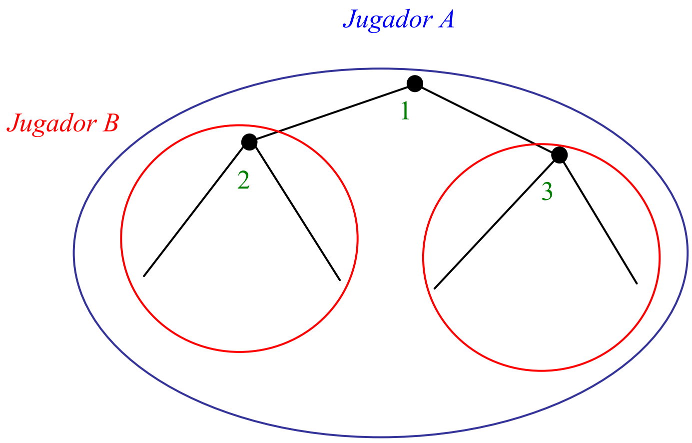
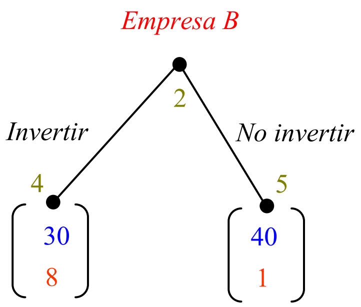


Figura 13.

Dada la notación anterior, podemos definir el EPS:

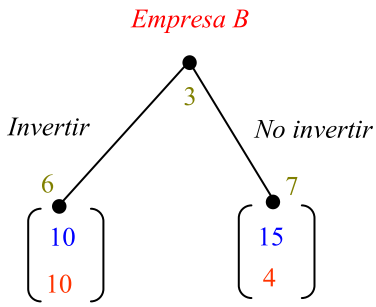
Un **Equilibrio Perfecto en Subjuegos** es un conjunto de estrategias, una para cada jugador, tales que inducen un equilibrio de Nash en cada subjuego.

En el EPS se requiere que las estrategias estén en equilibrio cualquiera que sea la localización (subjuego) en el árbol. Vamos a calcular el EPS para el juego de la inversión, en el caso en que los jugadores eligen secuencialmente (figura 9). En juegos de información perfecta, la manera de obtener el EPS es **resolviendo hacia atrás**, es decir, empezando desde el final del juego. Como acabamos de ver, este juego tiene tres subjuegos. Empezamos por el subjuego que comienza en el nodo 2:



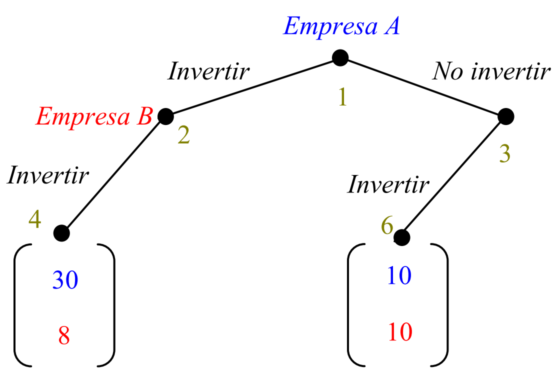
• Llegamos a este subjuego si la empresa *A* ha elegido invertir en el nodo 1. En el subjuego que comienza en el nodo 2 elige *B*. Su elección óptima es invertir ya que le da un mayor pago que no invertir (8>1). Luego la respuesta óptima de *B*, ante el hecho de que *A* ha invertido, es invertir.

Subjuego que comienza en el nodo 3:



• Llegamos a este subjuego si la empresa *A* ha elegido no invertir en el nodo 1. En el subjuego que comienza en el nodo 3 elige *B*. Su elección óptima es invertir ya que le da mayor pago que no invertir (10>4). Luego la respuesta óptima de *B*, dado que *A* ha decidido no invertir, es invertir.

La empresa *A* es la primera en tomar una decisión. Sabe que su rival es racional, por lo que siempre reaccionará de manera óptima. Esto significa que si *A* decidiera invertir, *B* respondería invirtiendo (nodo 2), mientras que si *A* decidiera no invertir, *B* también respondería invirtiendo (nodo 3). Responder con otra opción implicaría una conducta no óptima de *B*, es decir una conducta que no le genera los mayores pagos posibles. Hay que recordar que las estrategias de equilibrio deben inducir un equilibrio de Nash en cada subjuego, lo que significa que deben indicar la mejor respuesta de cada empresa en cada subjuego. Luego para saber la decisión de la empresa *A* analizamos el subjuego que comienza en el nodo 1, pero ignorando las respuestas no óptimas de *B* (las quitamos del árbol del juego):



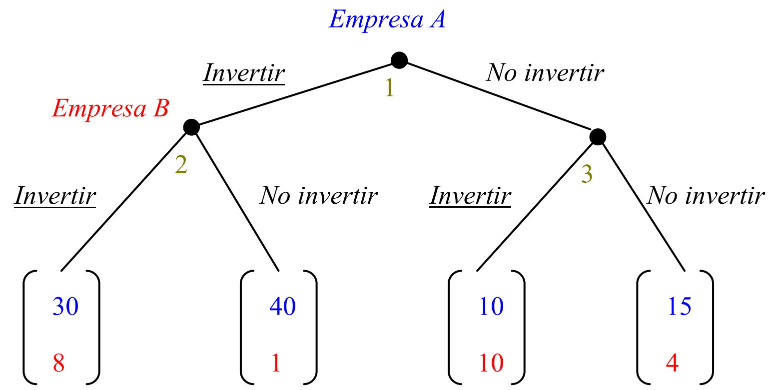
• En el nodo 1, si la empresa *A* elige invertir llegamos al nodo 4 que indica que gana 30. Si *A* elige no invertir llegamos al nodo 6 que señala que gana 10. Por lo tanto, tomará la decisión de invertir.

El resultado del juego es que ambos invierten, llegando al nodo 4, cuyo vector de pagos indica que la empresa *A* gana 30 y la *B* obtiene 8. En este juego, la empresa *A* elige primero y su estrategia óptima es invertir. La empresa *B* elige en segundo lugar. Elige su estrategia **antes** de saber en qué nodo se encuentra. Por ello tiene que pensar una respuesta para cada uno de los nodos en los que pueda tener que elegir. Si está en el nodo 2, su elección óptima es invertir; si está en el nodo 3, su elección óptima es también invertir. La estrategia de *B* tiene dos componentes, uno para cada uno de los nodos en que pueda tener que tomar una decisión: (elige Invertir en el nodo 2, elige Invertir en el nodo 3). El Equilibrio Perfecto en Subjuegos es:

elección de *A* en el nodo 1	elección de *B* en el nodo 2	elección de *B* en el nodo 3
↓	↓	↓
{Invertir,	(Invertir,	Invertir)}.

La senda de equilibrio, es decir, la elección que han tomado los jugadores, es Invertir-Invertir. Los pagos que reciben los jugadores son (30, 8).

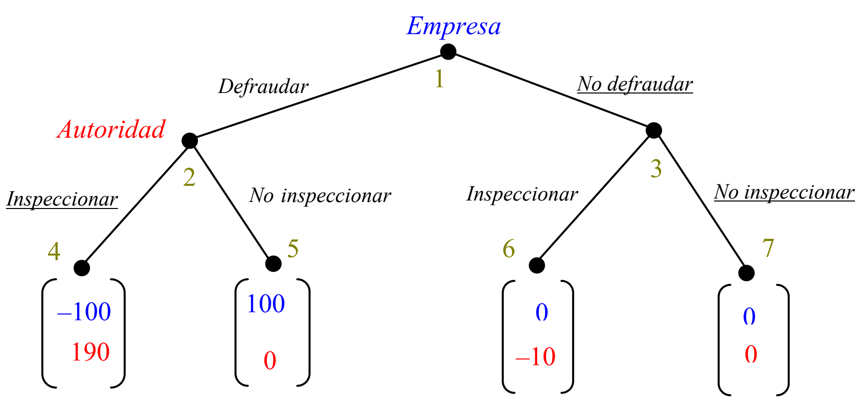
En la práctica, una manera más fácil de calcular el EPS, una vez entendido el concepto, es ir subrayando en el árbol las respuestas óptimas de los jugadores en cada subjuego. En el nodo 1 la empresa *A* elige invertir, luego subrayamos esta elección. En el nodo 2 la empresa *B* elige invertir, luego subrayamos esta acción. Por último, en el nodo 3 la empresa *B* elige invertir, luego subrayamos esta elección. Las tres elecciones subrayadas muestran el EPS.



15.3. REDUCIR LA CALIDAD DE UN PRODUCTO.

Supongamos el caso de una empresa que debe decidir si realiza una acción que perjudica a los consumidores; por ejemplo, reducir la calidad de un producto (defraudar). Esta acción le genera un beneficio monetario extra de valor 100. La autoridad puede realizar una inspección. El coste de la inspección es 10. Si la empresa ha defraudado y hay inspección, se detecta el fraude y la empresa paga una multa de valor 200. La empresa obtendría 100 – 200 = –100; la autoridad ingresaría: 200 – 10 = 190. Si la empresa no ha defraudado obtiene 0. En este caso, si hay inspección no hay multa; los pagos de la autoridad son el coste de la inspección, –10. Si no hay inspección, la autoridad obtiene 0.

Supongamos que la autoridad observa si el fraude tuvo lugar antes de decidir si inspecciona. El árbol del juego es el siguiente:



Resolvemos por inducción hacia atrás empezando desde el final del juego.

• En el subjuego que comienza en el nodo 2 decide la autoridad. Su elección óptima es inspeccionar, ya que en ese caso gana 190, mientras que no inspeccionando gana 0.

• En el subjuego que comienza en el nodo 3 decide la autoridad. Su elección óptima es no inspeccionar, ya que en ese caso gana 0, mientras que inspeccionando gana –10.

• Como la empresa sabe que la autoridad es racional, si defrauda (llegamos al nodo 2), habrá inspección; si no defrauda (llegamos al nodo 3), no habrá inspección. Defraudando obtiene –100 y no defraudando, 0. Luego su elección será no defraudar.

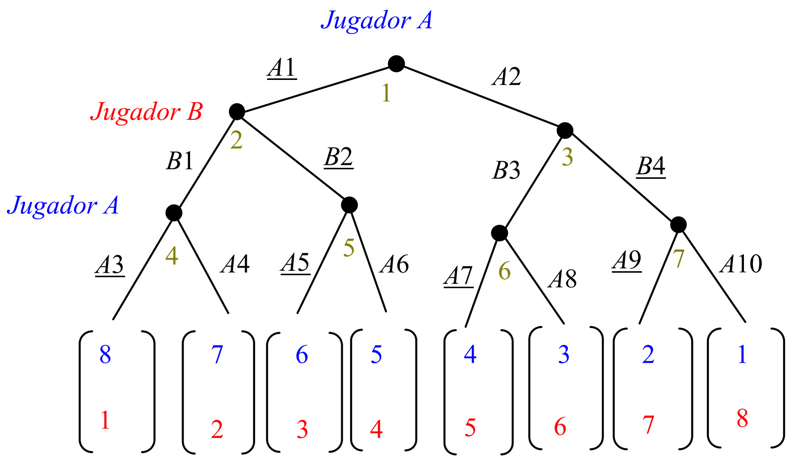
El Equilibrio Perfecto en Subjuegos es:

{No defraudar, (Inspeccionar, No inspeccionar)}.

El EPS indica que en el nodo 1 la empresa *A* elige no defraudar, por lo que llegamos al nodo 3. En el nodo 3 la autoridad elige no inspeccionar (segundo componente de su estrategia), lo que nos lleva al nodo terminal 7. Por tanto, la empresa no defraudará y no habrá inspección. El resultado es fácilmente previsible ya que la autoridad toma la decisión después de observar la conducta de la empresa. Por ello, en caso de que la empresa defraude habría inspección, y si no defrauda no habría inspección.

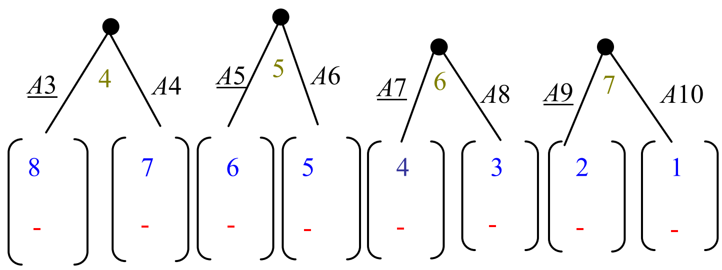
15.4. UN JUEGO MÁS COMPLEJO.

Consideramos un juego de dos jugadores, *A* y *B*, en el que comienza eligiendo *A*. Inicialmente, *A* puede elegir *A*1 ó *A*2. Después de observar la elección de *A* elige *B*, quien puede elegir *B*1, *B*2, *B*3 ó *B*4. Por último, después de observar la elección de *B* vuelve a elegir *A*; puede elegir *A*3, *A*4, *A*5, *A*6, *A*7, *A*8, *A*9 ó *A*10. La forma extensiva de este juego es la siguiente:



Dado que existe información perfecta, este juego tiene siete subjuegos. Resolvemos este juego por inducción hacia atrás. Empezamos resolviendo los subjuegos que comienzan en los nodos 4 a 7.

