Sarriko-On

Ekonomian Lizentziaturako Matematika III. Azterketak

ISBN: 978-84-695-3035-1

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

02-12

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Ekonomia eta Enpresal-Zientzien Fakultatea

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIAN LIZENTZIATURAKO MATEMATIKA III. AZTERKETAK

M. Josune Albizuri Irigoien
Arritokieta Chamorro Elosua
Xabier Lasaga Txoperena
Txus Ortells Sasia
Luisma Zupiria Gorostidi

AURKIBIDEA

AURKEZPENA

Matematika III irakasgaia, Ekonomia eta Enpresa Zientzien Fakultateko Ekonomia Lizentziaturako bigarren ikasturteko irakasgaia da eta integrazioa, funtzio bektorialak eta diferentzia finituko ekuazioak jorratzen ditu.

Bilduma honetan, azken urteotan jarri ditugun azterketak eta horien erantzunak aurkituko dituzue. Lehen zatian, azterketen enuntziatuak daude, ikasleak azterketaren orokortasunaz jabetzeko; horrela, erantzuna begiratu gabe, irakurlea azterketa oso bat egiten saia daiteke. Bigarren zatian, azterketa horietan jarri diren ariketa guztien erantzunak, gaika eta ordena kronologikoan, aurkitzen dira.

Ariketa hauek egiteko edukiera teorikoa liburu honetan aurki daiteke: *Ekonomilarientzako Matematika Gaiak*, F. Valencianok eta M. Aramendiak, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, 1995.

Irakasgaiaren egitaraua hauxe da:

I. Integrazioa
Jatorrizko funtzioak. Zatikako integrazioa eta aldagai aldaketako integrazioa. Riemann-en integrala. Definizioa. Interpretazioa. Kalkuluaren oinarrizko teorema. Metatutako osoaren kalkulua tasak erabiliz. Integral inpropioak. Bi aldagaiko funtzioen integrazioa. Integrazioa errektangeluetan. Integrazioa multzo bornatu eta ez bornatuetan.

II. $\mathbb{R}^n$-tik $\mathbb{R}^m$-rako funtzioak
Jarraitutasuna. Diferentziagarritasuna eta diferentziala. Matrize jacobiarra. Katearen erregela. Alderantzizko funtzioaren teorema eta funtzio inplizituaren teorema: Aldagai endogenoak eta aldagai exogenoak. Aplikazioa eredu makroekonomikoetan.

III. Diferentziako ekuazioak
Diferentziako ekuazioaren kontzeptua. Soluzio partikularra eta soluzio orokorra. Ekuazio linealak: Soluzioaren existentziaren teorema. Diferentziako ekuazio homogenoen soluzio orokorra. Diferentziako ekuazio osoen soluzio orokorra. Ebazpen praktikorako metodoa. Aplikazioak: eredu ekonomiko dinamikoak.

AZTERKETAK

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2000ko URTARRILA

1. (6 puntu) Enpresa batek produktu berri bat atera du. Produktu horrek sortzen duen sarrera gordina $I'(t) = 1.000 - 0,03t^2$ milioi euro/egun-ko tasa beherakorrean neurtzen da (t momentu bakoitzeko). Bestalde, produkzio gastuak denborarekin hazten dira, gastu tasa (t momentuko) $G'(t) = 100 + 0,06t^2$ milioi euro/egun izanik.

i) Kalkulatu metatutako mozkina aste batean.

ii) Kalkulatu metatutako mozkina produktuak errentagarria izaten uzten duen arte.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D y\,dx\,dy$ integrala,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \le 25\;; (x+8)^2 + y^2 \ge 25\;; (x-8)^2 + y^2 \ge 25\}$$

bada.

3. (10 puntu) Sistema honek lau aldagai erlazionatzen ditu:

$$\begin{cases} x^2y^2 + e^z u = 10 \\ xz^2 + e^y u^2 = 100. \end{cases}$$

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, egiaztatu sistemak y eta z aldagaiak x eta u aldagaien funtzio modura inplizituki definitzen dituen $(x,y,z,u) = (20,0,0,10)$ puntuaren ingurunean.

ii) Aztertu eragina bi aldagai endogenoetan, u aldagaiak u=10 baliotik gehikuntza txiki bat jasotzen duenean, beste aldagai exogenoa konstantea mantentzen den bitartean.

4. (8 puntu) Ondasun baten eskaria t momentuan, ondasun horrek momentu horretan duen prezioaren arabera finkatzen da ekuazio honen bitartez: $D_t = 8 - 4p_t$; eskaintza, ordea, aurreko bi momentuetan ondasunaren prezioen arabera finkatzen da: $S_{t+2} = -1 + 4p_{t+1} + p_t$.

i) $p_0 = 2$ eta $p_1 = 0,5$ direla baldin badakigu, aurkitu p_t, momentu bakoitzean eskaria eta eskaintza berdintzen dituzten prezioak.

ii) Aztertu aurreko apartatuan lortutako oreka prezioaren joera epe luzean.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2000ko EKAINA

1. t momentu bakoitzean prozesu produktibo baten mozkin tasa $100+0{,}04t+k0{,}5^{0{,}1t}$ mila euro/egun da, t igarotako egun kopurua izanik. Kalkulatu k konstantea baldin badakigu 10 egun pasa ondoren metatutako mozkina 1.007.000 eurokoa dela. ($\int a^{f(x)}f'(x)dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln(a)}+K$).

2. Demagun $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy^2\le 1,\ x\ge y^2\}$ multzoa eta $f(x,y)=\begin{cases} y^3e^{-y^2}, & x<1 \\ 1/x^2, & x\ge 1\end{cases}$ funtzioa.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala.

3. Demagun eredu ekonomiko hau:

$$Y = C + I + G$$
$$C = f(Y,T) + \alpha r$$
$$I = \beta r,$$

Y errenta, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastua, T bildutako zergak eta r interes tasa izanik. α eta β parametroak hertsiki negatiboak dira eta haren existentzi eremu osoan C^1 klasekoa den f funtzioak hau betetzen du:

$$\forall Y,T:\ 0<\frac{\partial f}{\partial Y}(Y,T)<1,\ \frac{\partial f}{\partial T}(Y,T)<0.$$

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, frogatu zergak, interes tasa eta gastua finkatu ondoren errenta, kontsumoa eta inbertsioa, banan-banan, finkatuak geratzen direla edozein oreka punturen inguruan.

ii) Aztertu gastuen gehikuntza txiki baten eragina kontsumoaren gainean, zergen gehikuntzaren eragina kontsumoaren gainean eta interes tasaren jaitsieraren eragina errentaren gainean.

4. Demagun diferentziako ekuazio lineal hau:

$$y_{t+3}-7y_{t+2}+15y_{t+1}+Ay_t=20.$$

Baldin badakigu $y_t^h=2$ funtzio konstantea elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularra dela, aurkitu ekuazioaren soluzio partikularra non $y_0=2$, $y_1=9$ eta $y_2=20$ diren.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko URTARRILA

1. (6 puntu) Epe laburreko inbertsio txiki batek sortutako mozkin tasa $M_0 + kte^{-rt^2}$ euro/egun da (t denbora egunetan da) da. Kalkulatu k konstantea baldin badakigu: (i) hasierako momentuan (t=0), mozkin tasa 100 euro/egun dela; (ii) r konstantearen balioa $\frac{\ln 10}{100}$ dela; eta (iii) 10 egun pasa ondoren metatutako mozkin osoa 1.045 eurokoa dela. (Ez erabili kalkulagailua, hau da, ez ordezkatu "ln 10" adierazpena haren balioarekin).

2. (6 puntu) Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \leq 1, 2x - y \geq -1, y \geq 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ funtzioa.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala.

3. (10 puntu) Demagun $\begin{cases} x^2\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - \pi + t = 0 \\ x^2 + y^2 + az^2 - xy - a\pi^2 + t = 0 \end{cases}$ sistema, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ izanik.

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu aurreko sistemak y eta z aldagaiak inplizituki definitzen dituela x eta t aldagaien funtzio moduan (x,y,z,t)=(0,0,π,0) puntuaren ingurunean?

ii) Hala bada, alderantzizko funtzioaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu lortutako funtzio inplizitua lokalki alderanzkarria dela (0,0) puntuaren ingurunean?

4. (8 puntu) Banketxe batek haren bezeroei mota berezi bateko inbertsio fondoak eskaintzen dizkie. Urte bakoitzean, aurreko urtean hartutako inbertsioaren zati bat mantentzen du eta duela bi urteko inbertsioaren galdutakoaren zati bat berreskuratzen du. Gainera, urte bakoitzean bezero berrien fondoak ere lortzen ditu. I_t, t momentu bakoitzean (t=0,1,2... urteak dira) lortutako inbertsioa bada, kalkulatu I_t datu hauekin: lehen eta bigarren urteetan 90 eta 102 milioi euro, hurrenez hurren, hartzen du; hortik aurrera I_{t+2}, urtero, aurreko urtearen I_{t+1} inbertitutako %60 mantentzen du eta duela bi urte galdutakoaren zati bat berreskuratzen du urtero, zati hau urte horretan lortutakoaren (I_t) %16 delarik. Halaber, urte bakoitzean inbertitzaile berrietatik 24 milioi euro ere lortzen du.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2001eko EKAINA

1. (6 puntu) t momentu bakoitzean (t denbora egunetan da) enpresa baten sarrera tasa $I'(t) = e^{-t}(t^2 - 4t + 2)$ mila euro/egun da eta gastu tasa $G'(t) = e^{-t}(4t + 2)$ mila euro/egun. Kalkulatu metatutako mozkin garbia lehen bost egunetan.

2. (6 puntu) Demagun $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \le xy \le 1,\, x \ge 2\}$ multzoa eta $f(x, y) = e^{x|y|}$ funtzioa. Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala. (Oharra: kalkuluak egin baino lehen, planteatu nola egingo duzun integrala, multzoaren zatiketa ondo azalduz).

3. (10 puntu) Kontsidera dezagun eredu makroekonomiko hau non Y errenta nazionala, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastu publikoa, M moneta eskaintza eta r interes tasa diren:

$$Y = C + I + G$$

$$M = f(Y, r)$$

$$C = g(y),$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak izanik. Deribatu horien zeinuak hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} < 0, \quad g'(Y) > 0.$$

i) Egiaztatu posible dela errenta, kontsumoa eta inbertsioa aldagai endogeno moduan adieraztea sistema orekan dagoen edozein punturen ingurunean.
ii) Aztertu banan-banan errentaren gaineko eragina: (a) moneta eskaintza handitzen denean; (b) interes tasa jaisten denean.
iii) Interes tasa handitzen denean, zein da eragina kontsumoan? Eta gastu publikoa handitzen denean, zein da eragina inbertsioan?

4. (8 puntu) Demagun diferentziako ekuazio hau:

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = g(t).$$

Baldin badakigu $3t + 5$ funtzioa ekuazioaren soluzio partikularra dela, aurkitu $g(t)$ eta $y_0 = 5$, $y_1 = 8$ eta $y_2 = 11$ betetzen dituen ekuazio osoaren soluzio partikularra.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA, 2002ko URTARRILA

1. Europako Batasuneko herri batean, euroa ke^{-rt} euro/egun tasarekin sartzen da (t euroa kalera irten denetik egunak dira), k konstante ezaguna delarik. r=0,1 bada, eta herri horretan zirkulazioan dagoen monetaren balio osoa konstantea eta $20k\frac{e-1}{e}$ euroen baliokidea bada, zein egunetan izango da monetaren balioaren erdia eurotan?

2. Demagun $f(x,y)=x+1$ funtzioa eta $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x^2\geq y+1;\ 4x^2\leq y+4\}$ multzoa.

i) Planteatu $\iint_D f$ integrala, $dydx$ eta $dxdy$ moduetan.

ii) Kalkulatu integrala.

3. Demagun $f(x,y)=(x-y,y^2)$ eta $g(x,y)=(e^{x+y},y^3)$ funtzioak eta kontsidera dezagun $h=g\circ f$ konposaketa.

i) Bada h lokalki alderanzkarria (0,1) puntuaren inguruan?

ii) Aztertu $h(x,y)=(z,z^2)$ ekuazio sistemak x eta y aldagaiak z aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen dituen (x,y,z)=(0,1,1) puntuaren inguruan.

iii) Zer eragina izango du x aldagai endogenoan aldagai exogenoaren gehikuntza txiki batek? Zer eragina izango du beste aldagai endogenoan aldagai exogenoaren jaitsiera txiki batek?

4. i) Bilatu segida guztiak $(y_0, y_1, \ldots, y_n \ldots)$ non gai bakoitza (hirugarrenetik aurrera) bi aurrekoen batez bestekoa den.

ii) Demagun $y_{t+2}-0{,}5y_{t+1}-0{,}5y_t=-500(0{,}5)^t$. Ekuazio hau ebatziz, aurkitu y_7 gaiaren balio zehatza non $y_0=3000$ eta $y_1=1000$ diren.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA, 2002ko EKAINA

1. (6 puntu) M ondasun baten ekoizpenaren mozkin osoa da eta ekoiztutako kopuruaren menpe da, hots, $M = M(q)$ euro. Mozkin marjinala $M'(q) = 22q - qe^{-0,2q}$ euro/unitate bada, zein izango da mozkin unitarioa 10 unitate ekoizten badira eta $M(0)=0$ bada?

2. (6 puntu) Sailkatu eta kalkulatu integral inpropio hau: $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$.

3. (10 puntu) Demagun ekuazio sistema hau: $\begin{cases} x^2y + zt + x = 1 \\ x^2t + xz^2 - y = 1. \end{cases}$

i) Ziurta dezakegu sistemak x eta y aldagaiak inplizituki definitzen dituela z eta t aldagaien funtzio moduan $(x, y, z, t) = (1, 0, 0, 1)$ puntuaren ingurunean?

ii) Kalkulatu eragina aldagai endogenoetan z aldagaia apur bat handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan, sistema mantenduz.

iii) Kalkulatu eragina aldagai endogenoetan t aldagaia apur bat handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan, sistema mantenduz.

iv) Alderanzkarria da lortutako funtzio inplizitua (0,1) puntuaren ingurunean?

4. (8 puntu) Demagun S_{t+1}, D_{t+1} eta p_{t+1}, ondasun baten eskaintza, eskaria eta prezioa, hurrenez hurren, $t+1$ aldian. Baldin badakigu $p_0 = 4$ dela eta t guztietarako $S_{t+1} = -2 + 2p_t$ eta $D_{t+1} = 22 - 6p_{t+1}$ betetzen dela, kalkulatu p_t prezioen segida non t aldi bakoitzean eskaria eta eskaintza berdintzen diren. Denboran zehar lortutako prezioak kopuru zehatz batera jotzen du? Hala bada, zein da kopuru hori? Zein da eskariaren eta eskaintzaren joera epe luzean, lortutako oreka prezioetarako?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA, 2003ko URTARRILA

1. Demagun eredu matematiko hau: urperatutako itsasontzi batek fuel-olioa isurtzen du $Q'(t) = 7te^{-0,01t}$ tona/ordu tasaren arabera, t isurtzen hasi den unetik igarotako ordu kopurua izanik.

i) Kalkulatu lehenengo T orduetan isuritako fuel-olioaren kantitatea.

ii) Kalkulatu etorkizunean isuritako fuel-olioaren kantitatea, hau da, limitea T infiniturantz joaten denean (kontuan hartu $\lim_{t\to\infty} te^{at} = 0$ dela, $a < 0$ izanik).

iii) Kalkulatu igarotako denbora isurketa tasa txikitzen hasten den arte (hots, maximoa lortzen den arte) eta momentu horretarako isuritakoa.

2. Pertsona batek A eta B bi ondasun erosteko k euroko aurrekontua du; ondasun horien prezioak p_1 eta p_2 dira, hurrenez hurren. Lortzen duen erabilgarritasuna funtzio honek ematen du: $E(x_1, x_2) = \ln x_1 x_2^2$, non x_1 eta x_2 A eta B-ren kantitateak diren, hurrenez hurren. Erabilgarritasun handiena lortzeko, $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \ln x_1 x_2^2 + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k)$ funtzio lagrangearra kontsideratuko dugu eta ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1} + \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \dfrac{2}{x_2} + \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - k = 0. \end{cases}$$

i) $\overline{p_1}$=10, $\overline{p_2} = 20$ eta $\overline{k} = 1800$ badira, kalkulatu $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$ eta $\overline{\lambda}$, $P = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{\lambda}, \overline{p_1}, \overline{p_2}, \overline{k})$ puntua aurreko sistemaren soluzioa izateko.

ii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu sistemak x_1, x_2 eta λ aldagaiak p_1, p_2 eta k aldagaien funtzio moduan definitzen dituela i) atalean lortutako P puntuaren inguruan?

iii) Kalkulatu A-ren kontsumoaren gaineko eragina haren prezioa apur bat handitzen denean.

3. Demagun $y_{t+2} + A\, y_{t+1} + B\, y_t = C\ t\ 2^t + 2^t$ diferentzia finituko ekuazioa. Baldin badakigu 2^t eta $(-2)^t$ funtzioak elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak direla eta $\frac{1}{8}t2^t$ funtzioa ekuazio osoaren soluzio partikularra dela, kalkulatu A, B, eta C eta ekuazio osoaren soluzio partikularra non $y_0 = 2$ eta $y_1 = \frac{1}{4}$ diren.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2003ko EKAINA

1. (6 puntu) Baldin badakigu ondasun baten x unitate saltzen direnean $300-\dfrac{4}{(x+1)^2}$ euro/unitate-ko mozkin marjinala lortzen dela eta unitate bat ere ez bada saltzen 100 euroko galerak daudela, kalkulatu mozkin osoa 1.000 unitate saltzen badira.

2. (6 puntu) Demagun funtzio hau:

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5e^{-x-|y|}, & x\geq 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Baldin badakigu f funtzioa (x,y) dimentsioa biko ausazko aldagai baten dentsitate funtzioa dela, kalkulatu $-x\leq y\leq x$ gertaeraren probabilitatea (hau da, dentsitate funtzioaren integrala baldintza hori betetzen den eremuan).

3. (10 puntu) Demagun ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases}x^2u+v^2-yv=1\\ 3xy^2-u-yvx=1.\end{cases}$$

i) Ziurta daiteke sistema honek u eta v aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituela (1,1,1,1) puntuaren ingurunean?

ii) Ziurta daiteke sistema honek x eta y aldagaiak u eta v aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituela (1,1,1,1) puntuaren ingurunean?

iii) Bigarren apartatua kontuan hartzen, zer eragina izango luke aldagai endogenoetan u aldagai exogenoaren gehikuntza txiki batek?

4. (8 puntu) $(x_t)_{t=0,1,2,..}$ eta $(y_t)_{t=0,1,2,..}$ bi aldagai diskretu, ekuazio hauen bitartez erlazionaturik daude:

$$y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t=x_t,$$
$$x_{t+1}-x_t=2^t.$$

Baldin badakigu x_0=1, y_0=2, eta y_1=4 direla, aurkitu x_{10} eta y_{10}, dagozkien diferentziako ekuazioak ebatziz (lor ezazu lehen x_t).

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA, 2004ko URTARRILA

1. (6 puntu) Herri baten dibisa erreserbaren aldaketa tasa $A + Bte^{-0,5t^2}$ euro/urte da, A eta B konstante positibo ezagunak izanik.

i) Kalkulatu dibisa erreserbaren aldaketa lehen urtean.

ii) Kalkulatu dibisa erreserbaren aldaketa t-garren urtean. Frogatu aldaketa hau denboran zehar egonkorra dela.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D x\,dx\,dy$ integrala, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^3\}$ multzoa bada.

3. (10 puntu) Demagun ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases} u^2 + v = xy \\ uv + x^2 = y^2 \end{cases}$$

eta $(x, y, u, v) = (x, 0, 1, -1)$ puntua.

i) Aurkitu x-ren balioak non funtzio inplizituaren teoremak ziurtatzen duen ekuazio sistemak x eta y aldagaiak u eta v aldagaien funtzio moduan definitzen dituela $(x$,0,1,–1) puntuaren ingurunean.

ii) x-ren zein baliotarako ziurta dezakegu x eta y aldagaiak txikitzen direla u aldagai exogenoa handitzen denean?

4. (8 puntu) P biztanleko herri batean zurrumurru bat zabaltzen da modu honetan: egunero, aurreko egunean ezagutzen ez zutenen hamarretik bati heltzen zaio zurrumurrua.

i) Kalkulatu zurrumurrua ezagutzen duten biztanle kopurua t egunetan t=0 hasiera hartuta (t=0 denean inork ez du zurrumurrua ezagutzen).

ii) Zenbat egun igaroko dira zurrumurrua biztanleen %30 baino gehiagora hedatzeko?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA, 2004ko EKAINA

1. (6 puntu) Badakigu enpresa baten sarrera marjinala gastuarekiko proportzionala dela ($I'(q) = 5G(q)$), $G'(q) = 4$ euro/unitate dela eta produkziorik ez dagonean, ez dagoela ez sarrerarik ezta gasturik ere ($G(0)=I(0)=0$). Kalkulatu q produzitutako kantitatearen araberako enpresaren mozkina.

2. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = \begin{cases} |y|e^{-ax}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$ funtzioa ($a > 0$) eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y^2\}$ multzoa. Eman a-ren balioa $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$ izan dadin. (Kontuan hartu $\lim_{r \to \infty} re^{-ar} = 0$ dela.)

3. (10 puntu) Demagun eredu makroekonomiko hau non Y errenta nazionala, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastu publikoa, T zergen bidezko sarrerak eta r interes tasa diren:

$$Y = C + I + G$$
$$C = f(Y - T)$$
$$I = g(r).$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak dira eta $f'(Y-T)>0$ eta $g'(r)<0$ dira.

i) Eman f'-aren balioak zeinentzat Y, C eta I aldagai endogeno moduan har daitezkeen sistema orekan dagoen edozein punturen ingurunean.
ii) f'-aren zein baliotarako eragingo du errentaren igoera interes tasaren jaitsiera batek?
iii) Bigarren apartatuan lortutako f'-ren balioetarako, zein da kontsumoaren gaineko eragina gastua handitzen denean?

4. (8 puntu) Demagun $y_{t+3} + Ay_{t+2} + By_{t+1} + Cy_t = 8$ diferentziako ekuazioa. Baldin badakigu 1, t eta $(-1)^t$ elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak direla:

i) Kalkulatu A, B eta C.
ii) Aurkitu ekuazioaren soluzio orokorra.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko URTARRILA

1. (6 puntu) Enpresa batek lantegi berri bateko plantilla hoberena ezagutu nahi du. Lantegi horren hileko lanorduak x badira, sarrera marjinala $30\sqrt{x}$ euro/ordu eta gastu marjinala $0{,}5x$ euro/ordu dira.

i) Kalkulatu mozkina optimizatzen duen ordu kopurua eta kontratatu behar den langile kopurua, baldin badakite langile bakoitzak, hilero, 200 ordu lan egiten duela.

ii) Kalkulatu plantilla hoberenerako mozkina (euro/hilabete), 0 ordu sartzen badira 80.000 euro/hilabete-ko galerak egongo direla badakite.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D \frac{1}{x^3y^2}dxdy$ integrala, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / \ xy\geq 1,\ x\geq 1\}$ bada.

3. (10 puntu) Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} uf(x)+vg(y)=x \\ -ug(y)+vf(x)=y, \end{cases}$$

non f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzio errealak diren, $\forall x\in\mathbb{R}$: $f(x)>0$ izanik.

i) Zein (x,y,u,v) punturen ingurunean ziurta dezakegu aurreko sistemak u eta v aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu bezala definitzen dituela?

ii) $(x,y,u,v)=(2,2,1,1)$ puntuak sistema betetzen badu, eta gainera $g(2)=0$ eta $g'(2)>0$ betetzen badira, zein eragina izango du u aldagaian y aldagaiaren jaitsiera batek, x=2 izaten mantenduz?

4. (8 puntu) Ondasun baten eskaria $t+1$ momentuan (D_{t+1}) 10 unitate ken momentu horretan eta aurreko momentuaren prezioen (p_{t+1} eta p_t) arteko batez bestekoa da, eta ondasun horren eskaintza $t+2$ momentuan (S_{t+2}), aurreko bi momentuen prezioen (p_{t+1} eta p_t) arteko batez bestekoa ken 10 unitate da. Kalkulatu eskaria eta eskaintzaren arteko oreka prezioa t momentu bakoitzerako, baldin badakigu prezio hori t=0 denean 12 dela eta t=1 denean 8.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2005eko EKAINA

1. (6 puntu) Produktu baten q unitate saltzeagatik lortutako sarrera marjinala ($I'(q)$) 10 euro/unitate konstantea da; ordea, gastu marjinala ($G'(q)$) kantitatearekin linealki hazten da, $G'(q) = 1 + 0{,}0009q$ euro/unitate izanik.

i) Kalkulatu produzitu behar den kantitatea mozkina maximizatu nahi bada.

ii) Kalkulatu mozkin handiena baldin badakigu produkzioa ez dagoenean mozkina zero dela.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy$ integrala, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \geq 1;\ 0 \leq x \leq 1\}$ bada.

3. (10 puntu) Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} x^2 z - \dfrac{zy}{x} = 6 \\ 2xy - xz + yz = 8. \end{cases}$$

i) Frogatu sistemak x eta y aldagai endogeno moduan definitzen dituela (2,2,2) puntuaren ingurunean.

ii) Zer eragina izango du aldagai endogenoetan z aldagaiaren gehikuntza txiki batek (2,2,2) punturen ingurunean?

4. (8 puntu) Liburutegi ibiltari baten liburu kopurua, hasierako momentuan (t=0), 1000 unitatekoa da. Lehenengo urtean (t=1), 90 liburu gehiago erosten du. Bigarren urtetik aurrera, aurreko urtearen hasieraren %10 liburu gehiago erostea eta bi urte edo gehiago dituen liburuen %10 liburutegitik ateratzea erabakitzen du. Zenbat liburu izango du t urte pasa ondoren?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko URTARRILA

1. (6 puntu) Ondasun baten eguneko q unitate produzitzeko kostu marjinala $100+e^{-rq}$ euro/unitate ($r=10^{-5}$ izanik) da eta egunero 50.000 unitate ekoizten dira. Kalkulatu kostuaren gehikuntza, eguneko produkzioa bikoiztu nahi bada. (Ez dituzu eragiketetan agertzen diren adierazpen esponentzialak kalkulatu behar.)

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D xe^y\,dxdy$ integrala, D (1,1), (0,1) eta (1,0) erpinak dituen triangelua bada.

3. (10 puntu) Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} xg(y,z)-uv^2=z \\ x^2y-zf(u,v)=u. \end{cases}$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak dira eta $f(0,1)=0$ da.

i) Egiaztatu sistemak z eta u aldagai endogeno moduan jartzen uzten duela $(x,y,z,u,v)=(0,1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean.

ii) Aztertu x aldagaiaren jaitsiera txiki baten eragina ($x=0$ baliotik hasita, $y=v=1$ konstanteak mantenduz) z aldagaiaren gainean, $g(1,0)=-1$ izanik.

4. (8 puntu) Bezero bat 100.000€ epe luzera sartzeko asmoz bankura hurbiltzen da eta han, bi aukera eskaintzen diote: lehenean, %3ko errentagarritasuna eta interesak kontu ezberdin batean sartzen dira non ez dituzten interesik ematen, eta bigarrenean, %2,5 emango diote baina interesak urtetik urtera hasierako kopurura eransten dira.

i) Planteatu eta ebatzi dagozkien diferentziako ekuazioak ($t=0,1,2,...$ dirua sartu duenetik urte kopurua izanik) eta kalkulatu aukera bakoitzerako T urtetan metatzen den diru kopurua.

ii) Dirua 3 urtetan sartu nahi badu, zein aukera interesatuko litzaioke gehien?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2006ko EKAINA

1. (6 puntu) Sailkatu eta kalkulatu, existitzen bada, $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ integrala.

2. (6 puntu) Demagun $f(x,y) = xy$ funtzioa eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ x \geq y\}$ multzoa. Planteatu $\iint_D f$ integrala $dxdy$ eta $dydx$ moduetan. Kalkulatu $\iint_D f$.

