Sarriko-On

Ekonomian Lizentziaturako Matematika II. Azterketak

ISBN: 978-84-695-3034-4

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

01-12

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIAN LIZENTZIATURAKO MATEMATIKA II. AZTERKETAK

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

AURKIBIDEA

AURKEZPENA

Matematika II irakasgaia Ekonomia eta Enpresa Zientzien Fakultateko Ekonomia Lizentziaturako lehen ikasturteko irakasgaia da eta, batez ere, diferentziagarritasuna eta optimizazioa jorratzen ditu.

Bilduma honetan, azken urteotan jarri ditugun azterketak eta horien erantzunak aurkituko dituzue. Lehen zatian azterketen enuntziatuak daude, ikasleak azterketaren orokortasunaz jabetzeko; horrela, erantzuna begiratu gabe, irakurlea azterketa oso bat egiten saia daiteke. Bigarren zatian azterketa horietan jarri diren ariketa guztien erantzunak, gaika eta ordena kronologikoan, aurkitzen dira.

Ariketa hauek egiteko edukiera teorikoa, liburu honetan aurki daiteke: *Matemáticas para el Análisis Económico*, K. Sydsaeter eta P. Hammond, Prentice Hall argitaletxea, 1996.

Irakasgaiaren egitaraua hauxe da:

1. $\mathbb{R}^n$-REN EGITURA TOPOLOGIKOA. ALDAGAI ERREAL ANITZEKO FUNTZIOEN LIMITEAK ETA JARRAITUTASUNA.

1.1- $\mathbb{R}^n$-ren ohiko egitura metrikoa. Bola irekiak. Multzo irekiak eta itxiak. Multzo bornatuak eta trinkoak.

1.2. Aldagai erreal anitzeko funtzio erreala. Funtzio baten grafikoa. Sestra-kurbak. Funtzioen limiteak eta jarraitutasuna. Funtzio jarraitu oinarrizkoak. Funtzio jarraituen arteko konposaketa.

2. ALDAGAI ERREAL ANITZEKO FUNTZIOEN KALKULU DIFERENTZIALA.

2.1. Deribatu partzialak. Interpretazio geometrikoa. Funtzio deribagarria. Goi ordenako deribatu partzialak. Schwartz-en teorema. Funtzio konposatuen deribagarritasuna. Katearen erregela.

2.2- Diferentziala. Interpretazio geometrikoa. Funtzio diferentziagarria. C^k klaseko funtzioak. Diferentziagarritasuna, deribagarritasuna eta jarraitutasunaren arteko erlazioak. Funtzio baten balioaren hurbilketa puntu batean, diferentzialaren bitartez.

3. FUNTZIOEN OPTIMIZAZIOAREN TEORIA KLASIKOA.

3.1. Funtzio baten mutur lokalak eta globalak. Mutur lokal ez baldintzatuen existentziarako baldintza beharrezkoak eta nahikoak. Mutur lokal baldintzatuetarako baldintza beharrezkoak eta nahikoak. Lagrangeren biderkatzaileak.

3.2. Funtzio baten mutur lokalak eta globalak multzo batean.

4. FUNTZIO INPLIZITUAK ETA HOMOGENEOAK.

4.1. Inplizituki definitutako funtzioa. Interpretazio geometrikoa. Funtzio inplizitu globala eta lokala. Funtzio inplizituaren teorema. Funtzio inplizituaren deribagarritasuna.

4.2. Funtzio homogeneoa. Propietateak. Eulerren teorema.

AZTERKETAK

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko EKAINA

1. Demagun $f(x,y) = g(xe^y, x+2y)\dfrac{y}{x^2 - y^2}$ funtzioa, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(0,2)=4$, $g_1(0,2)=g_2(0,2)=0$ eta $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \neq 0$ izanik.

i) Aztertu limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (1,1) eta (0,1) puntuetan.

ii) Diferentzialaren bitartez, hurbildu f funtzioaren balioa (0'1,1'1) puntuan.

2. Demagun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xf_1(x,y) + yf_2(x,y) = 3f(x,y)$ erlazioa betetzen duen funtzioa.

i) Baldin badakigu $f(0,1)=1$ dela, kalkulatu $f_2(0,1)$ eta $f_{22}(0,1)$.

Har dezagun $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, modu honetan definitutako funtzioa: $F(x,y) = x^2 f_1(x,y) + y^2 f_2(x,y)$.

ii) Homogeneoa al da F? Hala bada, zein mailatakoa da?

iii) Ziurta dezakegu $F(x,y)=3$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu bezala definitzen duela (0,1) puntuaren ingurunean?

3. Demagun $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ funtzioa eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$ multzoa. Kalkulatu f-ren maximo eta minimo lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko IRAILA

1. Demagun $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} & x \neq y \\ 2 & x = y \end{cases}$ funtzioa.

i) Jarraitua al da f funtzioa (1,1) puntuan? Eta deribagarria? Eta diferentziagarria?
ii) Jarraitua al da f funtzioa (2,1) puntuan? Eta deribagarria? Eta diferentziagarria?
iii) f funtzioaren 3 sestra-kurba multzo irekia da?, itxia da?, bornatua da?, trinkoa da?

2. Demagun $f(x,y)=\dfrac{g(x^2y)}{x-y}-\dfrac{1}{y^4}$ funtzioa, non $g \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioa -1 mailako funtzio homogeneoa eta $g(2)=2$ den.

i) Kalkulatu $g(4)$ eta $g'(4)$.
ii) Homogeneoa al da f funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?
iii) Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua (2,1) puntuaren ingurunean? Kalkulatu, existitzen bada, $\varphi'(2)$.

3. Demagun $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y-1+x^2 \geq 0,\ y \geq 0,\ -2 \leq x \leq 2\}$. Kalkulatu f-ren maximo eta minimo lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2002ko EKAINA

1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=e^{\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *D*, *f* funtzioaren existentzi eremua, int(*D*) eta fr(*D*). Irekia al da *D* multzoa?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?, eta konoa? Homogeneoa al da *f* funtzioa?

ii) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,1) puntuetan. Eman, existitzen badira, *f* funtzioaren lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

2. (10 puntu) Demagun $F(x,y)=(xy+1)g(x+1,y^2x+3y)$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(1,0)=0$, $g_1(1,0)=-2$ eta $g_2(1,0)=3$ izanik.

i) $F(x,y)=0$ ekuazioak (0,0) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen al du? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(0)$.

ii) (0,0) puntuan *F*-ren diferentziala erabiliz, posible al da *F*(0'1, –0'03) balioa hurbiltzea? Baiezko kasuan, hurbildu *F* funtzioaren balioa (0'1, –0'03) puntuan.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2y$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ multzoa.

i) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur lokalak int(*A*), fr(*A*) eta *A* multzoetan.

ii) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur globalak *A* multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2002ko IRAILA

1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{(x-y)^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *D*, *f* funtzioaren existentzi eremua, int(*D*), fr(*D*) eta *D*'.

ii) Irekia al da *D* multzoa?, eta itxia?, eta trinkoa?

iii) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,2) puntuetan. Kalkulatu, existitzen badira, lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

2. (10 puntu) Demagun $F(x,y)=(x+2y)f(x^2+y^2,x^2-y^2)$ funtzioa, *f* funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $f_1(1,0)=f_2(1,0)=1$ izanik.

i) Homogeneoa al da *F* funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?

ii) $F(x,y)-8=0$ ekuazioak (1,1) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen al du? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2-y$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+4y^2\le 1,\ y\ge 0\}$.

i) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur lokalak int(*A*) eta fr(*A*) multzoetan. Adierazi zein puntutan lortzen duen *f* funtzioak fr(*A*)-rekiko mutur globala.

ii) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur lokalak *A* multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2003ko EKAINA

1. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y}}{x^2-y^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D, f funtzioaren existentzi eremua, int(D), fr(D) eta D' (metatze-puntuen multzoa). Irekia al da D multzoa?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (2,1) eta (1,1) puntuetan. Kalkulatu, existitzen badira, lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

2. (8 puntu) Demagun $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ funtzioak, $f(0,1)=1$ eta $g(0,1)=-1$ izanik. Badakigu $[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0$ ekuazioak **ez** duela (0,1) puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen.

i) Zein balio du $f_2(0,1)$-k? Arrazoitu erantzuna.

ii) $g_2(0,1)=f_2(0,1)>0$ izanik, $[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen al du (0,1) ingurunean?

3. (12 puntu) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y+x+3\geq 0,\ y-x+7\geq 0\}$ multzoa eta $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$ funtzioa.

i) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

ii) Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2003ko IRAILA

1. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = \dfrac{x^2 + \sqrt{y^2}}{x^2 + y^2 - 4}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D, f funtzioaren existentzi eremua, int(D), fr(D) eta D' (metatze-puntuen multzoa).

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0), (1,1) eta (0,2) puntuetan. Kalkulatu, existitzen badira, lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

2. (8 puntu) Demagun $G(x,y) = x^2F(x^2,xy) - y^2F(xy,y^2)$ funtzioa. $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, zer baldintza bete behar dute $F(0,1)$, $F_1(0,1)$ eta $F_2(0,1)$ -ek $G(x,y)$ funtzioak funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak bete ditzan (0,1) puntuaren ingurunean, eta horrela, $G(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan defini dezan (0,1) puntuaren ingurunean?

3. (12 puntu) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$ eta $f(x,y) = (x-a)^2 + y^2$, $a \in \mathbb{R}$ izanik.
Zer balio hartu behar du a-k (1,1) puntua f-ren mutur lokala fr(A)-n izan dadin? Kasu horretan, zer lortuko da, maximo ala minimo lokala fr(A)-rekiko?
a=2 izanik, kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan. Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2004ko EKAINA

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ funtzioa.

a) Aztertu jarraitutasuna eta limitearen existentzia (0,0) puntuan.

b) Kalkulatu, posible bada, f-ren diferentziala (1,1) puntuan, eta horren bidez, f(1'01,0'97)-ren gutxi gorabeherako balioa.

2. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatuak, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ izanik:

i) $z = x^3y + x^2y^2 + \sqrt[3]{x^2}$.

ii) $z = xe^{-x^2+y^2}$.

iii) $z = \ln\sqrt{1+x^2y^2}$.

iv) $z = f(x, \sin(x^2))$.

v) $z = xg(x^2y)$.

vi) $z = yf(x+y, x-y)$.

3. (8 puntu) Demagun $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 2 mailako funtzio homogeneoa, $f(1,2)=4$ eta $f_2(1,2)=3$ izanik.

a) Kalkulatu $f(2,4)$, $f_2(2,4)$ eta $2f_1(2,4)+4f_2(2,4)$.

b) Demagun $F(x,y)=f(x,y)-16$ ekuazioa. Definitzen al du $F(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan (2,4) puntuaren ingurunean? Hala bada, kalkulatu funtzio inplizituaren deribatua 2 puntuan ($\varphi'(2)$).

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioa eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 \leq x+1,\ x+y \leq 1\}$ multzoa.

a) Kalkulatu mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

b) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2004ko IRAILA

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y+a}$ funtzioa. Aztertu f-ren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta deribagarritasuna (0,0) puntuan, $a\in\mathbb{R}$ balio guztietarako.

2. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatuak, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik:

i) $z=x^2y^3-2xy+y+3$.
ii) $z=x\cos(xy)$.
iii) $z=(x^2-2y^3)^5$.
iv) $z=xf(x-y,x^2-y)$.
v) $z=e^{xf(x,y)}$.
vi) $z=f(x,e^{-x})$.

3. (8 puntu) Demagun $F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$ funtzioa, $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 eta 1 mailako funtzio homogeneoak, hurrenez hurren, izanik. Badakigu $f(4,2)=24$, $g(4,2)=6$, $f_2(4,2)=4$ eta $g_2(4,2)=1$ direla.

a) Homogeneoa al da F funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?
b) Kalkulatu $F(2,1)$ eta $F_2(2,1)$.
c) Demagun $H(x,y)=F(x,y)-k$ ekuazioa. k-ren zein baliotarako definituko du $H(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan (2,1) puntuaren ingurunean?

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x+y$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 2,\ x^2-y\ge 0\}$ multzoa. Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur lokalak A-ren barrualdean, A-ren mugan eta A multzo osoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko EKAINA

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

2. (8 puntu) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak eta kalkulatu, existitzen badira, $z_x(0,0)$ eta $z_y(0,0)$:

i) $z=e^x x^2+e^{y^2}\cos(x)$.
ii) $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+1}$.
iii) $z=xy^2\sin(xy)$.
iv) $z=x^2y^3f(2xy,e^{y+3})$.

3. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=(x^2+y^2-9)(x+y-a)$ funtzioa, $a\in\mathbb{R}$ izanik.

i) Esan a-ren zein baliotarako beteko diren funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak, $f(x,y)=0$ ekuazioak inplizituki $y=\varphi(x)$ funtzioa defini dezan (0,3) puntuaren ingurunean.
ii) $a=3$ bada, definituko al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua (0,3), (3,0) eta (1,2) puntuetan?

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=xy$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0\}$ multzoa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko IRAILA

1. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{(y+1)x}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,1) puntuan.
iv) Esan, arrazoituz, adierazpen hau egia den: $h > 0$ eta $k > 0$ nahiko txikiak badira, orduan, $f(1+h,1+k) > f(1,1)$ izango da.

2. (8 puntu) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu, existitzen badira, funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak.

i) $f(x,y) = (x-y)e^{x^3 y}$.
ii) $f(x,y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 1}$.
iii) $z = g(xy) + f(3x - y, x^2 + y^2)$.
iv) $z = f(x^2 - y^2, x + y)g(x - y)$.

3. (6 puntu) Demagun $F(x,y) = x^2 y + f(x,y)$ funtzioa, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik. f funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa da, eta $f(1,2)=3$ eta $f_1(1,2)=1$ dira.

i) Homogeneoa al da F funtzioa? Zein mailatakoa?
ii) Kalkulatu $F(2,4)$ eta $F_2(2,4)$.
iii) Definitzen al du $F(x,y)-5=0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizituki (1,2) puntuaren ingurunean? Hala bada, kalkulatu $\varphi'(1)$.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$ eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x\}$.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko EKAINA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

2. (6 puntu) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z=\sqrt[3]{\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}}$.
ii) $z=\cos(2^e xy+e^{x^2y^2})$.
iii) $z=\dfrac{2}{y^2+1}g\left(\dfrac{x-2}{e^x}\right)+f(x^2+3y,\,y^3)$.

3. (7 puntu) Demagun $h(x,y)=\dfrac{g(x^2y)}{x-y}$ funtzioa, g 2 mailako funtzio homogeneoa eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ izanik.

i) Homogeneoa al da h funtzioa? Zein mailatakoa?
ii) $g(4)=2$ eta $g'(4)=1$ badira, k-ren zein baliotarako definitzen du $h(x,y)-k=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki (2,1) puntuaren ingurunean? k-ren balio horietarako kalkulatu $\varphi'(2)$.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x-y^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 9,\ x\le 1\}$ multzoa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko IRAILA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{x}+\dfrac{2}{y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,1) puntuan.
iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

2. (6 puntu) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z=x^2y\ln(2+x^2+y^2)$.
ii) $z=f(xy^2,\sin(xy))+f(x^2,y)$.
iii) $z=\sqrt{f(x^2-y^2,\ 2xy)}$ non $f(x,y)\geq 0$ den, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3. (7 puntu)

i) Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^a}\ g\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ funtzioa homogeneoa izan dadin, $g\in C^1(\mathbb{R})$ funtzioa 2 mailako homogeneoa izanik. a-rentzako aurkitutako balioarekin, zein da f funtzioaren homogeneotasun maila?
ii) Demagun $f(x,y)=(y-2x)(x+y)(y-3)$ funtzioa.
a) Definituko du $f(x,y)=0$ ekuazioak inplizituki $y=\varphi(x)$ funtzioa (0,0) eta (–3,3) puntuen ingurunean?
b) Aurkitu (x_0,y_0) puntua non $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki definituko duen (x_0,y_0) puntuaren ingurunean. Arrazoitu erantzuna.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x+y$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\geq 0,\,y\geq 0,\,1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

i) Kalkulatu f–ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, f–ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2007ko EKAINA

1. (8 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *D* multzoa, *f* funtzioaren existentzi eremua.

ii) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,0) puntuetan.

iii) (1,0) puntuan *f* funtzioaren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, $f(0'97,0'02)-f(1,0)$ balioa.

2. (6 puntu) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z=\sin(xy-e^{xy^2})$.

ii) $z=x^3y^2+\sqrt{x^2+y}$.

iii) $z=\ln(f(x^3y^2,x^2+y))$.

3. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=g(x,y)+xy^3$ funtzioa, non $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 4 mailako funtzio homogeneoa den.

i) Homogeneoa al da f funtzioa? Zein mailatakoa?

ii) $g(2,1)=g_1(2,1)=-2$ badira, definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki (2,1) puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(2)$.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=xy$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\le -y^2+1,\ x+y\ge 1\}$ multzoa.

i) Kalkulatu *f*-ren mutur lokalak *A* multzoan.

ii) Kalkulatu, existitzen badira, *f*-ren mutur globalak *A* multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2007ko IRAILA

1. (8 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{\sqrt{y-x^2}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua. Irekia da?, itxia?, bornatua? eta trinkoa?
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (0,1) puntuetan.
iii) (0,1) puntuan f funtzioaren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, $f(0'02,0'98)-f(0,1)$ balioa.

2. (6 puntu) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z=(x^2+3xy+5y)e^{x^3y^2}$.
ii) $z=\cos(\sqrt[3]{x^2-y})+\ln(x+y^2)$.
iii) $z=f(x^2+y^2,y^3)+g(x^3y+3x^2)$.

3. (6 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2g(x,y)$ funtzioa, non $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 mailako funtzio homogeneoa den.

i) Homogeneoa al da f funtzioa? Zein mailatakoa?
ii) $g(1,0)=0$ eta $g_2(1,0)=7$ badira, definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki (2,0) puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(2)$.

4. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2+y^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq x^2-1,\ y\leq 3\}$ multzoa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak A multzoan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko EKAINA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Jarraitua al da f funtzioa (0,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da f funtzioaren limitea puntu horretan?
iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da f funtzioaren limitea puntu horretan?

2. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=x^2y\cos(x-y^2)$.
ii) $z=\ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.
iii) $z=\dfrac{x+y}{2y}h(x^2,(x-y)^3)$, $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y^2-x\le 1,\ y^2+x\le 1\}$.
Aurkitu f funtzioaren mutur lokal guztiak A multzoan. Kalkulatu, existitzen badira, $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$.

4. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2g(x^2,xy)$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

i) g funtzioa 1 mailako homogeneoa bada, f funtzioa ere homogeneoa izango da?, zein mailatakoa?
ii) $g(1,2)=0$ eta $g_2(2,4)=2$ direla badakigu, ziurta dezakegu $f(x,y)=0$ ekuazioak (1,2) puntuaren ingurunean $\varphi(x)=y$ funtzio inplizitua definitzen duen? Zuzena bada, kalkulatu $\varphi'(1)$.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko IRAILA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?
ii) Jarraitua al da f funtzioa (1,1) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da funtzioaren limitea puntu horretan?
iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da funtzioaren limitea puntu horretan?

2. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=x^2+\dfrac{1}{y}+\sin(\ln(x))$.
ii) $z=\ln\left(\sqrt{x^2+y}\right)$.
iii) $z=e^{x^2y}f(x^2,x^3-y^2)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

3. (10 puntu) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+(y-1)^2\leq 1, x\leq y, x\geq -y\}$ multzoa eta $f(x,y)=y-x^2$ funtzioa. Aurkitu f-ren mutur lokal guztiak A multzoan. Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur global guztiak A multzoan.

4. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=e^{xy}+g(x,y)$ funtzioa. $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta 3 mailako homogeneoa da, $g(0,1)=-1$ eta $g_1(0,2)=4$ izanik. Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak (0,1) puntuaren ingurunean $\varphi(x)=y$ funtzio inplizitua? Zuzena bada, kalkulatu $\varphi'(0)$.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko EKAINA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x(x-y)}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f-ren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Existitzen al da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,–1) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria?, Hala denean, kalkulatu diferentziala puntu horretan eta $f(0'99,-0'98)$-ren gutxi gorabeherako balioa.

2. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y})$.

ii) $z=(x^2-3y^2)\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

iii) $z=f((f(x,y))^2,y)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

3. (10 puntu) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 4,\ x\le -y+2\}$ multzoa eta $f(x,y)=-xy$ funtzioa.

i) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak A multzoan.

ii) Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

4. (7 puntu) Demagun $h(x,y)=\dfrac{f(xy,2x^2)}{y}$ funtzioa, non $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 mailako homogeneoa den.

i) Homogeneoa da h funtzioa?, zein mailatakoa?

ii) Baldin badakigu $f(1,2)=1$ eta $f_2(1,2)=1$ direla, kalkulatu $k\in\mathbb{R}$, $h(x,y)-k=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizitua (1,1) puntuaren ingurunean definitzeko. Aurkitutako k baliorako, kalkulatu $\varphi'(1)$.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko IRAILA

1. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{y+2}$.

ii) $z = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

iii) $z = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

2. (7 puntu) Demagun $f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,2) eta (0,1) puntuetan.

iii) Kalkulatu, existitzen bada, $\mathrm{d}f(0,1)(h_1,h_2)$.

3. (10 puntu) Demagun $f(x,y) = y - x^2$ funtzioa eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq y\}$ multzoa. Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak A multzoan. Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

4. (7 puntu) Demagun $h(x,y) = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$ funtzioa.

i) f funtzioa 3 mailako homogeneoa bada, homogeneoa al da h funtzioa?, zein mailatakoa?

ii) Baldin badakigu f funtzioak deribatu jarraituak dituela haren existentzi eremu osoan eta $f(0,2) = 8$, $f_1(0,2) = 24$ direla, definitzen al du $h(x,y) - 1 = 0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan ($y = \varphi(x)$) (1,0) puntuaren ingurunean? Kalkulatu, existitzen bada, $\varphi'(1)$.

MATEMATIKA IIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2010eko EKAINA

1. (7 puntu) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (-2,2) puntuan.

iv) (-2,2) puntuan f-ren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, $f(-1{,}98, 1'99)$-ren balioa.

2. (10 puntu) Demagun $f(x,y)=x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2\le y, 1\le y\le 4\}$ multzoa. Kalkulatu f funtzioaren mutur lokal eta globalak A multzoan.

3. (6 puntu) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak:

i) $z=\ln\sqrt{xy+y^2}$.

ii) $z=\sin(y^2x-3xy)$.

iii) $z=f(x^3-y^2, x^3y^2)g\left(x\sqrt{y}\right)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ izanik.

4. (7 puntu)

i) Demagun $f(x,y)=y^2-2$ funtzioa. Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki $(1,\sqrt{2})$ puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

ii) Demagun $f(x,y)=x^2h\left(\dfrac{y^3}{x},\dfrac{x^3}{y}\right)$ funtzioa, non $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta α=2 mailako funtzioa homogeneoa den. f funtzioa homogeneoa al da? Zein mailatakoa?

AZTERKETEN ERANTZUNAK

JARRAITUTASUNA, DERIBAGARRITASUNA ETA DIFERENTZIAGARRITASUNA.

(2001eko ekaina) Demagun $f(x,y) = g(xe^y, x+2y)\cdot\dfrac{y}{x^2-y^2}$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(0,2)=4$, $g_1(0,2)=g_2(0,2)=0$ eta $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $g(x,y)\neq 0$ izanik.

i) Aztertu limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (1,1) eta (0,1) puntuetan.

ii) Diferentzialaren bitartez, hurbildu f funtzioaren balioa (0'1,1'1) puntuan.

i) Hasiko gara (1,1) puntuarekin: f funtzioa ez da existitzen puntu horretan, baina beraren limitea existi daiteke. Ikus dezagun existitzen den ala ez; horretarako, (1,1) puntura doan segida bat hartuko dugu, eta segida horren gaien irudien segida konbergentea den ala ez aztertuko dugu.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1).$$

$$f\left(1+\frac{1}{n},1\right) = g\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e, 3+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1} = g\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e, 3+\frac{1}{n}\right)\frac{n^2}{1+2n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1+\frac{1}{n},1\right) = \lim_{n\to\infty} g\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e, 3+\frac{1}{n}\right)\frac{n^2}{1+2n} = \lim_{n\to\infty} g\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)e, 3+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+2n} = g(e,3)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+2n}.$$

Azken limite hau existitzen ez denez (kontuan hartu behar dugu $g(e,3)\neq 0$ dela), ez da existitzen funtzioaren limitea (1,1) puntuan.
f ezin da jarraitua izan (1,1) puntuan, puntu horretan definitua ez dagoelako. Beraz, ez da deribagarria ezta diferentziagarria ere izango.

(0,1) puntuari dagokionez, f funtzioa g funtzioaren eta $\dfrac{y}{x^2-y^2}$ funtzioaren arteko biderketa da:

$g(xe^y, x+2y)$ funtzioa konposaketa bat da, alde batetik, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ da eta bestetik, $u = xe^y$ eta $v = x+2y$ funtzioak $C^1(\mathbb{R}^2)$ klasekoa dira (haien deribatu partzialak jarraituak dira), beraz, g funtzioa C^1 klasekoa da.

$\dfrac{y}{x^2-y^2}$ funtzioa bi funtzio polinomikoen (eta beraz, C^1 klasekoa) arteko zatiketa da eta izendatzailea (0,1) puntuan ezberdin zero denez, f C^1 klasekoa da (0,1) puntuan. Beraz, f funtzioa diferentziagarria, deribagarria, jarraitua eta haren limitea existitzen da eta $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = g(0,2)(-1) = -4$ da.

ii) Ikusi dugunez, f funtzioa (0,1) puntuan diferentziagarria da eta beraren diferentziala hau da:

$$\mathrm{d}_{f(0,1)}(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)h_2 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(g_1(xe^y,x+2y)\cdot e^y+g_2(xe^y,x+2y))\frac{y}{x^2-y^2}+g(xe^y,x+2y)\frac{-2xy}{(x^2-y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=\left(g_1(0,2)\cdot e+g_2(0,2)\right)(-1)=0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(g_1(xe^y,x+2y)\cdot xe^y+g_2(xe^y,x+2y)\cdot 2\right)\frac{y}{x^2-y^2}+g(xe^y,x+2y)\frac{x^2+y^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=\left(g_2(0,2)\cdot 2\right)(-1)+g(0,2)=4.$$

Orduan, $\mathrm{d}_{f(0,1)}(0'1,1'1)=4\cdot 0'1=0'4$.

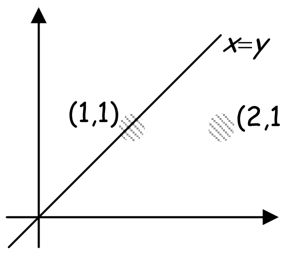
Eta hurbilketa:

$f(0'1,1'1)-f(0,1)\cong \mathrm{d}f(0,1)(0'1,0'1)=0'4$.

Beraz, $f(0'1,1'1)\cong f(0,1)+0'4=-4+0'4=-3'6$.

