

Fisika Ikasleentzako **Ekuazio Diferentzial Arruntak**

Juan M. Aguirregabiria

eman ta zabal gazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

ARGITALPEN
ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Fisika Ikasleentzako
Ekuazio Diferentzial Arruntak

Fisika Ikasleentzako **Ekuazio Diferentzial Arruntak**

Juan M. Aguirregabiria

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
servicio editorial argitalpen zerbitzua

Debekatuta dago liburu hau osorik edo zatika kopiatzea, bai eta berorri tratamendu informatikoa ematea edota liburua ezein modutan transmititzea, dela bide elektronikoz, mekanikoz, fotokopiaz, erregistroz edo beste edozein eratarata, baldin eta *copyrightaren* jabeek ez badute horretarako baimena aurretik eta idatziz eman.

© 1998-2000 Juan M. Aguirregabiria

© Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

I.S.B.N.: 84-7585-455-9

Lege Gordailua: BI-2290-00

Muntaia eta inprimaketa:

Argitalpen Zerbitzua UPV/EHU

LEIRE ETA AITORRI

HITZAURREA

Hell is paved with good intentions.
James Boswell

Ekuzio diferentzial arruntak sistematikoki ikasten hasten diren fisikako ikasleentzat idatzi da testuliburu hau. Euskal Herriko Unibertsitateko Fisika atalean *Metodo Matematikoak II* irakasgaiaren materia hau urte askotan irakatsi ondoren, apurka-apurka konturatu nintzen gure esku dauden testuliburuak, ugari eta (batzuk) oso onak izan arren, ez direla guztiz egokiak irakasgaiari eman nahi nion ikuspuntu praktikoa aurrera eramateko eta, irakasleak egindako azalpen teorikoak laburragoak izanik, ikasleak ariketak eta problemak ebazteko denbora ahalik eta luzeena izateko. Gainera, gai honi buruz euskarazko testuliburu bakarra, Elena Agirrek itzuli zuen Ernesto Martínezen testua, bestelako ikasleekin erabiltzeko idatzi zen eta ez ditu aztertzen fisikariek ezagutu behar dituzten hainbat arlo. Horrexegatik (eta klaseak kopia-ariketa hutsen moduan ulertzeko ikasle gehientsuek duten joeraren aurka nolabait egiteko), ohar batzuk idaztera ausartu nintzen, baita —haiek zenbait taldetan erabili eta hainbat eransketa eta zuzenketa egin ondoren— testu hau ere. Algebra lineal eta kalkulu diferentzialari buruzko oinarriko kontzeptuak ezagutzen dituen edozein fisikako ikaslerentzat erabilgarria izan liteke eta, seguraski, matematika edo ingeniariak ikasten duenari ikuspuntu berria eman liezaioke. Testuen zerrenda luzeari beste bat gehitzeko ausardia barkatuko dela espero dut, baita zenbait problematan eta atal batzuen ikuspuntuan (ez funtsezko emaitzetan, noski) ekarpen berriren bat aurkituko dela ere.

Lehen helburua ikasleak kalkuluak egiteko duen gaitasuna garatzea denez, fisikarientzako testuliburuetan oso hedaturik dagoen ohitura bati jarraitu diot: noizean behin azalpen teorikoetan frogapen eta zehaztasun-puntu batzuk baztertu egin ditut. Bestalde, teoria laburki azaltzen den bitartean ikasleak egin behar dituen ariketez josita dago testua. (Azken honen osotasunari kalterik ez egiteko, ariketen emaitzak enuntziatuan bertan edo G eranskinean bildu dira.) Gainera, gai bakoitzaren amaieran problema batzuk daude: horrela teorian ikasitakoaz trebatzeko aukera izango du irakurleak. Problema horietako batzuk ikusitakoaren aplikazio zuzena dira, baina beste askotan gauza berriak aztertzen dira: teoriaren hedapenak, egin gabe geratu diren frogapenak, hurrengo gaietan aztertuko denaren aurrerapenak, eta abar. Sarri askotan problemetan uste baino eduki interesgarriago aurki dezake ikasle arduratsuak eta den-denak egiteko gomendatzen diot, haiek kontu handiz aukeratzen saiatu bainaiz. Zerrenda bakoitzeko azkenak azterketetan agertu dira urteetan zehar. (Ikaslearen lan pertsonala aurreratzeko tentaldiari aurre egiten laguntzeko, ez dira jarri problemen soluzioak.) Azpimarratu behar da, bereziki azterketetan, kalkuluak ahal delarik bururaino egin behar direla, baita integralak ebatzi eta serieak batu ere.

Badago era honetako testu bat gaur egun idazten duenak bere buruari egin eta erantzun behar dion galdera bat: zer egin behar da gero eta erabilgarriagoak diren kalkulu sinbolikoa eta zenbakizkoa egiteko sistemekin? Nire ustez, txorakeria hutsa izango litzateke hor daudela ahaztuta

irakasgaia orain dela hogeita hamar urte bezala irakastea eta ikastea; eta gauza bera izango litzateke gai bakoitzeko problemen artean metodo sinbolikoaren (edo zenbakizkoaren) bidez ebatzi behar diren batzuk gehitzea, konputagailua, gizalegez kasu apur bat egin behar zaion auzoko aspergarria, baina saihestezina, bailitzan.

Koefiziente konstanteetako ekuazio lineal homogeneousen kasuan, adibidez, ebazpena, posible denean, ez da oso zaila, baina eskuz egiten bada askotan neketsua izaten da eta erraz egin daitezke hutsak. Konputagailuz eginiko algebrak soluzio zuzena ematen du oso modu erabilgarrian (sarri askotan adierazpenik errazenak lortzeko erabiltzailearen laguntza beharrezkoa bada ere). Ondorioz, ez dut uste oso egokia denik testu askotan —berrienak barne— ematen zaien espazioa, kasu berezi bakoitza arreta handiegiz aztertuz. Ez dut honekin esan nahi ekuazio horien ebazpen-metodoak eguneko testuliburuetatik at utzi behar direla; eta ez horrelako ekuazioak eskuz nola ebatz daitezkeen jakitea alferrikakoa ez delako, baizik eta, bereziki, egonkortasun lineala ulertzeko Euler-en metodoaren oinarriko kontzeptuak ezinbestez menperatu behar direlako. Testuan azaldu nahi izan dudan nire iritziaren arabera, onena izango litzateke oinarriko ideiak eta ebazpen-metodoak laburki azaltzea, ikasleak behin aplikatu dituzan, tarteko kalkuluak egiteko kalkulu sinbolikoa erabiltzen badu ere. Argi esan behar zaio, berriz, kasu sinpleenetan izan ezik —osziladore harmonikoa ebazteko kalkulu algebraikorako sistema batez baliatzea, $2 + 2$ batzeko kalkulagailu bat erabiltzea bezain barregarria da—, praktikan horrelako problemak ebazteko konputagailuz eginiko algebra erabiltzea askoz ere erabilgarriagoa eta fidagarriagoa izango dela. Beste horrenbeste esan liteke ebazpen-metodo ezaguna duten beste familia askori buruz: seguraski horrelakoak behin laburki aztertzea ez da alferreko lana izango, zeren han agertzen diren ideiak eta teknika asko (hala nola aldagai-aldaketa egokiak bilatzea edo simetriez baliatzea) oso erabilgarriak izan baitaitezke beste kasu askotan, kalkulu algebraikorako sistemen laguntza nahikoa ez denean ere; baina ez dirudi bidezkoa denik azterketa bateko zailtasun bakarra ekuazio batekin erabili behar den errezeta aurkitzea izatea.

Gainera, ez dut uste «Ekuazio diferentzialak ...-en bidez» deitutako liburu askotako ikuspuntua egokiena denik. Hemen ekuazio diferentzialak irakatsi nahi dizkiogu ikasleari eta ez nola erabili programatxo bat, adibidez ekuazio lineal baten koefizienteak eskatzen dizkiguna: oso erraza bada ere, edozein ekuazioren soluzioa eskatzeko sintaxia ez da asko zailagoa eta aipaturiko programa ez du ezertarako balioko hurrengo ataletan.

Laburbilduz, matematikaren eguneroko praktikan erabili behar dugun tresna behar-beharrezkoa dugu kalkulu sinbolikoa. Bai klasean eta bai azterketetan ere, horrelako sistema bat erabili beharko luke ikasleak: askotan kalkulu erraz aspergarrietan ematen den astia hobeto erabil liteke gauza interesgarri gehiago ikasteko. Azpimarratu nahi dut, hala ere, kalkulu sinbolikoa era zuzenean erabiltzen irakatsi egin behar zaiola ikasleari, uste baino errazago huts eragin baitetzake¹. Zorionez, irakasgai honetan zeregin hori errazagoa izaten da, lorturiko emaitza askotan modu zuzenean egiazta baitaiteke (hura aurkitzeko erabilitako programaz baliatuz ere egin daitezkeen) kalkulu labur baten bidez. (Amaierako egiaztapena egitea, emaitza aurkitzeko erabili den hasierako kalkulua baino askoz arinagoa izateaz gain, oso komenigarria dela beti ikasi beharko luke ikasleak.) Egiaztapen zuzen hau ezinezkoa denean ere, sarri askotan programa berbera erabil daiteke kasu berezietan zenbakizko soluzioa aurkitzeko eta metodo zehatzen bidez lorturiko emaitzarekin erkatzeko. Horrela, azken honetan egindako hutsak aurkitzen dira askotan edo, bestela, gure kalkuluan dugun konfiantza handitu egiten da, nahiz eta bere zehaztasunaren benetako frogapena ez den.

Ez dut esan nahi zenbakizko metodoak kalkulu zehatzak egiaztatzeko tresna lagungarriak

¹Ikus, adibidez, [41] artikulua.

baino ez direla; aitzitik, gaurko zientzia eta teknologiaren eguneroko praktikan ebazpen-metodo garrantzitsuenak dira, dudarik ez. Ondorioz, eta hauen erabilera ere bistakoa ez denez, azterketa sakona merezi dute; baina, hori hobeto egin daiteke zenbakizko kalkulari buruzko irakasgai batean. Hemen ekuazio diferentzial arruntak ebazteko erabiltzen direnetarako sarrera bat egitera mugatuko gara. Zorionez, integral bat kalkulu sinbolikoaren bidez ebazteko Risch-en algoritmoa ezagutzea beharrezkoa ez den bezalaxe, ez da ezinbestekoa zenbakizko kalkulua ondo menperatzea ekuazio eta sistema diferentzialen zenbakizko soluzioa programaziorik gabe ematen duten programa batez baliatzeko. Horrelako programaren bat erabiltzera bultzatu behar ditugu ikasleak, testuan agertzen diren irudiak egiazta ditzaten. Adibidez, oso komenigarria izaten da fase-espazioak marraztea, 8. gaiko metodoen bidez lortutako ondorio kualitatiboekin konparatzeko.

Egin dudan aukera bat azaldu nahi nuke: notazio matematiko anglosaxoia erabiltzen dut, adierazpen matematikoetan estandar bat, adostasun esplizitu baten ondorioa ez bada ere, guztiz komenigarria dela uste baitut. Beraz, '0, 1'-en ordeaz '0.1' idazten dut, 'cosec'-en ordeaz 'csc', eta abar. Horrela egiteko erabaki eztabaidagarri honen arrazoi nagusia, ikasleak ia artikulua eta testu profesional guztietan aurkituko duen notazioa ezagutzen hastea da. Oso oker ez banaiz, zientzia anglosaxoiaren ahalmen sortzaile eta eragin izugarriari esker, gaurko praktikan notazio unibertsala da hau, hizkuntza zientifikoarekin gertatzen den bezalaxe. (Nahikoa da gogoratzea nolakoa den kalkulagailu guztietako notazioa eta hamarrenak bereizteko koma erabiltzen duten programa 'bertakotu' eskasak askotan arrotzak iruditzen zaizkigula arrazoi horrexegatik.) Bi notazio erabiltzen direnean, nire ustez doiagoa dena aukeratu dut, gehien erabiltzen dena ez bada ere: logaritmo nepertarra ' $\ln x$ ' da (eta ez ' $\log x$ ') eta 'arcsinh x ' nahiago izan dut ' $\sinh^{-1} x$ ' baino.

Halabeharrezko eskerren zerrendaren hasieran, urteetan zehar erabili ditudan testu bikainak daude: onenak bibliografian aipatzen dira. Hainbat aldiz gai hau bion artean irakatsi ondoren, nire ideia eta aurkezte-modu asko Manu Vallerekin izandako elkarrizketen ondorioak dira eta berari eskertu nahi diot testu honen aitzindariak ziren oharretako zenbait hutsen zuzenketa. Martín Rivas lagunari zor dizkiot, besteak beste, 8.33 eta 8.34 irudiak. Beti bezala, Martxel Ensunzaren iritziak oso baliagarriak izan dira zenbait hitz eta esapide euskaratzean. Ohiko beste zehaztasun guztiak —geratzen diren hutsak nire ezjakintasun edo nagikeriaren ondorio hutsak direla, eta abar— esan gabe doaz, eta irakurle jakintsuak ulertu eta onartuko dituela espero dut.

Leioa, 1997ko ekaina–2000ko otsaila

AURKIBIDE OROKORRA

HITZAURREA	v
IRUDIEN ZERRENDA	xv
OHAR BIOGRAFIKOEN ZERRENDA	xix
1 Oinarrizko kontzeptuak	1
1.1 Ekuazio diferentzialak	1
1.2 Soluzio motak	3
1.3 Soluzioaren existentzia	5
1.4 Soluzioaren bakartasuna	6
1.5 Ebazpen-metodoak	7
1.6 Problemak	10
2 Lehen ordenako ekuazioak	13
2.1 Esangura geometrikoa	13
2.1.1 Kurba-familia uniparametrikoa	13
2.1.2 Kurba-kongruentzia	14
2.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema	16
2.3 Ekuazio zehatzak	17
2.4 Faktore integratzailea	19
2.5 Ekuazio banangarriak	21
2.6 Faktore integratzaile bereziak	21
2.6.1 y -ren menpekotasunik gabeko faktore integratzaileak	21
2.6.2 x -ren menpekotasunik gabeko faktore integratzaileak	22
2.6.3 $\mu(x, y) = g(h(x, y))$ egiturako faktore integratzaileak	23
2.7 Ekuazio linealak	23
2.8 Transformazio-metodoak	24
2.9 Ekuazio homogeneoak	24
2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak	25
2.11 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ egiturako ekuazioak	25
2.12 Bernoulli-ren ekuazioak	26
2.13 Riccati-ren ekuazioak	26
2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak	27
2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak	28
2.15.1 $F(y') = 0$ egiturako ekuazioak	31
2.15.2 $x = g(y')$ egiturako ekuazioak	31

2.15.3	$y = g(y')$ egiturako ekuazioak	31
2.15.4	Clairaut-en ekuazioak	32
2.15.5	Lagrange-ren ekuazioak	33
2.15.6	Deribazio-metodoa	34
2.16	Problemak	35
3	Goi-ordenako ekuazioak	39
3.1	Esangura geometrikoa	39
3.2	Existentzia eta bakartasunaren teorema	40
3.3	Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna	40
3.4	Ordena-beheratzea	40
3.4.1	Menpeko aldagai gabeko ekuazioak	41
3.4.2	Ekuazio autonomoak	41
3.4.3	Ekuazio x -rekiko ekidimentsionalak	42
3.4.4	Ekuazio y -rekiko ekidimentsionalak	43
3.4.5	Ekuazio zehatzak	44
3.5	Funtzioen menpekotasun lineala	44
3.6	Ekuazio diferentzial linealak	46
3.7	Ekuazio lineal homogeneoak	46
3.7.1	Wronskiarra eta menpekotasun lineala	47
3.7.2	Ekuazio homogeneoaren soluzio-espazioa	47
3.7.3	Oinarrizko soluzio-sistema eta ekuazio lineal homogeneoa	49
3.7.4	Liouville-ren formula	49
3.7.5	Ekuazio homogeneoaren ebazpena	50
3.8	Ekuazio lineal osoak	52
3.8.1	Konstanteen aldakuntzaren metodoa	53
3.8.2	Cauchy-ren metodoa	55
3.9	Oinarrizko soluzioa	57
3.9.1	Heaviside-ren unitate-maila funtzioa	57
3.9.2	Deribatu orokortua	57
3.9.3	Dirac-en delta	58
3.9.4	Limite orokortua	58
3.9.5	Dirac-en deltarantz jotzen duten segidak	60
3.9.6	Oinarrizko soluzioa	61
3.10	Koefiziente konstanteetako ekuazio homogeneoak	62
3.11	Koefiziente konstanteetako ekuazio osoak	64
3.11.1	Koefiziente indeterminatuen metodoa	65
3.11.2	Alderantzizko eragilearen metodoa	67
3.12	Cauchy eta Euler-en ekuazioak	69
3.13	Problemak	71
4	Ekuazio-sistemak	77
4.1	Definizioa eta propietate orokorrak	77
4.1.1	Sistema dinamiko autonomoak	79
4.2	Ebazpen-metodoak	80
4.2.1	Ekuazio batera laburtzea	81
4.2.2	Lehen integralak	81

4.3	Lehen ordenako sistema linealak	83
4.4	Sistema lineal homogeenak	84
4.4.1	Soluzio-espazioa	85
4.4.2	Oinarriko matrizeak	86
4.5	Sistema lineal osoak	88
4.6	Koefiziente konstantetako sistema linealak	89
4.6.1	Matrize baten esponentziala	90
4.6.2	Sistema homogeenaren ebazpena	91
4.6.3	Sistema osoaren ebazpena	94
4.7	Problemak	96
5	Laplace-ren transformazioa	101
5.1	Definizioa	102
5.1.1	$F(\alpha)$ espazioa	102
5.1.2	Existentzia eta propietate asintotikoak	103
5.2	Propietateak	103
5.2.1	Linealtasuna	103
5.2.2	Desplazamenduaren teorema	104
5.2.3	Eskala-aldaketa	104
5.2.4	Deribatuak eta berretura-biderkatzaileak	105
5.3	Alderantzizko transformazioa	105
5.4	Konboluzioa	107
5.5	Funtzio orokortuen transformazioa	108
5.6	Koefiziente konstantetako ekuazio linealak	109
5.6.1	Zeinahi ordenatuko ekuazio bakarra	109
5.6.2	Ekuazio-sistemak	110
5.6.3	Osziladoreak	110
5.6.4	Funtzio zatikako jarraituak	111
5.7	Problemak	112
6	Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena	117
6.1	Berretura-serieen berrikusketa	117
6.2	Serieen bidezko soluzioak	119
6.2.1	Puntu arruntak eta singularrak	119
6.3	Puntu arruntak	120
6.3.1	Hermite-ren ekuazioa	121
6.4	Bessel-en ekuazioa	124
6.5	Frobenius-en metodoa	128
6.5.1	Teoremaren frogapena	130
6.5.2	Oharrak	132
6.5.3	Indize bikoitza	133
6.5.4	Gai logaritmikoa	134
6.5.5	Gai logaritmikorik gabeko adibidea	135
6.5.6	Serieen batuketa	136
6.6	Problemak	138

7	Metodo hurbilduak	141
7.1	Magnitude-ordenaren ikurra	142
7.2	Berretura-serieak	142
7.2.1	Taylor-en seriearen metodoa	143
7.2.2	Koefiziente indeterminatuen metodoa	144
7.3	Hurrenez hurreneko hurbilketen Picard-en metodoa	144
7.4	Perturbazio-metodoak	145
7.4.1	Perturbazio erregularrak	146
7.4.2	Van der Pol-en osziladorea	146
7.4.3	WKB metodoa	149
7.5	Zenbakizko metodoak	150
7.5.1	Euler-en metodoa	151
7.5.2	Heun-en metodoa	153
7.5.3	Erdiko puntuaren metodoa	154
7.6	Runge eta Kutta-ren metodoak	155
7.7	Urrats anitzeko metodoak	156
7.8	Estrapolazio-metodoak	158
7.9	Metodo inplizituak	159
7.10	Problemak	160
8	Egonkortasunaren teoria	163
8.1	Egonkortasunaren kontzeptua	164
8.2	Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak	166
8.3	Sistema dinamiko kontserbakorrak	169
8.4	Sistema quasilinealak	170
8.5	Egonkortasun lineala	171
8.5.1	Erro karakteristikiko erreal desberdinak	172
8.5.2	Erro karakteristikoko konplexuak	174
8.5.3	Erro karakteristikoko erreal berdinak	177
8.5.4	Laburpena: Puntu finkoen sailkapena	178
8.6	Fase-ibilbideak	180
8.7	Sistema mekaniko unidimentsionalak	181
8.8	Liapunov-en funtzioak	187
8.8.1	Oharrak	188
8.8.2	Teoremaren frogapena	189
8.8.3	Adibideak	189
8.8.4	Sistema mekaniko unidimentsional iraungikorak	191
8.8.5	Sistema mekaniko unidimentsional kontserbakorrak	191
8.9	Zentro ez-linealak	192
8.9.1	Sistema dinamiko kontserbakorrak	192
8.9.2	Sistema dinamiko hamiltondarrak	193
8.9.3	Sistema dinamiko itzulgarriak	193
8.10	Muga-zikloak	194
8.11	Dimentsio gehiago	197
8.12	... eta kaos determinista	199
8.12.1	Hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra	200
8.12.2	Liapunov-en berretzaileak	201

8.12.3	Okinaren transformazioa	202
8.12.4	Erakarle bitxiak	203
8.13	Problemak	206
9	Sturm eta Liouville-ren mugalde-problemak	215
9.1	Funtzioen biderketa eskalarra	216
9.2	Ekuazio adjuntua	218
9.3	Sturm eta Liouville-ren problemak	219
9.4	Fourier-en serieak	223
9.5	Sturm eta Liouville-ren problema inhomogeneoa	224
9.6	Green-en funtzioa	225
9.7	Problemak	229
ERANSKINAK		
A	Oinarrizko teoremak	235
A.1	Picard-en teorema	235
A.1.1	Soluzioaren existentzia	236
A.1.2	Soluzioaren bakartasuna	237
A.1.3	Hastapen-baldintzen menpekotasun jarraitua	238
A.2	Soluzioen konparazioa	238
A.3	Soluzioen existentzia globala	239
B	Metodo sinbolikoak	241
B.1	Metodo zehatzak	241
B.2	Laplace eta Fourier-en transformazioak	247
B.3	Metodo hurbildu analitikoak	250
B.3.1	Taylor-en seriearen metodoa	250
B.3.2	Picard-en metodoa	251
B.3.3	Perturbazio-metodoak	252
B.4	Zenbakizko metodoak	255
B.5	Bestelako kalkuluak	257
B.5.1	Ekuazio algebraikoak	257
B.5.2	Matrizeen esponentziala	258
B.5.3	Balio eta bektore propioak	258
B.5.4	Funtzio bereziak	259
B.5.5	Serieen batuketa eta integralen ebazpena	259
B.5.6	Serie-garapenak	260
B.5.7	Fourier-en serieak	261
B.5.8	Diferentzia finituetako ekuazioak	263
C	Metodo analitiko zehatzen laburpena	265
C.1	Lehen ordenako deribatu askatuko ekuazioak	266
C.2	Lehen ordenako deribatu askatugabeko ekuazioak	268
C.3	Ekuazio linealak	269
C.3.1	Ekuazio lineal homogeneoak	269
C.3.2	Ekuazio lineal osoak	271
C.4	Ekuazio ez-linealak	271

C.5	Ekuazio linealen sistemak	272
C.5.1	Ekuazio linealen sistema homogeenak	272
C.5.2	Ekuazio linealen sistema osoak	273
C.6	Ekuazio ez-linealen sistemak	273
D	Funtzio batzuen definizioa eta propietateak	275
D.1	Zenbaki konplexuak	275
D.2	Cauchy-ren balio nagusia	277
D.3	Lambert-en funtzioa	278
D.4	Errore-funtzioa	279
D.5	Euler-en gamma funtzioa	280
D.6	Azpifaktorial funtzioa	281
D.7	Esponentzial-integrala	282
D.8	Integral eliptikoak	283
D.9	Bessel-en funtzioak	285
D.10	Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorra	286
D.11	Gauss-en funtzio hipergeometrikoa	287
D.12	Polinomio ortogonalak	288
D.12.1	Chebyshev-en polinomioak	289
D.12.2	Hermite-ren polinomioak	290
D.12.3	Laguerre-ren polinomio orokortuak	291
D.12.4	Legendre-ren polinomioak	292
E	Laplace-ren transformatuen taulak	293
E.1	Laplace-ren transformazioaren propietateak	294
E.2	Limiteetako balioak	295
E.3	Oinarritzko funtzioen transformatuak	296
E.4	Funtzio berezi batzuen transformatuak	297
F	Fourier-en transformatuen taulak	299
F.1	Fourier-en transformazioaren propietateak	300
F.2	Fourier-en transformatuak	301
G	Ariketa batzuetarako iradokizunak eta soluzioak	303
	BIBLIOGRAFIA	317
	AURKIBIDE ALFABETIKOA	321
	HIZTEGIA	333