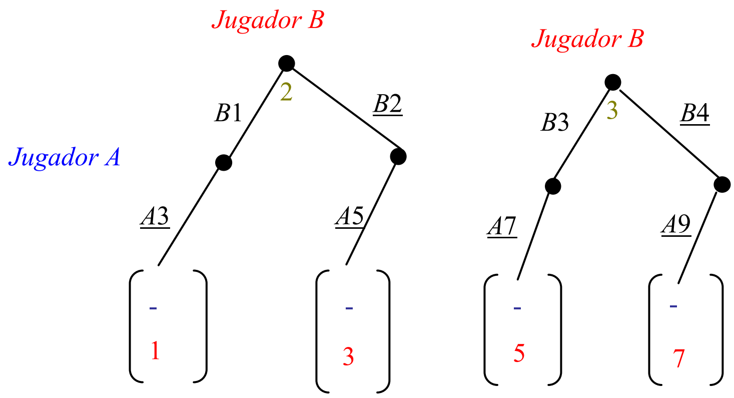
- En la última etapa elige el jugador *A*. En el subjuego que comienza en el nodo 4 elige *A*3 ya que da mayores pagos que *A*4 (8>7). En el subjuego que comienza en el nodo 5 elige *A*5 ya que da mayores pagos que *A*6 (6>5). En el subjuego que comienza en el nodo 6 elige *A*7 ya que da mayores pagos que *A*8 (4>3). Por último, en el subjuego que comienza en el nodo 7 elige *A*9 ya que da mayores pagos que *A*10 (2>1).



Una vez resueltos los subjuegos que comienzan en los nodos 4 a 7, resolvemos los subjuegos que comienzan en los nodos 2 y 3. En estos nodos elige el jugador *B*. El jugador *B* teniendo en cuenta que *A* siempre responde de manera óptima (lo que se ha indicado en el árbol subrayando las elecciones óptimas). Quitamos del árbol las elecciones no óptimas para que se siga mejor el razonamiento.

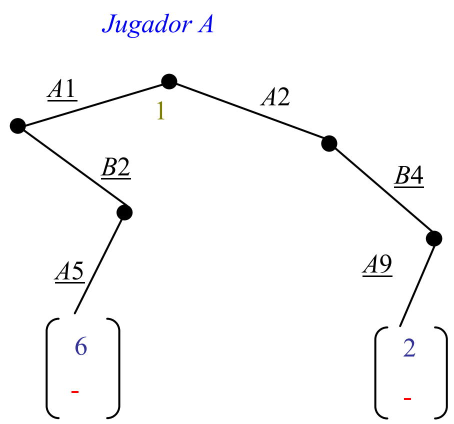
• En el subjuego que comienza en el nodo 2 el jugador *B* elige *B*2 ya que da mayores pagos que *B*1 (3>1).

• En el subjuego que comienza en el nodo 3 elige *B*4 ya que da mayores pagos que *B*3 (7>5).



Falta por resolver el subjuego que comienza en el nodo 1. Elige el jugador *A* teniendo en cuenta únicamente las respuestas óptimas de las etapas posteriores (las subrayadas).

• En el subjuego que comienza en el nodo 1 el jugador *A* elige *A*1 ya que da mayores pagos que *A*2 (6>2).



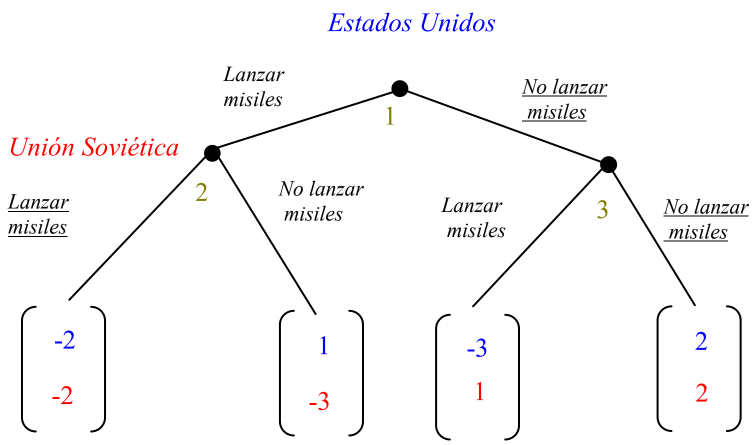
Teniendo en cuenta las elecciones óptimas de los dos jugadores en todos los nodos en que puedan tener que elegir, obtenemos que el EPS es:

$$\{(A1, A3, A5, A7, A9), (B2, B4)\}.$$

La senda de equilibrio, es decir la elección real que toman los jugadores, es $A1$-$B2$-$A5$. Los pagos de los jugadores son (6, 3).

15.5. LA DISUASIÓN NUCLEAR

Durante la guerra fría, Estados Unidos y la Unión Soviética realizaron una carrera armamentista. Cada país se armó de un arsenal suficientemente grande para asegurarse que podía tomar represalias si el otro lanzaba el primer ataque. Las opciones que tenía cada país eran lanzar sus misiles o no lanzarlos. Ilustramos el juego con el siguiente árbol de decisión:



El árbol muestra, por el motivo que sea, que Estados Unidos es el primero en tomar una decisión. La descripción de los pagos del juego en función de las elecciones de los jugadores es la siguiente:

- Si ambos países lanzan misiles nucleares, la radioactividad generada sería muy fuerte recibiendo ambos pago -2.

• Si sólo lanza sus misiles un país, la radioactividad total sería menor. El país que recibe los misiles obtendría pago -3. Está peor que en el caso anterior porque además del daño recibido queda a merced de su rival. El que lanza los misiles tendría beneficio 1, ya que no recibe daño y debilita fuertemente a su rival.

• Por último, si nadie lanza sus misiles ambos obtienen pago 2. En este caso, no se debilita al rival, pero se ha evitado una guerra nuclear.

Resolvemos el juego hacia atrás. Empezamos por los subjuegos que comienzan en los nodos 2 y 3, en los que decide la Unión Soviética.

• En el subjuego que comienza en el nodo 2, lanzar misiles le proporciona pago -2 a la Unión Soviética, mientras que no lanzarlos le genera pagos -3. Por ello elegiría lanzar sus misiles.

• En el subjuego que comienza en el nodo 3, lanzar misiles le genera pago 1 a la Unión Soviética, mientras que no lanzarlos le proporciona pagos 2. Por ello elegiría no lanzar sus misiles.

Hay que resolver ahora el subjuego que comienza en el nodo 1. En este subjuego decide Estados Unidos sabiendo que su rival es racional y que responde óptimamente.

• Si elige lanzar misiles, dado que la respuesta óptima de la Unión Soviética es lanzar misiles, obtendría pago -2. Si elige no lanzar misiles, dado que la respuesta óptima de la Unión Soviética es no lanzar misiles, obtendría pago 2. Como resultado, Estados Unidos elige no lanzar sus misiles.

El EPS de este juego es:

{No lanzar misiles, (Lanzar misiles, No lanzar misiles)}.

Ninguno de los países lanza sus misiles ya que se han dotado de mecanismos de respuesta automáticos. Es decir, en caso de ataque por el rival, la represalia es automática. Esto lleva a que Estados Unidos tome la decisión de no atacar a la Unión Soviética. La problemática de las represalias automáticas es que podrían haber llevado a una guerra nuclear, como ilustra por ejemplo la novela “On the Beach” (N. Shute, 1972, Longman Group, Hong Kong), que narra el holocausto nuclear que surge debido a que ambos países creen que Estados Unidos lanza sus represalias a la Unión Soviética cuando recibe un ataque nuclear de un pequeño país terrorista y que por error adjudica a la Unión Soviética. A pesar de los presagios agoreros de esta novela y de otras que se han publicado, parece que el mecanismo de represalias automáticas ha llevado a evitar una guerra nuclear.

15.6. DISUASIÓN ESTRATÉGICA A LA ENTRADA: INVERSIÓN EN CAPACIDAD.

La literatura sobre Organización Industrial denomina disuasión estratégica a la entrada a aquella que busca alterar las expectativas de los potenciales rivales sobre la forma en que responderá la empresa cuando vea amenazada su posición en el mercado.

Vamos a analizar la situación suponiendo que tenemos un mercado abastecido por una empresa monopolista (empresa establecida). Esta empresa está obteniendo beneficios extraordinarios, por lo que hay una empresa que está estudiando la posibilidad de entrar en el mercado (entrante), compitiendo así con la empresa establecida. Para obtener ventaja, la empresa establecida puede realizar una inversión que aumente su capacidad productiva. Este aumento de la capacidad productiva busca hacer más competitivo el mercado en caso de entrada. Para decidir si hay entrada, la empresa entrante potencial tiene que pensar cual será el equilibrio resultante en caso de entrada. Los pagos de los jugadores en función de sus elecciones son los siguientes:

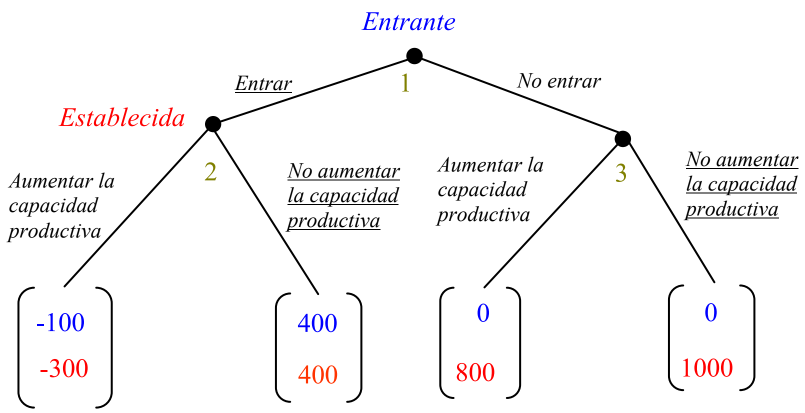
- Si no hay entrada, la empresa establecida sigue siendo monopolista en el mercado. Si no aumenta su capacidad productiva obtiene beneficios 1000; al no haber entrada, la otra empresa obtiene 0.

- Si no hay entrada y el monopolista aumenta su capacidad productiva, sus beneficios se reducen debido a la inversión que ha tenido que realizar. Sus beneficios pasan a ser 800.

- Si hay entrada y el monopolista no aumenta su capacidad productiva, se reparten el mercado a partes iguales. La mayor competencia existente en el mercado hace que la cantidad a repartir sea menor que 1000. Suponemos que cada uno gana 400.

• Por último, si hay entrada y el establecido aumenta su capacidad productiva, la competencia en el mercado es excesiva, por lo que ambos tienen pérdidas. La entrante pierde 100; la establecida pierde una cantidad mayor, 300, debido a la inversión realizada.

El árbol del juego es el siguiente:



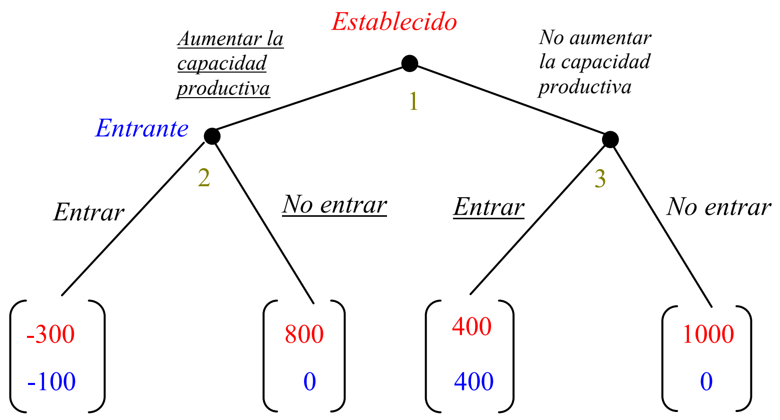
Resolvemos el juego por inducción hacia atrás. En el nodo 3 el establecido elige no aumentar su capacidad productiva y en el nodo 2 elige también elige no aumentar su capacidad productiva. El entrante sabe que estas son las respuestas óptimas del establecido, por lo que en el nodo 1 elegirá entrar. El EPS es:

{Entrar, (No aumentar capacidad productiva, No aumentar capacidad productiva)}.

Luego el resultado del juego es que el establecido no aumenta su capacidad productiva y hay entrada, lo que da un pago de 400 a cada jugador. Una vez que el rival potencial ha decidido entrar, la respuesta óptima del establecido es no aumentar su capacidad productiva ya que le generaría pérdidas.

El problema que se da en este juego es que la amenaza latente de incrementar la capacidad productiva en caso de entrada no es creíble. Una vez que se de la entrada la amenaza no se va a cumplir. Esto lo sabe el entrante potencial, por lo que ignorará dicha amenaza. En el caso de la disuasión nuclear, la amenaza de represalias era creíble ya que se cumpliría, lo que llevaba a que los países no ignorasen la amenaza, resultando en que nadie lanzaba sus misiles.