3. (10 puntu) Demagun ekuazioen sistema hau:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{u} - \dfrac{v^2 + x}{y} = 1 \\ uy - (x+1)^2 v = 1. \end{cases}$$

i) Egiaztatu sistemak y eta u aldagaiak x eta v aldagaien funtzio moduan inplizituki definitzen dituela $(x,y,u,v)=(0,1,1,0)$ puntuaren ingurunean.
ii) Aztertu eragina aldagai endogenoetan aldagai exogenoak banan-banan handitzen ditugunean.
iii) Alderantzizko funtzioaren teorema erabiliz, egiaztatu emandako puntuaren ingurunean sistemak inplizituki definitzen duen funtzioa lokalki alderanzkarria dela (0,0) puntuan.

4. (8 puntu) Herri batean gaixotasun bat hedatzen da, gaixorik dagoen pertsona batetik hasita. Lagun batek birusa hartzen duenean, hurrengo egunean inkubatzen du eta bigarren egunean gaixotzen da (gaixotasunak egun horretan soilik irauten du), ez badute haren antigorputzek birusa akabatzen eta, kasu horretan, bigarren egunean sano egongo da; azken hau, 3 kasutik batean gertatzen da. Horrela, t egun bakoitzean I_t inkubatzen ari diren pertsona kopurua eta G_t gaixorik dauden pertsona kopurua egongo dira. Gaixorik daudenek soilik kutsatzen dute gaixotasuna, eta gaixo bakoitzak t egunean oraindik kutsatua egon ez diren 3 laguni pasatzen die birusa. Hasierako momentuan t=0 (t denbora egunetan neurtua), gaixo bakar bat badago eta inor ez badago inkubatzen, kalkulatu aste batean zenbat gaixo dauden eta zenbat lagun gaixotasuna inkubatzen ari diren, dagokion diferentzia finituko ekuazioa ebatziz.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2007ko URTARRILA

1. (6 puntu) Ondasun baten eskaintza p preziorako $K\frac{p}{p+1}$ unitate da (K konstante ezaguna da). Ondasun horren eskari marjinala p preziorako $\frac{-K}{2(p+1)^2}$ unitate/euro da eta $p=0$ denean, eskaria K unitate da. Kalkulatu oreka prezioa.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D f(x,y)dxdy$ integrala, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 1\le xy\le 4;\ 0\le y\le 2\}$ multzoa eta $f(x,y)=\begin{cases} xe^x, & x\le 2 \\ \frac{1}{x^3}, & x>2 \end{cases}$ funtzioa badira.

3. (10 puntu) a) Noiz esango dugu

$$\begin{cases} F^1(x,y,z,u)=0 \\ F^2(x,y,z,u)=0 \end{cases}$$

sistemak x eta y aldagaiak z eta u aldagaien funtzio modura inplizituki definitzen dituela $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})$ puntuaren ingurunean? (Funtzio inplizituaren kontzeptua eskatzen da, ez teorema!)

b) x, y, z eta u lau aldagaien arteko erlazioa ekuazio sistema honek ematen du:

$$\begin{cases} x^2+2y-6z^3+8u-2=0 \\ 2x-4y^2-3z-6u^2+9=0. \end{cases}$$

Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, egiaztatu $B(0,0)$ eta $B(1,1)$ inguruneak existitzen direla, non $(z,u)\in B(1,1)$ bakoitzerako $(x,y)\in B(0,0)$ bakarra existitzen den, (x,y,z,u) puntuak sistema egiaztatzen duelarik.

c) Zein izango da eragina bi aldagai endogenoetan u aldagai exogenoa handitzen denean, z aldagaiaren balioa konstantea mantentzen den bitartean (hau da, $z=1$)?

4. (8 puntu) Lagun batek diru kopuru batekin kontu bat irekitzen du ($t=0$). Hortik aurrera, hilero, ($t=1,2,\ldots$) hil bakoitzaren hasieran duenaren %80 gastatzen du eta 2.000 euroko soldata sartzen du. Aurkitu kontua ireki zuen kopurua, baldin badakigu 4 hilabete pasa ondoren 2.504 euro daudela kontuan.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2007ko EKAINA

1. (6 puntu) Galzorian dagoen animalia espezie baten populazioa $15-3\sqrt{t}$ buru/urte (t igarotako urteak dira) tasaren arabera eboluzionatzen da. Baldin badakigu t=0 momentuan 375 buru zirela, kalkulatu zenbatekoa den populazioa, animalia kopurua handiena den urtean.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D (2x+y)dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -x^2\leq y\leq x^2,\ x^2+y^2\leq 2,\ x\geq 0\}$ bada.
(Irudikatu D multzoa eta adierazi argi eta garbi integrala kalkulatzeko erabili duzun zatiketa).

3. (10 puntu) i) $\mathbb{R}^2$-ko zein puntutan ziurtatzen du alderantzizko funtzioaren teoremak $f(x,y)=(2xy,y^2-x^2)$ funtzioa lokalki alderanzkarria dela?

ii) Egiaztatu

$$\begin{cases} xe^v+yu-u^2=0 \\ y\cos(v)+x^2-u^2=1 \end{cases}$$

sistemak u eta v aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituela $(x,y,u,v)=(2,1,2,0)$ puntuaren ingurunean. Kalkulatu funtzio inplizituaren matrize jacobiarra (2,1) puntuan.

4. (8 puntu) Ondasun baten eskaria t momentu bakoitzean (t=0,1,2,...), momentu horretan duen prezioaren menpe dago: $D_t=50-p_t$ milioi unitate, eta ondasun horren eskaintza t+2 momentuan, t momentuan duen prezioaren menpe dago: $S_{t+2}=-10+p_t$ milioi unitate. Baldin badakigu p_0=30€ eta p_1=31€ direla:

i) Kalkulatu eskaria eta eskaintza berdintzen dituen oreka prezioa t momentu bakoitzean.

ii) Aztertu oreka prezioaren eboluzioa. Konbergentea al da epe luzean?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko URTARRILA

1. (6 puntu) t egun bakoitzean produktu bat saltzeagatik, enpresa batek $I'(t) = 102 - 0{,}05\sqrt{t}$ mila euro/egun tasaren araberako sarrera gordina eta $G'(t) = 100 + 0{,}05\sqrt{t}$ mila euro/egun tasaren araberako gastua du.

i) Kalkulatu lehen 4 egunetan lortutako mozkina.
ii) Kalkulatu metatutako mozkina hasierako momentutik produktua errentagarria izaten utzi arte.

2. (6 puntu) Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(y)}{y}, & x \le 4 \\ \dfrac{1}{x^2y^2}, & x > 4 \end{cases}$ eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \ge y^2, 1 \le y \le 2\}$ badira.

3. (10 puntu) Bi ondasun ordezgarrien eskaintzak (q_1, q_2) eta prezioak (p_1, p_2) ekuazio hauen bitartez erlazionaturik daude:

$$q_1 = f(p_1, p_2)$$
$$q_2 = Ap_2 + Bq_1,$$

non A>0 eta B<0 bi zenbaki erreal ezagunak diren, eta f deribatu partzial jarraituak dituen funtzio ezaguna den, $\dfrac{\partial f}{\partial p_1} > 0$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial p_2} < 0$ izanik.

i) Egiaztatu eskaintzen diren kopuruek prezioak finkatzen dituztela.
ii) Aztertu bigarren ondasunaren eskaintzaren gehikuntza txiki baten eragina bi prezioetan.

4. (8 puntu) Hitzontziez eta zuhurrez osatutako herri batean zurrumurru bat hedatzen da. Hasierako momentuan (t=0 egunean) soilik hitzontzi batek ezagutzen du zurrumurrua. Zurrumurrua ezagutzen duen hitzontzi bakoitzak, egunero, zurrumurrua ezagutzen ez duten bi hitzontziri eta zuhur bati kontatzen die eta zuhurrek, noski, ez dute zurrumurrua zabaltzen.

i) Kalkulatu H_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten hitzontzi kopurua.
ii) Kalkulatu Z_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten zuhur kopurua.
iii) Kalkulatu P_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten herritar kopurua. Zenbat herritarrek ezagutuko dute zurrumurrua 4 egun pasa ondoren?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2008ko EKAINA

1. (6 puntu) Lehorte baten ostean, 1.500 milioi metro kubikoko (m^3) edukiera duen urtegi bat %20an dago. Uholde handi baten ondorioz, t momentu bakoitzean, urtegiak $U'(t) = 300\sqrt{t} - t$ m^3/seg ur-jarioa jasotzen du (t urtegia uholdetik ura jasotzen hasten den momentutik igarotako denbora da, segundotan).

i) Kalkulatu igarotako denbora urtegiak ura jasotzen uzten duen arte.

ii) Urtegia husten ez bada, gainezka egingo du?

2. (6 puntu) Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 y \leq 1,\ x^2 \leq y\}$ multzoa eta $f(x,y) = \begin{cases} y^2, & y \leq 1 \\ \dfrac{1}{y^2}, & y > 1 \end{cases}$ funtzioa.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala.

3. (10 puntu) Bi ondasun ordezgarrien eskaintzak (q_1, q_2) eta prezioak (p_1, p_2) ekuazio hauen bitartez erlazionaturik daude:

$$q_1 = f(p_1, p_2)$$
$$q_2 = Ap_2 + Bq_1,$$

non A>0 eta B<0 bi zenbaki erreal ezagunak diren eta f deribatu partzial jarraituak dituen funtzio ezaguna den, $\dfrac{\partial f}{\partial p_1} > 0$ eta $\dfrac{\partial f}{\partial p_2} < 0$ izanik.

i) Egiaztatu eskaintzen diren kopuruek prezioak finkatzen dituztela.

ii) Aztertu bigarren ondasunaren eskaintzaren gehikuntza txiki baten eragina bi prezioetan.

4. (8 puntu) Lortu lehen gaia zero duen eta hirugarren gaitik aurrera gai bakoitza aurreko bien baturaerdia den segida guztiak.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko URTARRILA

1. (6 puntu) Produktu baten q kg saltzeagatik lortutako sarrera marjinala 100 euro/kg da eta kostu marjinala $5+6q-\dfrac{k}{1+q}$ euro/kg ($k \in \mathbb{R}$).

a) k=1 bada, kalkulatu 10 kg saltzeagatik lortutako mozkina, baldin badakigu ezer ez bada saltzen 20 euroko galerak daudela.

b) k=0 bada, kalkulatu saldu behar den kantitatea mozkinak maximizatzeko.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D f$ integral bikoitza, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y \ge x^2;\ x^2+y^2 \ge 2;\ y \le 4\}$ multzoa eta $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x\ge 0 \\ y, & x\le 0 \end{cases}$ funtzioa badira.

3. (10 puntu) Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} zf(x,y)-u^3=2 \\ x^2z-g(z-y)=u. \end{cases}$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ eta hau betetzen da:

$$f(1,1)=3;\ g(0)=0;\ g'(0)=1;\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1 \text{ eta } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=5 .$$

a) Egiaztatu z eta u aldagaiak sistemaren aldagai endogeno moduan adieraz daitezkeela (x,y,z,u)=(1,1,1,1) puntuaren ingurunean.

b) Aztertu z aldagai endogenoan eragina, aldagai exogeno bakoitzaren balioa pixka bat handitzen denean.

4. (8 puntu) Dagokion diferentzia finituko ekuazioa ebatziz, aurkitu y_t segida guztiak non baldintza hau betetzen den: edozein gai eta aurreko bi gaien batez bestekoaren arteko kenketa 1 da.

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2009ko EKAINA

1. (6 puntu) Produktu baten q unitate saltzeagatik lortutako sarrera marjinala ($I'(q)$) 40 euro/unitate konstantea da; ordea, gastu marjinala ($C'(q)$) kantitatearekin linealki hazten da, $C'(q) = 10 + 0,003q$ euro/unitate izanik.

i) Kalkulatu produzitu behar den kantitatea mozkina maximizatu nahi bada.
ii) Kalkulatu mozkin handiena baldin badakigu produkzioa ez dagoenean 50.000 euroko galerak daudela.

2. (6 puntu) Kalkulatu $\iint_D f$ integrala, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \leq x^2 + y^2 \leq 20;\ x \leq 0;\ y \geq x^2\}$ eta $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ badira.

3. (10 puntu) Demagun ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases} xu^2 + yu = 1 \\ x^3 z + f(yz) = 5. \end{cases}$$

$f \in C^1(\mathbb{R})$ da eta $f(0) = 3$ betetzen da.

i) $f'(0)$-ren zein baliotarako ziurtatuko du funtzio inplizituaren teoremak aurreko ekuazio sistemak definitzen duela x eta y aldagaiak endogeno moduan $(x,y,z,u) = (1,0,2,1)$ puntuaren ingurunean?
ii) $f'(0)$-ren zein baliotarako eragingo du u aldagaiaren gehikuntza txiki batek (z konstantea mantenduz) y aldagaiaren gehikuntza bat, (1,0,2,1) puntutik hasita?

4. (8 puntu) Birus hilkor bat arrain kopurua P duen laku batean hasten da hedatzen. Arrain bat kutsatzen denean berehala hiltzen da eta egunero birusak aurreko eguneko bizirik zeuden arrainen %20 kutsatzen du. Zenbat egunetan igaroko da arrainen populazioa hasieran zegoenaren erdira baino gutxiagora?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2010eko URTARRILA

1. (6 puntu) 5 kilometroko erradioa duen hiri biribil baten biztanle tasa, erdigunetik duen distantziaren menpe dago; distantzia hori r bada, biztanle tasa hau da: $B'(r) = \dfrac{90.000}{(r+1)^2}$ biztanle.

Propaganda egiten duen enpresa batek iragarki baten 45.000 ale banatu nahi die hiri horretako biztanle guztiei, erdigunetik hasita. Zein erradiotaraino helduko dira ale horiek? Zenbat bizilagun du hiriak?

2. (6 puntu) Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \le 1,\, 2x - y \ge -1,\, y \ge 0\}$ eta $f(x,y) = \begin{cases} \cos(x) & x \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$ integrala.

3. (10 puntu) Demagun $\begin{cases} x^3 f(y^2 + z, z^2) - u^2 = 0 \\ g(x^2 - u^3) - y^2u^2 = x^2 \end{cases}$ sistema, non $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g \in C^1(\mathbb{R})$ diren eta $f(0,0) = 1$, $f_2(0,0) = 1$, $f_1(0,0) = 1$, $g(0) = 1$ eta $g'(0) = 1$ betetzen diren.

Frogatu sistemak z eta u aldagai endogeno moduan definitzen duela (x,y,z,u)=(1,0,0,1) puntuaren ingurunean. Demagun $(z,u) = \varphi(x,y)$ funtzio inplizitu hau.

Ziurtatzen du funtzio inplizituaren teoremak sistemak beste aldagai bikote inplizituki definitzen duela (1,0,0,1) puntuaren ingurunean?

$(z,u) = \varphi(x,y)$ kasurako, aurkitu φ-ren matrize jacobiarra (1,0) puntuan.

4. (8 puntu) Bezero batek aurrezki plana adosten du haren bankuarekin. Alde batetik, bezeroak, urtero, kopuru bat sartuko duela sinatzen du: lehen ezarpena 2.000 eurokoa da eta hurrengo urteetan, aurreko urtearen %2 gehiago sartzea erabakitzen dute. Zenbat diru sartu behar du t. urtean, t=0 lehen ezarpena bada?

Beste aldetik, bankuak urteko %3ko korritu konposatua eskaintzen dio. Bezeroak ezin du dirua eskuratu ez bada urteko epe bukaeran non, edo kontua ezabatzen duen edo dagokion kantitatea sartzen duen. T urte pasa ondoren, bezeroak aurreztu duen diru guztia hartzea erabakitzen badu, eta beraz, urte horretan sartu behar zuena sartu barik, zenbat aurreztu du?

MATEMATIKA IIIko AZTERKETA
EKONOMIA. 2010eko EKAINA

1. (6 puntu) Eroguneko herrialde batek t=0 momentu arte superabita izan du, eta hortik aurrera $D'(t) = e^{\frac{t}{3}}(6t - t^2)$ mila milioi euro/hilabete-ko aldaketa tasa duen defizita izaten du.
Defizita hasten denetik bi hilabetera herrialdeak zor publikoa jaulkitzen du; jaulkipen honek defizita sortu zuen ildo bera (tasa bera) jarraitzen du, baina bi hilabeteko atzerapenarekin. Zorraren jaulkipena bukatzen da defizitak hazten uzten duen unetik, hau da, txikitzen hasten denetik bi hilabetera.
Zenbat zor publikoa jaulki du herrialde honek epe honetan? Europako Banku Zentralak 100.000 milioi euroko muga jarri badio zorraren jaulkipenaren gainean, beteko al du herrialdeak eskakizun hau?

2. (6 puntu) Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 \le y + 2; x^2 + y^2 \le 2; x \ge -y; y \ge 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = \begin{cases} y, & y \ge 1 \\ x, & y < 1 \end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu $\iint_D f$ integrala.

3. (8 puntu) Demagun $\begin{cases} xf(u) + yg(v) = u \\ -xg(v) + yf(u) = v \end{cases}$ sistema. f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzio errealak dira, eta gainera, f funtzioak beti hartzen ditu balio hertsiki positiboak.

i) (x,y,u,v) zein punturen ingurunean ziurta dezakegu aurreko sistemak x eta y aldagaiak u eta v aldagaien funtzio inplizitu bezala definitzen dituela?

ii) $(x,y,u,v) = (1,1,2,2)$ puntuak sistema betetzen badu, eta gainera $g(2) = 0$ eta $f'(2) > 1$ betetzen badira, zein eragina izango du aldagai endogenoetan u aldagaiaren igoera batek?

4. (7 puntu) Kasino baten makina txanponjale batean jokatzea, hasieran behintzat, dohainik da. Lehen saiakeran (t=0) saria lortzen bada, sari hau 75 eurokoa da; horrela ez bada eta bigarrenean (t=1) saria lortzen bada, hau 100 eurokoa da.
Baina hirugarren saiakeratik aurrera (t=2) makinak modu honetan kalkulatzen du saria: bi saiakera lehenago izango zuen sariaren halako lau emango du, baina kasu honetan, jokatzaileak makinan saria lortu ez duen saiakera bakoitzetik 90 euro sartu behar du. (Makinak saria ematen duen unean, prozesua bukatzen da.)
Zein da jokatzailearen irabazkina (mozkina, etekina) t momentuan irabazten badu?
Zein momentutik aurrera tentelkeria da makinan jokatzea?

AZTERKETEN ERANTZUNAK

INTEGRAZIOA $\mathbb{R}$ ESPAZIOAN

2000ko urtarrila. Enpresa batek produktu berri bat atera du. Produktu honek sortzen duen sarrera gordina $I'(t) = 1.000 - 0,03t^2$ milioi euro/egun-ko tasa beherakorrean neurtzen da (t momentu bakoitzeko) Bestalde, produkzio gastuak denborarekin hazten dira, gastu tasa (t momentuko) $G'(t) = 100 + 0,06t^2$ milioi euro/egun izanik.

i) Kalkulatu metatutako mozkina aste batean.
ii) Kalkulatu metatutako mozkina produktuak errentagarria izaten uzten duen arte.

i) $M'(t) = I'(t) - G'(t) = 900 - 0,09t^2$ izango da mozkina tasa, eta aste batean metatutako mozkina

$$\int_0^7 M'(t)dt = \int_0^7 900 - 0,09t^2 dt = 900t - 0,03t^3\Big]_0^7 = 6.287,71 \text{ milioi euro}.$$

ii) Errentagarria izaten utziko du sarrera eta gastua berdintzen diren egunean, hau da $M'(t) = I'(t) - G'(t) = 0$ denean: $900{-}0,09t^2{=}0 \Rightarrow t{=}100$, hau da, 100. egunean sarrera eta gastua bera da. Zenbat irabazi du egun horretaraino?

$$\int_0^{100} M'(t)dt = \int_0^{100} 900 - 0,09t^2 dt = 900t - 0,03t^3\Big]_0^{100} = 60.000 \text{ milioi euro}.$$

($\int_0^{\tau} M'(t)dt = 0$ egiten badugu, τ eguna metatutako mozkina zero egiten den eguna da, hau da τ egunetan irabazitako guztia galtzen da).

2000ko ekaina. t momentu bakoitzean prozesu produktibo baten mozkin tasa momentu bakoitzean $100 + 0,04t + k0,5^{0,1t}$ mila euro/egun da, t igarotako egun kopurua izanik. Kalkulatu k konstantea baldin badakigu 10 egun pasa ondoren metatutako mozkina 1.007.000 eurokoa dela. ($\int a^{f(x)} f'(x)dx = \dfrac{a^{f(x)}}{\ln a} + K$).

Mozkin tasa ezagutzen badugu, integral baten bitartez τ egunerainoko metatutako mozkina lor dezakegu modu honetan: $\int_0^{\tau} M'(t)dt$; eta $\tau{=}10$ denean kopuru hau ematen digutenez, k arazorik gabe aterako dugu:

$$\int_0^{10} M'(t)dt = 1007 = \int_0^{10} 100 + 0{,}04t + k0{,}5^{0{,}1t}\,dt =$$

$$= 100t + 0{,}02t^2 + 10k\frac{0{,}5^{0{,}1t}}{\ln 0{,}5}\Bigg]_0^{10} = 1002 - \frac{5k}{\ln 0{,}5} = 1007.$$

Orduan, $-\dfrac{5k}{\ln 0{,}5} = 5 \Rightarrow k = -\ln 0{,}5.$

2001eko urtarrila. Epe laburreko inbertsio txiki batek sortutako mozkin tasa $M_0 + kte^{-rt^2}$ euro/egun da (t denbora egunetan izanik). Kalkulatu k konstantea baldin badakigu: (i) hasierako momentuan (t=0), mozkin tasa 100 euro/egun dela; (ii) r konstantearen balioa $\dfrac{\ln 10}{100}$ dela; eta (iii) 10 egun pasa ondoren metatutako mozkin osoa 1.045 eurokoa dela. (Ez erabili kalkulagailua, hau da, ez ordezkatu "ln 10" adierazpena haren balioarekin).

Lehenengoz, t=0 denean mozkin tasa 100 dela esaten digute, beraz: $M(0)=M_0=100$.
Eta metatutako mozkina lehen 10 egunetan 1.045 eurokoa bada, mozkin tasa ezagutzen badugu:

$$\int_0^{10} M'(t)dt = 1.045 = \int_0^{10} M_0 + kte^{-rt^2}dt = \int_0^{10} 100 + kte^{-\frac{\ln 10}{100}t^2}dt = 100t\Big]_0^{10} - \frac{50k}{\ln 10}e^{-\frac{\ln 10}{100}t^2}\Bigg]_0^{10} =$$

$$= 1.000 + \frac{50k}{\ln 10}(1 - e^{-\ln 10}) = 1.000 + \frac{50k}{\ln 10}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1.000 + \frac{45k}{\ln 10}.$$

Orduan,

$$1.000 + \frac{45k}{\ln 10} = 1.045 \Rightarrow 45k = 45\ln 10 \Rightarrow k = \ln 10\,.$$

2001eko ekaina. t momentu bakoitzean (t denbora egunetan da) enpresa baten sarrera $I'(t) = e^{-t}(t^2 - 4t + 2)$ mila euro/egun eta gastu tasa $G'(t) = e^{-t}(4t + 2)$ mila euro/egun. Kalkulatu metatutako mozkin garbia lehen bost egunetan.

Kalkulatuko dugu mozkin tasa: $M'(t)=I'(t)-G'(t)=e^{-t}(t^2-8t)$.
Eta metatutako mozkina lehen bost egunetan, integral honen bitartez kalkulatuko dugu:

$$\int_0^5 e^{-t}(t^2-8t)dt = \left\{\begin{matrix} u=t^2-8t & du=(2t-8)dt \\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -e^{-t}(t^2-8t)\Big]_0^5 + \int_0^5 (2t-8)e^{-t}dt = \left\{\begin{matrix} u=2t-8 & du=2dt \\ dv=e^{-t}dt & v=-e^{-t}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 15e^{-5} + \left[-(2t-8)e^{-t}\right]_0^5 + \int_0^5 2e^{-t}dt = 15e^{-5} - 2e^{-5} - 8 - \left[2e^{-t}\right]_0^5 =$$

$$= 11e^{-5} - 6 \text{ mila euro.}$$

2002ko urtarrila. Europako Batasuneko herri batean, euroa ke^{-rt} euro/egun tasarekin sartzen da (t euroa kalera irten denetik egunak dira), k konstante ezaguna delarik. r=0,1 bada, eta herri horretan zirkulazioan dagoen monetaren balio osoa konstantea eta $20k\frac{e-1}{e}$ euroen baliokidea bada, zein egunetan izango da monetaren balioaren erdia eurotan?

$ke^{-0,1t}$ euroa herri horretan nola sartzen den tasa bada, $\int_0^\tau ke^{-0,1t}dt$ lehen τ egunetan zenbat euro sartu diren izango da. Jakin nahi dugu kopuru hori noiz den zirkulazioan dagoen monetaren balioaren erdia, hots, noiz den $\frac{1}{2}\,20k\frac{e-1}{e}$, beraz:

$$\int_0^\tau ke^{-0,1t}dt = 10k\frac{e-1}{e}.$$

$\int_0^\tau ke^{-0,1t}dt = -10ke^{-0,1t}\Big]_0^\tau = -10ke^{-0,1\tau} + 10k = 10k\left(\frac{e^{0,1\tau}-1}{e^{0,1\tau}}\right)$, hau da, τ=10 egun.

2002ko ekaina. M ondasun baten ekoizpenaren mozkin osoa da eta ekoiztutako kopuruaren menpe da, hots, M=$M(q)$ euro. Mozkin marjinala $M'(q) = 22q - qe^{-0,2q}$ euro/unitate bada, zein izango da mozkin unitarioa 10 unitate ekoizten badira, $M(0)$=0 bada?

Mozkin marjinala $M'(q) = 22q - qe^{-0,2q}$ bada, $\int M'dq$ kalkulatzen badugu, M mozkin osoa lortuko dugu (integral hau kalkulatzeko zatikako integrazioa aplikatuko dugu):

$$M(q) = \int M'dq = \int 22q - qe^{-0,2q}dq = \int 22qdq - \int qe^{-0,2q}dq =$$

$$= \left\{\begin{matrix} f(q)=q & f'(q)=dq \\ g'(q)=e^{-0,2q}dq & g(q)=-5e^{-0,2q}\end{matrix}\right\} = 11q^2 + 5qe^{-0,2q} - \int 5e^{-0,2q}dq =$$

$$= 11q^2 + 5qe^{-0,2q} + 25e^{-0,2q} + K.$$

Bestalde, $M(0)=25+K=0$ bada, $K=-25$ izango da eta

$$M(q)=11q^2+5qe^{-0,2q}+25e^{-0,2q}-25.$$

Orduan, 10 unitate ekoizten badira $M(10)=1075+75e^{-2}$ euroko mozkina lortuko da eta 10 unitate ekoizten direnean mozkin unitarioa eskatzen digutenez, mozkin unitarioa $107,5+7,5e^{-2}$ eurokoa izango da.

Edo integral mugatua erabiliz: $\int_0^{10} M'(q)dq = M(10) - M(0) = M(10)$.

2002ko ekaina. Sailkatu eta kalkulatu integral inpropio hau: $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$.

Goi bornea infinitu denez inpropioa da eta behe bornea 1 da eta funtzioa ez da existitzen balio horretarako, beraz bi motatako integral inpropioa dugu:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \int_a^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx + \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx .$$

Kalkula ditzagun bi integral hauek (existitzen badira):

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \int_a^{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \left[2\sqrt{x-1} \right]_a^2 = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} (2 - 2\sqrt{a-1}) = 2 .$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{x-1} \right]_2^b = \lim_{b\to\infty} (2\sqrt{b-1} - 2) \not\to$$

Azken limite hori dibergentea denez, $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ ez da existitzen.