IRUDIEN ZERRENDA

2.1	Kurba-kongruentzia, deribatua eta tangentearen malda.	15
2.2	Kongruentzia eta norabide-eremua.	16
2.3	Abszisa-ardatza ukitzen duten zirkunferentziak.	16
2.4	Kurba-sorta baten inguratzailea eta puntu anizkoitzak.	27
2.5	Orbita eliptikoak, perizentroak eta apozenetroak.	30
3.1	Heaviside-ren unitate-maila funtzioa.	57
3.2	Gausstarren familia.	59
3.3	$f(t)$ indarra bulkaden segida modura.	62
3.4	Funtzio zatikako jarraitua.	74
4.1	Sistema autonomo baten kongruentzia eta bere proiektzioa fase-espazioan.	79
4.2	(4.21) sistemaren soluzio bat eta bere proiektzioa fase-espazioan.	80
4.3	RLC zirkuitua.	97
5.1	Integrazio-eremuak	108
6.1	Ordena osoko J_n funtzio batzuk.	126
6.2	Ordena osoko Y_n funtzio batzuk.	127
7.1	Mendetako gaiak dauzkan hurbilketa.	147
7.2	Mendetako gairik gabeko hurbilketa.	149
7.3	Euler-en metodoa.	152
7.4	Euler-en metodoa zenbakizko koadraturan.	152
7.5	Heun-en metodoa.	153
7.6	Trapezioen metodoa.	153
7.7	Erdiko puntuaren metodoa.	154
7.8	Erdiko puntuaren metodoa zenbakizko koadraturan.	154
8.1	Oreka-puntu (a) egonkorra, (b) asintotikoki egonkorra, (c) ezegonkorra.	165
8.2	Adarkatze-diagrama $\dot{x} = ax$ ekuazioaren kasuan.	165
8.3	Sistema autonomoaren soluzio orokorra eta fase-espazioan duen proiektzioa.	166
8.4	(8.9) sistemaren soluzio bat eta fase-espazioan duen proiektzioa.	167
8.5	Fase-espazioko eremu baten eboluzioa.	169
8.6	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = -5/2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ direnean.	173
8.7	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = 5/2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ direnean.	173

8.8	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = r = -1$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.	174
8.9	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 3, r = -1$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.	175
8.10	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1, r = 0$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.	176
8.11	(8.57)–(8.58) sistemaren fase-espazioa, (a) $n = 2$ eta (b) $n = 3$ balioekin.	176
8.12	(8.61)–(8.62) sistemaren fase-espazioa, (a) $\epsilon = 0$ eta (b) $\epsilon = 1$ kasuetan.	177
8.13	(8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1, r = -2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.	178
8.14	Puntu finkoen sailkapena.	179
8.15	Descartes-en orria eta (8.69) sistemaren fase-espazioa.	180
8.16	(8.78) sistemaren energia potentziala, eta fase-espazioa $\gamma = 0.1$ kasuan.	183
8.17	Minimo baten inguruko energia-diagrama.	184
8.18	(8.78) sistemaren energia potentziala eta fase-espazioa $\gamma = 0$ baliorako.	184
8.19	Goierpinaren barietate egonkorra eta ezegonkorra.	185
8.20	Penduluaren energia potentziala eta fase-espazioa.	186
8.21	Zenbait fase-ibilbide eta dagozkien U funtzioaren balioen eboluzioa.	188
8.22	(8.94) sistemaren fase-espazioa.	190
8.23	(8.104) sistema dinamikoaren fase-espazioa.	193
8.24	(8.107) sistemaren fase-ibilbide bat eta bere «bikia».	194
8.25	(8.108)–(8.109) sistemaren fase-espazioa, $\lambda = -0.01$ baliorako.	195
8.26	(8.110) ekuazioaren adarkatze-diagrama.	195
8.27	(8.108)–(8.109) sistemaren fase-espazioa, $\lambda = 1/2$ baliorako.	196
8.28	Van der Pol-en osziladorearen muga-zikloa $\epsilon = 2$ baliorako.	197
8.29	(8.114)–(8.116) sistemaren proiektzioak eta Poincaré-ren sekzioa.	198
8.30	Lorenz-en erakarleko orbita baten proiektzioak.	200
8.31	Hasieran oso hurbil dauden bi soluzio.	200
8.32	Rössler-en erakarleko orbita baten proiektzioak.	201
8.33	Okinaren transformazioa.	202
8.34	Rössler-en erakarlearen egitura fraktala.	203
8.35	Duffing-en erakarlearen estroboskopia-sekzioak.	203
8.36	Duffing-en erakarlearen estroboskopia-sekzioa $t \bmod 2\pi = 0$ kasuan.	204
8.37	Duffing-en erakarlearen estroboskopia-sekzioaren handipenak.	204
8.38	Cantor-en multzo hirutarraren eraikuntza.	209
8.39	Burdin hari leunean sarturiko alea.	209
8.40	Mendate baten inguruko fase-espazioa.	210
8.41	8.40 problemako sistema mekanikoa.	212
8.42	8.42 problemako $f(y)$ funtzioaren grafikoa.	212
9.1	$f(x) = \theta(x) \sin x$ funtzioa $(-\pi, \pi)$ tartean.	223
9.2	Zerra funtzioa.	230
D.1	Zenbaki konplexu baten forma kartesiarra eta polarra.	275
D.2	Lambert-en funtzioaren adar nagusia zuzen errealean.	278
D.3	Errore-funtzioak.	280
D.4	Euler-en gamma funtzioa zuzen errealean.	281

D.5	Esponentzial-integrala.	282
D.6	Sinu- eta kosinu-integralak.	283
D.7	Integral eliptiko osoak.	284
D.8	Ordena osoko Bessel-en funtzio batzuk.	285
G.1	φ_0 eta φ_2 funtzioak.	305
G.2	4.4 ariketako fase-espazioa.	307
G.3	5.23 ariketako indarra eta soluzioa.	308
G.4	(8.4) ekuazioaren adarkatze-diagrama.	310
G.5	Osziladore harmonikoaren fase-espazioa.	310
G.6	(8.70) sistemaren fase-espazioa.	311
G.7	9.2 irudiko funtzioaren Fourier-en seriea: 64 gai erabili dira.	314

OHAR BIOGRAFIKOEN ZERRENDA

Abel, Niels Henrik	49
Abraham, Max	38
Adams, John Couch	157
Bernoulli, Jacob	26
Bertrand, Joseph Louis Francois	210
Bessel, Friedrich Wilhelm	124
Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp	199
Cardano, Girolamo	141
Cauchy, Augustin Louis	55
Cayley, Arthur	91
Chebyshev, Pafnuty Lvovich	138
Clairaut, Alexis Claude	32
D'Alembert, Jean Le Rond	50
De Moivre, Abraham	276
Descartes, René	180
Dirac, Paul Adrien Maurice	58
Einstein, Albert	3
Euler, Leonhard	63
Ferrari, Ludovico	141
Fibonacci, Leonardo Pisano	74
Fourier, Jean Baptiste Joseph	222
Fredholm, Erik Ivar	225
Frobenius, Ferdinand Georg	119
Gauss, Johann Carl Friedrich	137
Gibbs, Josiah Willard	230
Green, George	218
Hamilton, William Rowan	168
Heaviside, Oliver	57
Hermite, Charles	122
Hilbert, David	217
Hopf, Heinz	195
Jacobi, Karl Gustav Jacob	108
Kepler, Johannes	161
Kronecker, Leopold	217
Kummer, Ernst Eduard	140
Kutta, Martin Wilhelm	155
Lagrange, Joseph-Louis	33

Laguerre, Edmond Nicolas	139
Landau, Lev Davidovich	199
Laplace, Pierre-Simon	102
Lebesgue, Henri Léon	58
Legendre, Adrien-Marie	138
Lerch, Mathias	106
Leibniz, Gottfried Wilhelm von	88
L'Hôpital, Guillaume Francois Antoine Marquis de	160
Liapunov, Aleksandr Mikhailovich	164
Liouville, Joseph	52
Lipschitz, Rudolf Otto Sigismund	235
Lissajous, Jules Antoine	311
Lorentz, Hendrik Antoon	38
Maxwell, James Clerk	3
Newton, Isaac	2
Ostrogradski, Mikhail Vasilevich	49
Parseval des Chênes, Marc-Antoine	230
Peano, Giuseppe	7
Picard, Charles Émile	144
Poincaré, Jules Henri	163
Poisson, Siméon Denis	231
Riccati, Jocopo Francesco	26
Richardson, Lewis Fry	158
Riemann, Georg Friedrich Bernhard	58
Rodrigues, Olinde	124
Runge, Carle David Tolmé	155
Schrödinger, Erwin	2
Schwarzschild, Karl	212
Simpson, Thomas	155
Stirling, James	280
Sturm, Jacques Charles Francois	220
Taylor, Brook	143
Torricelli, Evangelista	11
Vandermonde, Alexandre Théophile	306
Verhulst, Pierre Francois	206
Volterra, Vito	113
Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm	230
Wronski, Josef Hoëné de	45

1. GAIA

Oinarrizko kontzeptuak

*How can it be that mathematics,
being after all a product of human thought independent of experience,
is so admirably adapted to the objects of reality?*
Albert Einstein

Lehen gai honetan kontzeptu orokor batzuk ikusten dira, hurrengo gaietan zehaztasun handiagoz aztertuko direnak. Hasteko, ekuazio diferentzialak zer diren ikusi ondoren, lehenengo sailkapen bat egingo dugu. Gero, soluzioak nolakoak izan daitezkeen aztertuko dugu eta fisikan agertzen diren bi problema nagusien soluzioaren existentzia eta bakartasunari buruzko lehen oharak egingo ditugu. Kapituluak amaitzeko, ekuazio diferentzialak ebazteko metodoak sailkatuko dira.

1.1 Ekuazio diferentzialak

Ekuazio arrunt batean,

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1.1}$$

kasuan adibidez, ez da ezezagunaren deribaturik agertzen. Testu honetan, horrelako ekuazio bat **finitua** dela esango dugu, ekuazio diferentzialetatik desberdintzeko. Ezezagunaren deribaturen bat agertzen bada, **ekuazio diferentziala** dugu, ordea. Ondokoa da adibide erraza:

$$x + yy' = 0. \tag{1.2}$$

Hemen eta aurrerantzean, ohitura hedatuari eutsiz, x aldagaiarekiko deribatua adierazteko ' ikurraraz baliatuko gara:

$$y' \equiv \frac{dy}{dx}. \tag{1.3}$$

x -rekiko deribatuak kalkulatzeko ditugunez, x hori **aldagai independentea** dela esango dugu eta ezezaguna (y kasu honetan) **menpeko aldagaia**. (1.2) ekuazioan aldagai independente bakarra dagoenez eta deribatua arrunta denez, **ekuazio diferentzial arrunta** dela esaten da, eta horrelakoa da pendulu matematikoaren ekuazioa ere:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \tag{1.4}$$

Azken adierazpen honetan aldagai independentea t da eta, mekanikaren ohiturari jarraituz, puntu bat erabili dugu denborarekiko (edo testuinguru zabalagoetan t aldagaiarekiko) deribatu bakoitza adierazteko:

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}. \quad (1.5)$$

Hemendik aurrera (1.3) eta (1.5) laburdurez baliatuko gara, deribatuaren notazio osoa noizean behin erabiltzen badugu ere. Halaber, adibide ugari fisikatik hartzea ez litzateke harrizkoa izan beharko, testu hau norentzat idatzi den kontuan hartzen badugu eta, batez ere, ekuazio diferentzialen historiak eta erabilerek fisikarekin duten lotura estua gogoratzen badugu. Nahikoa da Newton-en¹ ekarpenez edota ekuazio diferentzialesk fisikarien tresna matematikoen artean duten zeregin nagusiaz oroitzea.

Elkarrekintza indar-eremu newtondar baten ondorioa denean, bi gorputzen sistemaren higadura erlatiboaren Newton-en ekuazioa ere arrunta da:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{r}. \quad (1.6)$$

Baina kasu honetan bektoreek hiruna osagai dauzkatenez, **ekuazio diferentzialen sistema** bat dugu funtsean,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.7)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (1.9)$$

menpeko aldagaiak x , y eta z direlarik.

Deribatu partzialak edukitzeak definitzen ditu **deribatu partzialetako ekuazio diferentzialak**. Adibidez, Schrödinger-en² ekuazioan,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi, \quad (1.10)$$

ψ uhin-funtzioan agertzen diren aldagai independenteak hauexek dira: t denbora eta hiru koordenatu espazialak, \mathbf{r} bektorean eta ∇^2 laplacetarrean agertzen direnak.



¹ **Isaac Newton** 1642ko Eguberrian (1643ko urtarrilaren 4an, egutegi gregoriarrean) jaio zen Woolsthorpe-n (Ingalaterran) eta 1727ko martxoaren 31n hil zen Londres-en. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1687ko maisulana, inoiz idatzi den zientzia-libururik garrantzitsuen eta eraginkorrena da inolako dudarik gabe. Bertan mekanikaren eta grabitazio unibertsalaren teoriaren oinarriak ezarri zituen. Leibniz-ekin batera kalkulu diferentziala sortu zuen, **fluxioen kalkulu** izenaz.

Optikan egindako ekarpenak ere apartekoak dira: errefrakzio-teleskopioa eta 1704ko *Opticks* liburu eraginkorra, batik bat. Bere izena beste testuinguru askotan ere agertzen da: zenbakizko koadraturan, binomioaren berreturaren garapenean eta Barrow-en arauan, adibidez. Barrow ordezkatu zuen Cambridge-n *Lucasian Professor* gisa.



² **Erwin Schrödinger** (1887-08-12, Viena; 1961-01-04, Alpbach, Austria). 1926an proposatu zuen uhin-mekanika, Heisenberg-ek 1925ean aurkeztu zuen matrize-mekanikarekin batera mekanika kuantikoaren sorrera dena. Ez zuen inoiz ere Born-en eta Kopenhageko eskolaren uhin-funtzioaren probabilitate-interpretazioa onartu. Erradioaktibitatea, kristal-sareen dinamika, fisika atomikoa eta erlatibitate orokorra ere landu zituen. 1933ko Nobel saria eskuratu zuen Dirac-ekin batera.

Ekuazio diferentzial baten **ordena** bertan agertzen den deribazio-ordenarik altuena denez, penduluaren, Newton-en eta Schrödinger-en ekuazioak bigarren ordenakoak dira, fisikaren oinarriko ekuazio gehienak bezalaxe, baina (1.2) ekuazioa lehen ordenakoa da. Orobat, Maxwell-en³ ekuazioek, deribatu partzialetako lehen ordenako ekuazio diferentzialen sistema bat osatzen dute, menpeko bi aldagai bektorial (edota sei aldagai eskalar) dituena:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{J}. \quad (1.12)$$

Schrödinger-en eta Maxwell-en ekuazioek gainezarmenaren printzipioa betetzen dute: soluzioen batura soluzioa da. Ikuspuntu matematikotik propietate hau ekuazioen izaera **linealean** datza: ezezagunak konbinazio linealetan agertzen dira eta koefizienteak konstanteak edo aldagai independenteen funtzio hutsak dira. Agertzen den sinu funtzioa lineala ez denez, pendulu matematikoaren ekuazioa ez da lineala, oszilazio txikien hurbilketan —osziladore harmonikora laburtzen denean, alegia— izan ezik:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1.13)$$

Era berean (1.6) ekuazioa ez da lineala eta gauza bera gertatzen da

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.14)$$

moduan idazten diren Einstein-en⁴ ekuazioekin, zeren, itxura erraza izan arren, notazio laburrak oso izaera ez-lineala estaltzen baitu.

Ez da pentsatu behar fisikan agertzen diren ekuazio guztiak diferentzialak edota finituak direnik. Adibidez, ezezagunak edo euren deribatuak integral-ikurraren azpian ager daitezke, 5.12 eta 5.16 problemetan ekuazio integro-diferentzialen kasu errazean ikusiko dugun bezala. Bestalde, 5.31 probleman ekuazio diferentzial funtzional errazenak aztertzen dira: ekuazio atzeratuak, zeinetan ezezagunak eta euren deribatuak ez diren agertzen aldagai independentearen balio bakar baterako.

Hemendik aurrera ekuazio diferentzial arruntak kontsideratuko ditugu soilik.

1.2 Soluzio motak

Hemen aztertzen diren kontzeptuak sistemetara erraz orokortzen badira ere, notazioa errazteko edozein n ordenatako ekuazio bakarra kontsideratzera mugatuko gara atal honetan. Horrelako ekuazio bat beti idatz daiteke ondoko eran, F funtzio egokiaren bidez:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.15)$$



³ **James Clerk Maxwell** (1831-06-13, Edinburgh, Eskozia; 1879-11-05, Cambridge, Ingalaterra). Saturnoko eraztunak egonkorra izateko partikula askok osatu behar zituztela aurrean zuen. Boltzmann-ekin batera teoria zinetikoa sortu zuen. Elektromagnetismoaren legeak, bere ekarpen eder paregabea, 1873ko *A Treatise on Electricity and Magnetism* liburuan aditzera eman zituen. Argia uhin-fenomenoa zela aurrean zuen, eta geroago Hertz-ek laborategian frogatu zuen hipotesi handi hau.



⁴ **Albert Einstein** (1879-03-14, Ulm, Alemania; 1955-04-18, Princeton, AEB). 1905 urtean egindako ekarpen bakoitzak ohorezko aipamena merezi du fisikaren historian, hauexek izan baitziren: efektu fotoelektrikoa azaltzeko egin zuen argi-kuantuaren hipotesia (1921eko Nobel sariaren arrazoi ofiziala izan zena), higidura browndarrari buruzko bi lanak, erlatibitate berezia sortu zuen artikulua eta masa eta energiaren arteko baliokidetasuna ezarri zuena. 1906an bero espezifikoko aztertean egoera solidoari buruzko teoria kuantikoaren lehen lana argitaratu zuen. 1907an baliokidetasunaren printzipioa azaldu zuen, horrela 1916an erlatibitatearen teoria orokorraren burutzapenarekin amaituko ziren lanak hasten zirela.

Aldagai independentearen funtzio bat,

$$y = f(x), \quad (1.16)$$

(1.15) ekuazioan ordezkatzean azken hau identitate bihurtzen bada I tarte batean,

$$F \left[x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x) \right] = 0, \quad \forall x \in I, \quad (1.17)$$

f funtzioa (1.15) ekuazioaren **soluzio esplizitua** dela esaten da. I delakoa soluzioaren **definizio-tartea** da.

1.1 ARIKETA Egiaztatu $y = \sqrt{1-x^2}$ funtzioa (1.2) ekuazioaren soluzio esplizitua dela. Zein da beraren definizio-tartea?

Ekuazio diferentzialen soluzioetan menpeko aldagaia ez da beti askaturik agertzen. Izan ere, askotan errazagoa izaten da **soluzio implizitu** bat aurkitzea, hau da, ekuazio finitu bat,

$$g(x, y) = 0, \quad (1.18)$$

honako propietate hau betetzen duena: bere soluzio esplizitu guztiak $-g(x, f(x)) = 0, \forall x \in I$ baldintza betetzen duten $y = f(x)$ guztiak, alegia— ekuazio diferentzialaren soluzio esplizituak dira. Soluzio implizituak erabilgarriak badira, oro har (1.18) ekuazioaren soluzio esplizituak kalkulatu behar ez direlako da, zeren eta ekuazio diferentzialaren soluzioak diren bezala ikusteko nahiko baita, (1.18) adierazpenaren ondorioz, hurrengo baldintza identikoki betetzen den ala ez egiaztatzea:

$$F \left(x, y, -\frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y}, \dots \right) = 0. \quad (1.19)$$

Praktikan, askotan errazagoa izaten da ikustea ekuazio diferentziala identitate bihurtzen dela ekuazio finitua eta x -rekiko deribatzean lortzen direnak ordezkatzeko direnean.

1.2 ARIKETA Egiaztatu $x^2 + y^2 = 1$ ekuazioa —eskuineko gaia ezkerrekora eramanez (1.18) eran idazten dena— (1.2) ekuazioaren soluzio implizitua dela. Ez askatu y egiaztapena egiteko.

Hala eta guztiz ere, kalkulatu beharrik ez badago ere, (1.18) ekuazioak gutxienez soluzio bat eduki behar du, bestela **soluzio formala** izango bailitzateke.

1.3 ARIKETA Egiaztatu $x^2 + y^2 = -1$ funtzioa (1.2) ekuazioaren soluzio formala dela, soluzio konplexurik onartzen ez badugu behintzat.

Sarritan ekuazio finituen soluzio parametrikokoak esplizituak baino errazago lortzen direnez, ez da harrizkoa ekuazio diferentzialetan ere horrelako soluzioak erabilgarriak izatea. Parametro baten bi funtzio $-x = f(t)$ eta $y = g(t)$ — **soluzio parametrikoa** direla esaten da ekuazio diferentziala identitate bilakatzen badute t parametroaren tarte batean zehar:

$$F \left(f(t), g(t), \frac{g'(t)}{f'(t)}, \dots \right) = 0. \quad (1.20)$$

1.4 ARIKETA Egiaztatu $x = \cos t, y = \sin t$ adierazpenek (1.2) ekuazioaren soluzio parametrikoko bat osatzen dutela.

1.3 Soluzioaren existentzia

Soluziorik gabeko ekuazio diferentzialak aurkitzea ez da zaila: nahikoa da $(y')^2 + 1 = 0$ ekuazio diferentzialak, $y^2 + 1 = 0$ ekuazio finituak bezalaxe, ez duela soluzio errealik ikus-tea. Praktikan, ordea, ekuazio diferentzialek soluzio ugari dauzkate. Bereziki, **soluzio-familia parametrikokoak** askotan agertzen dira. Horrelako familia baten adierazpenean aldagai independentearekiko konstanteak diren parametroak daude, parametro horien balioen aukera bakoitzeko ekuazioaren soluzio bat lortzeko moduan. Familia bera ere esplizitua, implizitua zein parametrikoa izan daiteke, dauzkan soluzioen izaeraren arabera. (Bai, badaude soluzio parametrikoen familia parametrikokoak!)

1.5 ARIKETA Egiaztatu ondoko adierazpenek (1.2) ekuazioaren soluzio-familia parametrikoko bana definitzen dutela:

$$y = \sqrt{C^2 - x^2}, \quad (1.21)$$

$$y = -\sqrt{C^2 - x^2}, \quad (1.22)$$

$$x^2 + y^2 = C^2, \quad (1.23)$$

$$x = C \cos t, \quad y = C \sin t. \quad (1.24)$$

Zein motatakoa da bakoitza?

Definizioz, n ordenako ekuazio diferentzial baten **soluzio orokorra** n parametro independente dauzkan soluzio-familia da. Adibidez, aurreko ariketan ikusi ditugun soluzio guztiak orokorrak dira, lehen ordenako ekuazio baten soluzio-familia izanik parametro bana daukatelako. Ariketa berak frogatzen du soluzio orokorra ez dela bakarria halabeharrez. Argi dago, beraz, soluzio orokorra ez dela beti soluzio guztien multzoa. (Baina, ikusiko dugunez, egia da ekuazio *lineal* baten soluzio orokorrean soluzio guztiak daudela.)

1.6 ARIKETA Froga ezazu $y^3 - 3xy = 2C$ ondoko ekuazioaren soluzio orokor implizitua dela:

$$y + (x - y^2) y' = 0. \quad (1.25)$$

Aurki al dezakezu dagokion soluzio orokor esplizitua?

Soluzio-familia baten parametroen balioen aukera bakoitzeko **soluzio partikular** bat lortzen da. Adibidez, 1.5 ariketako (1.21), (1.23) eta (1.24) soluzio orokorretan $C = 1$ eginez, lehenago ariketa batzuetan aztertu ditugun soluzio partikularrak berreskuratzen dira. Soluzio orokor batean ez dauden soluzioak, **singularrak** dira. Kontzeptu erlatiboa da hau: soluzio orokor bat aukeratuz gero, bere parametroei balio egokiak⁵ emanaz, beste soluzioen bat lortzea ezinezkoa bada, azken hau singularra dela esango dugu.

1.7 ARIKETA Egiaztatu

$$y = C(x - C) \quad (1.26)$$

ondoko ekuazioaren soluzio orokorra dela:

$$(y')^2 - xy' + y = 0. \quad (1.27)$$

Hurrengo soluzioen artean,

$$y = 0, \quad (1.28)$$

$$y = x - 1, \quad (1.29)$$

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad (1.30)$$

zeintzuk dira partikularrak eta zeintzuk singularrak?

⁵Oro har, hautazko C parametro baten $C \rightarrow \pm\infty$ limitea ere erabil daiteke. Izan ere, C -ren ordez $D \equiv 1/C$ parametro berria erabiliz, $D = 0$ egitearen berdina da limite hori.

1.4 Soluzioaren bakartasuna

Aurreko atalean ikusi dugunez, ekuazio diferentzialek infinitu soluzio dauzkate gehienetan. Ondorioz, bakoitzean aztertu nahi dugun problema fisiko konkretuari dagokion soluzioa zehazteko metodo baten beharrea gaude. Bestela esanda, problema ez dago ondo ezarrita, oro har, ekuazio diferentziala ezagutze hutsarekin: bestelako informazioa behar da. Erraz asma daitekeen bezala, behar diren datu (baldintza) osagarrien kopurua soluzio orokorrean agertzen diren hautazko konstanteen kopuruaren berdina —eta, beraz, ekuazioaren ordenaren berdina— izango da gehienetan.