Para que la empresa establecida disuada realmente la entrada del rival tiene que hacer una amenaza creíble, es decir, en caso de entrada la amenaza tiene que cumplirse. En caso contrario, la amenaza no servirá. Una posibilidad es tomar la decisión de realizar la inversión antes de que haya entrada. La empresa establecida, entonces, lo que hará es adelantarse al entrante potencial, tomando su decisión el primero. El juego ahora es el siguiente:



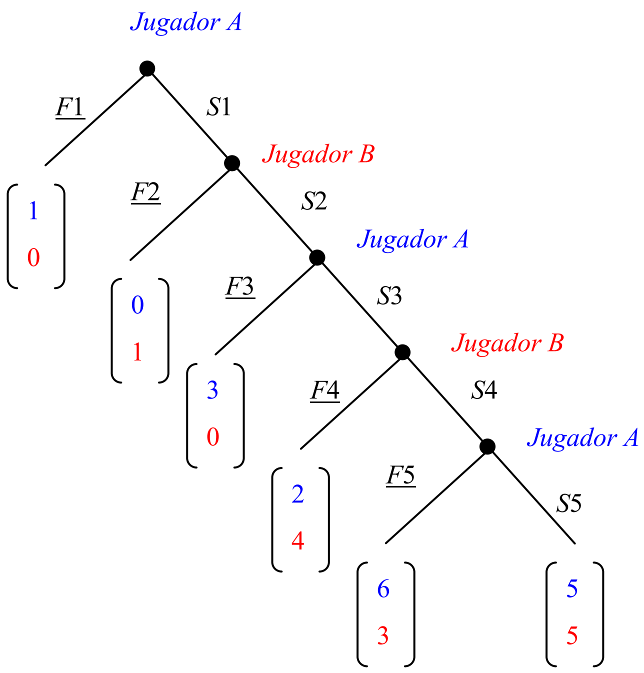
Resolvemos por inducción hacia atrás. En el nodo 3 el entrante elige entrar mientras que en el nodo 2 elige no entrar. El establecido sabe que estas son las respuestas óptimas del entrante, por lo que en el nodo 1 decidirá aumentar su capacidad productiva. El EPS es:

{Aumentar capacidad productiva, (No entrar, Entrar)}.

En este caso, la empresa establecida realizará la inversión que le permite aumentar su capacidad productiva. Esta inversión es observada por el rival, lo que le lleva a decidir no entrar en el mercado para evitar tener pérdidas. El establecido gana 800 y el entrante potencial obtiene 0.

15.7. CRÍTICA DE LA LÓGICA DE LA INDUCCIÓN HACIA ATRÁS.

Algunos economistas critican la lógica de la inducción hacia atrás, ya que podría llevar a resultados que no son buenos para los jugadores. Un ejemplo es el juego del ciempiés de Rosenthal. Una variación de este juego es la siguiente. Suponemos que los jugadores eligen de manera sucesiva varias veces. En primer lugar elige el jugador A entre $F1$ y $S1$. Si elige $F1$ el juego finaliza; si elige $S1$ el juego sigue y elige B. Este último puede elegir $F2$, con lo que el juego se acaba o $S2$. En este último caso, el juego continúa. Vuelve a elegir A; si elige $F3$ el juego finaliza mientras que si elige $S3$ el juego sigue. En este último caso vuelve a elegir B; si elige $F4$ el juego se acaba mientras que si elige $S4$ el juego sigue. En caso de continuar el juego elige A entre $F5$ y $S5$. Los pagos en función de las elecciones de los jugadores se representan en el árbol del juego.



Si resolvemos por inducción hacia atrás obtenemos que el EPS es:

$$\{(F1, F3, F5), (F2, F4)\}.$$

En su primera elección el jugador *A* elige finalizar el juego, por lo que los pagos de los jugadores son: (1, 0). Sin embargo, hay resultados en este juego que son mejor para ambos jugadores a la vez. Por ejemplo, {(*S*1, *S*3, *F*5), (*S*2, *S*4)} da pagos (6, 3) a los jugadores. Esto lleva a que el criterio de inducción hacia atrás no sea adecuado para este juego.

16. EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Los ejercicios de autoevaluación propuestos tienen como objetivo que cada alumno compruebe si es capaz de representar el árbol de un juego y calcular el Equilibrio Perfecto en Subjuegos.

16.1. EJERCICIO 1. EL JUEGO DEL RUIDO

En una escalera viven dos vecinos, Pedro y Pablo, uno al lado del otro. Pedro se levanta a las 7 de la mañana para ir a trabajar y le gusta poner la música alta, lo que molesta a su vecino que trabaja de noche y duerme de día. Cuando no le dejan dormir, Pablo se venga metiendo ruido de noche. Los pagos del juego, en función de las elecciones de los jugadores son los siguientes:

- Si Pedro pone música de día y Pablo mete ruido de noche, ninguno duerme, por loque ambos obtienen utilidad -4.

- Si Pedro pone música de día y Pablo no mete ruido de noche, solo duerme Pedro. El primero obtiene utilidad 4 y el último -8.

- Si Pedro pone no música de día y Pablo mete ruido de noche, solo duerme Pablo. El primero obtiene utilidad -8 y el último 2.

- Por último, si Pedro no pone música de día y Pablo no mete ruido de noche, ambos duermen. El primero obtiene utilidad 2 y el último 3.

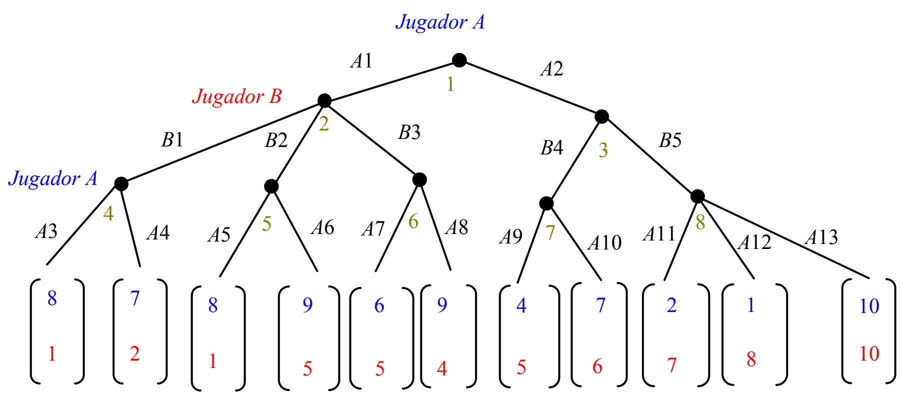
Preguntas:

1. Represente el árbol del juego.

2. Calcule el Equilibrio Perfecto en Subjuegos. Explique.

16.2. EJERCICIO 2.

Sea el siguiente juego en forma extensiva:



Pregunta:

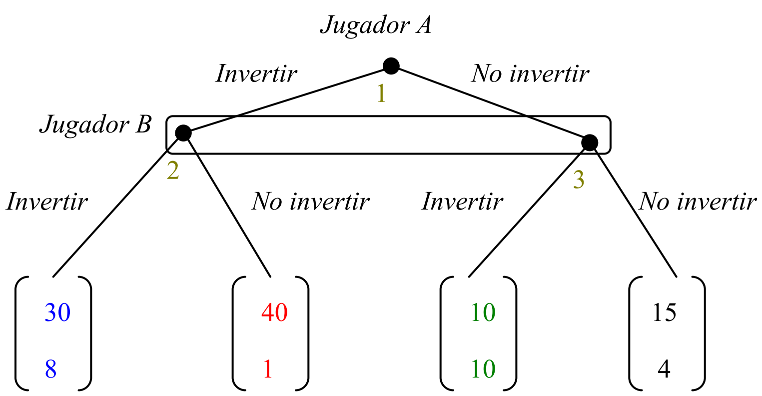
1. Calcule el Equilibrio Perfecto en Subjuegos. Explique.

17. PASO DE LA FORMA EXTENSIVA A LA NORMAL.

Para pasar un juego de la forma extensiva a la normal, lo primero que hay que hacer es identificar las estrategias de los jugadores. Hay que recordar el concepto de estrategia:

La **estrategia** de un jugador es una lista de acciones que incluye una acción para cada uno de los nodos que el jugador puede distinguir (y en los que potencialmente podría tener que tomar una decisión).

Supongamos el siguiente juego en el que los jugadores A y B deben decidir si llevan a cabo una inversión:



El jugador *A* elige primero, tomando una decisión únicamente en el nodo 1. Como tiene que tomar una decisión en un nodo únicamente, sus estrategias coinciden con sus elecciones, por lo que tiene dos estrategias:

- Invertir, sea lo que sea lo que elige *B*, ya que no lo observa.

- No invertir, sea lo que sea lo que elige *B*, ya que no lo observa.

Cuando le toca elegir al jugador *B* puede estar en el nodo 2 o en el 3. El jugador *B* no es capaz de distinguir en que nodo está, por lo que sus estrategias coinciden con sus elecciones. Sus estrategias son:

• Invertir, sea lo que sea lo que elige *A*, ya que no lo observa.

• No invertir, sea lo que sea lo que elige *A*, ya que no lo observa.

Cada jugador tiene dos estrategias, por lo que la matriz de pagos será dos por dos. Colocamos al jugador *A* en filas y al *B* en columnas. Faltaría por calcular los pagos de los jugadores en función de sus estrategias. Para ello simplemente hay que ver en el árbol los pagos que reciben los jugadores en función de sus elecciones, y luego ponerlos en la matriz de pagos.

• Si *A* y *B* eligen invertir, casilla superior izquierda de la matriz de pagos, siguiendo la senda de elecciones en el árbol vemos que *A* obtiene 30 y *B* obtiene 8.

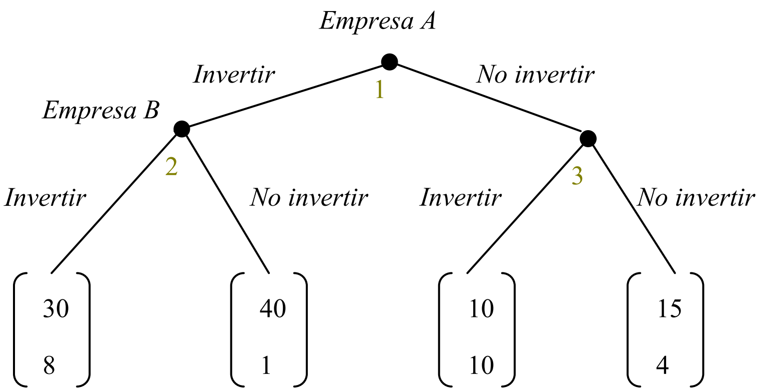
• Si *A* y *B* eligen no invertir, casilla inferior derecha de la matriz de pagos, siguiendo la senda de elecciones en el árbol vemos que *A* obtiene 15 y *B* obtiene 4.

• Si *A* elige invertir y *B* elige no invertir, casilla superior derecha de la matriz de pagos, siguiendo la senda de elecciones en el árbol vemos que *A* obtiene 40 y *B* obtiene 1.

• Si *B* elige invertir y *A* elige no invertir, casilla inferior izquierda de la matriz de pagos, siguiendo la senda de elecciones en el árbol vemos que *A* obtiene 10 y *B* obtiene 10.

		Jugador B	
		Invertir	*No invertir*
Jugador A	*Invertir*	30, 8	40, 1
	No invertir	10, 10	15, 4

Si consideramos ahora que los jugadores eligen secuencialmente, tomando su decisión primero el jugador A:



Al igual que en el juego simultáneo, el jugador *A* elige primero sin conocer la elección de *B*. Luego sus estrategias coinciden con sus elecciones. Tiene dos estrategias:

- Invertir, sea lo que sea lo que elige *B*, ya que no lo observa.

- No invertir, sea lo que sea lo que elige *B*, ya que no lo observa.

Para el jugador *B* el juego sucesivo es diferente al simultáneo. La diferencia radica en que en el juego sucesivo sabrá en qué nodo está cuando le toque elegir. Dado que el jugador *B* puede estar en los nodos 2 ó 3, lo que puede distinguir, su estrategia tiene dos componentes ya que tiene que indicar una elección para cada uno de los nodos en que puede estar. En cada nodo puede elegir invertir o no invertir.

El jugador *B* tiene cuatro estrategias. Hay que recordar que cada estrategia es una lista de acciones que incluye una acción por cada uno de los nodos que el jugador puede distinguir. Las estrategias del jugador *B* aparecen recogidas en la siguiente tabla:

elección en el nodo 2	**elección en el nodo 3**	**estrategia de B**
B elige Invertir: I	*B* elige Invertir: I	{I, I}
B elige Invertir: I	*B* elige No invertir: NoI	{I, NoI}
B elige No invertir: NoI	*B* elige Invertir: I	{NoI, I}
B elige No invertir: NoI	*B* elige No invertir: NoI	{NoI, NoI}

Cada estrategia de *B* indica una elección en cada uno de los nodos en que le toca elegir. Por ejemplo, la estrategia {NoI, I} indica que *B* elige no invertir en el nodo 2 (primer componente de la estrategia) y elige invertir en el nodo 3 (segundo componente de la estrategia).

Luego el jugador *A* tiene dos estrategias y el jugador *B* cuatro, por lo que la matriz de pagos del juego sería dos por cuatro:

		Jugador B			
		{*I*, *I*}	{*I*, *NoI*}	{*NoI*, *I*}	{*NoI*, *NoI* }
Jugador A	*Invertir*	30, 8	30, 8	40, 1	40, 1
	No invertir	10, 10	15, 4	10, 10	15, 4

Los pagos que aparecen en la matriz de pagos se calculan mirando en el árbol del juego los pagos de los jugadores en función de las diferentes acciones que elijan. Para ello hay que tener en cuenta cómo se ha definido la estrategia del jugador *B*: el primer componente de su estrategia es la respuesta ante el hecho de que *A* elige invertir, mientras que el segundo componente de su estrategia es la respuesta ante el hecho de que *A* elige no invertir.

- Si *A* elige la estrategia *Invertir* y *B* la estrategia {*I*, *I*}, estaríamos en la casilla superior izquierda de la matriz de pagos. Como *A* ha elegido invertir, llegamos al nodo 2. La respuesta de *B* en el nodo 2 viene dada por el primer componente de su estrategia: invertir. Los pagos de *A* son 30 y los de *B* son 8.