2003ko urtarrila. Demagun eredu matematiko hau: urperatutako itsasontzi batek fuel-olioa isurtzen du $Q'(t) = 7te^{-0,01t}$ tona/ordu tasaren arabera, t isurtzen hasi den unetik igarotako ordu kopurua izanik.

i) Kalkulatu lehenengo T orduetan isuritako fuel-olioaren kantitatea.
ii) Kalkulatu etorkizunean isuritako fuel-olioaren kantitatea, hau da, limitea T infiniturantz joaten denean (kontuan hartu $\lim_{t\to\infty} te^{at} = 0$ dela, $a < 0$ izanik).
iii) Kalkulatu igarotako denbora isurketa tasa txikitzen hasten den arte (hots, maximoa lortzen den arte) eta momentu horretarako isuritakoa.

i) Isurketa osoa lehenengo T orduetan lortzeko integral honen bitartez egingo dugu:

$$Q(T)=\int_0^T 7te^{-0,01t}dt=\left\{\begin{matrix} u=7t & u'=7 \\ v'=e^{-0,01t} & v=-100e^{-0,01t}\end{matrix}\right\}=$$

$$=-700te^{-0,01t}\Big]_0^T+\int_0^T 700e^{-0,01t}dt=-700Te^{-0,01T}-\left[70.000e^{-0,01t}\right]_0^T=$$

$$=70.000-(70.000+700T)e^{-0,01T}\ \text{tona.}$$

ii) Kasu honetan, aurreko puntuan lortutako kantitatearen limitearen bitartez lortuko dugu:

$$\lim_{T\to\infty}\left[70.000-(70.000+700T)e^{-0,01T}\right]=70.000\ \text{tona.}$$

iii) $Q'(t)$ funtzioak maximoa lortzen du beraren deribatua zero egiten denean, hau da,

$$\frac{dQ'(t)}{dt}=(7-0,07t)e^{-0,01t}=0\Rightarrow t=100\ \text{ordu.}$$

Hau da, isurketa hasi denetik 100. orduan isurketa tasa handiena lortzen da. Eta zenbat da isuritakoa? $Q(t)$-n, isurketa osoaren funtzioan, 100 ordezkatu behar dugu:

$$Q(100)=70.000-\frac{140.000}{e}\ \text{tona.}$$

2003ko ekaina. Baldin badakigu ondasun baten x unitate saltzen direnean $300-\frac{4}{(x+1)^2}$ euro/unitate-ko mozkin marjinala lortzen dela eta unitate bat ere ez bada saltzen 100 euroko galerak daudela, kalkulatu mozkin osoa 1.000 unitate saltzen badira.

$M'(x)=300-\frac{4}{(x+1)^2}$ euro/unitate bada, mozkin osoa $\int M'(x)dx$ integralaren bitartez lortuko dugu:

$$M(x)=\int M'(x)dx=\int 300-\frac{4}{(x+1)^2}dx=300x+\frac{4}{x+1}+k\ .$$

Eta x=0 denean 100 euroko galerak baditu: $M(0)=-100=4+k\Rightarrow k=-104$ eta orduan

$$M(x)=300x+\frac{4}{x+1}-104\ .$$

Eta bukatzeko: $M(1.000)=300.000+\frac{4}{1.001}-104=299.896,004€$.

Edo beste modu batean:

$$M(1.000)-M(0)=\int_0^{1.000} 300-\frac{4}{(x+1)^2}dx=300x+\frac{4}{x+1}\Big]_0^{1.000}=300.000+\frac{4}{1.001}-4\ .$$

Orduan, $M(1.000)=300.000+\frac{4}{1.001}-104=299.896,004€$.

2004ko urtarrila. Herri baten dibisa erreserbaren aldaketa tasa $A + Bte^{-0,5t^2}$ euro/urte da, A eta B konstante positibo ezagunak izanik.
i) Kalkulatu dibisa erreserbaren aldaketa lehen urtean.
ii) Kalkulatu dibisa erreserbaren aldaketa t-garren urtean. Frogatu aldaketa hau denboran zehar egonkorra dela.

i) Ezagutzen badugu dibisa erreserbaren aldaketa tasa, aldaketa lehen urtean tasaren integrala 0tik 1era izango da:

$$\int_0^1 A + Bte^{-0,5t^2}dt = At - Be^{-0,5t^2}\Big]_0^1 = A + B(1 - e^{-0,5}) \text{ euro.}$$

ii) Eta t-garren urtean, tasaren integrala t–1etik t-ra izango da:

$$\int_{t-1}^{t} A + Bte^{-0,5t^2}dt = At - Be^{-0,5t^2}\Big]_{t-1}^{t} = A + B(e^{-0,5t^2} - e^{-0,5(t-1)^2}) \text{ euro.}$$

Egonkorra dela frogatzeko, aurreko adierazpenaren limitea t-k infiniturantz jotzen duenean aztertuko dugu:

$$\lim_{t\to\infty}(A + B(e^{-0,5t^2} - e^{-0,5(t-1)^2})) = A \text{ euro.}$$

2004ko ekaina. Badakigu enpresa baten sarrera marjinala proportzionala dela gastuarekiko ($I'(q) = 5G(q)$), $G'(q) = 4$ euro/unitate dela eta produkziorik ez dagonean ez dagoela ez sarrerarik ezta gasturik ere ($G(0)=I(0)=0$). Kalkulatu q produzitutako kantitatearen araberako enpresaren mozkina.

Gastu marjinala $G'(q) = 4$ euro/unitate bada, $G(q) = \int G'(q)dq = \int 4dq = 4q + K$ eta $G(0)=K=0$ denez, $G(q)=4q$ euro.
Bestalde, $I'(q)=5G(q)=20q$ euro/unitate denez,
$I(q) = \int I'(q)dq = \int 20qdq = 10q^2 + K$. $I(0)=K=0$ da beraz, $I(q)=10q^2$ euro.
Bukatzeko, enpresaren mozkina hau izango da: $M(q)=I(q)-G(q)=10q^2-4q$ euro.

2005eko urtarrila. Enpresa batek lantegi berri bateko plantilla hoberena ezagutu nahi du. x lantegi horren hileko lanorduak badira, sarrera marjinala $30\sqrt{x}$ euro/ordu eta gastu marjinala $0,5x$ euro/ordu dira.
i) Kalkulatu mozkina optimizatzen duen ordu kopurua eta kontratatu behar den langile kopurua, baldin badakite langile bakoitzak, hilero, 200 ordu lan egiten duela.
ii) Kalkulatu plantilla hoberenerako mozkina (euro/hilabete), 0 ordu sartzen badira 80.000 euro/hilabete-ko galerak egongo direla badakite.

i) Mozkin hoberena lortuko da mozkin marjinala zero denean (funtzioaren deribatua zero denean), beraz, $M'(x) = 30\sqrt{x} - 0,5x$ euro/ordu denez, $x=3.600$ ordu denean $M'(x) = 0$

izango da. Langile bakoitzak 200 ordu sartzen badu hilero, orduan 3.600/200=18 langile kontratatuko dute.

ii) $M(3.600)-M(0)=\int_0^{3600} 30\sqrt{x}-0,5xdx = 20x\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\Big]_0^{3600} = 1.080.000€$.

Beraz,

$$M(3.600)=1.080.000-80.000=1.000.000€.$$

2005eko ekaina. Produktu baten q unitate saltzeagatik lortutako sarrera marjinala ($I'(q)$) 10 euro/unitate konstantea da; ordea, gastu marjinala ($G'(q)$) kantitatearekin linealki hazten da, $G'(q)=1+0,0009q$ euro/unitate izanik.

i) Kalkulatu produzitu behar den kantitatea mozkina maximizatu nahi bada.
ii) Kalkulatu mozkin handiena baldin badakigu produkzioa ez dagoenean mozkina zero dela.

i) Mozkin marjinala kalkulatuko dugu: $M'(q)=I'(q)-G'(q)$=9–0,0009q euro/unitate.
Eta $M'(q)=0$ denean, mozkina maximoa izango dugu, hots, q=10.000 unitate.

ii) $M(10.000)-M(0)=\int_0^{10000} 9-0,0009qdq = 9q-0,00045q^2\Big]_0^{10000} = 45.000€$.

Eta $M(0)=0$ denez,

$$M(10.000)=45.000€$$

2006ko urtarrila. Ondasun baten eguneko q unitate produzitzeko kostu marjinala $100+e^{-rq}$ euro/unitate ($r=10^{-5}$ izanik) da eta egunero 50.000 unitate ekoizten dira. Kalkulatu kostuaren gehikuntza eguneko produkzioa bikoiztu nahi bada. (Ez dituzu eragiketetan agertzen diren adierazpen esponentzialak kalkulatu behar).

Ondasun horren kostu marjinala $G'(q)=100+e^{-\frac{q}{10^5}}$ euro/unitate bada, hasierako 50.000 unitate horiek ekoizteko $\int_0^{50.000} 100+e^{-\frac{q}{10^5}}dq$ kostua izango du eta produkzioa bikoizteko, hau da, 100.000 unitate produzitzeko, kostuaren gehikuntza $\int_{50.000}^{100.000} 100+e^{-\frac{q}{10^5}}dq$ izango da.

$$\int_{50.000}^{100.000} 100+e^{-\frac{q}{100.000}}dq = 100q-100.000e^{-\frac{q}{100.000}}\Big]_{50.000}^{100.000} =$$

$$=10.000.000-\frac{100.000}{e}-5.000.000+\frac{100.000}{\sqrt{e}}=$$

$$=5.000.000-\frac{100.000}{e}+\frac{100.000}{\sqrt{e}}€.$$

2006ko ekaina. Sailkatu eta kalkulatu, existitzen bada, $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ integrala

Integral hau inpropioa da goiko bornea infinitua delako (lehen motakoa) eta $x=0$ puntuan existitzen ez delako (bigarren motakoa), beraz,

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \int_{-1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx + \lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \int_{-1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{-1}^{r} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \left(\frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{r}^{1} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{r\to\infty} \left[\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{1}^{r} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2} - \frac{3}{2}\right) \not\exists$$

Beraz, $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ ez da existitzen.

2007ko urtarrila. Ondasun baten eskaintza p preziorako $K\frac{p}{p+1}$ unitate da (K konstante ezaguna da). Ondasun horren eskari marjinala p preziorako $\frac{-K}{2(p+1)^2}$ unitate/euro da eta $p=0$ denean, eskaria K unitate da. Kalkulatu oreka prezioa.

Oreka prezioa lortzeko eskaria eta eskaintza berdindu behar dugu. Eskaintza funtzioa ematen digute baina eskari marjinala dugu, beraz, eskari marjinalaren integral mugagabea eginez, eskari funtzioa lortuko dugu:

$$\int \frac{-K}{2(p+1)^2} dp = \frac{K}{2(p+1)} + Kte.$$

Eta Kte zehazteko, $p=0$ denean K unitate eskatzen direla erabiliko dugu: $\frac{K}{2} + Kte = K \Rightarrow Kte = \frac{K}{2}$.

Beraz, eskari funtzioa $\frac{K}{2(p+1)} + \frac{K}{2}$ denez, oreka prezioa:

$$\frac{K}{2(p+1)}+\frac{K}{2}=K\frac{p}{p+1}\Rightarrow p=2 \text{ euro.}$$

2007ko ekaina. Galzorian dagoen animalia espezie baten populazioa $15-3\sqrt{t}$ buru/urte (t igarotako urteak dira) tasaren arabera eboluzionatzen da. Baldin badakigu t=0 momentuan 375 buru zirela, kalkulatu zenbatekoa den populazioa, animalia kopurua handiena den urtean.

Populazio tasa $P'(t)=15-3\sqrt{t}$ buru/urte bada, populazio osoa

$$P(t)=\int(15-3\sqrt{t})dt=15t-2t\sqrt{t}+K\,.$$

izango da, non $P(0)$=375 buru den, hau da, $P(0)=K=375$, hots,

$$P(t)=15t-2t\sqrt{t}+375 \text{ buru}\,.$$

Noiz izango da populazio handiena? $P(t)$-ren deribatua zero denean, hau da, populazio tasa zero denean:

$$P'(t)=15-3\sqrt{t}=0 \quad\Rightarrow\quad t=25 \text{ urte.}$$

Beraz, $P(25)=500$ buru.

Edo integral definitua erabiliz:

$$P(25)-P(0)=\int_0^{25}(15-3\sqrt{t})dt \quad\Leftrightarrow\quad P(25)=\int_0^{25}(15-3\sqrt{t})dt+375\,.$$

2008ko urtarrila. t egun bakoitzean produktu bat saltzeagatik, enpresa batek $I'(t)=102-0{,}05\sqrt{t}$ mila euro/egun tasaren araberako sarrera gordina eta $G'(t)=100+0{,}05\sqrt{t}$ mila euro/egun tasaren araberako gastua du.

i) Kalkulatu lehen 4 egunetan lortutako mozkina.

ii) Kalkulatu metatutako mozkina hasierako momentutik produktua errentagarria izaten utzi arte.

i) Mozkin marjinala hauxe da:

$M'(t)=S'(t)-G'(t)=102-0{,}05\sqrt{t}-100-0{,}05\sqrt{t}=2-0{,}1\sqrt{t}$ mila euro/egun.

Eta lehen 4 egunetan lortutakoa:

$$\int_0^4 2-0{,}1\sqrt{t}dt=2t-\frac{2}{30}t\sqrt{t}\Big]_0^4=8-\frac{8}{15}=\frac{112}{15} \text{ mila euro.}$$

ii) Noiz utziko du errentagarria izaten? Mozkin maximoa lortzen denean, eta hau lortzeko haren deribatua (mozkin marjinala) berdin zero denean lortzen da:

$M'(t)=2-0{,}1\sqrt{t}=0\Rightarrow t=400$ egun.

Eta 400 egun hauetan metatutako mozkina:

$$\int_0^{400} 2-0{,}1\sqrt{t}dt = 2t - \frac{2}{30}t\sqrt{t}\Big]_0^{400} = 800 - \frac{1.600}{3} = \frac{800}{3} \text{ mila euro.}$$

2008ko ekaina. Lehorte baten ostean, 1.500 milioi metro kubikoko (m^3) edukiera duen urtegi bat %20an dago. Uholde handi baten ondorioz, t momentu bakoitzean, urtegiak $U'(t)=300\sqrt{t}-t$ m^3/seg ur-jarioa jasotzen du (t urtegia uholdetik ura jasotzen hasten den momentutik igarotako denbora da, segundotan).

i) Kalkulatu igarotako denbora urtegiak ura jasotzen uzten duen arte.

ii) Urtegia husten ez bada, gainezka egingo du?

i) Noiz bukatuko da ur-jarioa? $U'(t)=300\sqrt{t}-t=0$ denean, hots,

$$U'(t)=300\sqrt{t}-t=0 \Rightarrow 300=\frac{t}{\sqrt{t}}=\sqrt{t} \Rightarrow t=90.000 \text{ seg.}$$

ii) Urtegia %20an badago, euritea hasten denean edukiera 300 milioi m^3-koa da, hau da, 1.200 milioi m^3 gehiago sartzen da.
Eta kalkulatu behar dugu ur-jarioa irauten duen bitartean zenbat m^3 sartzen dira urtegian, hau da,

$$\int_0^{90.000} (300\sqrt{t}-t)dt = 200t\sqrt{t} - \frac{t^2}{2}\Big]_0^{90.000} = 200\cdot 90.000\cdot 300 - 4.050.000.000 =$$

$$= 5.400.000.000 - 4.050.000.000 = 1.350 \text{ milioi } m^3.$$

Eta ondorioz, husten ez badute urtegia, gainezka egingo du.

2009ko urtarrila. Produktu baten q kg saltzeagatik lortutako sarrera marjinala 100 euro/kg da eta kostu marjinala $5+6q-\frac{k}{1+q}$ euro/kg ($k\in\mathbb{R}$).

a) k=1 bada, kalkulatu 10 kg saltzeagatik lortutako mozkina, baldin badakigu ezer ez bada saltzen 20 euroko galerak daudela.

b) k=0 bada, kalkulatu saldu behar den kantitatea mozkinak maximizatzeko.

Sarrera marjinala $I'(q)=100$ €/kg eta kostu marjinala $G'(q)=5+6q-\frac{k}{1+q}$ €/kg direnez, mozkin marjinala hau da:

$$M'(q)=I'(q)-G'(q)=95-6q+\frac{k}{1+q} \text{ €/kg}$$

a) Mozkin osoa funtzioa aurkituz (k=1 izanik):

$$\int M'(q)dq = \int\left(95-6q+\frac{1}{1+q}\right)dq = 95q-3q^2+\ln(1+q)+Kte = M(q).$$

Eta $M(0)=Kte=-20$ denez, $M(q)=95q-3q^2+\ln(1+q)-20$ €.

Eta $M(10)=630+\ln(11)$ €.

Edo bestela, zuzenean integral mugatua erabiliz:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{10} M'(q)dq = M(10) - M(0) = M(10) + 20 \\ \displaystyle\int_0^{10} M'(q)dq = 95q - 3q^2 + \ln(1+q)\Big]_0^{10} = 650 + \ln(11) \end{array}\right\} M(10) + 20 = 650 + \ln(11).$$

Eta orduan, $M(10) = 630 + \ln(11)$ €.

b) Mozkinak balio handiena lortuko du haren deribatua zero denean, hots,

$$M'(q) = 95 - 6q \text{ €/kg} \Rightarrow M'(q) = 0 = 95 - 6q \Rightarrow q = \frac{95}{6}\text{kg}.$$

2009ko ekaina. Produktu baten q unitate saltzeagatik lortutako sarrera marjinala ($I'(q)$) 40 euro/unitate konstantea da; ordea, gastu marjinala ($C'(q)$) kantitatearekin linealki hazten da, $C'(q) = 10 + 0,003q$ euro/unitate izanik.

i) Kalkulatu produzitu behar den kantitatea mozkina maximizatu nahi bada.

ii) Kalkulatu mozkin handiena baldin badakigu produkzioa ez dagoenean 50.000 euroko galerak daudela.

i) Mozkin marjinala kalkulatuko dugu:

$$M'(q) = I'(q) - C'(q) = 30 - 0,003q \text{ euro/unitate.}$$

Eta $M'(q) = 0$ denean, mozkina maximoa izango dugu, hots, q=10.000 unitate.

ii) $M(10.000) - M(0) = \displaystyle\int_0^{10.000} 30 - 0,003q\,dq = 30q - 0,0015q^2\Big]_0^{10.000} = 150.000$ €.

Eta $M(0)=-50.000$€ denez,

$$M(10.000)=100.000\text{€}.$$

2010eko urtarrila. 5 kilometroko erradioa duen hiri biribil baten biztanle tasa, erdigunetik duen distantziaren menpe dago; distantzia hori r bada, biztanle tasa hau da:

$$B'(r) = \frac{90.000}{(r+1)^2} \text{ biztanle.}$$

Propaganda egiten duen enpresa batek iragarki baten 45.000 ale banatu nahi die hiri horretako biztanle guztiei, erdigunetik hasita. Zein erradiotaraino helduko dira ale horiek? Zenbat bizilagun du hiriak?

Enpresak 45.000 ale baldin baditu, jakin nahi dugu zer erradiotan sartzen dira 45.000 biztanle; k erradio hori bada:

$$\int_0^k \frac{90.000}{(r+1)^2}dr = -\frac{90.000}{r+1}\Big]_0^k = -\frac{90.000}{k+1} + 90.000 = 45.000 \Rightarrow k = 1.$$

Beraz, erdigunetik kilometro batera dauden biztanleei helduko zaie propaganda.

Bestalde, jakin nahi badugu zenbat biztanle duen 5 kilometroko erradioko hiriak:
$$\int_0^5 \frac{90.000}{(r+1)^2}dr = -\frac{90.000}{r+1}\Big]_0^5 = -\frac{90.000}{6} + 90.000 = 75.000 \text{ biztanle.}$$

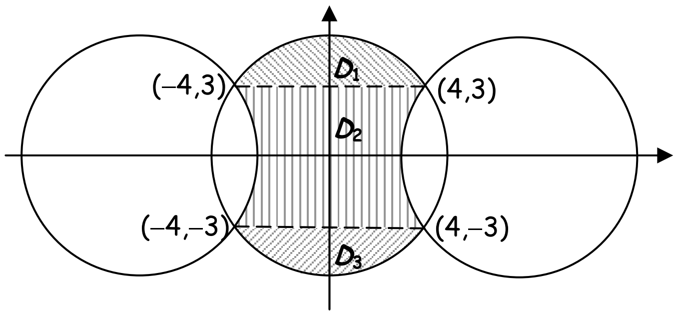
2010eko ekaina. Eurogunneko herrialde batek t=0 momentu arte superabita izan du, eta hortik aurrera $D'(t) = e^{\frac{t}{3}}(6t - t^2)$ mila milioi euro/hilabete-ko aldaketa tasa duen defizita izaten du.
Defizita hasten denetik bi hilabetera herrialdeak zor publikoa jaulkitzen du; jaulkipen honek defizita sortu zuen ildo bera (tasa bera) jarraitzen du, baina bi hilabeteko atzerapenarekin. Zorraren jaulkipena bukatzen da defizitak hazten uzten duen unetik, hau da, txikitzen hasten denetik bi hilabetera.
Zenbat zor publikoa jaulki du herrialde honek epe honetan?
Europako Banku Zentralak 100.000 milioi euroko muga jarri badio zorraren jaulkipenaren gainean; beteko al du herrialdeak eskakizun hau?

Noiz uzten du defizitak hazten? Maximoa lortzen duenean, hau da, haren deribatua zero egiten denean: $D'(t) = e^{t/3}(6t - t^2) = 0 \Rightarrow t = 6$. Orduan, 6 hilabete pasa ostean, defizitak hasten du txikitzen. Zorra bi hilabeteko atzerapenarekin defizitak egiten duena bada, jaulkitzen den zorra 2. hilabetetik 8. hilabetera da dagoen defizita hasieratik 6. hilabetera:
$$\int_0^6 e^{t/3}(6t - t^2)dt = \left\{\begin{matrix} u = 6t - t^2 & u' = 6 - 2t \\ v' = e^{t/3} & v = 3e^{t/3} \end{matrix}\right\} = \left[3e^{t/3}(6t - t^2)\right]_0^6 - \int_0^6 3e^{t/3}(6 - 2t)dt =$$
$$= -\int_0^6 3e^{t/3}(6 - 2t)dt = \left\{\begin{matrix} u = 6 - 2t & u' = -2 \\ v' = 3e^{t/3} & v = 9e^{t/3} \end{matrix}\right\} = -\left[9e^{t/3}(6 - 2t)\right]_0^6 - \int_0^6 18e^{t/3}dt =$$
$$= 54e^2 + 54 - \left[54e^{t/3}\right]_0^6 = 54e^2 + 54 - 54e^2 + 54 = 108 \text{ mila milioi euro.}$$

Orduan, 6 hilabete horietan, herriak 108 mila milioi euroko zor publikoa jaulkitzen du. Eta kopuru hau EBZk jarritako muga baino handiagoa da.

INTEGRAZIOA $\mathbb{R}^2$ ESPAZIOAN

2000ko urtarrila. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 25;\ (x+8)^2 + y^2 \ge 25;\ (x-8)^2 + y^2 \ge 25\}$ izanik, kalkulatu $\iint_D y\,dxdy$.



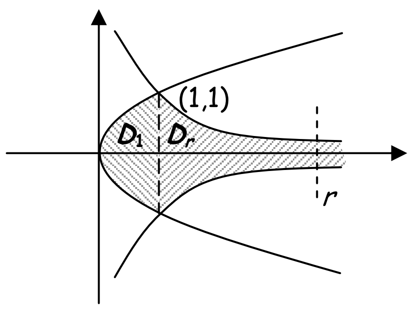
D bornatua da eta f D-n jarraitua, orduan,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f =$$

$$= \int_{-4}^{4}\int_{3}^{\sqrt{25-x^2}} y\,dydx + \int_{-3}^{3}\int_{-8+\sqrt{25-y^2}}^{8-\sqrt{25-y^2}} y\,dxdy + \int_{-4}^{4}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{-3} y\,dydx = \frac{128}{3} + 0 - \frac{128}{3} = 0.$$

2000ko ekaina. Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy^2 \le 1,\ x \ge y^2\}$ eta $f(x,y) = \begin{cases} y^3 e^{-y^2}, & x < 1 \\ 1/x^2, & x \ge 1 \end{cases}$.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$.



$D = D_1 \cap D_r$ eta $f(x,y) = y^3 e^{-y^2}$ funtzioa D_1 multzo bornatuan jarraitua da.

$f(x,y)=1/x^2$ funtzioa D_r multzo ez bornatuan ez negatiboa, bornatua eta jarraitua da beraz,

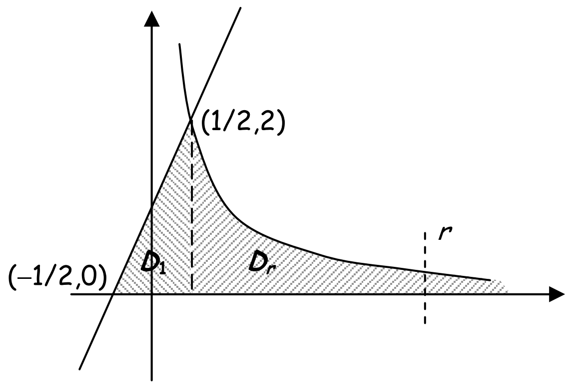
$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f = 0 + \lim_{r\to\infty}\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{r\sqrt{r}}\right) = \frac{4}{3}.$$

$$\iint_{D_1} f = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y^3 e^{-y^2}dydx = \left\{\begin{matrix} u = y^2 & u' = 2y \\ v' = ye^{-y^2} & v = -\frac{1}{2}e^{-y^2}\end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{-xe^{-x}}{2}+\frac{xe^{-x}}{2}\right) - \frac{1}{2}(e^{-x}-e^{-x})dx = 0.$$

$$\iint_{D_r} f = \int_1^r\int_{-\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\frac{1}{x^2}dydx = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{r\sqrt{r}}\right).$$

2001eko urtarrila. Demagun $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy \le 1,\, 2x - y \ge -1,\, y \ge 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = \begin{cases}\sin(x), & x \le \frac{1}{2}\\ \frac{1}{x}, & x > \frac{1}{2}\end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$.



$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f.$$

D_1 bornatua eta erregularra da, f D_1-en jarraitua da beraz:

$$\iint_{D_1} f = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{2x+1}\sin(x)dydx = \int_0^2\int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sin(x)dxdy = \int_0^2 -\cos(x)\Big]_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}}dy =$$

$$= \int_0^2\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\cos\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)dy = -y\cos\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin\left(\frac{y-1}{2}\right)\Big]_0^2 =$$

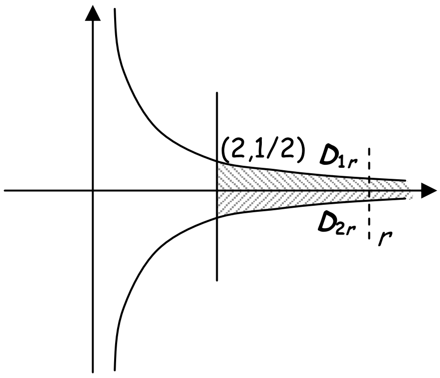
$$= -2\cos\left(\frac{1}{2}\right)+2\sin\left(\frac{1}{2}\right)-2\sin\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{1}{2}\right)-2\cos\left(\frac{1}{2}\right).$$

D_r ez bornatua eta erregularra da, f D_r-n jarraitua eta ez negatiboa beraz:

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f = \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r}\int_{0}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r}\left.\frac{y}{x}\right]_0^{\frac{1}{x}}dx = \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{r\to\infty}-\left.\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{r} = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}+2\right) = 2\,.$$

Orduan, $\iint_D f = 2 + 4\sin\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)$.

2001eko ekaina. Demagun $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ / -1 \le xy \le 1,\ x \ge 2\}$ eta $f(x,y) = e^{x|y|}$.
Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$. (Oharra: kalkuluak egin baino lehen, planteatu nola egingo duzun integrala, multzoaren zatiketa ondo azalduz)



D multzoa erregularra eta ez bornatua da, eta f funtzioa jarraitua eta ez negatiboa D-n.
f-n balio absolutua agertzen denez, zatituko dugu:

$$f(x,y) = e^{x|y|} = \begin{cases} e^{xy}, & y \ge 0 \\ e^{-xy}, & y < 0 \end{cases},$$

eta multzoa ere, bertan kalkulatzeko integralak:

D_{1r}={(x,y)∈$\mathbb{R}^2$/ −1≤xy≤1, x≥2, y≥0} eta D_{2r}={(x,y)∈$\mathbb{R}^2$/ −1≤xy≤1, x≥2, y≤0}.