Datu osagarri horiek emateko **hastapen-baldintzen problema** bat —**Cauchy-ren problema** izenez ere ezagutzen dena— planteatzen da askotan. Honelakoetan ekuazioaren ordena n bada, aldagai independentearen $x = x_0$ balio bat aukeratu ondoren, menpeko aldagaiak eta bere $n - 1$ lehen deribatuek puntu horretan dituzten balioak ematen dira: $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$. Adibidez, berehala egiaztatzen da

$$(y')^2 - xy' + y = 0, \quad y(0) = -1 \quad (1.31)$$

hastapen-baldintzen problemak $y = \pm x - 1$ soluzioak onartzen dituela, soluzio orokorrean $C = \pm 1$ aukeratzuz ikusten den bezala. Azpimarratu behar da, «hastapen»-baldintza $x = x_0$ puntuan ezartzen bada ere, ez dagoela inolako oztoporik atzerantz (hots, $x < x_0$ balioetarako) integratzeko.

1.8 ARIKETA Froga ezazu

$$(y')^2 - xy' + y = 0, \quad y(0) = 0 \quad (1.32)$$

problemak ere bi soluzio onartzen dituela, baina $y(0) = 1$ aukerarekin ez dagoela inolako soluzio errealik.

Adibide honek argi erakusten du hastapen-baldintzek ez dituztela beti existentzia eta bakartasuna bermatzen. Aztertutako ekuazio diferentzian ordena altueneko deribatuaren karratua agertzean datzala oztupoaren arrazoia erraz (eta ongi) asma daiteke. Horregatik, ekuazioak **forma normalean** —hau da, ordena altueneko deribatu askatuta— idatziko ditugu orain. Kasu honetan,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.33)$$

problemaren soluzioaren existentzia eta bakartasuna zergatik gertatzen diren nolabait ulertzeko, hasierako $x = x_0$ puntuaren inguruko Taylor-en garapenaren bidez soluzioa eraikitzen saiatuko gara:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \dots \quad (1.34)$$

Seriearen lehen koefizientea, $y(x_0) = y_0$ hastapen-baldintzak berak ematen digu. Beste koefizienteak hastapen-baldintza, ekuazio diferentziala eta azken honen deribatuak erabiliz kalkula daitezke hurrenez hurren:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad (1.35)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0), \quad (1.36)$$

⋮

Jakina, prozedura eraikitzaile honek existentzia eta bakartasuna bermatzeko, garapenaren existentzia eta konbergentzia betetzeko baldintza matematikoak behar dira. Cauchy-ren beraren lanari jarraituz, Peano-k⁶ frogatu zuen existentzia izateko nahikoa dela $f(x, y)$ funtzioaren jarraitasuna, baina hurrengo ariketak erakusten duenez baldintza hori ez da nahikoa bakartasuna bermatzeko. Horrexegatik existentzia eta bakartasunaren teorema egokiak ezarri behar dira testuinguruaren arabera.

1.9 ARIKETA Froga ezazu $y = 0$ eta

$$y = \begin{cases} 0, & \text{baldin } x \leq 0, \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, & \text{baldin } x \geq 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

ondoko problemaren bi soluzio desberdin direla:

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0. \quad (1.38)$$

Zein izan daitekeen bakartasunaren ezaren zergatia?

Baldintza osagarriak ez dira beti ematen puntu bakar batean. Aldagai independentearen balio desberdinetarako ematen direnean, **mugalde-baldintzen problema** bat planteatu dela esaten da. Ezer baino lehenago, horrelako problemak hastapen-baldintzenak baino askoz ere zailagoak izaten direla, oro har, esan dezakegu. (Esaterako, sistema kuantikoetan energiaren balio gehienetarako mugalde-baldintzen problema baten soluziorik ez egotea da preseski aipaturiko magnitudea kuantizaturik agertzeko arrazoia.) Adibide erraz argigarri bat aztertzeraz mugatuko gara hemen.

1.10 ARIKETA Dimensio gabeko aldagai egokiak erabiliz honela idazten da osziladore harmoniko klasikoa:

$$y'' + y = 0. \quad (1.39)$$

Egiaztatu soluzio orokorra $y = A \cos x + B \sin x$ dela, eta, 3. gaian frogatuko dugunez, soluzio guztiak horiek direla erabiliz, ondorioztatu ondoko mugalde-problemetako lehenak soluzio bakarra badu ere, bigarrenak ez duela bat ere ez, eta hirugarrenarenak infinituak direla:

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, \quad (1.40)$$

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2, \quad (1.41)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (1.42)$$

1.5 Ebazpen-metodoak

Testu honen zati handi batean ekuazio diferentzialen soluzioak aurkitzeko metodoak aztertuko dira. Oro har, **metodo zehatz** bat nahiago genuke, soluzioaren adierazpen analitiko zehatza emateko modukoa hain zuzen. Baina, ekuazio finituekin eta integralekin gertatzen den bezalaxe, ekuazio diferentzialen mota apur batzuk bakarrik (bereziki ekuazio linealak) ebatz daitezke metodo zehatzen bidez. Ekuazio diferentzialen teoriaren ikuspuntutik, problema bat ebatzita dago



⁶ **Giuseppe Peano** (1858-08-27, Cuneo, Piemonte; 1932-04-20, Turin, Italia). Soluzioen existentziaren teoremaz gain, ezagunak dira zenbaki naturalak multzo-teoriaren bidez definitzeko Peano-ren axiomak eta karratu baten barrua osorik betetzen dituen kurbak. Frege-rekin batera logika matematikoren sortzailea da eta zehaztasun matematikoari ematen zion garrantziagatik nabarmentzen zen.

koadraturetara laburtu bada, hau da, soluzioaren forma lortu bada, nahiz eta bertan aldagai independentearen menpeko funtzioen integralak agertu. Baina zinez gomendatzen diogu irakurleari integral guztiak ebazten saiatzeko, testu honetako adibide eta ariketetan agertzen diren integral gehienak, praktikan askotan aurkitzen direnak ez bezala, ebazgarriak dira eta.

Bestalde, ekuazio diferentzialen soluzioak adierazteko askotan **funtzio bereziak** —hau da, sinu hiperbolikoa, esponentziala edo arku tangentea bezalako **oinarrizko funtzioak** ez direnak— erabili behar dira. Izan ere, funtzio berezien definizio naturala askotan ekuazio diferentzial baten soluzioa izatean oinarritzen da. Kalkulu sinbolikoa egiteko sistemen garapenari esker, metodo zehatz ezagunak (eta hain ezagunak edo eskuz egiteko praktikoak ez direnak ere) erabiltzea askoz errazagoa da gaur egunean.

Metodo zehatzen bidez ebatz daitezkeen ekuazioen kopuru urriak **metodo hurbilduak** erabiltzera behartzen gaitu sarritan. Metodo hurbilduak zenbait ataletan sailka daitezke. Aparteko garrantzia badute ere, maila honetako testu batean oso gutxi ikusiko dugu **metodo hurbildu analitiko**ei buruz. **Metodo grafikoak**, zenbait ekuazio diferentzialen propietate kualitatiboak aztertzeke guztiz erabilgarriak izanda ere, soluzio hurbilduak lortzerakoan **zenbakizko metodoek** ordezkatu dituzte. Azken hauek dira zientzialariek eta teknikariek praktikan gehien erabiltzen dituztenak, ordenagailuen hedapenari esker.

Orain arte aipatu ditugun metodo guztiak **kuantitatiboak** izan dira, haien bidez soluzioa erakitzen (era hurbilduan bada ere) saiatzen baita. **Metodo kualitatiboetan** sistemaren informazio adierazgarria lortu nahi da. Adibidez, askotan aldagai independentearen $t \rightarrow \pm\infty$ limitean sistemak duen portaera kalkulatu nahi dugu, batez ere alde aurretik portaera asintotiko hori erraza dela dakigunean eta horra heltzera pasatu behar den portaera iragankorra —askotan hain erraz kalkulatu ez dena— zein den ez bada hain garrantziko. Metodo kualitatiboak 8. gaian aztertuko ditugu.

Ezin dugu gai hau amaitu fisikari batentzat ebazpen-metodoric erabilgarriena fisikari buruz daukan ezaguera dela gogoratu gabe. Izan ere, fisikako ikasgaietan ikasitako kontzeptu eta teknika asko —bereziki simetriak eta dagozkien kontserbazio-legeak— oso lagungarriak izaten dira fisikan aurkitzen diren ekuazio diferentzialak ebazteko edo behintzat errazteko.

Adibide moduan, pendulu matematikoa ebazten saiatuko gara:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (1.43)$$

Problema ebazteko dagoen teknika emankorrenetariko bat erabiltzen da maiz kasu honetan: hurbilketa bat egiten da (1.43) ekuazioan. Izan ere, oszilazioak $\sin \theta \approx \theta$ izateko bezain txikiak badira, osziladore harmonikoa berreskuratzen dugu, eta ekuazio lineal honen soluzioa oso ezaguna da (ikus 1.3 problema).

Ekuazioaren soluzio zehatza aurkitu nahi badugu, sistema kontserbakor unidimentsionala dela erabiliko dugu koadraturetara laburtzeko. Hasteko energia mekanikoaren kontserbazio-legeaz baliatuko gara **lehen integral** bat lortzeko. (Lehen integralak 3.4.5 atalean aztertuko dira.)

1.11 ARIKETA Biderkatu (1.43) ekuazioa $ml^2\dot{\theta}$ magnitudearekin eta integratu emaitza, energia mekaniko kontserbatua α anplitudearen funtzioan lortzeko.

Ondoko teknika mekanikatik ezaguna dugu eta, 2.5 atalean ikusiko dugunez, **aldagaien bariantzearen metodoaren** kasu berezi bat da.

1.12 ARIKETA Froga ezazu 1.11 ariketaren emaitza

$$\int_0^\theta \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0) \quad (1.44)$$

moduan idatz daitekeela pendulua gorantz doanean, t_0 aldiunean pendulua minimotik pasatu bada: $\theta(t_0) = 0$.

Ezin kalkula daiteke azken integrala oinarrizko funtzioen bidez: funtzioa bereziak behar dira. Izan ere, D.8 ataleko integral eliptikoez baliatuz erraz kalkula daiteke.

1.13 ARIKETA Erabili $\sin(\varphi/2) = \sin(\alpha/2) \sin \nu$ aldagai-aldaketa, penduluaren soluzio inplizitua

$$F \left[\arcsin \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) \middle| \frac{\alpha}{2} \right] = \sqrt{\frac{g}{l}}(t - t_0). \quad (1.45)$$

dela frogatzeko. Zein da soluzio esplizitua?

1.6 Problemak

1.1 Partikula puntual bat jariakin batean jausten ari da eta marruskadura abiaduraren proportzionala da. Idatzi eta sailkatu higidura-ekuazioa. Zer gertatzen da marruskadura abiaduraren karratuaren proportzionala bada?

1.2 Egiaztatu $y^2 - 2y = x^2 - x - 1$ ondoko ekuazioaren soluzioa denetz:

$$2y' = \frac{2x - 1}{y - 1}.$$

Erantzuna baiezkoa bada, aurkitu soluzioaren definizio-tartea.

1.3 Osziladore harmonikoa. Froga ezazu

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

osziladore linealak ondoko adierazpen guztiak onartzen dituela soluzio orokortzat:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

$$x = D_1 e^{i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t},$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$x = A \cos[\omega(t - t_0)].$$

Elkarren baliokideak dira? Ezagutzen al duzu beste adierazpenen bat zerrenda horri gehitzeko?

1.4 Zeintzuk dira (1.2) ekuazioaren (1.21) eta (1.22) soluzioen definizio-tarteak? Soluzioa al da

$$y = \begin{cases} \sqrt{C^2 - x^2}, & x < 0, \\ -\sqrt{C^2 - x^2}, & x \geq 0 \end{cases}$$

funtzioa?

1.5 $x^2 + Cy^2 = 1$ adierazpena

$$y' = \frac{xy}{x^2 - 1}$$

ekuazioaren soluzio implizitua al da?

1.6 Egiaztatu

$$y = \frac{1 - Ce^{2x}}{1 + Ce^{2x}}$$

funtzioa $y' = y^2 - 1$ ekuazioaren soluzio orokorra dela. Ikuskapena erabili bi soluzio erraz zuzenean aurkitzeko eta eztabaidatu soluzio singularrak direnez.

1.7 Egiaztatu

$$xy' = y$$

ekuazioaren soluzio orok $y(0) = 0$ hastapen-baldintza betetzen duela. Zergatik ez da betetzen bakartasuna?

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

funtzioa hastapen-baldintzen problema horren soluzioa al da?

1.8 Froga ezazu

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0,$$

problemaren soluzioen artean $y = x^2$ funtzioa eta ondoko guztiak daudela:

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq C, \\ (x - C)^2, & x \geq C, \end{cases} \quad (C \geq 0).$$

1.9 Ontzi hutsa. Hondoan zulo txikia duen ontzi huts bat erakusten badigute, ezin jakin deza-kegu noiz zegoen beterik, noski. Frogatu ez ezagutze hori existentzia eta bakartasunaren teorema ez betetzearen ondorioa dela.

Oharra: Gogoratu uraren h altuera Torricelli-ren⁷ legeak k parametro konstante baten bidez emandakoa dela:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}.$$

1.10 Penduluaren periodoa. Erabili 1.13 ariketa penduluaren periodoa kalkulatzeko. Garatu emaitza α anplitudearen laugarren ordenaraino.



⁷ **Evangelista Torricelli** (1608-10-15, Faenza, Romagna; 1647-10-25, Florentzia, Toskana). Galileo-ren idazkaria zen eta garrantzizko hutsa lehenengoz sortu eta mantendu zuena. Barometroaren printzipioa aurkitu zuen eta beste ekarpen batzuk egin zituen matematikan, partikularen mekanikan eta hidrodinamikan, bere izena daraman legea barne.

2. GAIA

Lehen ordenako ekuazioak

*In order to solve this differential equation
you look at it till a solution occurs to you.*

George Polya

Lehen ordenako ekuazio diferentzialen propietate nagusiak dira gai honetako aztergaia. Kasu hau «a priori» errazena denez, oso egokia gertatzen da garrantzizko kontzeptuak lehenengoz ikusteko (edo, kasu batzuetan, lantzeko), hurrengo gaietan testuinguru orokorragoetan aztertzen badira ere. Era berean, ebazpen-metodo ezagunenak ikusten dira. Azpimarratu behar da metodo hauen erabilgarritasuna gai guztietara hedatzen dela zeren praktikan ordena altuagoko ekuazio eta sistemen ebazpena lehen ordenako ekuazioen ebazpenera laburtzen baita askotan, ekuazio eta sistema linealen salbuespen garrantzitsua kontuan hartzen ez badugu bederen.

2.1 Esangura geometrikoa

Lehen ordenako ekuazio diferentzialen azterketa nonbaitetik hasteko, euren esangura geometriko erraza ikusiko dugu.

2.1.1 Kurba-familia uniparametrikoa

Ezaguna denez, $\varphi(x, y) = 0$ ekuazio finituak kurba bat definitzen du (x, y) planoan. Adibidez, $x^2 + y^2 = 1$ ekuazioak ($x^2 + y^2 - 1 = 0$ era baliokidean ere idazten denak) jatorrian zentratutako unitate-zirkunferentzia deskribatzen du. Kurba bakarra izan beharrezan kurba-familia uniparametrikoa badugu,

$$\varphi(x, y, C) = 0 \tag{2.1}$$

egiturakoa izango da bere ekuazioa eta parametroaren tarte bateko C balio bakoitzeko familiaren kurba bat lortzen da. Esaterako, jatorrian zentratutako zirkunferentzien familiaren ekuazioa

$$x^2 + y^2 = C^2 \tag{2.2}$$

da, C parametroa zirkunferentziaren erradioa izanik ($C \geq 0$ balioetarako).

Familiaren ekuazioa eta bere deribatua,

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, C) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, C) y' = 0, \quad (2.4)$$

erabiliz C parametroa ezabatzen badugu, **familiaren ekuazio diferentziala** lortzen dugu, hau da,

$$F(x, y, y') = 0 \quad (2.5)$$

motako adierazpen bat, deribatuaren esanahi geometrikoaren ondorioz puntu bakoitzaren eta bertatik pasatzen diren kurben malden arteko erlazioa adierazten duena.

2.1 ARIKETA Deribatu (2.2) ekuazioa, jatorrian zentratutako zirkunferentzien familiaren ekuazio diferentziala hauxe dela ikusteko:

$$x + yy' = 0. \quad (2.6)$$

Jakina, beste kasu askotan deribatuz gain hasierako ekuazio finitua ere erabili beharko da ekuazio diferentziala lortzeko.

2.2 ARIKETA Zentroa abszisa-ardatzean izanik unitate-erradioa duten zirkunferentzien ekuazio diferentziala aurkitu. Ba al dago soluzio singularrik?

Eraikuntzagatik (2.1) funtzioek (2.5) ekuazioaren soluzio-familia uniparametrikoko bat —hau da, ekuazioaren ordena lehena denez, soluzio orokor bat— osatzen dute. Jakina, deribatzean eta C kentzean bestelako soluzio orokorrak eta singularrak sartu izan daitezke ekuazio diferentzian. (2.1) ekuazioak definituriko familiaren soluzio partikular bakoitza **kurba integral** baten ekuazioa da. Aurreko adibideetan zirkunferentzia bakoitza kurba integral bat da eta bere ekuazioa soluzio partikular bat.

2.1.2 Kurba-kongruentzia

Badago garrantzi handiko kasu bat: familiaren kurbek ez badute elkar ebakitzen —hau da, eremu baten barruko puntu bakoitzetik familiaren kurba bat eta soilik bat igarotzen bada— familia **kongruentzia** bat dela esaten da. Kasu honetan, puntu bakoitzari bertatik pasatzen den kurba bakarra dagokio eta, ondorioz, kurba hori zehazten duen parametroaren balioa. Beraz, (2.1) familiaren ekuaziotik posible da, printzipioz behintzat, parametroa askatzea (x, y) puntu bakoitzari dagokion C balioa kalkulatzeko eta familiaren ekuazioa honela idazteko:

$$u(x, y) = C. \quad (2.7)$$

Adibidez, 2.1 ariketako zirkunferentzien familia kongruentzia bat da eta, izatez, (2.2) ekuazioan parametroa askaturik idatzi dugu.

2.3 ARIKETA 2.2 ariketan ikusitako kurba-familia kongruentzia al da?

2.1 ariketan ikusi dugun bezala, kongruentzien kasuan, ekuazioaren deribatua kalkulatzean dagokion ekuazio diferentziala zuzenean lortzen da, parametroa desagertu egiten baita:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) y' = 0. \quad (2.8)$$

Ekuazio hau dx diferentzialarekin biderkatuz **forma simetrikoa** lortzen dugu,

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (2.9)$$

$P \equiv \partial u / \partial x$ eta $Q \equiv \partial u / \partial y$ izanik. (2.6) ekuazioaren kasuan, forma simetrikoa

$$x dx + y dy = 0 \quad (2.10)$$

da.

Ikusiko dugunez, forma simetrikoa erabilgarria da batzuetan, baina maizago agertuko zaigu **forma normala**, ordena altueneko deribatua askatuz lortzen dena:

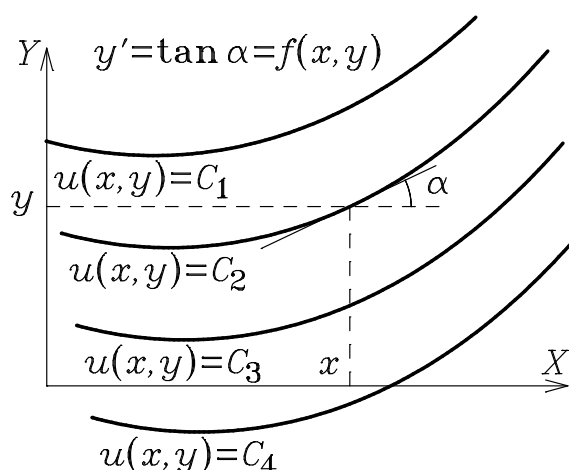
$$y' = f(x, y). \quad (2.11)$$

Bi forma hauen arteko erlazioa bistakoa da:

$$f(x, y) \equiv -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (2.12)$$

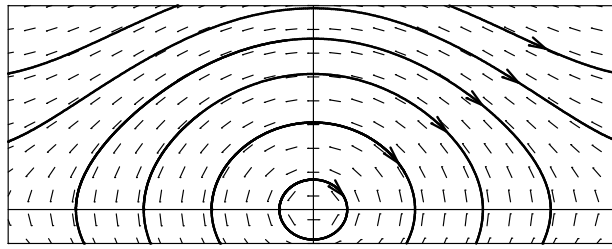
(2.6) adibidearen kasuan, hauxe dugu forma normala:

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (2.13)$$



2.1 IRUDIA Kurba-kongruentzia, deribatua eta tangentearen malda.

Forma normalak ekuazio diferentzialaren interpretazio zehatza ematen digu, 2.1 irudian erakusten dena: (x, y) puntutik igarotzen den kurba integralak bertan duen tangentearen $y' = \tan \alpha$ malda ematen du ekuazio diferentzialak. Puntu bakoitzetik kurba integral bakarra pasatzen da eta azken honekiko tangenteak norabide bat definitzen du. Beraz, (2.11) ekuazio diferentzialak puntu bakoitzari dagokion norabide bat adierazten du eta, definizio-eremuko puntu guztiak kontuan harturik, **norabide-eremu** bat definitzen du.



2.2 IRUDIA Kongruentzia eta norabide-eremua.

2.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema

Forma normalean idatziriko ekuazioen eta kongruentzien arteko erlazioa bana-banakoa da euren definizio-eremuan, **existentzia eta bakartasunaren teorema** ezarritako baldintza matematikoak betetzen badira.

Hemen frogatu gabe aipatzen dugun teorema horren aldaera, A eranskinean frogatzen dena baino ahulagoa da, baina askotan erabilgarriagoa, bere baldintza nahikoak, erabil daitezkeen beste batzuk baino hertsiagoak izan arren, praktikan errazago egiaztatzeko modukoak dira eta.

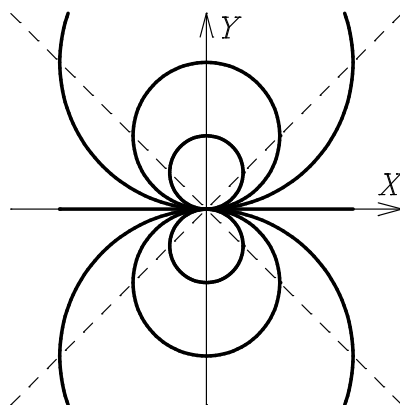
2.1 TEOREMA (Existentzia eta bakartasuna) *Eremu batean f funtzioa eta $\partial f/\partial y$ deribatua jarraituak badira,*

$$y' = f(x, y), \quad (2.14)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2.15)$$

hastapen-baldintzen problemak soluzio bat eta soilik bat dauka eremu horretako (x_0, y_0) hastapen-baldintza bakoitzeko.

Emaitza honen arabera, kurba integralen multzoa kongruentzia da, jarraitasun-baldintza egoki bat (hemengoa edota A eranskinean ikusiko dugun ahulagoa) betetzen bada. (Erregularitasunaren beharra 1.9 ariketan aurreikusi genuen.)



2.3 IRUDIA Abszisa-ardatza ukitzen duten zirkunferentziak.

Zentroa ordenatu-ardatzean dagoela abzisa-ardatza ukitzen duten 2.3 irudiko zirkunferentziak erabiliko ditugu adibide moduan.

2.4 ARIKETA Froga ezazu zirkunferentzia horien ekuazioa hauxe dela:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}. \quad (2.16)$$

Jatorritik infinitu soluzio pasatzen dira, baina honek ez du existentzia eta bakartasunaren teorema gezurtatzen, bertan ekuazio diferentzialak singularitasun bat baitauka. Jarraitasuna baldintza nahikoa baina ez beharrezkoa izanik, $y = \pm x$ erdikarietan beste singularitasun batzuk egoteak ez du bakartasuna debekatzen. Izan ere, honek adierazten duena arruntagoa da: bertan tangentea bertikala dela hain zuzen.

2.3 Ekuazio zehatzak

2.1 atalean ikusi genuenez, $u(x, y) = C$ kurba-kongruentziaren ekuazio diferentziala kalkulatzeko bere forma simetrikoa lortzen da,

$$du \equiv P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad (2.17)$$

definizio hauen bidez:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.18)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.19)$$

Funtzio baten diferentzialaren moduan lorturiko horrelako ekuazio bat **zehatza** da definizioz eta (2.18)–(2.19) baldintzak betetzen ditu.

Schwarz-en teoremaren arabera, funtzio erregularren¹ deribatu gurutzatuak berdinak dira eta, hortaz,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.20)$$

betetzen da ekuazio diferentzial zehatz guztientzat. Gainera, oinarrizko emaitza honen alderantzizkoa ere egiazkoa da.