(2001eko iraila) Demagun $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x-y} & x\neq y\\ 2 & x=y\end{cases}$ funtzioa.

i) Jarraitua al da f (1,1) puntuan? Eta deribagarria? Eta diferentziagarria?
ii) Jarraitua al da f (2,1) puntuan? Eta deribagarria? Eta diferentziagarria?
iii) f funtzioaren 3 sestra-kurba multzo irekia da?, itxia da?, bornatua da?, trinkoa da?



i) B(1,1) bolan ((1,1) puntuan zentratutako bola) $x=y$ denean, $f(x,y)=2$ da eta $x\neq y$ denean $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$. Beraz, f funtzioa jarraitua den jakiteko, segidak erabiliko ditugu:

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)\,;\quad f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1+1+\frac{1}{n}}{1-1-\frac{1}{n}}=\frac{2+\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\ \text{ eta }\ \lim_{n\to\infty}f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\not\to .$$

Beraz, (1,1) puntuan f ez da jarraitua eta, ondorioz, ezta diferentziagarria ere (diferentziagarria izango balitz, jarraitua izango litzateke). Deribagarria den ikusteko:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+h}{h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2-h}{h^2} \not\to .$$

Ondorioz, f ez da deribagarria.

ii) B(2,1) bolan $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$ da, $x\neq y$ baita. Funtzio hori jarraitua da (bi polinomioen arteko zatiketa da) izendatzailea zero ez den bitartean, eta horrela da (2,1) puntuaren ingurunean.

f funtzioa deribagarria izateko haren lehen ordenako deribatu partzialek existitu behar dute B(2,1) bolan:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2y}{(x-y)^2} \ (x\neq y \text{ denean}) \ \text{ eta } \ \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)=-2 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{2x}{(x-y)^2} \ (x\neq y \text{ denean}) \ \text{ eta } \ \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)=4 .$$

Eta horrela ikusten dugu lehen ordenako deribatu partzialak existitzen direla B(2,1)-en, eta jarraituak direla. Hau da, f funtzioa C^1 klasekoa da, eta beraz, diferentziagarria (2,1) puntuan.

iii) f-ren 3 sestra-kurba multzo hau da:

$$K_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \frac{x+y}{x-y}=3,\ x\neq y\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 2x-4y=0\}-\{(0,0)\} .$$

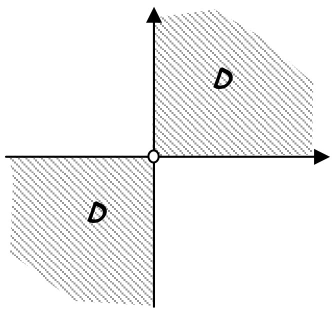
Multzo hori (zuzen bat da (0,0) puntua kenduz) ez da irekia, ezta itxia ere ((0,0) puntua muga puntua da eta ez da multzokoa), ez da bornatua (x edo y aldagaiek edozein balio har dezakete), eta ondorioz, ez da trinkoa.

(2002ko ekaina) Demagun $f(x,y)=e^{\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}}$ funtzioa.

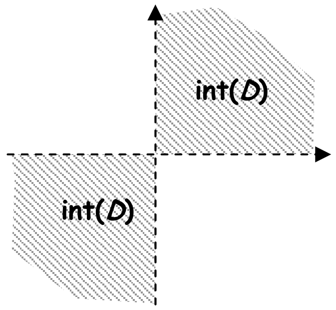
i) Aurkitu eta irudikatu D, f funtzioaren existentzi eremua, int(D) eta fr(D). Irekia al da D multzoa?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?, eta konoa? Homogeneoa al da f funtzioa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,1) puntuetan. Eman, existitzen badira, f funtzioaren lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

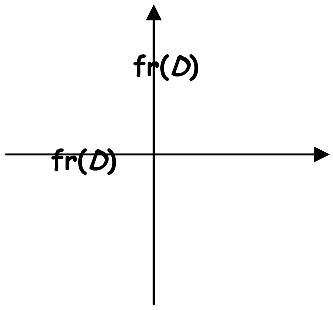
i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2\neq 0,\ xy\geq 0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy\geq 0\}-\{(0,0)\}$.



$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 0\}$.



$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0,\ y = 0\}$.



$\text{fr}(D) \not\subset D$ da, beraz, D multzoa ez da itxia; $fr(D) \cap D \neq \varnothing$, beraz, ez da irekia. Irudian ikusten dugunez, D ez da bornatua, eta ondorioz, ez da trinkoa. Bestalde, D konoa da, $\forall t > 0,\ \forall (x,y) \in D : t(x,y) \in D$ betetzen delako. Ikus dezagun f funtzioa homogeneoa den:

$$\forall t > 0 : f(tx,ty) = e^{\frac{\sqrt{txty}}{t^2x^2+t^2y^2}} = e^{\frac{\sqrt{xy}}{t(x^2+y^2)}} \neq t^{\alpha} f(x,y).$$

Beraz, f funtzioa ez da homogeneoa.

ii) $(0,0) \notin D$ da, beraz, f ez da jarraitua, deribagarria ezta diferentziagarria ere (0,0) puntuan. Existitzen al da limitea?

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{e^0\}_{n\in\mathbb{N}} = 1.$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{e^{\frac{\sqrt{1/n^2}}{1/n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{e^n\}_{n\in\mathbb{N}} \not\to.$$

Beraz, (0,0) puntuan f funtzioak ez du limiterik.

Beste alde batetik, $(1,1) \in \text{int}(D)$ da, eta f-ren lehen ordenako deribatu funtzioak hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}(x^2+y^2) - 2x\sqrt{xy}}{(x^2+y^2)^2} e^{\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\frac{x}{2\sqrt{xy}}(x^2+y^2)-2y\sqrt{xy}}{(x^2+y^2)^2}e^{\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}}.$$

Bi funtzioa horiek jarraituak dira (1,1) puntuaren ingurunean (izendatzaile bat ere ez da zero egiten, erroak ere existitzen dira), beraz, $f\in C^1(B(1,1))$ da. Beraz, f funtzioa (1,1) puntuan diferentziagarria, deribagarria eta jarraitua da, beraren limitea hau izanik:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=f(1,1)=\sqrt{e}.$$

Bukatzeko, *f*-ren lehen ordenako deribatu partzialak (1,1) puntuan hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{4}\sqrt{e}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{4}\sqrt{e}.$$

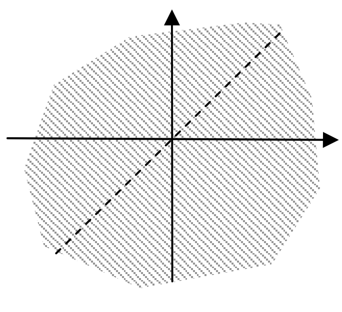
(2002ko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^4+y^4}}{(x-y)^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu *D*, *f* funtzioaren existentzi eremua, int(*D*), fr(*D*) eta *D*'.

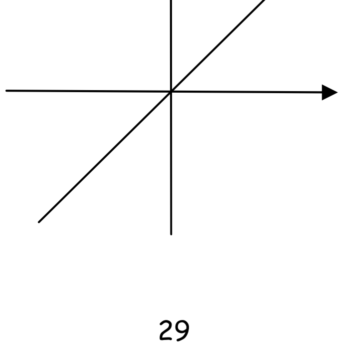
ii) Irekia al da *D* multzoa?, eta itxia?, eta trinkoa?

iii) Aztertu *f* funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,2) puntuetan. Kalkulatu, existitzen bada, lehen ordenako deribatu partzialen balioa puntu horietan.

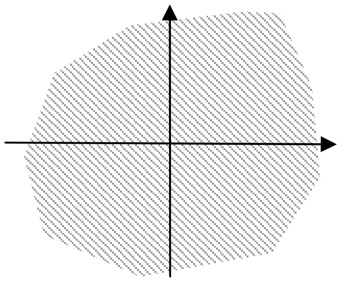
i) $$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\neq y\}=\text{int}(D).$$



$$\text{fr}(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=y\}.$$



$$D' = \mathbb{R}^2 .$$



ii) D irekia da, $D \cap \text{fr}(D) = \emptyset$ baita.
Bestalde, $\text{fr}(D) \not\subset D$ da. Hortaz, D ez da itxia.
D ez da trinkoa, itxia ez baita.

iii) Hasteko, (0,0) puntuan eskatutakoa aztertuko ditugu:
Ohartu $(0,0) \notin D$ dela. Horrela, f ezin da (0,0) puntuan jarraitua izan, bertan definitua ez dagoelako. Horrexegatik, f ez da deribagarria ezta diferentziagarria ere izango (0,0) puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia $(0,0) \in D'$ puntuan.

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)\,, \quad \left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^4}}}{\left(-\frac{1}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to 1.$$

eta

$$\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0)\,, \quad \left\{f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{\frac{2}{n^4}}}{\left(-\frac{2}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\frac{\sqrt{2}}{n^2}}{\frac{4}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bi segida hauen irudien segidek limite ezberdina dutenez, f funtzioak (0,0) puntuan ez du limiterik.

B(1,2) bolan f funtzioa jarraitua da: funtzio jarraituen zatiketa da, eta izendatzailea ez da zero egiten.
f funtzioa (1,2) puntuan jarraitua denez, f funtzioaren limitea existitzen da puntu horretan

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = \sqrt{17}\,.$$

Deribazio erregelak erabiltzeko ez dugu inongo arazorik, bertan agertzen diren funtzioak deribagarriak baitira B(1,2) bolan, eta izendatzailea ez baita zero egiten.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^3}{(x-y)^2\sqrt{x^4+y^4}} - \frac{2\sqrt{x^4+y^4}}{(x-y)^3}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3}{(x-y)^2\sqrt{x^4+y^4}} + \frac{2\sqrt{x^4+y^4}}{(x-y)^3}.$$

Ikus daitekeenez, lehen ordenako deribatu partzialak, existitzeaz gain, jarraituak dira B(1,2)-n (funtzio jarraituen eragiketa, izendatzailea zero izan gabe); hau da, f funtzioa C^1 klasekoa da, eta beraz, diferentziagarria (1,2) puntuan.

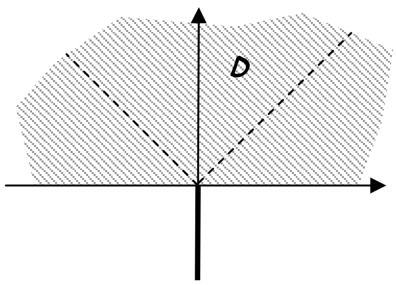
Azkenik, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{36}{\sqrt{17}}$ eta $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{18}{\sqrt{17}}$ dira.

(2003ko ekaina) Demagun $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 y}}{x^2 - y^2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D, f funtzioaren existentzi eremua, int(D), fr(D) eta D' (metatze-puntuen multzoa). Irekia al da D multzoa?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (2,1) eta (1,1) puntuetan. Kalkulatu, existitzen badira, lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y, x \neq -y, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, y < 0\}$.



$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y, x \neq -y, y > 0\}$.

$\text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = -y, y \geq 0\} \cup$

$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, y < 0\}$.

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$.

$D \cap \text{fr}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, y < 0\}$. Hortaz, D ez da irekia.
Bestalde, adibidez, (1,1) muga-puntua da, baina ez da D multzokoa, orduan, $\text{fr}(D) \not\subset D$ da, eta beraz, D ez da itxia.
$\nexists\, r > 0 / D \subset B((0,0), r)$, orduan, D ez da bornatua.
D ez da trinkoa, ez baita bornatua ezta itxia ere.

ii) Hasteko, (1,1) puntuan eskatutakoa aztertuko dugu:

Ohartu $(1,1) \notin D$ dela. Horrela, f ezin da (1,1) puntuan jarraitua izan, bertan definitua ez dagoelako. Horrexegatik, f ez da deribagarria ezta diferentziagarria ere izango (1,1) puntuan.

Azter dezagun limitearen existentzia $(1,1) \in D'$ puntuan.

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (1,1)\,, \quad \left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty\,.$$

Segida horren irudien segida konbergentea ez denez, f funtzioak (1, 1) puntuan ez du limiterik.

Bestalde, B(2,1) bolan f funtzioa jarraitua da: funtzio jarraituen zatiketa da, eta izendatzailea ezberdin zero da.

f funtzioa (2,1) puntuan jarraitua denez, f-ren limitea existitzen da puntu horretan:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y) = f(2,1) = \frac{2}{3}\,.$$

Deribazio erregelak erabiltzeko ez dugu inongo arazorik, bertan agertzen diren funtzioak deribagarriak baitira B(2,1)-en, eta izendatzailea ez baita zero egiten.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{2xy}{2\sqrt{x^2y}}(x^2-y^2) - 2x\sqrt{x^2y}}{(x^2-y^2)^2}\,.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{x^2}{2\sqrt{x^2y}}(x^2-y^2) + 2y\sqrt{x^2y}}{(x^2-y^2)^2}\,.$$

Ikus daitekeenez, f-ren lehen ordenako deribatu partzialak existitzeaz gain, jarraituak dira B(2,1)-en (funtzio jarraituen eragiketa, izendatzailea zero izan gabe); hau da, f funtzioa C^1 klasekoa da, eta beraz, diferentziagarria, (2,1) puntuan.

Azkenik, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\dfrac{5}{9}$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \dfrac{7}{9}$.

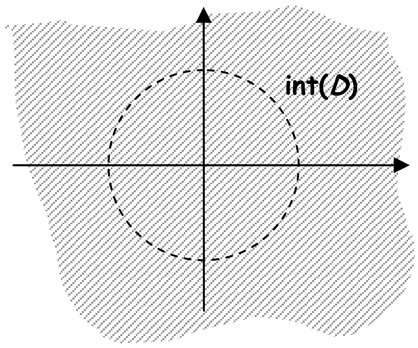
(2003ko iraila) Demagun $f(x,y) = \dfrac{x^2+\sqrt{y^2}}{x^2+y^2-4}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D, f funtzioaren existentzi eremua, int(D), fr(D) eta D' (metatze-puntuen multzoa).

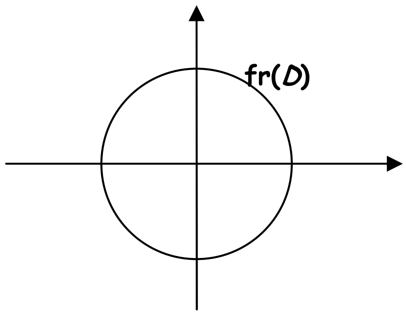
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,0), (1,1) eta (0,2) puntuetan. Kalkulatu, existitzen badira, lehen ordenako deribatu partzialen balioak puntu horietan.

i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4 \neq 0\}$.

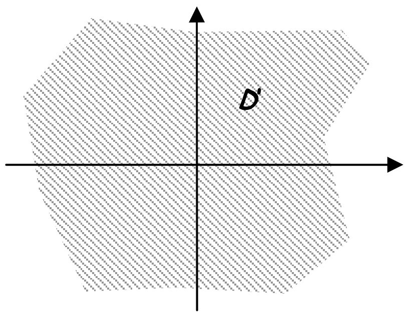
$\text{int}(D) = D$.



$\text{fr}(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 4 = 0\}$.



$D' = \mathbb{R}^2$.



ii) Hasteko, (0,0) puntuan eskatutakoak aztertuko ditugu:

$(0,0) \in \text{int}(D)$ da, eta $x^2 + \sqrt{y^2}$ eta $x^2 + y^2 - 4$ funtzio jarraituak dira B(0,0)-n. Hortaz, f funtzioa (funtzio jarraituen zatiketa da, izendatzailea ezberdin zero izanik) jarraitua da (0,0) puntuan.

f funtzioa (0,0) puntuan jarraitua denez, funtzioaren limitea existitzen da puntu horretan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0,0) = 0.$$

(0,0) puntuan deribazio erregelak erabiltzeko arazoak ditugu, zenbakitzailean erroketa funtzioa agertzen baitzaigu. Horregatik, definizioa erabiliko dugu:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2}{h^2-4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h^2-4}=0 \text{ eta}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{h^2}}{h^2-4}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h^3-4h}.$$ Limite hori ezker eta eskuinetik aztertu behar dugu:

$h>0$ bada, $f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h^3-4h}=-\dfrac{1}{4}$ da.

$h<0$ bada, $f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h^3-4h}=\dfrac{1}{4}$ da.

Ezberdinak direnez, ez da existitzen f funtzioaren y-rekiko deribatua (0,0) puntuan. Horrexegatik, f funtzioa ez da deribagarria (0,0) puntuan.

(0,0) puntuan f deribagarria ez denez, ez da diferentziagarria izango puntu horretan.

Orain, (1,1) puntuan aztertuko dugu.

$(1,1)\in \text{int}(D)$ da, eta $x^2+\sqrt{y^2}$ eta x^2+y^2-4 funtzio jarraituak dira B(1,1)-en. Hortaz, f funtzioa (funtzio jarraituen zatiketa da, izendatzailea ezberdin zero izanik) jarraitua da (1,1) puntuan.

f funtzioa (1,1) puntuan jarraitua denez, funtzioaren limitea existitzen da puntu horretan:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=f(1,1)=-1.$$

Deribagarritasuna aztertzeko ez dugu inongo arazorik, bertan agertzen diren funtzioak deribagarriak baitira B(1,1)-en, eta izendatzailea ez baita zero egiten:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2-4)-2x\left(x^2+\sqrt{y^2}\right)}{(x^2+y^2-4)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2}}(x^2+y^2-4)-2y\left(x^2+\sqrt{y^2}\right)}{(x^2+y^2-4)^2}.$$

Ikus daitekeenez, lehen ordenako deribatu partzialak, existitzeaz gain, jarraituak dira B(1,1)-en (funtzio jarraituen eragiketa, izendatzailea zero izan gabe); hau da, f funtzioa C^1 klasekoa da, eta beraz, diferentziagarria (1,1) puntuan.

Azkenik, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-2$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-\dfrac{3}{2}$ dira.

Orain (0,2) puntuan aztertuko dugu: Ohartu $(0,2)\notin D$ dela. Horrela, f ezin da (0,2) puntuan jarraitua izan, bertan definitua ez dagoelako. Horrexegatik, ez da deribagarria ezta diferentziagarria ere izango.

Azter dezagun limitearen existentzia $(0,2)\in D'$ puntuan.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,2)\,,\quad \left\{f\left(\frac{1}{n},2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n^2}+2}{\frac{1}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{1+2n^2\right\}_{n\in\mathbb{N}}\not\to$$

Segida honen irudien segida konbergentea ez denez, f funtzioak (0,2) puntuan ez du limiterik.

(2004ko ekaina) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ funtzioa.

a) Aztertu jarraitutasuna eta limitearen existentzia (0,0) puntuan.
b) Kalkulatu, posible bada, f-ren diferentziala (1,1) puntuan, eta horren bidez, $f(1'01,0'97)$-ren gutxi gorabeheherako balioa.

a) (0,0) puntua ez da f-ren existentzi eremuko puntua, beraz, f ez da jarraitua puntu horretan. Limitea aztertzeko, segidak erabiliko ditugu:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\,,\text{ eta }\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\frac{1}{2}.$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\,,\text{ eta }\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to1.$$

(0,0) puntura doazen bi segida horien gaien irudien limitea ez da zenbaki bera. Hortaz, ez da existitzen f-ren limitea (0,0)-n.

b) (1,1) puntuaren ingurunean, zenbakitzailea (x^2) eta izendatzailea (x^2+y^2) C^1 klaseko funtzioak dira, eta izendatzailea ez da zero egiten. Beraz, f funtzioa C^1 klasekoa da (1,1) puntuaren ingurunean, eta ondorioz, diferentziagarria.

$$df(1,1)(h_1,h_2)=f_1(1,1)h_1+f_2(1,1)h_2=\left[\frac{2x(x^2+y^2)-2x^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]_{(1,1)}h_1+\left[-\frac{2x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]_{(1,1)}h_2=0'5h_1-0'5h_2.$$

Orduan,

$$f(1'01,0'97)=f(1,1)+df(1,1)(0'01,-0'03)=0'5+0'15=0'65.$$

(2004ko ekaina) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatuak, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ izanik:

i) $z = x^3y + x^2y^2 + \sqrt[3]{x^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2x^2y.$$

ii) $z = xe^{-x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2+y^2} - 2x^2e^{-x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2xye^{-x^2+y^2}.$$

iii) $z = \ln\sqrt{1+x^2y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{xy^2}{1+x^2y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y}{1+x^2y^2}.$$

iv) $z = f(x,\sin(x^2))$.

$$\frac{dz}{dx}(x) = f_1(x,\sin(x^2)) + f_2(x,\sin(x^2))2x\cos(x^2).$$

v) $z = xg(x^2y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = g(x^2y) + xg'(x^2y)2xy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = xg'(x^2y)x^2.$$

vi) $z = yf(x+y,x-y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = yf_1(x+y,x-y) + yf_2(x+y,x-y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = f(x+y,x-y) + y\left(f_1(x+y,x-y) - f_2(x+y,x-y)\right).$$

(2004ko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y+a}$ funtzioa. Aztertu f-ren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta deribagarritasuna (0,0) puntuan, $a\in\mathbb{R}$ balio guztietarako.

$a=0$ denean, $f(x,y)=\dfrac{x}{x-y}$ ez da jarraitua ezta deribagarria ere (0,0) puntuan, puntu horretan funtzioa existitzen ez delako. Limiteari dagokionez,

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),\ \text{eta}\ \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1\,.$$

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),\ \text{eta}\ \left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to 0\,.$$

Beraz, (0,0) puntura doazen bi segida horien irudien segiden limitea ez da zenbaki bera, hau da, limitea ez da existitzen (0,0) puntuan.

$a\neq0$ denean, f jarraitua da: zenbakitzailea (x) eta izendatzailea ($x-y+a$) jarraituak dira, eta gainera, izendatzailea ez da zero egiten (0,0) puntuan. f-ren limitea (0,0) puntuan, funtzioak puntu horretan hartzen duen balioa da, hots, $f(0,0)=0$. Eta deribatuak hauek dira:

$$f_1(x,y)=\frac{-y+a}{(x-y+a)^2}\ \text{eta}\ f_1(0,0)=\frac{1}{a}\,.$$

$$f_2(x,y)=\frac{x}{(x-y+a)^2}\ \text{eta}\ f_2(0,0)=0\,.$$

Beraz, f funtzioa deribagarria da (0,0) puntuan.

(2004ko iraila) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatuak, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik:

i) $z=x^2y^3-2xy+y+3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=2xy^3-2y\,.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=3x^2y^2-2x+1\,.$$

ii) $z=x\cos(xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\cos(xy)-xy\sin(xy)\,.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(xy)\,.$$

iii) $z = (x^2 - 2y^3)^5$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 10x(x^2 - 2y^3)^4.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -30y^2(x^2 - 2y^3)^4.$$

iv) $z = xf(x-y, x^2-y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = f(x-y,x^2-y) + xf_1(x-y,x^2-y) + 2x^2 f_2(x-y,x^2-y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -xf_1(x-y,x^2-y) - xf_2(x-y,x^2-y).$$

v) $z = e^{xf(x,y)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = e^{xf(x,y)}(f(x,y) + xf_1(x,y)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = e^{xf(x,y)}xf_2(x,y).$$

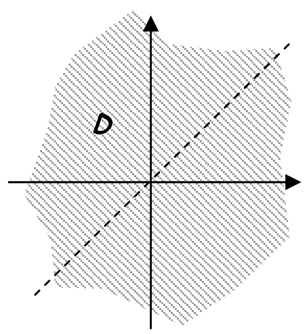
vi) $z = f(x, e^{-x})$.

$$\frac{dz}{dx}(x) = f_1(x,e^{-x}) - e^{-x}f_2(x,e^{-x}).$$

(2005eko ekaina) Demagun $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.
iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$.



ii) $(0,0)\notin D$ betetzen da, beraz ez du zentzurik f-ren jarraitutasuna ezta diferentziagarritasuna ere aztertzea (0,0)-n. (0,0) puntua D-ren mugan dagoenez, limitearen existentzia azter dezakegu:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,\ \left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),\ f\left(\frac{1}{n},0\right)=\frac{1/n}{1/n}=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,\ \left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),\ f\left(0,\frac{1}{n}\right)=\frac{1/n}{-1/n}=-1\xrightarrow[n\to\infty]{}-1.$$

Emaitzak ezberdinak direnez, ez da existitzen f-ren limitea (0,0) puntuan.

iii) f bi funtzio polinomikoen ($\mathbb{R}^2$-n jarraituak) zatiketa denez, f jarraitua da izendatzailea zero egiten ez duten puntu guztietan. Gure kasuan, (1,2) puntuan. Gainera, f funtzioa (1,2) puntuan jarraitua izateagatik, f-ren limitea (1,2)-n existitzen da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(\boldsymbol{x})=f(1,2)=-3.$$

Bestalde, f funtzioa bi funtzio polinomikoen ($\mathbb{R}^2$-n diferentziagarriak) zatiketa denez, f diferentziagarria da izendatzailea zero egiten ez duten puntu guztietan. Gure kasuan, (1,2) puntuan.

(2005eko ekaina) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak eta kalkulatu, existitzen badira, $z_x(0,0)$ eta $z_y(0,0)$:

i) $z=e^x x^2+e^{y^2}\cos(x)$.

$z_x=e^x x^2+2xe^x-e^{y^2}\sin(x)$.

$z_y=2ye^{y^2}\cos(x)$.

$z_x(0,0)=0$.

$z_y(0,0)=0$.

ii) $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+1}$.

$$z_x=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}(x+1)-\sqrt{x^2+y^2}}{(x+1)^2}=\frac{x(x+1)-(x^2+y^2)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x-y^2}{(x+1)^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$z_y=\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{(x+1)}=\frac{y}{(x+1)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$z_x(0,0) = \dfrac{0}{0}$ indeterminazioa.

$z_y(0,0) = \dfrac{0}{0}$ indeterminazioa.

Hortaz, $z_x(0,0)$ eta $z_y(0,0)$ existitzen diren jakiteko, definizioarekin lan egin behar dugu:

$$z_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{h^2}}{h+1}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h(h+1)} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h+1} = 1. \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h(h+1)} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1}{h+1} = -1. \end{cases}$$

Ezkerretik eta eskuinetik limiteak ezberdinak direnez, $z_x(0,0)$ ez da existitzen. Modu berdinean:

$$z_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} 1 = 1. \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} -1 = -1. \end{cases}$$

Ezkerretik eta eskuinetik limiteak ezberdinak direnez, $z_y(0,0)$ ez da existitzen.

iii) $z = xy^2\sin(xy)$.

$z_x = y^2\sin(xy) + xy^3\cos(xy)$.

$z_y = 2xy\sin(xy) + x^2y^2\cos(xy)$.

Ordezkatuz:

$z_x(0,0) = 0.$

$z_y(0,0) = 0.$

iv) $z = x^2y^3f(2xy, e^{y+3})$.

$z_x = 2xy^3f(2xy,e^{y+3}) + x^2y^3f_1(2xy,e^{y+3})2y = 2xy^3f(2xy,e^{y+3}) + 2x^2y^4f_1(2xy,e^{y+3})$.

$z_y = 3x^2y^2f(2xy,e^{y+3}) + x^2y^3\left[f_1(2xy,e^{y+3})2x + f_2(2xy,e^{y+3})e^{y+3}\right]$.

Ordezkatuz:

$z_x(0,0) = 0.$

$z_y(0,0) = 0.$

(2005eko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{(y+1)x}$ funtzioa.

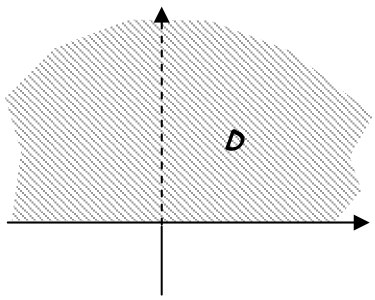
i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,1) puntuan.

iv) Esan, arrazoituz, adierazpen hau zuzena den: $h>0$ eta $k>0$ nahiko txikiak badira, orduan, $f(1+h,1+k)>f(1,1)$ izango da.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\geq 0, x\neq 0\}$.



ii) $(0,0)\notin D$ betetzen da, beraz ez du zentzurik f-ren jarraitutasuna ezta diferentziagarritasuna aztertzeak (0,0)-n. (0,0) puntua D-ren mugan dagoenez, limitearen existentzia azter dezakegu:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D,\ \left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0),$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{(\frac{1}{n}+1)\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{n^2}{\sqrt{n}(n+1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty.$$

Azken segida hori dibergentea da. Hortaz, ez da existitzen f-ren limitea (0,0) puntuan.

iii) f funtzioa, (1,1) puntuan, bi funtzio jarraituen zatiketa denez, eta izendatzailea ezberdin zero denez, jarraitua da. Gainera, f funtzioa (1,1) puntuan jarraitua izateagatik, f-ren limitea (1,1)-en existitzen da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)}f(x,y)=f(1,1)=\frac{1}{2}.$$

Bestalde, (1,1) puntuaren ingurunean, bi funtzio diferentziagarrien zatiketa denez eta izendatzailea ezberdin zero denez, f diferentziagarria da (1,1) puntuan.

iv) $f(1+h,1+k)>f(1,1)\Leftrightarrow f(1+h,1+k)-f(1,1)>0$.