Orduan, $\iint_D f = \lim_{r\to\infty}\iint_{D_{1r}} e^{xy} + \lim_{r\to\infty}\iint_{D_{2r}} e^{-xy} = \lim_{r\to\infty}\int_2^r\int_0^{1/x} e^{xy}dydx + \lim_{r\to\infty}\int_2^r\int_{-1/x}^{0} e^{-xy}dydx\,.$

$$\iint_{D_{1r}} e^{xy} = \lim_{r\to\infty}\int_2^r\int_0^{1/x} e^{xy}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_2^r\left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_0^{1/x}dx = \lim_{r\to\infty}\int_2^r\frac{e-1}{x}dx = \lim_{r\to\infty}\left[(e-1)\ln(x)\right]_2^r =$$

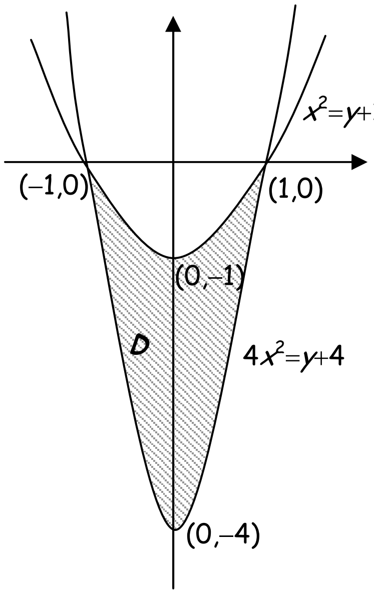
$$= \lim_{r\to\infty}(e-1)(\ln(r)-\ln(2)) \not\to$$

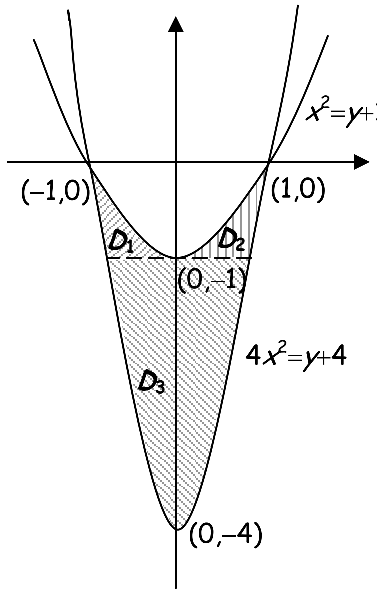
Beraz, $\iint_D f$ ez da existitzen.

2002ko urtarrila. Demagun $f(x,y) = x+1$ eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 \geq y+1,\ 4x^2 \leq y+4\}$.

i) <u>Planteatu</u> $\iint_D f$ integrala, lehen $\iint_D f dydx$ moduan eta gero $\iint_D f dxdy$ moduan.

ii) Kalkulatu integrala.





i) *dydx* moduan:

$$\iint_D f = \int_{-1}^{1}\int_{4x^2-4}^{x^2-1} (x+1)dydx$$

dxdy moduan:

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{-\frac{\sqrt{y+4}}{2}}^{-\sqrt{y+1}} (x+1)dxdy + \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{y+1}}^{\frac{\sqrt{y+4}}{2}} (x+1)dxdy + \int_{-4}^{-1}\int_{-\frac{\sqrt{y+4}}{2}}^{\frac{\sqrt{y+4}}{2}} (x+1)dxdy.$$

ii) Eta integrala kalkulatzeko lehena aukeratuko dugu (biak berdinak dira eta argi dago lehena errazagoa dela).

$$\int_{-1}^{1}\int_{4x^2-4}^{x^2-1} (x+1)dydx = \int_{-1}^{1} xy + y\Big]_{4x^2-4}^{x^2-1} dx = -3\int_{-1}^{1} (x^3+x^2-x-1)dx =$$

$$= -3\left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = 4.$$

2003ko ekaina. Demagun funtzio hau:

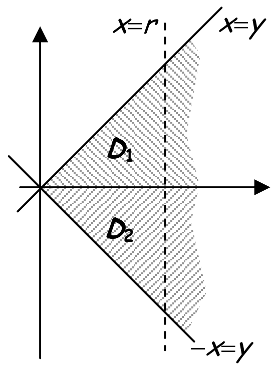
$$f(x,y)=\begin{cases}0,5e^{-x-|y|}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Baldin badakigu f funtzioa (x,y) dimentsio biko ausazko aldagai baten dentsitate funtzioa dela kalkulatu $-x\leq y\leq x$ gertaeraren probabilitatea (hau da, dentsitate funtzioaren integrala baldintza hau betetzen den eremuan)

D eremuan $x\geq 0$ denez, funtzioaren lehen zatia soilik erabiliko dugu. Bestalde, y-ren balio absolutua agertzen da, beraz, eremua zein funtzioa zatitu behar ditugu y-ren arabera:

$$f(x,y)=\begin{cases}0,5e^{-x-y}, & y\geq 0\\ 0,5e^{-x+y}, & y<0\end{cases}$$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/ -x\leq y\leq x\}=D_1\cup D_2$$
$$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\leq y\leq x\}$$
$$D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/ -x\leq y\leq 0\}$$

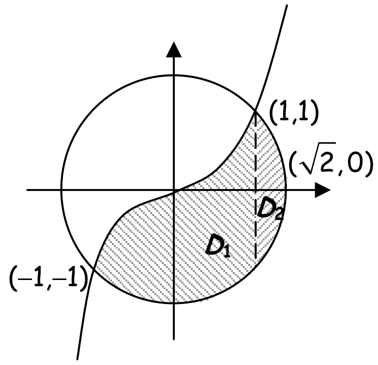


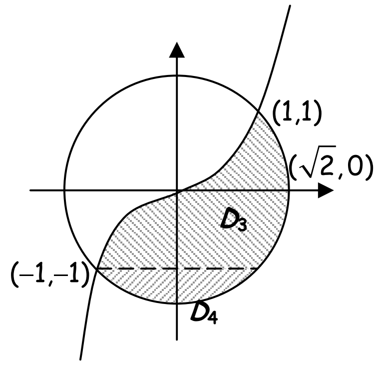
Orduan $\iint_D f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f=0,5$.

$$\iint_{D_1} f=\lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_0^x 0,5e^{-x-y}dydx=\lim_{r\to\infty}\int_0^r 0,5(-e^{-2x}+e^{-x})dx=$$
$$=\lim_{r\to\infty}0,5(0,5e^{-2r}-e^{-r}-0,5+1)=0,25.$$

$$\iint_{D_2} f=\lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_{-x}^0 0,5e^{-x+y}dydx=\lim_{r\to\infty}\int_0^r 0,5(e^{-x}-e^{-2x})dx=$$
$$=\lim_{r\to\infty}0,5(-e^{-r}+0,5e^{-2r}+1-0,5)=0,25.$$

2004ko urtarrila. Kalkulatu $\iint_D x dx dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \le 2, \ y \le x^3\}$ izanik.





D bornatua eta erregularra da, f funtzioa jarraitua D-n, eta $D_1 \cup D_2 = D$, $D_1 \cap D_2$ zero neurriko multzoa izanik, beraz:

$$\iint_D x dx dy = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}.$$

$$\iint_{D_1} x dx dy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^3} x dy dx = \int_{-1}^{1} xy \Big]_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^3} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} x^4 + x\sqrt{2-x^2}\, dx = \frac{x^5}{5} + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}\right)\sqrt{2-x^2}\,\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.$$

$$\iint_{D_2} x dx dy = \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x dy dx = \int_{-1}^{1} \int_{1}^{\sqrt{2-y^2}} x dx dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\Bigg]_{1}^{\sqrt{2-y^2}} dy = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\, dy = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Edo beste modu batean:
D bornatua eta erregularra da, f funtzioa jarraitua D-n, eta $D_3 \cup D_4 = D$, $D_3 \cap D_4$ zero neurriko multzoa izanik, beraz:

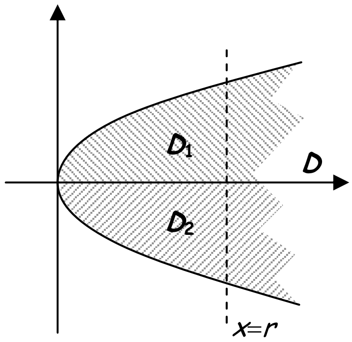
$$\iint_{D_3} x dx dy = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{2-y^2}} x dx dy = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\Bigg]_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} 1 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^{2/3}}{2}\, dy = y - \frac{y^3}{6} - \frac{3y^{5/3}}{10}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}.$$

$$\iint_{D_4} x\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{-1}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-1} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} xy\Big]_{-\sqrt{2-y^2}}^{-1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} -x + x\sqrt{2-x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}\right)\sqrt{2-x^2}\Bigg]_{-1}^{1} = 0.$$

2004ko ekaina. Demagun $f(x,y) = \begin{cases} |y|e^{-ax}, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$, ($a > 0$) eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq y^2\}$ multzoa. Eman a-ren balioa $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$ izan dadin. (Kontuan hartu $\lim_{r\to\infty} re^{-ar} = 0$ dela).



$\iint_{\mathbb{R}^2 - D} f = 0$ denez, $\iint_{\mathbb{R}^2} f = \iint_D f$. Bestalde, funtzioan y-ren balio absolutua agertzen denez,

$$f(x,y) = \begin{cases} ye^{-ax}, & y \geq 0 \\ -ye^{-ax}, & y < 0 \end{cases}.$$

Honela, D ez bornatua eta erregularra da, $D=D_1\cup D_2$, $D_1\cap D_2$ zero neurriko multzoa izanik, eta f jarraitua, bornatua eta ez negatiboa D-n. Beraz,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

$$\iint_{D_1} f = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_0^{\sqrt{x}} ye^{-ax}\,dy\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{y^2e^{-ax}}{2}\Bigg]_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{xe^{-ax}}{2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \dfrac{x}{2} & u' = \dfrac{1}{2} \\ v' = e^{-ax} & v = -\dfrac{e^{-ax}}{a} \end{matrix}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{xe^{-ax}}{2a}\Bigg]_0^r + \int_0^r \frac{e^{-ax}}{2a}dx\right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{re^{-ar}}{2a} - \left[\frac{e^{-ax}}{2a^2}\right]_0^r\right) = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{re^{-ar}}{2a} - \frac{e^{-ar}}{2a^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}.$$

$$\iint_{D_2} f = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_{-\sqrt{x}}^0 -ye^{-ax}\,dydx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\left[-\frac{y^2e^{-ax}}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^0 dx =$$

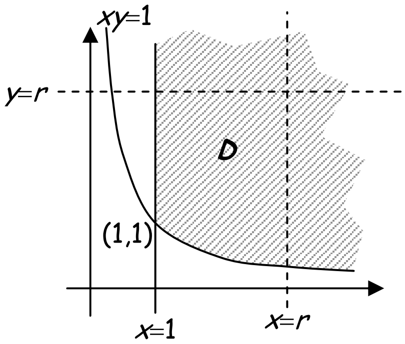
$$= \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{xe^{-ax}}{2}dx = \left\{\begin{matrix} u=\dfrac{x}{2} & u'=\dfrac{1}{2} \\ v'=e^{-ax} & v=-\dfrac{e^{-ax}}{a}\end{matrix}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left(\left[-\frac{xe^{-ax}}{2a}\right]_0^r + \int_0^r \frac{e^{-ax}}{2a}dx\right) =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{re^{-ar}}{2a} - \left[\frac{e^{-ax}}{2a^2}\right]_0^r\right) = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{re^{-ar}}{2a} - \frac{e^{-ar}}{2a^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}.$$

Orduan, $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f = \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$ (gogoratu a>0 dela).

2005eko urtarrila. Kalkulatu $\iint_D \frac{1}{x^3y^2}dxdy$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; xy \geq 1,\, x\geq 1\}$ izanik.

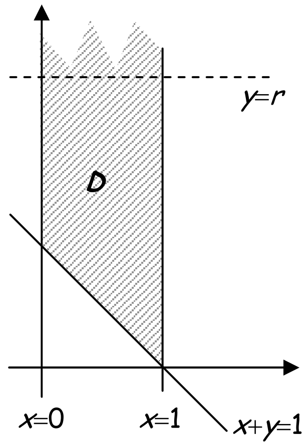
D ez bornatua da, eta f D-n jarraitua eta ez negatiboa da. Orduan,



$$\iint_D \frac{1}{x^3y^2}dxdy = \lim_{r\to\infty}\int_1^r\int_{\frac{1}{x}}^r \frac{1}{x^3y^2}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r\left[-\frac{1}{x^3y}\right]_{\frac{1}{x}}^r dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r -\frac{1}{rx^3}+\frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{2rx^2}-\frac{1}{x}\right]_1^r = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2r^3}-\frac{1}{r}-\frac{1}{2r}+1\right) = 1.$$

2005eko ekaina. Kalkulatu $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mathbin{/} x+y\geq 1,\ 0\leq x\leq 1\}$ izanik.



D ez bornatua eta f D-n jarraitua eta ez negatiboa da.

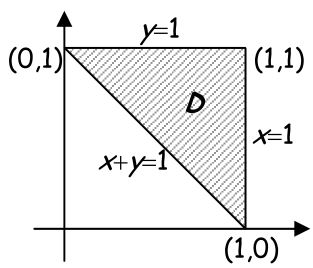
$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}dxdy = \lim_{r\to\infty}\int_0^1\int_{1-x}^r \frac{1}{(x+y)^3}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_0^1 \left[-\frac{1}{2(x+y)^2}\right]_{1-x}^r dx =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\int_0^1\left(-\frac{1}{2(x+r)^2}+\frac{1}{2}\right)dx = \lim_{r\to\infty}\left[\frac{1}{2(x+r)}+\frac{x}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2+2r}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}\right)=\frac{1}{2}.$$

2006ko urtarrila. Kalkulatu $\iint_D xe^y dxdy$, non D (1,1), (0,1) eta (1,0) erpinak dituen triangelua den.

D trinkoa eta erregularra eta f jarraitua direnez,



D trinkoa eta erregularra eta f jarraitua direnez,

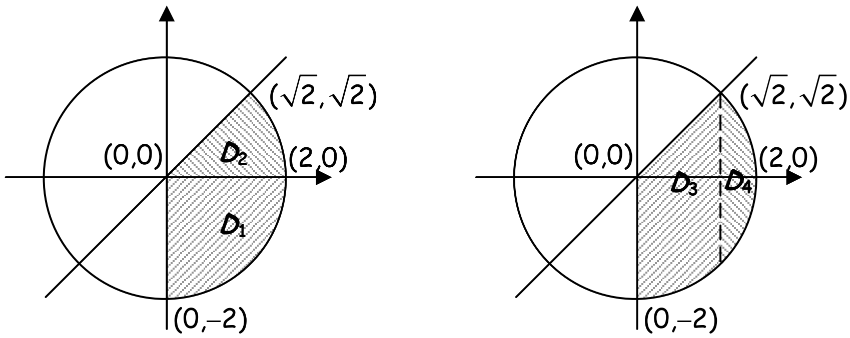
$$\iint_D xe^y dxdy = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xe^y dydx = \int_0^1 xe^y \Big]_{1-x}^1 dx = \int_0^1 xedx - \int_0^1 xe^{1-x} dx = 2 - \frac{e}{2}.$$

$$\int_0^1 xedx = \frac{x^2 e}{2}\Big]_0^1 = \frac{e}{2}.$$

$$\int_0^1 xe^{1-x} dx = \begin{Bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{1-x} & v = -e^{1-x} \end{Bmatrix} = -xe^{1-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx = -2 + e.$$

Eta baita ere modu honetan egin daiteke: $\iint_D xe^y dxdy = \int_0^1 \int_{1-y}^1 xe^y dxdy$.

2006ko ekaina. Demagun $f(x,y) = xy$ eta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ x \geq y\}$. Planteatu $\iint_D f$ integrala $\iint dxdy$ eta $\iint dydx$ moduetan. Kalkulatu $\iint_D f$.



D trinkoa eta erregularra da eta $f(x,y) = xy$ funtzioa jarraitua da D-n, hau da, f D-n integragarria da.
Bestalde, $D = D_1 \cup D_2 = D_3 \cup D_4$ eta $D_1 \cap D_2$ nahiz $D_3 \cap D_4$ zero neurriko multzoak dira. Beraz,

$$\iint_D xydxdy = \iint_{D_1} xydxdy + \iint_{D_2} xydxdy = \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy + \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy.$$

$$\iint_D xydydx = \iint_{D_3} xydydx + \iint_{D_4} xydydx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} xydydx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx.$$

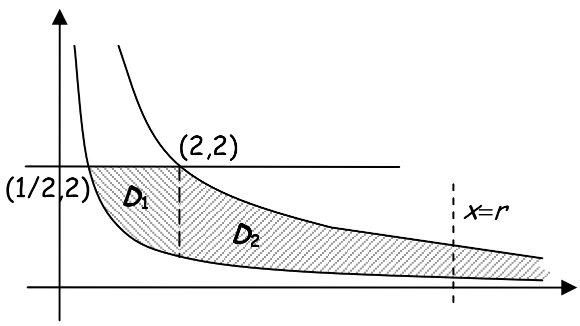
Kalkula dezagun lehena:

$$\int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy = \int_{-2}^0 \frac{x^2 y}{2}\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-2}^0 \left(\frac{4y - y^3}{2}\right) dy = y^2 - \frac{y^4}{8}\Big]_{-2}^0 = -2.$$

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \left.\frac{x^2y}{2}\right]_y^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^{\sqrt{2}} (2y-y^3)dy = y^2 - \left.\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1.$$

Orduan, $\iint_D xydxdy = \int_{-2}^{0}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy + \int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} xydxdy = -1$.

2007ko urtarrila. Kalkulatu $\iint_D f(x,y)dxdy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \le xy \le 4,\, 0 \le y \le 2\}$ eta $f(x,y) = \begin{cases} xe^x & x \le 2 \\ \dfrac{1}{x^3} & x > 2 \end{cases}$ izanik.



D erregularra eta ez bornatua da, f ez da jarraitua (x=2 puntuetan), beraz, $D = D_1 \cup D_2$ eginez, $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} xe^x dxdy + \iint_{D_2} \frac{1}{x^3}dxdy$ izango dugu: lehen integrala arrunta da (D_1 bornatua da eta xe^x jarraitua) eta bigarrena inpropioa.

$$\iint_{D_1} xe^x dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{2} xe^x dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (2xe^x - e^x)dx = e^2 + 2\sqrt{e}.$$

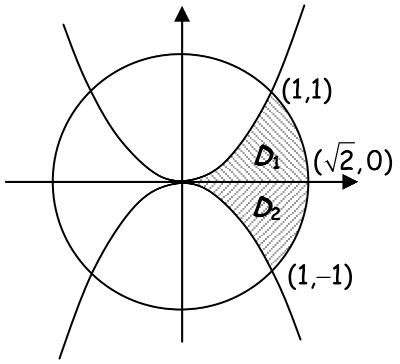
$$\iint_{D_2} \frac{1}{x^3}dxdy = \lim_{r\to\infty}\int_2^r\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} \frac{1}{x^3}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_2^r \frac{3}{x^4}dx = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{8}.$$

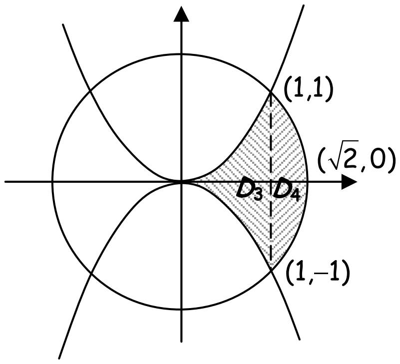
Beraz, $\iint_D f(x,y)dxdy = e^2 + 2\sqrt{e} + \frac{1}{8}$.

2007ko ekaina. Kalkulatu $\iint_D (2x+y)dxdy$,

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -x^2 \le y \le x^2, x^2+y^2 \le 2, x \ge 0\}$ izanik.

(Irudikatu D multzoa eta adierazi argi eta garbi integrala kalkulatzeko erabili duzun zatiketa).





$D_1 = \{(x,y) \in D / y \ge 0\}$ eta $D_2 = \{(x,y) \in D / y \le 0\}$ hartuz, ($D_1 \cup D_2 = D$ eta $D_1 \cap D_2$ zero neurriko multzoa izanik)

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \iint_{D_1} (2x+y)dxdy + \iint_{D_2} (2x+y)dxdy = \frac{13}{30} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{19}{10} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$\iint_{D_1} (2x+y)dxdy = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x+y)dxdy = \frac{13}{30} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\iint_{D_2} (2x+y)dxdy = \int_{-1}^0 \int_{\sqrt{-y}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x+y)dxdy = \frac{19}{10} - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Edo

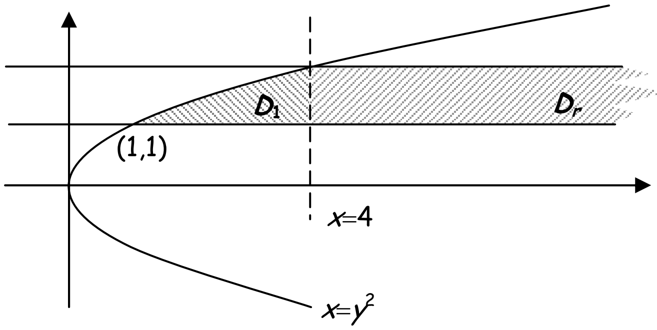
$D_3 = \{(x,y) \in D / x \le 1\}$ eta $D_4 = \{(x,y) \in D / x \ge 1\}$ hartuz, ($D_3 \cup D_4 = D$ eta $D_3 \cap D_4$ zero neurriko multzoak dira)

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \iint_{D_3} (2x+y)dxdy + \iint_{D_4} (2x+y)dxdy = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$\iint_{D_3} (2x+y)dxdy = \int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} (2x+y)dydx = 1.$$

$$\iint_{D_4} (2x+y)dxdy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (2x+y)dydx = \int_{-1}^1 \int_1^{\sqrt{2-y^2}} (2x+y)dxdy = \frac{4}{3}.$$

2008ko urtarrila. Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(y)}{y} & x\le 4\\[2mm] \dfrac{1}{x^2y^2}, & x>4\end{cases}$ eta $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x\ge y^2; 1\le y\le 2\}$ izanik.



D erregularra eta ez bornatua da eta $D=D_1\cup D_r$. Orduan, $\iint_D f=\iint_{D_1} f+\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f$.

$f(x,y)=\dfrac{\ln y}{y}$ funtzioa D_1 multzo bornatuan jarraitua da eta:

$$\int_1^2\int_{y^2}^4 \frac{\ln(y)}{y}dxdy=\int_1^2\left[\frac{x\ln(y)}{y}\right]_{y^2}^4 dy=\int_1^2\left(\frac{4\ln(y)}{y}-y\ln(y)\right)dy=2\ln^2(2)-2\ln(2)+\frac{3}{4}.$$

$$\int_1^2\frac{4\ln(y)}{y}dy=\left\{\begin{matrix} u=4\ln(y) & u'=\dfrac{4}{y}\\ v'=\dfrac{1}{y} & v=\ln(y)\end{matrix}\right\}=4\ln^2(y)\Big]_1^2-\int_1^2\frac{4\ln(y)}{y}dy=2\ln^2(y)\Big]_1^2=2\ln^2(2).$$

$$\int_1^2 y\ln(y)=\left\{\begin{matrix} u=\ln(y) & u'=\dfrac{1}{y}\\ v'=y & v=\dfrac{y^2}{2}\end{matrix}\right\}=\frac{y^2\ln(y)}{2}\Big]_1^2-\int_1^2\frac{y}{2}dy=2\ln(2)-\frac{3}{4}.$$

$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2y^2}$ funtzioa D_r multzo ez bornatuan jarraitua eta ez negatiboa da:

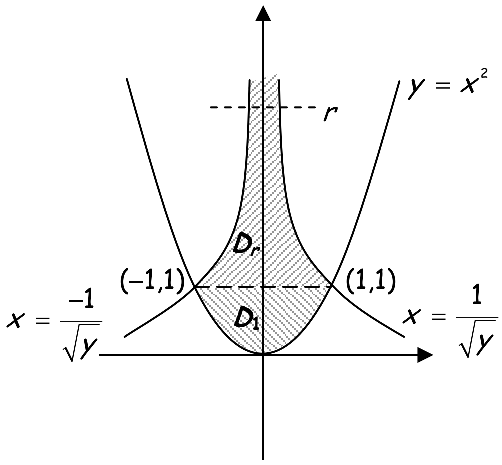
$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r}\frac{1}{x^2y^2}dxdy=\lim_{r\to\infty}\int_1^2\int_4^r\frac{1}{x^2y^2}dxdy=\lim_{r\to\infty}\int_1^2-\frac{1}{xy^2}\Big]_4^r dy=\lim_{r\to\infty}\int_1^2\left(-\frac{1}{ry^2}+\frac{1}{4y^2}\right)dy=$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{ry}-\frac{1}{4y}\Big]_1^2=\lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{8}-\frac{1}{r}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}.$$

Beraz, $\iint_D f = 2\ln^2(2) + 2\ln(2) - \frac{3}{4} + \frac{1}{8}$.

2008ko ekaina. Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 y \le 1,\ x^2 \le y\}$ eta $f(x,y) = \begin{cases} y^2, & y \le 1 \\ \frac{1}{y^2}, & y > 1 \end{cases}$.

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$.



D ez da bornatua eta integrala kalkulatzeko $D = D_1 \cup D_r$. Bestalde, f jarraitua da (agian y=1 multzoan izan ezik) eta ez negatiboa. Orduan,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} f .$$

$$\iint_{D_1} f = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y^2 dydx = \int_{-1}^{1} \left.\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \frac{1-x^6}{3} dx = \left.\frac{x}{3} - \frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{7}.$$

$$\iint_{D_r} f = \int_{1}^{r}\int_{\frac{-1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_{1}^{r} \left.\frac{x}{y^2}\right]_{\frac{-1}{\sqrt{y}}}^{\frac{1}{\sqrt{y}}} dy = \int_{1}^{r} \frac{2}{y^2\sqrt{y}} dy = \left.\frac{-4}{3y\sqrt{y}}\right]_{1}^{r} = \frac{-4}{3r\sqrt{r}} + \frac{4}{3}.$$

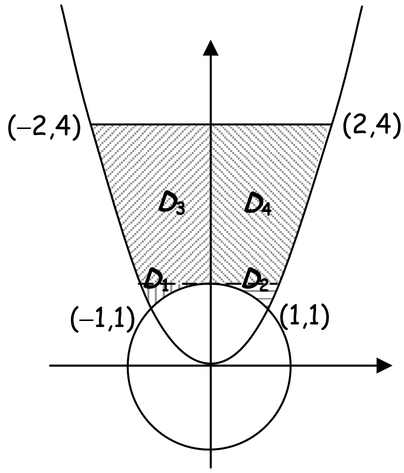
$$\lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} f = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{-4}{3r\sqrt{r}} + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

Beraz, $\iint_D f = \frac{4}{7} + \frac{4}{3} = \frac{40}{21}$.

2009ko urtarrila. Kalkulatu $\iint_D f$ integral bikoitza, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x\ge 0\\ y, & x\le 0\end{cases}$ funtzioa eta $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; y\ge x^2, x^2+y^2\ge 2, y\le 4\}$ multzoa izanik.