2.2 TEOREMA $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazio diferentziala zehatza da baldin eta soilik baldin (2.20) baldintza betetzen bada.

Teorema honen frogapena interesgarria da eraikitzailea delako eta, beraz, (2.20) baldintza betetzen duten ekuazioak ebazteko metodoa ematen duelako. Izatez, $u(x, y)$ funtzioa eraikitzeko (2.18) adierazpena x -rekiko integratuko dugu:

$$u(x, y) \equiv \int_{x_0}^x P(v, y) dv + h(y). \quad (2.21)$$

¹Fisikan egin ohi den moduan, funtzio bat **erregularra** izango da, berak (eta bere deribatuek) «erregular» kalifikatzailea agertzen den enuntziatua bermatzeko jarraitasun-baldintzak betetzen baditu. Ohitura honek, oso zehatza ez bada ere, enuntziatu matematikoak arintzen ditu, erabiltzen dituzten funtzioen diferentziagarritasun-klasea zehaztea saihesten du eta. Praktikan, aipaturiko baldintza beharrezkoak betetzen dira (are gehiago, funtzioak analitikoak izaten dira) puntu (edo leku geometriko) batzuetan izan ezik. Puntu **singular** horiek, hala ere, garrantzi handikoak izaten dira fisikan (bertan dago, adibidez, eremu elektrostatorik errazena sortzen duen karga puntuala) eta matematikan (funtzio analitikoaren teorian batik bat). Zenbait puntu singularren propietateak kontuan hartzekoak izango dira 6. gaian.

Hemen, zehaztuko gabeko $h(y)$ funtzioa ez da x -ren menpekoa. (2.19) baldintza betetzeko, ondokoa ere bete beharko da:

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial P}{\partial y}(v, y) dv + h'(y). \quad (2.22)$$

Baina (2.20) hipotesia erabiltzen badugu, honela idazten da azken hau:

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial Q}{\partial x}(v, y) dv + h'(y) = Q(x, y) - Q(x_0, y) + h'(y). \quad (2.23)$$

Adierazpen honetatik x aldagaia ezabatu ondoren y -rekiko integrala eginez zera dugu:

$$h'(y) = Q(x_0, y) \iff h(y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv + D. \quad (2.24)$$

Hemen D hautazko integrazio-konstantea da. Azken emaitza (2.21) adierazpenean ordezkaturaz, ekuazio zehatzaren soluzio orokorra $u(x, y) = C$ kongruentziaren ekuazioa izango da, edo, adierazpen formalagoa nahiago bada,

$$\int_{x_0}^x P(v, y) dv + \int_{y_0}^y Q(x_0, v) dv = C, \quad (2.25)$$

hautazko konstantearen berdefinizio nabaria egin ondoren.

Ez diogu irakurleari gomendatzen adierazpen hau erabiltzeko ekuazio zehatzak ebatztean, hau egiteko metodorik onena hauxe baita: definizioa gogoratu, aldagai batekiko integrala egin, bestearekiko deribatu, eta integratu berriro.

Baina, adierazpen hori interesgarria da kalkulu bektorialetik ezagutzen dugun emaitza orokorraren kasu berezia delako. Ereku eskalar baten potentziala $V = -u$ funtzioa dela ematen badugu, lerro ekipotentzialen multzoa $u = C$ edota $V = -C$ kurba-kongruentzia da eta kongruentziaren $dV = -du = 0$ ekuazioak potentziala lerro ekipotentzialetan zehar konstantea dela adierazten du, baita dagokion

$$\mathbf{E} \equiv -\nabla V = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} \quad (2.26)$$

eremu bektoriala aipaturiko lerroen ortogonalak dela puntu guztietan ere: $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy = -dV = 0$. Gainera, testuinguru honetan (2.20) baldintzak eremu bektoriala kontserbakorra dela adierazten du: $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Dakigunez, horrelako kasu batean potentziala lerro-integral baten bidez berreskuratzen da:

$$V(x, y) = V(x_0, y_0) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V(x_0, y_0) - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (P dx + Q dy). \quad (2.27)$$

Integrazio-bidea edonolako da, noski; baina $(x_0, y_0) \rightarrow (x_0, y)$ eta $(x_0, y) \rightarrow (x, y)$ segmentuek osaturikoa aukeratzek badugu, (2.27) lerro ekipotentzialen ekuazioa (2.25) adierazpenak emandakoa dela ikusten dugu.

Adibide moduan, azter dezagun

$$x dx + y dy = 0 \quad (2.28)$$

ekuazioa. Neke handirik gabe ikusten da zehatza dela eta dx diferentzialaren koefizientea x -rekiko integralak $u = 1/2 x^2 + h(y)$ ematen du. Azken hau y -rekiko deribatu ondoren dy -ren koefizientearekin berdinduz $h'(y) = y$ lortzen da eta, integraturaz, $h = 1/2 y^2 + D$. Hautazko konstantearen berdefinizio erraz batekin soluzio orokorra, ezagutzen genuen $x^2 + y^2 = C^2$ zirkunferentzien familia dela ikusten dugu.

2.5 ARIKETA Ebatzi ondoko ekuazioa:

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0. \quad (2.29)$$

Hurrengo lerroetan ekuazio zehatzen kasu bereziak diren bi familia aztertuko ditugu.

Menpeko aldagai gabeko ekuazioak

Ekuazioan menpeko aldagaia agertzen ez bada,

$$y' = f(x), \quad (2.30)$$

zehatza da, bi deribatu gurutzatuak nuluak baitira. Izan ere, ekuazio hau oso erraza da eta koardaturetara laburtzen da zuzenean:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (2.31)$$

2.6 ARIKETA Ebatzi ondoko problema:

$$y' = \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0. \quad (2.32)$$

Bakarra al da soluzioa?

Aldagai bananduetako ekuazioak

Aldagai independentea eta menpekoa gai desberdinetan banandurik agertzen direnean,

$$P(x) dx + Q(y) dy = 0, \quad (2.33)$$

deribatu gurutzatuak nuluak dira eta, hortaz, ekuazioa zehatza da. Izan ere, koardaturen bidez ebazten da zuzenean:

$$\int P(x) dx + \int Q(y) dy = C. \quad (2.34)$$

$f = -P$ eta $Q = 1$ eginez aurreko kasua berreskuratzen da. Lehen aipatu ez badugu ere, mota berezi honetako adibidea dugu (2.28) ekuazioa.

2.7 ARIKETA Ebatzi $(1 + y)e^y y' = 2x$.

2.4 Faktore integratzailea

Azter dezagun zer gertatzen den (2.28) ekuazioan y' askatzen bada:

$$\frac{x}{y} dx + dy = 0. \quad (2.35)$$

Deribatu gurutzatuak desberdinak direnez, azken hau ez da zehatza, baina badakigu funtsean $1/y$ faktorearekin biderkatu den ekuazio zehatz bat dela, eta y -rekin atzera biderkatuz ekuazio zehatza berreskuratzen dugula. Aztertu nahi dugun galdera hau da: posible ote da ekuazioa zehatz bihurtzen duen alderantzizko transformazioen bat egotea edozein ekuazioaren kasuan?

Zehatza ez den

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (2.36)$$

ekuazioa $\mu(x, y)$ funtzioarekin biderkatuz lortzen dena,

$$\mu(x, y) [P(x, y) dx + Q(x, y) dy] = 0, \quad (2.37)$$

zehatza bada, μ funtzioa (2.36) ekuazioaren **faktore integratzailea** edota **biderkatzailea** dela esaten da. Ekuazio berria zehatza denez, aska daiteke eta bere soluzioak hasierako ekuazioaren soluzioak izango dira, *salbuespenen bat gorabehera*.

Izan ere, hasierako ekuazioa (2.37) delakoa eta $1/\mu(x, y)$ biderkatuz lortzen denez, gerta daiteke hasierakoaren soluzioen bat faktore finitu honen erroa izatea (2.37) ekuazio berria bete gabe. Ondorioz, faktore integratzaile bat erabili ondoren, $1/\mu(x, y) = 0$ ekuazio finituaren soluzioak aztertu behar dira: existitzen badira, haien artean soluzio orokorrean ez dagoen bakoitza soluzio singularra izango da. Adibide moduan kontsidera dezagun zehatza ez den $xy dx + y^2 dy = 0$ ekuazioa eta $\mu = 1/y$ biderkatzailea, (2.28) ekuazioa berreskuratzeko erabil daitekeena. Kasu honetan, $1/\mu = y = 0$ soluzio singularra da.

Bestalde, jatorrizko ekuazioa μ faktorearekin biderkatzean aurkakoa ere gerta daiteke: hasierako (2.36) ekuazioaren soluzioa izan ez arren $\mu(x, y) = 0$ eta, beraz, (2.37) ekuazio berria betetzeko moduko funtzioen bat egotea. Ondorioz, $\mu(x, y) = 0$ ekuazio finituaren soluzioek hasierako ekuazio diferentziala betetzen dutenetz egiaztatu beharko da.

2.8 ARIKETA Egiaztatu ondoko ekuazio diferentzialak $\mu = 1/xy^2$ onartzen duela faktore integratzailezat:

$$(xy + y^2) dx - x^2 dy = 0. \quad (2.38)$$

Kalkulatu soluzio orokorra. Ba al dago inolako soluzio singularrik? Eta ekuazio diferentziala betetzen ez duen μ -ren errorik?

Ageri denez, edozein faktore integratzailearen eta konstante baten biderkadura ere faktore integratzailea da. Gainera, problema batzuetan ikusiko dugunez, elkarren proportzionalak ez diren bi faktore integratzaile desberdin onar ditzake ekuazio diferentzial batek. Faktoreen bakartasunaren problemari ezezko erantzuna eman ondoren, askoz ere zailagoa den existentziaren problemaz arduratuko gara: (2.36) motako edozein ekuazioaren kasuan, egia al da ekuazioa zehatz bihurtzeko faktore integratzailea existitzen dela? Erantzuna baiezkoa da, baina ez oso praktikoa: existentzia eta bakartasunaren teoremaren ondorioz, lehen ordenako ekuazio diferentzial orok faktore integratzailearen bat onartzen du, baina ez da ezagutzen azken hau aurkitzeko metodo orokorrik. (2.37) ekuazio berria zehatza izateko bete behar den baldintza,

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}, \quad (2.39)$$

honela idazten da apur bat maneatu ondoren:

$$Q \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (2.40)$$

Deribatu partzialetako ekuazio honek soluzioa badu ere, argi dago beraren ebazpena ez dela, oro har, hasierako ekuazio arruntarena baino errazagoa izango. Hala ere, hurrengo ataletan ikusiko dugunez, zenbait kasutan (2.40) baldintza erabil daiteke egitura bereziko faktore integratzaileak aurkitzen saiatzeko.

Aurreko ataleko analogia bektorialaren ikuspuntutik, hauxe dugu: bi dimentsioko edozein eremu bektorial, $\mathbf{E} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$, eremu kontserbakor baten lerro ekipotenzialen ortogonalak da eta bi eremuok elkarrekiko paralelo eta proportzionalak. Bi dimentsiotan, beraz, edozein indar-eremuren korrante-lerroek ibilbide ortogonalak onartzen dituzte. Eraitza hau ez da betetzen hiru dimentsiotan: $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0$ baldintza betetzen duten **eremu integragarriak** soilik dira gradiente baten proportzionalak, $\mathbf{E} = -h(\mathbf{r}) \nabla V$, eta onartzen dituzte gainazal ortogonalak. Bi dimentsiotan, eta bakarrik kasu honetan, eremu bektorial guztiak integragarriak dira.

Hurrengo ataletan aztertuko ditugun kasuetan faktore integratzaileak era sistematikoan eraiki daitezke.

2.5 Ekuazio banangarriak

Ekuazio baten dx eta dy diferentzialen koefizienteetan aldagai independentea eta menpekoa faktore desberdinetan bil badaitezke,

$$R(x)S(y) dx + U(x)V(y) dy = 0, \quad (2.41)$$

ekuazioa **banangarria** dela esaten da. $\mu = 1/SU$ faktore integratzaileak aldagaiak banantzen ditu, eta horrelako ekuazio bat koadraturetara laburtzea erraza da:

$$\int \frac{R(x)}{U(x)} dx + \int \frac{V(y)}{S(y)} dy = C. \quad (2.42)$$

$S(y) = 0$ soluzioak, existitzen badira, singularrak izan daitezke. Adibidez,

$$x(1+y)y' = y \quad (2.43)$$

ekuazioa eta $\mu = dx/xy$ faktorea biderkatuz,

$$\left(\frac{1}{y} + 1\right) dy = \frac{dx}{x} \quad (2.44)$$

lortzen dugu eta hau zuzenean integratzen da $ye^y = Cx$ —edo, D.3 ataleko Lambert-en funtzioa erabiliz, $y = W(Cx)$ — emateko. $1/\mu = 0$ ekuazioaren $y = 0$ soluzioa ez da singularra, orokorrean baitago $C = 0$ baliorako.

2.9 ARIKETA Ebatzi ondoko ekuazioa:

$$(x-4)y^4 dx - x^3(y^2-3) dy = 0. \quad (2.45)$$

Beste atal batzuetan ikusiko dugunez, ekuazio mota honen garrantzia honetan datza: ekuazio-familia askoren ebazpen-metodo sistematikoan ekuazio banangarri bat lortzen da.

2.6 Faktore integratzaile bereziak

Ekuazio ez-zehatz bat ebazteko (2.40) baldintzan egitura bereziko μ funtzioaren bat saia dezakegu, oro har, prozedura honen arrakasta aldezturik ez badago ere. Zenbait kasutako teoria garatzean saia daitezkeen adierazpenak emango baditugu ere, berriro ere funtsezko ideiak —eta ez errezetak— erabiltzeko gomendatzen dugu. Kasu honetan nahikoa da, faktore integratzailea zer den gogoratu ondoren, x eta y aldagaiak forma berezi batean bakarrik dauzkan funtzioa saiitzea. (Agian, problemaren fisikak, edo bestelako ezagutzak, iradokiko digu forma hori.)

2.6.1 y -ren menpekotasunik gabeko faktore integratzaileak

x -ren menpeko hutsa den $\mu(x)$ funtzioa (2.40) baldintzan saiatur,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

lortzen dugu. Hori dela eta, honelako egiturako faktore integratzailea onartzeko bete behar den baldintza beharrezko eta nahikoa adierazpen honetako eskuineko atala y aldagaiaren menpekoa ez izatea da (bere osagaiak y -ren menpekoak badira ere):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right] = 0. \quad (2.47)$$

Ageri denez, baldintza hori betetzen bada, hauxe da faktore integratzailea:

$$\mu(x) = C \exp \int \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx. \quad (2.48)$$

Hemen, C integrazio-konstantea ez da garrantzitsua: μ faktore integratzailea bada, $C\mu$ ere hala-koxea da, baina C konstantearen beste balio bat aukeratzea ekuazioa konstante batekin biderkatzearen baliokidea da eta honek ez digu ezer berririk irakasten.

Adibidez,

$$(2x^2 + y) dx + (x^2y - x) dy = 0 \quad (2.49)$$

ekuazioa $\mu(x)$ faktorearekin biderkatzean lorturikoa zehatza izateko bete behar den deribatu gurutatuaren baldintza hauxe da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [(2x^2 + y) \mu(x)] &= \mu(x) = \\ \frac{\partial}{\partial x} [(x^2y - x) \mu(x)] &= (2xy - 1)\mu(x) + (x^2y - x) \mu'(x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Hortik lortzen den

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2xy - 2}{x^2y - x} = -\frac{2}{x} \quad (2.51)$$

ekuazioaren azken gaian y agertzen ez denez, ekuazio hau integra daiteke eta $\mu = 1/x^2$ faktore integratzailea dela ikusten dugu. (Jakina, (2.48) zuzenean aplikatu zitekeen emaitza bera lortzeko.) Faktore integratzailearekin biderkatuz,

$$\left(2 + \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(y - \frac{1}{x} \right) dy = 0 \quad (2.52)$$

ekuazio zehatza erraz ebazten da:

$$y^2 - 2\frac{y}{x} + 4x = C. \quad (2.53)$$

2.10 ARIKETA Askatu

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) y' = 0 \quad (2.54)$$

ekuazioa x -ren menpeko faktore integratzaile egokiaren bidez.

2.6.2 x -ren menpekotasunik gabeko faktore integratzaileak

(2.40) baldintzan $\mu(y)$ ordezkatzuz,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (2.55)$$

lortzen dugu eta, beraz, egitura honetako faktore integratzailea egoteko baldintza beharrezko eta nahikoa eskuineko atala x -ren menpekoa ez izatea da, kasu honetan faktore integratzailea ondo-koia izanik:

$$\mu(y) = C \exp \int \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy. \quad (2.56)$$

2.11 ARIKETA Onartzen al du 2.10 ariketako ekuazioak $\mu(y)$ moduko faktore integratzaileak?

2.6.3 $\mu(x, y) = g(h(x, y))$ egiturako faktore integratzaileak

Faktore integratzailean x eta y aldagaien menpekotasuna tarteko h funtzio baten bidez soilik gertatzen bada, hauxe bete behar da:

$$\mu(h) = C \exp \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q \frac{\partial h}{\partial x} - P \frac{\partial h}{\partial y}} dh, \quad (2.57)$$

eta horrelakorik egoteko baldintza, integrakizunean ere x eta y aldagaiak h -ren bitartez agertzea da.

Oro har, begi zorrotza (edo ebatzi nahi dugun problema fisikoaren bestelako ezagutza) erabili beharko dugu h forma egokia asmatzeko.

2.12 ARIKETA Ebatzi

$$(3xy + y^2) dx + (3xy + x^2) dy = 0 \quad (2.58)$$

ekuazioa $\mu(x + y)$ erako faktore integratzaile bat erabiliz.

2.7 Ekuazio linealak

Ezezaguna eta bere deribatua konbinazio linealen bidez agertzen badira, deribatua askaturik honela idatz daiteke beti ekuazioa:

$$y' + A(x)y = B(x). \quad (2.59)$$

Hauxe dugu **ekuazio lineala**. B gai askea nulua denean ekuazioa **homogeneoa** deitzen da. Bestela **osoa** —edo, batzuetan, **inhomogeneoa**— dela esaten da.

Erraz ikus daitekeenez, $\mu(x)$ faktore integratzailearen existentzia bermatzen duen (2.47) baldintza betetzen da eta, (2.48) adierazpenaren ondorioz, hauxe izango da:

$$\mu(x) = \exp \int A(x) dx. \quad (2.60)$$

Ekuazioa funtzio honekin biderkatuz,

$$e^{\int A dx} y' + A e^{\int A dx} y = B e^{\int A dx} \quad (2.61)$$

edota

$$\frac{d}{dx} [e^{\int A dx} y] = B e^{\int A dx} \quad (2.62)$$

lortzen da eta bigarren koadratura batek soluzio orokorra ematen digu:

$$y = e^{-\int A dx} \left[C + \int B e^{\int A dx} dx \right]. \quad (2.63)$$

Berrito ere, horrelako formula bat buruz ikasi barik, ekuazio linealek aldagai independentearen menpeko hutsa den faktore integratzaile bat onartzen dutela gogoratzeko gomendatzen dugu ekuazio linealak ebaztean. Hala ere, aipaturiko formulak soluzioaren egitura argi erakusten du: *osoa*ren soluzio orokorra, *homogeneoa*ren soluzioa ($B = 0$ eginez lorturikoa, hain zuzen)

eta osoaren soluzio partikular bat batuz lortzen da. Osoaren soluzio partikularra modu askotara aukera daiteke, (2.63) adierazpenean agertzen den C konstantearen balio bakoitzeko soluzio partikular bat baitugu. Baina homogeneoaren soluzioan agertzen den hautazko C konstantearekin, osoaren soluzio partikularren aukerak infinitu badira ere, kasu guztietan lortzen da ekuazio osoaren soluzio orokor berbera. 3. eta 4. gaitan ikusiko dugunez, edozein ordenatako ekuazio eta sistema linealen soluzio orokorra ere egitura horretakoa izango da beti.

2.13 ARIKETA Ebatzi

$$xy' + (1+x)y = e^x. \quad (2.64)$$

Ekuazio linealen kasuan μ biderkatzailea y -ren menpekoa ez denez, horrelako ekuazio bat ebatztean ez da inolako soluziorik galdu edo irabazi: (2.47) soluzio orokorrak ekuazio linealaren soluzio guztiak dauzka.

Aipatu behar da lehen ordenako ekuazio lineal homogeneoa banangarria dela eta, hortaz, 2.5 ataleko metodoaz ere ebatz daitekeela.

2.14 ARIKETA Banandu aldagaiak $y' + a_1(x)y = 0$ ekuazioan soluzioa koadratura baten bidez idazteko. Ondorioztatu haxe dugula k konstantea denean:

$$y' - ky = 0 \quad \iff \quad y = Ce^{kx}. \quad (2.65)$$

2.8 Transformazio-metodoak

Fisikako ikasgaitan sarritan ikusi dugunez, problema asko erraztu egiten dira koordenatu egokietan aztertzean. Gauza bera gertatzen da hainbat ekuazio diferentzialekin: aldagai-aldaketa egokiari esker ebatzen dira problema asko. **Transformazio-metodo** hauetan aldagai independentea, menpekoa edo biak alda daitezke, kasuen arabera.

2.9 Ekuazio homogeneoak

Dakigunez, r mailako funtzio homogeneoa,

$$f(ax, ay) = a^r f(x, y), \quad \forall a \quad (2.66)$$

baldintza betetzen duena da. $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazio diferentziala **homogeneoa** dela esaten da, P eta Q maila bereko funtzio homogeneoak badira:

$$P(ax, ay) = a^r P(x, y), \quad Q(ax, ay) = a^r Q(x, y), \quad \forall a. \quad (2.67)$$

Azpimarratu behar da hemen x eta y aldagaiekiko homogeneoa izateko eskatzen dela, baina (2.59) ekuazio linealaren kasuan homogeneoa dela esaten da $B = 0$ denean, hau da, y eta y' aldagaiekiko (baina ez x -rekiko) homogeneoa denean. Izen hauek nahasgarriak badira ere, egile guztiek erabiltzen dituzte.

2.15 ARIKETA Froga ezazu $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazio diferentziala homogeneoa dela baldin eta soilik baldin ondoko eran idatz badaiteke:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.68)$$

Ariketa honek iradokitzen duenez, ondoko aldagai-aldaketa erabilgarria izan daiteke:

$$u \equiv \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = xu, \quad y' = u + xu'. \quad (2.69)$$

Horrela, ezezagun berria $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$ eskala-aldaketarekiko aldaezina izango da, ekuazioa bera bezalaxe. Izan ere, ekuazio homogeneoa banangarri bilakatzen da aipaturiko aldagai-aldaketa eginez,

$$u' + \frac{1}{x} [u - f(u)] = 0, \quad (2.70)$$

eta badakigu horrelako bat aldagaiak banandu ondoren koadraturetara laburtzen dela.

2.16 ARIKETA Ebatzi

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} + y\right) dx - x dy = 0. \quad (2.71)$$

Ekuazio homogeneoen orokorpen gisa, eskala-aldaezintasun orokortua duten ekuazio isobarikoak 2.16 probleman aztertuko ditugu.

2.10 $y' = f(ax + by + c)$ egiturako ekuazioak

Honelako ekuazioetan $u = ax + by + c$ (edota $u = ax + by$) aldagai-aldaketa nabaria egiten badugu, ekuazio banangarri batera laburtzen da:

$$u' = a + bf(u). \quad (2.72)$$

2.17 ARIKETA Askatu $y' = (x + y + 1)^2$ ekuazio diferentziala.

2.11 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ egiturako ekuazioak

Honelako ekuazioen artean bi kasu ditugu, $ax + by + c = 0$ eta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ zuzenak nolakoak diren arabera.

1. Zuzenak paraleloak badira,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} \equiv k, \quad (2.73)$$

hauxe dugu:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{k(ax + by) + \gamma}\right). \quad (2.74)$$

Ondorioz, $ax + by$ adierazpenaren menpekotasun hutsa dago funtsean eta aurreko ataleko ekuazioa dugu: $u = ax + by$ aldaketak ekuazio banangarri batera laburtzen du hasierakoa.

2.18 ARIKETA Ebatzi honako ekuazio hau:

$$y' = \frac{x - y}{x - y - 1}. \quad (2.75)$$

2. Zuzenak paraleloak ez badira, (x_0, y_0) puntu batean elkar ebakitzen dute eta, ondorioz, $(u, v) \equiv (x - x_0, y - y_0)$ koordenatu-aldaketak puntu hori jatorrira darama zuzenen ekuazioak $au + bv = 0$ eta $\alpha u + \beta v = 0$ izateko moduan. Aldagai berrietan ekuazioa homogeneoa da,

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right) = f\left(\frac{a + bv/u}{\alpha + \beta v/u}\right), \quad (2.76)$$

eta $z = v/u$ aldaketak banangarri bihurtzen du.