$f(1+h,1+k)-f(1,1)\simeq df_{(1,1)}(h,k)$.

$$df_{(1,1)}(h,k)=hf_x(1,1)+kf_y(1,1)=-\frac{h}{2}.$$

Orduan, gezurra da, $f(1+h,1+k)-f(1,1)<0$ baita $h>0$ eta $k>0$ balioentzat.

(2005eko iraila) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu, existitzen badira, funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak.

i) $f(x,y)=(x-y)e^{x^3y}$.

$f_x(x,y)=e^{x^3y}(1+3x^2y(x-y))$.

$f_y(x,y)=e^{x^3y}(-1+x^3(x-y))$.

ii) $f(x,y)=\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+1}$.

$$f_x(x,y)=\frac{2x}{3(x^2+y^2+1)}.$$

$$f_y(x,y)=\frac{2y}{3(x^2+y^2+1)}.$$

iii) $z=g(xy)+f(3x-y,x^2+y^2)$.

$z_x=g'(xy)y+f_1(3x-y,x^2+y^2)3+f_2(3x-y,x^2+y^2)2x$.

$z_y=g'(xy)x-f_1(3x-y,x^2+y^2)3+f_2(3x-y,x^2+y^2)2y$.

iv) $z=f(x^2-y^2,x+y)g(x-y)$.

$z_x=\left[f_1(x^2-y^2,x+y)2x+f_2(x^2-y^2,x+y)\right]g(x-y)+g'(x-y)f(x^2-y^2,x+y)$.

$z_y=\left[-f_1(x^2-y^2,x+y)2y+f_2(x^2-y^2,x+y)\right]g(x-y)-g'(x-y)f(x^2-y^2,x+y)$.

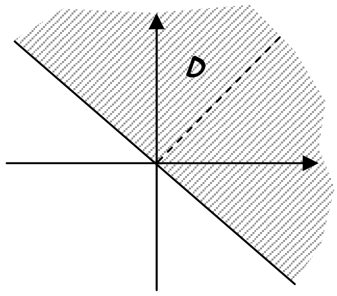
(2006ko ekaina) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y}}{x-y}$ funtzioa

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq -y,\;\; x \neq y\}$.



ii) (0,0)$\notin D$ da, hortaz f ez da jarraitua ezta diferentziagarria ere (0,0) puntuan. Azter dezagun limitearen existentzia segiden bidez:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,0) \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \to \infty .$$

Azken segida hau dibergentea da. Beraz, f funtzioa ez da jarraitua (0,0) puntuan.

iii) $(1,2) \in \operatorname{int}(D)$ da. f funtzioa jarraitua da (1,2) puntuan: $\sqrt{x+y}$ eta $x-y$ funtzioak jarraituak dira puntu horretan, eta izendatzailea ez da zero egiten. Horrela, Gainera, f funtzioaren limitea (1,2) puntuan funtzioak puntu horretan hartzen duen balioa da.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2) = -\sqrt{3} .$$

f funtzioa (1,2) puntuan diferentziagarria den ikusteko, baldintza nahikoak erabiltzen saiatuko gara, hau da, f-k (1,2) puntuan deribatu partzial funtzio jarraituak dituen aztertuko dugu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{x-y}{2\sqrt{x+y}} - \sqrt{x+y}}{(x-y)^2} = \frac{-x-3y}{2(x-y)^2\sqrt{x+y}} .$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,2) puntuan, zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak jarraituak baitira eta, gainera, izendatzailea ez baita zero egiten puntu horretan.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{x-y}{2\sqrt{x+y}} + \sqrt{x+y}}{(x-y)^2} = \frac{3x+y}{2(x-y)^2\sqrt{x+y}} .$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,2) puntuan, zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak jarraituak baitira eta, gainera, izendatzailea ez baita zero egiten puntu horretan.

Horrela, f funtzioak deribatu partzial funtzio jarraituak ditu (1,2) puntuan eta baldintza hori nahikoa da f funtzioa (1,2) puntuan diferentziagarria dela esateko.

(2006ko ekaina) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z = \sqrt[3]{\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\dfrac{2(x^2+y^2+1)-2x(2x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}} = \frac{-2x^2+2y^2+2xy+2}{3(x^2+y^2+1)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{-(x^2+y^2+1)-2y(2x-y)}{(x^2+y^2+1)^2}}{3\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}} = \frac{-x^2+y^2-4xy-1}{3(x^2+y^2+1)^2\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-y}{x^2+y^2+1}\right)^2}}.$$

ii) $z = \cos(2^e xy + e^{x^2y^2})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\sin(2^e xy + e^{x^2y^2})(2^e y + 2xy^2e^{x^2y^2}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\sin(2^e xy + e^{x^2+y^2})(2^e x + 2x^2ye^{x^2y^2}).$$

iii) $z = \dfrac{2}{y^2+1}g\left(\dfrac{x-2}{e^x}\right) + f(x^2+3y, y^3)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{y^2+1}g'\left(\frac{x-2}{e^x}\right)\left(\frac{e^x - e^x(x-2)}{e^{2x}}\right) + f_1(x^2+3y, y^3)2x =$$

$$= \frac{6-2x}{e^x(y^2+1)}g'\left(\frac{x-2}{e^x}\right) + 2xf_1(x^2+3y, y^3).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{-4y}{(y^2+1)^2}g\left(\frac{x-2}{e^x}\right) + 3f_1(x^2+3y, y^3) + 3y^2f_2(x^2+3y, y^3).$$

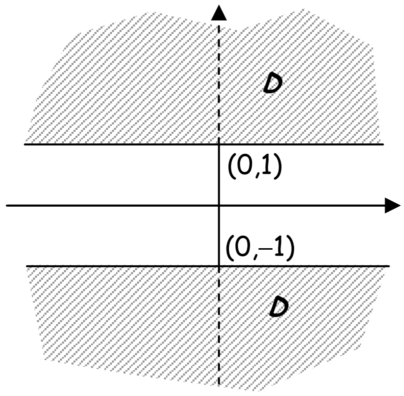
(2006ko iraila) Demagun $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{x} + \dfrac{2}{y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,1) puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (1,2) puntuan.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\neq 0,\ |y|\geq 1\}$.



ii) $(0,1)\notin D$ betetzen da, hortaz, f ez da jarraitua ezta diferentziagarria ere (0,1) puntuan. Azter dezagun limitearen existentzia segiden bidez:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,1)\quad \text{eta}$$

$$\left\{f\left(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-1}{\frac{1}{n}}}+\frac{2}{1+\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\sqrt{2n+1}+2\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty .$$

Azken segida hori dibergentea denez, f funtzioak ez du limiterik (0,1) puntuan.

iii) $(1,2)\in\text{int}(D)$ betetzen da.
Orain f funtzioa (1,2) puntuan jarraitua den aztertuko dugu.

Puntu horretan $\frac{\sqrt{y^2-1}}{x}$ funtzioa jarraitua da (horrela baitira $\sqrt{y^2-1}$ eta x, azken hau puntu horretan nulua ez izanik). $\frac{2}{y}$ funtzioa ere jarraitua da (1,2) puntuan, funtzio jarraituen zatiketa baita, izendatzailea ez nulua izanik.

Horrela, $f(x,y)=\frac{\sqrt{y^2-1}}{x}+\frac{2}{y}$ funtzioa jarraitua da (1,2) puntuan, funtzio jarraituen batuketa delako.

Eta gainera, horregatik, f funtzioaren limitea (1,2) puntuan funtzioak puntu horretan hartzen duen balioa da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=f(1,2)=\sqrt{3}+1 .$$

f funtzioa (1,2) puntuan diferentziagarria den ikusteko, baldintza nahikoak erabiltzen saiatuko gara, hau da, f-k (1,2) puntuan deribatu partzial funtzio jarraituak dituen aztertuko dugu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{\sqrt{y^2-1}}{x^2}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,2) puntuan, zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak jarraituak baitira eta, gainera, izendatzailea ez baita nulua puntu horretan.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\dfrac{2y}{2\sqrt{y^2-1}}x}{x^2}-\frac{2}{y^2}=\frac{y}{x\sqrt{y^2-1}}-\frac{2}{y^2}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,2) puntuan, zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak jarraituak baitira eta, gainera, izendatzailea ez baita nulua puntu horretan.

Horrela, f funtzioak deribatu partzial funtzio jarraituak ditu (1,2) puntuan, eta baldintza hau nahikoa da f funtzioa (1,2) puntuan diferentziagarria dela esateko.

(2006ko iraila) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z = x^2 y \ln(2+x^2+y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=2xy\ln(2+x^2+y^2)+\frac{2x}{2+x^2+y^2}(x^2y)=2xy\left(\ln(2+x^2+y^2)+\frac{x^2}{2+x^2+y^2}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=x^2\ln(2+x^2+y^2)+\frac{2y}{2+x^2+y^2}(x^2y)=x^2\left(\ln(2+x^2+y^2)+\frac{2y^2}{2+x^2+y^2}\right).$$

ii) $z = f(xy^2,\sin(xy))+f(x^2,y)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=f_1(xy^2,\sin(xy))y^2+f_2(xy^2,\sin(xy))y\cos(xy)+f_1(x^2,y)2x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=f_1(xy^2,\sin(xy))2yx+f_2(xy^2,\sin(xy))x\cos(xy)+f_2(x^2,y).$$

iii) $z=\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}$ non $f(x,y)\geq 0$ den, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$..

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\frac{2xf_1(x^2-y^2,2xy)+2yf_2(x^2-y^2,2xy)}{2\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}}=\frac{xf_1(x^2-y^2,2xy)+yf_2(x^2-y^2,2xy)}{\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\frac{-2yf_1(x^2-y^2,2xy)+2xf_2(x^2-y^2,2xy)}{2\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}}=\frac{-yf_1(x^2-y^2,2xy)+xf_2(x^2-y^2,2xy)}{\sqrt{f(x^2-y^2,2xy)}}.$$

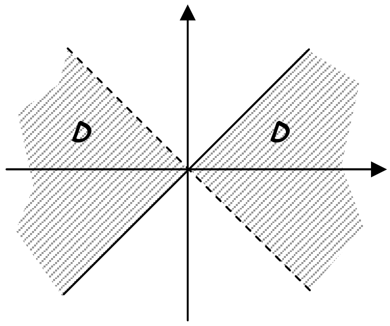
(2007ko ekaina) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua.

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (1,0) puntuetan.

iii) (1,0) puntuan f funtzioaren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, $f(0'97,0'02)-f(1,0)$ balioa.

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2\geq y^2,\;\; x\neq -y\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,|x|\geq|y|,\;\; x\neq -y\}$.



ii) $(0,0)\notin D$ da, hortaz, f ez da jarraitua ezta diferentziagarria ere (0,0) puntuan. Azter dezagun existentzia segiden bidez:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad \text{eta}\quad \left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{1\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1.$$

Beste segida bat: $\left\{\left(-\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)$ eta $\left\{f\left(-\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{-1\}_{n\in\mathbb{N}}\to -1$.

Eta horrela, f funtzioak ez du limiterik (0,0) puntuan.

$(1,0)\in\text{int}(D)$ da.

f funtzioa jarraitua da (1,0) puntuan, funtzio jarraituen eragiketa baita. Horregatik, f funtzioaren limitea (1,0) puntuan funtzioak puntu horretan lortzen duen balioa da:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=1.$$

f funtzioa (1,0) puntuan diferentziagarria den ikusteko, baldintza nahikoak erabiltzen saiatuko gara, hau da, f-k (1,0) puntuan deribatu partzial funtzio jarraituak dituen aztertuko dugu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\dfrac{2x(x+y)}{2\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x^2-y^2}}{(x+y)^2}=\frac{xy+y^2}{(x+y)^2\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,0) puntuan, horrela baitira zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\dfrac{-2y(x+y)}{2\sqrt{x^2-y^2}} - \sqrt{x^2-y^2}}{(x+y)^2} = \frac{-yx-x^2}{(x+y)^2\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (1,0) puntuan, horrela baitira zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak.
Horrela, f funtzioak deribatu partzial funtzio jarraituak ditu (1,0) puntuan eta baldintza hori nahikoa da f funtzioa (1,0) puntuan diferentziagarria dela esateko.

iii) $f(0'97,0'02) - f(1,0) \simeq df_{(1,0)}(-0'03,0'02) =$

$$= -0'03\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 0'02\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -0'03(0) + 0'02(-1) = -0'02.$$

(2007ko ekaina) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z = \sin(xy - e^{xy^2})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = (y - y^2e^{xy^2})\cos(xy - e^{xy^2}).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = (y - y^2e^{xy^2})\cos(xy - e^{xy^2}).$$

ii) $z = x^3y^2 + \sqrt{x^2+y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 2x^3y + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}.$$

iii) $z = \ln(f(x^3y^2, x^2+y))$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{f_1(x^3y^2, x^2+y)3x^2y^2 + f_2(x^3y^2, x^2+y)2x}{f(x^3y^2, x^2+y)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{f_1(x^3y^2, x^2+y)2x^3y + f_2(x^3y^2, x^2+y)}{f(x^3y^2, x^2+y)}.$$

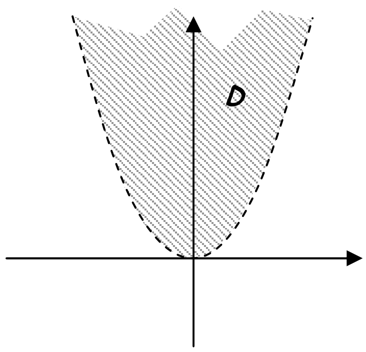
(2007ko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}}{\sqrt{y-x^2}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu D multzoa, f funtzioaren existentzi eremua. Irekia da?, itxia?, bornatua? eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) eta (0,1) puntuetan.

iii) (0,1) puntuan f funtzioaren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, $f(0'02,0'98)-f(0,1)$ balioa

i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y>x^2\}$.



Irekia al da D multzoa? Ikusten dugunez, $\text{fr}(D)\cap D\neq\emptyset$ da, hortaz, D irekia da.

Eta itxia? Ez, ez da itxia, $\text{fr}(D)\not\subseteq D$ betetzen baita.

Eta bornatua? Ez, $\nexists r>0 / D\subset B((0,0),r)$.

Eta trinkoa? Ez, ez baita itxia.

ii) (0,0)$\notin D$ da, hortaz, f ez da jarraitua ezta diferentziagarria ere (0,0) puntuan. Azter dezagun existentzia segiden bidez:

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0) \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{e^0}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{\sqrt{n}\}_{n\in\mathbb{N}}\to\infty.$$

Azken segida hori ez da konbergentea, eta horregatik, f funtzioak ez du limiterik (0,0) puntuan.

(0,1)$\in\text{int}(D)$ betetzen da.

f funtzioa jarraitua da (0,1) puntuan, funtzio jarraituen eragiketa baita. Horregatik, f funtzioaren limitea (0,1) puntuan funtzioak puntu horretan lortzen duen balioa da:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=f(0,1)=1.$$

f funtzioa (0,1) puntuan diferentziagarria den ikusteko, baldintza nahikoak erabiltzen saiatuko gara, hau da, f-k (0,1) puntuan deribatu partzial funtzio jarraituak dituen aztertuko dugu.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{ye^{xy}\sqrt{y-x^2}+\dfrac{2x}{2\sqrt{y-x^2}}e^{xy}}{y-x^2}=\frac{ye^{xy}(y-x^2)+xe^{xy}}{(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da, (0,1) puntuan, horrela baitira zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{xe^{xy}\sqrt{y-x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{y-x^2}}e^{xy}}{y-x^2}=\frac{2xe^{xy}(y-x^2)-e^{xy}}{2(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Deribatu partzial funtzio hori jarraitua da (0,1) puntuan, horrela baitira zenbatzailean eta izendatzailean agertzen diren funtzioak.
Horrela, f funtzioak deribatu partzial funtzio jarraituak ditu (0,1) puntuan, eta baldintza hori nahikoa da f funtzioa (0,1) puntuan diferentziagarria dela esateko.

iii) $f(0'02,0'98)-f(0,1)\simeq df_{(0,1)}(0'02,-0'02)=$
$$=0'02\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)-0'02\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=0'02(1)-0'02\left(-\frac{1}{2}\right)=0'03.$$

(2007ko iraila) $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ badira, kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzial funtzioak:

i) $z=(x^2+3xy+5y)e^{x^3y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=(2x+3y)e^{x^3y^2}+3x^2y^2e^{x^3y^2}(x^2+3xy+5y)=e^{x^3y^2}(2x+3y+3x^2y^2(x^2+3xy+5y)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=(3x+5)e^{x^3y^2}+2yx^3e^{x^3y^2}(x^2+3xy+5y)=e^{x^3y^2}(3x+5+2yx^3(x^2+3xy+5y)).$$

ii) $z=\cos(\sqrt[3]{x^2-y})+\ln(x+y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=-\sin(\sqrt[3]{x^2-y})\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-y)^2}}+\frac{1}{x+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\sin(\sqrt[3]{x^2-y})\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-y)^2}}+\frac{2y}{x+y^2}.$$

iii) $z=f(x^2+y^2,y^3)+g(x^3y+3x^2)$.

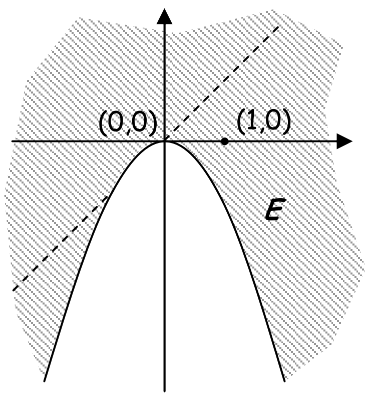
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=f_1(x^2+y^2,y^3)2x+g'(x^3y+3x^2)(3x^2y+6x).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=f_1(x^2+y^2,y^3)2y+f_2(x^2+y^2,y^3)3y^2+g'(x^3y+3x^2)x^3.$$

(2008ko ekaina) Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua.
ii) Jarraitua al da f funtzioa (0,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da f funtzioaren limitea puntu horretan?
iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da f funtzioaren limitea puntu horretan?

i) f-ren existentzi eremua: $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y\geq 0,\ x\neq y\}$.



ii) (0,0)$\notin E$ da, beraz, f funtzioa ez da jarraitua, ez deribagarria ezta diferentziagarria ere puntu horretan. Azter dezagun funtzioaren limitea:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Baina azken segida hori ez da existitzen. Segida hori ezin dugu hartu, existentzi eremuan ez dagoelako: $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\not\subset E$.

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1.$$

$$\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{-\frac{n}{\sqrt{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty.$$

Eta (0,0) puntura doazen bi segiden gaien irudien segidak puntu desberdinetara doazenez (gainera, horietako bat infiniturantz doa), funtzioak (0,0) puntuan ez du limiterik.

iii) $(1{,}0)\in \text{int}(E)$ da. Azter dezagun f funtzioaren diferentziagarritasuna (f diferentziagarria bada, zuzenean, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta limitearen existentzia ziurtatuko ditugu). Horretarako, funtzioaren deribatu partzialek (1,0) puntuaren ingurunean jarraituak izan behar dute:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\dfrac{x(x-y)}{\sqrt{x^2+y}}-\sqrt{x^2+y}}{(x-y)^2}.$$

(1,0)-ren ingurunean zenbakitzailea funtzio jarraituen zatiketa eta kendura da, $\sqrt{x^2+y}>0$ izanik, beraz, jarraitua da. Izendatzailea jarraitua da eta desberdin zero (1,0) puntuaren ingurunean. Hots, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ jarraitua da (1,0)-ren ingurunean.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\dfrac{(x-y)}{2\sqrt{x^2+y}}+\sqrt{x^2+y}}{(x-y)^2}.$$

(1,0)-ren ingurunean zenbakitzailea funtzio jarraituen zatiketa eta kendura da, $\sqrt{x^2+y}>0$ izanik, beraz, jarraitua da. Izendatzailea jarraitua da eta desberdin zero (1,0) puntuaren ingurunean. Hots, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jarraitua da (1,0)-ren ingurunean.

Beraz, $f\in C^1(B(1,0))$ denez, f funtzioa (1,0) puntuaren ingurunean diferentziagarria da. Ondorioz, jarraitua da, deribagarria da eta $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=1$ da.

(2008ko ekaina) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=x^2y\cos(x-y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy\cos(x-y^2)-x^2y\sin(x-y^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos(x-y^2)+2x^2y^2\sin(x-y^2).$$

ii) $z=\ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y}.$$

iii) $z=\dfrac{x+y}{2y}h(x^2,(x-y)^3)$, $h\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2y}h(x^2,(x-y)^3)+\frac{x+y}{2y}\left(2xh_1(x^2,(x-y)^3)+3(x-y)^2h_2(x^2,(x-y)^3)\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{2y^2}h(x^2,(x-y)^3)+\frac{x+y}{2y}\left(-3(x-y)^2h_2(x^2,(x-y)^3)\right).$$

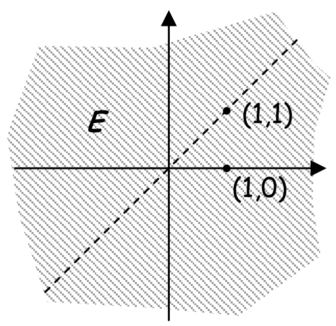
(2008ko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{x-y^2}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?

ii) Jarraitua al da f funtzioa (1,1) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da funtzioaren limitea puntu horretan?

iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,0) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria? Existitzen al da funtzioaren limitea puntu horretan?

i) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\neq y\}$.



E multzoan muga-punturik ez dagoenez ($\mathrm{fr}(E)\cap E=\varnothing$), E irekia da.

ii) $(1,1)\notin E$ da, beraz, f funtzioa ez da jarraitua, ez deribagarria ezta diferentziagarria ere puntu horretan. Existitzen al da f funtzioaren limitea (1,1) puntuan?

$$\left\{\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)\quad\text{eta}$$

$$\left\{f\left(1,1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}}{-\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{1+2n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to 2\,.$$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(1,1)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(1+\frac{1}{n},1\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{1\}_{n\in\mathbb{N}}\to 1\,.$$

(1,1) puntura doazen bi segiden gaien irudien segidak puntu desberdinetara doazenez, f funtzioak (1,1) puntuan ez du limiterik.

iii) $(1,0)\in\mathrm{int}(E)$ da. Azter dezagun diferentziagarritasuna (f diferentziagarria bada, zuzenean, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta limitearen existentzia ziurtatuko ditugu).

Horretarako, funtzioaren deribatu partzialek (1,0) puntuaren ingurunean jarraituak izan behar dute:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^2-y}{(x-y)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y^2+x-2xy}{(x-y)^2}.$$

Aurreko deribatu partzial funtzioak polinomioen arteko zatiketak dira, izendatzailea (1,0)-ren ondoan ezberdin zero izanik, hau da, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ eta $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ jarraituak dira (1,0)-ren ingurunean.

Beraz, $f\in C^1(B(1,0))$ denez, f funtzioa diferentziagarria da. Ondorioz, f jarraitua eta deribagarria da, eta $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)=f(1,0)=1$ da.

(2008ko iraila) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=x^2+\frac{1}{y}+\sin(\ln(x))$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+\frac{1}{x}\cos(\ln(x)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}.$$

ii) $z=\ln\left(\sqrt{x^2+y}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2(x^2+y)}.$$

iii) $z=e^{x^2y}f(x^2,x^3-y^2)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xye^{x^2y}f(x^2,x^3-y^2)+e^{x^2y}(2xf_1(x^2,x^3-y^2)+3x^2f_2(x^2,x^3-y^2)).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2e^{x^2y}f(x^2,x^3-y^2)-e^{x^2y}2yf_2(x^2,x^3-y^2).$$

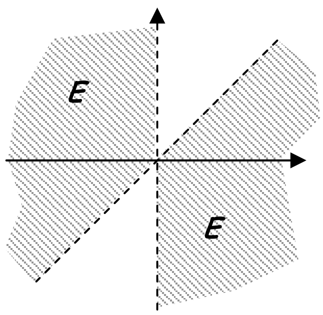
(2009ko ekaina) Demagun $f(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{x(x-y)}}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f-ren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Existitzen al da $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

iii) Jarraitua al da f funtzioa (1,–1) puntuan?, eta deribagarria?, eta diferentziagarria?, Hala denean, kalkulatu diferentziala puntu horretan eta $f(0'99,-0'98)$ -ren gutxi gorabeherako balioa.

i) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x(x-y)>0\}=$
$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x>0,\ x-y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x<0,\ x-y<0\}$.



Irudian ikusten den bezala, E irekia da (E multzoan muga-punturik ez dago) eta ez da bornatua. Ondorioz, ez da trinkoa.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ kalkulatzeko, (0,0) puntura doazen segidak hartuko ditugu:

$$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{baina}\quad\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\not\subset E .$$

$$\left\{\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(\frac{1}{n},0\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0\}_{n\in\mathbb{N}}\to 0 .$$

$$\left\{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0)\quad\text{eta}\quad\left\{f\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{n}{n\sqrt{2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to\frac{1}{\sqrt{2}} .$$

(0,0) puntura doazen bi segida hartu ditugu eta segida horien irudien segiden limiteak ezberdinak direnez, funtzioak ez du limiterik (0,0) puntuan.

iii) $(1,-1)\in\operatorname{int}(E)$ da.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{(2x-y)y}{2x(x-y)\sqrt{x(x-y)}} .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\sqrt{x(x-y)}+\dfrac{xy}{2\sqrt{x(x-y)}}}{x(x-y)}=\frac{2x-y}{2(x-y)\sqrt{x(x-y)}}.$$

Eta (1,–1) puntuan:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)=\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Bi deribatu funtzio horiek (1,–1) puntuaren ingurunean existitzen dira eta, gainera, jarraituak dira. Beraz, $f\in C^1(B(1,-1))$ da eta, orduan, (1,–1) puntuan f funtzioa diferentziagarria, deribagarria eta jarraitua da.

Eta $df(1,-1)(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)h_2=\frac{3}{4\sqrt{2}}h_1+\frac{3}{4\sqrt{2}}h_2$ denez,

$$f(1-0'01,-1+0'02)-f(1,-1)\simeq df(1,-1)(-0'01,0'02)=\frac{0'03}{4\sqrt{2}},$$

$$f(0'99,-0'98)\simeq\frac{0'03}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{3'97}{4\sqrt{2}}.$$

(2009ko ekaina) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z=\ln(x+\sqrt{x^2-y})$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y}}}{x+\sqrt{x^2-y}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{x^2-y}(x+\sqrt{x^2-y})}.$$

ii) $z=(x^2-3y^2)\cos\left(\frac{x}{y}\right)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos\left(\frac{x}{y}\right)-(x^2-3y^2)\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-6y\cos\left(\frac{x}{y}\right)+(x^2-3y^2)\sin\left(\frac{x}{y}\right)\frac{x}{y^2}$$

iii) $z=f((f(x,y))^2,y)$, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

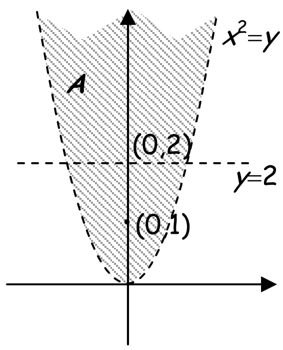
$$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1((f(x,y))^2,y)f(x,y)f_1(x,y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2f_1((f(x,y))^2, y)f(x,y)f_2(x,y) + f_2((f(x,y))^2, y).$$

(2009ko iraila) Demagun $f(x,y) = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?
ii) Aztertu f funtzioaren limitearen existentzia, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta diferentziagarritasuna (0,2) eta (0,1) puntuetan.
iii) Kalkulatu, existitzen bada, $df(0,1)(h_1,h_2)$.

i) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y - x^2 > 0,\ y \neq 2\}$.
E irekia da eta ez da bornatua. Ondorioz, ez da trinkoa.



ii) Azter dezagun $(0,2) \notin E$ puntuaren limitearen existentzia:
$\left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \not\subset E$. Segida hori ezin dugu hartu, E multzoan ez dagoelako.

$$\left\{\left(0, 2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \to (0,2) \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(0, 2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{1}{n}-2}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{n\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \not\to$$

f funtzioak (0,2) puntuan ez du limiterik, beraz, ez da jarraitua, deribagarria ezta diferentziagarria ere puntu horretan.