$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$ erregularra eta bornatua da eta f D-n jarraitua (x=0 zero neurriko multzo batean izan ezik) beraz,

$$\iint_D f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f+\iint_{D_3} f+\iint_{D_4} f.$$



$$\iint_{D_1} f=\int_1^{\sqrt2}\int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{2-y^2}} y\,dxdy=\int_1^{\sqrt2} yx\Big]_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{2-y^2}}dy=\int_1^{\sqrt2}\left(-y\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{y}\right)dy=$$

$$=\frac13\sqrt{\left(2-y^2\right)^3}+\frac25\sqrt{y^5}\Big]_1^{\sqrt2}=\frac45\sqrt[4]{2}-\frac{11}{15}.$$

$$\iint_{D_2} f=\int_1^{\sqrt2}\int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}}\frac{x}{y}dxdy=\int_1^{\sqrt2}\frac{x^2}{2y}\Big]_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}}dy=\int_1^{\sqrt2}\left(\frac12-\frac1y+\frac{y}{2}\right)dy=$$

$$=\frac12 y-\ln(y)+\frac{y^2}{4}\Big]_1^{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}-\frac14-\ln(\sqrt2).$$

$$\iint_{D_3} f=\int_{\sqrt2}^4\int_{-\sqrt{y}}^0 y\,dxdy=\int_{\sqrt2}^4 yx\Big]_{-\sqrt{y}}^0dy=\int_{\sqrt2}^4 y\sqrt{y}\,dy=\frac25\sqrt{y^5}\Big]_{\sqrt2}^4=\frac{64-4\sqrt[4]{2}}{5}.$$

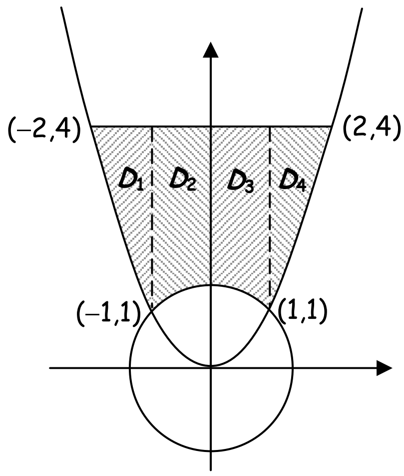
$$\iint_{D_4} f=\int_{\sqrt2}^4\int_0^{\sqrt{y}}\frac{x}{y}dxdy=\int_{\sqrt2}^4\frac{x^2}{2y}\Big]_0^{\sqrt{y}}dy=\int_{\sqrt2}^4\frac12 dy=\frac{y}{2}\Big]_{\sqrt2}^4=2-\frac{\sqrt2}{2}.$$

Beraz,

$$\iint_D f = \frac{829}{60} - \ln(\sqrt{2}).$$

Edo multzoaren zatiketa modu honetan egiten badugu:
$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ erregularra eta bornatua da eta f D-n jarraitua ($x=0$ zero neurriko multzo batean izan ezik) beraz,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f + \iint_{D_4} f .$$



$$\iint_{D_1} f = \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{-1} y dx dy = \int_{-2}^{-1} \int_{x^2}^{4} y dy dx = \frac{49}{10}.$$

$$\iint_{D_2} f = \int_{-1}^{0} \int_{\sqrt{2-x^2}}^{4} y dy dx = \frac{43}{6}.$$

$$\iint_{D_3} f = \int_0^1 \int_{\sqrt{2-x^2}}^{4} \frac{x}{y} dy dx = \frac{1+\ln(4)}{4}.$$

$$\iint_{D_4} f = \int_1^4 \int_1^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} dx dy = \int_1^2 \int_{x^2}^{4} \frac{x}{y} dy dx = \frac{3}{2} - \ln(2).$$

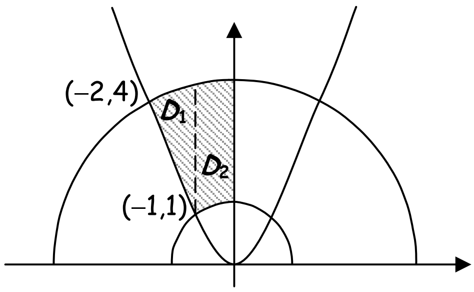
Eta

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f + \iint_{D_4} f = \frac{829}{60} - \ln(\sqrt{2}).$$

2009ko ekaina. Kalkulatu $\iint_D f$ integrala, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2 \le x^2 + y^2 \le 20;\ x \le 0;\ y \ge x^2\}$ eta $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ izanik.

f jarraitua da D multzo trinkoan (konturatu $y \neq 0$ dela D multzoan) eta $D = D_1 \cup D_2$, beraz,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$



$$\iint_{D_1} f = \int_{-2}^{-1}\int_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} \frac{x}{y^2} dy dx = \int_{-2}^{-1} -\frac{x}{y}\Big]_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} dx = \int_{-2}^{-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{20-x^2}} + \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= \sqrt{20-x^2} + \ln|x|\Big]_{-2}^{-1} = \sqrt{19} - 4 - \ln(2).$$

$$\iint_{D_2} f = \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{20-x^2}} \frac{x}{y^2} dy dx = \int_{-1}^{0} -\frac{x}{y}\Big]_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{20-x^2}} dx = \int_{-1}^{0}\left(-\frac{x}{\sqrt{20-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right) dx =$$

$$= \sqrt{20-x^2} - \sqrt{2-x^2}\Big]_{-1}^{0} = \sqrt{20} - \sqrt{2} - \sqrt{19} + 1.$$

Orduan, $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f = \sqrt{20} - \sqrt{2} - \ln(2) - 3.$

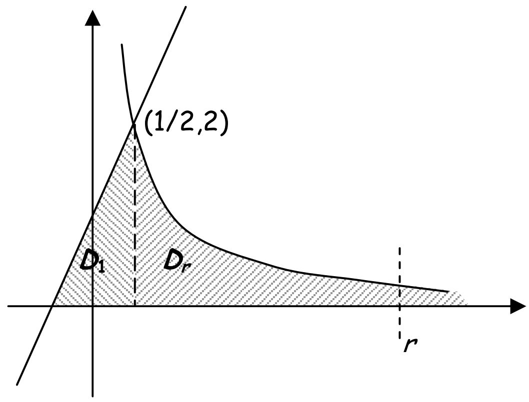
2010eko urtarrila. Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy \leq 1, \ \ 2x - y \geq -1, \ \ y \geq 0\}$ eta

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(x) & x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Kalkulatu, existitzen bada, $\iint_D f$.

$D = D_1 \cup D_r$ non D_r ez bornatua den.

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} f$$



D_1 bornatua eta erregularra da, $f(x,y) = \cos(x)$ D_1-n jarraitua da beraz:

$$\iint_{D_1} f = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2x+1} \cos(x) dydx = \int_0^2 \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(x) dxdy = \int_0^2 \sin(x)\Big]_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\sin\left(\frac{1}{2}\right) - \sin\left(\frac{y-1}{2}\right) \right) dy = y\sin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{y-1}{2}\right)\Big]_0^2 =$$

$$= 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\right).$$

D_r ez bornatua eta erregularra da, $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$ D_r-n jarraitua eta ez negatiboa beraz:

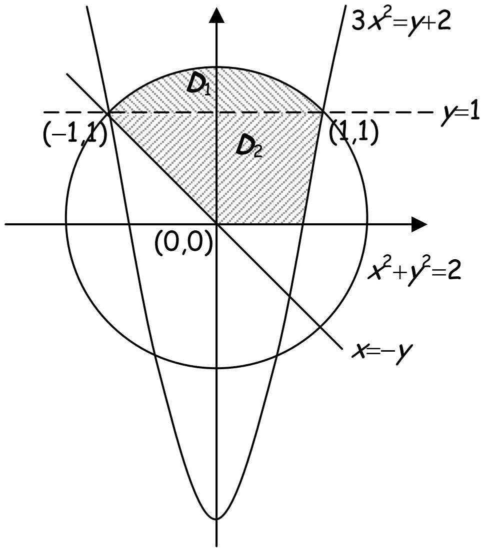
$$\lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} f = \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x} dydx = \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{y}{x}\Big]_0^{\frac{1}{x}} dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{r\to\infty} \frac{-1}{x}\Big]_{\frac{1}{2}}^{r} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{-1}{r} + 2 \right) = 2 .$$

Orduan, $\iint_D f = 2 + 2\sin\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2010eko ekaina. Demagun $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x^2 \leq y+2;\ x^2+y^2 \leq 2;\ x \geq -y;\ y \geq 0\}$ multzoa eta $f(x,y) = \begin{cases} y, & y \geq 1 \\ x, & y < 1 \end{cases}$ funtzioa. Kalkulatu $\iint_D f$.

$D = D_1 \cup D_2$ eta $f(x,y) = y$ funtzioa jarraitua da D_1 multzoan eta $f(x,y) = x$ funtzioa jarraitua da D_2 multzoan; beraz,

$$\iint_D f = \iint_{D_1} y + \iint_{D_2} x .$$



$$\iint_{D_1} y = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{2}dx = \left.\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

Edo $\iint_{D_1} y = \int_1^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} y\,dx\,dy$.

$$\iint_{D_2} x = \int_0^1\int_{-y}^{\sqrt{\frac{y+2}{3}}} x\,dx\,dy = \int_0^1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-y}^{\sqrt{\frac{y+2}{3}}} dy = \int_0^1\left(\frac{y+2}{6}-\frac{y^2}{2}\right)dy = \left.\frac{y^2}{12}+\frac{y}{3}-\frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Beraz, $\iint_D f = \iint_{D_1} y + \iint_{D_2} x = \frac{2}{3}+\frac{1}{4} = \frac{11}{12}$.

FUNTZIO BEKTORIALAK

2000ko urtarrila. Sistema honek lau aldagai erlazionatzen ditu:

$$\begin{cases} x^2y^2 + e^z u = 10 \\ xz^2 + e^y u^2 = 100 \end{cases}.$$

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, egiaztatu sistemak y eta z aldagaiak x eta u aldagaien funtzio modura inplizituki definitzen dituen $(x,y,z,u)=(20,0,0,10)$ puntuaren ingurunean.

ii) Aztertu eragina bi aldagai endogenoetan u aldagaiak $u=10$ baliotik gehikuntza txiki bat jasotzen duenean, beste aldagai exogenoa konstante mantentzen den bitartean.

i) $f(x,y,z,u) = (f^1(x,y,z,u), f^2(x,y,z,u)) = (x^2y^2 + e^z u - 10, xz^2 + e^y u^2 - 100)$ izanik, galdetzen dute $\varphi(y,z)=(x,u)$ funtzio inplizitua emandako puntuaren ingurunean existitzen den.

1- $f\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$.

2- $f(20,0,0,10)=(0,0)$

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^1}{\partial z} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)} = \begin{vmatrix} 2x^2y & e^z u \\ e^y u^2 & 2xz \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)} = \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 100 & 0 \end{vmatrix} = -1000.$$

Beraz, sistemak funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}(20,10) = \frac{\partial y}{\partial u}(20,10) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u} & \frac{\partial f^1}{\partial z} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u} & \frac{\partial f^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^1}{\partial z} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}} = -\frac{\begin{vmatrix} e^z & e^z u \\ 2e^y u & 2xz \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}}{-1000} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 20 & 0 \end{vmatrix}}{1000} = -\frac{1}{5}.$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial u}(20,10) = \frac{\partial z}{\partial u}(20,10) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^1}{\partial u} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y} & \frac{\partial f^1}{\partial z} \\ \frac{\partial f^2}{\partial y} & \frac{\partial f^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x^2y & e^z \\ e^y u^2 & 2e^y u \end{vmatrix}_{(20,0,0,10)}}{-1000} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 100 & 20 \end{vmatrix}}{1000} = -\frac{1}{10}.$$

2000ko ekaina. Demagun eredu ekonomiko hau:

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ C = f(Y,T) + \alpha r \\ I = \beta r \end{cases}$$

Y errenta, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastua, T bildutako zergak eta r interes tasa izanik. α eta β parametroak hertsiki negatiboak dira eta f funtzioa C^1 klasekoa da haren existentzi eremu osoan, hau betetzen duelarik:

$$\forall Y,T:\ 0 < \frac{\partial f}{\partial Y}(Y,T) < 1,\ \frac{\partial f}{\partial T}(Y,T) < 0.$$

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, frogatu edozein oreka punturen inguruan zergak, interes tasa eta gastua finkatu ondoren errenta, kontsumoa eta inbertsioa banan-banan finkatuak geratzen direla.

ii) Aztertu gastuen gehikuntza txiki baten eragina kontsumoaren gainean, zergen gehikuntzaren eragina kontsumoaren gainean eta interes tasaren jaitsieraren eragina errentaren gainean.

Lehenengoz F funtzioa definituko dugu:

$$F(Y,C,I,G,T,r) = (F^1,F^2,F^3,F^4) = (Y - C - I - G, C - f(Y,T) - \alpha r, I - \beta r).$$

i) Sistemak $\varphi(G,T,r)=(Y,C,I)$ funtzio inplizitua definitzen duen aztertu behar da.

1- $F \in C^1$.

2- $F(Y,C,I,G,T,r)=(0,0,0)$ (sistema orekan dago).

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{\partial f}{\partial Y} > 0.$$

Beraz, horrela da.

ii) $$\frac{\partial C}{\partial G} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial G} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial G} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial G} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{1 - \frac{\partial f}{\partial Y}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1 - \frac{\partial f}{\partial Y}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial Y}}{1 - \frac{\partial f}{\partial Y}} > 0.$$

Gastu publikoa handitzen denean, kontsumoa ere handitzen da.

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial T} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial T} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial T} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & -\frac{\partial f}{\partial T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial T}}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} < 0 .$$

Orduan, zergen gehikuntza txiki batek kontsumoaren jaitsiera eragiten du.

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} = \frac{\beta+\alpha}{1-\frac{\partial f}{\partial Y}} < 0 .$$

Orduan, interes tasa jaisten denean, errenta handitzen da.

2001eko urtarrila. Demagun sistema hau: $\begin{cases} x^2\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - \pi + t = 0 \\ x^2 + y^2 + az^2 - xy - a\pi^2 + t = 0 \end{cases}$ non a parametro bat den, $a \neq 0$ izanik.

i) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu aurreko sistemak y eta z aldagaiak inplizituki definitzen dituen x eta t aldagaien funtzio moduan $(x,y,z,t)=(0,0,\pi,0)$ puntuaren ingurunean?

ii) Hala bada, alderantzizko funtzioaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu lortutako funtzio inplizitua lokalki alderanzkarria dela (0,0) puntuaren ingurunean?

i) $\varphi(x,t) = (y,z)$ funtzio inplizituaren existentziaz $(x,y,z,t)=(0,0,\pi,0)$ puntuaren ingurunean galdetzen digute; funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

$$F(x,y,z,t) = (F^1(x,y,z,t), F^2(x,y,z,t)) =$$
$$= (x^2\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - \pi + t, x^2 + y^2 + az^2 - xy - a\pi^2 + t).$$

Orduan:

1- $F^1, F^2 \in C^1((B(0,0,\pi,0))$ funtzio trigonometriko eta polinomikoen arteko batuketa eta biderketa direlako.

2- $F^1(0,0,\pi,0) = F^2(0,0,\pi,0) = 0$.

3- $\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)} = \left|\begin{matrix} -x\sin(y)+\cos(z) & -y\sin(z)+\cos(x) \\ 2y-x & 2az \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)} = \left|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 2a\pi \end{matrix}\right| = -2a\pi \neq 0$.

Beraz, $(x,y,z,t)=(0,0,\pi,0)$ puntuaren ingurunean emandako sistemak $\varphi(x,t)=(y,z)$ funtzioa inplizituki definitzen du.

ii) Alderantzizko funtzioaren teorema aplikatuko dugu $\varphi(x,t)=(\varphi^1(x,t),\varphi^2(x,t))=(y,z)$ funtziorako:

1- $\varphi^1,\varphi^2 \in C^1(B(0,0))$ Funtzio inplizituaren teoremak hau ziurtatzen du.

2- $|J_\varphi(0,0)| \neq 0$.

Jacobiar hau kalkulatzeko, funtzio inplizituaren deribatuak behar ditugu:

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,0) = -\frac{\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)}}{\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)}} = \frac{\left|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 2a\pi \end{matrix}\right|}{2a\pi} = 0 .$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = -\frac{\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial t} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial t} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)}}{\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{matrix}\right|_{(0,0,\pi,0)}} = \frac{\left|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 2a\pi \end{matrix}\right|}{2a\pi} = \frac{2a\pi-1}{2a\pi} .$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial x} \end{vmatrix}_{(0,0,\pi,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0,\pi,0)}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{2a\pi} = 0\,.$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial t}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial t} \end{vmatrix}_{(0,0,\pi,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0,\pi,0)}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{2a\pi} = -\frac{1}{2a\pi}\,.$$

Jacobiarra kalkulatuko dugu:

$$\left|J_\varphi(0,0)\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t} \end{vmatrix}_{(0,0)} = \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{2a\pi - 1}{2a\pi} \\ 0 & -\dfrac{1}{2a\pi} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Eta ondorioz, <u>ez dakigu</u> φ funtzio inplizitua (0,0)-ren ingurunean alderanzkarria den ala ez.

2001eko ekaina. Kontsidera dezagun eredu makroekonomiko hau non Y errenta nazionala, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastu publikoa, M moneta eskaintza eta r interes tasa diren:

$$\begin{cases} Y = C + I + G \\ M = f(Y,r) \\ C = g(Y) \end{cases}$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak izanik. Deribatu hauen zeinuak hauek dira:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} < 0, \quad g'(Y) > 0$$

Eskatzen da:

i) Egiaztatu posible dela errenta, kontsumoa eta inbertsioa adieraztea aldagai endogeno moduan edozein punturen ingurunean non sistema orekan mantentzen den.

ii) Aztertu banan-banan errentaren eragina: (a) moneta eskaintza handitzen denean; (b) interes tasa jaisten denean.

iii) Zein izango litzateke kontsumoan eragina interes tasa handitzen denean?, Zein izango litzateke inbertsioan eragina gastu publikoa handitzen denean?

i) Galdetzen digute $\varphi(G,M,r) = (Y,C,I)$ funtzio inplizituaren existentziaz $(Y,C,I,G,M,r) = (\overline{Y},\overline{C},\overline{I},\overline{G},\overline{M},\overline{r})$ puntuaren ingurunean; horretarako funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

$$F(Y,C,I,G,M,r) = (F^1(Y,C,I,G,M,r), F^2(Y,C,I,G,M,r), F^3(Y,C,I,G,M,r)) =$$
$$= (Y - C - I - G,\ M - f(Y,r),\ C - g(Y)).$$

Orduan:

a) $F^1, F^2, F^3 \in C^1(B(\overline{Y},\overline{C},\overline{I},\overline{G},\overline{M},\overline{r}))$ [F^1 lineala delako eta besteei dagokienez, f eta g funtzioek deribatu jarraituak dituztelako].

b) $F(\overline{Y},\overline{C},\overline{I},\overline{G},\overline{M},\overline{r}) = (0,0,0)$.

c) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial Y} \neq 0.$$

Beraz, emandako ereduan posible da errenta, kontsumoa eta inbertsioa adieraztea aldagai endogeno moduan.

ii) Puntu honetan kalkulatu behar ditugu $\frac{\partial Y}{\partial M}, \frac{\partial Y}{\partial r}$.

$$\frac{\partial Y}{\partial M}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial M} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial M} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial M} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0\\ -g'(Y) & 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial Y}}>0\,.$$

Beraz, moneta eskaintza handitzen denean, errenta ere handitzen da.

$$\frac{\partial Y}{\partial r}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial r} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0\\ -g'(Y) & 1 & 0\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{\partial f}{\partial Y}}>0\,.$$

Beraz, interes tasa jaisten denean, errenta ere jaisten da.

iii) Orain, $\frac{\partial C}{\partial r}$ eta $\frac{\partial I}{\partial G}$ kalkulatuko ditugu:

$$\frac{\partial C}{\partial r}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & -\frac{\partial f}{\partial r} & 0\\ -g'(Y) & 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0\\ -g'(Y) & 1 & 0\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial r}g'(Y)}{\frac{\partial f}{\partial Y}}>0\,.$$

Beraz, interes tasa handitzen denean, kontsumoa ere handitzen da.

$$\frac{\partial I}{\partial G}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial G}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial G}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial G}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0\\ -g'(Y) & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0\\ -g'(Y) & 1 & 0\end{vmatrix}}=-1\,.$$

Beraz, gastu publikoa handitzen denean, inbertsioa jaisten da.

2002ko urtarrila. Demagun $f(x,y)=(x-y,y^2)$ eta $g(x,y)=(e^{x+y},y^3)$ funtzioak eta kontsidera dezagun $h=g\circ f$ konposaketa.

i) Ba al da *h* lokalki alderanzkarria (0,1) puntuaren inguruan?

ii) Aztertu $h(x,y)=(z,z^2)$ ekuazio sistemak *x*, *y* aldagaiak *z* aldagaiaren funtzio inplizitu moduan definitzen dituen $(x,y,z)=(0,1,1)$ puntuaren inguruan.

iii) Zer eragina izango du *x* aldagai endogenoan aldagai exogenoaren gehikuntza txiki batek? Zer eragina izango du beste aldagai endogenoan aldagai exogenoaren jaitsiera txiki batek?

i) $h(x,y)=g(f(x,y))=g(x-y,y^2)=(e^{x-y+y^2},y^6)=(h^1(x,y),h^2(x,y))$.

h funtzioa (0,1) puntuaren inguruan lokalki alderanzkarria den jakiteko alderantzizko funtzioaren teorema aplikatuko dugu:

1- h (0,1)-en inguruan C^1 klasekoa (horretarako h^1 eta h^2 osagai funtzioek C^1 klasekoa izan behar dute eta hala da).

2- $$|J_h(0,1)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h^1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h^1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial h^2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h^2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}_{(0,1)} = \begin{vmatrix} e^{x-y+y^2} & (-1+2y)e^{x-y+y^2} \\ 0 & 6y^5 \end{vmatrix}_{(0,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Beraz, h funtzioa (0,1) puntuaren ingurunean lokalki alderanzkarria da.

ii) $h(x,y)=(h^1(x,y),h^2(x,y))=(z,z^2)$ sistema

$$\begin{cases} e^{x-y+y^2} = z \\ y^6 = z^2 \end{cases} \quad \text{edo} \quad \begin{cases} F^1(x,y,z) = e^{x-y+y^2} - z = 0 \\ F^2(x,y,z) = y^6 - z^2 = 0 \end{cases}.$$

Eta funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

1- $F=(F^1,F^2)$ (0,1,1)-en inguruan C^1 klasekoa (horretarako F^1 eta F^2 osagai funtzioek C^1 klasekoa izan behar dute eta horrela da).

2- $F(0,1,1)=(F^1(0,1,1),F^2(0,1,1))(e^0-1,1-1)=(0,0)$.

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z) \end{vmatrix}_{(0,1,1)} = \begin{vmatrix} e^{x-y+y^2} & (-1+2y)e^{x-y+y^2} \\ 0 & 6y^5 \end{vmatrix}_{(0,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Beraz emandako sistemak x eta y aldagaiak z aldagairen funtzio inplizitu moduan definitzen ditu [$\varphi(z)=(\varphi^1(z),\varphi^2(z))=(x,y)$].

iii) $$\frac{\partial x}{\partial z}(1) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial z}(1) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F^2}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z) \end{vmatrix}_{(0,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z) \end{vmatrix}_{(0,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2}{3}.$$

Orduan, z handitzen badugu x ere handituko da.

$$\frac{\partial y}{\partial z}(1)=\frac{\partial \varphi^2}{\partial z}(1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial z}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial z}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{6}=\frac{1}{3}.$$

Eta z txikitzen badugu y ere txikituko da.

2002ko ekaina. Demagun $\begin{cases} x^2y+zt+x=1 \\ x^2t+xz^2-y=1 \end{cases}$ ekuazio sistema.

i) Ziurta dezakegu sistemak x, y aldagaiak inplizituki definitzen dituen z, t aldagaien funtzio moduan $(x,y,z,t)=(1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean?

ii) Kalkulatu eragina aldagai endogenoetan z aldagaia apur bat handitzen dugunean $(1,0,0,1)$ puntuaren inguruan, sistema mantenduz.

iii) Kalkulatu eragina aldagai endogenoetan t aldagaia apur bat handitzen dugunean $(1,0,0,1)$ puntuaren inguruan, sistema mantenduz.

iv) Alderanzkarria al da lortutako funtzio inplizitua $(0,1)$ puntuaren ingurunean?

i) Sistemak $(x,y)=\varphi(z,t)$ funtzio inplizitua definitzen duen galdetzen dute, horretarako funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

1- $F^1(x,y,z,t)=x^2y+zt+x-1$ eta $F^2(x,y,z,t)=x^2t+xz^2-y-1$ $C^1(\mathbb{R}^4)$ klasekoa dira polinomikoak direlako.

2- $F^1(1,0,0,1)=F^2(1,0,0,1)=0$.

3- $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(1,0,0,1) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(1,0,0,1)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(1,0,0,1) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(1,0,0,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2xy+1 & x^2\\ 2xt+z^2 & -1\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3.$

Beraz, ekuazio sistemak $(1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean $(x,y)=\varphi(z,t)$ funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{\partial \varphi^1}{\partial z}(0,1)=\frac{\partial x}{\partial z}(0,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}t & x^2\\ 2xz & -1\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Beraz, z aldagaia apur bat handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan x aldagaia txikitzen da.

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial z}(0,1)=\frac{\partial y}{\partial z}(0,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial z}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial z}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}2xy+1 & t\\ 2xt+z^2 & 2xz\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Orduan, z aldagaia handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan y aldagaia ere txikitzen da.

iii) $$\frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(0,1)=\frac{\partial x}{\partial t}(0,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial t} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial t} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}z & x^2\\ x^2 & -1\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{3}=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Hau da, t aldagaia apur bat handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan x aldagaia txikitzen da.

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}(0,1)=\frac{\partial y}{\partial t}(0,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial t}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial t}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}2xy+1 & z\\ 2xt+z^2 & x^2\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{3}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{3}=\frac{1}{3}.$$

Beraz, z aldagaia apur bat handitzen dugunean (1,0,0,1) puntuaren inguruan y aldagaia handitzen da.

iv) Horretarako alderantzizko funtzioaren teorema aplikatuko dugu:

1- φ^1, $\varphi^2 \in C^1(B(0,1))$. Hala da funtzio inplizituaren teoremak ziurtatzen duelako.

2- $$\left|J_\varphi(0,1)\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi^1}{\partial z}(0,1) & \frac{\partial\varphi^1}{\partial t}(0,1)\\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial z}(0,1) & \frac{\partial\varphi^2}{\partial t}(0,1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\neq 0.$$

Beraz, φ funtzio inplizitua (0,1) puntuaren ingurunean lokalki alderanzkarria da.

2003ko urtarrila. Pertsona batek A eta B bi ondasun erosteko k euroko aurrekontua du; ondasun hauen prezioak p_1 eta p_2 dira, hurrenez hurren. Lortzen duen erabilgarritasuna funtzio honek ematen du: $E(x_1,x_2)=\ln x_1x_2^2$, non x_1 eta x_2 A eta B-ren kantitateak diren, hurrenez hurren. Erabilgarritasun handiena lortzeko $\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda)=\ln x_1x_2^2+\lambda(p_1x_1+p_2x_2-k)$ funtzio lagrangiarra kontsideratuko dugu eta ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=\dfrac{1}{x_1}+\lambda p_1=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2}=\dfrac{2}{x_2}+\lambda p_2=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=p_1x_1+p_2x_2-k=0\end{cases}.$$

i) $\overline{p}_1=10$, $\overline{p}_2=20$ eta $\overline{k}=1800$ badira, kalkulatu $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ eta $\overline{\lambda}$ $P=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{\lambda},\overline{p}_1,\overline{p}_2,\overline{k})$ aurreko sistemaren soluzioa izateko.

ii) Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, ziurta dezakegu sistemak x_1, x_2, λ aldagaiak p_1, p_2, k aldagaien funtzio moduan definitzen dituen i) atalean lortutako P-ren inguruan?

iii) Kalkulatu A-ren kontsumoaren gaineko eragina haren prezioa apur bat handitzen denean.

i) Datu ezagunak hiru ekuazioetan ordezkatu ondoren $\overline{x_1} = \overline{x_2} = 60$ eta $\overline{\lambda} = -\frac{1}{600}$ direla ateratzen dugu, hau da, $P = \left(60, 60, -\frac{1}{600}, 10, 20, 1800\right)$.

ii) Ikusi behar dugu ea $\varphi(p_1, p_2, k) = (x_1, x_2, \lambda)$ funtzioa existitzen den P-ren ingurunean; horretarako funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu:

1- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \in C^1(B(P))$ (zatiketak ez dira zero egiten P-ren ingurunean).

2- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(P) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(P) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(P) = 0$ (lehen zatian atera dugu)

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x_1^2} & 0 & p_1 \\ 0 & -\frac{2}{x_2^2} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3600} & 0 & 10 \\ 0 & -\frac{2}{3600} & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

Beraz, erantzuna baiezkoa da, sistemak x_1, x_2, λ aldagaiak p_1, p_2, k aldagaien funtzio moduan definitzen ditu P-ren inguruan.

iii) Hemen kalkulatu behar duguna zera da: p_1 handitzen denean zer eragina duen x_1 aldagaian, edo beste moduan, zein den $\frac{\partial x_1}{\partial p_1}$.

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}(10,20,1800) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial p_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix}_P}{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix}_P} = -\frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & p_1 \\ 0 & -\frac{2}{x_2^2} & p_2 \\ x_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix}_P}{\frac{1}{6}} =$$

$$= -6\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{600} & 0 & 10 \\ 0 & -\dfrac{2}{3600} & 20 \\ 60 & 20 & 0 \end{vmatrix} = -6\,.$$

Orduan, *A* ondasunaren prezioa handitzen bada, ondasun horren kontsumoa jaisten da.

2003ko ekaina. Demagun ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases} x^2u + v^2 - yv = 1 \\ 3xy^2 - u - yvx = 1 \end{cases}.$$

i) Ziurta daiteke sistema honek u,v aldagaiak x,y aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituen (1,1,1,1) puntuaren ingurunean?

ii) Ziurta daiteke sistema honek x,y aldagaiak u,v aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituen (1,1,1,1) puntuaren ingurunean?

iii) Bigarren apartatua kontuan hartzen, zer eragina izango luke aldagai endogenoetan u aldagai exogenoaren gehikuntza txiki batek?

i) Sistemak $(u,v)=\varphi(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duen galdetzen dute, horretarako funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

a) $F^1(x,y,u,v)=x^2u+v^2-yv-1$ eta $F^2(x,y,u,v)=3xy^2-u-yvx-1$ $C^1(\mathbb{R}^4)$ dira polinomikoak direlako.

b) $F^1(1,1,1,1)=0$; $F^2(1,1,1,1)=0$.

c) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^1}{\partial v}(1,1,1,1) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^2}{\partial v}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2v-y \\ -1 & -xy \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Beraz, ez dakigu ekuazio sistemak (1,1,1,1) puntuaren ingurunean $(u,v)=\varphi(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duen ala ez.

ii) Sistemak $(x,y)=\varphi(u,v)$ funtzio inplizitua definitzen duen galdetzen dute, horretarako funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

a) eta b) aurreko apartatuan eginda.

c) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(1,1,1,1) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xu & -v \\ 3y^2-yv & 6xy-vx \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 12\,.$$

Beraz, ekuazio sistemak (1,1,1,1) puntuaren ingurunean $(x,y)=\varphi(u,v)$ funtzio inplizitua definitzen du.

iii) $$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}x^2 & -v\\ -1 & 6xy-vx\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{12}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}}{12}=-\frac{1}{3}.$$

Beraz, u handitzen bada x aldagaia txikitzen da.

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2xu & x^2\\ 3y^2-yv & -1\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{12}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{12}=\frac{1}{3}.$$

Beraz, u handitzen bada y ere handitzen da.

2004ko urtarrila. Demagun ekuazio sistema:

$$\begin{cases}u^2+v=xy\\ uv+x^2=y^2\end{cases}.$$

eta $(x,y,u,v)=(x,0,1,-1)$ puntua.

i) Aurkitu x-en balioak non funtzio inplizituaren teoremak ziurtatzen duen ekuazio sistemak x,y aldagaiak u,v aldagaien funtzio moduan definitzen dituela $(x,0,1,-1)$ puntuaren ingurunean.

ii) x-en zein baliotarako ziurta dezakegu x eta y aldagaiak txikitzen direla u aldagai exogenoa handitzen denean?

i) $F(x,y,u,v)=(F_1(x,y,u,v),F_2(x,y,u,v))=(u^2+v-xy,\ uv+x^2-y^2)$ da eta galdetzen dute $\varphi(u,v)=(x,y)$ funtzio inplizituaren existentziaz emandako puntuaren ingurunean.

Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak:

1- $F\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$ edo $F^1,F^2\in C^1(\mathbb{R}^4)$.

2- $F(x,0,1,-1)=(0,-1+x^2)=(0,0)$. Orduan, $x=\pm1$.

3- $$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}=\begin{vmatrix}-y & -x\\ 2x & -2y\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}=\begin{vmatrix}0 & -x\\ 2x & 0\end{vmatrix}=2x^2\neq 0\,;\ x\ 1 \text{ edo } -1 \text{ delako.}$$

Beraz, funtzio inplizituaren teoremak $x=\pm1$ denean $\varphi(u,v)=(\varphi^1(u,v),\ \varphi^2(u,v))=(x,y)$ funtzio inplizituaren existentzia ziurtatzen du.

ii) Aldagai endogenoen deribatuek u aldagaiarekiko emango digute aldagai horien sentikortasuna u aldatzen dugunean:

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u}(1,-1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,-1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2u & -x\\ v & -2y\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{2x^2}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & -x\\ -1 & 0\end{vmatrix}}{2x^2}=\frac{1}{2x}.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u}(1,-1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,-1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-y & 2u\\ 2x & v\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{2x^2}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2x & -1\end{vmatrix}}{2x^2}=\frac{2}{x}.$$

Orduan, $x=-1$ denean, $\frac{\partial x}{\partial u}(1,-1)$ eta $\frac{\partial y}{\partial u}(1,-1)$ negatiboak dira eta beraz, u handitzen denean x eta y txikitzen dira.

2004ko ekaina. Demagun eredu makroekonomikoa non Y errenta nazionala, C kontsumoa, I inbertsioa, G gastu publikoa, T zergen bidezko sarrerak eta r interes tasa diren:

$$\begin{cases}Y=C+I+G\\ C=f(Y-T)\\ I=g(r)\end{cases},$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak eta $f'(Y-T)>0$, $g'(r)<0$ izanik.

i) Eman f'-aren balioak zeinentzat Y, C, I aldagai endogeno moduan har daitezkeen sistema orekan dagoen edozein punturen ingurunean.

ii) f'-aren zein baliotarako eragiten du interes tasaren jaitsiera batek errentaren igoera?

iii) Aurreko apartatuaren lortutako balioetarako, zein da kontsumoaren gaineko eragina gastua handitzen denean?

i) $\boldsymbol{p}_0=(Y_0,C_0,I_0,G_0,T_0,r_0)$ eta

$$F(\boldsymbol{p})=(F^1(\boldsymbol{p}),F^2(\boldsymbol{p}),F^3(\boldsymbol{p}))=(Y-C-I-G,C-f(Y-T),I-g(r))$$

dira. Frogatu behar dugu $\varphi(G,T,r)=(Y,C,I)$ funtzio inplizitua existitzen den.

1- $F\in C^1$.

2- $F(\boldsymbol{p}_0)=(0,0,0)$.

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -f'(Y-T) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1-f'(Y-T).$$

Beraz, $f'(Y-T)\neq 1$ denean sistemak funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{1-f'(Y-T)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -g'(r) & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1-f'(Y-T)} = \frac{g'(r)}{1-f'(Y-T)} < 0.$$

Eta $g'(r)$ negatiboa denez, $1-f'(Y-T)$ positiboa izan behar da, hots, $0<f'(Y-T)<1$.

iii) $$\frac{\partial C}{\partial G} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial G} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial G} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial G} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{1-f'(Y-T)} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -f'(Y-T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1-f'(Y-T)} = \frac{f'(Y-T)}{1-f'(Y-T)} > 0.$$

Deribatu hau positiboa da $0<f'(Y-T)<1$ delako.

Eta orduan, gastua handitzen denean kontsumoa ere handitzen da.

2005eko urtarrila. Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} uf(x) + vg(y) = x \\ -ug(y) + vf(x) = y \end{cases}$$

non f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzio errealak diren, $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x)>0$ izanik.

i) (x,y,u,v) zein punturen ingurunean ziurta dezakegu aurreko sistemak u eta v aldagaiak x eta y aldagaien funtzio inplizitu bezala definitzen dituela?

ii) $(x,y,u,v)=(2,2,1,1)$ puntuak sistema betetzen badu, eta gainera $g(2)=0$ eta $g'(2)>0$ betetzen badira, zein eragina izango du y aldagaiaren jaitsiera txiki batek u aldagaian, $x=2$ izaten mantenduz?

i) $F^1(x,y,u,v)=uf(x)+vg(y)-x$ eta $F^2(x,y,u,v)=-ug(y)+vf(x)-y$.

Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

1) F^1, $F^2 \in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$.

2) $F^1(x,y,u,v)=(0,0)$ eta $F^2(x,y,u,v)=(0,0)$.

3) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ -g(y) & f(x) \end{vmatrix} = f^2(x) + g^2(y) > 0 .$$

Beraz, sistema betetzen duen edozein punturen ingurunean $\varphi(x,y)=(u,v)$ funtzio inplizitua existituko da.

ii) $F^1(2,2,1,1)=f(2)+g(2)-2=0$.

$F^2(2,2,1,1)=-g(2)+f(2)-2=0$.

Eta y-ren jaitsieraren eragina u-n zein den jakiteko:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} vg'(y) & g(y) \\ -ug'(y)-1 & f(x) \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ -g(y) & f(x) \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}} = -\frac{f(2)g'(2)}{f^2(2)} < 0 .$$

Hau da, y txikitzen denean, u handitzen da.

2005eko ekaina. Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} x^2 z - \dfrac{zy}{x} = 6 \\ 2xy - xz + yz = 8 \end{cases}.$$

i) Frogatu sistemak x eta y aldagaiak endogeno moduan definitzen dituen (2,2,2) puntuaren ingurunean.

ii) Zer eragina izango du aldagai endogenoetan z aldagaiaren gehikuntza txiki batek (2,2,2) punturen ingurunean?

i) $F^1(x,y,z) = x^2 z - \dfrac{zy}{x} - 6$ eta $F^2(x,y,z) = 2xy - xz + yz - 8$.

Funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

1) $F^1, F^2 \in C^1(B(2,2,2))$.

2) $F^1(2,2,2)=8-2-6=0$; $F^2(2,2,2)=8-4+4-8=0$.

3) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(2,2,2)} = \begin{vmatrix} 2xz + \dfrac{zy}{x^2} & -\dfrac{z}{x} \\ 2y - z & 2x + z \end{vmatrix}_{(2,2,2)} = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 56.$$

Beraz, (2,2,2) puntuaren ingurunean sistemak $\varphi(z) = (x,y)$ funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{dx}{dz}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x^2 - \dfrac{y}{x} & -\dfrac{z}{x} \\ -x + y & 2x + z \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} 2xz + \dfrac{zy}{x^2} & -\dfrac{z}{x} \\ 2y - z & 2x + z \end{vmatrix}_{(2,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = -\frac{18}{56}.$$

Hau da, z handitzen denean x txikitzen da.

$$\frac{dy}{dz}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2xz + \dfrac{zy}{x^2} & x^2 - \dfrac{y}{x} \\ 2y - z & -x + y \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} 2xz + \dfrac{zy}{x^2} & -\dfrac{z}{x} \\ 2y - z & 2x + z \end{vmatrix}_{(2,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6}{56}.$$

Hau da, z handitzen denean y ere handitzen da.

2006ko urtarrila. Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} xg(y,z) - uv^2 = z \\ x^2y - zf(u,v) = u \end{cases}.$$

f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzioak dira eta $f(0,1)=0$ da.

i) Egiaztatu sistemak z eta u aldagai endogeno moduan jartzen uzten duela $(x,y,z,u,v)=(0,1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean.

ii) Aztertu x aldagaiaren jaitsiera txiki baten eragina ($x=0$ baliotik hasita $y=v=1$ konstanteak mantenduz) z aldagaiaren gainean, $g(1,0)=-1$ izanik.

i) Sistema berridatziko dugu:

$$F^1(x,y,z,u,v) = xg(y,z) - uv^2 - z,$$

$$F^2(x,y,z,u,v) = x^2y - zf(u,v) - u.$$

Eta $\varphi(x,y,v)=(z,u)$ funtzio inplizitua existitzen den galdetzen dute. Hau frogatzeko, funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

a) $F^1, F^2 \in C^1(\mathbb{R}^5)$.

b) $F^1(0,1,0,0,1)=F^2(0,1,0,0,1)=0$.

c) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} x\frac{\partial g(y,z)}{\partial z} - 1 & -v^2 \\ -f(u,v) & -z\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - 1 \end{vmatrix}_{(0,1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Beraz, $(x,y,z,u,v)=(0,1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean sistemak $\varphi(x,y,v)=(z,u)$ funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,0,0,1)}} = -\begin{vmatrix} g(y,z) & -v^2 \\ 2xy & -z\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} - 1 \end{vmatrix}_{(0,1,0,0,1)} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Beraz, x aldagairen jaitsiera txiki batek z aldagaiaren igoera eragiten du.

2006ko ekaina. Demagun ekuazioen sistema hau:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y}{u} - \dfrac{v^2+x}{y} = 1 \\ uy - (x+1)^2 v = 1 \end{cases}.$$

i) Egiaztatu sistemak y eta u aldagaiak x eta v aldagaien funtzio moduan inplizituki definitzen dituela $(x,y,u,v)=(0,1,1,0)$ puntuaren ingurunean.

ii) Aztertu eragina aldagai endogenoetan aldagai exogenoak banan-banan handitzen ditugunean.

iii) Alderantzizko funtzioaren teorema erabiliz, egiaztatu emandako puntuaren ingurunean sistemak inplizituki definitzen duen funtzioa lokalki alderanzkarria dela (0,0) puntuan.

i) Sistemak $\varphi(x,v)=(y,u)$ funtzio inplizitua definitzen duen galdetzen dute, eta hau frogatzeko funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

1- $F^1(x,y,u,v) = \dfrac{x^2+y}{u} - \dfrac{v^2+x}{y} - 1$, $F^2(x,y,u,v) = uy - (x+1)^2 v - 1$ $C^1(B(0,1,1,0))$ klasekoa dira.

2- $F^1(0,1,1,0)= F^2(0,1,1,0)=0$.

3- $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(0,1,1,0) & \dfrac{\partial F^1}{\partial u}(0,1,1,0) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(0,1,1,0) & \dfrac{\partial F^2}{\partial u}(0,1,1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{u} + \dfrac{v^2+x}{y^2} & -\dfrac{x^2+y}{u^2} \\ u & y \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 .$$

Beraz, ekuazio sistemak (0,1,1,0) puntuaren ingurunean $\varphi(x,v)=(y,u)$ funtzio inplizitua definitzen du.

ii) $$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{2x}{u} - \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x^2+y}{u^2} \\ -2(x+1)v & y \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{2} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1}{2} .$$

Hau da, x handitzen denean y ere handitzen da.

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial v}(0,0)=\frac{\partial y}{\partial v}(0,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial v} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial v} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-\frac{2v}{y} & -\frac{x^2+y}{u^2}\\ -(x+1)^2 & y\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{2}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Hau da, v handitzen denean y ere handitzen da.

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial x}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial x}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{u}+\frac{v^2+x}{y^2} & \frac{2x}{u}-\frac{1}{y}\\ u & -2(x+1)v\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{2}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2}$$

Hau da, x handitzen denean u txikitzen da.

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial v}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial v}(0,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial v}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial v}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{u}+\frac{v^2+x}{y^2} & -\frac{2v}{y}\\ u & -(x+1)^2\end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{2}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Hau da, v handitzen denean u ere handitzen da.

iii) Horretarako alderantzizko funtzioaren teorema aplikatuko dugu:

1- φ^1, $\varphi^2 \in C^1(B(0,0))$. Hala da funtzio inplizituaren teoremak ziurtatzen duelako.

2- $$\left|J_\varphi(0,0)\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial \varphi^1}{\partial v}(0,0)\\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial \varphi^2}{\partial v}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Beraz, φ funtzio inplizitua (0,0) puntuaren ingurunean lokalki alderanzkarria da.

2007ko urtarrila.

a) Noiz esango dugu

$$\begin{cases} F^1(x,y,z,u)=0 \\ F^2(x,y,z,u)=0 \end{cases}$$

sistemak x eta y aldagaiak z eta u aldagaien funtzio modura inplizituki definitzen dituela $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})$ puntuaren ingurunean? (Funtzio inplizituaren kontzeptua eskatzen da, ez teorema!)

b) x, y, z, u lau aldagaien arteko erlazioa ekuazio sistema honek ematen du:

$$\begin{cases} x^2+2y-6z^3+8u-2=0 \\ 2x-4y^2-3z-6u^2+9=0 \end{cases}.$$

Funtzio inplizituaren teorema erabiliz, egiaztatu B(0,0) eta B(1,1) inguruneak existitzen direla, non $(z,u)\in$B(1,1) bakoitzerako $(x,y)\in$B(0,0) bakarra existitzen den, (x, y, z, u) puntuak sistema egiaztatzen duelarik.

c) Zein izango da eragina bi aldagai endogenoetan u aldagai exogenoaren balioa aurreko baliotik (u=1) handitzen denean, z beste aldagaiaren balioa konstantea mantentzen den bitartean (hau da, z=1)?

a) Existitzen badira $B(\bar{z},\bar{u})$ eta $B(\bar{x},\bar{y})$ non $\forall(z,u)\in B(\bar{z},\bar{u})$, $(x,y)\in B(\bar{x},\bar{y})$ bakarra existitzen den, sistema mantenduz. Horrela, $\varphi(z,u)=(x,y)$ izango dugu.

b) Galdetzen dute emandako sistemak (x,y,z,u)=(0,0,1,1) puntuaren ingurunean $\varphi(z,u)=(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duen; funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

$$F(x,y,z,u)=(F^1(x,y,z,u),F^2(x,y,z,u))=$$
$$=(x^2+2y-6z^3+8u-2,2x-4y^2-3z-6u^2+9).$$

1- $F\in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$ osagai funtzioak polinomikoak direlako.

2- F(0,0,1,1)=(0,0).

3- $$\left|\begin{matrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \end{matrix}\right|_{(0,0,1,1)} = \left|\begin{matrix} 2x & 2 \\ 2 & -8y \end{matrix}\right|_{(0,0,1,1)} = \left|\begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right| = -4 .$$

Eta teoremak horrela dela ziurtatzen du.

c) $$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}8 & 2\\ -12u & -8y\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{4}=6.$$

Beraz, *u* handitzen denean *x* ere handitzen da.

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}2x & 8\\ 2 & -12u\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{4}=-4.$$

Hots, *u* handitzen denean *y* txikitzen da.

2007ko ekaina.

i) Alderantzizko funtzioaren teoremak $\mathbb{R}^2$-ko zein puntutan ziurtatzen du $f(x,y)=(2xy,y^2-x^2)$ funtzioa lokalki alderanzkarria dela?

ii) Egiaztatu ekuazio sistema honek

$$\begin{cases} xe^v+yu-u^2=0\\ y\cos(v)+x^2-u^2=1\end{cases}$$

u,v aldagaiak *x,y* aldagaien funtzio inplizitu moduan definitzen dituela $(x,y,u,v)=(2,1,2,0)$ puntuaren ingurunean. Kalkulatu funtzio inplizituaren matrize jacobiarra (2,1) puntuan.

i) $f(x,y)=(f^1(x,y),f^2(x,y))=(2xy,y^2-x^2)$.

Azter dezagun alderantzizko funtzioaren teorema:

1- $f^1,f^2\in C^1(\mathbb{R}^2)$. Polinomikoak dira.

2- $$|J_f(x,y)|=\begin{vmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f^1}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial f^2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f^2}{\partial y}(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y & 2x\\ -2x & 2y\end{vmatrix}=4y^2+4x^2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad (x,y)\neq(0,0).$$

Beraz, $\mathbb{R}^2$-ko puntu guztietan, (0,0) puntuan izan ezik, funtzioa lokalki alderanzkarria da.

ii) Sistema berridatziko dugu:

$$\begin{cases} F^1(x,y,u,v) = xe^v + yu - u^2. \\ F^2(x,y,u,v) = y\cos(v) + x^2 - u^2 - 1. \end{cases}$$

Eta $\varphi(x,y)=(u,v)$ funtzio inplizitua existitzen den galdetzen dute. Hau frogatzeko, funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

a) $F^1, F^2 \in C^1(\mathbb{R}^4)$.

b) $F^1(2,1,2,0)=2+2-4=0$; $F^2(2,1,2,0)=1+4-4-1=0$.

c) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)} = \begin{vmatrix} y-2u & xe^v \\ -2u & -y\sin(v) \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8.$$

Beraz, $(x,y,u,v)=(2,1,2,0)$ puntuaren ingurunean sistemak

$$\varphi(x,y) = (\varphi^1(x,y), \varphi^2(x,y)) = (u,v)$$

funtzio inplizitua definitzen du.

Kalkula dezagun $J_\varphi(2,1)$. Funtzio inplizituaren teoremak ziurtatzen du φ funtzio inplizitua C^1 klasekoa dela (2,1) puntuaren ingurunean, eta ondorioz,

$$J_\varphi(2,1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x}(2,1) & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial y}(2,1) \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x}(2,1) & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial y}(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 1 & -5/8 \end{pmatrix}.$$

Aurreko matrizearen elementuak (deribatuak) hauek direlarik:

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}} = -\frac{\begin{vmatrix} e^v & xe^v \\ 2x & -y\sin v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{8} = 1.$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial u}{\partial y}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}} = -\frac{\begin{vmatrix} u & xe^v \\ \cos v & -y\sin v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(2,1)=\frac{\partial v}{\partial x}(2,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial x}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial x}\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v}\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix}y-2u & e^v\\ -2u & 2x\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8}=-\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -4 & 4\end{vmatrix}}{8}=1.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial y}(2,1)=\frac{\partial v}{\partial y}(2,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v}\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix}y-2u & u\\ -2u & \cos v\end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8}=-\frac{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{vmatrix}}{8}=-\frac{5}{8}.$$

2008ko urtarrila eta ekaina. Bi ondasun ordezgarrien eskaintzak (q_1, q_2) eta prezioak (p_1, p_2) ekuazio hauen bitartez erlazionaturik daude:

$$\begin{cases} q_1 = f(p_1,p_2)\\ q_2 = Ap_2 + Bq_1\end{cases},$$

non A>0 eta B<0 bi zenbaki erreal ezagunak diren eta f deribatu partzial jarraituak dituen funtzio ezaguna den, $\frac{\partial f}{\partial p_1}>0$ eta $\frac{\partial f}{\partial p_2}<0$ izanik.

i) Egiaztatu eskaintzen diren kopuruek prezioak finkatzen dituztela.
ii) Aztertu bigarren ondasunaren eskaintzaren gehikuntza txiki baten eragina bi prezioetan.

i) Jakiteko ea eskainitako kantitateek prezioak kontrolatzen dituzten, $\varphi(q_1,q_2)=(p_1,p_2)$ existitzen den ala ez frogatuko dugu; horretarako funtzio inplizituaren teorema aplikatuko dugu:

Ekuazioak berridatziko ditugu:

$$\begin{cases} F^1(q_1,q_2,p_1,p_2) = q_1 - f(p_1,p_2)\\ F^2(q_1,q_2,p_1,p_2) = q_2 - Ap_2 - Bq_1\end{cases}.$$

1- F^1, $F^2 \in C^1$ ($f \in C^1$ delako).

2- $F^1(q_1,q_2,p_1,p_2)=F^2(q_1,q_2,p_1,p_2)=(0,0)$ sistema orekan dagoelako.

3- $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix} = A\dfrac{\partial f}{\partial p_1} > 0$.

Beraz, sistemak ziurtatzen du prezioak eskainitako kantitateen menpe daudela.

ii) $$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 1 & -A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}}{A\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} > 0 .$$

Beraz, bigarren ondasunaren eskaintza handitzen denean lehen ondasunaren prezioa handitzen da ere.

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial p_1}}{A\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} > 0 .$$

Beraz, bigarren ondasunaren eskaintza handitzen denean bigarren ondasunaren prezioa ere handitzen da.

2009ko urtarrila. Demagun sistema hau:

$$\begin{cases} zf(x,y) - u^3 = 2 \\ x^2 z - g(z-y) = u \end{cases} .$$

non $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in C^1(\mathbb{R})$ diren eta hau betetzen delarik:

$$f(1,1)=3;\ g(0)=0;\ \ g'(0)=1;\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1 \ \text{ eta } \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=5 .$$

a) Egiaztatu z eta u aldagaiak sistemaren aldagai endogeno bezala adieraz daitezkeela $(x,y,z,u)=(1,1,1,1)$ puntuaren ingurunean.

b) Aztertu z aldagai endogenoan eragina aldagai exogeno bakoitzaren balioa pixka bat handitzen denean.

Sistemaren ekuazioetatik funtzio bektorial baten osagai funtzioetara pasatuko gara:

$$\left.\begin{aligned} F^1(x,y,z,u) &= zf(x,y) - u^3 - 2 \\ F^2(x,y,z,u) &= x^2 z - g(z-y) - u \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(x,y,z,u) = (F^1(x,y,z,u), F^2(x,y,z,u)) .$$

a) Galdetzen dutena zera da: emandako sistemak emandako puntuaren ingurunean $\varphi(x,y)=(z,u)$ funtzio inplizitua definitzen duen ala ez. Horretarako funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

1- F^1 ($f\in C^1(\mathbb{R}^2)$) eta F^2 ($g\in C^1(\mathbb{R})$) $\mathcal{C}^1$ klasekoa dira (1,1,1,1) puntuaren ingurunean.

2- $F(1,1,1,1)=(F^1(1,1,1,1),F^2(1,1,1,1))=(0,0)$.

3- $$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^1}{\partial u}(1,1,1,1) \\ \frac{\partial F^2}{\partial z}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^2}{\partial u}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x,y) & -3u^2 \\ x^2-g'(z-u) & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Beraz, (1,1,1,1) puntuaren ingurunean, $F(x,y,z,u)=(0,0)$ ekuazioak $\varphi(x,y)=(z,u)$ funtzio inplizitua definitzen du.

b) $$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}} = \frac{\begin{vmatrix} zf_1(x,y) & -3u^2 \\ 2xz & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3}.$$

Beraz, x aldagaia handitzen denean z aldagaia ere handitzen da.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=\frac{\partial \varphi^1}{\partial y}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}} = \frac{\begin{vmatrix} zf_2(x,y) & -3u^2 \\ g'(z-y) & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Beraz, y aldagaia handitzen denean z aldagaia txikitzen da.

2009ko ekaina. Demagun ekuazio sistema hau:

$$\begin{cases} xu^2 + yu = 1 \\ x^3 z + f(yz) = 5 \end{cases}.$$

$f \in C^1(\mathbb{R})$ da eta $f(0) = 3$ betetzen da.

i) $f'(0)$-ren zein baliotarako ziurtatuko du funtzio inplizituaren teoremak aurreko ekuazio sistemak definitzen duela x eta y aldagaiak endogeno moduan $(x, y, z, u) = (1,0,2,1)$ puntuaren ingurunean?

ii) $f'(0)$-ren zein baliotarako eragingo du u aldagaiaren gehikuntza txiki batek (z konstantea mantenduz) y aldagaiaren gehikuntza bat (1,0,2,1) puntutik hasita?

i) Berridatziko dugu sistema $H = (H_1, H_2)$ funtzio bektorialaren osagai funtzio moduan:

$$\begin{cases} H_1(x, y, u, z) = xu^2 + yu - 1 = 0 \\ H_2(x, y, u, z) = x^3 z + f(yz) - 5 = 0 \end{cases}.$$

Eta x eta y aldagaiak endogenoak izateko, $\varphi(u, z) = (x, y)$ funtzio inplizituaz galdetzen dute.

Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu:

a) $H(1,0,2,1) = (H_1(1,0,2,1), H_2(1,0,2,1)) = (0, -3 + f(0)) = (0,0)$.

b) $H \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$, polinomioekin eta $f \in C^1(\mathbb{R})$ funtzioarekin osatua dagoelako.

c) $$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)} = \begin{vmatrix} u^2 & u \\ 3x^2 z & zf'(yz) \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2f'(0) \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow f'(0) \neq 3.$$

Beraz, $f'(0) \neq 3$ denean, funtzio inplizituaren teoremak $\varphi(u, z) = (x, y)$ funtzioa (1,0,2,1) puntuaren ingurunean existitzen dela ziurtatzen du.

ii) $\varphi(u, z) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(u, z) = x \\ \varphi_2(u, z) = y \end{cases}$ eta $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \dfrac{\partial y}{\partial u}$ deribatuaz galdetzen dute.