2.19 ARIKETA Ebatzi honako ekuazio hau:

$$y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}. \quad (2.77)$$

2.12 Bernoulli-ren ekuazioak

Bernoulli-ren² ekuazioak ondoko egitura du:

$$y' + A(x)y = B(x)y^n. \quad (2.78)$$

(Hemen ez ditugu ekuazio linealari dagozkion $n = 0, 1$ kasuak sartzen.) Zuzenean egiaztatzen denez, $u = y^{1-n}$ aldaketak lineal bihurtzen du Bernoulli-ren ekuazioa:

$$u' + (1 - n)Au = (1 - n)B. \quad (2.79)$$

2.20 ARIKETA Askatu hurrengo ekuazioa:

$$y' - y \cos x = \frac{1}{2}y^2 \sin 2x. \quad (2.80)$$

2.13 Riccati-ren ekuazioak

Riccati-ren³ ekuazioa ondoko egiturakoa da:

$$y' + A(x)y + B(x)y^2 = C(x). \quad (2.81)$$

$B = 0$ eta $C = 0$ kasuak ez dira familia honetan sartzen, ekuazio linealari eta Bernoulli-renari baitagozkie hurrenez hurren. Ez dago era honetako ekuazio ebazteko metodo orokorrik, baina (ikuskapenagatik, problemaren propietate fisikoengatik, edo beste edozein arrazoirengatik) ekuazioaren $y = y_1(x)$ soluzio bat,

$$y_1' + A(x)y_1 + B(x)y_1^2 = C(x), \quad (2.82)$$

ezagutzen bada, $u = y - y_1$ aldagai-aldaketak Bernoulli-ren ekuazio batera laburtzen du, (2.81) eta (2.82) adierazpenen kendura haxe baitugu:

$$u' + (A + 2By_1)u + Bu^2 = 0. \quad (2.83)$$



² **Jacob Bernoulli** (1654-12-27, Basilea, Suitza; 1705-08-16, Basilea). Matematikari bikainen familia batekoa zen (Johann-en anaia eta Daniel-en osaba). «Integral» hitza erabili zuen lehena izateaz gain, katenaria, isokronoa eta probabilitateen teoria aztertu zituen. Aldakuntzen kalkulua asmatu zuen, baita koordenatu polarrak eta bere izena daramaten zenbakiak eta banaketa ere.



³ **Jacopo Francesco Riccati** (1676-05-28, Venezia; 1754-04-15, Treviso, Veneziako Errepublika). Hidraulikan lan praktikoa egin zituen eta ekuazio diferentzialen aztertzaile handia izan zen. Berari zor dizkiogu ordena-beheratzearen zenbait metodo, aldagaien banantzea eta (Jacob Bernoulli-k lehenago aztertu arren) bere izena daraman ekuazioaren azterketa.

2.21 ARIKETA Egiaztatu $y = 1/x$ funtzioa

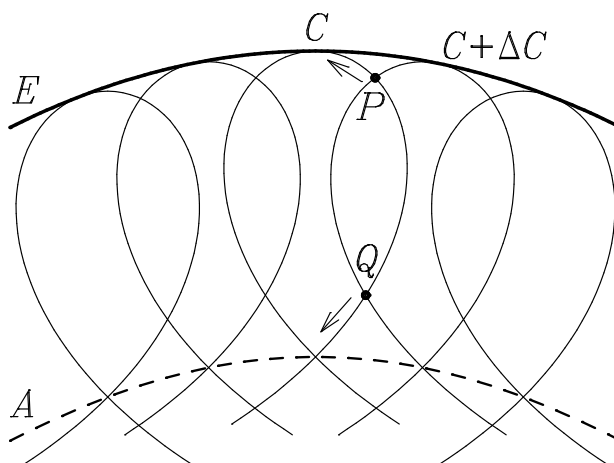
$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad (2.84)$$

ekuazioaren soluzioa dela eta erabili emaitza hau soluzio orokorra aurkitzeko.

Inolako soluziorik ezagutzen ez denean, 3.27 problemaren aldagai-aldaketa erabil daiteke bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneo batera laburtzeko eta 3. eta 6. gaietako metodoak erabiltzen sai dezakegu. (Aipaturiko problematan frogatuko dugunez, Riccati-ren ekuazioak eta bigarren ordenako lineal homogeneoak elkarren baliokideak dira zentzu zehatz batean.) Honek ere huts egiten badu, 7. gaiko metodo hurbilduetara jo beharko da beste hainbat kasutan bezalaxe.

2.14 Inguratzailea eta soluzio singularrak

Deribatu askatugabeko ekuazioak aztertu baino lehenago, digresio geometriko labur bat egingo dugu. Kontsidera dezagun 2.4 irudiko kurba-sorta, $\varphi(x, y, C) = 0$ ekuazioa duena. Argi ikus-



2.4 IRUDIA Kurba-sorta baten inguratzailea eta puntu anizkoitzak.

ten denez, E kurba ez dago sorta horretan eta, beraz, ez du familiaren ekuazio hori betetzen; baina puntu bakoitzean familiaren kurba baten ukitzailea da. Propietate hau betetzen duen kurba, **inguratzailea** deitzen da. Dakigunez, sortaren ekuazioa deribaturik C parametroa ezabatzen badugu, familiaren $F(x, y, y') = 0$ ekuazio diferentziala aurkitzen dugu. Inguratzaileak ekuazio diferentzial hau, familiaren ekuazio finitua ez bezala, bete egingo du, (x, y) puntu bakoitzean bere y' malda bertatik pasatzen den sortaren kurbarenaren berdina baita. Beraz, inguratzailea soluzio singularra izango da bai orain arte erabilitako zentzuan —soluzio orokorrean ez dagoen soluzioa izanik— baita batzuetan erabiltzen den zentzu murriztuago batean ere: puntu guztietan bakartasunaren propietatea hausten duen soluzioa da.

Ikusiko dugunez, deribatu askatugabeko ekuazioetan soluzio singularrak askotan, baina ez beti, inguratzaile gisa agertzen dira. Hau egiaztatzeko, ikus dezagun nola kalkula daitezkeen inguratzailearen ekuazioa. Irudiko P puntua C eta $C + \Delta C$ balioei dagokien kurbetan dago; beraz,

bi kurben ekuazioak, $\varphi(x, y, C) = 0$ eta $\varphi(x, y, C + \Delta C) = 0$ betetzen ditu, baita ekuazio hauen ondoko bi konbinazio independenteak ere:

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.85)$$

$$\frac{\varphi(x, y, C + \Delta C) - \varphi(x, y, C)}{\Delta C} = 0. \quad (2.86)$$

$\Delta C \rightarrow 0$ limitean bi kurbak nahastu egiten dira eta P puntua inguratzaileira doa. Limitean betetzen diren ekuazioak,

$$\varphi(x, y, C) = 0, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}(x, y, C) = 0, \quad (2.88)$$

inguratzailearenak izango dira, beraz. Ekuazio hauen artean C ezabatuz lortzen da inguratzailearen ekuazio finitua. Inguratzaileak ez du familiaren ekuazioa betetzen C parametroaren inolako balio finkorako, baina (x, y) puntu batean sortarekiko kurba tangentea zein den jakiteko, nahikoa da —erregularitasun-baldintzez gain $\partial^2 \varphi / \partial C^2 \neq 0$ betetzen dela jorik— (2.88) baldintzatik dago-kion $C(x, y)$ balioa askatzea. Balio aldakor hori (2.87) ekuazioan ordezkaturik, inguratzailearen ekuazio inplizitua lortzen da. Kontuan hartu behar da, baina, (2.87)–(2.88) ekuazioen soluzioen artean bestelako leku geometrikoak ere egon daitezkeela. Adibidez, Q puntuak limitean ekuazio berberak beteko ditu, baina **puntu anizkoitzen**⁴ lerro batera jotzen du. (Horrelako puntuetatik kurba bat behin baino gehiagotan pasatzen da.) Hala ere, azpimarratu behar da puntu anizkoitzen A lerroa ez dela sortarekiko tangentea eta, hortaz, ez duela malda berbera. Ondorioz, (2.87)–(2.88) ekuazioak betetzen dituzten leku geometrikoen artean inguratzailea bereizteko nahikoa da azken honek sortaren ekuazio diferentziala ere betetzen duela gogoratzea. (Ikus halaber 2.29 problema.)

2.22 ARIKETA Aurkitu $(x - a)^2 + y^2 = 1$ sortaren inguratzaileak. Ba al dago puntu anizkoitzik?

2.15 Deribatu askatugabeko ekuazioak

$F(x, y, y') = 0$ ebatzi nahi bada, $F(x, y, z) = 0$ ekuazio finitutik z askatzen saia gaitzke, gero agertzen diren $y' = z(x, y)$ ekuazioak — $F(x, y, z(x, y)) = 0, \forall(x, y)$ betetzen dutenak— ebazteko, prozesuan irabazten edo galtzen diren soluzio singularrekin kontuz ibiliz.

Adibidez,

$$(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0 \quad (2.89)$$

ekuazioa honela idatz daiteke deribatua askaturik:

$$(y' - x)(y' - y) = 0. \quad (2.90)$$

Beraz, soluzioak faktore bakoitza zerorekin berdinduz lortutakoak dira: $y = x^2/2 + C$ eta $y = Ce^x$.

⁴Batzuetan puntu **aknodalak** direla esaten da.

Beste adibide ezaguna mekanikan Kepler-en problema ebaztean aurkitzen duguna da. $V = -k/r$ potentzial newtondarren kasuan, energia mekanikoaren eta momentu angularraren kontserbazio-legeak hauexek dira koordenatu polarretan:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r}, \quad L = mr^2\dot{\varphi}. \quad (2.91)$$

Ekuazio hauetatik t denbora ezabatzen bada eta r distantzia polarraren ordeztu $u \equiv 1/r$ magnitudea erabiltzen badugu, honela idazten da orbitaren ekuazioa:

$$(u')^2 + u^2 - \frac{2\varepsilon}{p}u = \frac{e^2 - 1}{p^2}. \quad (2.92)$$

Hemen $\varepsilon \equiv |k|/k$ zeinua indar erakartzaileen (aldartzaileen) kasuan $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) da. $p \equiv L^2/m|k|$ parametro fokala *semilatus rectum* izenarekin ezagutzen da astronomian. Gainera, $e \equiv \sqrt{1 - E/E_0}$ eszentrikotasuna indar erakartzaileen kasuko orbita zirkularren $E_0 \equiv -|k|/2p$ energia minimoaren bidez definitzen da.

$u' = du/d\varphi$ deribatua askatu ondoren aldagaiak bananduz lortzen den

$$\frac{du}{\sqrt{\frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2\varepsilon}{p}u - u^2}} = \pm d\varphi \quad (2.93)$$

ekuazioa

$$\int \frac{du}{\sqrt{A + 2Bu - u^2}} = \arccos \frac{B - u}{\sqrt{A + B^2}} \quad (2.94)$$

integrala eginez ebazten da, perizentroaren posizioa ematen duen φ_0 integrazio-konstantearen bidez orbitaren ekuazioa

$$u = \frac{\varepsilon + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \quad (2.95)$$

moduan idazteko.

(2.92) ekuazioan aldagaiak banantzean, (2.95) soluzio orokorraren

$$u = \frac{\varepsilon \pm e}{p} \quad (2.96)$$

ingurutzailak —(2.92) delakoan $u' = 0$ eginez ere lortzen direnak— galdu dira. Soluzio singular horien esangura geometrikoa nabaria da: absdeen posizioak ematen dituzte, r -ren balio txikienari eta handienari baitagozkie. Aipaturiko leku geometrikoen arteko lehena, $pu = \varepsilon + e$ perizentroek osaturikoa, beti existitzen da. $u > 0$ denez, apozenetroak ematen dituen $pu = \varepsilon - e$ soluzioa, berriz, 2.5 irudian bezala indarra erakartzailea ($\varepsilon = 1$) eta energia negatiboa ($0 \leq e < 1$) direnean baino ez da agertuko.

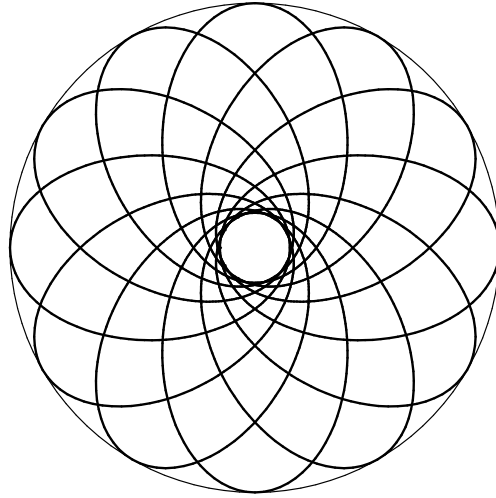
2.23 ARIKETA Ebatzi $y^2(1 + y'^2) = 1$ ekuazioa.

Askotan deribatua (edo z) askatzea ez da batere erraza eta hain zaila ez denean ere lortzen dena korapilatsua izan daiteke. Hortaz, maiz hobe da, $F(x, y, z) = 0$ ekuazioaren soluzio esplizitua bilatu beharrean, soluzio parametrikoa aurkitzea:

$$x = \alpha(u, v), \quad (2.97)$$

$$y = \beta(u, v), \quad (2.98)$$

$$z = \gamma(u, v), \quad (2.99)$$



2.5 IRUDIA Orbita eliptikoak, perizentroak eta apozenetroak.

$F[\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)] = 0, \forall(u, v)$, izanik. Gero, $dy = z dx$ dela erabili behar da,

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} du + \frac{\partial \beta}{\partial v} dv = \gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} du + \frac{\partial \alpha}{\partial v} dv \right), \quad (2.100)$$

ekuazio baten forma simetrikoa lortzeko. Azken honen $v(u)$ soluzio bakoitzeko, hasierako ekuazioaren soluzio parametrikotzat dugu:

$$x = \alpha[u, v(u)], \quad (2.101)$$

$$y = \beta[u, v(u)]. \quad (2.102)$$

Adibidez, Kepler-en problemako (2.92) ekuazioan karratuak osatzen baditugu,

$$(u')^2 + \left(u - \frac{\varepsilon}{p} \right)^2 = \frac{e^2}{p^2}, \quad (2.103)$$

erraz ikusten da nola aurkitu soluzio parametrikotzat. Adibidez, θ angelu berria eta φ angelu polarra parametrotzat aukeratuz, hauxe dugu bat:

$$\varphi = \varphi, \quad (2.104)$$

$$u = \frac{\varepsilon}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta, \quad (2.105)$$

$$u' = -\frac{e}{p} \sin \theta. \quad (2.106)$$

Orain, ekuazio hauen bidez $du = u' d\varphi$ kalkulatu badugu, $d\theta = d\varphi$ ekuazio erraza lortzen da eta honen $\theta = \varphi - \varphi_0$ soluzioa (2.105) ekuazioan ordezkaturik (2.95) orbita berreskuratzen dugu.

2.24 ARIKETA Erabili $x = u, y = \cos v, y' = \tan v$ parametrizazioa $y^2(1 + y'^2) = 1$ ekuazioa ebazteko.

2.25 ARIKETA Askatu $x^2 + (y'^2) = 1$.

Parametrizazio egoki ezaguna duten ekuazio-familia batzuk aztertuko dira ondoren.

2.15.1 $F(y') = 0$ egiturako ekuazioak

Aldagai independentea eta menpekoa falta badira, soluzioak $y' = u$ formakoak dira, u balioa $F(u) = 0$ ekuazioaren edozein soluzio izanik. Beraz, $y = ux + C$ eta $u = (y - C)/x$ betetzen dira eta ekuazio diferentzialaren soluzioa zuzenean idatz daiteke forma implizituan,

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0, \quad (2.107)$$

F -ren erroak kalkulatu ere egin gabe. Jakina, horrelako errorik existitzen ez bada, idatzi berri dugun soluzioa formala izango da.

2.26 ARIKETA Idatzi $(y')^7 - 5y' + 3 = 0$ ekuazioaren soluzioa. Soluzio konplexurik onartzen ez badugu, formala al da soluzioa?

Hurrengo lau ataletan aztertuko ditugun ekuazioetan $y' = u$ egin ondoren $dy = u dx$ baldintza ebatzi behar da.

2.15.2 $x = g(y')$ egiturako ekuazioak

Ezezaguna falta delarik aldagai independentea aska badaiteke, soluzio parametrikoa erraza da: $y' = u$, $x = g(u)$. Hau egin ondoren, ebatzi behar den $dy = ug'(u) du$ ekuazioa aldagai bananduetakoa da eta hasierako ekuazioaren soluzio parametrikoa ematen du:

$$x = g(u), \quad y = \int ug'(u) du + C. \quad (2.108)$$

2.27 ARIKETA Ebatzi $(y')^2 - x - 1 = 0$.

2.15.3 $y = g(y')$ egiturako ekuazioak

Aldagai independentea agertzen ez delarik ezezaguna askatzen bada, soluzio parametrikoa lortzeko $y' = u$ eta $y = g(u)$ erabili behar da, horrela geratzen den $g'(u) du = u dx$ ekuazioa banangarria baita. Hauxe da soluzio parametrikoa, beraz:

$$x = \int \frac{g'(u)}{u} du + C, \quad y = g(u). \quad (2.109)$$

2.28 ARIKETA Ebatzi $y = (y')^5 + (y')^3 + y' + 5$.

2.15.4 Clairaut-en ekuazioak

Ondoko egiturako ekuazioa da Clairaut-ena⁵:

$$y = xy' + g(y'). \quad (2.110)$$

Aurreko kasuetan bezala $y' = u$ parametroa erabiltzen badugu, $y = xu + g(u)$ ekuazio parametrikoa geratuko zaigu eta ebatzi behar den $dy = u dx$ baldintza $u dx + [x + g'(u)] du = u dx$ da. Beraz, hauxe dugu soluzioa:

$$y = xu + g(u), \quad (2.111)$$

$$[x + g'(u)] du = 0. \quad (2.112)$$

(2.112) ekuazioan zeroren berdina dena lehen faktorea zein bigarrena izan daitekeenez, bi soluzio ditugu.

Soluzio orokorra

Bigarren faktorea nulua bada (edo, gauza bera dena, $\mu \equiv 1/[x + g'(u)]$ faktore integratzailea erabiltzen bada), $du = 0$ lortzen da eta (2.111) ekuazioan $u = C$ ordezkatzuz soluzio orokorra lortzen dugu:

$$y = Cx + g(C). \quad (2.113)$$

Ikusten dugunez, Clairaut-en ekuazioaren soluzio orokorra zuzen-sorta bat da beti.

Soluzio singularra

Lehen faktorea nulua bada, soluzio parametrikoa dugu zuzenean:

$$x + g'(u) = 0, \quad (2.114)$$

$$y = xu + g(u), \quad (2.115)$$

hau da, $x = -g'(u)$, $y = -ug'(u) + g(u)$. Soluzio singular hau ($1/\mu = 0$ eginez ere lortzen dena) orokorraren inguratzailea da preseski, (2.115) ekuazioa sortarena izateaz gain ekuazio horren parametroarekiko deribatua (2.114) delakoa baita. (Aurreko atalean erabilitako notazioa berreskuratzeko nahikoa da $u = C$ idaztea.)

2.29 ARIKETA Ebatzi $y = xy' - y'^2$.



⁵ **Alexis Claude Clairaut** (1713-05-07, Paris; 1765-05-17, Paris). Aztertu zituen problema askoren artean hiru gorputzarena nabaritzen da. Ilargiaren higidura aztertzean erabili zituen soluzio singularrak. 1759 urteko Halley kometaren itzulera kalkulatu zuen. Lurra esferoide oblatua delako Newton-en auresan teorikoa egiaztatzeko Maupertuis-ek zuzendu zuen espedizioan parte hartu zuen.

2.15.5 Lagrange-ren ekuazioak

Lagrange-ren⁶ ekuazioa hau da:

$$y = xf(y') + g(y'), \quad (f(u) \neq u). \quad (2.116)$$

Berriro ere, $y' = u$ aldaketaren bidez $y = xf(u) + g(u)$ ekuazio parametrikoa lortzen dugu eta ebatzi behar den $dy = u dx$ baldintza: $f(u)dx + [xf'(u) + g'(u)] du = u dx$. Hau da, beraz:

$$y = xf(u) + g(u), \quad (2.117)$$

$$[f(u) - u] dx + [xf'(u) + g'(u)] du = 0. \quad (2.118)$$

Bigarren ekuazioa x -rekiko lineala da eta $\mu \equiv 1/[f(u) - u]$ faktorearekin biderkatuz, zera lortzen da:

$$\frac{dx}{du} + \frac{f'(u)}{f(u) - u} x + \frac{g'(u)}{f(u) - u} = 0. \quad (2.119)$$

Badakigu nola ebatzi hau $x = \varphi(u, C)$ soluzio orokorra lortzeko eta, (2.117) ekuazioan ordezkatzuz, Lagrange-ren ekuazioaren soluzio orokorra era parametrikotan idazteko:

$$x = \varphi(u, C), \quad (2.120)$$

$$y = \varphi(u, C)f(u) + g(u). \quad (2.121)$$

Soluzio singularrik dagoenez erabakitzeko, $1/\mu = [f(u) - u] = 0$ ekuazioa aztertu behar da. Izan ere,

$$u = f(u), \quad (2.122)$$

ekuazioaren soluzio (konstante) bakoitzak Lagrange-ren ekuazioa betetzen duen $y = xf(u) + g(u)$ zuzen bat ematen du. Azpimarratu behar da azken ekuazioa aldagaiaren balio baterako (edo batzuetarako) bete daitekeela, baina ez u guztietarako, azken hau Clairaut-en ekuazioaren kasuan bakarrik gertatzen da eta.

Praktikan, goian ikusitako prozedura osoa erabili beharrean nahikoa da gogoratzea $y' = u$ eginik hasierako ekuazioaren deribatuak —(2.118) ekuazioak, hain zuzen— u -ren menpeko faktore integratzaile bat onartzen duela.

2.30 ARIKETA Aurkitu $y = 2xy' - y'^3$ ekuazioaren soluzio orokorra. Ba al dago soluzio singularrik?

2.31 ARIKETA Idatzi (2.118) ekuazioaren faktore integratzailea.



⁶ **Joseph-Louis Lagrange** (1736-01-25, Turin, Sardinia-Piemonte; 1813-04-10, Paris). Analisi, zenbaki-teoria, mekanika zerutiar eta mekanika analitikoari buruzko azterketengatik nabarmendu zen eta azken teoria honen sortzaile nagusitzat dugu. Newton-en garaitik mekanikari buruz egindako guztia bildu zuen bere maisulana 1788ko *Mécanique analytique* liburua da. Bere izeneko higidura-ekuazioak eta biderkatzaileak gogoratzen dira eta berari zor dizkiogu koordinatu orokortuak eta energia potentzialaren kontzeptua.

2.15.6 Deribazio-metodoa

Ekuzio diferentzial bat askatzeko metodorik arinena ekuazioa deribatzea izan daiteke, kasu batzuetan lortzen den ekuazio berria errazagoa da eta. Jakina, ekuazio berriak soluzio gehiago izango ditu eta haien artean jatorrizko ekuazioa ere betetzen dutenak aukeratu beharko dira. Adibide moduan, Kepler-en problemako (2.92) ekuazioa askatuko dugu, berriro ere. Jatorrizkoa deribatzean hauxe lortzen da:

$$2u' \left(u'' + u - \frac{\varepsilon}{p} \right) = 0. \quad (2.123)$$

Parentesi artekoa nulua izateko baldintza Binet-en ekuazioa da:

$$u'' + u = \frac{\varepsilon}{p}. \quad (2.124)$$

Kanpo-indar konstante bat pairatzen duen osziladore harmonikoarena denez, erraz ebazten da kasu honetan eta, hurrengo gaian ikusiko dugunez, soluzio guztiak daude ondoko soluzio orokorrean:

$$u = \frac{\varepsilon}{p} + C \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (2.125)$$

Hemen hautazko bi konstante daude, C eta φ_0 , baina, jatorrizko ekuazioa lehen ordenakoa denez, bakarria behar dugu. Izan ere, lorturiko soluzio-familia (2.92) ekuazioan ordezkatzan bada, $C = e/p$ aukeratu behar dela ikusten da zuzenean: (2.95) orbitak berreskuratzen ditugu, beraz. (2.123) ekuazioan nulua dena u' dela suposatzen bada, $u = C$ soluzioa (2.92) ekuazioan saiaturuz absideak deskribatzen dituzten soluzio singularrak lortzen dira.

2.32 ARIKETA Ebatzi $(y')^2 + 2y = 1$.

2.16 Problema

2.1 Aurki ezazu ondoko kurba-familien ekuazio diferentzialak: (a) jatorritik pasatzen diren zuzenak, (b) $y = C \sin 2x$.

2.2 Aurkitu hurrengo ekuazioaren soluzio orokorra:

$$\frac{(1 + y^2) dx + (1 + x^2) dy}{(1 - xy)^2} = 0.$$

Eztabaidatu $y(0) = 0$, $y(0) = 1$ eta $y(1) = 1$ hastapen-baldintzei dagozkien soluzioen definiziotarteak.