$(0,1) \in E$ betetzen da. f funtzioaren lehen ordenako deribatuak kalkulatuko ditugu eta (0,1) puntuaren ingurunean jarraituak diren aztertuko dugu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{(y-x^2)(y-2)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{y-2}{y-x^2} - \ln(y-x^2)}{(y-2)^2}.$$

Bi kasuetan, zenbakitzailea eta izendatzailea jarraituak dira, eta (0,1) puntuaren ingurunean izendatzaileak ez dira zero egiten.

Beraz, (0,1) puntuaren ingurunean f funtzioa diferentziagarria da, eta ondorioz, jarraitua eta deribagarria. Gainera, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = f(0,1) = 0$ da.

iii) f diferentziagarria denez eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1$ direnez,

$$\mathrm{d}f(0,1)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)h_2 = -h_2 .$$

(2009ko iraila) Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak, emaitzak sinplifikatuz:

i) $z = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{y+2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{3(y+2)\sqrt[3]{x-1}} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(y+2)^2} .$$

ii) $z = \dfrac{\ln(y-x^2)}{y-2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{(y-x^2)(y-2)} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{y-2}{y-x^2} - \ln(y-x^2)}{(y-2)^2} .$$

iii) $z = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right) + xf_2\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x(x-2y)}{(x-y)^2} .$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(f_1\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right) + f_2\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x^2}{(x-y)^2}\right) .$$

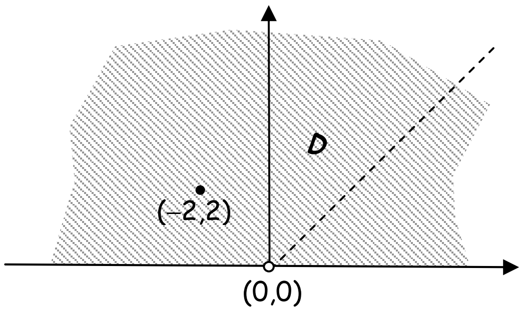
2010eko ekaina. Demagun $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y}}{x-y}$ funtzioa.

i) Aurkitu eta irudikatu f funtzioaren existentzi eremua. Irekia al da?, eta itxia?, eta bornatua?, eta trinkoa?

ii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (0,0) puntuan.

iii) Aztertu f funtzioaren jarraitutasuna, limitearen existentzia eta diferentziagarritasuna (-2,2) puntuan.

iv) (-2,2) puntuan f-ren diferentziala erabiliz, kalkulatu, gutxi gorabehera, f(-1'98,1'99)-ren balioa.



i) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 0, x-y\neq 0\}$.

D ez da itxia (adibidez, $x=y$ zuzenean dauden muga-puntuak ez dira multzokoak), ezta irekia ere (y=0 ardatzeko muga-puntuak, (0,0) izan ezik, multzokoak dira). Ez da bornatua, eta ondorioz, ez da trinkoa izango.

ii) $(0,0)\notin D$ da, beraz, f ez da jarraitua (0,0) puntuan. Ondorioz, f ez da deribagarria ezta diferentziagarria ere.

(0,0) puntuan limitearen existentzia aztertuko dugu, puntu horren ingurunean funtzioa definiturik baitago. Horretarako segidak erabiliko ditugu:

$$\left\{0,\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to(0,0).\quad \left\{0,\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D \quad \text{eta} \quad \left\{f\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{-1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}=\left\{-\sqrt{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\to-\infty.$$

Beraz, ez da existitzen f funtzioaren limitea (0,0) puntuan.

iii) $(-2,2)\in\text{int}(D)$ da.

$$f_x(x,y)=\frac{-\sqrt{y}}{(x-y)^2}.$$

$$f_y(x,y)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(x-y)+\sqrt{y}}{(x-y)^2}.$$

Deribatu partzialak existitzen dira (−2,2) puntuaren ingurunean eta jarraituak dira, funtzio jarraituen eragiketak direlako eta izendatzaileak ez direlako zero egiten. Beraz, f funtzioa diferentziagarria da $(-2,2)$ puntuan. Diferentziagarria denez, deribagarria eta jarraitua da puntu horretan. f funtzioa jarraitua denez $(-2,2)$ puntuan, limitea existitzen da $(-2,2)$ puntuan:

$$\lim_{(x,y)\to(-2,2)} = f(-2,2) = \frac{\sqrt{2}}{-4}.$$

iv) $f(-1'98,1'99) \simeq f(-2,2) + df_{(-2,2)}(0'02,-0'01)$.

$$df_{(-2,2)}(0'02,-0'01) = 0'02f_x(-2,2) - 0'01f_y(-2,2) = \frac{-0'01\sqrt{2}}{8}.$$

$$f(-1'98,1'99) \simeq f(-2,2) + df_{(-2,2)}(0'02,-0'01) = \frac{-\sqrt{2}}{4} - \frac{0{,}01\sqrt{2}}{8} = \frac{-2{,}01\sqrt{2}}{8}.$$

2010eko ekaina. Kalkulatu funtzio hauen lehen ordenako deribatu partzialak:

i) $z = \ln\sqrt{xy+y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\dfrac{y}{2\sqrt{xy+y^2}}}{\sqrt{xy+y^2}} = \frac{1}{2(x+y)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\dfrac{x+2y}{2\sqrt{xy+y^2}}}{\sqrt{xy+y^2}} = \frac{x+2y}{2(xy+y^2)}.$$

ii) $z = \sin(y^2x - 3xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y^2 - 3y)\cos(y^2x - 3xy).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (2xy - 3x)\cos(y^2x - 3xy).$$

iii) $z = f(x^3 - y^2, x^3y^2)g\left(x\sqrt{y}\right)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ izanik.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2f_1(x^3-y,x^3y^2) + 3x^2y^2f_2(x^3-y,x^3y^2)\right)g\left(x\sqrt{y}\right) + \sqrt{y}\,g'\left(x\sqrt{y}\right)f(x^3-y,x^3y^2).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(-2yf_1(x^3-y,x^3y^2) + 2x^3yf_2(x^3-y,x^3y^2)\right)g\left(x\sqrt{y}\right) + \frac{x}{2\sqrt{y}}g'\left(x\sqrt{y}\right)f(x^3-y,x^3y^2).$$

FUNTZIO INPLIZITUAREN TEOREMA. FUNTZIO HOMOGENEOA.

(2001eko ekaina) Demagun $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xf_1(x,y)+yf_2(x,y)=3f(x,y)$ erlazioa betetzen duen funtzioa.

i) Baldin badakigu $f(0,1)=1$ dela, kalkulatu $f_2(0,1)$ eta $f_{22}(0,1)$.

Har dezagun $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ modu honetan definitutako funtzioa: $F(x,y)=x^2f_1(x,y)+y^2f_2(x,y)$.

ii) Homogeneoa al da F? Hala bada, zein mailatakoa da?

iii) Ziurta dezakegu $F(x,y)=3$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu bezala definitzen duela (0,1) puntuaren ingurunean?

i) $0f_1(0,1)+1f_2(0,1)=3f(0,1)=3$; beraz, $f_2(0,1)=3$ da.
Erlazioa deribatuko dugu y-rekiko:

$$xf_{12}(x,y)+yf_{22}(x,y)+f_2(x,y)=3f_2(x,y).$$

(0,1) puntuan:

$$0f_{12}(0,1)+1f_{22}(0,1)+f_2(0,1)=3f_2(0,1).$$

Ezagutzen ditugun balioak ordezkatuz:

$$f_{22}(0,1)=6.$$

ii) Hasteko, f funtzioa 3 mailako homogeneoa da (aurreko erlazioak Eulerren teorema betetzen du) eta beraren deribatuak ere homogeneoak dira; kasu honetan, 2 mailakoak.
Orduan,

$$F(tx,ty)=(tx)^2f_1(tx,ty)+(ty)^2f_2(tx,ty)=t^2x^2t^2f_1(x,y)+t^2y^2t^2f_2(x,y)=t^4F(x,y).$$

F funtzioa 4 mailako homogeneoa da.

iii) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

a) $F(0,1)-3=0$; $F(0,1)=0f_1(0,1)+1f_2(0,1)=3$.

b) F jarraitua da (x eta y funtzioak jarraituak dira, f_1 eta f_2 ere, f C^2 klasekoa delako; eta F aurreko funtzioen arteko biderketak eta batuketak egiten lortzen da)

c) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)=x^2f_{12}(x,y)+2yf_2(x,y)+y^2f_{22}(x,y)$ (existitzen da eta jarraitua da f C^2 klasekoa delako eta, lehen bezala, funtzio jarraituen arteko biderketak eta batuketak egiten lortzen da).

d) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1)=2f_2(0,1)+f_{22}(0,1)=6+6=12\neq 0$.

Beraz, $F(x,y)=3$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu bezala definitzen du (0,1) puntuaren ingurunean.

(2001eko iraila) Demagun $f(x,y)=\dfrac{g(x^2y)}{x-y}-\dfrac{1}{y^4}$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R})$ funtzioa -1 mailako funtzio homogeneoa eta $g(2)=2$ izanik.

i) Kalkulatu $g(4)$ eta $g'(4)$.

ii) Homogeneoa al da f funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?

iii) Definitzen al du $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua (2,1) puntuaren ingurunean? Kalkulatu, existitzen bada, $\varphi'(2)$.

i) $g(2)=2$ bada eta g funtzioa -1 mailako homogeneoa bada, $g(tx)=t^{-1}g(x)$ da, orduan $g(2\cdot 2)=2^{-1}g(2)=1$ da; beraz, $g(4)=1$ da.
Eta $g'(4)$ kalkulatzeko Eulerren teorema aplikatuko dugu: $xg'(x)=tg(x)$. Hau da, $4g'(4)=(-1)g(4)$ da, beraz, $g'(4)=-1/4$.

ii) Ikus dezagun f homogeneoa den: $f(tx,ty)=\dfrac{g(t^2x^2ty)}{tx-ty}-\dfrac{1}{t^4y^4}=$ [g funtzioa -1 mailako homogeneoa denez]$=f(tx,ty)=\dfrac{t^{-3}g(x^2y)}{t(x-y)}-\dfrac{1}{t^4y^4}=\dfrac{g(x^2y)}{t^4(x-y)}-\dfrac{1}{t^4y^4}=t^{-4}f(x,y)$. Orduan, f funtzioa -4 mailako homogeneoa da.

iii) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

a) $f(2,1)=\dfrac{g(4)}{2-1}-\dfrac{1}{1}=0$.

b) f jarraitua da (x eta y funtzioak jarraituak dira, g C^1 klasekoa da, eta f aurreko funtzioen arteko biderketak, batuketak eta kenketak egiten lortzen da; gainera, (2,1) puntuaren ingurunean, $x-y$ eta y^4 izendatzaileak ez dira zero egiten).

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{g'(x^2y)x^2(x-y)+g(x^2y)}{(x-y)^2}+\dfrac{4}{y^5}$ (existitzen da eta jarraitua da, g C^1 klasekoa delako eta funtzio jarraituen arteko biderketa eta batuketen bidez lortzen delako; gainera, izendatzaileak ez dira zero egiten).

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1)=\dfrac{g'(4)4+g(4)}{(2-1)^2}+\dfrac{4}{1}=4\neq 0$.

Beraz, $f(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu bezala definitzen du (2,1) puntuaren ingurunean.

Bukatzeko, $\varphi'(2)$ kalkulatzeko $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ behar dugu:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{g'(x^2y)2xy(x-y)-g(x^2y)}{(x-y)^2}$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)=\dfrac{g'(4)4-g(4)}{(2-1)^2}=-2$. Orduan,

$$\varphi'(2)=-\frac{f_1(2,1)}{f_2(2,1)}=-\frac{-2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2002ko ekaina) Demagun $F(x,y)=(xy+1)g(x+1,y^2x+3y)$ funtzioa, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(1,0)=0$, $g_1(1,0)=-2$ eta $g_2(1,0)=3$ izanik.

i) $F(x,y)=0$ ekuazioak (0,0) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen al du? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(0)$.

ii) (0,0) puntuan F-ren diferentziala erabiliz, posible al da $F(0'1, -0'03)$ balioa hurbiltzea? Baiezko kasuan, hurbildu F funtzioaren balioa (0'1, –0'03) puntuan.

i) Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

a) $F(0,0)=g(1,0)=0$.

b) F jarraitua da, funtzio jarraituen arteko biderketa eta batuketen bidez lortzen delako ($g\in C^1(\mathbb{R}^2)$).

c) $F_2(x,y)=xg(x+1,y^2x+3y)+(xy+1)(2yx+3)g_2(x+1,y^2x+3y)$ existitzen da eta jarraitua da, g funtzioa C^1 klasekoa delako (eta ondorioz, g-en deribatuak ere jarraituak dira) eta lehen bezala, funtzio jarraituen arteko biderketa eta batuketen bidez lortzen delako.

d) $F_2(0,0)=3g_2(1,0)=9\neq 0$.

Beraz, funtzio inplizituaren teoremak $F(x,y)=0$ ekuazioak (0,0) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen duela ziurtatzen du.

Eta $\varphi'(0)=-\dfrac{F_1(0,0)}{F_2(0,0)}$ da. $F_2(0,0)=9$ da eta

$$F_1(x,y)=yg(x+1,y^2x+3y)+(xy+1)[g_1(x+1,y^2x+3y)+y^2g_2(x+1,y^2x+3y)]$$

denez, $F_1(0,0)=g_1(1,0)=-2$ da, eta orduan,

$$\varphi'(0)=-\frac{F_1(0,0)}{F_2(0,0)}=\frac{2}{9}.$$

ii) F funtzioaren deribatu funtzioak jarraituak direnez (F_1 ere jarraitua da) (0,0) puntuaren ingurunean, F-ren diferentziala hauxe da

$$dF(0,0)(h_1,h_2)=F_1(0,0)h_1+F_2(0,0)h_2=-2h_1+9h_2.$$

Eta erabil dezakegu hurbilketa hau lortzeko:

$$F(0'1,-0'03)\simeq F(0,0)+dF(0,0)(0'1,-0'03)=-0'2-0'27=-0'47.$$

(2002ko iraila) Demagun $F(x,y)=(x+2y)f(x^2+y^2,x^2-y^2)$ funtzioa, f funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $f_1(1,0)=f_2(1,0)=1$ izanik.

i) Homogeneoa al da F funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?

ii) $F(x,y)-8=0$ ekuazioak (1,1) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen al du? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) $D=\mathbb{R}^2$ da eta $\mathbb{R}^2$ konoa da, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ eta $\forall t>0$, $(tx,ty)\in\mathbb{R}^2$ betetzen baita.

$$F(tx,ty)=(tx+2ty)f((tx)^2+(ty)^2,(tx)^2-(ty)^2)=t(x+2y)f(t^2(x^2+y^2,x^2-y^2))=$$
$$=t(x+2y)t^6f(x^2+y^2,x^2-y^2)=t^7(x+2y)f(x^2+y^2,x^2-y^2)=t^7F(x,y).$$

Ikusten dugunez, F funtzioa 7 mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Ikus dezagun funtzio inplizituaren teoremaren lau baldintza nahikoak betetzen dituen:

a) $F(1,1)-8= 3f(2,0)-8$.

F funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa denez, $f(2,0)=f(2(1,0))=8f(1,0)$.

Eta Euleren teorema erabiliz, $3f(1,0)=1f_1(1,0)+0f_2(1,0)=1$ da. Horrela, $f(1,0)=\frac{1}{3}$ eta $f(2,0)=\frac{8}{3}$ ordezkatuz, $F(1,1)-8= 3f(2,0)-8=3\frac{8}{3}-8=0$ lortzen da.

b) F funtzioa jarraitua da B(1,1)-en, funtzio jarraituen biderketa eta konposaketa baita.

c) $F_2(x,y)=2f(x^2+y^2,x^2-y^2)+(x+2y)\left[f_1(x^2+y^2,x^2-y^2)2y-f_2(x^2+y^2,x^2-y^2)2y\right]$ jarraitua da B(1,1)-en, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ baita, eta funtzio jarraituen konposaketa, biderkaketa eta batuketa baita.

d) $F_2(1,1)=2f(2,0)+3\left[f_2(2,0)2-f_1(2,0)2\right]=2^4f(1,0)+3[2^3f_1(1,0)-2^3f_2(1,0)]=\frac{16}{3}\neq 0$.

Baldintzak betetzen direnez, $F(x,y)-8=0$ ekuazioak (1,1) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Gainera $F_1(x,y)=f(x^2+y^2,x^2-y^2)+(x+2y)\left[f_1(x^2+y^2,x^2-y^2)2x+f_2(x^2+y^2,x^2-y^2)2x\right]$ jarraitua da B(1,1)-en, orduan, F diferentziagarria da eta $\varphi'(1)=-\frac{F_1(1,1)}{F_2(1,1)}=-\frac{19}{2}$ da.

(2003ko ekaina) Demagun $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ funtzioak, $f(0,1)=1$ eta $g(0,1)=-1$ izanik. Badakigu $[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0$ ekuazioak **ez** duela (0,1) puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen.

i) Zein balio du $f_2(0,1)$-k? Arrazoitu erantzuna.

ii) $g_2(0,1)=f_2(0,1)>0$ izanik, $[g(x,y)]^3+yf(x,y)-x=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen al du (0,1) ingurunean?

i) $[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y=0$ ekuazioak (0,1) puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen <u>**ez**</u> badu, funtzio inplizituaren teoremaren baldintzaren bat ez da betetzen. Goazen hori aztertzera:

$F(x,y)=[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y$ izendatzen badugu,

a) $F(0,1)=[f(0,1)]^3+0g(0,1)-1=0$.

b) $F(x,y)=[f(x,y)]^3+xg(x,y)-y$ funtzioa jarraitua da B(0,1)-en, $f,g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ baitira, eta F funtzio jarraituen biderketa eta batuketen bidez lortzen delako.

c) $F_2(x,y)=3[f(x,y)]^2f_2(x,y)+xg_2(x,y)-1$.

y-rekiko deribatu partzial funtzio hori jarraitua da B(0,1)-en, $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ baitira, eta F funtzio jarraituen biderketa eta batuketen bidez lortzen delako.

d) Ikusten dugunez, aurreko hiru baldintzak betetzen dira. Beraz, laugarrena ez da beteko, hau da, $F_2(0,1)=0$ dela ziurta dezakegu.

$F_2(0,1) = 3[f(0,1)]^2 f_2(0,1) + 0g_2(0,1) - 1 = 3f_2(0,1) - 1 = 0$ eta horrela, $f_2(0,1) = \dfrac{1}{3}$ izan behar da.

ii) $G(x,y) = [g(x,y)]^3 + yf(x,y) - x$ izendatzen badugu:

a) $G(0,1) = [g(0,1)]^3 + 1f(0,1) - 0 = 0$.

b) $G(x,y) = [g(x,y)]^3 + yf(x,y) - x$ funtzioa jarraitua da B(0,1)-en, $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ baitira, eta F funtzio jarraituen biderketa eta batuketen bidez lortzen delako.

c) $G_2(x,y) = 3[g(x,y)]^2 g_2(x,y) + f(x,y) + yf_2(x,y)$.

y-rekiko deribatu partzial funtzio hori jarraitua da B(0,1)-en, $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ baita, eta F funtzio jarraituen biderketa eta batuketen bidez lortzen delako.

d) $G_2(0,1) = 3[g(0,1)]^2 g_2(0,1) + f(0,1) + 1f_2(0,1) = 4f_2(0,1) + 1 \neq 0$.

Ikusten dugunez, funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak betetzen dira (0,1) puntuaren ingurunean, eta horregatik, $[g(x,y)]^3 + yf(x,y) - x = 0$ ekuazioak puntu horren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen du.

(2003ko iraila) Demagun $G(x,y) = x^2F(x^2,xy) - y^2F(xy,y^2)$ funtzioa. $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ bada, zer baldintza bete behar dute $F(0,1)$, $F_1(0,1)$ eta $F_2(0,1)$-ek $G(x,y)$ funtzioak (0,1) puntuaren ingurunean funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak bete ditzan, eta horrela, $G(x,y)=0$ ekuazioak (0,1) puntuaren ingurunean y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan defini dezan?

Goazen (0,1) puntuan baldintza nahikoak aztertzera:

i) $G(0,1)=0$ betetzeko $G(0,1) = 0F(0,1) - 1F(0,1) = 0$ dugu, eta hau horrela izateko, $F(0,1)=0$ izan behar da.

ii) $G(x,y) = x^2F(x^2,xy) - y^2F(xy,y^2)$ funtzioa jarraitua da B(0,1)-en: $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da, x^2 eta y^2 funtzioak jarraituak dira B(0,1)-en eta G funtzio jarraituen biderketa eta kenketen bidez lortzen da.

iii) $G_2(x,y) = x^3F_2\left(x^2,xy\right) - 2yF(xy,y^2) - y^2\left[xF_1(xy,y^2) + 2yF_2(xy,y^2)\right]$.

y-rekiko deribatu partzial funtzio hori jarraitua da B(0,1)-en, funtzio jarraituen biderketa eta batuketa baita.

iv) $G_2(0,1) \neq 0$ izateko zer baldintza bete behar den ikusiko dugu orain:

$G_2(0,1) = 0F_2(0,0) - 2F(0,1) - 1[0F_1(0,1) + 2F_2(0,1)]$ da, hau da, $G_2(0,1) = -2F(0,1) - 2F_2(0,1)$ da. $G_2(0,1) \neq 0$ izateko, $F(0,1)=0$ denez, $F_2(0,1) \neq 0$ bete behar da.

Laburbilduz, $G(x,y)$ funtzioak (0,1) puntuaren ingurunean funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak bete ditzan, $F(0,1)=0$, $F_2(0,1) \neq 0$ bete behar da, $F_1(0,1)$-k edozein balio har dezakeelarik.

(2004ko ekaina) Demagun $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, 2 mailako funtzio homogeneoa, $f(1,2)=4$ eta $f_2(1,2)=3$ izanik.

a) Kalkulatu $f(2,4)$, $f_2(2,4)$ eta $2f_1(2,4)+4f_2(2,4)$.

b) Demagun $F(x,y)=f(x,y)-16$ ekuazioa. Definitzen al du $F(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan (2,4) puntuaren ingurunean? Hala bada, kalkulatu funtzio inplizituaren deribatua 2 puntuan ($\varphi'(2)$).

a) f funtzioa 2 mailako homogeneoa denez,

$$f(2,4)=f(2(1,2))=2^2 f(1,2)=16.$$

f funtzioa 2 mailako homogeneoa denez, f_2 1 mailako homogeneoa da eta

$$f_2(2,4)=f_2(2(1,2))=2f_2(1,2)=6.$$

Eta Eulerren teorema erabiliz,

$$2f_1(2,4)+4f_2(2,4)=2f(2,4)=32.$$

b) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

i) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, F ere C^1 klasekoa da.

ii) $F(2,4)=f(2,4)-16=16-16=0$.

iii) $F_2(2,4)=f_2(2,4)=6\neq 0$.

Beraz, $F(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen du (2,4) puntuaren ingurunean.

Eta funtzio inplizituaren deribatua 2 puntuan $\varphi'(2)=-\dfrac{F_1(2,4)}{F_2(2,4)}$ kalkulatzeko:

$F_1(2,4)=f_1(2,4)$ eta balio hori aurreko ataletik aterako dugu:

$2f_1(2,4)+4f_2(2,4)=2f_1(2,4)+24=32$, eta ondorioz, $f_1(2,4)=4$.

Orduan, $\varphi'(2)=-\dfrac{F_1(2,4)}{F_2(2,4)}=-\dfrac{2}{3}$.

(2004ko iraila) Demagun $F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$ funtzioa, $f,g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 eta 1 mailako funtzio homogeneoak, hurrenez hurren, izanik. Badakigu $f(4,2)=24$, $g(4,2)=6$, $f_2(4,2)=4$ eta $g_2(4,2)=1$ direla.

a) Homogeneoa al da F funtzioa? Hala bada, zein mailatakoa?

b) Kalkulatu $F(2,1)$ eta $F_2(2,1)$.

c) Demagun $H(x,y)=F(x,y)-k$ ekuazioa. k-ren zein baliotarako definituko du $H(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan (2,1) puntuaren ingurunean?

a) $F(tx,ty)=f(tx,ty)\cdot g(tx,ty)=t^2 f(x,y)\cdot tg(x,y)=t^3 f(x,y)\cdot g(x,y)=t^3 F(x,y)$.

Beraz, F funtzioa 3 mailako homogeneoa da.

b) $F(4,2) = f(4,2)g(4,2) = 144$ eta F funtzioa 3 mailako homogeneoa denez,

$F(4,2) = F(2(2,1)) = 2^3 F(2,1)$; orduan, $F(2,1)=18$.

$F_2(x,y) = f_2(x,y)g(x,y) + f(x,y)g_2(x,y)$ eta

$$F_2(4,2) = f_2(4,2)g(4,2) + f(4,2)g_2(4,2) = 24 + 24 = 48.$$

F_2 2 mailako funtzio homogeneoa da, beraz, $F_2(4,2)=F_2(2(2,1))=2^2F_2(2,1)$; orduan, $F_2(2,1)=12$.

c) Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak erabiliko ditugu:

i) $H\in C^1(\mathbb{R}^2)$ da, H funtzioa C^1 klaseko funtzioen arteko biderkadura eta kenketa delako.

ii) $H(2,1)=F(2,1)-k=18-k=0$, beraz, $k=18$.

iii) $H_2(2,1)=F_2(2,1)=12\neq 0$.

Beraz, $k=18$ denean $H(x,y)=0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen du (2,1) puntuaren ingurunean.

(2005eko ekaina) Demagun $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 9)(x + y - a)$ funtzioa, $a \in \mathbb{R}$ izanik.

iii) Esan a-ren zein baliotarako beteko diren funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak, $f(x,y) = 0$ ekuazioak inplizituki $y = \varphi(x)$ funtzioa defini dezan (0,3) puntuaren ingurunean.

iv) $a = 3$ bada, definituko al du $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua (0,3), (3,0) eta (1,2) puntuetan?

i) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu (0,3) puntuan:

a) $f(0,3)=0$ da edozein $a \in \mathbb{R}$ baliotarako.

b) $f(x,y)$ funtzioa bi polinomioen (jarraituak $\mathbb{R}^2$-n) biderkadura da.

$$f_1(x,y) = 2x(x + y - a)(x^2 + y^2 - 9) \text{ eta } f_2(x,y) = 2y(x + y - a)(x^2 + y^2 - 9).$$

f_1 eta f_2 funtzioak ere bi polinomioen arteko batuketa dira, hortaz, jarraituak $\mathbb{R}^2$-n, $a \in \mathbb{R}$ edozein izanda ere.

Horrela, $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in C^1(B(0,3))$, $a \in \mathbb{R}$ edozein izanda ere.

c) $f_2(0,3) = 6(3 - a) \neq 0 \Rightarrow 3 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$.

Horrela, $a \neq 3$ denean funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak betetzen dira, eta $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du (0,3) puntuaren ingurunean.

ii) Hori aztertzeko, ezer baino lehen, funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu hiru puntuetan. $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 9)(x + y - 3)$:

a) $f(0,3) = 0$.✓

$f(3,0) = 0$.✓

$f(1,2) = 0$.✓

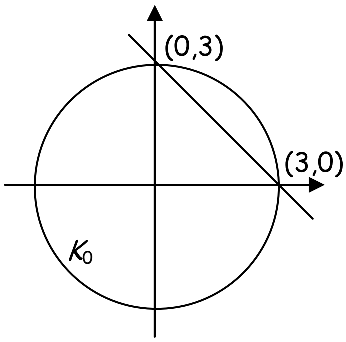
b) $f(x,y)$ funtzioa bi polinomioen (jarraituak $\mathbb{R}^2$-n) biderkadura da.