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} u^2 & 2xu \\ 3x^2 z & 0 \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}}{\begin{vmatrix} u^2 & u \\ 3x^2 z & zf'(yz) \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2f'(0) \end{vmatrix}} = \frac{12}{2f'(0) - 6}.$$

Eta deribatu hau positiboa izateko (gogoratu $f'(0) \neq 3$ dela), $f'(0) > 3$ izan behar du.

2010eko urtarrila. Demagun $\begin{cases} x^3f(y^2+z,z^2)-u^2=0 \\ g(x^2-u^3)-y^2u^2=x^2 \end{cases}$ sistema, non $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ diren eta $f(0,0)=1$; $f_2(0,0)=1$; $f_1(0,0)=1$; $g(0)=1$; $g'(0)=1$ betetzen den.
Frogatu sistemak z eta u aldagai endogeno moduan definitzen duen $(x,y,z,u)=(1,0,0,1)$ puntuaren ingurunean. Demagun $(z,u)=\varphi(x,y)$ funtzio inplizitu hau.
Ziurtatzen du teoremak sistemak beste aldagai bikote inplizituki definitzen duen (1,0,0,1) puntuaren ingurunean?
$(z,u)=\varphi(x,y)$ kasurako, aurkitu φ-ren matrize jacobiarra (1,0) puntuan.

$F(x,y,z,u)=(F^1(x,y,z,u),F^2(x,y,z,u))=(x^3f(y^2+z,z^2)-u^2,\ g(x^2-u^3)-y^2u^2-x^2)$. Eta haren deribatu guztiak:

$\frac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z,u)=3x^2f(y^2+z,z^2)$. $\quad\frac{\partial F^1}{\partial x}(1,0,0,1)=3$.

$\frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z,u)=2x^3yf_1(y^2+z,z^2)$. $\quad\frac{\partial F^1}{\partial y}(1,0,0,1)=0$.

$\frac{\partial F^1}{\partial z}(x,y,z,u)=x^3\left[f_1(y^2+z,z^2)+2zf_2(y^2+z,z^2)\right]$. $\quad\frac{\partial F^1}{\partial z}(1,0,0,1)=1$.

$\frac{\partial F^1}{\partial u}(x,y,z,u)=-2u$. $\quad\frac{\partial F^1}{\partial u}(1,0,0,1)=-2$.

$\frac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z,u)=2xg'(x^2-u^3)-2x$. $\quad\frac{\partial F^2}{\partial x}(1,0,0,1)=0$.

$\frac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z,u)=-2yu^2$. $\quad\frac{\partial F^2}{\partial y}(1,0,0,1)=0$.

$\frac{\partial F^2}{\partial z}(x,y,z,u)=0$. $\quad\frac{\partial F^2}{\partial z}(1,0,0,1)=0$.

$\frac{\partial F^2}{\partial u}(x,y,z,u)=-3u^2g'(x^2-u^3)-2y^2u$. $\quad\frac{\partial F^2}{\partial u}(1,0,0,1)=-3$.

Eta $J_F(1,0,0,1)=\begin{pmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{pmatrix}_{(1,0,0,1)}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Funtzio inplizituaren teorema erabiliko dugu frogatzeko $F(x,y,z,u)=(0,0)$ ekuazioak (1,0,0,1) puntuaren inguruan $(z,u)=\varphi(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen duen ala ez:

a) $F(1,0,0,1)=(F^1(1,0,0,1),F^2(1,0,0,1))=(0,0)$.

b) $F^1,F^2\in C^1(\mathbb{R}^4)$, C^1 klaseko funtzioen batuketak eta biderkadurak eta $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ eta $g\in C^1(\mathbb{R})$ direlako.

c) $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

Beraz, $F(x,y,z,u) = (0,0)$ ekuazioak (1,0,0,1) puntuaren inguruan $(z,u) = \varphi(x,y)$ funtzio inplizitua definitzen du.

Zeintzuk dira beste bikote posible? $\varphi(x,y) = (z,u)$, egin duguna, edo $\varphi(x,z) = (y,u)$, edo $\varphi(x,u) = (y,z)$, edo $\varphi(y,z) = (x,u)$, edo $\varphi(y,u) = (x,z)$, edo $\varphi(z,u) = (x,y)$. Funtzio inplizituaren teorema aplikatu dugu kasu guztietan, non a) eta b) bera den kasu guztietarako. Beraz, c) atalean egin behar den determinantea soilik egingo dugu:

$\varphi(x,z) = (y,u)$ kasurako: $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 0.$ Beraz, ezin dugu ziurtatu.

$\varphi(x,u) = (y,z)$ kasurako: $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial z} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Beraz, ezin dugu ziurtatu.

$\varphi(y,z) = (x,u)$ kasurako: $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$ Beraz, ziurtatzen du.

$\varphi(y,u) = (x,z)$ kasurako: $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial z} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Beraz, ezin dugu ziurtatu.

$\varphi(z,u) = (x,y)$ kasurako: $\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$ Beraz, ezin dugu ziurtatu.

Eta φ-ren matrize jacobiarra kalkulatzeko, φ-ren deribatuak kalkulatu behar ditugu:

$$\varphi(x,y) = (z,u) \Rightarrow \begin{cases} \varphi^1(x,y) = z \\ \varphi^2(x,y) = u \end{cases}.$$

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial x}(1,0)=\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}}{3}=-3.$$

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial y}(1,0)=\frac{\partial z}{\partial y}(1,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}}{3}=0.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(1,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(1,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial x}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial x}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}}{3}=0.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial y}(1,0)=\frac{\partial u}{\partial y}(1,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial z} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial z} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}}{3}=0.$$

Eta beraz, $J_\varphi(1,0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi^1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi^1}{\partial y}\\ \frac{\partial\varphi^2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi^2}{\partial y}\end{pmatrix}_{(1,0)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}_{(1,0)}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$

2010eko ekaina. Demagun $\begin{cases} xf(u)+yg(v)=u \\ -xg(v)+yf(u)=v \end{cases}$ sistema. f eta g deribatu jarraituak dituzten funtzio errealak dira eta gainera, f funtzioak beti hartzen ditu balio hertsiki positiboak.

i) (x,y,u,v) zein punturen ingurunean ziurta dezakegu aurreko sistemak x eta y aldagaiak u eta v aldagaien funtzio inplizitu bezala definitzen dituela?

ii) $(x,y,u,v)=(1,1,2,2)$ puntuak sistema betetzen badu, eta gainera $g(2)=0$ eta $f'(2)>1$ betetzen badira, zein eragina izango du aldagai endogenoetan u aldagaiaren igoera batek?

i) $F^1(x,y,u,v)=xf(u)+yg(v)-u$ eta $F^2(x,y,u,v)=-xg(v)+yf(u)-v$.

Funtzio inplizituaren teoremaren baldintzak aztertuko ditugu:

1) $F^1, F^2 \in C^1(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$.

2) $F^1(x,y,u,v)=(0,0)$ eta $F^2(x,y,u,v)=(0,0)$.

3) $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(u) & g(v) \\ -g(v) & f(u) \end{vmatrix} = f^2(u)+g^2(v)>0$ ($f(u)>0$ delako).

Beraz, sistema betetzen duen edozein punturen ingurunean $\varphi(u,v)=(x,y)$ funtzio inplizitua existituko da.

ii) $F^1(1,1,2,2)=f(2)+g(2)-2=0 \Rightarrow f(2)=2$.

$F^2(1,1,2,2)=-g(2)+f(2)-2=0 \Rightarrow f(2)=2$.

u-ren igoeraren eragina x aldagaian zein den jakiteko:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} xf'(u)-1 & g(v) \\ yf'(u) & f(u) \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}}{\begin{vmatrix} f(u) & g(v) \\ -g(v) & f(u) \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}} = -\frac{f(2)(f'(2)-1)}{f^2(2)} < 0.$$

Hau da, u igotzen denean, x jaisten da.

u-ren igoeraren eragina y aldagaian:

$$\frac{\partial y}{\partial u}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} f(u) & xf'(u)-1 \\ -g(v) & yf'(u) \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}}{\begin{vmatrix} f(u) & g(v) \\ -g(v) & f(u) \end{vmatrix}_{(1,1,2,2)}} = -\frac{f(2)f'(2)}{f^2(2)} < 0 .$$

Hau da, u igotzen denean, y jaisten da.

DIFERENTZIA FINITUKO EKUAZIOAK

2000ko urtarrila. Ondasun baten eskaria t momentuan, ondasun horrek momentu horretan duen prezioak finkatzen du ekuazio honen arabera: $D_t = 8 - 4p_t$; eskaintza, ordea, aurreko bi momentuetan ondasunaren prezioen arabera finkatzen da: $S_{t+2} = -1 + 4p_{t+1} + p_t$.

i) $p_0 = 2$ eta $p_1 = 0{,}5$ direla baldin badakigu, aurkitu p_t (t=0,1,2,...) prezioak non momentu bakoitzerako eskaria eta eskaintza berdintzen diren.

ii) Aztertu aurreko apartatuan lortutako oreka prezioaren joera epe luzean.

i) $D_{t+2}=S_{t+2} \Rightarrow 4p_{t+2}+4p_{t+1}+p_t=9$.
Homogeno elkartuaren polinomio karakteristikoa: $4r^2+4r+1=0$ eta erroak $-1/2$ (bikoitza) dira.

Homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $p_t^h = C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^t + C_2 t\left(-\frac{1}{2}\right)^t$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

$g(t)=9$ denez, $p_t^p = A$ funtzioarekin saiatuko gara ekuazio osoan: $4A+4A+A=9$, hots, $A=1$.

Beraz, ekuazio osoaren soluzio orokorra: $p_t = 1 + C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^t + C_2 t\left(-\frac{1}{2}\right)^t$ ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

Eta hasierako baldintzak:
$p_0=1+C_1=2$.
$p_1=1-1/2C_1-1/2C_2=1/2$.
$C_1=1$ eta $C_2=0$.

Beraz, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra: $p_t = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

ii) Oreka prezioaren joera epe luzean, haren ibilbidea t gero eta handiagoa egiten denean izango da, hau da, limite hau:

$$\lim_{t\to\infty} p_t = \lim_{t\to\infty} 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^t = 1.$$

2000ko ekaina. Demagun diferentziako ekuazio lineal hau:

$$y_{t+3} - 7y_{t+2} + 15y_{t+1} + Ay_t = 20.$$

Baldin badakigu $y_t^h = 2$ funtzio konstantea elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularra dela, aurkitu ekuazioaren soluzio partikularra non $y_0 = 2$, $y_1 = 9$, $y_2 = 20$ den.

$y_{t+3} - 7y_{t+2} + 15y_{t+1} + Ay_t = 0$ homogeno elkartuaren $y_t^h = 2$ soluzio partikularra bada, bertan ordezkatu ondoren $(2-(7\cdot2)+(15\cdot2)+(A\cdot2)=0)$, $A=-9$ dela lortzen dugu. Aurki dezagun homogeno elkartuaren soluzio orokorra:
Homogeno elkartua horrela geratzen da $y_{t+3} - 7y_{t+2} + 15y_{t+1} - 9y_t = 0$.
Polinomio karakteristikoa: $r^3-7r^2+15r-9=0$ eta erroak: 1 eta 3 (bikoitza).
Eta homogeno elkartuaren soluzio orokorra:

$$y_t^h = C_1 + C_2 3^t + C_3 t 3^t, \ (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat lortzeko: $g(t)$=20 eta 1 polinomio karakteristikoaren erroa denez, $y_t^p = Bt$ funtzioarekin saiatuko gara ekuazio osoan, B=5 izanik, eta horrela, ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t=5t+C_1+C_2 3^t+C_3 t3^t,\ (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}).$$

$y_0 = 2$, $y_1 = 9$, $y_2 = 20$ betetzen dituen soluzio partikularra lortzeko:

$y_0=C_1+C_2=2.$

$y_1=5+C_1+3C_2+3C_3=9.$

$y_2=10+C_1+9C_2+18C_3=13.$

Eta ondorioz, $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=0$.

Orduan, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra:

$$y_t=5t+1+3^t.$$

2001eko urtarrila. Banketxe batek haren bezeroei mota berezi bateko inbertsio fondoak eskaintzen dizkie. Urte bakoitzean aurreko urtean hartutako inbertsioaren zati bat mantentzen du eta duela bi urtekoaren inbertsioaren beste zati bat berreskuratzen du. Gainera, urte bakoitzean bezero berrien fondoak ere lortzen ditu. I_t t momentu bakoitzean (t=0,1,2... urteak dira) lortutako inbertsioa bada, kalkulatu I_t datu hauekin: lehen eta bigarren urteetan 90 eta 102 milioi euro, hurrenez hurren, hartzen duela; hortik aurrera (I_{t+2}) urtero aurreko urtearen (I_{t+1}) inbertitutako %60 mantentzen duela; urtero, duela bi urte (I_t) galdutakoaren zati bat berreskuratzen du, zati hau urte horretan lortutakoaren %16 da. Halaber, urte bakoitzean inbertitzaile berrietatik 24 milioi euro lortzen du.

Sortzen den diferentziako ekuazioa honako hau da:

$$I_{t+2} = 0,6I_{t+1} + 0,16I_t + 24.$$

Hau da:

$$I_{t+2} - 0,6I_{t+1} - 0,16I_t = 24.$$

Eta homogeno elkartua $I_{t+2} - 0,6I_{t+1} - 0,16I_t = 0$ da; Aurki dezagun haren soluzio orokorra:

Polinomio karakteristikoa:

$$p(r) = r^2 - 0,6r - 0,16 = 0\,.$$

$$r = \frac{0,6 \pm \sqrt{0,36+0,64}}{2} = \frac{0,6\pm 1}{2} = \begin{cases} 0,8 \\ -0,2 \end{cases}.$$

Beraz, $I_t^h = C_1(0,8)^t + C_2(-0,2)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ homogeno elkartuaren soluzio orokorra da.

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat aurkitu behar dugu; $g(t)$ 0 graduko polinomio da eta 1 ez da polinomio karakteristikoaren erroa, orduan: $I_t^p = A$ funtzioarekin saiatuko gara eta ekuazio osoan ordezkatu ondoren

$$A-0,6A-0,16A=24,$$
$$0,24A=24,$$
$$A=100.$$

Eta $I_t = 100 + C_1(0,8)^t + C_2(-0,2)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ ekuazio osoaren soluzio orokorra dugu.

Eta bukatzeko hasierako baldintzak erabiliko ditugu:

$$\begin{cases} I_0 = 90 = C_1 + C_2 + 100. \\ I_1 = 102 = 0{,}8C_1 - 0{,}2C_2 + 100. \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0,\ C_2 = -10.$$

Eta soluzioa $I_t = 100 - 10(-0{,}2)^t$ izango da.

2001eko ekaina. Demagun diferentziako ekuazio hau:

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = g(t).$$

Baldin badakigu $3t+5$ funtzioa ekuazioaren soluzio partikularra dela, aurkitu $g(t)$ eta $y_0 = 5;\ y_1 = 8;\ y_2 = 11$ betetzen duen ekuazio osoaren soluzio partikularra.

Lehenengoz elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio orokorra aurkituko dugu:

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = 0.$$

Haren polinomio karakteristikoa $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0$ da eta erroak: -2 eta 2 (bikoitza).
Orduan, homogeno elkartuaren soluzio orokorra

$$y_t^h = C_1(-2)^t + C_2 2^t + C_3 t 2^t \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

$g(t)$ lortzeko esaten digute $3t+5$ funtzioa ekuazioaren soluzio partikularra dela, beraz, ordezkatuko dugu:

$$3(t+3)+5 - 2(3(t+2)+5) - 4(3(t+1)+5) + 8(3t+5) = 9t = g(t).$$

Eta ekuazio osoaren soluzio orokorra (ekuazio osoaren soluzio partikular bat gehi homogeno elkartuaren soluzio orokorra):

$$y_t = 3t + 5 + C_1(-2)^t + C_2 2^t + C_3 t 2^t \quad (C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}).$$

Orain $y_0 = 5;\ y_1 = 8;\ y_2 = 11$ betetzen duen soluzio partikularra aurkitzeko:

$t=0$ denean, $y_0=5=5+C_1+C_2$.
$t=1$ denean, $y_1=8=3+5-2C_1+2C_2+2C_3$.
$t=2$ denean, $y_2=11=6+5+4C_1+4C_2+8C_3$.
Sistema honetatik $C_1=C_2=C_3=0$ dela ateratzen dugu, beraz,

$$y_t=3t+5.$$

2002ko urtarrila.

i) Bilatu segida guztiak ($y_0, y_1, \ldots, y_n \ldots$) non gai bakoitza (hirugarrenetik aurrera) bi aurrekoen batez bestekoa den.

ii) Ekuazioa ebazten, aurkitu y_7 gaiaren balio zehatza non y_t segida

$$y_{t+2} - 0{,}5y_{t+1} - 0{,}5y_t = -500(0{,}5)^t$$

den, $y_0 = 3000$ eta $y_1 = 1000$ izanik.

i) y_0, y_1, y_2 segidaren lehen hiru gaiak badira, hauxe bete behar dute: $y_2 = \dfrac{y_1 + y_0}{2}$ eta orokorrean $y_{t+2} = \dfrac{y_{t+1} + y_t}{2} \Rightarrow y_{t+2} - 0{,}5y_{t+1} - 0{,}5y_t = 0$.

Eta diferentziako ekuazio hau ebatziz (soluzio orokorra) segida guztiak lortuko ditugu:

$$p(r)=r^2-0{,}5r-0{,}5=0 \Rightarrow r_1=1,\ r_2=-0{,}5.$$

eta soluzio orokorra $y_t=C_1+C_2\,(-0{,}5)^t$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

ii) $y_{t+2} - 0,5y_{t+1} - 0,5y_t = -500(0,5)^t$ ekuazio ebazteko, homogeno elkartuarekin hasiko gara: $y_{t+2} - 0,5y_{t+1} - 0,5y_t = 0$. Ekuazio hau lehen ebatzi duguna da, beraz haren soluzio orokorra aurrekoarena da: $y_t^h = C_1 + C_2\ (-0,5)^t\ \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Ekuazio osoaren soluzio orokorra lortzeko ekuazio osoaren soluzio partikular bat behar dugu eta $g(t) = -500(0,5)^t$ denez eta 0,5 polinomio karakteristikoaren erroa ez denez, proposatutako soluzio partikularra $y_t^p = A(0,5)^t$. Ekuazio osoan ordezkatzen dugu:

$A(0,5)^{t+2} - 0,5A(0,5)^{t+1} - 0,5A(0,5)^t = -500(0,5)^t \Rightarrow -0,5A = -500 \Rightarrow A = 1000$.

Orduan ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t = 1000(0,5)^t + C_1 + C_2(-0,5)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Bukatzeko hasierako baldintzak soluzio orokorrean ordezkatuko ditugu:

$$\left.\begin{array}{r} y_0 = 1000 + C_1 + C_2 = 3000 \\ y_1 = 500 + C_1 - 0,5C_2 = 1000 \end{array}\right\} \text{ eta } C_1 = C_2 = 1000 \text{ dira.}$$

Hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra:

$$y_t = 1000(0,5)^t + 1000 + 1000(-0,5)^t.$$

Eta $y_7 = 1000(0,5)^7 + 1000 + 1000(-0,5)^7 = 1000$.

2002ko ekaina. Demagun S_{t+1}, D_{t+1} eta p_{t+1}, $t+1$ aldian ondasun baten eskaintza, eskaria eta prezioa hurrenez hurren. Baldin badakigu $p_0=4$ dela eta t guztietarako hau betetzen dela

$$S_{t+1} = -2 + 2p_t \qquad D_{t+1} = 22 - 6p_{t+1},$$

kalkulatu p_t prezioen segida non t aldi bakoitzean eskaria eta eskaintza berdintzen diren. Denboran zehar lortutako prezioak kopuru zehatz batera jotzen du? Hala bada, zein da kopuru hori? Zein da eskariaren eta eskaintzaren joera epe luzean lortutako oreka prezioetarako?

t aldi bakoitzean eskaria eta eskaintza berdintzen badira:

$$S_{t+1} = D_{t+1} \Rightarrow -2 + 2p_t = 22 - 6p_{t+1}.$$

$$-6p_{t+1} - 2p_t + 24 = 0.$$

$$p_{t+1} + \frac{1}{3}p_t = 4.$$

p_t lortzeko diferentziako ekuazioa ebatziko dugu:

Homogeno elkartua $p_{t+1} + \frac{1}{3}p_t = 0$ da eta polinomio karakteristikoa $p(r) = r + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{3}$.

Eta homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $p_t^h = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t \quad (C \in \mathbb{R})$.

Orain ekuazio osoaren soluzio partikular bat behar dugu eta $g(t)=4$ denez (1 ez da polinomio karakteristikoaren erroa) $p_t^p = A$ funtzioarekin saiatuko gara:

$$A + \frac{1}{3}A = 4 \Rightarrow A = 3.$$

Beraz, ekuazioaren soluzio orokorra: $p_t = 3 + C\left(-\frac{1}{3}\right)^t \quad (C \in \mathbb{R})$.

$t=0$ denean $p_0 = 3 + C = 4 \Rightarrow C = 1$.

Eta $p_0 = 4$ betetzen duen ekuazio osoaren soluzio partikularra $p_t = 3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^t$ da.

t gero eta handiagoa bada (hots, denbora aurrera doan bitartean) p_t 3ra doa, $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^t = 0$ delako.

Eta $p_t = 3$ denean, infinituan, $D_t = S_t = 4$.

2003ko urtarrila. Demagun $y_{t+2} + A\, y_{t+1} + B\, y_t = Ct2^t + 2^t$ diferentzia finituko ekuazioa. Baldin badakigu 2^t eta $(-2)^t$ funtzioak elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak direla eta $\frac{1}{8}t2^t$ funtzioa ekuazio osoaren soluzio partikularra dela, kalkulatu *A*, *B*, *C* eta osoaren soluzio partikularra non $y_0 = 2;\ y_1 = \frac{1}{4}$ den.

2^t eta $(-2)^t$ funtzioak $y_{t+2} + A\, y_{t+1} + B\, y_t = 0$ ekuazio homogeno elkartuaren soluzio partikularrak badira,

$$\left.\begin{array}{r} 2^{t+2} + A2^{t+1} + B2^t = 4\cdot 2^t + 2A2^t + B2^t = 0 \\ (-2)^{t+2} + A(-2)^{t+1} + B(-2)^t = 4(-2)^t - 2A(-2)^t + B(-2)^t = 0 \end{array}\right\} \text{hots, } \begin{cases} 2A + B = -4 \\ -2A + B = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0. \\ B = -4. \end{cases}$$

Bestalde, $\frac{1}{8}t2^t$ funtzioa $y_{t+2} - 4\, y_t = Ct2^t + 2^t$ ekuazio osoaren soluzio partikularra bada,

$$\frac{1}{8}(t+2)2^{t+2} - 4\frac{1}{8}t2^t = \frac{1}{2}t2^t + 2^t - \frac{1}{2}t2^t = 2^t = (Ct+1)2^t.$$

Beraz, $Ct + 1 = 1 \Rightarrow C = 0$.

Orduan, ekuazioa horrela geratzen da: $y_{t+2} - 4\, y_t = 2^t$ eta soluzio orokorra lortzeko osoaren soluzio partikular bat $\left(\frac{1}{8}t2^t\right)$ eta homogeno elkartuaren bi soluzio partikular linealki independente (2^t eta $(-2)^t$) behar ditugu. Horrela, $y_t = \frac{1}{8}t2^t + C_1 2^t + C_2(-2)^t$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$ ekuazioaren soluzio orokorra izango da.

Eta bukatzeko, $y_0 = 2$ eta $y_1 = \frac{1}{4}$ badira,

$$\left.\begin{array}{r} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - 2C_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1,$$

beraz, bi baldintza hauek betetzen dituen soluzio partikularra hau da: $y_t = \frac{1}{8}t2^t + 2^t + (-2)^t$.

2003ko ekaina. Bi aldagai diskretu, $(x_t)_{t=0,1,2,..}$ eta $(y_t)_{t=0,1,2,..}$, ekuazio hauen bitartez erlazionaturik daude:

$$y_{t+2} - 3\, y_{t+1} + 2\, y_t = x_t$$
$$x_{t+1} - x_t = 2^t$$

Baldin badakigu $x_0=1$, $y_0=2$, eta $y_1=4$ direla, aurkitu x_{10} eta y_{10} dagozkien diferentziako ekuazioak ebatziz (lor ezazu lehen x_t).

x_t ebatziko dugu:
Homogeno elkartua: $x_{t+1} - x_t = 0$.
Polinomio karakteristikoa: $p(r)=r-1=0$. Eta erroa 1 da; beraz, homogeno elkartuaren soluzio orokorra:

$$x_t^h = C\ (C\in\mathbb{R}).$$

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat lortzeko:
$g(t)=2^t$ eta 2 ez denez polinomio karakteristikoaren erroa, $k2^t$ funtzioarekin saiatuko gara:

$$k2^{t+1}-k2^t=2^t.$$
$$k2^t=2^t.$$
$$k=1.$$

Orduan:

$$x_t=C+2^t\ (C\in\mathbb{R}).$$

Eta $x_0=1$ denez, $x_0=C+1=1$, hots, $C=0$ da eta

$$x_t=2^t.$$

Eta $t=10$ denean,

$$x_{10}=2^{10}=1024.$$

Orain y_t ebatziko dugu: $y_{t+2} - 3\, y_{t+1} + 2\, y_t = 2^t$.
Polinomio karakteristikoa: $r^2-3r+2=0$ eta erroak 2 eta 1 dira, beraz, homogeno elkartuaren soluzio orokorra:

$$y_t^h = C_1 2^t + C_2\ (C_1, C_2\in\mathbb{R}).$$

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat lortzeko $kt2^t$ funtzioarekin saiatuko gara (konturatu 2 polinomio karakteristikoaren erroa dela) Ekuazioan ordezkatu ondoren, $k=\frac{1}{2}$ dela ondorioztatzen dugu eta ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t=C_1 2^t+C_2+\frac{1}{2}\, t2^t\ (C_1, C_2\in\mathbb{R}).$$

Hasierako baldintzak erabiliko ditugu:

$$y_0=C_1+C_2=2.$$
$$y_1=2C_1+C_2+1=4.$$
$$C_1=C_2=1.$$

Orduan,

$$y_t=2^t+1+\frac{1}{2}\, t2^t.$$

Bukatzeko, $t=10$ denean,

$$y_{10}=2^{10}+1+5\cdot 2^{10}=6145.$$

2004ko urtarrila. *P* biztanleko herri batean zurrumurru bat zabaltzen da modu honetan: egunero aurreko egunean ezagutzen ez zutenen hamarretik bati heltzen zaio zurrumurrua.

i) Kalkulatu zurrumurrua ezagutzen duten biztanle kopurua *t* egunetan *t*=0 hasiera hartuta (*t*=0 denean inork ez du zurrumurrua ezagutzen).

ii) Zenbat egun igaroko dira zurrumurrua biztanleen %30 baino gehiagora hedatzeko?

i) y_t *t* egunean zurrumurrua ezagutzen duten biztanle kopurua bada, y_{t+1} izango da: aurreko egunean ezagutzen zutenen kopurua (y_t), gehi ezagutzen ez zutenen ($P-y_t$) %10; beraz,

$$y_{t+1}=y_t+\frac{1}{10}(P-y_t).$$

$$y_{t+1}-0{,}9y_t=\frac{P}{10}.$$

Eta sortutako diferentziako ekuazioa ebatziko dugu:

Homogeno elkartua: $y_{t+1}-0{,}9y_t=0$.

Polinomio karakteristikoa: $p(r)=r-0{,}9=0$ eta erroa 0,9 da.

Homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $y_t^h=C(0{,}9)^t$, $C\in\mathbb{R}$ izanik.