2.3 Askatu $(ye^{xy} + 2x) dx + (xe^{xy} - 2y) dy = 0$, $y(0) = 2$.

2.4 Paradoxa bat? Azter dezagun ondoko ekuazioa $(x, y) \neq (0, 0)$ puntuetan:

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

(a) Froga ezazu deribatu gurutzatuak berdinak direla.

(b) Egiaztatu ekuazioa $d(\arctan y/x) = 0$ eran idatz daitekeela, edota, koordenatu polarretan, $d\varphi = 0$ moduan.

(c) Kalkulatu ekuazio diferentzialari dagokion eremuaren lerro-integrala jatorrian zentratutako zirkunferentzian zehar.

(d) Horrela lortutako emaitza harrigarria suertatu beharko litzaizuke. Azaldu gertatzen dena.

2.5 Aurkitu arku-luzera eta jatorritik osatutako angelua elkarren proportzionalak izateko propietatea betetzen duten kurba guztiak. Erabili koordenatu polarrak.

2.6 Askatu $(1 - x^2) y' = 1 - y^2$, $y(1) = 1$.

2.7 Zein da $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazioak bete behar duen baldintza beharrezko eta nahikoa, aurkitu behar duzun $\mu(xy)$ egiturako faktore integratzailea onar dezan.

2.8 Ebatzi $y' = \frac{2x^3y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$.

2.9 Froga ezazu $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazioak, zehatza izateaz gain, konstantea ez den $\mu(x, y)$ faktore integratzailea onartzen badu, ekuazioaren soluzio orokorra $\mu(x, y) = C$ dela.

2.10 Askatu $2xy dx + (1 - x^2 - y^2) dy = 0$.

2.11 Ebatzi $y' - x^2y = x^5$.

2.12 Aurkitu $y(10)$ balioa, $y' - 2xy = 1$ eta $y(0) = 1$ betetzen badira.

Iradokizuna: Erabili 279. orrian aurki daitezkeen errore-funtzioaren definizioa eta propietateak.

2.13 Aurkitu hurrengo ekuazioaren soluzio orokorra: $y^3 dx + (xy - y^4) dy = 0$.

Iradokizuna: Erabili 282. orrian aurki daitezkeen esponentzial-integralaren definizioa eta propietateak.

2.14 RL zirkuitua. Zirkuitu baten erresistentzia R da eta autoindukzioa L , eta $V(t)$ potentzial-diferentzia jasaten du. Kalkulatu $I_0 = I(t_0)$ hasierako balioari dagokion $I(t)$ intentsitatea. Zer gertatzen da $V = V_0 \sin \omega t$ bada?

2.15 Ekuazio homogeneoa. Froga ezazu $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ ekuazio homogeneoak $(xP + yQ)^{-1}$ biderkatzailea onartzen duela, funtzio hori finitua bada. Zein izango da faktore-integratzailea $xP + yQ = 0$ denean?

2.16 Ekuazio isobarikoa. Ekuazio homogeneoek $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$ transformazioekiko eskala-aldaezintasuna erakusten dute. Orokorpen gisa, ekuazio isobarikoak $(x, y) \rightarrow (ax, a^\lambda y)$ aldatzekiko aldaezinak dira, λ balio egoki baterako. Bestela esanda, $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ isobarikoa da ondokoa betetzen bada:

$$P(ax, a^\lambda y) = a^r P(x, y), \quad Q(ax, a^\lambda y) = a^{r-\lambda+1} Q(x, y), \quad \forall a. \quad (2.126)$$

Eztabaidatu honelako ekuazioak ebazteko metodoa.

2.17 Ebatzi $(y^2 - 1) dx + (3x^2 - 2xy) dy = 0$.

2.18 Ibilbide ortogonalak. $\varphi(x, y, C) = 0$ kurba-familia uniparametrikoren kurbak puntu guztietan angelu zuzenean ebakitzen dituzten kurbak hasierako familiaren ibilbide ortogonalak dira definizioz. Familiaren ekuazio diferentziala $F(x, y, y') = 0$ bada, zein izango da ibilbide ortogonalen familiarena?

2.19 Aurkitu $y^2 = Cx$ parabolaren ibilbide ortogonalak.

2.20 Askatu $(6x + 4y + 3) dx + (3x + 2y + 2) dy = 0$.

2.21 Masa aldakorra. M egitura-masa duen suziri batek m masako erregaia dauka hasieran. Lurraren gainazaletik bertikalki jaurtikitzen da eta segundo bakoitzean k masako gasa igortzen du v abiadurarekin. Pisua izan ezik beste indar guztiak arbuatzen badira eta grabitatearen azelerazioa konstantea bada ibilbide osoan zehar, zeintzuk izango dira abiadura eta altuera erregaia bukatzen denean?

2.22 Masa erlatibista. Erlatibitate berezian v abiaduraz higitzen ari den partikula baten masa $m = m_0 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ da, pausaguneko masa m_0 bada. (Ohi bezala, argiak hutsean duen abiadura c da.)

(a) Pausagunetik hasita partikula hutsean eta grabitate-eremu konstante baten eraginez higitzen bada, zein izango da bere abiadura t aldiunean eta denbora-tarte luze bat pasatu ondoren?

(b) $\Delta m \equiv m - m_0$ partikularen masaren aldaketa da eta ΔE magnitudea $F = d(mv)/dt$ indarrak egindako lana. Frogatu zuzenean $\Delta E = \Delta m c^2$ dela.

(c) Egiatzapen moduan, erabili abiapuntutzat azken emaitza hau eta indarraren definizioa, partikularen masa abiadurarekin nola aldatzen den ondorioztatzeko.

2.23 Ebatz ezazu

$$y' = \left(\frac{x - y + 3}{x - y + 1} \right)^2.$$

2.24 Froga ezazu ekuazio homogeneo oro banangarria dela koordenatu polarretan.

2.25 Ebatzi $y' + e^{-x}y^2 - y - e^x = 0$.

2.26 Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzio orokorra: $(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

2.27 $x = x_0$ zuzenak $y' + p(x)y = q(x)$ ekuazio diferentzialaren lerro integralak ebakitzen ditu. Froga ezazu ebakidura-puntuetako ukitzeaileak elkartopakorrek direla (hau da, puntu komun batetik pasatzen direla denak). Ondorioztatu $y' - y/x = -x^{-3}$ kasuan elkartopatze-puntuen leku geometrikoa zuzena dela.

2.28 Aurkitu eta marraztu $(x - C)^2(1 - y) = (1 + y)y^2$ **estrofoideen** ingurutzailak eta puntu anizkoitzak.

2.29 Ingurutzailak eta puntu anizkoitzez gain, (2.87)–(2.88) ekuazioek **goierpinak** eduki ditzakete. Adibide moduan, aurkitu eta marraztu $9y(y')^2 = 4$ ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra. Aztertu (2.87)–(2.88) ekuazioen soluzioa kasu honetan. Ekuazio diferentzialen soluzioa da?

2.30 Unibertsoaren «erradioa». Eredu kosmologiko estandarrean Robertson eta Walker-en unibertsoaren R eskala-faktorea Friedmann-en ekuazioaren arabera eboluzionatzen da:

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{R} - k, \quad (2.127)$$

$k = -1, 0, 1$ izanik. Eztabaidatu ekuazio honen soluzioak eta, bereziki, noiz gertatzen den «eztanda handia» eta noiz doan unibertsoa amaierako kolapsorantz.

2.31 Infinituko baldintzak. Batzuetan, soluzioa zehazteko hastapen-baldintza eman beharrez, infinituan ezartzen zaio baldintza egokia. Adibide moduan, aurki ezazu $x \rightarrow \infty$ limitean bornaturik dagoen ondoko ekuazioaren soluzio bakarra:

$$y' - y = \sin x.$$

2.32 Aurkitu $(y')^2 + y^2 = 1$ ekuazioaren soluzio guztiak.

2.33 Adierazi koadraturen bidez ondoko egiturako ekuazioen soluzio orokorra:

$$y f(xy) dx + x g(xy) dy = 0.$$

2.34 Eztabaidatu ondoko egiturako ekuazioen ebazpen-metodoa:

$$\frac{df}{dy}(y) y' + A(x)f(y) = B(x).$$

Erabili erantzuna $3y^2y' - xy^3 = x^2$ askatzeko.

2.35 Abraham⁷ eta Lorentz-en⁸ ekuazioa. Igorritako erradiazioaren balaztatzea kontuan hartzen bada, \vec{E} eremu elektriko konstante eta uniformean higitzen den q kargaren higidura-ekuazioa

$$m\vec{a} = q\vec{E} + \frac{2}{3}q^2\dot{\vec{a}}$$

da hurbilketa ez-erlatibistan. Froga ezazu ekuazio honen soluzio asko ez direla onargarriak fisikaren ikuspuntutik, euren azelerazioa mugarik gabe handituz doa eta. Egiaztatu soluzio fisikoak aukeratzeko nahikoa dela $q \rightarrow 0$ limitean $m\vec{a} = 0$ berreskuratzeko baldintza osagarria ezartzea. Zeintzuk dira soluzio fisikoak?

2.36 Froga ezazu

$$\dot{x} = f(x)$$

erako ekuazio baten soluzioek ez dutela inolako oszilaziorik egiten. Zergatik ez da $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ ekuazioaren $x = \sin(t-t_0)$ soluzioa aurreko baieztapenaren kontradibidea?

Iradokizuna: Kotsideratu oszilazio baten grafikoa.

2.37 Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzioa guztiak:

$$xy' = -y + \sqrt{xy+1}.$$

2.38 Ebatzi ondoko problema eta eztabaidatu soluzioen definizio-tartea:

$$\dot{x} = \frac{1}{e^x - t}, \quad x_0 = \ln t_0.$$

2.39 Ebatzi ondoko ekuazioa, α -ren balio erreal guztietarako:

$$y^2 - (y')^2 = \alpha.$$



⁷ **Max Abraham** (1875-03-26, Danzig, Alemania —gaur egunean Gdansk, Polonia—; 1922-11-16, Munich, Alemania). Planck-en ikasle hau elektrodinamikari buruz aritu zen bereziki eta eraiki zuen elektroien teoria ospe handikoa izan zen Lorentz-enak ordezkatu arte. Lorentz-en teoriarekin elkargarria den Einstein-en erlatibitatearen kontra agertu zen beti.



⁸ **Hendrik Antoon Lorentz** (1853-07-18, Arnhem, Herbehereak; 1928-02-04, Haarlem, Herbehereak). Maxwell-en teoria hobetu zuen. Elektroien existentzia finkaturik egon baino lehenago argia atomoen oszilaziorik sorturikoa zela proposatu zuen. Fisikako Nobel saria 1902an eskuratu zuen. Elektroien teoria Einstein-en erlatibitate bereziaren aitzindaria zen, alderdi batzuetan behintzat, eta bere izeneko transformazioek aparte garrantzia dute erlatibitatean.

3. GAIA

Goi-ordenako ekuazioak

*I consider that I understand an equation
when I can predict the properties of its solutions,
without actually solving it.*

Paul Adrien Maurice Dirac

Gai honetan edozein ordenatuko ekuazio diferentzialak aztertuko ditugu. Ordena bat baino handiagoa denean ekuazioa ebatzen saiatzeko erabil daitezkeen metodo orokor urriak ikusi ondoren, ekuazio linealetara mugatuko gara. Kasu berezi —eta garrantzitsu— honetan existentzia eta bakartasunaren teoremaren eta algebra linealaren nahaste dotore bati esker, soluzio-espazioaren teoria osoa ezartzeko gai izango gara. Ez daukagu, berriz, soluzioak aurkitzeko metodo sistematikorik. Ekuazioak linealak izateaz gain koefiziente konstanteetakoak badira, badaude ebazpen-metodo sistematikoak, gaiaren amaieran aztertuko ditugunak. Koefiziente konstanteetako ekuazioak (eta sistemak) ebazteko beste metodo bat, Laplace-ren transformazioa alegia, erabiltzen da 5. gaian. Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoak —agian fisikan agertzen den kasurik garrantzizkoena— 6. gaian aztertuko ditugu berriro.

3.1 Esangura geometrikoa

Ekuazio diferentzial orokorraren esangura geometrikoa lehen ordenako kasuan ikusi genuenaren orokorpen zuzena da. Kurba lauen familia baten ekuazioan C_1, C_2, \dots, C_n parametro independenteak agertzen badira eta ekuazioa eta lehenengo n deribatuak erabiliz,

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'' = 0, \quad (3.3)$$

$$\vdots$$
$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y^{(n)} = 0, \quad (3.4)$$

n parametroak ezabatzen baditugu, familiaren ekuazio diferentziala lortzen dugu:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.5)$$

Familiaren (3.1) ekuazioa (3.5) ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra da eta bere kurba ba-koitza kurba integral bat.

3.1 ARIKETA Zein da unitate-erradioko zirkunferentzien ekuazio diferentziala?

3.2 Existentzia eta bakartasunaren teorema

Berriro ere, lehen ordenako kasuan egindako emaitzaren orokorpen zuzena da hau eta bertan egindako iruzkinak ez ditugu orain errepikatuko. Ekuazio diferentzial baten

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.6)$$

forma normalean f funtzioa eta $\partial f/\partial y, \partial f/\partial y' \dots, \partial f/\partial y^{(n-1)}$ deribatuak jarraituak badira, ekuazioa eta ondoko n hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra dago:

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.7)$$

$$y'(x_0) = y'_0, \quad (3.8)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.9)$$

3.3 Ekuazioen eta sistemen arteko baliokidetasuna

Ezezagun eta ekuazioen kopurua handituz, beti behera daiteke ekuazio baten ordena. Izan ere, $y_1 \equiv y, y_2 \equiv y', \dots, y_n \equiv y^{(n-1)}$ menpeko aldagai berriak definitzen baditugu, n ordenako (3.6) ekuazioa lehen ordenako n ekuazioen hurrengo sistemaren baliokidea da:

$$y'_1 = y_2, \quad (3.10)$$

$$y'_2 = y_3, \quad (3.11)$$

$$\vdots$$

$$y'_{n-1} = y_n, \quad (3.12)$$

$$y'_n = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \quad (3.13)$$

3.2 ARIKETA Idatzi osziladore harmoniko bortxatuaren ekuazioa sistema baten moduan.

3.4 Ordena-beheratzea

Ebatzi nahi dugun ekuazioaren ordena bat baino altuagoa denean, familia ezagun batekoa ez bada, saia daitezkeen prozedura orokor gutxien artean bere ordena beheratzen saiatzea dago. Horrela, ebatzen dakigun ordena baxuagoko —agian lehen ordenako— ekuazio batera heltzen bagara, arazoa konponduta (edo konpontzeko bidean) egongo da. Ikus ditzagun ordena-beheratzea modu sistematikoan egin daitekeen kasu batzuk.

3.4.1 Menpeko aldagai gabeko ekuazioak

Menpeko aldagaia agertzen ez bada,

$$F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.14)$$

$u \equiv y'$ deribatua menpeko aldagai berritzat harturik $y'' = u', \dots, y^{(n)} = u^{(n-1)}$ erabiltzea nahikoa da $n - 1$ ordenako ekuazio bat lortzeko:

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) = 0. \quad (3.15)$$

Azken honen soluzio orokorra $\tilde{\varphi}(x, u, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ bada, $u = y'$ aldaketa desegin ondoren lehen ordenako ekuazio diferentzialen familia bat dugu: $\tilde{\varphi}(x, y', C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$. Azken hau ebazten badugu, hasierako ekuazioaren $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) = 0$ soluzio orokorra lortuko dugu. Gainera, (3.15) ekuazioaren soluzio singular bakoitza lehen ordenako ekuazio diferentzial bat izango da eta, ebazten badugu, soluzio singularren familia bat emango digu.

Adibidez,

$$y''^2 = 240x^2y' \quad (3.16)$$

ekuazioan $u = y'$ eginez, lehen ordenako $u'^2 = 240x^2u$ ekuazioa lortzen da. Honen soluzio orokorra $u = 15(x^2 + C_1)^2$ da eta aldagai-aldaketa deseginez $y' = 15(x^2 + C_1)^2$ ekuazioak lortzen dira. Integrazio erraz bat egin ondoren, $y = 3x^5 + 10C_1x^3 + 15C_1^2x + C_2$ dugu. Gainera, $u = y' = 0$ soluzio singularra dugu, $y = C_3$ familia ematen diguna.

3.3 ARIKETA Partikula puntual bat zuzen bertikal batean zehar ari da jausten jariakin batean grabitatearen eragin pean. Marruskadura abiaduraren karratuaren proportzionala bada, zein da abiadura aldiune guztietan? Froga ezazu muga-abiadura batera iristen dela.

Jakina, y aldagaiaz gain, $y', \dots, y^{(m-1)}$ deribatuak ere falta badira, $u \equiv y^{(m)}$ ezezagunerako ekuazioa $n - m$ ordenakoa da.

3.4.2 Ekuazio autonomoak

Aldagai independentea agertzen ez bada,

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.17)$$

ekuazioa autonomoa dela esaten da. Horrelako ekuazioak $x \rightarrow x - a$ translazioekiko aldaezinak dira eta, beraz, $\varphi(x, y) = 0$ funtzioa (3.17) ekuazioaren soluzioa bada, $\varphi(x - x_0, y) = 0$ ere soluzioa da x_0 balio guztietarako. Ondorioz, hautazko konstante bat aldagai independentearen jatorriari dagokio eta soluzio orokorra $\varphi(x - x_0, y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0$ moduan adieraz daiteke, C_1, C_2, \dots, C_{n-1} eta x_0 hautazko konstanteen bidez. Ekuazio autonomoen ordena beheratzeko, y aukeratzen da aldagai independente berritzat, $u \equiv y'$ delakoa menpeko aldagai berria delarik. Orduan,

$$y'' = \frac{du}{dy}u, \quad (3.18)$$

$$y''' = \frac{d^2u}{dy^2}u^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 u, \quad (3.19)$$

\vdots

$$y^{(n)} = \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}u^{n-1} + \dots + \left(\frac{du}{dy}\right)^{n-1} u \quad (3.20)$$

ekuazioan ordezkaturaz, $n - 1$ ordenako ekuazio berri bat lortzen da,

$$\tilde{F}\left(y, u, \frac{du}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right) = 0. \quad (3.21)$$

Ekuazio honen soluzio orokorra $\tilde{\varphi}(y, u, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$ bada, bertan $u = y'$ aldaketa desegin ondoren lehen ordenako ekuazioen familia bat lortzen da. Azken hau integratuz hasierako ekuazioaren $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_{n-1}, C_n) = 0$ soluzio orokorrera iristen da. Era berean, lehen ordenako ekuazioaren soluzio singular bakoitzetik soluzio singularren familia uniparametrikoko bat lortuko da.

Sistema mekaniko kontserbakor unidimentsionala ondo ezagutzen dugun adibidea da. Partikularen posizioa x izanik indar osoa $F(x) = -V'(x)$ bada, higidura-ekuazioa ondokoa dugu:

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (3.22)$$

Aldagai independentea (t denbora kasu honetan) falta denez, ezezaguntzat $v = \dot{x}$ abiadura hartuko dugu eta $\ddot{x} = \dot{v} = vv'$ deribatua bitartez, honela idazten da ekuazioa:

$$mvv' = -V'(x). \quad (3.23)$$

Ekuazio honen aldagaiak banandurik daudenez, integrazio zuzena egin daiteke energia mekanikoaren kontserbazio-legea lortzeko:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E. \quad (3.24)$$

Orain, $v = \dot{x}$ aldaketa deseginez gero deribatua askatuz, lehen ordenako bi ekuazio banangarri lortzen dira:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}. \quad (3.25)$$

Aldagaiak banandurik integral bat egiten bada, hauxe lortzen da:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}} = \pm (t - t_0). \quad (3.26)$$

3.4 ARIKETA Ebatzi $y'' = (2y + 1)y'$.

3.4.3 Ekuazio x -rekiko ekidimentsionalak

Ekuazioa, translazioekiko barik, $x \rightarrow ax$ eskala-aldaketa guztiekiko aldaezina bada,

$$F(ax, y, a^{-1}y', a^{-2}y'', \dots, a^{-n}y^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.27)$$

x -rekiko ekidimentsionala dela esaten da. Autonomo bihurtzeko, aldagai independentearen $x \rightarrow t \equiv \ln x$ aldaketa egingo dugu ondoko adierazpen hauen bidez:

$$x = e^t, \quad (3.28)$$

$$y' = \frac{1}{x} \dot{y}, \quad (3.29)$$

$$y'' = \frac{1}{x^2} (\ddot{y} - \dot{y}), \quad (3.30)$$

\vdots

$$y^{(n)} = \frac{1}{x^n} \left[\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{dy}{dt} \right]. \quad (3.31)$$

Izan ere,

$$F(x, y, y', y'', \dots) = F[x \cdot 1, y, x^{-1}\dot{y}, x^{-2}(\ddot{y} - \dot{y}), \dots] = 0 \quad (3.32)$$

ekuazioa hurrengoaren baliokidea izango da:

$$\tilde{F}(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \equiv F(1, y, \dot{y}, \ddot{y} - \dot{y}, \dots) = 0. \quad (3.33)$$

Azken hau autonomoa denez, $(t, y) \rightarrow (y, u \equiv \dot{y})$ aldaketa erabil dezakegu lehen ordenako ekuazio bat lortzeko.

3.5 ARIKETA Ebatzi $xy'' = yy'$ ekuazioa.

3.4.4 Ekuazio y -rekiko ekidimentsionalak

Ekuazioa $y \rightarrow ay$ eskala-aldaketa guztiekiko aldaezina bada,

$$F(x, ay, ay', ay'', \dots, ay^{(n)}) = 0 \iff F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (3.34)$$

y -rekiko ekidimentsionala dela esaten da. Ordena beheratzeko, y'/y zatidura aldaezinaz baliatuko gara menpeko aldagaiaren $y \rightarrow u \equiv y'/y$ aldaketa egiteko honako adierazpen hauen bidez:

$$y' = yu, \quad (3.35)$$

$$y'' = y(u' + u^2), \quad (3.36)$$

$$\vdots \quad (3.37)$$

$$y^{(n)} = y(u^{(n-1)} + \dots + u^n). \quad (3.38)$$

Horrela,

$$F(x, y, y', y'', \dots) = F[x, y \cdot 1, yu, y(u' + u^2), \dots] = 0 \quad (3.39)$$

ekuazioa, ordena baxuagoko ondokoaren baliokidea izango da:

$$\tilde{F}(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \equiv F(x, 1, u, u' + u^2, \dots) = 0. \quad (3.40)$$

Ekuazio hau ebazten bada, $u = y'/y$ aldaketa deseginez lehen ordenako ekuazio bat geratzen da.

Familia honetan praktikan maizenik aurkitzen diren ekuazioak **homogeneoak** dira, hots, ezezagunarekiko (eta bere deribatuekiko) homogeneoa den funtzio baten bidez idazten direnak:

$$F(x, ay, ay', \dots, ay^{(n)}) = a^r F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (3.41)$$

Hemen ere praktikan ia egile guztiek erabiltzen duten ohiturari jarraitzen diogu, oso nahasgarria bada ere. Kasu honetan (eta ekuazio linealetan) ezezagunarekiko homogeneotasuna eskatzen da, baina lehen ordenako ekuazio ez-linealen kasuan x eta y aldagaiekiko homogeneotasuna eskatzen da (2.67) baldintzan. (Hori dela eta, kasu hartan $u = y/x$ aldaketa erabili behar zen eta ez hemengo $u = y'/y$.) Agian hobe izango litzateke **y -rekiko homogeneoa** dela esatea, luzeagoa bada ere.

Geroago arreta handiz aztertuko dugun ekuazio lineal homogeneoen kasuan ere erabil daiteke metodo hau, baina ordena txikiagoko ekuazioa ez-lineala denez hasierakoa bezain zaila izaten da, oro har. Adibidez, bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoaren kasuan, Riccati-ren ekuazioa lortzen dela ikusiko dugu 3.27 problematan. Beraz, irakurleak buruan izan beharko luke *gehienetan ez dela ezer aurreratzen aldagai-aldaketa honekin ekuazio linealen kasuan*. Bestalde, $r > 0$ denean, $y = 0$ soluzioa (agian singularra) dela aipatu behar da.

3.6 ARIKETA Ebatzi $yy'' = y'^2$.

3.4.5 Ekuazio zehatzak

Ekuazioa deribatu zehatza bada,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (3.42)$$

koadratura batek

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C \quad (3.43)$$

$n - 1$ ordenako ekuazioa den **lehen integral** bat ematen digu.

3.7 ARIKETA Askatu $yy'' + y'^2 = 0$.

Ekuazioa zehatza ez bada ere, batzuetan forma zehatzera eramán daiteke, faktore integratzaile edo transformazio egokiaren bidez.

3.8 ARIKETA Egiaztatu $yy'' - y'^2 = 0$ ekuazioa y^2 funtzioarekin zatituz zehatz bihurtzen dela. Eztabaidatu soluzio singularrik dagoen ala ez.

Gogoratu fisikan lehen integralak (askotan **higidura-konstanteak** ere deitzen direnak) ematen dituzten kontserbazio-legeen eta simetriaren arteko lotura estua dagoela.