- Si *A* elige la estrategia *Invertir* y *B* la estrategia {*NoI, I*}, estaríamos en la tercera casilla de la fila superior de la matriz de pagos. Como *A* ha elegido invertir, llegamos al nodo 2. La respuesta de *B* en el nodo 2 viene dada por el primer componente de su estrategia: no invertir. Los pagos de *A* son 40 y los de *B* son 1.

• Si *A* elige la estrategia *No invertir* y *B* la estrategia {*NoI*, *NoI*}, estaríamos en la casilla inferior derecha de la matriz de pagos. Como *A* ha elegido no invertir, llegamos al nodo 3. La respuesta de *B* en el nodo 3 viene dada por el segundo componente de su estrategia: no invertir. Los pagos de *A* son 15 y los de *B* son 4.

• Si *A* elige la estrategia *No invertir* y *B* la estrategia {*NoI*, *I*}, estaríamos en la estaríamos en la tercera casilla de la fila inferior de la matriz de pagos. Como *A* ha elegido no invertir, llegamos al nodo 3. La respuesta de *B* en el nodo 3 viene dada por el segundo componente de su estrategia: invertir. Los pagos de *A* son 10 y los de *B* son 10.

• Los pagos de las demás casillas de la matriz de pagos se calculan de manera similar.

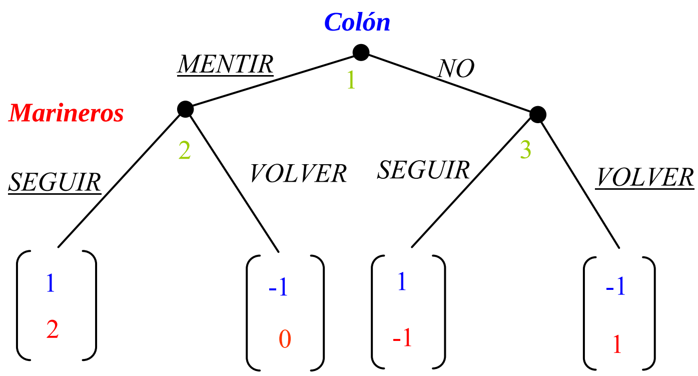
17.1. LA CONQUISTA DEL PARAISO

En la película del director de cine Ridley Scott, "1492. La conquista del Paraiso", Cristobal Colón convence a los Reyes Católicos para que le financien el intento de llegar a las indias occidentales por una nueva ruta, en dirección al oeste. La ruta tradicional, bordeando África, estaba controlada por otros países. Los reyes acceden a financiarle el viaje, ya que el coste es aproximadamente el de dos banquetes reales, y las ganancias potenciales son muchas ya que podrían acceder al comercio de especias y, según los relatos de Marco Polo, las riquezas existentes en las indias y China eran inmensas.

Para que le financien el viaje, Cristobal Colón tiene que engañar a los reyes y a los marineros que van a realizar el viaje. Colón afirma que se puede llegar a las indias en dirección al oeste en siete semanas. Para hacer esta afirmación se basa en textos de la época, aunque no hay ninguna prueba. Colón cree realmente que la duración del viaje es mayor. Los navegantes de la época no se aventuraban hacia el oeste ya que los métodos de navegación estaban aún por desarrollarse y era peligroso alejarse mucho de la costa. Además, la creencia de que la tierra era plana atemorizaba a muchos navegantes quienes pensaban que irían hacia un precipicio.

Trascurridas las siete primeras semanas del viaje aún no avistan la costa. Los marineros están impacientes y cansados. La comida y el agua se habían reducido a la mitad, por lo que había lo justo para volver a casa. La distancia a las indias es incierta, por lo que Colón se enfrentó a un dilema. Si dice la verdad a los marineros, es probable que se amotinen y quieran volver a casa. Para que continúe el viaje tiene que ocultar la verdad a los marineros.

La situación anterior puede modelarse como un juego. Colón tiene que decidir si miente a los marineros insistiendo en que llegarán pronto a tierra (MENTIR). De esta manera se asegura que no vuelven ya que no les quedarían alimentos suficientes para ello. La otra alternativa es decirles la verdad, es decir, que no sabe cuando llegarán a tierra aunque espera que sea pronto (NO MENTIR). Esto significaría que los marineros podrían querer volver. Nos enfrentamos a un juego sucesivo ya que Colón tiene que decidir si miente o si dice la verdad a los marineros antes de que estos tomen su decisión. Después de la decisión de Colón sobre si MENTIR o NO MENTIR, los marineros tienen que decidir si quieren SEGUIR el viaje o si prefieren VOLVER a casa. El árbol del juego es el siguiente:



Para Colón la peor situación posible es volver a casa, ya que no abriría la nueva ruta, por lo que le asignamos pago -1 tanto si dice la verdad como si miente. En caso de seguir, tanto si dice la verdad como si miente, se sale con la suya por lo que le asignamos pago 1, mayor que antes.

En el caso de los marineros, si Colón les dice la verdad (es decir, que no sabe cuánto tardarán en llegar a tierra) prefieren la seguridad de volver (pago 1) a la incertidumbre de seguir (pago -1). Si Colón les miente, convenciéndoles de que llegarán pronto a tierra, estarán mejor si siguen (pago 2) debido a las riquezas que esperan obtener que si se vuelven (pago 0).

Es fácil comprobar que el Equilibrio Perfecto en Subjuegos es {MENTIR, (SEGUIR, VOLVER)}, por lo que Colón no dice la verdad y el viaje continúa.

Vamos a calcular a continuación las estrategias de los jugadores para pasar posteriormente el juego a forma normal. En este juego, Colón toma su decisión primero sin conocer la elección de los marineros. Luego sus estrategias coinciden con sus elecciones. Tiene dos estrategias:

- Mentir, sea lo que sea lo que eligen los marineros, ya que no lo observa.
- No mentir, sea lo que sea lo que eligen los marineros, ya que no lo observa.

Cada estrategia de los marineros tiene dos componentes ya que tiene que indicar una elección para cada uno de los nodos en que pueden tener que tomar una decisión (nodos 2 y 3). En cada nodo pueden elegir seguir o volver. Los marineros tienen cuatro estrategias. Las estrategias de los marineros aparecen recogidas en la siguiente tabla:

elección en el nodo 2	**elección en el nodo 3**	**estrategia de B**
eligen seguir: S	eligen seguir: S	{S, S}
eligen seguir: S	eligen volver: V	{S, V}
eligen volver: V	eligen seguir: S	{V, S}
eligen volver: V	eligen volver: V	{V, V}

Cada estrategia de los marineros implica una elección en cada uno de los nodos en que les toca elegir. Por ejemplo, la estrategia {V, S} indica que los marineros eligen volver en el nodo 2 (primer componente de la estrategia) y eligen seguir en el nodo 3 (segundo componente de la estrategia).

Colón tiene dos estrategias y los marineros cuatro, por lo que la matriz de pagos del juego sería dos por cuatro:

		Marineros			
		{*S*, *S*}	{*S*, *V*}	{*V*, *S*}	{*V*, *V*}
Colón	*Mentir*	1, 2	1, 2	-1, 0	-1, 0
	No mentir	1, -1	-1, 1	1, -1	-1, 1

Los pagos recogidos en la matriz se calculan mirando en el árbol del juego los pagos de los jugadores en función de las diferentes acciones que elijan. Para ello hay que tener en cuenta cómo se ha definido la estrategia de los marineros: el primer componente de su estrategia es la respuesta ante el hecho de que Colón elige mentir, mientras que el segundo componente de su estrategia es la respuesta ante el hecho de que Colón elige no mentir.

- Si Colón elige la estrategia *mentir* y los marineros la estrategia {*S*, *S*}, estaríamos en la casilla superior izquierda de la matriz de pagos. Como Colón ha elegido mentir, llegamos al nodo 2. La respuesta de los marineros en el nodo 2 viene dada por el primer componente de su estrategia: seguir (*S*). Los pagos de Colón son 1 y los de los marineros son 2.

- Si Colón elige la estrategia *no mentir* y los marineros la estrategia {*V, S*}, estaríamos en la tercera casilla de la fila inferior de la matriz de pagos. Como Colón ha elegido no mentir, llegamos al nodo 3. La respuesta de los marineros en el nodo 3 viene dada por el segundo componente de su estrategia: seguir (*S*). Los pagos de Colón son 1 y los de los marineros son -1.

- Los pagos de las demás casillas de la matriz de pagos se calculan de manera similar.

17.2. CREAR UNA NUEVA EMPRESA

En las grandes ciudades es frecuente observar muchas empresas compitiendo por los mismos clientes. Por ejemplo, en una gran ciudad hay muchos supermercados, panaderías o farmacias. Sin embargo, en las pequeñas localidades es infrecuente observar la existencia de más de un supermercado, panadería o farmacia. Y cuando hay más de uno, la competencia por una reducida clientela suele causar que uno de ellos cierre. No es beneficioso que haya más de uno de estos negocios.

Vamos a analizar esta cuestión planteando un juego en el que dos empresarios rivales, *A* y *B*, están pensando si crear un supermercado o una panadería en una pequeña ciudad. Denotamos por entrar la decisión de crear la empresa y por no entrar la decisión de no crearla. Si cada empresario toma su decisión sin saber qué ha elegido su rival, nos enfrentamos al juego representado en la siguiente matriz de pagos:

		Empresario B	
		Entrar	*No entrar*
Empresario A	*Entrar*	-50, -50	100, 0
	No entrar	0, 100	0, 0

Los pagos de los jugadores en función de sus estrategias son los siguientes:

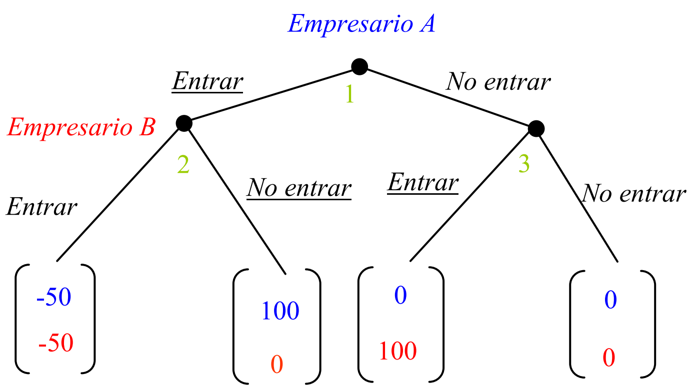
- Si un empresario decide entrar y su rival no lo hace, el que entra gana 100 y el que no entra gana 0.

- Si ninguno entra, nadie gana nada.

- Si ambos entran, la competencia es excesiva y ambos pierden 50.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash: {Entrar, No entrar}, {No entrar, Entrar}. Por lo tanto, en equilibrio sólo se creará una empresa. Sin embargo, dado que el juego es simétrico no sabemos quién crea la empresa. De hecho, si hay un fallo de coordinación, podría darse que no se crea ninguna empresa o, lo que es peor, que se creen las dos.

Si el juego fuese secuencial, y uno de los dos jugadores pudiera tomar primero su decisión, el juego tendría un único resultado. Suponemos que, por el motivo que sea, el empresario *A* es el primero en decidir. El juego ahora es el siguiente:



Resolviendo por inducción hacia atrás obtenemos que el EPS de este juego es: {Entrar, (No entrar, Entrar)}. Como solo puede haber una empresa en el mercado, la establece el empresario que decide primero. Este empresario hará publica su decisión de manera creíble (por ejemplo, empezando la construcción de la empresa) para que su rival lo observe y reaccione óptimamente no creando otra empresa.

17.3. EL MERCADO CINEMATOGRÁFICO ESPAÑOL

Esta sección está basada en el artículo de L. Orea, V. Fernández-Blanco y J. Prieto (2007): ¿Se coordinan más las grandes distribuidoras de cine en España?". Anuario de la Competencia (2007), Editorial Marcial Pons.

Uno de los rasgos característicos del mercado cinematográfico español es la importancia que en él tienen las cinco distribuidoras ligadas a los grandes estudios de Hollywood: Sony, Disney, Fox, Warner y Universal. Desde los años noventa, estas empresas dominan el mercado recaudando siempre más de dos tercios de los ingresos por taquilla y distribuyendo las películas de mayor éxito.

Orea et *al*. (2007) señalan que en mayo de 2006 el Tribunal de Defensa de la Competencia español multó con 2,4 millones de euros a esas cinco grandes distribuidoras por uniformizar las condiciones de exhibición de sus películas, produciéndose restricciones sobre la competencia. Estas distribuidoras establecían el mismo precio del alquiler a todos los exhibidores para sus películas más taquilleras. El Tribunal atribuyó esta similitud a una falta de competencia por las distribuidoras, que se coordinaban para elegir las fechas de estreno de sus películas. De hecho, entre las veinticinco películas con mayor recaudación en 2002, sus fechas de estreno sólo coincidieron en dos ocasiones. Si las distribuidoras compitieran entre sí, la posibilidad de coincidencia de dos grandes estrenos en un mismo día las llevaría a negociar precios más bajos con los exhibidores para lograr las salas de mayor aforo. Sin embargo, esta reducción difícilmente se puede producir si las distribuidoras se coordinan con sus competidores. La coordinación se vio facilitada gracias a la información que cada miembro de la Federación de Distribuidores Cinematográficos podía obtener a partir de la base de datos que dicha asociación puso en marcha en 1999. Entre otras cuestiones, en la base de datos se informaba sobre la fecha de estrenos futuros.