$f_1(x,y) = 2x(x + y - 3) + (x^2 + y^2 - 9)$ eta $f_2(x,y) = 2y(x + y - 3) + (x^2 + y^2 - 9)$.

f_1 eta f_2 funtzioak ere bi polinomioen batuketa dira, hortaz, jarraituak $\mathbb{R}^2$-n.

Horrela, $f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f \in C^1(B(0,3)), f \in C^1(B(3,0))$ eta $f \in C^1(B(1,2))$.✓

c) $f_2(0,3)=0$.
$f_2(3,0)=0$.
$f_2(1,2)=-4\neq 0$.✓
(1,2) puntuan funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak betetzen dira eta $f(x,y)=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa definitzen du inplizituki (1,2) puntuaren ingurunean.
(0,3) eta (3,0) puntuetan ez dira funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak betetzen. Hortaz, f-ren 0 sestra-kurbaren irudikapena erabiliko dugu:



(0,3) puntuan: $\nexists B(0), B(3) / \forall x\in B(0)\ \exists! y\in B(3) / f(x,y)=0$.
Horregatik, $f(x,y)=0$ ekuazioak ez du (0,3) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki definitzen.
(3,0) puntuan: $\nexists B(3), B(0) / \forall x\in B(3)\ \exists! y\in B(0) / f(x,y)=0$.
Horregatik, $f(x,y)=0$ ekuazioak ez du (3,0) puntuaren ingurunean $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki definitzen.

(2005eko iraila) Demagun $F(x,y)=x^2y+f(x,y)$ funtzioa, $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik. f funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa da, eta $f(1,2)=3$ eta $f_1(1,2)=1$ dira.
i) Homogeneoa al da F funtzioa? Zein mailatakoa?
ii) Kalkulatu $F(2,4)$ eta $F_2(2,4)$.
iii) Definitzen al du $F(x,y)-5=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki (1,2) puntuaren ingurunean? Hala bada, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) $F(tx,ty)=t^2x^2ty+f(tx,ty)=t^3x^2y+t^3f(x,y)=t^3(x^2y+f(x,y))=t^3F(x,y)$.
Ikusten dugunez, F funtzioa 3 mailako homogeneoa da.

ii) $F(2,4)=F(2(1,2))=8F((1,2))=8(2+f(1,2))=8(2+3)=40$.
$F_2(2,4)=F_2(2(1,2))=4F_2(1,2)=4(1+f_2(1,2))=4(1+4)=20$.
$f_2(1,2)$ lortzeko Eulerren teorema erabiliko dugu:
$1f_1(1,2)+2f_2(1,2)=3f(1,2)$. Ordezkatuz, $f_2(1,2)=4$.

iii) Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu (1,2) puntuan: $G(x,y)=F(x,y)-5$.
(a) $G(1,2)=F(1,2)-5=2+f(1,2)-5=2+3-5=0$.

(b) $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da. Horrela, $F(x,y) = x^2y + f(x,y)$ jarraitua da, funtzio jarraituen batuketa baita (x^2y jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n). Guzti honengatik, eta 5 funtzio konstantea jarraitua izateagatik, $G(x,y)=F(x,y)-5$ funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n.

$G_1(x,y) = F_1(x,y) = 2xy + f_1(x,y)$ eta $G_2(x,y) = F_2(x,y) = x^2 + f_2(x,y)$ deribatu partzial funtzioak jarraituak dira $\mathbb{R}^2$-n, funtzio jarraituen batuketa baitira. Hortaz, $G \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow G \in C^1(B(1,2))$.

(c) $G_2(1,2) = F_2(1,2) = 2 + f_2(1,2) = 2 + 4 = 6 \neq 0$.

(1,2) puntuan funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak betetzen dira eta $F(x,y)-5=0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du (1,2) puntuaren ingurunean. Gainera, $G(x,y)$ funtzioa diferentziagarria denez (1,2)-n, φ diferentziagarria da 1 puntuan eta $\varphi'(1) = \dfrac{-G_1(1,2)}{G_2(1,2)} = \dfrac{-5}{5} = -1$.

(2006ko ekaina) Demagun $h = \dfrac{g(x^2y)}{x-y}$ funtzioa, g 2 mailako funtzio homogeneoa eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ izanik.

i) Homogeneoa al da h funtzioa? Zein mailatakoa?

ii) $g(4) = 2$ eta $g'(4) = 1$ badira, k-ren zein baliotarako definitzen du $h(x,y) - k = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua (2,1) puntuaren ingurunean? k-ren balio horietarako kalkulatu $\varphi'(2)$.

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$ konoa da.

$$h(tx,ty) = \frac{g(t^2x^2ty)}{tx-ty} = \frac{g(t^3x^2y)}{t(x-y)} = \frac{t^6g(x^2y)}{t(x-y)} = \frac{t^5g(x^2y)}{x-y} = t^5h(x,y).$$

Orduan, h funtzioa 5 mailako funtzio homogeneoa da

ii) Goazen baldintza nahikoak aztertzera:

1- $h(2,1) = \dfrac{g(4)}{1} - k = 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$ izan behar da baldintza hau betetzeko.

2- $H(x,y) = h(x,y) - 2$ izendatzen dugu. H funtzioak lehen ordena arteko deribatu partzial jarraituak izan behar ditu (2,1) puntuan, hau da, $H(x,y) \in C^1(B(2,1))$. Goazen beraren deribatu partzial funtzioak aztertzera:

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{2xyg'(x^2y)(x-y) - g(x^2y)}{(x-y)^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 2xy \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ x-y \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ g \in C^1(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \text{Zenbakitzailea jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ (x-y)^2 \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \Rightarrow \text{Izendatzailea jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \end{array}\right\}$$

x-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da (2,1) puntuan zenbakitzailea eta izendatzailea jarraituak baitira, eta izendatzailea ez baita zero egiten puntu horretan.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} x^2 \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ x-y \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ g\in C^1(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \text{ Zenbakitzailea jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \\ (x-y)^2 \text{ jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan} \Rightarrow \text{Izendatzailea jarraitua da } \mathbb{R}^2 \text{ osoan}\end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2g'(x^2y)(x-y)+g(x^2y)}{(x-y)^2}.$$

y-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da (2,1) puntuan zenbatzailea eta izendatzailea jarraituak baitira, eta izendatzailea ez da zero egiten puntu horretan.

Ikusten dugunez, deribatu partzialak jarraituak dira (2,1) puntuan, hau da, $H(x,y)\in C^1(\text{B}(2,1))$ da k-ren edozein baliotarako.

3- $\frac{\partial H}{\partial y}(2,1)=\frac{4g'(4)+g(4)}{1}=6\neq 0\ \ (\forall k\in\mathbb{R})$.

Orduan, k=2 denean baldintza nahikoak betetzen dira, eta horrela, $h(x,y)-k=0$ ekuazioak $y=\varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du (2,1) puntuaren ingurunean.

Gainera $H(x,y)$ diferentziagarria denez (2,1) puntuan, φ diferentziagarria da 2 puntuan eta:

$$\varphi'(2)=-\frac{\frac{\partial H}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial H}{\partial y}(2,1)}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}.$$

(2006ko iraila)

i) Kalkulatu $a\in\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^a}\;g\left(\frac{1}{xy}\right)$ funtzioa homogeneoa izan dadin, $g\in C^1(\mathbb{R})$ funtzioa 2 mailako funtzio homogeneoa izanik.

ii) Demagun $f(x,y)=(y-2x)(x+y)(y-3)$ funtzioa.

a) $f(x,y)=0$ ekuazioak definituko al du inplizituki $y=\varphi(x)$ funtzioa (0,0) eta (–3,3) puntuen ingurunean?

b) $f(x,y)=0$ ekuazioak zein (x_0,y_0) puntutan definitzen du $y=\varphi(x)$ funtzioa inplizituki? Erantzuna arrazoitu.

i) Hasteko, azter dezagun a-ren zein baliotarako beteko den $f(tx,ty)=t^{\alpha}f(x,y)$ baldintza.

$f(tx,ty)=\sqrt{t^2x^2+t^ay^a}\,g\left(\frac{1}{txty}\right)$ da. Horrela, erroan t^2 faktore komuna ateratzeko a=2 izan behar da. a-ren balio horretarako $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,g\left(\frac{1}{xy}\right)$ da eta $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\neq 0,\ \ y\neq 0\}$ konoa da.

Gainera, $f(tx,ty)=\sqrt{t^2(x^2+y^2)}\,g\left(\dfrac{1}{t^2xy}\right)$ da eta g 2 mailako funtzio homogeneoa denez,

$f(tx,ty)=t\sqrt{(x^2+y^2)}\,t^{-4}g\left(\dfrac{1}{xy}\right)=t^{-3}\sqrt{(x^2+y^2)}\,g\left(\dfrac{1}{xy}\right)=t^{-3}f(x,y)$ da, hots, f funtzioa -3 mailako funtzio homogeneoa da.

ii.a) Goazen funtzio inplizituaren teoremaren baldintza nahikoak bi puntu horietan aztertzera:

1- $f(0,0)=0$.

$f(-3,3)=0$.

2- $f(x,y)$ funtzioak lehen ordena arteko deribatu partzial jarraituak izan behar ditu puntu horietan, hau da, $f(x,y)\in C^1(B(2,1))$ bete behar da.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2(x+y)(y-3)+(y-2x)(y-3).$$

x-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n, funtzio jarraituen biderketa eta batuketa delako.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x+y)(y-3)+(y-2x)(y-3)+(y-2x)(x+y).$$

y-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n funtzio jarraituen biderketa eta batuketa delako.

Orduan, f funtzioak lehen ordena arteko deribatu partzial jarraituak ditu puntu horietan.

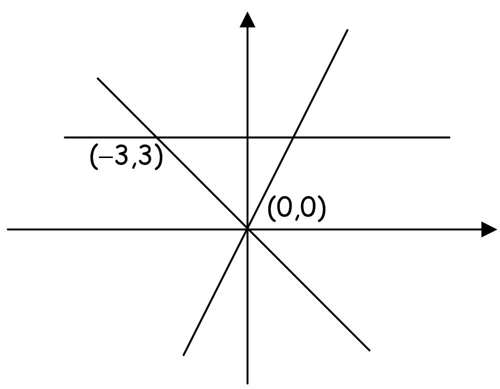
3- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(-3,3)=0$.

Hortaz, ez dira baldintza nahikoak betetzen ez (0,0) puntuan ezta (–3,3)-n ere.

Orain, grafikoki aztertuko dugu. Irudika dezagun f funtzioaren zero sestra-kurba:

$f_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=2x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=-x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=3\}$.



Ikusten dugunez, (0,0) puntuan: $\forall x\in B(0)\ \nexists!\, y\in B(0)/f(x,y)=0$, hau da (0,0) puntuaren ingurunean ez dago $y=\varphi(x)$ funtzioa definitzerik, $x\neq 0$ guztiek bi irudi baitituzte f_0 sestra-kurban.

Bestalde $(-3,3)$ puntuan gauza bera gertatzen da: $\forall x \in B(-3)\ \nexists! y \in B(3) / f(x,y) = 0$, hau da, $(-3,3)$ puntuaren ingurunean ez dago $y = \varphi(x)$ funtzioa definitzerik, $x \neq -3$ guztiek bi irudi baitituzte f_0 sestra-kurban.

ii.b) Hau betetzen duen zero sestra-kurbako (x_0, y_0) puntu bat izan behar da:
$\forall x \in B(x_0, \varepsilon)\ \exists! y \in B(y_0, \varepsilon) / f(x,y) = 0$.
Adibidez, $(1,-1)$ puntuak hori betetzen du, grafikoan ikus dezakegunez.

(2007ko ekaina) Demagun $f(x,y) = g(x,y) + xy^3$ funtzioa , non $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 mailako funtzio homogeneoa den.

i) *f* funtzioa homogeneoa al da? Zein mailatakoa?

ii) $g(2,1) = g_1(2,1) = -2$ badira, definitzen al du $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizituki $(2,1)$ puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(2)$.

i) $\forall t > 0: f(tx,ty) = g(tx,ty) + t^4xy^3 = t^4g(x,y) + t^4xy^3 = t^4(g(x,y) + xy^3) = t^4f(x,y)$.
Orduan, *f* funtzioa 4 mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Goazen baldintza nahikoak errepasatzera:
1- $f(2,1) = g(2,1) + 2 = -2 + 2 = 0$.
2- $f(x,y)$ funtzioak lehen ordena arteko deribatu partzial jarraituak izan behar ditu $(2,1)$ puntuan, hau da, $f(x,y) \in C^1(B(2,1))$. Goazen haren deribatu partzial funtzioak aztertzera.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_1(x,y) + y^3.$$

x-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da $(2,1)$ puntuan funtzio jarraituen batuketa baita.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y) + 3xy^2.$$

y-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da $(2,1)$ puntuan funtzio jarraituen batuketa baita.
Ikusten dugunez deribatu partzialak jarraituak dira $(2,1)$ puntuan.
3- $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = g_2(2,1) + 6$.
$g_2(2,1)$ lortzeko Eulerren teorema erabiliko dugu:
$2g(2,1) = 2g_1(2,1) + 1g_2(2,1)$.
$g_2(2,1) = 2(-2) - 2(-2) = 0$.
Orduan, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = g_2(2,1) + 6 = 6 \neq 0$.
Horrela, baldintza nahikoak betetzen dira eta $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa definitzen du inplizituki $(2,1)$ puntuaren ingurunean.
Gainera, $f(x,y)$ diferentziagarria denez $(2,1)$ puntuan, φ diferentziagarria da 2 puntuan eta

$$\varphi'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = g_1(2,1) + 1 = -2 + 1 = -1$ da eta

$$\varphi'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)} = \frac{1}{6}.$$

(2007ko iraila) Demagun $f(x,y) = x^2 g(x,y)$ funtzioa , non $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 mailako funtzio homogeneoa den.

i) Homogeneoa al da *f* funtzioa? Zein mailatakoa?

ii) $g(1,0) = 0$ eta $g_2(1,0) = 7$ badira, definitzen al du $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizituki (2,0) puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(2)$.

i) $\forall t > 0: f(tx,ty) = t^2x^2g(tx,ty) = t^2x^2t^2g(x,y) = t^4x^2g(x,y) = t^4f(x,y)$.
Orduan, *f* funtzioa 4 mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Goazen baldintza nahikoak errepasatzera:
1- $f(2,0) = f(2(1,0)) = 2^4 f(1,0) = 16(1g(1,0)) = 0$.
2- $f(x,y)$ funtzioak lehen ordena arteko deribatu partzial jarraituak izan behar ditu (2,0) puntuan, hau da, $f(x,y) \in C^1(B(2,0))$. Goazen haren deribatu partzial funtzioak aztertzera.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xg(x,y) + g_1(x,y)x^2.$$

x-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da (2,0) puntuan, funtzio jarraituen batuketa baita.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g_2(x,y)x^2.$$

y-rekiko deribatu partzial funtzioa jarraitua da (2,0) puntuan, funtzio jarraituen batuketa baita.
Ikusten dugunez, deribatu partzialak jarraituak dira (2,0) puntuan.
3- $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = 4g_2(2,0) = 4g_2(2(1,0)) = 8g_2(1,0) = 56 \neq 0$.
Horrela, baldintza nahikoak betetzen dira eta $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa definitzen du inplizituki (2,0) puntuaren ingurunean.
Gainera $f(x,y)$ diferentziagarria denez (2,0) puntuan, φ ere diferentziagarria da 2 puntuan eta

$$\varphi'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2,0)}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 4 + 4g_1(2,0)$.

$g_1(2,0) = 2g_1(1,0)$ eta $g_1(1,0)$ lortzeko Eulerren teorema erabiliko dugu:
$2g(1,0) = 1g_1(1,0) + 0g_2(1,0) \Rightarrow g_1(1,0) = 0$.
eta $g_1(2,0) = 2g_1(1,0) = 0$.

Horrela, $\varphi'(2) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0)} = 0$.

(2008ko ekaina) Demagun $f(x,y) = x^2 g(x^2, xy)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izanik.
i) g funtzioa 1 mailako homogeneoa bada, f funtzioa ere izango da?, zein mailatakoa?
ii) $g(1,2)=0$ eta $g_2(2,4)=2$ direla badakigu, ziurta dezakegu $f(x,y) = 0$ ekuazioak (1,2) puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen duen? Zuzena bada, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) $\forall t > 0$: $f(tx,ty) = t^2x^2 g(t^2x^2, t^2xy) = t^4x^2 g(x^2, xy) = t^4 f(x,y)$.
Beraz, f 4 mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:
1- $f(1,2)=g(1,2)=0$.
2- $f \in C^1(B(1,2))$. Froga dezagun f-ren deribatu partzialak (1,2) puntuaren ingurunean jarraituak direla:

$$f_1(x,y) = 2xg(x^2, xy) + x^2\left(2xg_1(x^2,xy) + yg_2(x^2,xy)\right).$$

$$f_2(x,y) = x^3 g_2(x^2, xy).$$

Eta jarraituak dira $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ delako eta funtzio jarraituen batuketak eta biderketak direlako.
3- $f_2(1,2) = g_2(1,2) = 2 \neq 0$.
g funtzioa 1 mailako homogeneoa denez, g_2 funtzioa 0 mailako homogeneoa da, eta

$$2 = g_2(2,4) = g_2(2(1,2)) = 2^0 g_2(1,2) = g_2(1,2) = 2.$$

Beraz, $f(x,y)=0$ ekuazioak (1,2) puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Eta $\varphi'(1) = -\dfrac{f_1(1,2)}{f_2(1,2)} = -\dfrac{-4}{2} = 2$.
Eulerren teorema erabiliz: $4f(1,2) = 1f_1(1,2) + 2f_2(1,2) \Rightarrow f_1(1,2) = -4$.

(2008ko iraila) Demagun $f(x,y) = e^{xy} + g(x,y)$ funtzioa. $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta 3 mailako homogeneoa da, $g(0,1) = -1$ eta $g_1(0,2) = 4$ izanik. Definitzen al du $f(x,y) = 0$ ekuazioak (0,1) puntuaren ingurunean $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua? Zuzena bada, kalkulatu $\varphi'(0)$.

Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:
1- $f(0,1) = e^0 + g(0,1) = 1 - 1 = 0$.

2- $f \in C^1(B(0,1))$. Horretarako, f-ren deribatu partzialak (0,1) puntuaren ingurunean jarraituak izan behar dira:

$$f_1(x,y) = ye^{xy} + g_1(x,y).$$
$$f_2(x,y) = xe^{xy} + g_2(x,y).$$

$g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ da.

3- $f_2(0,1) = g_2(0,1) = -3 \neq 0$.

$g_2(0,1)$ ezagutzeko, Eulerren teorema g funtzioan aplikatuko dugu:

$$3g(0,1) = 0g_1(0,1) + 1g_2(0,1) \Rightarrow g_2(0,1) = -3.$$

Beraz, $f(x,y)=0$ ekuazioak (0,1) puntuaren ingurunean $\varphi(x) = y$ funtzio inplizitua definitzen du. Eta

$$\varphi'(0) = -\frac{f_1(0,1)}{f_2(0,1)} = \frac{2}{3}.$$

$f_1(0,1)$ lortzeko: $f_1(x,y) = ye^{xy} + g_1(x,y)$ denez, $f_1(0,1) = 1 + g_1(0,1)$ da.

Eta $g_1(0,1)$ lortzeko, g funtzioa 3 mailako homogeneoa denez, g_1 2 mailako homogeneoa da:

$$g_1(0,2) = g_1(2(0,1)) = 4g_1(0,1) = 4 \Rightarrow g_1(0,1) = 1.$$

(2009ko ekaina) Demagun $h(x,y) = \dfrac{f(xy,2x^2)}{y}$ funtzioa, non $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ 2 mailako homogeneoa den.

i) Homogeneoa da h funtzioa?, zein mailatakoa?

ii) Baldin badakigu $f_1(1,2)=1$ eta $f_2(1,2)=1$ direla, kalkulatu $k \in \mathbb{R}$, $h(x,y) - k = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizitua (1,1) puntuaren ingurunean definitzeko. Aurkitutako k baliorako, kalkulatu $\varphi'(1)$.

i) $\forall t > 0 : h(tx,ty) = \dfrac{f(t^2xy, t^2 2x^2)}{ty} = \dfrac{t^4 f(xy,2x^2)}{ty} = t^3 h(x,y)$, beraz, h funtzioa 3 mailako funtzio homogeneoa da.

ii) Horretarako funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu:

a) $h(1,1) - k = 0 \Rightarrow f(1,2) - k = 0 \Rightarrow 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$

b) $h(x,y) - 1 \in C^1(B(1,1))$. Kalkulatuko ditugu haren deribatu funtzioak:

$$(h(x,y)-1)_1 = h_1(x,y) = \frac{yf_1(xy,2x^2) + 4xf_2(xy,2x^2)}{y}.$$

$$(h(x,y)-1)_2 = h_2(x,y) = \frac{xyf_1(xy,2x^2) - f(xy,2x^2)}{y^2}.$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ denez, eta izendatzailea ez denez zero egiten (1,1) puntuaren ondoan, $h(x,y) - 1 \in C^1(B(1,1))$.

c) $(h(1,1)-1)_2 = h_2(1,1) = f_1(1,2) - f(1,2)$.

f funtzioa 2 mailako homogeneoa denez, Eulerren teorema erabiliko dugu $f_1(1,2)$ kalkulatzeko:
$2f(1,2) = f_1(1,2) + 2f_2(1,2) \Rightarrow 2 = f_1(1,2) + 2 \Rightarrow f_1(1,2) = 0$.
Eta orduan, $h_2(1,1) = f_1(1,2) - f(1,2) = -1 \neq 0$.

Beraz, $h(x,y) - 1 = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizitua (1,1) puntuaren ingurunean definitzen du.

Bukatzeko, funtzio inplizituaren deribatua 1 puntuan kalkulatuko dugu:

$$\varphi'(1) = -\frac{(h(1,1)-1)_1}{(h(1,1)-1)_2} = -\frac{h_1(1,1)}{h_2(1,1)} = 4,$$

zeren eta $h_1(1,1) = f_1(1,2) + 4f_2(1,2) = 4$ baita.

(2009ko iraila) Demagun $h(x,y) = xf\left(y, \dfrac{x^2}{x-y}\right)$ funtzioa.

i) f funtzioa 3 mailako homogeneoa bada, homogeneoa al da h funtzioa?, zein mailatakoa?

ii) Baldin badakigu f funtzioak haren existentzi eremu osoan deribatu jarraituak dituela eta $f(0,2) = 8$, $f_1(0,2) = 24$ direla, definitzen al du $h(x,y) - 1 = 0$ ekuazioak y aldagaia x aldagaiaren funtzio inplizitu moduan ($y = \varphi(x)$) (1,0) puntuaren ingurunean? Kalkulatu, existitzen bada, $\varphi'(1)$.

i) Ikus dezagun h funtzioa homogeneoa den:

$$\forall t > 0 : h(tx,ty) = txf\left(ty, \frac{t^2x^2}{tx-ty}\right) = txf\left(ty, t\frac{x^2}{x-y}\right) = t^4xf\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right) = t^4h(x,y).$$

Beraz, h funtzioa 4 mailako homogeneoa da.

ii) Orain, funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu ($G(x,y) = h(x,y) - 1$):

1- $G(1,0) = h(1,0) - 1 = f(0,1) - 1 = 0$.

$f(0,1) = ?$: $f \in H_3$: $8 = f(0,2) = 2^3 f(0,1) = 8f(0,1) \Rightarrow f(0,1) = 1$.

2- $G(x,y) = h(x,y) - 1 \in C^1(B(1,0))$. Hau da, G funtzioaren lehen ordenako deribatu partzialek jarraituak izan behar dute (1,0) puntuaren ingurunean:

$$G_1(x,y) = h_1(x,y) = f\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right) + xf_2\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x(x-2y)}{(x-y)^2}.$$

$$G_2(x,y) = h_2(x,y) = x\left(f_1\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right) + f_2\left(y, \frac{x^2}{x-y}\right)\frac{x^2}{(x-y)^2}\right).$$

Enuntziatuan f funtzioa haren existentzi eremuan C^1 klasekoa dela esaten dute eta izendatzaileak ez dira zero egiten (1,0) puntuaren ingurunean.

3- $G_2(1,0) = h_2(1,0) = f_1(0,1) + f_2(0,1)$.

$f_1(0,1) = ?$: $f \in H_3 \Rightarrow f_1 \in H_2$: $24 = f_1(0,2) = 2^2 f_1(0,1) = 4f_1(0,1) \Rightarrow f_1(0,1) = 6$.

$f_2(0,1) = ?$: Euler: $xf_1(x,y) + yf_2(x,y) = \alpha f(x,y) \Rightarrow f_2(0,1) = 3f(0,1) = 3$.

Beraz, $G_2(1,0) = h_2(1,0) = f_1(0,1) + f_2(0,1) = 9 \neq 0$.

Orduan, $G(x,y) = h(x,y) - 1 = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du (1,0) puntuaren ingurunean.

Bukatzeko, existitzen den funtzio inplizituaren deribatua kalkulatuko dugu:

$$\varphi'(1) = -\frac{G_1(1,0)}{G_2(1,0)} = -\frac{h_1(1,0)}{h_2(1,0)} = -\frac{4}{9}.$$

$G_1(1,0) = ?$: $G_1(1,0) = h_1(1,0) = f(0,1) + f_2(0,1) = 1 + 3 = 4$.

2010eko ekaina.

i) Demagun $f(x,y) = y^2 - 2$ funtzioa. Definitzen al du $f(x,y) = 0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzioa inplizituki $(1,\sqrt{2})$ puntuaren ingurunean? Baiezko kasuan, kalkulatu $\varphi'(1)$.

ii) Demagun $f(x,y) = x^2 h\left(\frac{y^3}{x}, \frac{x^3}{y}\right)$ funtzioa, non $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta α=2 mailako funtzioa homogeneoa den. f funtzioa homogeneoa al da? Zein mailatakoa?

i) Hau aztertzeko funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

1. $f(1,\sqrt{2}) = 2 - 2 = 0$.

2. $f_x(x,y) = 0$.

$f_y(x,y) = 2y$.

Deribatu partzial funtzioak jarraituak dira $(1,\sqrt{2})$ puntuaren ingurunean.

3. $f_y(1,\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \neq 0$

Beraz, $f(x,y)=0$ ekuazioak $y = \varphi(x)$ funtzio inplizitua definitzen du (1,1) puntuaren ingurunean.

Eta $\varphi'(1) = -\frac{f_x(1,\sqrt{2})}{f_y(1,\sqrt{2})} = 0$.

ii) f homogeneoa izateko: $\forall t>0$:

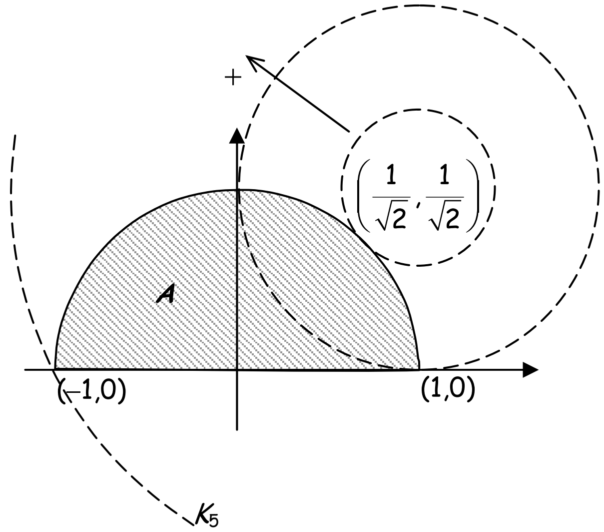
$$f(tx,ty) = t^2x^2 h\left(\frac{t^3y^3}{tx}, \frac{t^3x^3}{ty}\right) = t^2x^2 h\left(t^2\left(\frac{y^3}{x}, \frac{x^3}{y}\right)\right) = t^2x^2t^4 h\left(\frac{y^3}{x}, \frac{x^3}{y}\right) =$$

$$= t^6x^2 h\left(\frac{y^3}{x}, \frac{x^3}{y}\right) = t^6 f(x,y).$$

Hots, f 6 mailako funtzio homogeneoa da.