3.9 ARIKETA Biderkatu eremu kontserbakor unidimentsional batean higitzen ari den partikularen (3.22) ekuazioa eta \dot{x} abiadura energia mekanikoaren kontserbazio-legea lehen integral gisa aurkitzeko.

3.5 Funtzioen menpekotasun lineala

Gai honetako gainerako ataletan ekuazio linealez arduratuko gara. Horrelako ekuazioen egitura linealari esker, homogeenaren soluzioen multzoa espazio bektoriala da, zuzen errealeko I tarte batean definituriko funtzio erregularren¹ infinitu dimentsioko espazioaren dimentsio finituko azpiespazio bat, hain zuzen ere. Horrelako espazio batean egitura bektoriala funtzioen ohiko batuketa eta biderketa eragiketek induzitutakoa da, elementu neutroa tarte osoan zehar nulua den funtzioa delarik. Ondorioz,

$$\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\} \quad (3.44)$$

funtzio erregularrak linealki independenteak izango dira baldin eta soilik baldin

$$\sum_{k=1}^n C_k y_k(x) = 0 \quad (\forall x \in I) \quad (3.45)$$

konbinazio lineal nulu bakararra koefiziente nuluak dituen bada: $C_1 = \dots = C_n = 0$.

Adibidez, $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ berreturen multzoa linealki independentea da edozein tartetan. Izan ere, koefiziente guztiak nuluak ez badira, $C_1 + C_2 x + \dots + C_{n+1} x^n$ polinomioak bere erroetan bakarrik da nulua, eta erroak gehienez n direnez ezin bete dezakete tarte oso bat. Emaizta honen ondorioz, nahi beste bektore independente daude eta, beraz, funtzio erregularren espazioaren dimentsioa infinitua da.

¹Ikus 17. orriko oin-oharra.

Ekuazio diferentzialak aztertzen ari garenez, propietate algebraikoez gain funtzioen deribatuetz ere arduratuko gara. Izan ere, propietate geometrikoen eta diferentzialen arteko erlazio batzuk daudela ikusiko dugu. Hasteko, $\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$ funtzio-multzoaren **Wronski-ren² determinantea**, edo **wronskiarra**, ondoko funtzioa dela esango dugu:

$$W[y_1, \dots, y_n](x) \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (3.46)$$

$\{y_k(x) : k = 1, \dots, n; x \in I\}$ multzoa linealki menpekota bada, koefiziente konstantetako (3.45) konbinazioa eta bere $n - 1$ lehen deribatuak tartean osoan dira nulua:

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) &= 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \cdots + C_n y_n'(x) &= 0, \\ \vdots & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Ekuazio hauek x puntu bakoitzean C_k ezezagunak dituen sistema lineal homogeneoa da, menpekotasun linealaren hipotesiaren ondorioz soluzio ez-nulua duena. Beraz, tarteko puntu guztietan sistemaren determinantea, wronskiarra alegia, nulua izango da. Emaitza honek frogatzen duenez, *funtzio-multzo linealki menpeko baten wronskiarra nulua da tarteko puntu guztietan*. Ondorioz, wronskiarra identikoki nulua ez bada, funtzioak linealki independenteak dira.

3.10 ARIKETA $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ berreturak linealki independenteak direla beste modu batera frogatzeko, egiaztatu euren wronskiarra ez dela nulua zuzen errealeko ezein puntutan.

Aurreko emaitzaren alderantzizkoa, ordea, ez da egia, laster ikusiko ditugun bestelako baldintzak ezartzen ez badira behintzat. Wronskiarra nulua bada, (3.47) sistemak soluzio ez-nulua du puntu bakoitzean; baina, oro har, ezin aukera daiteke soluzio berbera puntu guztietan.

3.11 ARIKETA Azter dezagun hurrengo funtzio-familia:

$$\varphi_a(x) \equiv \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-(x-a)^2}\right), & \text{baldin } |x-a| < 1, \\ 0, & \text{baldin } |x-a| \geq 1. \end{cases} \quad (3.48)$$

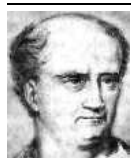
Egiaztatu $(-1, 3)$ tartean $y_1 = \varphi_0$ eta $y_2 = \varphi_2$ funtzioak linealki independenteak direla nahiz eta euren wronskiarra identikoki nulua izan. Erregularak al dira funtzio horiek?

Ondorioz, bestelako baldintzarik ezean, wronskiarra nulua izateak ez du funtzioen menpekotasun lineala bermatzen, baina nulua ez bada funtzioak linealki independenteak dira nahitaez.

3.12 ARIKETA Erabili azken iruzkina tartean guztietan

$$\{e^{k_i x} : i = 1, \dots, n\} \quad (3.49)$$

sistema linealki independentea dela frogatzeko. ($i \neq j$ denean $k_i \neq k_j$ betetzen da.)



² **Josef Hoëné de Wronski** (1778-08-23, Wolsztyn, Polonia; 1853-08-08, Neuilly, Frantzia). funtzioen serie-garapenak aztertzean Lagrange-k lehenago egindako lan baten kritika egitean sartu zituen bere izeneko determinanteak.

3.6 probleman ikusiko dugunez,

$$\{x^{p_i} e^{k_i x} : p_i = 0, \dots, m_i; i = 1, \dots, n\} \quad (3.50)$$

erako sistema oro linealki independentea da tarte guztietan. Aurreko 3.10 eta 3.12 ariketan ikusitako emaitzen orokorpena da hau, eta koefiziente konstanteetako ekuazio linealak aztertzean garrantzi handikoa izango da.

3.6 Ekuazio diferentzial linealak

Azter dezagun n ordenako ekuazio lineala:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \quad (3.51)$$

a_0 koefizientearekin zatituz alda daitekeen gauza bakarra definizio-tartea denez, aurrerantzean ordena altueneko deribatuaren koefizientea unitatea dela suposatuko dugu beti:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x). \quad (3.52)$$

2.7 atalean aztertutako lehen ordenako ekuazio linealaren kasuan bezalaxe, ekuazioa **homogeneoa** (edo **ezosoa**) da gai askea nulua denean: $b = 0$. Hau egia ez bada, ekuazioa **osoa** (edo **inhomogeneoa**) da.

Esplizituki esaten ez badugu ere, a_1, a_2, \dots, a_n eta b funtzioak I tarte batean jarraituak direla suposatuko dugu beti. Jarraitasun-tarte horretan, beraz, 3.2 ataleko existentzia eta bakartasunaren teoremaren hipotesiak betetzen dira. Gainera, A.3 atalean frogatuko dugunez, ekuazio linealen kasuan hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra globala da: I tarte osoan zehar dago definiturik. Hortaz, hemendik aurrera soluzioak a_k koefizienteen jarraitasun-tarte osora hedatzen direla emango dugu.

Notazioa errazteko $D \equiv d/dx$ deribazio-eragileaz baliatuko gara eta (3.52) ekuazio lineal bakoitzeko

$$L \equiv D^n + a_1(x)D^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x)D + a_n(x) \quad (3.53)$$

eragile lineala definituko dugu, I tartean definitutako $f(x)$ funtzio bati ondokoa egokiarazteko moduan:

$$(Lf)(x) = f^{(n)}(x) + a_1(x)f^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1}(x)f'(x) + a_n(x)f(x). \quad (3.54)$$

L eragilearen bidez, (3.52) ekuazioa $Ly = b$ era laburrean idazten da eta dagokion homogeneoa $Ly = 0$ da. Eragilearen linealtasuna, deribazio, batuketa eta biderketaren oinarrizko propietateen ondorio zuzena da:

$$L(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 Lf_1 + C_2 Lf_2, \quad C_1 \text{ eta } C_2 \text{ konstanteak direlarik.} \quad (3.55)$$

3.7 Ekuazio lineal homogeneoak

Azter dezagun n ordenako ekuazio lineal homogeneoa:

$$Ly = 0. \quad (3.56)$$

\mathbb{L} eragilearen linealtasuna **gainezarmenaren printzipioaren** baliokidea da: bi soluzioren batura soluzioa da eta $\{y_k : k = 1, \dots, r\}$ funtzioak homogeneousaren soluzioak badira, C_k koefiziente konstanteetako edozein konbinazio ere soluzioa izango da:

$$\mathbb{L}y_k = 0 \quad \implies \quad \mathbb{L} \sum_{k=1}^r C_k y_k = \sum_{k=1}^r C_k \mathbb{L}y_k = 0. \tag{3.57}$$

Honek ekuazio lineal homogeneousaren soluzioek osaturiko multzoa espazio bektoriala dela frogatzen du. Soluzio-espazioaren dimentsioa zehazteko, 3.5 atalean wronskiarrari buruz ikusi dugun emaitzaren kontrakoa frogatuko dugu hasteko. Horretarako funtzioak ekuazio lineal homogeneousaren soluzioak direlako hipotesi gehigarria erabili beharko dugu.

3.7.1 Wronskiarrak eta menpekotasun lineala

3.1 TEOREMA *Kontsidera ditzagun I tartean definituriko n ordenako ekuazio lineal homogeneousaren n soluzio: $\mathbb{L}y_k = 0$. Hurrengo hiru baieztapenak elkarren baliokideak dira:*

1. y_k funtzioak linealki menpekoak dira I tartean.
2. y_k funtzioen wronskiarrak identikoki nulua da I tarte osoan.
3. y_k funtzioen wronskiarrak nulua da $x_0 \in I$ puntu batean.

Funtzioak menpekoak direnean, wronskiarrak tarteko puntu guztietan (eta, beraz, x_0 delakoan) nulua dela 3.5 atalean frogatu genuen. Alderantzizkoa frogatzeko existentzia eta bakartasunaren teorema —orain funtzioak ekuazio bakar baten soluzioak direla suposatzen dugulako betetzen dena— erabili beharko dugu. Wronskiarrak x_0 puntuan zero bada, $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ konbinazio lineala eraiki ondoren, C_k koefizienteak zehazteko, konbinazioa eta bere $n - 1$ lehen deribatuak x_0 puntuan nulua izateko eskatzen dugu:

$$\begin{array}{l} y(x_0) = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ y'(x_0) = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{array} \tag{3.58}$$

Hipotesiz sistema lineal honen determinantea — x_0 puntuan wronskiarrak duen balioa, alegia— nulua denez, C_k koefizienteetarako soluzio ez-nuluren bat existitzen da. Emaitza honek, berez, koefiziente ez-nulu horiekin $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ konbinazioa x_0 puntuan nulua dela frogatzen du, baina koefizienteak aldatu gabe I tarteko puntu guztietan nulua dela ikusteko, hauxe erabiliko dugu: x_0 puntuan kalkulaturiko koefizienteetako y konbinazioak ekuazio homogeneousak eta (3.58) adierazpenetako $y(x_0) = y'(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ hastapen-baldintzak betetzen ditu; baina baldintza berberak betetzen ditu soluzio nulua. Ondorioz, soluzioaren bakartasunak koefiziente ez-nuluetako $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ konbinazioa tarte osoan nulua dela diosku eta, beraz, y_k soluzioak linealki menpekoak direla.

3.7.2 Ekuazio homogeneousaren soluzio-espazioa

Bigarren urratsa, n ordenako ekuazio homogeneousaren soluzio-espazioaren dimentsioa n baino txikiagoa ezin izan daitekeela frogatzea da. Izan ere, existentzia eta bakartasunaren teoremari

esker, ondoko n zutabeek emandako hastapen-baldintzei dagozkien n soluzio daude:

$$\begin{array}{ccccccc} y_1(x_0) = 1, & y_2(x_0) = 0, & & & y_n(x_0) = 0, & & \\ y_1'(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & & \dots & y_n'(x_0) = 0, & & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, & & & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1. & & \end{array} \quad (3.59)$$

Soluzio hauek linealki independenteak dira, x_0 puntuan duten wronskiarra 1 baita. Argi dago gauza bera frogatzeko hastapen-baldintzak era askotara aukera daitezkeela, nahikoa baita dagokien wronskiarra nulua ez izatea.

n ordenako ekuazio lineal homogeenoren n soluzio linealki independentek osaturiko multzoari **oinarrizko soluzio-sistema** deritzo. Frogatu berri dugunez, horrelako soluzio-sistemak existitzeaz gain infinitu dira. Gainera, hirugarren urratsean, oinarrizko sistema bakoitza soluzio-espazioaren oinarria dela frogatuko dugu eta, beraz, soluzio-espazioaren dimentsioa n denez ezin egon daitezkeela $n + 1$ soluzio linealki independente dituen multzorik.

3.2 TEOREMA n ordenako ekuazio lineal homogeenoren n soluzio linealki independente, y_k , aukeratuz gero, beste edozein soluzio era bakarrean adieraz daiteke aipaturiko soluzio independenteen koefiziente konstanteetako konbinazio baten bidez.

Izan ere, y soluzioa bada, $x_0 \in I$ puntuan

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 y_1(x_0) & + & C_2 y_2(x_0) & + & \dots & + & C_n y_n(x_0) & = & y(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) & + & C_2 y_2'(x_0) & + & \dots & + & C_n y_n'(x_0) & = & y'(x_0), \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) & + & C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) & + & \dots & + & C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y^{(n-1)}(x_0) \end{array} \quad (3.60)$$

sistemak C_k koefizienteetarako soluzio bakarra du, bere determinantea y_k soluzio independenteen wronskiar ez-nulua da eta. Puntu horretan kalkulaturako C_k koefizienteak $\sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ konbinazioa I tarte osoan eraikitzeke erabil ditzakegu. Konbinazio horrek, y_k direlakoek bezalaxe, ekuazio homogeenoa beteko du, baita y soluzioak x_0 puntuan betetzen dituen hastapen-baldintza berberak ere. Existentzia eta bakartasunaren teorema bi soluzioak berdinak direla baieztatzen du. Ondorioz, $y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x)$ izango dugu I tarte osoan. Adibidez, $y'' + \omega^2 y = 0$ osziladore harmonikoaren oinarrizko sistema bat $\{\cos \omega x, \sin \omega x\}$ da, elementuak soluzioak izateaz gain euren wronskiarra ω baita. Osziladore harmonikoaren soluzio orokorra, hortaz, $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$ da.

Esan dugunaren arabera, ekuazio lineal homogeenoren soluzio orokorra n soluzio linealki independenteren hautazko koefiziente konstanteetako konbinazio lineala da, eta ez dago bestelako soluziorik. Oinarrizko soluzio-sistemak era askotara aukera daitezkeenez, soluzio orokorra itxuraz desberdinak diren infinitu modutara idatz daiteke, baina forma guztiek dauzkate soluzio berberak: ekuazio linealek ez dute soluzio singularrik onartzen. Adibidez, goian aipatu dugun osziladore harmonikoaren kasuan, soluzio orokorraren bost adierazpen baliokide ikusi genituen 1.3 probleman.

3.13 ARIKETA Egiaztatu $\{1, e^x, e^{-x}\}$ multzoa $y''' - y' = 0$ ekuazioaren oinarrizko sistema dela. Aurkitu oinarrizko beste sistema bat. Idatzi soluzio orokorra bi modu desberdinetara eta egiaztatu bien arteko baliokidetasuna.

3.7.3 Oinarrizko soluzio-sistema eta ekuazio lineal homogeneoa

Oinarrizko soluzio-sistema bakoitzak, dagokion ekuazio lineal homogeneoa bereizten du, deribatu altueneko koefizientea ohi bezala unitatearen berdina aukeratzen bada behintzat. Izan ere, n funtzioek osaturiko multzoa L_1 eta L_2 eragile linealen oinarrizko sistema bada, $L_1 = L_2$ eragilearen oinarrizko sistema izango da, halaber, baina azken eragilearen ordena $n - 1$ da gehienez eta, ondorioz, n soluzio independente onartzeko eragile nulua izan beharko da eta, beraz, $L_1 = L_2$.

Gainera, $\{y_1, \dots, y_n\}$ oinarrizko soluzio-sistema batetik hasita erraz eraiki daiteke dagokion ekuazio lineal homogeneoa. Oinarrizko sistema soluzio orokorra ematen duenez, 3.1 ataleko prozeduraz balia gintezke dagokion ekuazioa eraikitzeko, baina kasu berezi honetan badago hobe egiterik. Beste edozein y soluzio, sistemako y_k soluzioen konbinazio lineala denez, $\{y_1, \dots, y_n, y\}$ sistema linealki menpekota da eta, ondorioz, bere wronskiarra identikoki nulua: $W[y_1, \dots, y_n, y] = 0$. Baina azken hau da y_k soluzio independenteak onartzen dituen ekuazio lineal homogeneoa, y aldagaia ezezaguna delarik. Wronskiarra garaturik $y^{(n)}$ deribatu altueneko koefizientearekin zatituz, aipaturiko soluzio-sistema onartzen duen ekuazio lineal homogeneo normalizatu bakarra lortzen dugu. (Erraz ikusten denez, koefiziente hau $W[y_1, \dots, y_n]$ da eta, beraz, ez da nulua.) Adibidez, x eta x^{-1} linealki independenteak dira jatorria ez duen edozein tartetan. Dagokien ekuazio lineal homogeneoa honako hau da:

$$W[x, x^{-1}, y] = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & y \\ 1 & -x^{-2} & y' \\ 0 & 2x^{-3} & y'' \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} y'' - \frac{2}{x^2} y' + \frac{2}{x^3} y = 0. \quad (3.61)$$

Ekuazioa forma normalean idazteko, $W[x, x^{-1}] = -2x^{-1}$ wronskiarrekin zatitu behar da.

3.14 ARIKETA Aurkitu $\{x, e^x\}$ oinarrizko soluzio-sistema onartzen duen ekuazio lineal homogeneoa. Zein tartetan egon daiteke definiturik?

Jakina, alderantzizko problema —ekuazio lineal homogeneoa emanda, n soluzio independente (eta, beraz, guztiak) aurkitzea, hain zuzen— askoz ere zailagoa izaten da.

3.7.4 Liouville-ren formula

Orain aztertuko dugun formula erabilgarria Liouville, Abel³ edo Ostrogradski-ren⁴ izenekin lotzen dute egileek, eta n ordenako ekuazio diferentzial baten n soluzioen W wronskiarra nola aldatzen den puntu batetik bestera adierazten du:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x a_1(u) du}, \quad \forall x \in I. \quad (3.62)$$



³ **Niels Henrik Abel** (1802-08-05, Finnoy, Norvegia; 1829-04-06, Froland, Norvegia). Ekuazio integral baten lehenengo soluzioa aurkitu zuen 1823an, eta hurrengo urtean bosgarren mailako ekuazio orokorra ezin ebatz daitekeela algebraikoki frogatu zuen. Analisisian zehaztasuna sartzean eragin handia izan zuen eta funtzio eliptikoei buruzko lan garrantzitsuak egin zituen. Oso bizitza laburra izan arren, zor zaizkion ideia eta emaitzen kopurua harrigarria da.



⁴ **Mikhail Vasilevich Ostrogradski** (1801-09-24, Pashennaya, Ukraina; 1862-01-01, Poltava, Ukraina). Nahiz eta bere ekarpen nagusia hidrodinamikan egin, termodinamika, potentzialaren teoria, integral bikoitz, elastizitate, algebra eta ekuazio diferentzialei buruzko hainbat lan garrantzitsu argitaratu zituen.

Azpiratu behar da hemen, beti bezala, $a_0 \equiv 1$ dela suposatu dugula. Bestalde, esponentzial bat beti positiboa denez, x_0 puntu bakar batean nulua izatea eta ekuazioaren definizio-tarte osoan zero izatea guztiz baliokideak dira, 3.1 teoreman ere frogatu genuen bezala. Emaiza honen frogapena W wronskiarrak betetzen duen ekuazio diferentziala ebatztea datza. Notazioa errazteko $n = 2$ dela emango dugu, baina frogapena n balio guztietarako hedatzen da neke handirik gabe. Determinante wronskiarraren errenkadak deribatzen baditugu,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}, \quad (3.63)$$

lehen batugaia nulua da eta bigarrean y_1 eta y_2 ekuazioaren soluzioak direla ($y_k'' = -a_1 y_k' - a_2 y_k$) erabiliz, hauxe dugu:

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1 y_1' - a_2 y_1 & -a_1 y_2' - a_2 y_2 \end{vmatrix}. \quad (3.64)$$

Bigarren errenkadari a_2 bider lehena batuz lortzen dena,

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1 y_1' & -a_1 y_2' \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad (3.65)$$

lehen ordenako ekuazio lineal homogeneoa da, $W' + a_1 W = 0$, eta, hortaz, banangarria: koadraturara laburtzen denean (3.62) adierazpena lortzen da.

3.15 ARIKETA Egiaztatu zuzenean Liouville-ren formula 3.14 ariketaren kasuan $x_0 = 0$ denean.

3.7.5 Ekuazio homogeneoaren ebazpena

Ekuazio lineal homogeneoaren a_k koefiziente guztiak konstanteak badira, 3.10 ataleko Euler-en metodoa erabil daiteke n soluzio linealki independente eta, beraz, soluzio orokorra bilatzeko, eta gauza bera esan daiteke 3.12 atalean ikusiko ditugun Cauchy eta Euler-en ekuazioei buruz. Bestelako kasuetan ebazpena zailagoa izaten da, baina ekuazio homogeneoa osorik ebazteko behar diren n soluzio independenteak bilatzean, zailena hasierako $n - 1$ soluzioak aurkitzea dela esan behar da, azken soluzioa —lehen ordenako ekuazio lineal homogeneo (banangarri) baten soluzioa dena— koadratura baten bidez adieraz baitaiteke beti. Izan ere, edozein arrazoiengatik y_1 soluzio partikular ez-nulu bat ($Ly_1 = 0$) ezagutzen badugu, **d'Alembert-en⁵ metodoaren** $y = y_1 \int u dx$ aldagai-aldaketak, $n - 1$ ordenako lineal homogeneo batera laburtzen du ekuazioa. Emaiza hau frogatzeko, saiatzun dugun $y = y_1 \int u dx$ soluzioa eta bere $n - 1$ lehen deribatuak a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 eta 1 faktoreekin hurrenez hurren biderkatu ondoren, batzen baditugu, hauxe



⁵ **Jean Le Rond d'Alembert** (1717-11-17, Paris; 1783-10-29, Paris). 1742ko *Traité de dynamique* liburuan indarraren definizioa hobetu zuen, baita bere izeneko printzipioa sartu ere. Ekuazio diferentzialen —eta bereziki uhin-ekuazioaren— azterketen aitzindaria izan zen. Hidrodinamikan lan egiteaz gain, limitearen kontzeptua eta deribatuaren definizioa aztertzean analisiaren oinarriak ezartzen lagundu zuen.

dugu:

$$\begin{array}{l}
 a_n \left\{ \begin{array}{l} y = y_1 \int u \, dx \\ y' = y_1' \int u \, dx + y_1 u \\ y'' = y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' \\ \vdots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u \, dx + ny_1^{(n-1)} u + \dots + y_1 u^{(n-1)} \end{array} \right\} \\
 a_{n-1} \\
 a_{n-2} \\
 \vdots \\
 1 \left\{ \begin{array}{l} y = y_1 \int u \, dx \\ y' = y_1' \int u \, dx + y_1 u \\ y'' = y_1'' \int u \, dx + 2y_1' u + y_1 u' \\ \vdots \\ y^{(n)} = y_1^{(n)} \int u \, dx + ny_1^{(n-1)} u + \dots + y_1 u^{(n-1)} \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (3.66)$$

$$\underline{Ly} = \underline{Ly_1} \int u \, dx + y_1 u^{(n-1)} + \tilde{a}_1 u^{(n-2)} + \dots + \tilde{a}_{n-1} u.$$

Ezkerreko gaian hasierako ekuazioa berreskuratzen dugu eta eskuinekoan $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ dauzkan ekuazio lineal bat, zeren eta, y_1 funtzioa ekuazio homogeneousaren soluzioa denez, integral bat daukaten gaian konbinazioa nulua baita: $Ly_1 = 0$. Ondorioz, lorturiko soluzio independente bakoitzarekin ekuazioaren ordena unitate batez behera dezakegu.

3.16 ARIKETA Egiaztatu $a_{n-1}(x) + xa_n(x) = 0$ baldintza betetzen bada, hau da, ekuazioa

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-2}(x)y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0 \quad (3.67)$$

egiturakoa bada, $y = x$ funtzioa soluzio partikularra dela. Erabili emaitza interesgarri hau $xy'' - xy' + y = 0$ ekuazioa ebazteko. Nolako egitura izan behar du homogeneousak $y = 1$ soluzio partikularra onar dezan? Eta $y = e^{\pm x}$ soluzioa izateko?

3.17 ARIKETA Ebatzi $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ekuazioa.

Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneousak

Praktikan maizenik agertzen den bigarren ordenako ekuazio homogeneousaren kasuan, nahikoa da soluzio bakar bat ezagutzea orokorra koadraturen bidez eraikitzeko.

3.18 ARIKETA Eman dezagun y_1 funtzioa $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneousaren⁶ soluzioa dela. Erabil ezazu d'Alembert-en metodoa soluzio orokorra honako hau dela frogatzeko:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int P \, dx}}{y_1^2} \, dx. \quad (3.68)$$

3.19 ARIKETA Erabil ezazu Liouville-ren formula $\{y_1, y_1 \int u \, dx\}$ funtzioekin, aurreko emaitza era zuzenean egiaztatzeko.