$g(t)=\frac{P}{10}$ 0 graduko polinomioa da eta 1 ez da polinomio karakteristikoaren erroa, beraz, $y_t^o=A$ funtzioarekin saiatuko gara osoaren soluzio partikular bat lortzeko:

$$A-0{,}9A=\frac{P}{10}\text{; orduan } A=P.$$

Eta osoaren soluzio orokorra: $y_t=P+C(0{,}9)^t$ ($C\in\mathbb{R}$).

Bestalde, *t*=0 denean inork ez badaki zurrumurrua: $y_0=0=P+C$ eta orduan $C=-P$.

Hasierako baldintza betetzen duen osoaren soluzio partikularra: $y_t=P-P(0{,}9)^t$.

ii) $y_0=0$.

$y_1=P-0{,}9P=0{,}1P$ (hots, biztanleen %10).

$y_2=P-0{,}81P=0{,}19P$ (hots, biztanleen %19).

$y_3=P-0{,}729P=0{,}271P$ (hots, biztanleen %27,1).

$y_4=P-0{,}6561P=0{,}3439P$ (hots, biztanleen %34,39).

Beraz, laugarren egunerako biztanleen %30 baino gehiagok ezagutuko dute zurrumurrua.

2004ko ekaina. Demagun diferentziako ekuazio hau: $y_{t+3}+Ay_{t+2}+By_{t+1}+Cy_t=8$. Baldin badakigu 1, *t*, $(-1)^t$ elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak direla:

i) Kalkulatu *A*, *B* eta *C*.

ii) Aurkitu ekuazioaren soluzio orokorra.

i) 1, *t*, $(-1)^t$ elkartutako ekuazio homogenoaren soluzio partikularrak direnez, $y_{t+3}+Ay_{t+2}+By_{t+1}+Cy_t=0$ ekuazioan ordezkatuko ditugu:

$$\begin{cases}1+A+B+C=0\\ t+3+A(t+2)+B(t+1)+Ct=0\\ (-1)^{t+3}+A(-1)^{t+2}+B(-1)^{t+1}+C(-1)^t=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+A+B+C=0\\ t(1+A+B+C)+3+2A+B=0\\ (-1)^t(-1+A-B+C)=0\end{cases}.$$

A=–1, B=–1 eta C=1.

ii) Ekuazio osoa horrela geratzen da: $y_{t+3}-y_{t+2}-y_{t+1}+y_t=8$. Polinomio karakteristikoaren erroak 1 (bikoitza) eta –1 direnez, soluzio partikularrak 1, t, $(-1)^t$ dira (lehen eman dizkigutenak!). Beraz,

$$y_t^h=C_1+C_2t+C_3(-1)^t,\ (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}).$$

Osoaren soluzio partikularra lortzeko, $g(t)$=8 denez eta gainera 1 polinomio karakteristikoaren erro bikoitza denez, $y_t^{\circ}=\alpha t^2$ funtzioarekin saiatuko gara:

$$\alpha(t+3)^2-\alpha(t+2)^2-\alpha(t+1)^2+\alpha t^2=8 \Rightarrow \alpha=2.$$

Orduan, osoaren soluzio orokorra:

$$y_t=2t^2+C_1+C_2t+C_3(-1)^t,\ (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}).$$

2005eko urtarrila. Ondasun baten eskaria t+1 momentuan (D_{t+1}) 10 unitate ken momentu horretan eta aurreko momentuen prezioen (p_{t+1} eta p_t) arteko batez bestekoa da, eta eskaintza t+2 momentuan (S_{t+2}) aurreko bi momentuen prezioen (p_{t+1} eta p_t) arteko batez bestekoa ken 10 unitate. Kalkulatu eskaria eta eskaintzaren arteko oreka prezioa t momentu bakoitzerako baldin badakigu prezio hori t=0 denean 12 eta t=1 denean 8 dela.

$$\left.\begin{aligned} D_{t+1}&=10-\frac{1}{2}p_{t+1}-\frac{1}{2}p_t\\ S_{t+2}&=-10+\frac{1}{2}p_{t+1}+\frac{1}{2}p_t\end{aligned}\right\}\ \text{eta biak berdinduz } (D_{t+2}=S_{t+2}),$$

$$p_{t+2}+2p_{t+1}+p_t=40.$$

Ebatz dezagun diferentziako ekuazio hau:
Ekuazio homogeno elkartua: $p_{t+2}+2p_{t+1}+p_t=0$.
Polinomio karakteristikoa: $r^2+2r+1=0$.
Erroak: –1 (bikoitza).
Homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $p_t^h=C_1(-1)^t+C_2t(-1)^t,\ (C_1,C_2\in\mathbb{R})$.
Ekuazio osoaren soluzio partikular bat: $g(t)$=40, zero graduko polinomioa eta 1 ez denez ekuazio homogenoa elkartuaren polinomio karakteristikoaren erroa, $p_t^{\circ}=A$ funtzioarekin saiatuko gara, A=10 lortuz.
Osoaren soluzio orokorra: $p_t=10+C_1(-1)^t+C_2t(-1)^t,\ (C_1,C_2\in\mathbb{R})$.
Hasierako baldintzak:
t=0 denean, $p_0=10+C_1=12$.
t=1 denean, $p_1=10-C_1-C_2=8$.
Orduan, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra:

$$p_t=10+2(-1)^t.$$

2005eko ekaina. Liburutegi ibiltari baten hasierako (t=0) liburu kopurua 1000 da. Lehenengo urtean (t=1) 90 liburu gehiago erosten du. Bigarren urtetik aurrera, aurreko urtearen hasieraren %10 liburu gehiago erostea eta bi urte edo gehiago dituen liburuen %10 liburutegitik ateratzea erabakitzen du. Zenbat liburu izango du t urte pasa ondoren?

Diferentziako ekuazioa planteatuko dugu: $y_{t+2} = y_{t+1} + 0{,}1y_{t+1} - 0{,}1y_t$, hau da,

$$y_{t+2} - 1{,}1y_{t+1} + 0{,}1y_t = 0 .$$

Polinomio karakteristikoa r^2–1,1r+0,1=0 da. Erroak 1 eta 0,1 direnez, ekuazioaren soluzio orokorra:

$$y_t = C_1 + C_2(0{,}1)^t,\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Eta hasierako baldintzak erabiliz:

$$\left.\begin{aligned} t = 0 \text{ denean, } y_0 = C_1 + C_2 = 1000 \\ t = 1 \text{ denean, } y_1 = C_1 + 0{,}1C_2 = 1090 \end{aligned}\right\} \text{ Orduan, } C_1 = 1100 \text{ eta } C_2 = -100.$$

Beraz, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra:

$$y_t = 1100 - 100(0{,}1)^t .$$

2006ko urtarrila. Bezero bat 100.000€ epe luzean sartzeko asmoz bankura hurbiltzen da eta hor bi aukera eskaintzen diote: lehenean, %3ko errentagarritasuna eta interesak kontu ezberdin batean sartzen dira non ez dituzten interesik ematen, eta bigarrenean, %2,5 emango diote baina interesak urtetik urtera hasierako kopurura eransten dira.

i) Planteatu eta ebatzi dagozkien diferentziako ekuazioak (t=0,1,2,... dirua sartu duenetik urte kopurua izanik) eta kalkulatu aukera bakoitzerako t urtetan metatzen den diru kopurua.

ii) Dirua 3 urtetan sartu nahi badu, zein aukera interesatuko litzaioke gehien?

i) *Lehenengo aukera*:

$y_{t+1} = y_t + 3.000$, hau da, $y_{t+1} - y_t = 3.000$

Polinomio karakteristikoa: r–1=0 eta r=1 erro bakarra.

Homogenoaren soluzio orokorra: $y_t^h = C$.

Osoaren soluzio orokorra lortzeko, osoaren soluzio partikular bat behar dugu, eta horrelakoa eskuratzeko $g(t)$–ren arabera funtzio bat edo bestea erabiliko dugu: $g(t)$=3.000, 0 graduko polinomioa baina 1 polinomio karakteristikoaren erroa denez, $y_t^p = At$ funtzioarekin saiatuko gara eta A=3.000 dela ateratzen dugu.

Osoaren soluzio orokorra: $y_t = C + 3.000t$.

Eta $y_0 = 100.000$ denez,

$$y_t^1 = 100.000 + 3.000t .$$

Bigarren aukera:

$y_{t+1} = y_t + 0{,}025y_t$, hau da, $y_{t+1} - 1{,}025y_t = 0$.

Polinomio karakteristikoa: r–1,025=0 eta r=1,025 erro bakarra.

Soluzio orokorra: $y_t = C(1{,}025)^t$.

Eta $y_0 = 100.000$ denez,

$$y_t^2 = 100.000(1,025)^t.$$

ii) $y_3^1 = 100.000 + 3.000 \cdot 3 = 109.000€$.

$y_3^2 = 100.000(1,025)^3 = 107.689€$.

Beraz, 3 urterako lehen aukera interesatuko zaio.

2006ko ekaina. Herri batean gaixotasun bat hedatzen da gaixorik dagoen pertsona batetik hasita. Lagun batek birusa hartzen duenean, hurrengo egunean inkubatzen du eta bigarren egunean gaixotzen da (gaixotasunak egun horretan soilik irauten du) ez badute haren antigorputzek birusa akabatzen eta kasu honetan, bigarren egunean sano egongo da; azken hau 3 kasutik 1ean gertatzen da. Honela, t egun bakoitzean I_t inkubatzen ari diren pertsona kopurua eta G_t gaixorik dauden pertsona kopurua egongo dira. Gaixorik daudenek soilik gaixotasuna kutsatzen dute, eta gaixo bakoitzak t egunean oraindik kutsatua egon ez diren 3 laguni pasatzen die birusa. Hasierako momentuan t=0 (t denbora egunetan neurtua) gaixo bakar bat badago eta inor ez badago inkubatzen, kalkulatu aste batean zenbat gaixo dauden eta zenbat lagun gaixotasuna inkubatzen ari diren, dagokion diferentzia finituko ekuazioa ebatziz.

Ariketa honetan G_t eta I_t-ren arteko erlazioak erantzuna emango digu. Honela, badakigu egun batean aurreko egunean inkubatzen ari ziren 2/3ak gaixorik daudela ($G_{t+1}=2/3I_t$) eta baita ere egun horretan aurreko egunean gaixorik ziren bakoitzetik 3 inkubatzen ari direla ($I_{t+1}=3G_t$). Beraz, bi adierazpenak elkarrekin jarriz (bietan I_{t+1} jarriz),

$$G_{t+2}=2/3I_{t+1}=(2/3)3G_t.$$

Hau da,

$$G_{t+2}-2G_t=0.$$

Diferentzia finituko ekuazio homogenoa da.

Polinomio karakteristikoa: $p(r) = r^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ r = -\sqrt{2} \end{cases}$.

Eta bi erroak errealak eta desberdinak direnez, ekuazioaren soluzio orokorra honako hau izango da:

$$G_t = C_1(\sqrt{2})^t + C_2(-\sqrt{2})^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Bestalde, badakigu G_0=1 dela eta t=0 denean ez dagoela inor inkubatzen (I_0=0) beraz, G_1=0 izango da eta orduan:

$$\left.\begin{array}{l} G_0 = C_1 + C_2 = 1 \\ G_1 = \sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

Beraz,

$$G_t = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^t + \frac{1}{2}(-\sqrt{2})^t.$$

Eta $G_7 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^7 + \frac{1}{2}(-\sqrt{2})^7 = 0$ izango da.

Bestalde, $G_6 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^6 + \frac{1}{2}(-\sqrt{2})^6 = 8$ denez, $I_7=3G_6$ da, hots, I_7=24.

2007ko urtarrila. Lagun batek diru kopuru batekin kontu bat irekitzen du ($t=0$). Hortik aurrera, hilero, ($t=1,2,...$) hil bakoitzaren hasieran duenaren %80 gastatzen du eta 2.000 euroko soldata sartzen du. Aurkitu kontua ireki zuen kopurua baldin badakigu 4 hilabete pasa ondoren kontuan 2.504 euro daudela.

Diferentziako ekuazioa honako hau da (y_t t momentuan kontuan dagoen diru kopurua izanik):

$$y_{t+1} = 0,2y_t + 2.000 .$$

Ebatziko dugu $y_{t+1} - 0,2y_t = 2.000$ ekuazioa.

Homogeno elkartua: $y_{t+1} - 0,2y_t = 0$.

Polinomio karakteristikoa: $r-0,2=0$.

Erro bakarra: $r=0,2$.

Eta homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $y_t^h = C(0,2)^t$, $(C \in \mathbb{R})$.

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat: $g(t)=2.000$ denez, 1 ez da polinomio karakteristikoaren erroa, $y_t^p = A$ funtzio konstantearekin saiatuko gara:

$$A - 0,2A = 2.000 \Rightarrow A = 2.500 .$$

Beraz, ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t = 2.500 + C(0,2)^t, \quad (C \in \mathbb{R}) .$$

Bestalde, $y_4 = 2.504 = 2.500 + C(0,2)^4 \Rightarrow C = 2.500$.

Orduan, $y_4=2.504$ betetzen duen soluzio partikularra:

$$y_t = 2.500 + 2.500(0,2)^t .$$

Bukatzeko, jakin nahi dugu zenbat euro sartu zuen kontuan, hau da, y_0:

$$y_0=2.500+2.500=5.000 \text{ euro.}$$

2007ko ekaina. Ondasun baten eskaria t momentu bakoitzean ($t=0,1,2,...$) momentu horretan duen prezioaren menpe dago: $D_t = 50 - p_t$ milioi unitate, eta ondasun horren eskaintza $t+2$ momentuan t momentuan duen prezioaren menpe dago: $S_{t+2} = -10 + p_t$ milioi unitate. Baldin badakigu $p_0=30$€ eta $p_1=31$€ direla:

i) Kalkulatu oreka prezioa (non eskaria eta eskaintza berdintzen diren) t momentu bakoitzean.

ii) Aztertu oreka prezioaren eboluzioa. Konbergentea al da epe luzean?

i) Ondasun honen eskaria eta eskaintza berdinduz $t+2$ momentuan,

$$D_{t+2} = S_{t+2} \quad \Leftrightarrow \quad 50 - p_{t+2} = -10 + p_t \quad \Leftrightarrow \quad p_{t+2} + p_t = 60 .$$

Eta sortutako ekuazioa ebatziz, oreka prezioa momentu guztietarako lortuko dugu:

Homogeno elkartua: $p_{t+2} + p_t = 0$.

Polinomio karakteristikoa: $p(r) = r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm i$.

Homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $r = \alpha \pm \beta i$ denez non $\alpha=0$ eta $\beta=1$ diren; orduan, $\rho=1$ eta $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ dira eta soluzio orokorra:

$$p_t^h = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \ (C_1, C_2 \in \mathbb{R}) .$$

Osoaren soluzio partikular bat: $g(t)$=60 (zero graduko polinomioa) denez eta 1 polinomio karakteristikoaren erroa ez denez, $p_t^o = A$ funtzio konstantearekin saiatuko gara: $A+A$=60, hots, A=30.

Osoaren soluzio orokorra: $p_t = 30 + C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

p_0=30€ eta p_1=31€ betetzen dituen soluzio partikularra:

$$p_0 = 30 + C_2 = 30.$$

$$p_1 = 30 + C_1 = 31.$$

Beraz, C_1=1 eta C_2=0 dira, hau da, $p_t = 30 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

ii) $\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ oszilatzailea da (t balio guztietarako 1 eta –1en arteko balioa hartzen du, ziklikoki) eta ondorioz oreka prezioa epe luzean ez da konbergentea.

2008ko urtarrila. Hitzontziez eta zuhurrez osatutako herri batean zurrumurru bat hedatzen da. Hasierako momentuan (t=0 egunean) soilik hitzontzi batek ezagutzen du zurrumurrua. Zurrumurrua ezagutzen duen hitzontzi bakoitzak egunero zurrumurrua ezagutzen ez duten bi hitzontziri eta zuhur bati kontatzen die eta zuhurrek, noski, ez dute zurrumurrua zabaltzen.

i) Kalkulatu h_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten hitzontzi kopurua.
ii) Kalkulatu z_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten zuhur kopurua.
iii) Kalkulatu p_t, t egun pasa ondoren zurrumurrua ezagutzen duten herritar kopurua. Zenbat herritarrek ezagutuko dute zurrumurrua 4 egun pasa ondoren?

i) Hitzontzi bakoitzak **egunero** bi hitzontziri kontatzen badie zurrumurrua:

$$h_{t+1} = h_t + 2h_t = 3h_t.$$

Eta sortzen den ekuazioa homogenoa da: $h_{t+1} - 3h_t = 0$.

$p(r)=r-3=0$ eta erroa: 3.

Soluzio orokorra: $h_t = C3^t$ $(C \in \mathbb{R})$.

Eta t=0 h_0=1 denez, soluzioa: $h_t = 3^t$.

ii) Zuhurren kopurua izango da: aurreko egunean zeudenak gehi aurreko egunean zeuden hitzontziak (bakoitzak zuhur bati kontatzen diolako)

$$z_{t+1} = z_t + h_t = z_t + 3^t.$$

Eta sortzen den ekuazioa: $z_{t+1} - z_t = 3^t$. Homogeno elkartua: $z_{t+1} - z_t = 0$.

$p(r) = r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1$.

Homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $z_t = C$ $(C \in \mathbb{R})$.

$g(t) = 3^t$ denez (3 ez da $p(r)$-ren erroa), osoaren proposatutako soluzio partikularra:

$z_t^o = A3^t$. Eta ekuazio osoan ordezkatu ondoren: $z_t^o = \frac{1}{2}3^t$.

Soluzio orokorra: $z_t = C + \frac{1}{2}3^t \ (C \in \mathbb{R})$.

Eta t=0 denean, zuhur bat ere ez dagoenez: $z_0 = C + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$.

Beraz, $z_t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^t$.

iii) $p_t = h_t + z_t = \frac{3}{2}3^t - \frac{1}{2}$. Eta 4 egun pasa ondoren:

$p_4 = \frac{3}{2}3^4 - \frac{1}{2} = 121$ pertsonak ezagutuko dute zurrumurrua.

2008ko ekaina. Lortu lehen gaia zero duen eta hirugarren gaitik aurrera gai bakoitza aurreko bien baturaerdia den segida guztiak.

Hirugarren gaitik aurrera gai bakoitza aurreko bien baturaerdia den segida:

$$y_{t+2} = \frac{y_{t+1} + y_t}{2} \Rightarrow 2y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 0.$$

Diferentziako ekuazio homogenoa ebatziko dugu:

Erroak 1 eta $-\frac{1}{2}$ direnez, $y_t = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t$.

Eta $y_0 = 0$ denez, $y_0 = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$. Orduan, lehen gaia zero duen eta hirugarren gaitik aurrera gai bakoitza aurreko bien baturaerdia den segida guztiak:

$$y_t = C\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^t\right).$$

2009ko urtarrila. Dagokion diferentzia finituko ekuazioa ebatziz, aurkitu y_t segida guztiak non baldintza hau betetzen den: edozein gai eta aurreko bi gaien batez bestekoaren arteko kenketa 1 da.

$$y_{t+2} - \frac{y_{t+1} + y_t}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{t+2} - \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 1.$$

Homogeno elkartua: $y_{t+2} - \frac{1}{2}y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 0.$

Polinomio karakteristikoa: $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1; r = -\frac{1}{2}.$

Ekuazio homogeno elkartuaren soluzio orokorra: $y_t^h = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.

Ekuazio osoaren soluzio partikular bat lortuko dugu: $g(t) = 1$, zero graduko polinomioa, eta 1 $p(r)$-ren erroa denez, $y_t^p = At$ funtzioarekin saiatuko gara:

$$A(t+2)-\frac{1}{2}A(t+1)-\frac{1}{2}At=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{2}{3}.$$

Orduan, ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t=\frac{2}{3}t+C_1+C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^t \quad (C_1,C_2\in\mathbb{R}).$$

2009ko ekaina. Birus hilkor bat hasierako arrain kopurua P duen laku batean hedatzen da. Arrain bat kutsatzen denean berehala hiltzen da eta egunero birusak aurreko eguneko bizirik zeuden arrainen %20 kutsatzen du. Zenbat egunetan igaroko da arrainen populazioa hasieran zegoenaren erdira baino gutxiagora?

y_t funtzioa lakuan t momentu bakoitzean bizirik dauden arrainak badira:

$$y_0=P \text{ eta } y_t=0,8y_{t-1}.$$

$y_t-0,8y_{t-1}=0$ diferentziako ekuazioa ebatziko dugu:

Polinomio karakteristikoa: $r-0,8=0\Rightarrow r=0,8$ erro bakarra.

Ekuazioaren soluzio orokorra: $y_t=C(0,8)^t$, $(C\in\mathbb{R})$.

Eta $y_0=P$ hasierako baldintza aplikatuz, $y_0=C=P$ da eta soluzio partikularra:

$$y_t=P(0,8)^t.$$

Orduan, $y_0=P$, $y_1=0,8P$, $y_2=0,64P$, $y_3=0,512P$, $y_4=0,4096P$, ...

Beraz, lakuaren arrainen populazioa erdia baino txikiagora laugarren egunean igaroko da.

2010eko urtarrila. Bezero batek aurrezki plana adosten du haren bankuarekin. Alde batetik, bezeroak urtero kopuru bat sartzea sinatzen du, lehen ezarpena 2000 eurokoa izanik. Hurrengo urteetan aurreko urtearen %2 gehiago sartzea erabakitzen dute. Zenbat sartu behar du t. urtean, t=0 lehen ezarpena bada?
Beste aldetik, bankuak urteko %3ko korritu konposatua eskaintzen dio. Bezeroak ezin du dirua eskuratu ez bada urteko epe bukaeran, non edo kontua ezabatzen duen edo dagokion kantitatea sartzen duen. T urte pasa ondoren, bezeroak aurreztu duen diru guztia hartzea erabakitzen badu, eta beraz, urte horretan sartu behar zuena sartu barik, zenbat aurreztu du?

Zenbat sartuko du t. urtean? Horretarako, ikus dezagun zer gertatzen den lehen urteetan (y_t funtzioa: bezeroak t urtean sartzen duen dirua):

t=0: $y_0=2.000$.

t=1: $y_1=2.000+2.000\cdot 0'02=y_0+0'02y_0=y_0(1'02)$.

t=2: $y_2=2.000(1'02)+(2.000(1'02))0'02=y_1+0'02y_1=y_1(1'02)$.

t=3: $y_3=2.000(1'02)^2+(2.000(1'02)^2)0'02=y_2+0'02y_2=y_2(1'02)$.

Eta argi dago ekuazioa hau dela:

$$y_{t+1}=y_t(1'02).$$

Ebatziko dugu:

$y_{t+1}-y_t(1'02)=0$ homogenoa da:

$p(r)=r-1'02=0$ eta erroa: $r=1'02$.

Soluzio orokorra: $y_t = C(1'02)^t \quad (C \in \mathbb{R})$.
Eta $y_0 = 2.000$ denez,
t=0: $y_0 = 2.000 = C$.
Orduan, $y_0 = 2.000$ betetzen duen soluzio partikularra: $y_t = 2.000(1'02)^t$.
Beraz, t. urtean $2.000(1'02)^t$€ sartuko du bezeroak.

Orain, bezeroak aurrezten duenaren gain, bankuaren korrituak (z_t funtzioa: bezeroak eskura duen dirua):
t=0: $z_0 = 0$ (2.000 euro du baina ezin du eskuratu!)
t=1: $z_1 = 2.000(1'03) = [z_0 + 2.000](1'03)$
2. urtean zera dugu: aurreko urtean zuena(z_1) + aurreko urtean sartu zuena($2.000(1'02)$) + guzti honen korrituak(bider 1'03).
t=2: $z_2 = [z_1 + 2.000(1'02)](1'03)$.
t=3: $z_3 = [z_2 + 2.000(1'02)^2](1'03)$.
Modu honetan, betetzen den ekuazioa:

$$z_{t+1} = [z_t + 2.000(1'02)^t](1'03).$$

Hau da:

$$z_{t+1} - (1'03)z_t = 2.000(1'02)^t.$$

Ebatziko dugu:
Homogeno elkartua: $z_{t+1} - (1'03)z_t = 0$.
Polinomio karakteristikoa: $p(r) = r - 1'03 = 0$. Erroa: $1'03$.
Homogeno elkartuaren soluzioa: $z_t^h = C(1'03)^t \quad (C \in \mathbb{R})$.
Osoaren soluzio partikular bat: $g(t) = 2.000(1'02)^t$ denez, eta 1'02 $p(r)$-ren erroa ez denez, $z_t^p = A(1'02)^t$. Ekuazioan ordezkatuz,

$$A(1'02)^{t+1} - (1'03)A(1'02)^t = (1'02)A(1'02)^t - (1'03)A(1'02)^t =$$
$$= -0'01A(1'02)^t = 2.000(1'02)^t \Rightarrow A = -200.000.$$

Orduan, soluzio orokorra:

$$z_t = -200.000(1'02)^t + C(1'03)^t \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Eta $z_0 = 0$ denez, $z_0 = -200.000 + C = 0 \Rightarrow C = 200.000$.
beraz, soluzioa:

$$z_t = -200.000(1'02)^t + 200.000(1'03)^t.$$

T urtean, bezeroak $-200.000(1'02)^T + 200.000(1'03)^T$ euro eskura izango du.

2010eko ekaina. (7 puntu) Kasino baten makina txanponjale batean jokatzea, hasieran behintzat, dohainik da. Lehen saiakeran (t=0) saria lortzen bada, sari hau 75 eurokoa da; horrela ez bada eta bigarrenean (t=1) saria lortzen bada, hau 100 eurokoa da.
Baina hirugarren saiakeratik aurrera (t=2) makinak modu honetan kalkulatzen du saria: bi saiakera lehenago izango zuen sariaren halako lau emango du, baina kasu honetan, jokatzaileak makinan saria lortu ez duen saiakera bakoitzetik 90 euro sartu behar du. (Makinak saria ematen duen unean, prozesua bukatzen da.)
Zein da jokatzailearen irabazkina (mozkina, etekina) t momentuan irabazten badu?
Zein momentutik aurrera tentelkeria da makinan jokatzea?

Sortzen den diferentziako ekuazioa hauxe da:

$$y_{t+2} = 4y_t - 90(t+2).$$

$$y_{t+2} - 4y_t = -90t - 180.$$

Hasiko gara homogeno elkartua ebazten:

$$y_{t+2} - 4y_t = 0.$$

Polinomio karakteristikoa: $p(r) = r^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ r = -2 \end{cases}.$

Eta bi erroak errealak eta desberdinak direnez, homogeno elkartuaren soluzio orokorra honako hau izango da:

$$y_t^h = C_1 2^t + C_2(-2)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Ekuazio osoaren soluzio orokorra lortzeko, soluzio partikular bat behar dugu eta $g(t)$-ren arabera lortuko dugu: $g(t)=-90t-180$ bat graduko polinomio bat da non 1 ez den polinomio karakteristikoaren erroa beraz, hurrengo polinomioarekin saiatuko gara $y_t^p = At + B$. Ekuazio osoan ordezkatu ondoren $y_t^p = 30t + 80$ lortzen dugu, orduan ekuazio osoaren soluzio orokorra:

$$y_t^o = C_1 2^t + C_2(-2)^t + 30t + 80 \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Eta y_0=75 eta y_1=100 betetzen duena:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= C_1 + C_2 + 80 = 75 \\ y_1 &= 2C_1 - 2C_2 + 110 = 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1 = -5; C_2 = 0.$$

Orduan, hasierako baldintzak betetzen dituen soluzio partikularra (irabazkinak t momentuan):

$$y_t = -5(2)^t + 30t + 80 \text{ euro.}$$

Horrela, etekina (irabazitako dirua ken makinan sartutako dirua) lortzen dugu eta adierazpen hau negatiboa da (dirua galtzen dugu nahiz eta saria izan!) $5(2)^t$ adierazpenak $30t + 80$ baino handiagoa denean:

y_0=75€; y_1=100€; y_2=120€; y_3=130€; y_4=120€; y_5=70€; y_6=–60€.

Beraz, 5. saiakeran utzi egin behar du, galdu nahi ez badu. Edo 3.ean, etekinik handiena lortzen duelako.