OPTIMIZAZIOA

(2001eko ekaina) Demagun $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ x^2+y^2\leq 1,\ y\geq 0\}$ multzoa. Kalkulatu f-ren maximo eta minimo lokalak multzo hauetan: int(A), fr(A) eta A.



• int(A) multzoan: Mutur ez baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:
$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz:

Baldintza beharrezkoa:
$f_1(x,y)=0=2x-2$.
$f_2(x,y)=0=2y-2$.
Eta sortzen den puntu bakarra $(x,y)=(1,1)$ da, baina puntu hau ez dago int(A)-n, hau da, barrualdean ez dago ez maximo ez minimo lokalik.

fr(A) multzoan: Mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:
• mugako lehenengo zatia: $x^2+y^2=1$, $y>0$.
$g(x,y)= x^2+y^2-1$, $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=2x$, $g_2(x,y)=2y$.

Baldintza beharrezkoa:
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = (x-1)^2+(y-1)^2+\lambda(x^2+y^2-1)$.
$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2+2\lambda x=0$.
$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-2+2\lambda y=0$.
$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= x^2+y^2-1=0$.
Eta sortzen diren puntuak:
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\quad \lambda=\sqrt{2}-1$.
$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\quad \lambda=-\sqrt{2}-1$.

Lehena soilik kontsideratuko dugu (gogoratu $g_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$, $g_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq 0$), bestea multzotik at dagoelako.

Baldintza nahikoa:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & g_1(x,y) \\ 0 & 2+2\lambda & g_2(x,y) \\ g_1(x,y) & g_2(x,y) & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}-1\right)=\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{2} & 2/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=-8\sqrt{2}<0$$, beraz, minimo lokala mugarekiko.

- mugako bigarren zatia: $y=0$, $-2<y<2$.

$g(x,y)= y$, $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=0$, $g_2(x,y)=1$ (hau edozein puntutarako beteko da).

Baldintza beharrezkoa:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = (x-1)^2+(y-1)^2+ \lambda y.$

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2=0.$

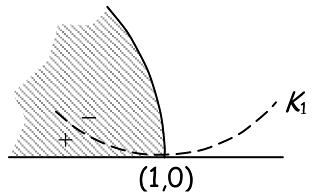
$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-2+\lambda=0.$

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y=0.$

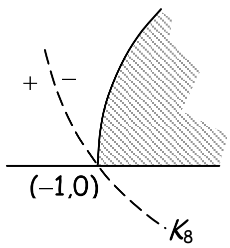
Eta sortzen den puntua (1,0) da baina puntu hau bi muga zatiak ebakitzen diren puntua da eta puntu hauetarako beti azterketa berezia egin behar dugu, sestra-kurben bitartez:

- *A* multzoan:

muga zatiak ebakitzen diren puntuak: (1,0) eta (–1,0)

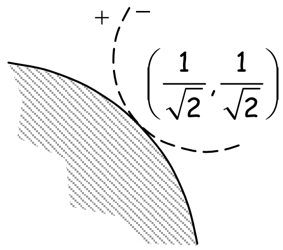


(1,0) punturako: *f*-k B(1,0)∩*A*-n dauden puntu batzuetan (1,0)-n baino balio handiago hartzen du eta beste batzuetan txikiago, hau da, (1,0) puntuan ez dago ezer.



$(-1,0)$ punturako, ordea, ikusten dugu $B(-1,0)\cap A$-n dauden puntu guztietan f-k $(-1,0)$ puntuan baino balio txikiago hartzen duela, hau da, $(-1,0)$ maximo lokala da, bai mugarekiko baita ere A multzo osoarekiko.

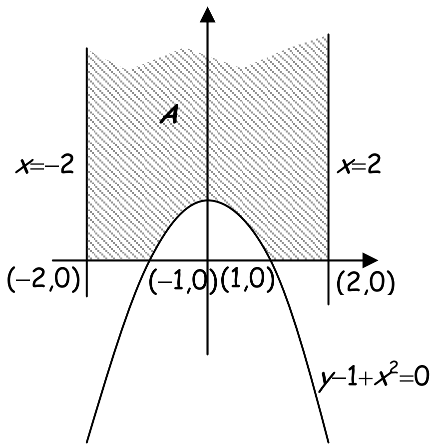
Bukatzeko, aztertu behar dugu $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntua A-rekiko ere minimo lokala den:



Eta irudian ikusten dugu minimo lokala dela A multzo osoarekiko.

(2001eko iraila) $f(x,y)=x^2+(y-2)^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y-1+x^2\geq 0,\ y\geq 0,\ -2\leq x\leq 2\}$ multzoa hartuz, kalkulatu f-ren maximo eta minimo lokalak multzo hauetan: int(A), fr(A) eta A.

A multzoa hau da (konturatu ez dela bornatua)



• int(A)-rekiko muturrak:

$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ da. Baldintza beharrezkoa aztertuko dugu:

$$\left.\begin{array}{r} f_1(x,y)=0=2x \\ f_2(x,y)=0=2y-4 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2) \text{ puntua sortzen da } [(0,2)\in\text{int}(A)] \text{ eta muturra izan daiteke.}$$

Orain, baldintza nahikoa aplikatuko dugu jakiteko maximoa edo minimoa den:

$$|H_f(0,2)|=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4>0 \quad \text{eta} \quad f_{11}(0,2)=2>0$$ beraz, $(0,2)$ puntua f-ren int(A)-rekiko minimo lokala da.

fr(A)-rekiko muturrak:

muga zatiak ebakitzen diren puntuak gerorako utziko ditugu (sestra-kurben bitartez aztertuko ditugu) eta muga zati guztiak aztertuko ditugu banan-banan:

• $g(x,y)=x-2$, $[g\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y)=1\neq 0$ eta $g_2(x,y)=0]$.

Baldintza beharrezkoa:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-2)^2+\lambda(x-2)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-4=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= x-2=0$.

Eta sortzen den puntua (2,2), $\lambda=-4$ da.
Baldintza nahikoa $(x,y,\lambda)=(2,2,-4)$ hirukoterako:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & g_1(x,y) \\ 0 & 2 & g_2(x,y) \\ g_1(x,y) & g_2(x,y) & 0 \end{vmatrix}.$$

eta $\Delta(2,2,-4)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2$, beraz, (2,2) puntua f-ren fr(A)-rekiko minimo lokala da.

• $g(x,y)=x+2$, $[g\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y)=1\neq 0$ eta $g_2(x,y)=0]$.

Baldintza beharrezkoa:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-2)^2+\lambda(x+2)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-4=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= x+2=0$.

Eta sortzen den puntua (–2,2), $\lambda=4$ da.
Baldintza nahikoa $(x,y,\lambda)=(-2,2,4)$ hirukoterako:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & g_1(x,y) \\ 0 & 2 & g_2(x,y) \\ g_1(x,y) & g_2(x,y) & 0 \end{vmatrix}.$$

eta $\Delta(-2,2,4)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-2$, beraz, (–2,2) puntua f-ren fr(A)-rekiko minimo lokala da.

• $g(x,y)=y$, $[g\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y)=0$ eta $g_2(x,y)=1\neq 0]$.

Baldintza beharrezkoa:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-2)^2+\lambda y$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-4+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y=0$.

Eta sortzen den puntua (0,0), $\lambda=4$ da, baina $(0,0)\notin A$.

• $g(x,y)=y-1+x^2$, [$g\in C^2(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y)=2x$ eta $g_2(x,y)=1\neq 0$].

Baldintza beharrezkoa:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-2)^2+\lambda(y-1+x^2)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-4+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y-1+x^2=0$.

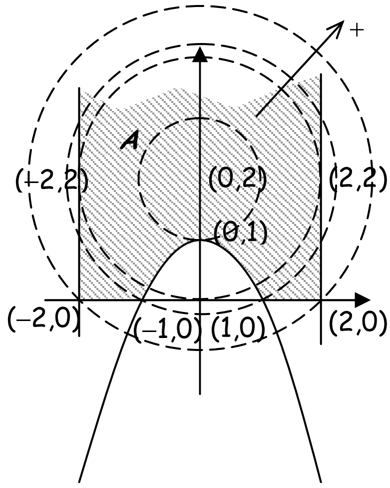
Eta sortzen den puntua (0,1), $\lambda=2$ da.

Baldintza nahikoa $(x,y,\lambda)=(0,1,2)$ hirukoterako:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & g_1(x,y) \\ 0 & 2 & g_2(x,y) \\ g_1(x,y) & g_2(x,y) & 0 \end{vmatrix}.$$

eta $\Delta(0,1,2)=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6$, beraz, (0,1) puntua f-ren fr(A)-rekiko minimo lokala da.

• A-rekiko muturrak:



Argi dago (0,2) puntua A-rekiko minimo lokala dela [int(A)-rekiko delako!].

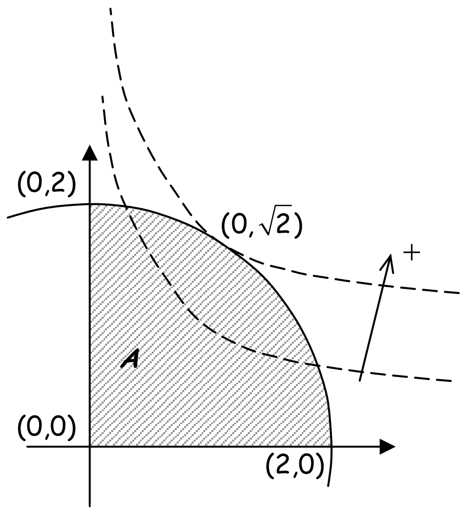
Eta muga jorratu dugunean lortu ditugunak: (−2,2), (2,2) eta (0,1); berehala konturatzen gara puntu hauek ezin direla minimo lokalak izan A-rekiko, alboko puntuetan (barruko puntuetan) funtzioak balio txikiagoak hartzen dituelako.

Muga zatiak ebakitzen diren puntuak: (−1,0), (1,0), (−2,0) eta (2,0); Lehenengo bietan, irudian ikusten dugun bezala, ez dago ezer, alboko puntuetan funtzioak balio handiagoak eta txikiagoak hartzen dituelako. Bukatzeko, (−2,0) eta (2,0) puntuetan A-rekiko (eta baita ere fr(A)-rekiko) maximo lokalak ditugu, zeren eta alboko puntu guztietan funtzioak balio txikiagoak hartzen dituen.

(2002ko ekaina) Demagun $f(x,y) = x^2y$ eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

i) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

ii) Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.



i) Barrualdean mutur lokalak aurkitzeko, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ denez, $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2xy = 0 \\ f_2(x,y) = x^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ baldintza beharrezkoa erabiliko dugu, eta $\overline{(0,0)(0,2)}$ segmentu osoa irteten da. Jakiteko zerbait diren, matrize hessiarra aztertu behar dugu: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$ da eta puntu hauetan $f_{11}(x,y) \ge 0$ eta $|H_f(x,y)| = 0$ dira, beraz, ezin ditugu ondoriorik atera, geroago egingo dugun azterketa grafikoan aterako dugu.

Mugan mutur lokalak lortzeko, hiru muga zati dugu (mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu) eta ebaki puntuak; azter ditzagun banan-banan:

- $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2xy + 2\lambda x = 0 \Rightarrow 2x(y+\lambda) = 0. \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x^2 + 2\lambda y = 0. \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Lehen ekuaziotik bi aukera dugu: x=0 edo y=$-\lambda$.

x=0 bada, $y = \pm\sqrt{2}$ eta λ=0. Beraz, $(0,\sqrt{2})$ puntuak soilik (bestea ez dago multzoan) betetzen du baldintza beharrezkoa.

y=$-\lambda$ bada, $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ sistema bateraezina dugu.

Baldintza nahikoa: $\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2y+2\lambda & 2x & 2x \\ 2x & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta(0,\sqrt{2},0)=\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=-16\sqrt{2}<0.$$

Beraz, $(0,\sqrt{2})$ puntua mugarekiko maximo lokala da.

- $g(x,y)=x$, $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda x$.

Baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2xy+\lambda=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x^2=0. \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x=0. \end{cases}$$

x=0 denez, $y\in[0,2]$ eta λ=0.

Baldintza nahikoa: $\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 2x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta(0,y,0)=\begin{vmatrix} 2y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Berriz ere, puntu hauetan guztietan ez dakigu zer gertatzen den. Baina argi dago puntu guztietan funtzioak zero balioa hartzen duela, eta ondorioz, ebaki puntuetan izan ezik, $x=0, y\in(0,2)$ puntuetan funtzioak mugarekiko maximo eta minimo lokala lortzen du.

- $g(x,y)=y$, $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)=x^2y+\lambda y$.

Baldintza beharrezkoa:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2xy=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x^2+\lambda=0. \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y=0. \end{cases}$$

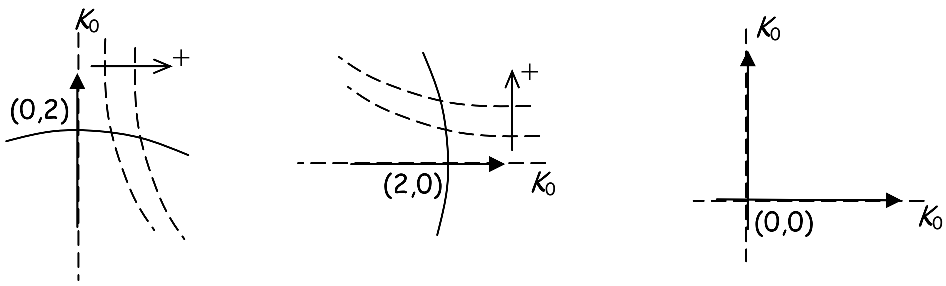
y=0 denez, $x\in[0,2]$ eta $\lambda=-x^2$.

Baldintza nahikoa: $\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta(x,0,0)=\begin{vmatrix}0 & 2x & 0\\ 2x & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Lehen bezala, puntu guztietan funtzioak zero balioa hartzen du eta ondorioz, ebaki puntuetan izan ezik, $y=0,\ x\in(0,2)$ puntuetan funtzioak mugarekiko maximo eta minimo lokala lortzen du.

- (0,0), (2,0) eta (0,2) ebaki puntuetan ere funtzioak zero balioa hartzen du baina (0,0) puntuaren mugako ondoko puntuetan funtzioak balio bera, zero, hartzen duen bitartean (eta beraz, mugarekiko maximo eta minimo lokala), (0,2) eta (2,0) puntuak mugarekiko minimo lokalak dira.



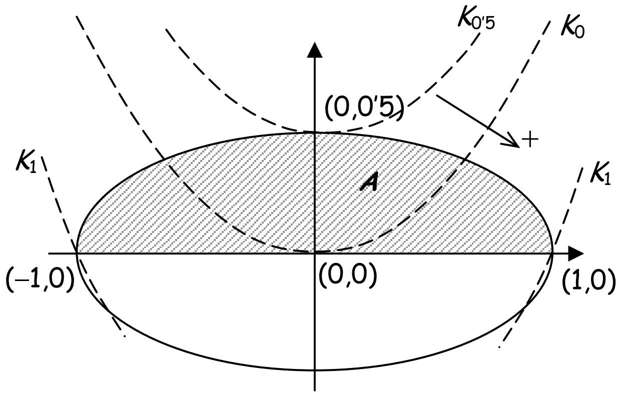
Eta A multzoarekiko mutur lokalak: $\overline{(0,0)(2,0)}$ eta $\overline{(0,0)(0,2)}$ segmentuetan daude puntu guztiak minimo lokalak dira eta $(0,\sqrt{2})$ maximo lokala.

ii) Irudian ikusten den bezala, mutur lokal guztiak globalak dira.

(2002ko iraila) Demagun $f(x,y)=x^2-y$ eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+4y^2\le 1,\ y\ge 0\}$.

i) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A) eta fr(A) multzoetan. Adierazi zein puntutan lortzen duen f funtzioak fr(A)-rekiko mutur globala.

ii) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak A multzoan.



i) f funtzioaren muturrak int(A) multzoan lortzeko, mutur ez baldintzatuen teoria erabiliko dugu.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz:

Baldintza beharrezkoa:
$f_1(x,y)= 2x=0$.
$f_2(x,y)=-1 \neq 0$.
Hau da, barrualdean ez dago mutur lokalik.

fr(A)-rekiko: mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:
- Mugaren lehenengo zatia: $x^2+4y^2=1$, $y>0$.

$g(x,y)= x^2+4y^2-1$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=2x$, $g_2(x,y)=8y$.

Baldintza beharrezkoa:
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2-y+\lambda(x^2+4y^2-1)$.
$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+2\lambda x=0$.
$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-1+8\lambda y=0$.
$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= x^2+4y^2-1=0$.
Eta lortzen ditugun puntuak:

$(0,0'5)$, $\lambda = \frac{1}{4}$.

$(0,-0'5)$, $\lambda = \frac{-1}{4}$.

$\left(\frac{\sqrt{15}}{4},\frac{-1}{8}\right)$, $\lambda = -1$.

$\left(\frac{-\sqrt{15}}{4},\frac{-1}{8}\right)$, $\lambda = -1$.

Lehena soilik hartuko dugu (gogoratu $g_2(0,0'5) \neq 0$ dela), besteak multzotik kanpo daude eta.

Baldintza nahikoa:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 8\lambda & 8y \\ 2x & 8y & 0 \end{vmatrix}.$$

$\Delta\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} 5/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -40 < 0$, beraz, mugarekiko minimo lokala.

- mugaren bigarren zatia: $y=0$, $-1<x<1$.

$g(x,y)= y$, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=0$, $g_2(x,y)=1$.

Baldintza beharrezkoa:
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2-y+ \lambda y$.
$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x=0$.
$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-1+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y=0$.
Eta sistema ebatziz lortzen den puntua (0,0), $\lambda=1$, da (ez ahaztu, $g_2(x,y)\neq 0$ dela).
Baldintza nahikoa:

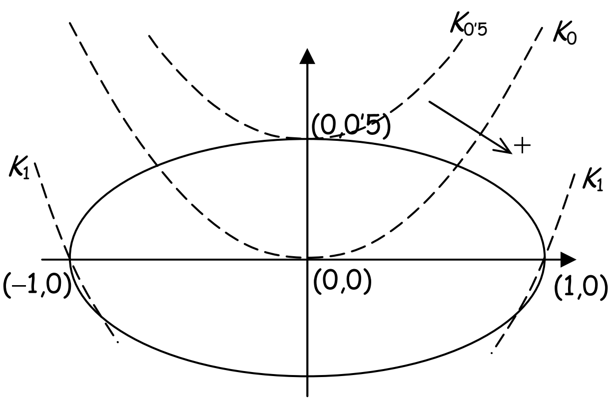
$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}.$$

$\Delta(0,0,1)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=-2<0$, beraz, mugarekiko minimo lokala.

Bukatzeko, (–1,0) eta (1,0) ebaki puntuak aztertuko ditugu:

$\forall(x,y)\in(B(-1,0)\cap \text{fr}(A))$; $f(x,y)<f(-1,0)$, orduan, funtzioak (–1,0) puntuan fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.
$\forall(x,y)\in(B(1,0)\cap Fr(A))$; $f(x,y)<f(1,0)$, orduan, funtzioak (1,0) puntuan fr(A) multzoarekiko maximo lokala lortzen du.

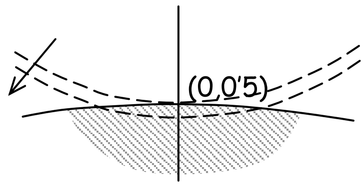
- Mutur globalak fr(A) multzoan:



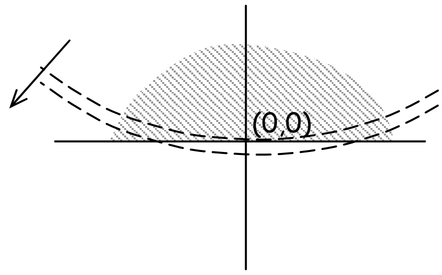
(0,0'5) puntua fr(A) multzoarekiko minimo globala.
(–1,0) eta (1,0) puntuak fr(A) multzoarekiko maximo globalak.

ii) Mutur lokalak *A* multzoan.

Aztertzeko dauzkagun puntuak orain arte lortutako lokal guztiak dira.



$\forall(x,y) \in (B(1,0) \cap A),\ f(x,y) > f(0,0'5)$, orduan, funtzioak (0,0'5) puntuan *A* multzoarekiko minimo lokala lortzen du.



Ikus daitekeenez, B(0,0)-ko puntu batzuetan, funtzioak (0,0) puntuan baino gehiago balio du eta beste batzuetan gutxiago. Eta ondorioz, *f* funtzioak ez du ezer lortzen (0,0) puntuan.

$\forall(x,y) \in (B(-1,0) \cap A),\ f(x,y) < f(-1,0)$, orduan, *f* funtzioak (–1,0) puntuan *A* multzoarekiko maximo lokala lortzen du.

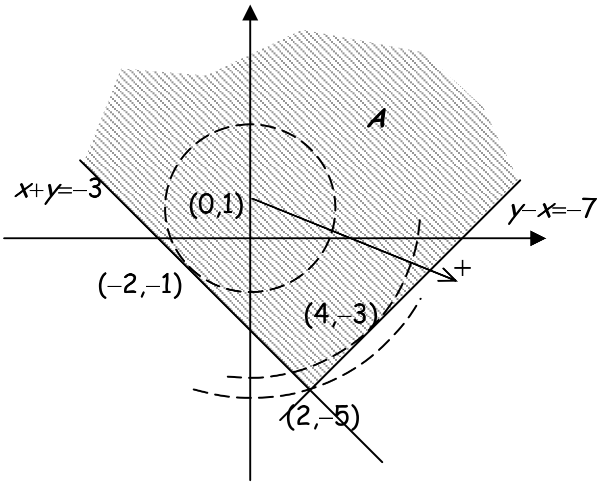
$\forall(x,y) \in (B(1,0) \cap A),\ f(x,y) < f(1,0)$, orduan, funtzioak (1,0) puntuan *A* multzoarekiko maximo lokala lortzen du.

Eta mutur globalak *A* multzo osoan, minimoa (0,0'5) da eta maximoak (–1,0) eta (1,0) dira.

(2003ko ekaina) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y + x + 3 \geq 0, y - x + 7 \geq 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ funtzioa.

i) Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

ii) Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.



i) Mutur lokalak int(A) multzoan: mutur ez baldintzatuen teoriarekin aztertuko dugu.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz,

Baldintza beharrezkoa:

$f_1(x,y) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

$f_2(x,y) = 2(y-1) = 0 \Rightarrow y = 1.$

Orain baldintza nahikoak aztertuko ditugu (0,1) puntuan:

$f_{11}(x,y) = 2$

$f_{12}(x,y) = 0$

$f_{21}(x,y) = 0$ eta $H_f(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 < 0$ non $f_{11}(0,1) = 2 > 0$ den, orduan, f funtzioak int(A)

$f_{22}(x,y) = 2$

multzoarekiko minimo lokal hertsia lortzen du (0,1) puntuan.

fr(A) multzoarekiko: mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu eta hiru azterketa ezberdinduko ditugu:

- $y+x+3=0$.
- $y-x+7=0$.
- (2,−5) erpina.

- $y+x+3=0$.

$g(x,y)= y+x+3$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=1$, $g_2(x,y)=1$.

Baldintza beharrezkoak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-1)^2+\lambda(y+x+3)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-1)+\lambda=0.$

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y+x+3=0.$

Eta lortzen dugun puntua:

$(-2,-1), \quad \lambda = 4.$

Baldintza nahikoa:

$\Delta(-2,-1,4)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, orduan, f funtzioak $(-2,-1)$ puntuan fr(A) multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

- $y-x+7=0.$

$g(x,y)= y-x+7$, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=-1$, $g_2(x,y)=1$.

Baldintza beharrezkoak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = x^2+(y-1)^2+\lambda(y-x+7).$

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda=0.$

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2(y-1)+\lambda=0.$

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= y-x+7=0.$

Eta lortzen dugun puntua:

$(4,-3), \quad \lambda = 8.$

Baldintza nahikoa:

$\Delta(4,-3,8)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, orduan f funtzioak $(4,-3)$ puntuan fr(A) multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

- (2,–5) erpina.

Azterketa grafikoa eginez, bertan funtzioak fr(A) multzoarekiko maximo lokala lortzen duela ikusten dugu.

- A multzoarekiko:

Aurretik lortutakoak aztertuko ditugu hemen:

(0,1) puntua minimo lokala da A multzoarekiko.

(–2,1) puntua ez da minimo lokala A-rekiko.

(4,–3) puntua ez da minimo lokala A-rekiko.

(2,–5) puntua maximo lokala da A multzoarekiko.

ii) Mutur globalak:

Ikus dezakegunez (0,1) puntua minimo globala da A-rekiko.

Funtzioak ez du inon maximo globalik lortzen.

(2003ko iraila) Demagun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$ multzoa eta $f(x, y) = (x - a)^2 + y^2$ funtzioa, $a \in \mathbb{R}$ izanik.

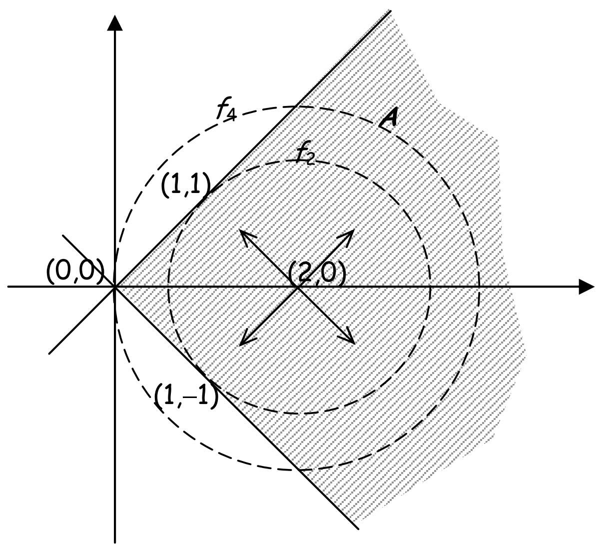
i) Zer balio hartu behar du a-k (1,1) puntua f-ren mutur lokala fr(A)-rekiko izan dadin? Kasu horretan, zer lortuko da, maximo ala minimo lokala fr(A)-rekiko?

ii) a=2 izanik, kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan. Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

i) Mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:
(1,1) puntuan $x-y=0$ baldintza betetzen da. Orduan, hau galdetzen da: a-ren zein baliotarako izango den (1,1) puntua $x-y=0$ ekuazioari baldintzatutako muturra.
$g(x,y)= x- y$, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$
Baldintza beharrezkoak:
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = (x-a)^2+ y^2+\lambda(x-y)$.
$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-2a+\lambda$; $\mathcal{L}_x(1,1,\lambda)=2-2a+\lambda=0$.
$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda$; $\mathcal{L}_y(1,1,\lambda)=2-\lambda=0$.
$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)= x-y$; $\mathcal{L}_\lambda(1,1,\lambda)= 1-1=0$.
Eta (1,1) puntuan baldintza beharrezkoak betetzeko a=2 izan behar da.
Zer den jakiteko, baldintza nahikoak aztertuko ditugu:

$\Delta(1,1,2)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, orduan, f funtzioak (1,1) puntuan fr(A) multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

ii) a=2 bada $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$ dugu.



• int(A) multzoarekiko: f funtzioaren muturrak int(A) multzoarekiko lortzeko, mutur ez baldintzatuen teoria aplikatuko dugu.