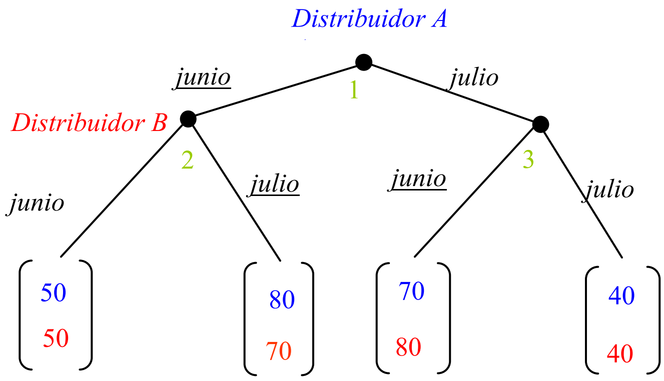
La fecha de estreno de una película es una variable clave ya que la explotación óptima de una película depende crucialmente de su fecha de lanzamiento. Hay que señalar que la recaudación semanal que se obtiene por una película se va reduciendo fuertemente según pasan las semanas de modo que, en las tres primeras semanas de exhibición una película puede obtener hasta el 75% de su recaudación total. Además, el comportamiento en el primer fin de semana es clave para la vida comercial posterior de la película. Por ello, la coincidencia en las fechas de estreno puede tener importantes efectos sobre los ingresos por taquilla de una película. Como resultado, para las distribuidoras de cine, la elección de la fecha de estreno de una película es una variable crucial para lograr los mayores ingresos por recaudación de sus estrenos.

La situación descrita puede modelarse como un juego. Por simplicidad suponemos que hay dos empresas distribuidoras: la A y la B. Tienen que decidir **simultáneamente** si estrenan la película en junio o en julio. Si las distribuidoras coinciden en la fecha en que se exhibe la película suponemos que cada una de ellas gana 50 millones de euros. Si las distribuidoras exhiben las películas en distintas fechas, no compiten por los clientes por lo que las dos ganan más. Suponemos que cada una de ellas gana 75 millones de euros. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Distribuidora B	
		junio	*julio*
Distribuidora A	*junio*	50, 50	75, 75
	julio	75, 75	50, 50

Es fácil comprobar que este juego tiene dos equilibrios de Nash: en cada uno de ellos una distribuidora exhibe su película en junio y la otra en julio. Dado que hay dos equilibrios de Nash, en ausencia de coordinación entre las distribuidoras deberían existir fallos de coordinación, por lo que alguna vez deberían haber fijado la misma fecha de exhibición. Dado que esto no ha sucedido en la realidad, parece que las empresas se han puesto de acuerdo en las fechas en que cada uno exhibe su película, evitando la coincidencia en una fecha.

El juego podría modelarse también de manera **sucesiva**. Suponemos que el exhibidor A, por el motivo que sea, puede tomar primero la decisión, publicando la fecha de exhibición en la base de datos de la Federación de Distribuidores Cinematográficos para que el otro distribuidor la observe antes de tomar su decisión. Para que haya un único equilibrio suponemos que en junio va más público al cine, por lo que la recaudación es mayor. Suponemos que si las dos películas se exhiben en junio cada distribuidor gana 50 millones de euros. Si las dos películas se exhiben en julio cada distribuidor gana 40 millones de euros. Por último, si una se exhibe en junio y la otra en julio, la primera gana 80 millones de euros y la segunda 70. El árbol del juego es el siguiente:



Es fácil comprobar que el Equilibrio Perfecto en Subjuegos es {junio, (julio, junio)}, por lo que el distribuidor A exhibe su película en junio y el B en julio. Por tanto, la publicación de las fechas de exhibición en la base de datos lleva a que se exhiban en fechas diferentes.

18. EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN.

El ejercicio de autoevaluación propuesto tiene como objetivo que cada alumno compruebe si es capaz de pasar de la forma extensiva de un juego a la normal.

18.1. EJERCICIO 1. EL JUEGO DEL RUIDO

En una escalera viven dos vecinos, Pedro y Pablo, uno al lado del otro. Pedro se levanta a las 7 de la mañana para ir a trabajar, y le gusta poner la música alta, lo que molesta a su vecino que trabaja de noche y duerme de día. Cuando no le dejan dormir, Pablo se venga metiendo ruido de noche. Los pagos de los jugadores, en función de sus elecciones, son los siguientes:

- Si Pedro pone música de día y Pablo mete ruido de noche, ninguno duerme, por lo que ambos obtienen utilidad -4.

- Si Pedro pone música de día y Pablo no mete ruido de noche, solo duerme Pedro. Pedro obtiene utilidad 4 y Pablo -8.

- Si Pedro no pone música de día y Pablo mete ruido de noche, solo duerme Pablo. Pedro obtiene utilidad -8 y Pablo 2.

- Por último, si Pedro no pone música de día y Pablo no mete ruido de noche, ambos duermen. Pedro obtiene utilidad 2 y Pablo 3.

Preguntas:

1. Represente el árbol del juego suponiendo que Pedro elige primero.

2. Represente el juego en forma normal.

19. LOS JUEGOS REPETIDOS.

Normalmente los juegos no suelen jugarse una única vez, se suelen repetir. Por ejemplo, en el dilema del prisionero los dos delincuentes pueden seguir cometiendo delitos, por lo que pueden volver a encontrase en el futuro en una situación semejante.

Consideremos de nuevo el dilema del prisionero. La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Prisionero B	
		Confesar	*No confesar*
Prisionero A	*Confesar*	–2, –2	2, –3
	No confesar	–3, 2	1, 1

En este juego, la estrategia cooperativa no confesar es lo mejor para ambos. Sin embargo, el hecho de que los dos jugadores tengan una estrategia dominante lleva a ambos a confesar. Supongamos ahora que el juego se repite dos veces, hoy y mañana. Lo que se decida mañana no depende de lo que se haya decidido hoy, ya que no afecta los pagos futuros. Dado que el juego es independiente de la historia pasada, cada vez que se juegue este juego obtendríamos el mismo resultado: ambos jugadores confiesan.

Cuando el juego se juega más de una vez, pueden surgir estrategias más complejas. En juegos experimentales se ha identificado una estrategia que puede llevar a que los jugadores cooperen, la estrategia del **ojo por ojo**. Consiste en que un jugador coopera mientras que su rival coopere, pero si alguna vez su rival no coopera, el jugador no cooperará nunca más.

Supongamos que el juego se repite un número finito de veces. En este caso, la estrategia del ojo por ojo no sirve para obtener la cooperación. Por ejemplo, si el juego se repite dos veces, a cada jugador le interesará cooperar (no confesar) la primera vez que juegan y no cooperar (confesar) la segunda, para aprovecharse del rival que seguiría cooperando en el segundo período. Los dos jugadores hacen este argumento (el juego se resuelve hacia atrás para calcular el EPS). Dado que cada jugador sabe que su rival confesará en el segundo período, intentará anticiparse confesando en el primero. Por ello el resultado racional es confesar en los dos períodos.

Supongamos ahora que el juego se juega infinitas veces. En este caso puede darse que, en equilibrio, los individuos cooperen. Para analizar este caso, suponemos que el factor de descuento temporal es d. Si el tipo de interés del mercado es r, 1 unidad monetaria hoy vale mañana $(1+r)$. Aplicando una sencilla regla de tres, 1 unidad monetaria mañana vale hoy: $\frac{1}{1+r}$. Denotamos a este valor como factor de descuento: $d = \frac{1}{1+r}$, donde $d \in (0, 1)$.

Si el juego dura infinitos períodos, y los jugadores obtienen una unidad monetaria en cada período, el valor descontado del juego es: $1 + d + d^2 + \ldots$, donde d es el valor hoy de la unidad monetaria que ganemos el próximo, d^2 es el valor hoy de una unidad monetaria ganada dentro de dos períodos, …. Denotamos el valor descontado del juego por A; entonces: $A = \sum_{t=1}^{\infty} d^t = 1+d+d^2+\ldots$ Reescribiendo la expresión anterior:

$$A = 1 + d\,\underbrace{(1 + d + d^2 + \ldots)}_{A}.$$

Como el juego dura infinitos períodos, la expresión entre paréntesis es A, luego: $A = 1 + d\,(A)$. Despejando: $A = \dfrac{1}{1-d}$. Esto significa que un juego que se repite infinitas veces y que nos da una unidad monetaria en cada período vale hoy $\dfrac{1}{1-d}$.

Supongamos que los jugadores tienen la siguiente estrategia: en cualquier fecha t, un jugador no confiesa (coopera) si ambos jugadores no han confesado en los períodos anteriores. Si en la fecha t el otro jugador confiesa, el jugador confiesa en todos los períodos.

Si no se ha confesado nunca, los jugadores obtienen pago 1 desde el período t en adelante (el pago correspondiente a que ambos jugadores no confiesen en cada período); el valor descontado de los pagos sería:

$$1 + 1d + 1d^2 + \ldots = 1\,(1+d+d^2+\ldots) = \frac{1}{1-d}.$$

Si un jugador confiesa en t, a partir de ese período se confiesa siempre. En t el jugador confiesa y su rival no, por lo que obtiene pago 2. A partir de t los dos confiesan, por lo que obtiene pago –2; el valor descontado de los pagos sería:

$$2 - 2d - 2d^2 - \ldots = 2 - 2\,(d + d^2 + \ldots) = 2 - 2d\,(1 + d + d^2 + \ldots) = 2 - 2d\,\frac{1}{1-d}$$

Para un jugador es mejor no confesar siempre que confesar si da mayores pagos, es decir si:

$$\frac{1}{1-d} > 2 - \frac{2d}{1-d}.$$

Operando en la expresión anterior: $1 > 2(1 - d) - 2d$, entonces: $4d > 1$. Luego es mejor no confesar siempre si $d > 1/4$.

20. EJERCICIO DE AUTOEVALUACIÓN.

El ejercicio de autoevaluación propuesto tiene como objetivo que cada alumno compruebe si es capaz de resolver un juego que dura infinitos períodos.

20.1. EJERCICIO 1. EL JUEGO DE LAS GASOLINERAS

Consideramos una simplificación del juego de las gasolineras para ilustrar lo que sucede en juegos repetidos. Suponemos que únicamente se pueden poner dos precios: 77 y 78 céntimos por litro. Las gasolineras están fijando sus precios todos los días, por lo que compiten de manera repetida. En cada período la matriz de pagos del juego es:

		Gasolinera B	
		77	78
Gasolinera A	77	1000, 1000	2000, 0
	78	0, 2000	1500, 1500

Supongamos que los jugadores tienen la siguiente estrategia: en cualquier fecha *t*, un jugador coopera (*precio*=78) si ambos jugadores han cooperado en los períodos anteriores. Si en la fecha *t* el otro jugador no coopera, el jugador pone el precio bajo (*precio*=77) en todos los períodos.

Pregunta:

1. Calcule el valor del factor de descuento, *d*, que lleva a que las gasolineras cooperen.

21. EJERCICIOS DE REPASO.

En el juego en el que las empresas tienen que elegir entre gestores que fomentan demanda y gestores que fomentan costes, considérese la siguiente matriz de pagos:

		Empresa B	
		Gestor que fomenta demanda	*Gestor que reduce costes*
Empresa A	*Gestor que fomenta demanda*	70, 70	40, 60
	Gestor que reduce costes	60, 40	50, 50

1. ¿Existe alguna estrategia dominada? Explique.

2. Calcule los equilibrios de Nash del juego. Explique.

3. ¿Cuál de los dos equilibrios de Nash seleccionarías? Explique.

4. Suponga que el juego es secuencial y que la empresa *A* es la primera en elegir el tipo de gestor que contrata. Represente el árbol del juego. Calcule el EPS. Explique.

22. SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN.

22.1. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: GUERRA DE PRECIOS ENTRE GASOLINERAS.

Las gasolineras no ponen precio 75, ya que a ese precio ganan 0. Tampoco ponen un precio superior a 78 ya que tendrían pérdidas. Luego los precios posibles que puede cobrar cada gasolinera son 76, 77 y 78. Esto significa que la matriz de pagos tiene tres filas y tres columnas. Los pagos de la matriz se recogen en céntimos. La matriz de pagos del juego es:

		Gasolinera B		
		76	77	78
	76	500, 500	1000, 0	1000, 0
Gasolinera A	77	0, 1000	1000, 1000	2000, 0
	78	0, 1000	0, 2000	1500, 1500

Descripción de las casillas:

• Si ambos ponen precio 77, cada uno vende la mitad (es decir, 500 litros) y gana dos céntimos por litro vendido, con una ganancia total: (77-75) 500= 1000.

• Si *A* pone precio 76 y *B* 78, *B* no vende nada debido a que cobra un precio más caro, y gana 0. *A* vende los 1000 litros ganando un céntimo por litro vendido, con una ganancia total: (76-75) 1000 = 1000.

• Las demás casillas de la matriz de pagos se calculan de manera similar.

Para calcular el equilibrio del juego vamos a ver si los jugadores tienen estrategias dominantes. Como no se da que ambos jugadores posean una estrategia dominante no existe equilibrio en estrategias dominantes. Sin embargo, los jugadores si que poseen estrategias dominadas.