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, beraz,

Baldintza beharrezkoa:

$f_1(x,y) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$

$f_2(x,y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0.$

Orain baldintza nahikoak (2,0) puntuan:

$f_{11}(x,y) = 2$

$f_{12}(x,y) = 0$

$f_{21}(x,y) = 0$ eta $H_f(0,1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 < 0$ non $f_{11}(0,1) = 2 > 0$ den; orduan f funtzioak int(A)

$f_{22}(x,y) = 2$

multzoarekiko minimo lokal hertsia lortzen du (2,0) puntuan.

fr(A) multzoarekiko. Mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu eta horretarako hiru azterketa ezberdinduko ditugu:

- $x-y=0$.
- $x+y=0$.
- (0,0) erpina.

- $x-y=0$.

$g(x,y)= x-y$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=1$, $g_2(x,y)=-1$.

Baldintza beharrezkoak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = (x-2)^2+y^2+\lambda(x-y)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-4+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x-y=0$.

Eta lortzen dugun puntua:

(1,1), $\lambda = 2$.

Baldintza nahikoa:

$\Delta(1,1,2)= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, orduan, f funtzioak (1,1) puntuan fr(A) multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

- $x+y=0$.

$g(x,y)= y+x+7$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g_1(x,y)=-1$, $g_2(x,y)=1$.

Baldintza beharrezkoak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y) = (x-2)^2+y^2+\lambda(x+y)$.

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-4+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+\lambda=0$.

$\mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x+y=0$.

Eta lortzen dugun puntua:
$(1,-1), \quad \lambda = 2$.
Baldintza nahikoa:

$\Delta(1,-1,2)=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$, orduan, f funtzioak (1,–1) puntuan fr(A) multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

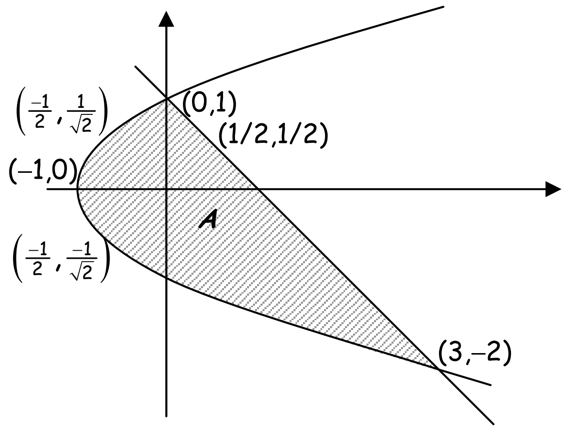
• (0,0) erpina.
Azterketa grafikoa eginez, bertan funtzioak fr(A) multzoarekiko maximo lokala lortzen duela ikusten dugu.

• A multzoarekiko: aurretik lortutako puntuak aztertuko ditugu:
(2,0) puntua minimo lokala da A multzoarekiko.
(1,1) puntua ez da minimo lokala A-rekiko.
(1,–1) puntua ez da minimo lokala A-rekiko.
(0,0) puntua maximo lokala da A multzoarekiko.

• Mutur globalak.
Ikus dezakegunez, (2,0) puntua minimo globala da A-rekiko.
Funtzioak ez du inon maximo globalik lortzen.

(2004ko ekaina) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 \le x+1,\ x+y \le 1\}$ multzoa eta $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioa.
a) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.
b) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.

$g^1(x,y)=y^2-x-1$.
$g^2(x,y)=x+y-1$.
$f, g^1, g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta A trinkoa da.



a.1) f-ren mutur lokalak int(A) multzoan:
Mutur ez baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = 2x = 0 \\ f_2(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \in \text{int}(A)$.

Baldintza nahikoa: $H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ da eta $f_{11}(0,0)=2>0$ eta $|H_f(0,0)|=4>0$ dira.

Beraz, f funtzioak (0,0) puntuan int(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

a.2) f-ren mutur lokalak fr(A) multzoan. Mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:

- $g^1(x,y)=0$ ekuazioari baldintzatutako f-ren mutur lokalak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(y^2-x-1)$.

Baldintza beharrezkoa: $$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=y^2-x-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(-1,0)\in A,\ \lambda=-2.\\ \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A,\ \lambda=-1.\\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\in A,\ \lambda=-1.\end{cases}$$

Baldintza nahikoa:

$$\Delta(-1,0,-2)=\begin{vmatrix}\mathcal{L}_{xx}(-1,0,-2) & \mathcal{L}_{xy}(-1,0,-2) & g_1^1(-1,0)\\ \mathcal{L}_{xy}(-1,0,-2) & \mathcal{L}_{yy}(-1,0,-2) & g_2^1(-1,0)\\ g_1^1(-1,0) & g_2^1(-1,0) & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=2.$$

Beraz, f funtzioak (–1,0) puntuan fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}\\ -1 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix}=-4.$$

Beraz, f funtzioak $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-1\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{2}}\\ -1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0\end{vmatrix}=-4.$$

Beraz, f funtzioak $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

- $g^2(x,y)=0$ ekuazioari baldintzatutako f-ren mutur lokalak:

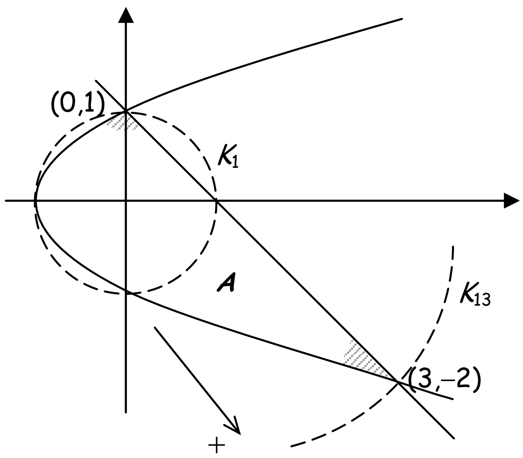
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$.

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in A,\ \lambda = -1.$

Baldintza nahikoa: $\Delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$

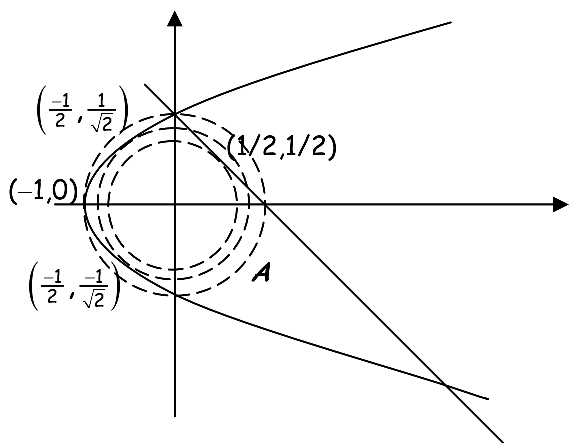
Beraz, f funtzioak $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

- Ebaki puntuak: (0,1) eta (3,–2):



Irudian ikusten den bezala, bi puntuak, (0,1) eta (3,–2), mugarekiko maximo lokalak dira.

a3) f-ren mutur lokalak A multzo osoan:
(0,0) barrualdearekiko minimo lokala denez, A-rekiko ere bai.
Aurreko irudian ikusten den bezala, ebaki puntuak mugarekiko maximo lokalak izateaz gain, A multzo osoarekiko ere maximo lokalak dira.

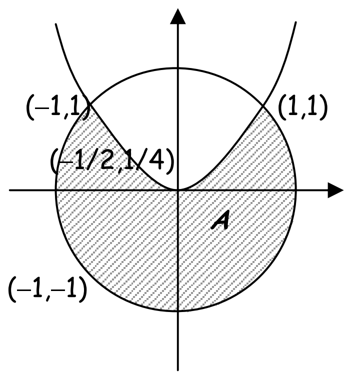


$(-1,0)$ puntuaren ondoko puntu guztiak sestra-kurba txikiagoetan daude, beraz, *A*-rekiko maximo lokala da.

$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ eta $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuak ez dira ezer, puntu hauen alboko puntuetan funtzioak balio handiagoak eta txikiagoak hartzen baititu.

b) *f* jarraitua *A* trinkoan denez, *f*-ren *A*-rekiko maximo eta minimo globalak existituko dira: minimo lokal bakarra (0,0)-n dago, eta beraz, puntu honetan minimo globala dago. Maximoari dagokionez, $f(-1,0)=1$, $f(0,1)=1$ eta $f(3,-2)=13$ dira, eta beraz, maximo globala $(3,-2)$ puntuan dago.

(2004ko iraila) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 2,\ x^2-y\ge 0\}$ multzoa eta $f(x,y)=x+y$ funtzioa. Kalkulatu, existitzen badira, *f*-ren mutur lokalak *A*-ren barrualdean, *A*-ren mugan eta *A* multzo osoan.



$g^1(x,y)=x^2+y^2-2$, $g^2(x,y)=x^2-y$, $f,g^1,g^2\in C^2(\mathbb{R}^2)$ eta *A* trinkoa da.

• *f*-ren mutur lokalak int(*A*) multzoan:

Mutur ez baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y)=1\neq 0 \\ f_2(x,y)=1\neq 0\end{array}\right\}$ Beraz, barrualdean funtzioak ez du mutur lokalik lortzen.

f-ren mutur lokalak fr(*A*) multzoan. Mutur baldintzatuen teoria aplikatuko dugu:

• $g^1(x,y)=0$ ekuazioari baldintzatutako *f*-ren mutur lokalak:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x+y+\lambda(x^2+y^2-2)$.

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1+2\lambda y=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(1,1)\in A,\ \lambda=-\frac{1}{2}. \\ (-1,-1)\in A,\ \lambda=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

(1,1) puntua ebaki puntua da, beraz, gerorako utziko dugu haren azterketa.

Baldintza nahikoa: $\Delta\left(-1,-1,\frac{1}{2}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-8$.

Beraz, f funtzioak (–1,–1) puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

- $g^2(x,y)=0$ ekuazioari baldintzatutako f-ren mutur lokalak:

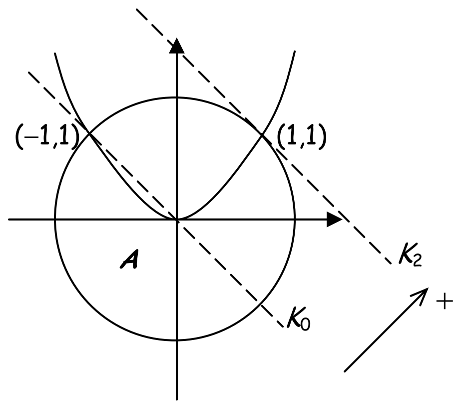
$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x+y+\lambda(x^2-y)$.

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=1-\lambda=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2-y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\in A,\ \lambda=1.$

Baldintza nahikoa: $\Delta\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},1\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=-2$.

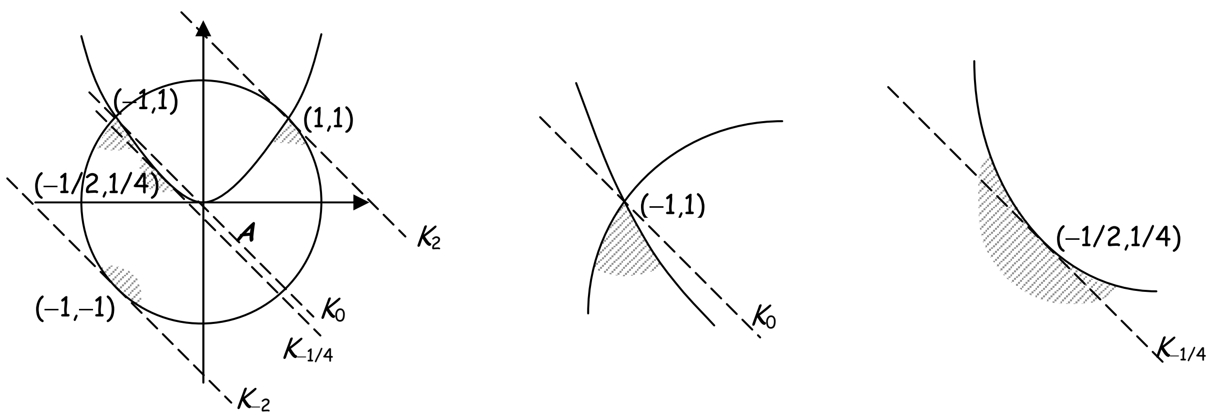
Beraz, f funtzioak $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

- Ebaki puntuak: (–1,1) eta (1,1):



Irudian ikusten den bezala, (–1,1) eta (1,1) puntuak mugarekiko maximo lokalak dira.

- f-ren mutur lokalak A multzo osoan:

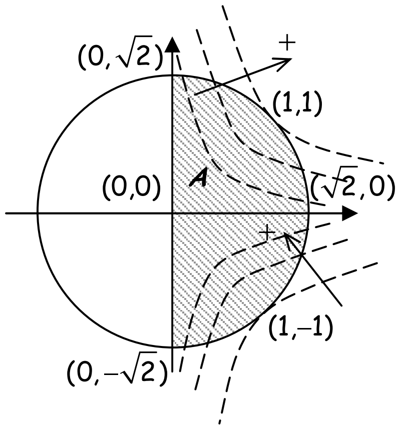


Irudian ikusten den bezala, (1,1) eta (–1,1) puntuak A-rekiko maximo lokalak dira, (–1,–1) puntua A-rekiko minimo lokala eta $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ A-rekiko ez da ezer.

(2005eko ekaina) Demagun $f(x,y) = xy$ funtzioa eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 0\}$ multzoa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.



i.a) f-ren int(A) multzoarekiko mutur lokalak. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}\right\} \to (x,y) = (0,0) \notin \text{int}(A).$$

Ez da muturrik lorzten int(A) multzoan.

i.b) f-ren mutur lokalak fr(A) multzoan:

$$\text{fr}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 2,\ x > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, -\sqrt{2} < y < \sqrt{2}\} \cup$$
$$\cup \{(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})\} = T_1 \cup T_2 \cup T_3.$$

• $T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 2,\ x > 0\}$ multzoan: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2,\ \ g \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (1, 1, -1/2) \in T_1. \\ (1,-1, 1/2) \in T_1. \\ (-1,1, 1/2) \notin T_1. \\ (-1,-1,-1/2) \notin T_1. \end{cases}$$

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}2\lambda & 1 & 2x\\ 1 & 2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}\rightarrow\begin{cases}\Delta(1,1,-1/2)=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=16>0.\\ \Delta(1,-1,1/2)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=-16<0.\end{cases}$$

(1,1) maximo lokal hertsia fr(A) multzoan.
(1,–1) minimo lokal hertsia fr(A) multzoan.

- $T_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=0,\ -\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\}$ multzoan: $g(x,y)=x$, $g\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=xy+\lambda x$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=y+\lambda=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=x=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x=0\end{array}\right\}\Rightarrow\{(0,y,-y)\},\ -\sqrt{2}<y<\sqrt{2}.$$

$$\Delta(0,y,-y)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=0\ \text{(zalantza)}.$$

(0,y) puntuak non $-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}$ den, fr(A)-rekiko maximo eta minimo lokalak dira, $\forall y\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}): f(0,y)=0$ delako.

- $T_3=\{(0,\sqrt{2}),(0,-\sqrt{2})\}$ erpinetan:

$(0,\sqrt{2})$ puntua fr(A)-rekiko minimo lokala da.
$(0,-\sqrt{2})$ puntua fr(A)-rekiko maximo lokala da.

i.c) f-ren mutur lokalak A multzoan:
(1,1) puntua maximo lokal hertsia da A-rekiko.
(1,–1) puntua minimo lokal hertsia da A-rekiko.
(0,y) puntuak, non $0<y\le\sqrt{2}$ den, A-rekiko minimo lokalak dira.
(0,y) puntuak, non $-\sqrt{2}\le y<0$ den, A-rekiko maximo lokalak dira.
(0,0) puntua ez da A-rekiko muturra.

Laburbilduz:
(1,1) puntua maximo lokal hertsia da, (1,–1) puntua minimo lokal hertsia, $\overline{(0,0)(0,\sqrt{2})}$ segmentuko puntuak minimo lokalak dira eta $\overline{(0,0)(-\sqrt{2},0)}$ segmentuko puntuak, A-rekiko maximo lokalak.

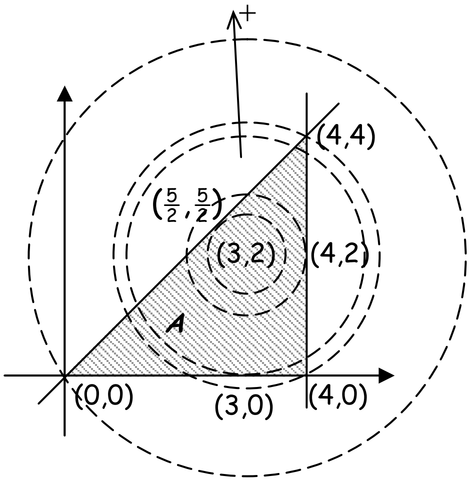
ii) f funtzioa jarraitua da $\mathbb{R}^2$-n eta A multzoa trinkoa da, hortaz existitzen dira maximo eta minimo globalak A multzoan.

Sestra-kurbak aztertuz, (1,1) puntua maximo global hertsia eta (1,–1) puntua minimo global hertsia direla ikus dezakegu.

(2005eko iraila) Demagun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x\}$ multzoa eta $f(x, y) = (x - 3)^2 + (y - 2)^2$ funtzioa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak int(A), fr(A) eta A multzoetan.

ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.



i.a) f-ren mutur lokalak int(A) multzoan. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ da eta

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) = 2x - 6 = 0 \\ f_2(x, y) = 2y - 4 = 0 \end{aligned}\right\} (x, y) = (3,2) \in \text{int}(A).$$

$H_f(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$; $H_f(3,2) = 4 > 0$ eta $f_{11}(3,2)=2>0$, orduan, f funtzioak barrualdearekiko minimo lokal hertsia lortzen du.

i.b) f-ren mutur lokalak fr(A) multzoan:

$$\text{fr}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 4,\ y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 4,\ 0 < y < 4\} \cup$$
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 4, y = x\} \cup \{(0,0), (4,0), (4,4)\} = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4.$$

•Muturrak $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 4,\ y = 0\}$ multzoan: $g(x,y)=y$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$g_1(x,y)=0$, $g_2(x,y)=1$, ez dira biak zero T_1-eko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + \lambda y.$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x-6 = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y-4+\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = y = 0 \end{aligned}\right\} (x,y,\lambda) = (3,0,4).$$

$$\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \Delta(3,0,4) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Horrela, $(3,0) \in \text{fr}(A)$ puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

•Muturrak $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 4, \ 0 < y < 4\}$ multzoan: $g(x,y)=x-4$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
$g_1(x,y)=1$, $g_2(x,y)=0$, ez dira biak zero T_2-ko puntuetan.
$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x-4).$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x-6+\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y-4 = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = x-4 = 0 \end{aligned}\right\} (x,y,\lambda) = (4,2,-2).$$

$$\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \Delta(4,2,-2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Horrela, $(4,2) \in \text{fr}(A)$ puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

•Muturrak $T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x < 4, \ y = x\}$ multzoan: $g(x,y)=x-y$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
$g_1(x,y)=1$, $g_2(x,y)=-1$, ez dira biak zero T_3-ko puntuetan.
$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + \lambda(x-y).$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x-6+\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y-4-\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = g(x,y) = x-y = 0 \end{aligned}\right\} (x,y,\lambda) = \left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1\right).$$

$$\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad \Delta\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},1\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Horrela, $\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right) \in \text{fr}(A)$ puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

•Muturrak $T_4=\{(0,0),(4,0),(4,4)\}$ erpinetan.
(0,0) puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.
(4,0) puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.
(4,4) puntuan f funtzioak fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.

i.c) *f*-ren mutur lokalak *A* multzoarekiko:

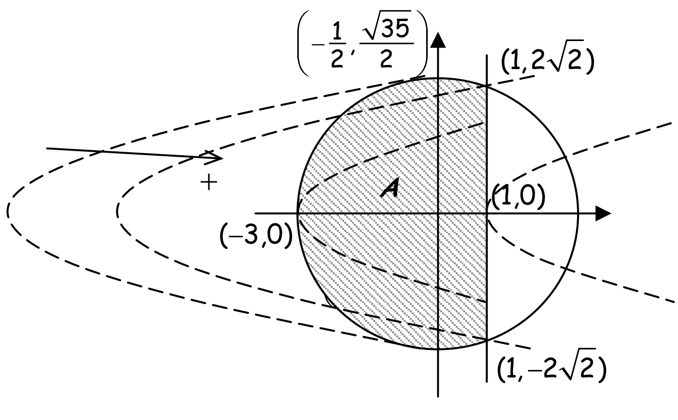
(x_0,y_0)	*Aurreko informazioa*	*A-rekiko?*
(3,2)	Minimo lokal hertsia int(*A*)-rekiko	Minimo lokal hertsia *A*-rekiko
(3,0)	Minimo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Ezer ez
(4,2)	Minimo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Ezer ez
$\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$	Minimo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Ezer ez
(0,0)	Maximo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko
(4,0)	Maximo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko
(4,4)	Maximo lokal hertsia fr(*A*)-rekiko	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko

ii) *f*-ren mutur globalak *A*-n:

(x_0,y_0)	*Maximo/minimo lokala A-rekiko*	$f(x_0,y_0)$
(3,2)	Minimo lokal hertsia *A*-rekiko	0
(0,0)	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko	13
(4,0)	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko	5
(4,4)	Maximo lokal hertsia *A*-rekiko	5

Horrela,
(3,2) puntuan *f* funtzioak *A*-rekiko minimo global hertsia lortzen du.
(0,0) puntuan *f* funtzioak *A*-rekiko maximo global hertsia lortzen du.

(2006ko ekaina) Demagun $f(x,y)=x-y^2$ funtzioa eta $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\le 9,\ \ x\le 1\}$ multzoa.
i) Kalkulatu *f*-ren mutur lokalak int(*A*), fr(*A*) eta *A* multzoetan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, *f*-ren mutur globalak *A* multzoan.



i1) int(*A*) multzoko muturrak lortzeko mutur ez baldintzatuen teoria erabiliko dugu.
$f\in C^2(\mathbb{R}^2)$ da.
Baldintza beharrezkoak:
$f_1(x,y)=1\neq 0$. Hortaz, *f*-k ez du muturrik lortuko int(*A*) multzoan.

i2) fr(A) multzoko muturrak lortzeko mutur baldintzatuen teoria erabiliko dugu.

$$\text{fr}(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=9,\ -3\le x<1\}\cup$$
$$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=1,\ -2\sqrt{2}<y<2\sqrt{2}\}\cup\{(1,-2\sqrt{2}),(1,-2\sqrt{2})\}=T_1\cup T_2\cup T_3.$$

• Muturrak $T_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2=9,\ -3\le x<1\}$ multzoan:

$g(x,y)=x^2+y^2-9$, $g\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y)=2x$, $g_2(x,y)=2y$, ez dira biak zero T_1-eko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x-y^2+\lambda(x^2+y^2-9)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=1+2\lambda x=0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=-2y+2\lambda y=0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-9=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}(3,0)\notin A,\quad \lambda=\frac{-1}{6}.\\ (-3,0)\in A,\quad \lambda=\frac{1}{6}.\\ \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\in A,\quad \lambda=1.\\ \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)\in A,\quad \lambda=1.\end{cases}$$

Baldintza nahikoak:

$$\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}2\lambda & 0 & 2x\\ 0 & -2+2\lambda & 2y\\ 2x & 2y & 0\end{vmatrix}\ \text{da eta}\ \Delta(-3,0,\tfrac{1}{6})=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & 0 & -6\\ 0 & -\frac{5}{3} & 0\\ -6 & 0 & 0\end{vmatrix}=60>0.$$

Beraz, f funtzioak $(-3,0)$ puntuan fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \sqrt{35}\\ -1 & \sqrt{35} & 0\end{vmatrix}=-70<0.$$

Beraz, f funtzioak $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

$$\Delta\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2},1\right)=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -\sqrt{35}\\ -1 & -\sqrt{35} & 0\end{vmatrix}=-70<0.$$

Beraz, f funtzioak $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ puntuan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du.

- Muturrak $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = 1, -2\sqrt{2} < y < 2\sqrt{2}\}$ multzoan: $g(x,y) = x - 1$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y) = 1$, $g_2(x,y) = 0$, ez dira biak zero T_2-ko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x - y^2 + \lambda(x-1)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -2y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,0) \in A, \quad \lambda = -1.$$

$$\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ eta } \Delta(1,0,-1) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

Beraz, *f* funtzioak (1,0) puntuan fr(*A*)-rekiko maximo lokala lortzen du.

- Muturrak $T_3 = \{(1,-2\sqrt{2}),(1,-2\sqrt{2})\}$ erpinetan.

Grafikoki ikus dezakegunez, *f* funtzioak ez du muturrik lortzen erpinetan.

(x_0,y_0)	*Aurreko informazioa*	*A-rekiko?*
(–3,0)	Maximo lokala fr(*A*)-rekiko	Ezer ez
$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$	Minimo lokala fr(*A*)-rekiko	Minimo lokala *A*-rekiko
$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$	Minimo lokala fr(*A*)-rekiko	Minimo lokala *A*-rekiko
(1,0)	Maximo lokala fr(*A*)-rekiko	Maximo lokala *A*-rekiko

ii) *A* trinkoan *f* jarraitua denez, *A*-rekiko maximo eta minimo globalak existituko dira: (1,0) puntuan *A*-rekiko maximo lokal bakarra lortzen denez, hortxe lortzen du *f* funtzioak maximo globala. *A*-rekiko minimo lokalak aztertuz:

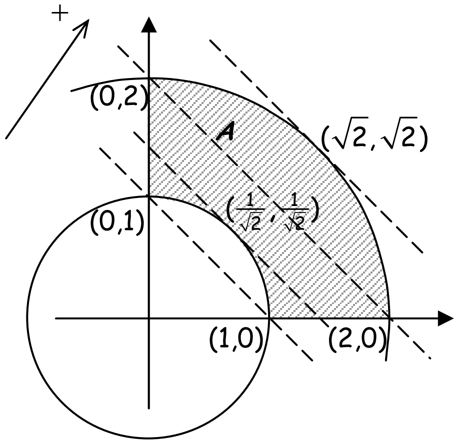
(x_0,y_0)	*Maximo/minimo lokala A-rekiko*	$f(x_0,y_0)$
$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$	Minimo lokala fr(*A*)-rekiko	$-\frac{37}{4}$
$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$	Minimo lokala fr(*A*)-rekiko	$-\frac{37}{4}$

$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ eta $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{35}}{2}\right)$ biak sestra-kurba berean ($f_{-37/4}$) daudela ikus dezakegu. Beraz, *f* funtzioak bi puntu hauetan *A*-rekiko minimo globala lortzen du.

(2006ko iraila) Demagun $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ multzoa eta $f(x, y) = x + y$ funtzioa.

i) Kalkulatu *f*-ren mutur lokalak int(*A*), fr(*A*) eta *A* multzoetan.

ii) Kalkulatu, existitzen badira, *f*-ren mutur globalak *A* multzoan.



i1) Barrualdearekiko mutur lokalak lortzeko mutur ez baldintzatuen teoria erabiliko dugu. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Baldintza beharrezkoak:

$f_1(x, y) = 1 \neq 0$. Ez dira baldintza beharrezkoak betetzen. Hortaz, *f*-k ez du muturrik lortuko int(*A*) multzoan.

i2)
$$\begin{aligned}
\text{fr}(A) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0,\ \ 1 < y < 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0,\ \ 1 < x < 2\} \cup \\
&\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1,\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1\} \cup \\
&\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4,\ \ 0 < x < 2,\ \ 0 < y < 2\} \cup \\
&\cup \{(1,0), (2,0), (0,1), (0,2)\} = \\
&= T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5.
\end{aligned}$$

- Muturrak $T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0,\ \ 1 < y < 2\}$ multzoan: $g(x, y) = x$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x, y) = 1$, ez da zero T_1-eko puntuetan.

  $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x)$.

  Baldintza beharrezkoak:

  $$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) &= 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) &= 1 \neq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ez dira baldintza beharrezkoak betetzen}.$$

  Orduan, *f*-k ez du muturrik lortuko T_1 multzoan.