Eliminando de manera iterativa las estrategias dominadas se obtiene que ambas gasolineras fijan como precio 76. En una primera etapa poner como precio 78 está dominado (débilmente) por poner precio 77, para los dos jugadores. Luego se descarta esta estrategia para los dos jugadores. En una segunda etapa, dado que se ha descartado el precio 78, poner precio 77 está dominado (débilmente) por poner precio 76, para los dos jugadores.

22.2. RESPUESTA AL EJERCICIO 2: LANZAMIENTO DE UN PENALTI.

Tanto el lanzador del penalti como el portero tienen que elegir entre tres opciones: Izquierda, Centro y Derecha. Luego tenemos una matriz de pagos con tres filas y tres columnas. La matriz de pagos del juego es:

		Portero		
		Izquierda	*Centro*	*Derecha*
	Izquierda	0, 1	1, 0	1, 0
Lanzador	*Centro*	1, 0	0, 1	1, 0
	Derecha	1, 0	1, 0	0, 1

No existe equilibrio en estrategias dominantes ya que los jugadores no poseen estrategias dominantes. Para comprobar que el Lanzador no tiene una estrategia dominante comparamos los pagos de sus tres estrategias:

- Comparando izquierda con centro: el primer pago de izquierda es menor (0<1), el segundo es mayor (1>0) y el tercero es igual (1=1). Luego izquierda no domina a centro ni centro domina a izquierda.

- Comparando izquierda con derecha: el primer pago de izquierda es menor (0<1), el segundo es igual (1=1) y el tercero es mayor (1>0). Luego izquierda no domina a derecha ni derecha domina a izquierda.

- Comparando centro con derecha: el primer pago de centro es igual (1=1), el segundo es menor (0<1) y el tercero es mayor (1>0). Luego centro no domina a derecha ni derecha domina a centro.

De manera similar se puede comprobar que el Portero no tiene una estrategia dominante.

No existe equilibrio en estrategias dominante iterativo ya que los jugadores no poseen estrategias dominadas.

22.3. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: LA COMPETENCIA POR LA AUDIENCIA

La matriz de pagos del juego es:

		Cadena B		
		Concurso	*Serie*	*Cultural*
	Concurso	25, 25	50, 40	50, 10
Cadena A	*Serie*	40, 50	20, 20	20, 10
	Cultural	10, 50	10, 40	5, 5

Los dos jugadores tienen una estrategia dominada: emitir un programa cultural; esta estrategia está dominada fuertemente por emitir un concurso (25>10, 50>10, 50>5) y por emitir una serie (45>10, 20>10, 20>5).

Hay dos equilibrios de Nash: {Concurso, Serie} y {Serie, Concurso}. Para verificarlo, empezamos tomando como dadas las estrategias del jugador *A* y buscamos las mejores respuestas del jugador *B*:

		Mejor respuesta de *B*
	Concurso	→ Serie
Estrategia de *A*	Serie	→ Concurso
	Cultural	→ Concurso

El esquema anterior muestra que:

- Si tomamos como dada la estrategia Concurso de *A*, la mejor respuesta de *B* es Serie que le da pago 40, ya que si elige Concurso gana 25 mientras que si elige Cultural gana 10.

- Si tomamos como dada la estrategia Serie de *A*, la mejor respuesta de *B* es Concurso que le da pago 50, ya que si elige Serie gana 20 mientras que si elige Cultural gana 10.

- Si tomamos como dada la estrategia Cultural de *A*, la mejor respuesta de *B* es Concurso que le da pago 50, ya que si elige Serie gana 40 mientras que si elige Cultural gana 5.

Como resultado, hay tres pares de estrategias que implican una mejor respuesta de *B*:

$$\{\text{Concurso, Serie}\},\ \{\text{Serie, Concurso}\}\ \text{y}\ \{\text{Cultural, Concurso}\}. \qquad (1)$$

Tomando como dadas las estrategias del jugador *B* y buscamos las mejores respuestas del jugador *A*:

		Mejor respuesta de *A*
Estrategia de *B*	Concurso	→ Serie
	Serie	→ Concurso
	Cultural	→ Concurso

Luego hay tres pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de *A*:

$$\{\text{Serie, Concurso}\},\ \{\text{Concurso, Serie}\}\ \text{y}\ \{\text{Concurso, Cultural}\}. \qquad (2)$$

Por último, buscamos los pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los jugadores a la vez. Las obtenemos buscando la intersección de (1) con (2). Hay dos pares de estrategias que cumplen lo anterior: {Concurso, Serie}, {Serie, Concurso}.

Nota: {Cultural, Concurso} no es un equilibrio de Nash. Hay que recordar que en los pares de estrategias la primera es la del jugador *A* y la segunda la del *B*.

22.4. RESPUESTA AL EJERCICIO 2. PIEDRA, PAPEL Y TIJERAS.

La matriz de pagos del juego es:

		Jugador B		
		Piedra	*Papel*	*Tijeras*
Jugador A	*Piedra*	0, 0	-1, 1	1, -1
	Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
	Tijeras	-1, 1	1, -1	0, 0

No existe equilibrio de Nash. Motivo: cuando gana un jugador pierde el otro. Lo verificamos.

Empezamos tomando como dadas las estrategias del jugador *A* y buscamos las mejores respuestas del jugador *B*:

Estrategia de *A*	Mejor respuesta de *B*
Piedra	→ Papel
Papel	→ Tijeras
Tijeras	→ Piedra

Hay tres pares de estrategias que implican una mejor respuesta de *B*:

$$\{\text{Piedra, Papel}\}, \{\text{Papel, Tijeras}\} \text{ y } \{\text{Tijeras, Piedra}\}. \qquad (1)$$

Tomando como dadas las estrategias del jugador *B* y buscamos las mejores respuestas del jugador *A*:

		Mejor respuesta de *A*
Estrategia de *B*	Piedra	→ Papel
	Papel	→ Tijeras
	Tijeras	→ Piedra

Hay tres pares de estrategias que implican una mejor respuesta de *A*:

$$\{\text{Papel, Piedra}\},\ \{\text{Tijeras, Papel}\}\ \text{y}\ \{\text{Piedra, Tijeras}\}. \qquad (2)$$

Por último, buscamos los pares de estrategias que implican una mejor respuesta por parte de los jugadores a la vez. Las obtenemos buscando la intersección de (1) con (2). En este caso, la intersección es vacía por lo que no existe equilibrio de Nash.

22.5. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: ESTRATEGIAS MAXIMIN

A cada estrategia le asociamos el peor de los pagos posible, eligiéndose la estrategia que asegura la menor pérdida:

- Para Julio, a cada estrategia le asociamos el peor de los pagos. A la estrategia salir con capota le asociamos pago –1, y a la estrategia salir sin capota le asociamos pago –10. Luego la estrategia maxmin de Julio es salir con capota.

- Para los gamberros, a cada estrategia le asociamos el pago mayor. A la estrategia lanzar los globos le asociamos pago 10, y a la estrategia no lanzar los globos le asociamos pago 1. Luego la estrategia elegida por los gamberros es lanzan los globos ya que, de las dos, es la que tiene asociado el pago más alto.

Luego Julio elige salir con capota y los gamberros lanzan los globos. Julio no se moja, aunque su coche sí.

22.6. RESPUESTA AL EJERCICIO 2. EL JUEGO DE LOS GAMBERROS.

Este juego no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras.

Hay un único equilibrio en estrategias mixtas. Para resolver este juego vamos a usar el método de igualación de pagos. Los pagos esperados de las estrategias puras para Julio son:

- Ganancia esperada si sale con capota: $(1)\, q + (-1)\, (1-q) = 1 - 2\, q$.

- Ganancia esperada si sale sin capota: $(-10)\, q + (10)(1-q) = 10 - 20\, q$.

Igualando los pagos esperados: $1-2q = 10-20q$, por lo que $q=1/2$.

Los pagos esperados de las estrategias puras para los gamberros son:

- Ganancia esperada si lanzan los globos: $(0)\, p + (10)\, (1-p) = 10 - 10\, p$.

- Ganancia esperada si no lanzan los globos: $(1)p+(-5)(1-p) = 6\, p - 5$.

Igualando los pagos esperados: $10 - 10\, p = 6\, p - 5$, por lo que $p=15/16$. Luego el equilibrio de Nash en estrategias mixtas es $\{p=15/16, q=1/2\}$

Julio se moja si sale sin capota cuando los gamberros lanzan los globos, lo que sucede con probabilidad: $(1-p)\ q\ =\ (1-\frac{15}{16})(\frac{1}{2})\ =\ \frac{1}{32}\ = 0.0312$; es decir, tiene un 3.12 % de probabilidades de mojarse.

22.7. RESPUESTA AL EJERCICIO 3. EL JUEGO DE LA COORDINACIÓN.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: {Retroceder, Derecha}, {Avanzar, Izquierda}.

Hay un único equilibrio en estrategias mixtas. Para resolver este juego usamos el método de igualación de pagos. Los pagos esperados de las estrategias puras para el peatón son:

- Ganancia esperada del peatón si avanza: $(-1)\ q + (1)\ (1-q) = 1 - 2\ q$.
- Ganancia esperada del peatón si retrocede: $(1)\ q + (-1)\ (1-q) = 2\ q - 1$.

Igualando los pagos esperados: $1 - 2\ q = 2\ q - 1$, por lo que q=1/2. Dado que el juego es simétrico: p=q=1/2. El motorista atropella al peatón si gira a la derecha cuando el peatón avanza o si gira a la izquierda cuando el peatón retrocede. La probabilidad de que el motorista atropelle al peatón es: $p\ q + (1-p)\ (1-q) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{12}) = \frac{1}{2}$.

22.8. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: EL JUEGO DE LAS GASOLINERAS

La estrategia fijar un precio de 76 da mayores pagos que la estrategia fijar un precio de 77, independientemente de lo que haga el otro jugador. Esto sucede para las dos gasolineras. Luego ambas gasolineras tienen como estrategia dominante fijar un precio de 76. Si ambas gasolineras hubieran cooperado fijando un precio más alto, ambas estarían mejor. Sin embargo, si una gasolinera piensa que su rival va a cooperar, fijará el precio más bajo para aprovecharse de ella.

22.9. RESPUESTA AL EJERCICIO 2. LOS VERTIDOS EN EL LAGO.

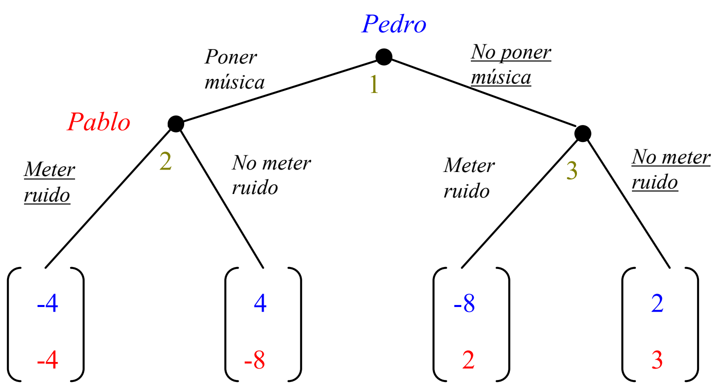
La matriz de pagos del juego es la siguiente:

		Ciudad B	
		Limpiar vertidos	*No limpiar vertidos*
Ciudad A	*Limpiar vertidos*	2, 2	–3, 3
	No limpiar vertidos	3, –3	–2, –2

Este juego lleva al dilema del prisionero. No limpiar los vertidos es una estrategia dominante (fuerte) para ambas ciudades. Sin embargo, ambas ciudades estarían mejor limpiándolos. Aunque las dos ciudades acordasen limpiar los vertidos, no respetarían el acuerdo. Hay que señalar que esto es cierto si hablamos de acuerdos que no se pueden llevar ante los tribunales. Por ejemplo, en el caso de compromisos verbales entre los alcaldes de las ciudades.

22.10. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: EL JUEGO DEL RUIDO

El árbol del juego es:



Calculamos el EPS resolviendo por inducción hacia atrás.

• En el subjuego que comienza en el nodo 2 decide Pablo. Su elección óptima es meter ruido, ya que en ese caso gana -4, mientras que no metiendo ruido gana -8.

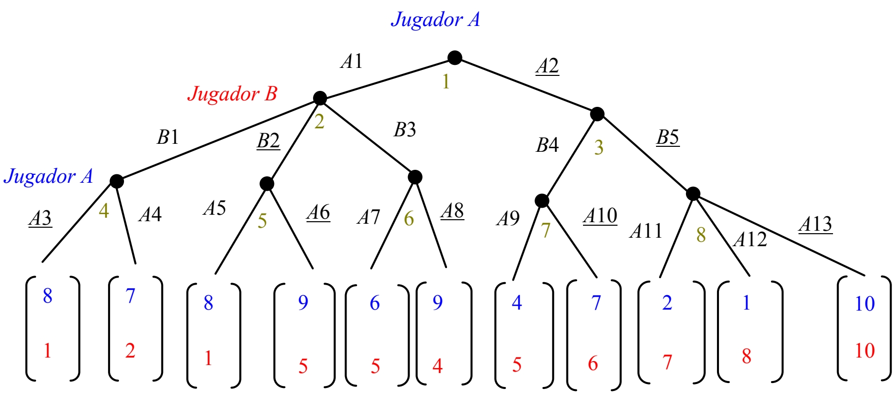
• En el subjuego que comienza en el nodo 3 decide Pablo. Su elección óptima es no meter ruido, ya que en ese caso gana 3, mientras que metiendo ruido gana 2.

• Como Pedro sabe que Pablo es racional, si pone música (llegamos al nodo 2), Pablo meterá ruido, por lo que Pedro gana -4. Si no pone música (llegamos al nodo 3), Pablo no meterá ruido, por lo que Pedro obtiene 2. Su elección será, por tanto, no poner música.

El EPS del juego es:

{No poner música, (Meter ruido, No meter ruido)}.

22.11. RESPUESTA AL EJERCICIO 2.



Resolvemos el juego por inducción hacia atrás. Empezamos por el final del juego. En los subjuegos que comienzan en los nodos 4 a 8 elige el jugador *A*:

- En el nodo 4, A elige $A3$ ya que le da mayores pagos que $A4$ (8>7).
- En el nodo 5, A elige $A6$ ya que le da mayores pagos que $A5$ (9>8).
- En el nodo 6, A elige $A8$ ya que le da mayores pagos que $A7$ (9>6).
- En el nodo 7, A elige $A10$ ya que le da mayores pagos que $A9$ (7>4).
- En el nodo 8, A elige $A13$ ya que le da mayores pagos que $A11$ (10>2) y que $A12$ (10>1).

En los subjuegos que comienzan en los nodos 2 y 3 elige el jugador B, quién sabe que A siempre responde óptimamente:

- En el nodo 2, B elige $B2$ ya que le da mayores pagos que $B1$ (5>1) y que $B3$ (5>4).
- En el nodo 3, B elige $B5$ ya que le da mayores pagos que $B4$ (10>6).

En el juego que comienza en el nodo 1 vuelve a elegir A:

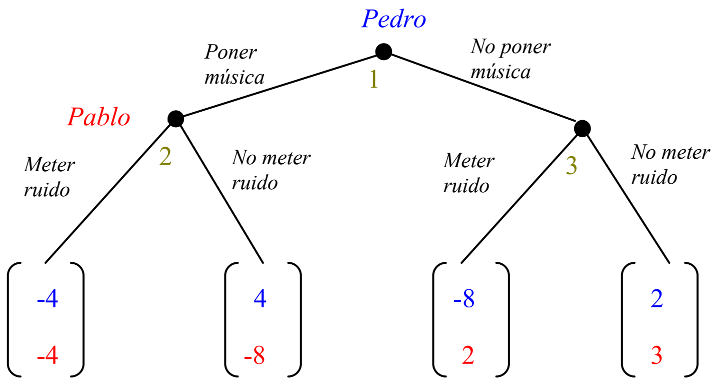
- En el nodo 1, A elige $A2$ ya que le da mayores pagos que $A1$ (10>9).

El EPS del juego es:

$$\{(A2, A3, A6, A8, A10, A13), (B2, B5)\}.$$

22.12. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: EL JUEGO DEL RUIDO

El árbol del juego es:



Pedro es el primero en elegir, haciéndolo sin conocer la elección de Pablo. Pedro elige en el nodo 1 entre poner música o no poner música. Luego tiene dos estrategias:

- Poner música sea lo que sea lo que hace Pablo, ya que no lo observa.
- No poner música sea lo que sea lo que hace Pablo, ya que no lo observa.

Pablo elige el segundo, después de observar la elección de Pedro. Tiene cuatro estrategias, ya que hay dos nodos en los que puede tomar decisiones, los nodos 2 y 3. Las estrategias de Pablo aparecen recogidas en la siguiente tabla:

elección en el nodo 2	**elección en el nodo 3**	**estrategia de Pablo**
Pablo elige meter ruido: R	Pablo elige meter ruido: R	{R R}
Pablo elige meter ruido: R	Pablo elige no meter ruido: NoR	{R, NoR}
Pablo elige no meter ruido: NoR	Pablo elige meter ruido: R	{NoR, R}
Pablo elige no meter ruido: NoR	Pablo elige no meter ruido: NoR	{NoR, NoR}

Luego Pedro tiene dos estrategias y Pablo cuatro, por lo que la matriz de pagos del juego sería dos por cuatro. La matriz de pagos del juego sería:

		Pablo			
		{*R*, *R*}	{*R*, *NoR*}	{*NoR*, *R*}	{*NoR*, *NoR*}
Pedro	*Poner núsica*	-4, -4	-4, -4	4, -8	4, -8
	No poner musica	-8, 2	2, 3	-8, 2	2, 3

• Si Pedro elige la estrategia *Poner música* y Pablo la estrategia {*R, R*}, estaríamos en la casilla superior izquierda de la matriz de pagos. Como Pedro ha elegido poner música, llegamos al nodo 2. La respuesta de Pablo en el nodo 2 viene dada por el primer componente de su estrategia: meter ruido. Los pagos de Pedro son -4 y los de Pedro son -4.

• Si Pedro elige la estrategia *No poner música* y Pablo la estrategia {*NoR*, *NoR*}, estaríamos en la casilla inferior derecha de la matriz de pagos. Como Pedro ha elegido no poner música, llegamos al nodo 3. La respuesta de Pablo en el nodo 3 viene dada por el segundo componente de su estrategia: no hacer ruido. Los pagos de Pedro son 2 y los de Pablo son 3.

• Los pagos de las demás casillas de la matriz de pagos se calculan de manera similar.

22.13. RESPUESTA AL EJERCICIO 1: EL JUEGO DE LAS GASOLINERAS

Si se ha cooperado siempre (es decir, ambos fijan el precio p=78), las gasolineras obtienen pago 1500 desde el período t en adelante (el pago correspondiente a que ambos jugadores cooperen); el valor descontado de los pagos sería:

$$1500 + 1500\, d + 1500\, d^2 + \ldots = 1500\,(1+d+d^2+\ldots) = 1500\,\frac{1}{1-d}\,.$$

Si un jugador no coopera en t, desde ese período no se coopera nunca. En t, el jugador no coopera (p=77) y su rival sí (p=78), por lo que obtiene pago 2000. A partir de t nadie coopera, por lo que obtiene pago 1000; el valor descontado de los pagos sería:

$$2000 + 1000\, d + 1000\; d^2 + \ldots = 2000 + 1000\; (d+d^2+\ldots) =$$

$$2000 + 1000\, d\, (1+d+d^2+\ldots) = 2000+1000\, d\, \frac{1}{1-d}\,.$$

Para un jugador es mejor cooperar siempre que romper el acuerdo si da mayores pagos, es decir, si:

$$1500\, \frac{1}{1-d} > 2000+1000\, d\, \frac{1}{1-d}\,.$$

Operando se obtiene que es mejor cooperar siempre si d>1/2.

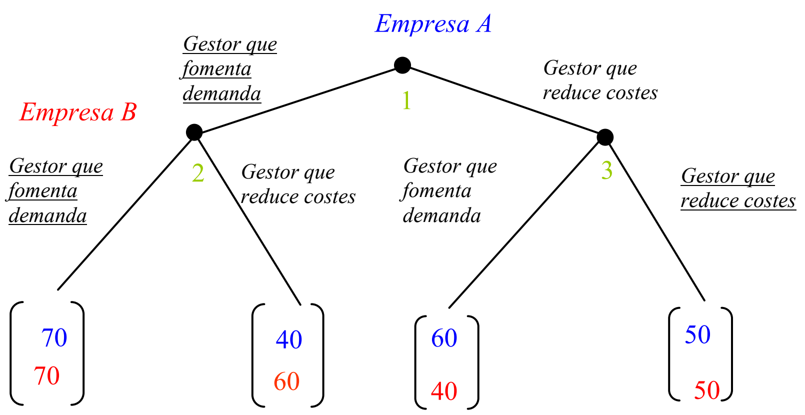
23. RESPUESTA AL EJERCICIO DE REPASO.

1. No hay estrategias dominadas.

2. Hay dos equilibrios: ambas empresas contratan gestores que fomentan demanda y ambas empresas contratan gestores que reducen costes.

3. El equilibrio en que ambas empresas contratan gestores que fomentan demanda. Es un punto focal: en este equilibrio las dos empresas ganan más que en el otro.

4. Árbol del juego:



Resolviendo por inducción hacia atrás (véase las elecciones subrayadas en el árbol), obtenemos que el EPS es:

{Gestor que fomenta demanda, (Gestor que fomenta demanda, Gestor que reduce costes)}.

Luego en equilibrio ambas empresas contratan el gestor que fomenta demanda.

24. EJERCICIOS.

24.1. TAREA 1.

Dado el juego representado por la matriz de pagos siguiente:

		Jugador B		
		*B*1	*B*2	*B*3
	*A*1	2, 3	0, 1	1, 0
Jugador A	*A*2	1, 2	2, 0	1, 1
	*A*3	1, 1	0, 3	0, 2

Responda a las siguientes **preguntas**:

1. ¿Tienen los jugadores estrategias dominantes? Explique.

2. Calcule el equilibrio eliminando de manera iterativa las estrategias dominadas. Explique.

24.2. TAREA 2.

Considere un juego en el que hay dos empresas, *A* y *B*. Las empresas deben decidir el color que tendrá el producto que venden. La empresa *A* puede elegir tres colores: rojo, azul y verde. La empresa *B* puede elegir también tres colores: rojo, azul y naranja. Suponemos que los consumidores compran el producto sólo si tiene el color que les gusta. Al 30% de los consumidores les gusta el rojo, al 30% de los consumidores les gusta el azul, al 20% de los consumidores les gusta el verde y, por último, al 20% de los consumidores les gusta el naranja. Si ambas empresas ponen el mismo color, la mitad de los consumidores compra a cada empresa.

Represente la matriz de pagos del juego suponiendo que los pagos de cada empresa son el porcentaje de los consumidores a los que venden. Explique.

24.3. TAREA 3

Sea el juego en forma normal representado por la siguiente matriz de pagos:

		jugador B		
		B1	*B2*	*B3*
	A1	2, 5	5, 10	0, 1
Jugador A	*A2*	4, 5	2, 2	2, 1
	A3	1, 10	1, 4	1, 5

Calcule el equilibrio de Nash del juego. Explique.

24.4. TAREA 4

Sea el juego en forma normal representado por la siguiente matriz de pagos:

			jugador B	
		B1	*B2*	*B3*
	A1	2, 5	5, 10	0, 1
Jugador A	*A2*	4, 5	5, 2	2, 5
	A3	1, 1	1, 4	1, 5

1. Calcule el equilibrio de Nash del juego. Explique.

2. Diga si este juego presenta alguno de los problemas que puede plantear el equilibrio de Nash. Explique.

3. Si existen múltiples equilibrios de Nash, ¿Cuál de ellos elegiría? Explique

24.5. TAREA 5

Un alumno se va a presentar a un examen para el que no ha estudiado. Tiene dos opciones: *Copiar* o *No Copiar*. El profesor de la asignatura tiene también dos opciones: *Vigilar* o *No Vigilar*. Si copia y el profesor no vigila, aprueba. Si copia y el profesor vigila le pillan, por lo que suspende. El alumno no sabe si el profesor va a vigilar y el profesor no sabe si el alumno va a copiar (es decir, el juego es simultáneo). Construya la matriz de pagos de este juego de manera que haya un único equilibrio: el profesor vigila y el alumno no copia. En la matriz de pagos ponga al alumno en filas y al profesor en columnas.

Nota: debe inventarse los pagos que reciben los dos jugadores de manera que el único equilibrio sea {Vigilar, No Copiar}. Estos pagos deben cumplir que:

- Lo peor para el alumno es que le pillen copiando, ya que suspendería y le abrirían expediente académico.

- Lo mejor para el alumno es que **no** le pillen copiando, ya que aprobaría sin estudiar.
- Lo mejor para el profesor pillar al alumno en caso de que intente copiar.
- Lo peor para el profesor pillar al alumno en caso de que intente copiar.

24.6. TAREA 6.

Considere un juego en el que hay dos empresas, *A* y *B*. Las empresas deben decidir el color que tendrá el producto que venden. La empresa *A* puede elegir tres colores: rojo, azul y verde. La empresa *B* puede elegir también tres colores: rojo, azul y naranja. Suponemos que los consumidores compran el producto sólo si tiene el color que les gusta. Al 30% de los consumidores les gusta el rojo, al 30% de los consumidores les gusta el azul, al 20% de los consumidores les gusta el verde y, por último, al 20% de los consumidores les gusta el naranja. Si ambas empresas ponen el mismo color, la mitad de los consumidores compra a cada empresa.

Represente la matriz de pagos del juego suponiendo que los pagos de cada empresa son el porcentaje de los consumidores a los que venden. Explique.

24.7. TAREA 7

Sea el siguiente juego en forma normal:

		jugador B		
		B1	*B2*	*B3*
	A1	2, 5	5, 10	0, 1
Jugador A	*A2*	4, 5	2, 2	2, 1
	A3	1, 10	1, 4	1, 5

Calcule la solución del juego suponiendo que ambos jugadores utilizan estrategias maximin. Explique.

24.8. TAREA 8

Sea el siguiente juego en forma normal:

		Jugador B	
		B1, q	*B2, 1–q*
Jugador A	*A1, p*	2, 2	1, 1
	A, 1–p	0, 3	2, 4

Calcule el equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego.