- Muturrak $T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0,\ 1 < x < 2\}$ multzoan: $g(x,y) = y$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_2(x,y) = 1$, ez da zero T_2-ko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(y)$.

Baldintza beharrezkoak:

$\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 \neq 0$, hots, ez dira baldintza beharrezkoak betetzen, orduan, *f*-k ez du muturrik lortuko T_2 multzoan.

- Muturrak $T_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ multzoan:

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y) = 2x$ ez da zero T_3-ko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \in A, \quad \lambda = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}. \\ \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right) \notin A. \end{cases}$$

Baldintza nahikoak: $\Delta(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} & \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{2}} & \dfrac{2}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} > 0.$$

Beraz, *f* funtzioak $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ puntuan fr(*A*)-rekiko maximo lokala lortzen du.

- Muturrak $T_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 4,\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\}$ multzoan:

$g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_1(x,y) = 2x$ ez da zero T_4-ko puntuetan.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in A, \quad \lambda = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \\ (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \notin A. \end{cases}$$

Baldintza nahikoak: $\Delta(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix}$.

$$\Delta(\sqrt{2},\sqrt{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}})=\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}=8\sqrt{2}>0.$$

Beraz, f funtzioak $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuan fr(A)-rekiko maximo lokala lortzen du.

- Muturrak $T_5=\{(1,0),(2,0),(0,1),(0,2)\}$ erpinetan.

Grafikoan ikus dezakegunez:
(1,0) eta (0,1) erpinetan fr(A)-rekiko minimo lokala lortzen du. Besteetan ez du ezer lortzen.

(x_0,y_0)	*Aurreko informazioa*	*A-rekiko?*
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	Maximo lokala fr(A)-rekiko	Ezer ez
$\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$	Maximo lokala fr(A)-rekiko	Maximo lokala A-rekiko
(1,0)	Minimo lokala fr(A)-rekiko	Minimo lokala A-rekiko
(0,1)	Minimo lokala fr(A)-rekiko	Minimo lokala A-rekiko

ii) A trinkoan f jarraitua denez, A-rekiko maximo eta minimo globalak existitzen dira: $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuan A-rekiko maximo lokal bakarra lortzen denez, hortxe lortzen du f funtzioak maximo globala. A-rekiko minimo lokalak aztertuz:

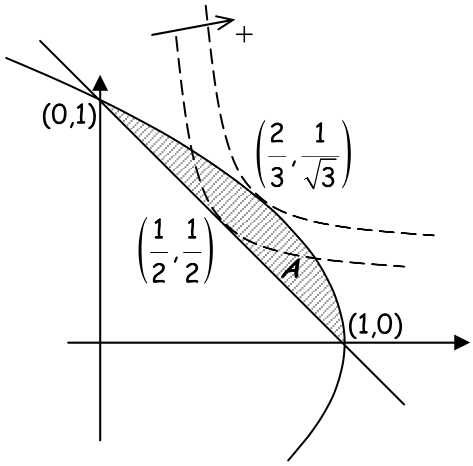
(x_0,y_0)	*Maximo/minimo lokala A-rekiko*	$f(x_0,y_0)$
(1,0)	Minimo lokala A-rekiko	1
(0,1)	Minimo lokala A-rekiko	1

(1,0) eta (0,1) biak sestra-kurba berean (f_1) daudela ikus dezakegu. Beraz, f funtzioak bi puntu hauetan A-rekiko minimo globala lortzen du.

(2007ko ekaina) Demagun $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x\leq -y^2+1,\ \ x+y\geq 1\}$ multzoa eta $f(x,y)=xy$ funtzioa.

i) Kalkulatu f-ren mutur lokalak A multzoan.

ii) Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.



i) Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = y = 0 \\ f_2(x,y) = x = 0 \end{array}\right\} (0,0) \notin A \text{ orduan baztertu egiten dugu.}$$

Ukitzaileak aztertzeko bi zati:

$$\left.\begin{array}{r} T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = -y^2 + 1,\ \ 0 \le x \le 1\} \\ T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 1,\ \ 0 \le x \le 1\} \end{array}\right\} \text{Mutur baldintzatuak.}$$

• T_1 aztertzeko baldintza $g(x,y) = x + y^2 - 1 = 0$ erabiliko dugu.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y^2 - 1)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in A,\ \ \lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \\ \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \notin A. \end{array}\right.$$

Grafikoki aztertuz, $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ puntuan f funtzioak A multzoarekiko maximo lokala lortzen duela ikusten dugu.

• T_2 aztertzeko baldintza $g(x,y) = x + y - 1 = 0$ erabiliko dugu.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x + y - 1)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y - 1 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \in A, \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Grafikoki aztertuz, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ puntuan *f* funtzioak *A* multzoarekiko muturrik lortzen ez duela ikusten dugu.

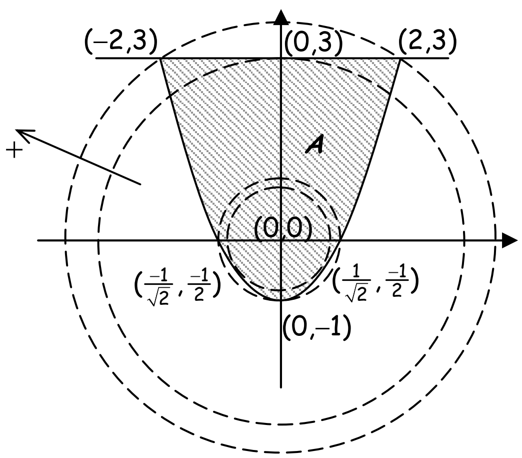
• Erpinak grafikoki aztertzen ditugu;
(1,0) puntuan *f* funtzioak *A* multzoarekiko minimo lokala lortzen du.
(0,1) puntuan *f* funtzioak *A* multzoarekiko minimo lokala lortzen du.

ii) *A* trinkoan *f* jarraitua denez, *A*-rekiko maximo eta minimo globalak existituko dira: $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ puntuan *A*-rekiko maximo lokal bakarra lortzen denez, hortxe lortzen du *f* funtzioak maximo globala. *A*-rekiko minimo lokalak aztertuz:

(x_0,y_0)	$f(x_0,y_0)$
(1,0)	0
(0,1)	0

Hau da, (1,0) eta (0,1) biak sestra-kurba berean (f_0) daudenez, *f* funtzioak bi puntuetan *A*-rekiko minimo globala lortzen du.

(2007ko iraila) Demagun $f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioa eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq x^2 - 1,\ \ y \leq 3\}$ multzoa.
i) Kalkulatu *f*-ren mutur lokalak *A* multzoan.
ii) Kalkulatu, existitzen badira, *f*-ren mutur globalak *A* multzoan.



i) int(A)-rekiko muturrak: mutur ez baldintzatuen teoria aplikatuko dugu, $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \in \text{int}(A)$$

, horregatik aurrera jarraituko dugu baldintza nahikoak aztertuz.

Baldintza nahikoak:

$f_{xx}(x,y) = 2$.

$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0$.

$f_{yy}(x,y) = 2$.

$$H_f(0,0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

eta $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ da, hortaz, f funtzioak A multzoarekiko minimo lokala lortzen du (0,0) puntuan.

<u>Ukitzaileak</u> aztertzeko bi tarte:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x^2 - 1,\ -2 \le x \le 2\} \\ T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 3,\ -2 \le x \le 2\} \end{array}\right\} \text{Mutur baldintzatuak.}$$

- T_1 aztertzeko baldintza $g(x,y) = y - x^2 + 1 = 0$ erabiliko dugu.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y - x^2 + 1)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x - 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - x^2 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (0,-1) \in A, \quad \lambda = 2. \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \in A, \quad \lambda = 1. \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) \in A, \quad \lambda = 1. \end{cases}$$

Grafikoki aztertuz:

(0,–1) puntuan f funtzioak hartzen duen balioa A-ko inguruko puntu guztietan hartzen duen balioa baino handiagoa da, hau da, f funtzioak (0,–1) puntuan maximo lokala lortzen du.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ puntuan eta inguruko A multzoko puntuetan funtzioak balio duena alderatuta hau ikusten dugu: puntu batzuetan hartzen duen balioa, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$-n hartzen duena baino handiagoa dela eta beste batzuetan, ordea, txikiagoa. Ondorioa: f funtzioak ez du muturrik lortzen $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ puntuan.

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ puntuan eta *A* multzoko inguruko puntuetan funtzioak balio duena alderatuta hau ikusten dugu: puntu batzuetan hartzen duen balioa, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$-n hartzen duena baino handiagoa dela eta beste batzuetan, ordea, txikiagoa. Ondorioa: *f* funtzioak ez du muturrik lortzen $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ puntuan

• T_2 aztertzeko baldintza $g(x,y) = y - 3 = 0$ erabiliko dugu.

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(y-3)$.

Baldintza beharrezkoak:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= y - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (0,3) \in A, \quad \lambda = -6.$$

Grafikoki aztertuz (0,3) puntuan eta *A* multzoko inguruko puntuetan funtzioak balio duena alderatuta hau ikusten dugu: puntu batzuetan hartzen duen balioa, (0,3)-n hartzen duena baino handiagoa dela eta beste batzuetan, ordea, txikiagoa. Ondorioa: *f* funtzioak ez du muturrik lortzen (0,3) puntuan.

• Erpinak grafikoki aztertzen ditugu:

(–2,3) puntuan *f* funtzioak hartzen duen balioa inguruko *A*-ko puntu guztietan hartzen duen balioa baino handiagoa da, hau da, *f* funtzioak (–2,3) puntuan maximo lokala lortzen du.

(2,3) puntuan *f* funtzioak hartzen duen balioa inguruko *A*-ko puntu guztietan hartzen duen balioa baino handiagoa da, hau da, *f* funtzioak (2,3) puntuan maximo lokala lortzen du.

ii) *A* trinkoan *f* jarraitua denez, *A*-rekiko maximo eta minimo globalak existituko dira:
Maximo globala maximo lokalen artean bilatuko dugu:

(x_0,y_0)	$f(x_0,y_0)$
(0,–1)	1
(–2,3)	13
(2,3)	13

f funtzioak balio handiena, 13, (–2,3) eta (2,3) puntuetan lortzen du. Horrela *f* funtzioak *A* multzoarekiko maximo globala (–2,3) eta (2,3) puntuetan lortzen du.

(0,0) puntuan *A*-rekiko minimo lokal bakarra lortzen denez, hortxe lortzen du *f* funtzioak minimo globala *A*-rekiko.

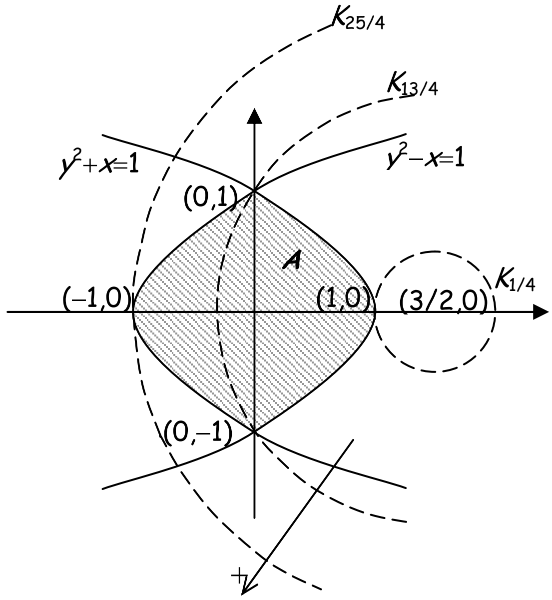
(2008ko ekaina) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 - x \le 1,\ y^2 + x \le 1\}$ eta $f(x,y) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2$. Aurkitu f funtzioaren mutur lokal guztiak A multzoan. Kalkulatu, existitzen badira, $\max_{x \in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min_{x \in A} f(\boldsymbol{x})$.

- Mutur lokalak A-ren barrualdean:

Mutur ez baldintzatuak ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} (x,y) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \notin A.$$

Beraz, barrualdean f-k ez du ezer lortzen.



Mutur lokalak A-ren mugan ($g^1(x,y) = y^2 - x - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak, $g^2(x,y) = y^2 + x - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak eta (0,1) eta (0,–1) ebaki puntuak):

- $g^1(x,y) = y^2 - x - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak ($g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \lambda(y^2 - x - 1).$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - 3 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= y^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (-1,0) \in A, \lambda = -5. \\ \left(1, \sqrt{2}\right) \notin A. \\ \left(1, -\sqrt{2}\right) \notin A. \end{cases}$$

- $g^2(x,y) = y^2 + x - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak ($g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \lambda(y^2 + x - 1).$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x - 3 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= y^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}\right\} (1,0) \in A, \lambda = 1.$$

Beraz, maximo edo minimo lokala izateko hautagaiak: (–1,0), (1,0), (0,1) eta (0,–1).

Eta irudian (sestra-kurbekin) ikusten dugun bezala, $(-1,0)$ maximo lokala da, $(1,0)$ minimo lokala eta $(0,1)$ eta $(0,-1)$ ez dira ezer.

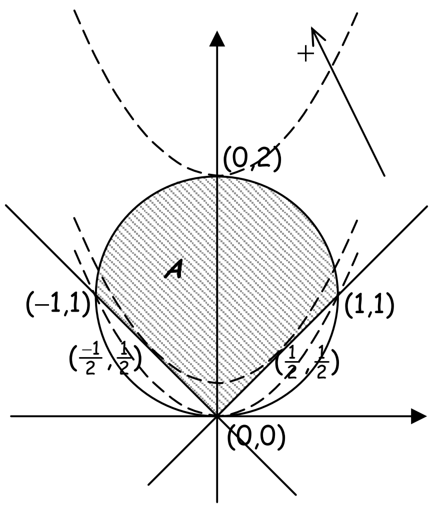
- Mutur globalei buruz, lehenengoz ziurtatuko ditugu: A trinkoan f jarraitua da, beraz, $\max_{x\in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min_{x\in A} f(\boldsymbol{x})$ existitzen dira; eta mutur lokalen artean aurkituko ditugu. Orduan, maximo lokal bakar bat dagoenez, bertan egongo da maximo globala:

$$\max_{x\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(-1,0) = \frac{25}{4}.$$

Eta minimo lokal bakar bat dagoenez, bertan egongo da minimo globala:

$$\min_{x\in A} f(\boldsymbol{x}) = f(1,0) = \frac{1}{4}.$$

(2008ko iraila) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + (y-1)^2 \leq 1,\ x \leq y,\ x \geq -y\}$ multzoa eta $f(x,y) = y - x^2$ funtzioa. Aurkitu f-ren mutur lokal guztiak A multzoan. Kalkulatu, existitzen badira, f-ren mutur globalak A multzoan.



1) Mutur lokalak A-ren barrualdean ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

Mutur ez baldintzatuak:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2x = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 1 \neq 0\end{aligned}\right\}\ \text{Beraz, barrualdean } f\text{-k ez du ezer lortzen.}$$

2) A-ren mugan mutur lokalak bilatzeko zatika egingo dugu:

$g^1(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak,

$g^2(x,y) = x - y = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak,

$g^3(x,y) = x + y = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak eta

$(0,0)$, $(-1,1)$ eta $(1,1)$ ebaki puntuak.

- $g^1(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak ($g^1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x^2 + (y-1)^2 - 1)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda(y-1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \in A. \\ (0,2) \in A. \\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \notin A. \\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \notin A. \end{cases}$$

- $g^2(x,y) = x - y = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak ($g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x - y)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

- $g^3(x,y) = x + y = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak ($g^3 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x + y)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

Beraz, maximo edo minimo lokala izateko hautagaiak: (0,0), (0,2), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, (–1,1), eta (1,1).

Eta irudian (sestra-kurbekin) ikusten dugun bezala, (0,0), (–1,1) eta (1,1) minimo lokalak dira, (0,2) maximo lokala eta $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ eta $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ez dira ezer.

3) Mutur globalei buruz, lehenengoz ziurtatuko ditugu: A trinkoan f jarraitua da, beraz, $\max\limits_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x})$ existitzen dira; eta mutur lokalen artean aurkituko ditugu.

Orduan, maximo lokal bakar bat dagoenez, bertan egongo da maximo globala:

$$\max_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,2) = 2 .$$

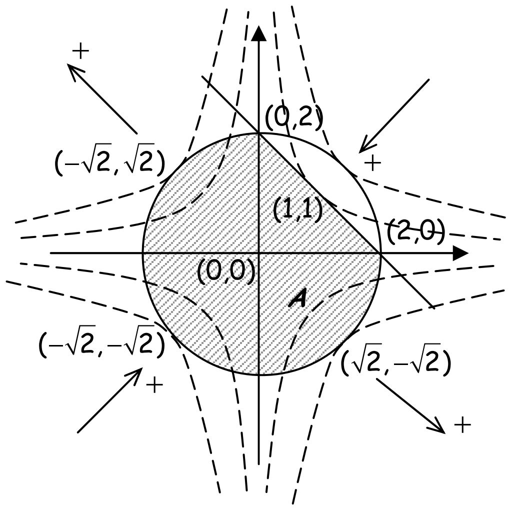
Eta minimo lokal guztietan funtzioak balio bera lortzen duenez, hirutan egongo da minimo globala:

$$\min_{\boldsymbol{x} \in A} f(\boldsymbol{x}) = f(0,0) = f(1,1) = f(-1,1) = 0 .$$

(2009ko ekaina) Demagun $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq -y + 2\}$ multzoa eta $f(x,y) = -xy$ funtzioa.

i) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur lokalak *A* multzoan.

ii) Kalkulatu *f* funtzioaren mutur globalak *A* multzoan.



i) Hasiko gara *A* multzoko barrualdea aztertzen, mutur ez baldintzatuen teoria erabiliz ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

Baldintza beharrezkoa: $\left.\begin{array}{l} f_1(x,y) = -y = 0 \\ f_2(x,y) = -x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0) \in \text{int}(A)$.

Eta baldintza nahikoa: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eta haren determinantea negatiboa denez, (0,0) ez da ezer.

Eta muga: mutur baldintzatuen teoria erabiliko dugu muga zati bakoitzean, hau da, $x^2 + y^2 - 4 = 0$ zirkunferentzian eta $x + y - 2$ zuzenean (gehi ebaki puntuak!).

- *f*-ren $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ ekuazioari baldintzatuko muturrak ($f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -x + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{2},\sqrt{2}) \notin A. \\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in A. \\ (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \in A. \\ (-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in A. \end{cases}$$

- *f*-ren $g(x,y) = x + y - 2 = 0$ ekuazioari baldintzatuko muturrak ($f, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -xy + \lambda(x + y - 2)$.

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -y+\lambda = 0\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = -x+\lambda = 0\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow (1,1)\in A.$$

Orduan, mugako (eta multzo osoko) maximo edo minimo lokala izateko hautagaiak $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, (1,1), (2,0) eta (0,2) dira.

Eta irudian ikusten dugun bezala, (2,0) eta (0,2) ez dira ezer, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ eta $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuetan maximo lokalak lortzen dira eta $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ eta (1,1) puntuetan minimo lokalak lortzen dira.

ii) *A* trinkoan *f* funtzioa jarraitua denez, maximo eta minimo globalak existitzen dira eta mutur lokalen artean daude: maximo globala $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ eta $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ puntuetan lortzen da eta $\max_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = 2$ da; minimoari dagokionez, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ puntuan lortzen da eta $\min_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = -2$ da.

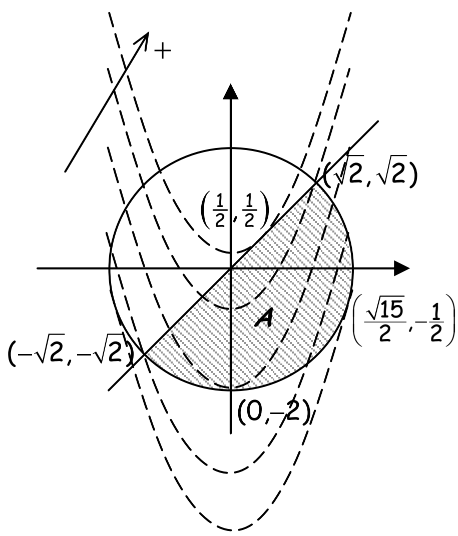
(2009ko iraila) Demagun $f(x,y) = y - x^2$ funtzioa eta $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \le 4,\ x \ge y\}$ multzoa. Kalkulatu f funtzioaren mutur lokalak A multzoan. Kalkulatu f funtzioaren mutur globalak A multzoan.

• Mutur lokalak *A*-ren barrualdean: ($f \in C^2(\mathbb{R}^2)$)

Mutur ez baldintzatuak:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \ne 0\end{array}\right\} \text{ beraz,}$$

barrualdean *f* funtzioak ez du ezer lortzen.



Mutur lokalak *A*-ren mugan ($g^1(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak, $g^2(x,y) = x-y = 0$ ekuazioari baldintzatutakoak eta $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ eta $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ebaki puntuak ($g^1, g^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$):

• $g^1(x,y) = x^2+y^2-4 = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x(-1+\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \pm 2. \\ \lambda = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}, x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Eta puntu hauek ditugu: $\begin{cases} (0,2) \notin A. \\ (0,-2) \in A. \\ \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \in A. \\ \left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) \notin A. \end{cases}$

- $g^2(x,y) = x - y = 0$ ekuazioari baldintzatutako muturrak:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = y - x^2 + \lambda(x - y)$$

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = -2x + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 1 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = x - y = 0 \end{array}\right\} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in A.$$

Beraz, maximo edo minimo lokala izateko hautagaiak: $(0,-2)$, $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ eta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ eta $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ebaki puntuak.

Eta irudian (sestra-kurbekin) ikusten dugun bezala, $(0,-2)$ eta $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ez dira ezer, puntu hauetatik igarotzen diren sestra-kurbek, puntuen ondoan, multzoa zeharkatzen dutelako, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ maximo lokala da eta $\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ eta $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ minimo lokalak.

Mutur globalei buruz, lehenengoz ziurtatuko ditugu: A trinkoan f jarraitua da, beraz, $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min\limits_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ existitzen dira; eta mutur lokalen artean aurkituko ditugu. Orduan, maximo lokal bakar bat dagoenez, bertan egongo da maximo globala:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Eta minimo globala: $f\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{17}{4}$ eta $f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2$, beraz,

$$\min_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x}) = f\left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}.$$

2010eko ekaina. Demagun $f(x,y) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2$ eta $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \le y, 1 \le y \le 4\}$.
Kalkulatu *f* funtzioaren mutur lokal eta globalak *A* multzoan.

Irudian ikusten den bezala, *A* trinkoa da eta *f* jarraitua denez, $\max_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ eta $\min_{\boldsymbol{x}\in A} f(\boldsymbol{x})$ existituko dira.

Mutur lokalak.

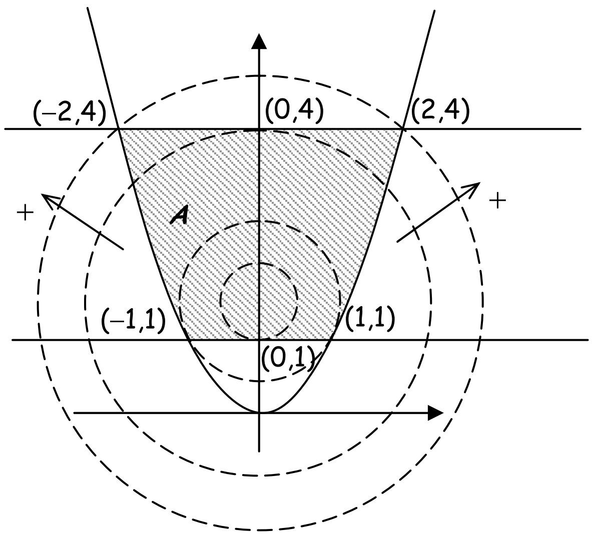
- Azter dezagun *A*-ren barrualdean zerbait dagoen, mutur ez baldintzatuen teoria erabiliz:

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ da eta $\left.\begin{aligned} f_1(x,y) = 2x = 0 \\ f_2(x,y) = 2y - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\right) \in \operatorname{int}(A)$.

Goazen orain baldintza nahikoa aztertzera:

$$\left|H_f(0,1)\right| = \begin{vmatrix} f_{11}\left(0,\frac{3}{2}\right) & f_{12}\left(0,\frac{3}{2}\right) \\ f_{12}\left(0,\frac{3}{2}\right) & f_{22}\left(0,\frac{3}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{eta} \quad f_{11}\left(0,\frac{3}{2}\right) > 0 \quad \text{denez,} \quad \left(0,\frac{3}{2}\right) \quad \text{puntuan } f$$

funtzioak minimo lokala lortzen du eta $f\left(0,\frac{3}{2}\right) = 0$.



A-ren muga:

- Azter dezagun $x^2 + y = 4$ mugaren zatia ($g(x,y) = x^2 - y$):

Funtzio lagrangearra eraikiko dugu:

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(x^2 - y)$.

Eta haren deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= 2y - 3 - \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 - y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x(1+\lambda)$$

$x = 0$ denean, hirugarren ekuazioan $y = 0$ dugu
$\lambda = -1$ denean, bigarren ekuazioan $2y - 3 + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$.
Eta hirugarren ekuazioan $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.
Lortutako puntuak:
$(0,0) \notin A$
$(1,1) \in A$ baina ebaki puntua denez, gero aztertuko dugu.
$(-1,1) \in A$ baina ebaki puntua denez, gero aztertuko dugu.

• Azter dezagun $y = 1$ mugaren zatia ($g(x,y) = y - 1$):
Funtzio lagrangearra eraikiko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(y-1).$$

Haren deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y - 3 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \\ \\ \Rightarrow y = 1 \end{array} \end{array}\right\} (0,1) \in A.$$

(0,1) puntuan A-rekiko muturrik lortzen den ikusteko sestra-kurbak aztertuko ditugu. (0,1) puntuaren inguruko eta multzoko puntu batzuetan funtzioak balio txikiagoak lortzen ditu eta beste batzuetan, handiagoak. Horrela, (0,1) puntua ez da mutur lokala A multzoan.

• Azter dezagun $y = 4$ mugaren zatia ($g(x,y) = y - 4$):
Funtzio lagrangearra eraikiko dugu:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda(y-4).$$

Haren deribatuak:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) = 2x = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) = 2y - 3 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) = y - 4 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x = 0 \\ \\ \Rightarrow y = 4 \end{array} \end{array}\right\} (0,4) \in A.$$

(0,4) puntuaren inguruko eta multzoko puntu batzuetan funtzioak balio txikiagoak lortzen ditu eta beste batzuetan, handiagoak. Horrela, (0,4) puntua ez da mutur lokala A multzoan.

Ebaki puntuak:
(-1,1) puntuaren inguruko eta multzoko puntu batzuetan funtzioak balio txikiagoak lortzen ditu eta beste batzuetan, handiagoak. Horrela, (-1,1) puntua ez da A-rekiko mutur lokala.
(1,1) puntuaren inguruan beste hainbeste, inguruko eta multzoko puntu batzuetan funtzioak balio txikiagoak lortzen ditu eta beste batzuetan, handiagoak. Horrela, (1,1) ez da A-rekiko mutur lokala.
(-2,4) puntuaren inguruko eta multzoko puntu guztietan funtzioak balio txikiagoa lortzen duenez, (-2,4) A-rekiko maximo lokala da.

(2,4) puntuaren inguruko eta multzoko puntuetan beste hainbeste gertatzen da eta (2,4) *A*-rekiko maximo lokala da.

Mutur globalak:
Lehenago esan dugun bezala, *f* funtzioak *A* multzoan maximo eta minimo globalak ditu eta hauek lokalen artean bilatuko ditugu.
Minimo lokal bakarra dugunez, $\left(0,\frac{3}{2}\right)$, hauxe da *A*-rekiko minimo globala.
Maximo lokalak (-2,4) eta (2,4) dira.
$f(-2,4)=4{,}25$ eta $f(2,4)=4{,}25$, hau da, bi puntu hauek sestra-kurba berean daude eta biak dira *A*-rekiko maximo global.