24.9. TAREA 9

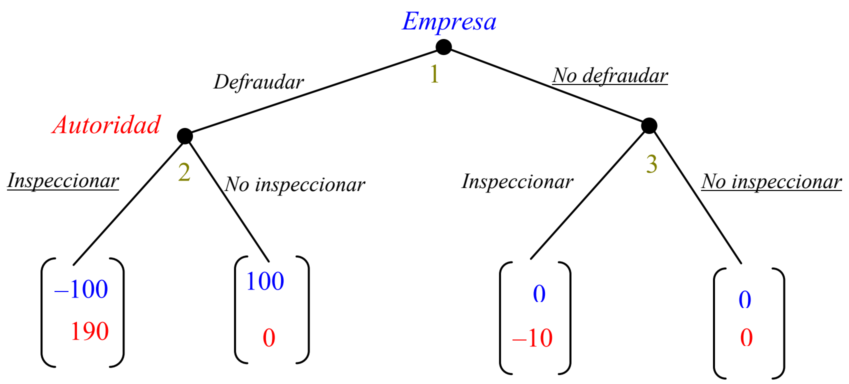
Proponga un ejemplo, lo más real posible, en el que se dé el dilema del prisionero. Construya la matriz de pagos del juego dando unos valores a los pagos que sean consecuentes con el ejemplo.

24.10. TAREA 10

Proponga un ejemplo, lo más real posible, de un juego sucesivo. Represente el árbol del juego. Calcule el EPS.

24.11. TAREA 11

Sea el siguiente juego en forma extensiva:



Pregunta:

1. Calcule la matriz de pagos del juego. Explique.

24.12. TAREA 12

Supongamos que hay dos empresas que compiten de manera repetida en los mercados. Tienen dos estrategias: fijar un precio alto o uno bajo. En cada período la matriz de pagos del juego es:

		Empresa B	
		precio alto	*precio bajo*
Empresa A	*precio alto*	10, 10	-5, 50
	precio bajo	50, -5	2, 2

Supongamos que los jugadores tienen la siguiente estrategia: en cualquier fecha t, un jugador coopera (precio alto) si ambos jugadores han cooperado en los períodos anteriores. Si en la fecha t el otro jugador no coopera, el jugador pone precio bajo en todos los períodos.

Pregunta:

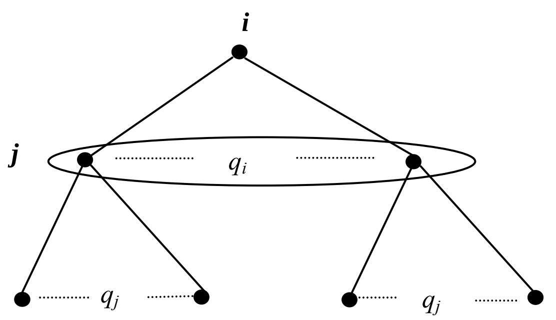
1. Calcule el valor del factor de descuento, d, que lleva a que las empresas cooperen.

25. APÉNDICE: APLICACIONES ECONÓMICAS.

Consideramos como marco de referencia el **oligopolio**: existe interacción estratégica entre los agentes (empresas). Modelamos el comportamiento oligopolístico como juegos no-cooperativos, donde cada empresa actúa movida por su propio interés.

25.1. MODELO DE COURNOT: COMPETENCIA EN CANTIDADES

Suponemos un juego en una etapa en el que las empresas eligen cantidades de manera simultánea.



Consideramos una economía formada por un sector duopolístico que comprende a las empresas 1 y 2. Por el lado del consumo existe un consumidor representativo que maximiza:

$$U(q_1, q_2) - p_1 q_1 - p_2 q_2,$$

donde q_i≥0 es la cantidad del bien i y p_i es su precio (i = 1, 2). La función $U(q_1, q_2)$ se supone cuadrática, estrictamente cóncava y simétrica en q_1 y q_2:

$$U(q_1, q_2) = a(q_1 + q_2) - \frac{1}{2}((q_1)^2 + 2bq_1q_2 + (q_2)^2)\ ,\ 1>b>0,$$

donde el parámetro b mide el grado en que los bienes son sustitutivos.

Problema del consumidor representativo:

$$Max_{q_1,q_2}\{a(q_1+q_2)-\frac{1}{2}((q_1)^2+2bq_1q_2+(q_2)^2)-p_1q_1-p_2q_2\}.$$

Resolviendo obtenemos las funciones inversas de demanda:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} = a - q_1 - bq_2 - p_1 = 0 \ \rightarrow\ p_1 = a - q_1 - bq_2\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} = a - q_2 - bq_1 - p_2 = 0 \ \rightarrow\ p_2 = a - q_2 - bq_1\,.$$

Despejando las cantidades en función de los precios, obtenemos las funciones de demanda:

$$q_1 = \frac{a(1-b) - p_1 + bp_2}{1-b^2}\,,$$

$$q_2 = \frac{a(1-b) - p_2 + bp_1}{1-b^2}\,.$$

Si b=1, los bienes son homogéneos (habría que considerar el caso particular en que $p = a - q_1 - q_2$). Si b=0, los bienes son independientes en demanda. Por último, cuanto mayor sea el parámetro b, más sustitutivos son los bienes:

$\dfrac{\partial q_1}{\partial p_1} = -\dfrac{1}{1-b^2} < 0$ □ si $\uparrow p_1$ entonces □ q_1,

$\dfrac{\partial q_1}{\partial p_2} = \dfrac{b}{1-b^2} > 0$ □ si $\uparrow p_2$ entonces $\uparrow q_1$,

$\dfrac{\partial(\partial q_1 / \partial p_2)}{\partial b} = \dfrac{1+b^2}{(1-b^2)^2} > 0$ □ cuanto mayor sea b, más aumenta q_1 con p_2, es decir, más sustitutivos son los bienes.

Suponemos, sin pérdida de generalidad, que el coste marginal de producción de las empresas es 0. El beneficio de las empresas es:

$$\pi_1 = p_1\, q_1 = (a - q_1 - bq_2)q_1,$$

$$\pi_2 = p_2\, q_2 = (a - q_2 - bq_1)q_2\,.$$

Las empresas eligen el nivel de producción que maximiza beneficios:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2q_1 - bq_2 = 0 \;\rightarrow\; q_1(q_2) = \frac{a - bq_2}{2}\,,$$

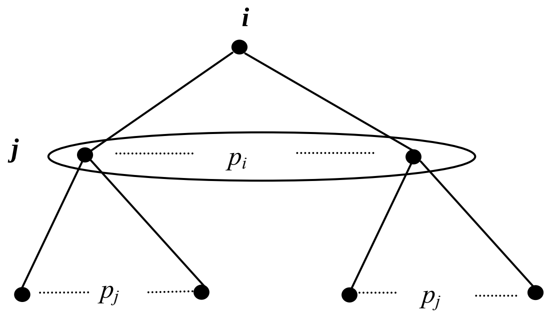
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2q_2 - bq_1 = 0 \;\rightarrow\; q_2(q_1) = \frac{a - bq_1}{2}\,.$$

Las funciones de reacción tienen pendiente negativa ($\dfrac{\partial q_1(q_2)}{\partial q_2} = \dfrac{\partial q_2(q_1)}{\partial q_1} = -\dfrac{b}{2} < 0$), dado que suponemos que los bienes son sustitutivos (b>0). Resolviendo: $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a}{2+b} = q^C$.

Sustituyendo en los beneficios: $\pi_1^* = \pi_2^* = \dfrac{a^2}{(2+b)^2} = \pi^C$.

25.2. MODELO DE BERTRAND: COMPETENCIA EN PRECIOS

Suponemos un juego en una etapa en el que las empresas eligen precios de manera simultánea.



Obtuvimos las funciones de demanda:

$$q_1 = \frac{a(1-b) - p_1 + bp_2}{1-b^2},$$

$$q_2 = \frac{a(1-b) - p_2 + bp_1}{1-b^2}.$$

El beneficio de las empresas es, por tanto:

$$\pi_1 = p_1\, q_1 = \frac{1}{1-b^2}(a(1-b) - p_1 + bp_2)p_1,$$

$$\pi_2 = p_2\, q_2 = \frac{1}{1-b^2}(a(1-b) - p_2 + bp_1)p_2.$$

Las empresas eligen el nivel de producción que maximiza beneficios:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = \frac{1}{1-b^2}(a(1-b) - 2p_1 + bp_2) = 0 \;\rightarrow\; p_1(p_2) = \frac{a(1-b) + bp_2}{2},$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \frac{1}{1-b^2}(a(1-b) - 2p_2 + bp_1) = 0 \;\rightarrow\; p_2(p_1) = \frac{a(1-b)+bp_1}{2}.$$

Las funciones de reacción tienen pendiente positiva ($\frac{\partial p_1(p_2)}{\partial p_2} = \frac{\partial p_2(p_1)}{\partial p_1} = \frac{b}{2} > 0$), dado que suponemos que los bienes son sustitutivos (b>0). Resolviendo: $p_1^* = p_2^* = \frac{a(1-b)}{2-b} = p^B$.

Sustituyendo en beneficios: $\pi_1^* = \pi_2^* = \frac{a^2(1-b)}{(1+b)(2-b)^2} = \pi^B$.

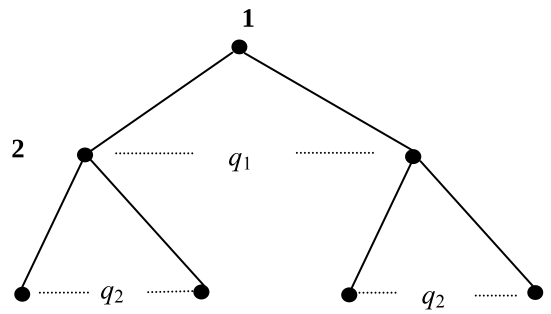
25.3. MODELO DE STACKELBERG: ELECCIONES SECUENCIALES

Vamos a considerar que las empresas eligen cantidades secuencialmente. Nos enfrentamos a un juego en dos etapas:

- etapa 1: empresa 1 elige producción,

- etapa 2: empresa 2 elige producción, habiendo observado la elección de la 1.

Líder (L): empresa 1.
Seguidor (S): empresa 2.



Para buscar el Equilibrio Perfecto en Subjuegos resolvemos por inducción hacia atrás:

i) Buscamos las mejores respuestas del jugador 2 en cada subjuego $\rightarrow$ función de reacción de 2.

ii) El líder, 1, sólo tiene en cuenta las respuestas óptimas del jugador 2 al elegir la cantidad que maximiza su beneficio, ya que como el jugador 2 es racional elige siempre de manera óptima.

Problema del seguidor:

$$Max_{q_2}\pi_2 = (a - q_2 - bq_1)q_2 .$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - 2q_2 - bq_1 = 0 \ \rightarrow \ q_2(q_1) = \frac{a - bq_1}{2} .$$

El líder elige el nivel de producción q_1 que maximiza sus beneficios, teniendo en cuenta únicamente las respuestas óptimas del seguidor:

$$Max_{q_1}\pi_1 = (a - q_1 - bq_2)q_1 ,$$

$$\textit{sujeto a: } q_2(q_1) = \frac{a - bq_1}{2} .$$

Sustituimos la restricción en la función objetivo:

$$Max_{q_1}\pi_1 = (a - q_1 - b\frac{a - bq_1}{2})q_1 = \frac{1}{2}(a(2-b) - q_1(2-b^2))q_1 .$$

Resolviendo:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{1}{2}(a(2-b) - 2q_1(2-b^2)) = 0 \ \rightarrow \ q_1^* = \frac{a(2-b)}{2(2-b^2)} = q^L .$$

Sustituyendo en la función de reacción del seguidor:

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a - bq_1^*) = \frac{1}{2}\left(a - b\frac{a(2-b)}{2(2-b^2)}\right) = \frac{a(4-b(2+b))}{4(2-b^2)} = q^S .$$

Sustituyendo en los beneficios:

$$\pi_1^* = (a - q_1^* - bq_2^*)q_1^* = \frac{a^2(2-b)^2}{8(2-b^2)} = \pi^L ,$$

$$\pi_2^* = (a - q_2^* - bq_1^*)q_2^* = \frac{a^2(4-b(2+b))^2}{16(2-b^2)^2} = \pi^S .$$

Es fácil comprobar que:

i) $q^L - q^S = \dfrac{ab^2}{4(2-b^2)}$ >0: el líder produce más que el seguidor.

ii) $\pi^L - \pi^S = \dfrac{a^2b^3(4-3b)}{16(2-b^2)^2}$ >0: el líder obtiene mayor beneficio que el seguidor.

26. BIBLIOGRAFÍA

Referencias básicas

Dixit A. K. y B. Nalebuff (1992): "Pensar estratégicamente. Un arma decisiva en los negocios, la política y la vida diaria", Antoni Bosch editor.

Dutta, P. (1999): "Strategies and Games. Theory and Practice". The MIT Press.

Estrin E. y D. Laidler (1992): "La teoría de los juegos", capítulo 19 del libro *Microeconomía*, Prentice Hall.

Pindyck R. S. y Daniel L. Rubinfield (2001): "La teoría de juegos y la estrategia competitiva", capítulo 13 del libro *Microeconomía*, Prentice Hall.

Referencias avanzadas

Besanko, D., Dranove, D., Shanley, M. and S. Schaefer (2007): "Economics of Strategy", fourth edition, John Wiley and Sons.

Gardner R (1996): "Juegos para empresarios y economistas", Antoni Bosch editor.

Gibons R. (1993): "Un primer curso de teoría de juegos", Antoni Bosch editor.

Rasmusen, E. (1996): "Juegos e información. Una introducción a la teoría de los juegos". Fondo de cultura económica. Mexico. Primera edición en inglés, 1989, Basil Blackwell, Cambridge, Massachussets y Oxford.

Shy, O. (1995): "Industrial Organization: Theory and Applications". MIT Press.

Tirole, J. (1990): "La teoría de la Organización Industrial", capítulo 11. Ariel Economía.