3.20 ARIKETA Erabili 3.18 ariketa eta $y_1 = e^{kx}$ soluzioa ondoko emaitza hau frogatzeko:

$$y'' - 2ky' + k^2y = 0 \quad \iff \quad y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}. \quad (3.69)$$

⁶Hemen eta 6. gaian ordeko notazio hau erabiliko dugu $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ ekuazioa adierazteko.

Bigarren ordenako ekuazio homogeneoaren soluziorik ezagutzen ez bada, ondoren aztertzen diren aldagai-aldaketak saia daitezke lehen soluzioa bilatzeko. Jakina, kasu gehienetan ekuazio berria jatorrizkoa bezain zaila izango da, baina batzuetan ebazten dakigun ekuazio bat lortuko da horrela eta, ondorioz, problema koadraturetara laburtuko da zuzenean. Has gaitzen aldagai independentea aldatzen.

3.21 ARIKETA Egin $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ekuazioan $x \rightarrow t \equiv \int \sqrt{Q} dx$ aldagai independenteen aldaketa eta frogatu $2PQ + Q' = 0$ baldintza betetzen denean soluzioak aurkitzen ahalbidetzen duela. Ebatzi hurrengo ekuazioa:

$$xy'' - y' + 4x^3y = 0. \quad (3.70)$$

Bestelako zein kasutan izan daiteke baliagarria aldagai-aldaketa hau?

Menpeko aldagai ere alda daiteke.

3.22 ARIKETA Egin $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ekuazioan **Liouville-ren⁷ transformazioa**, menpeko aldagai $y \rightarrow u \equiv y e^{\frac{1}{2} \int P dx}$ formularen bidez aldatzen duena, eta frogatu ekuazioa ondoko **forma normalera** laburtzen duela:

$$u'' + f(x)u = 0. \quad (3.71)$$

Ondorioztatu soluzioak aurkitzen ahalbidetzen duela baldin eta $f(x) \equiv (4Q - P^2 - 2P')/4$ koefizientea konstantea bada. (Aipaturiko adierazpena, a , b eta c konstanteen bidez $c/(ax + b)^2$ moduan idazten denean ere izaten da erabilgarria transformazio hau, kasu honetan lortzen den Cauchy eta Euler-en ekuazioa erraz ebazten baita, 3.12 atalean ikusiko dugunez.) Aurkitu

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad (3.72)$$

ekuazioaren soluzio orokorra.

Kasu berezi batzuetan 6.15 probleman aztertuko dugun aldagai-aldaketa ere baliagarria izango da. Aldaketa hauek guzti hauek huts egiten badute, 6. gaian aztertuko ditugun metodoetara edo metodo hurbilduetara jo beharko da. Hala ere, esan behar da a_k guztiak konstanteak badi-ra, geroago ikusiko dugun Euler-en metodoak n ordena guztietarako soluzioak bilatzeko bide algebraiko sistematikoa ematen digula.

3.8 Ekuazio lineal osoak

Ekuazio lineala dela eta, y_1 eta y_2 funtzioak b_1 eta b_2 gai inhomogeneoei dagozkien soluzioak badira, orduan koefiziente konstanteetako $a_1y_1 + a_2y_2$ konbinazioa $a_1b_1(x) + a_2b_2(x)$ gai inhomogeneoari dagokio:

$$Ly_1 = b_1, \quad Ly_2 = b_2 \quad \implies \quad L(a_1y_1 + a_2y_2) = a_1Ly_1 + a_2Ly_2 = a_1b_1 + a_2b_2. \quad (3.73)$$

Ekuazio lineal osoen gainezarmenaren printzipio honen ondorioz, homogeneoaren soluzio bat eta osoaren beste bat batuz, osoaren soluzio berri bat lortzen da,

$$Ly_1 = 0, \quad Ly_2 = b \quad \implies \quad L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2 = b, \quad (3.74)$$



⁷ **Joseph Liouville** (1809-03-24, Saint-Omer, Frantzia; 1882-07-08, Paris). Elektromagnetismo, astronomia eta mekanikari buruz lan egin zuen. Sistema hamiltondar baten fase-espazioren bolumenaren iraupenari buruz frogatu zuen teorema oinarritzko garrantzia du mekanika estatistikoa. Ekuazio diferentzialak landu zituen (Sturm-ekin batera), baita funtzio eliptikoak eta funtzio algebraikoen integrazioaren teoria ere. Zenbaki transzendenten existentzia frogatu zuen eta deribatu frakzionarioa zor diogu.

eta, alderantziz, osoaren bi soluzioren arteko kendura homogeneousoluzioa da:

$$Ly_1 = Ly_2 = b \quad \implies \quad L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = 0. \quad (3.75)$$

Beraz, ekuazio osoaren soluzio orokorra dagokion homogeneousoluzio orokorra eta osoaren edozein soluzio partikular batuz lortzen da. Hortaz, ekuazio osoa bi urrats hauetan ebazten da:

1. Hasteko, homogeneousoluzioaren n soluzio linealki independente, y_k , aurkitu behar dira, euren bidez homogeneousoluzioaren $\sum_{k=1}^n C_k y_k$ soluzio orokorra (batzuetan **funtzio osagarria** deitzen dena) idazteko:

$$Ly = 0 \quad \iff \quad y = \sum_{k=1}^n C_k y_k. \quad (3.76)$$

2. Ondoren, osoaren y_p soluzio partikularren bat aurkitu behar da:

$$Ly_p = b. \quad (3.77)$$

Osoaren soluzio orokorra $y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + y_p$ izango da:

$$Ly = b \quad \iff \quad y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + y_p. \quad (3.78)$$

Adibidez, kontsidera dezagun ondoko ekuazio lineal osoa:

$$y''' - y' = 1. \quad (3.79)$$

3.13 ariketan ikusi genuenez, $y''' - y' = 0$ ekuazio homogeneousoluzio orokorra $y = A + Be^x + Ce^{-x}$ da. Kasu honetan, osoaren soluzio partikular bat ikuskapenez aurkitzen da: $y = -x$ funtzioa ekuazio osoaren soluzioa da. Ondorioz, honen soluzio orokorra $y = A + Be^x + Ce^{-x} - x$ izango da.

3.23 ARIKETA Aurkitu ondokoaren soluzio orokorra: $y'' + y = x$.

Pausorik zailena homogeneousoluzio orokorra aurkitzea izaten da, hori egin ondoren osoaren soluzio partikularren kalkulatzeko jarraian aztertzen diren bi metodo sistematikoetarik bat erabil baitezakegu.

3.8.1 Konstanteen aldakuntzaren metodoa

Homogeneousoluzioaren $\sum_{k=1}^n C_k y_k$ soluzio orokorra kalkulatu ondoren, osoaren soluzio partikular bat aurkitzeko, C_k koefiziente konstanteak zehaztu behar diren $g_k(x)$ funtzioekin ordezkatzeko, $y_p = \sum_{k=1}^n g_k(x) y_k(x)$ konbinazioa saiatzeko. Azken n funtzio horien deribatuek ondoko n baldintzak bete ditzatela eskatzen da:

$$\begin{aligned} g'_1 y_1 &+ g'_2 y_2 &+ \cdots &+ g'_n y_n &= 0, \\ g_1 y'_1 &+ g_2 y'_2 &+ \cdots &+ g_n y'_n &= 0, \\ \vdots &&&&\vdots \\ g'_1 y_1^{(n-1)} &+ g'_2 y_2^{(n-1)} &+ \cdots &+ g'_n y_n^{(n-1)} &= b. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Horrela, saiaten dugun funtzioak eta bere deribatuek honako erlazio hauek beteko dituzte:

$$\begin{array}{l}
 a_n \left\{ \begin{array}{l} y_p = \sum_{k=1}^n g_k y_k \\ y'_p = \sum_{k=1}^n g_k y'_k + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k = 0 \right] \\ y''_p = \sum_{k=1}^n g_k y''_k + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y'_k = 0 \right] \\ \vdots \\ y_p^{(n-1)} = \sum_{k=1}^n g_k y_k^{(n-1)} + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k^{(n-2)} = 0 \right] \\ y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n g_k y_k^{(n)} + \left[\sum_{k=1}^n g'_k y_k^{(n-1)} = b \right] \end{array} \right\} \\
 \hline
 Ly_p = \sum_{k=1}^n g_k Ly_k + b
 \end{array} \quad (3.81)$$

Aurreko berdintzetan mako artean agertzen diren balioak (3.80) baldintzak dira. Gainera, y_k funtzioak homogeneousaren soluzioak dira, $Ly_k = 0$, eta, beraz, saiatu dugun soluzioak osoa betetzen du: $Ly_p = b$. Bestalde, (3.80) baldintzek sistema lineal bat osatzen dute eta azken honen determinantea, homogeneousaren oinarritzko sistema baten wronskiarra denez, ez da nulua eta, hortaz, deribatuetarako soluzio bakarra dago:

$$g'_k(x) = f_k(x). \quad (3.82)$$

Soluzio hau integraturik,

$$g_k(x) = \int f_k(x) dx + C_k, \quad (3.83)$$

eta saiatu dugun konbinazioan ordezkaturik, osoaren ondoko soluzioa lortzen da:

$$y_p = \sum_{k=1}^n \left(\int f_k(x) dx \right) y_k + \sum_{k=1}^n C_k y_k. \quad (3.84)$$

Ageri denez, azken soluzio hau, osoaren soluzio orokorra da, n integrazio-konstanteei esker soluzio partikular guztiak aurkitu baititugu.

Adibide moduan, azter dezagun

$$y'' - y = x^2, \quad (3.85)$$

nahiz eta horrelako ekuazioak (baina ez beheko 3.24 ariketako ekuazio orokorragoa, adibidez) geroago ikusiko dugun Euler-en metodoaren bidez errazago ebatzen diren. Homogeneousaren soluzio orokorra, $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, erraz egiaztatzen den bezala. Beraz, C_1 eta C_2 konstanteen ordeztu $g(x)$ eta $h(x)$ funtzioak erabili behar dira:

$$\begin{array}{l}
 -1 \left\{ \begin{array}{l} y_p = ge^x + he^{-x} \\ y'_p = ge^x - he^{-x} + \left[g'e^x + h'e^{-x} = 0 \right] \\ y''_p = ge^x + he^{-x} + \left[g'e^x - h'e^{-x} = x^2 \right] \end{array} \right\} \\
 \hline
 y''_p - y_p = 0 + x^2.
 \end{array} \quad (3.86)$$

Mako arteko

$$g'e^x + h'e^{-x} = 0, \quad (3.87)$$

$$g'e^x - h'e^{-x} = x^2 \quad (3.88)$$

baldintzetatik

$$g' = \frac{1}{2}x^2e^{-x}, \quad h' = -\frac{1}{2}x^2e^x \quad (3.89)$$

deribatuak lortzen dira, eta hemendik

$$g = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C_1, \quad h = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 2)e^x + C_2. \quad (3.90)$$

Beraz, ekuazioaren soluzio orokorra hau da:

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x^2 - 2. \quad (3.91)$$

3.24 ARIKETA Aurkitu $y'' + y = 1/\cos x$ ekuazioaren soluzio orokorra.

3.8.2 Cauchy-ren metodoa

Homogeneoa ebatzi ondoren osoaren soluzio partikular bat aurkitzeko ordezko metodo hau agian ez da aurrekoa bezain praktikoa, baina badu garrantzi teoriko handiagoa, baita interpretazio fisiko gardena ere. Cauchy-ren⁸ metodoan homogeneoaren soluzioaren ezagutzaz baliatzen da s parametroaren menpeko homogeneoaren soluzioen $K(x, s)$ familia bat eraikitzeko,

$$\mathbb{L}K(x, s) = 0, \quad K(x, s) = \sum_{k=1}^n C_k(s)y_k, \quad (3.92)$$

$x = s$ puntuan ondoko n hastapen-baldintzak betetzen dituen hain zuzen:

$$\begin{aligned} K(s, s) &= 0, \\ K'(s, s) &= 0, \\ &\vdots \\ K^{(n-2)}(s, s) &= 0, \\ K^{(n-1)}(s, s) &= 1. \end{aligned} \quad (3.93)$$

3.25 ARIKETA Froga ezazu (3.93) baldintzak betetzen dituen soluzio-familia bakarra dagoela.



⁸ **Augustin Louis Cauchy** (1789-08-21, Paris; 1857-05-23, Sceaux, Frantzia). 789 artikulutan bildutako Cauchy-ren lan ikaragarriari esker, matematikari honen izena hainbat emaitzetan agertzen da, Cauchy-ren integralaren teorema, aldagai konplexuko Cauchy eta Riemann-en ekuazioak, deribatu partzialtako soluzioen existentziari buruzko Cauchy eta Kovalevskaya-ren teorema eta Cauchy-ren segidak barne.

Soluzio-familia honekin $y_p = \int_{x_0}^x K(x, s) b(s) ds$ funtzioa eraikitzen da. Azken honek eta bere deribatuek ondoko adierazpenak betetzen dituzte hastapen-baldintza berezien ondorioz:

$$\begin{array}{l}
 a_n \left\{ \begin{array}{l} y_p = \int_{x_0}^x K(x, s) b(s) ds \\ \end{array} \right\} \\
 a_{n-1} \left\{ \begin{array}{l} y'_p = \int_{x_0}^x K'(x, s) b(s) ds + [K(x, x) b(x) = 0] \\ \end{array} \right\} \\
 a_{n-2} \left\{ \begin{array}{l} y''_p = \int_{x_0}^x K''(x, s) b(s) ds + [K'(x, x) b(x) = 0] \\ \end{array} \right\} \\
 \vdots \\
 a_1 \left\{ \begin{array}{l} y_p^{(n-1)} = \int_{x_0}^x K^{(n-1)}(x, s) b(s) ds + [K^{(n-2)}(x, x) b(x) = 0] \\ \end{array} \right\} \\
 1 \left\{ \begin{array}{l} y_p^{(n)} = \int_{x_0}^x K^{(n)}(x, s) b(s) ds + [K^{(n-1)}(x, x) b(x) = b] \\ \end{array} \right\} \\
 \hline
 \mathbb{L}y_p = \int_{x_0}^x \mathbb{L}K(x, s) b(s) ds + b
 \end{array} \tag{3.94}$$

K funtzioa homogeneoaren soluzioa denez ($\mathbb{L}K = 0$), eskuineko lehen batugaia nulua da: $\int_{x_0}^x \mathbb{L}K(x, s) b(s) ds = 0$. Beraz, metodoaren bidez eraikitako funtzioa osoaren soluzioa da: $\mathbb{L}y_p = b$. Izan ere, $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$ baldintza nuluak betetzen dituen soluzio partikularra da preseski, (3.94) adierazpenean $x = x_0$ eginez ikusten den bezala.

Azter dezagun berriro (3.85) ekuazioa. Homogeneoaren soluzio orokorra $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ denez, behar dugun soluzio-familia $K(x, s) = C_1(s) e^x + C_2(s) e^{-x}$ motakoa izango da eta bete behar dituen baldintzak ondokoak:

$$K(s, s) = C_1(s) e^s + C_2(s) e^{-s} = 0, \tag{3.95}$$

$$K'(s, s) = C_1(s) e^s - C_2(s) e^{-s} = 1. \tag{3.96}$$

Hemendik $C_1(s) = e^{-s}/2$ eta $C_2(s) = -e^s/2$ lortzen dira eta, beraz, $K(x, s) = \sinh(x - s)$. Ondorioz, hauxe dugu hastapen-baldintza nuluak betetzen dituen soluzioa:

$$y = \int_0^x \sinh(x - s) s^2 ds = 2 \cosh x - x^2 - 2. \tag{3.97}$$

Orain, gai inhomogeneoa, x^2 barik, x bada, dagokion soluzioa lortzeko nahikoa da integral bat ebatzea:

$$y = \int_0^x \sinh(x - s) s ds = \sinh x - x. \tag{3.98}$$

3.26 ARIKETA Erabili Cauchy-ren metodoa $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$ osziladore harmoniko bortxatua koardaturetara laburtzeko.

$K(x, s)$ familia osoa kalkulatzeko ahaleginaren truke abantaila bat lortu da: edozein gai inhomogeneori (azken adibidean, edozein kanpo-indarri) dagokion soluzio partikularra lortzeko koardatura bakar bat egin behar da. Konstanteen aldakuntzaren metodoan b bakoitzeko sistema algebrako bat askatu behar da g'_k deribatuek kalkulatzeko eta, geroago, azken hauen n integralak ebatzi behar dira.

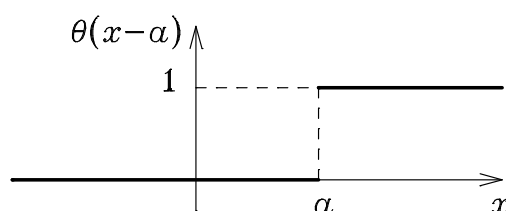
3.9 Oinarrizko soluzioa

Cauchy-ren metodoa fisikarako oso interesgarria den ikuspuntu batetik ulertzeko, kalkulu asko arintzen dituen «funtzio» batzuk aztertuko ditugu lehenago.

3.9.1 Heaviside-ren unitate-maila funtzioa

Unitate-maila funtzioa edo **Heaviside-ren⁹ funtzioa** deitzen dena honelaxe definitzen da:

$$\theta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{baldin } x < a, \\ 1, & \text{baldin } x > a. \end{cases} \quad (3.99)$$



3.1 IRUDIA Heaviside-ren unitate-maila funtzioa.

Ageri denez, deribatua nulua da, funtzioa jarraitua ez den $x = a$ puntuan izan ezik. Deribatu arrunta baino interesgarriagoa da ondoren definituko dugun deribatu orokortua. Har ditzagun f eta g funtzioak eta egin dezagun ondoko zatikako integrazioa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx. \quad (3.100)$$

Infinituan $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |fg| = 0$ betetzeko moduko portaera suposatzen badugu, lehen gaia nulua da eta lortzen dugun

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x) dx \quad (3.101)$$

adierazpena egiazkoa izango da, f eta g funtzioek, gainera, erregulartasun-propietate matematiko egokiak betetzen badituzte.

3.9.2 Deribatu orokortua

Bestalde, (3.101) ekuazioa edozein g funtzioaren **deribatu orokortuaren** definiziotzat har dezakegu, g funtzioak adierazpena funtzio arrunten zentzuan betetzeko behar diren baldintzak betetzen ez baditu ere. Heaviside-ren funtzioa jarraitua ez denez, ez da ezein funtzioaren jatorrizkoa zuzen erreal osoan eta, beraz, ezin egin daiteke (3.100) zatikako integrazioa; baina (3.101) adierazpenaz balia gaitzke bere deribatu orokortua definitzeko:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x - a) dx \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\theta(x - a) dx = - \int_a^{\infty} f'(x) dx = f(a). \quad (3.102)$$



⁹ **Oliver Heaviside** (1850-05-18, Camden Town, Ingalaterra; 1925-02-03, Torquay, Ingalaterra). Elektrizitate eta elektromagnetismoari buruzko lan garrantzitsuak egiteaz gain, kalkulu bektoriala sortu zuen, Gibbs-ekin batera. Zirkuituen teorian agertzen diren ekuazio diferentzialak modu algebraikoan ebazteko asmatu zuen eragile-metodoak —oso erabilgarria izan arren— eztabaida handia sorrarazi zuen, metodoaren oinarri matematikoa finkatu zen arte.

Aurreko adierazpeneko lehen gaian agertzen den $\theta'(x - a)$ deribatua arrunta bada, ez dago definiturik $x = a$ puntuan eta ezin erabil daiteke Riemann-en¹⁰ integrala. Azken honen orokorpena den Lebesgue-ren¹¹ integralaren zentzuan, deribatu arruntaren integrala nulua da integrakizuna nulua baita ia puntu guztietan. Bestalde, aipaturiko integrala nulua izan beharrean, $f(a)$ balioaren berdina dela diosku deribatu orokortuaren definizioak. Ikusitakoaren arabera, Heaviside-ren funtzioaren deribatu orokortua ez da deribatu arruntaren berdina, baizik eta $f(x)$ funtzio batekin integral-ikurraren azpian sartzen denean $x = a$ puntuan f funtzioak duen balioa ematen duen objektu matematikoa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta'(x - a) dx = f(a). \quad (3.103)$$

Integral-ikurraren azpian funtzio bakoitzari zenbaki bat egokiarazten dion horrelako objektu matematiko bati **funtzio orokortua** edo **banaketa** deitzen zaio eta Heaviside-ren deribatua haietarik famatuena eta erabilgarriena da: Dirac-en delta.

3.9.3 Dirac-en delta

Unitate-bulkada «funtzioa» edo **Dirac-en¹² delta** Heaviside-ren funtzioaren deribatu orokortua da: $\delta(x - a) \equiv \theta'(x - a)$. Beraz, funtzio batekin integral-ikurraren azpian jartzean δ -ren definizio-puntuan funtzioak duen balioa berreskuratzen da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx \equiv f(a). \quad (3.104)$$

3.27 ARIKETA Froga itzazu ondoko propietateak:

$$\int_b^c f(x)\delta(x - a) dx = \begin{cases} f(a), & \text{baldin } a \in (b, c), \\ 0, & \text{baldin } a \notin [b, c], \end{cases} \quad (3.105)$$

$$g(x)\delta(x - a) = g(a)\delta(x - a). \quad (3.106)$$

3.9.4 Limite orokortua

Dirac-en delta «fisikarien gustura» sartzeko erabil dugun eragile-metodoa Schwartz-ek sortutako banaketaren teoria¹³ zehatzaren antzekoa da (ikus [28]); baina badaude funtzio orokortuak matematikoki aztertzeke beste bide batzuk.



¹⁰ **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-09-17, Breselenz, Hannover —gaur egunean Alemania—; 1866-07-20, Selasca, Italia). Cauchy eta Riemann-en ekuazioak eta Riemann-en gainazalak bere doktorego-tesian agertu ziren. Integralaren kontzeptua hobetu zuen, baita bere izeneko funtzioaren zeroei buruzko konjektura famatua plazaratu ere; baina ezagunagoa da gaur eguneko fisika teorikoaren oinarritzko tresna den geometria diferentzian egindako ekarpena.



¹¹ **Henri Léon Lebesgue** (1875-06-28, Beauvais, Frantzia; 1941-07-26, Paris). Neurriaren teoria sortzean, handik aurrera analisi funtzionalaren oinarritzko tresna izango zen bere izeneko integralarekin Riemann-ena orokortu zuen. Horrez gain, topologia, Fourier-en analisisia eta potentzialaren teoria landu zituen.



¹² **Paul Adrien Maurice Dirac** (1902-08-08, Bristol, Ingalaterra; 1984-10-20, Tallahassee, AEB). Mekanika kuantikoa ezartzeko 1925eko artikuluan eta 1930eko *The principles of Quantum Mechanics* liburuan egindako ekarpenei esker 1933ko Fisikako Nobel saria eskuratu zuen Schrödinger-ekin batera. Bestalde, elektrodinamika kuantikoaren «aita» da eta elektroien ekuazioa aurkitzean antimateriaren existentzia auresan zuen, hasierako interpretazio-arazo batzuk gorabehera.

¹³Teoria honetan aztertzen dira funtzio orokortuak erabiltzean integralean agertzen den f funtzioak bete behar dituen baldintza matematikoa. Hemen bakarrik aipatu ditugu bi: erregulartasuna eta infinituan zerora joatea.

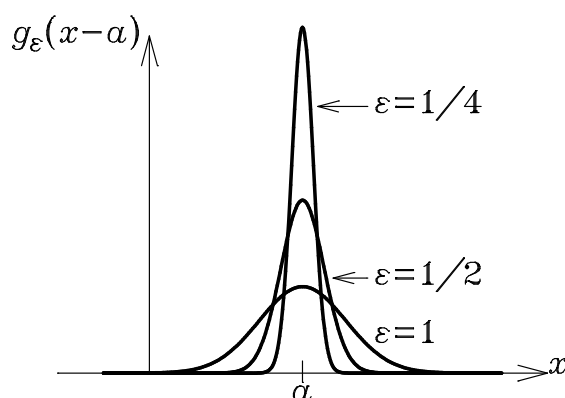
Izan ere, funtzio orokortuak funtzio «onen» limite moduan ere defini daitezke (ikus [23]), baina hemen fisikarien ikuspuntu erraztua erabiliko dugu berriro Dirac-en delta zabalera behe-rakorreko unitate-bulkaden limite idealtzat ulertzeko. Har dezagun edozein funtzio **batugarri**, $\int_{-\infty}^{\infty} |g| dx < \infty$, eta eraiki ditzagun g funtzioari eskuineranzko a luzerako translazioa aplikatu ondoren abszisa- eta ordenatu-eskalak ε eta $1/\varepsilon$ kontrako faktoreen bidez aldatuz lortzen diren funtzioak:

$$g_{\varepsilon}(x - a) \equiv \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x - a}{\varepsilon}\right). \quad (3.107)$$

Argi dago familia honetako funtzio guztiek integral berbera dutela:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_{\varepsilon}(x - a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx. \quad (3.108)$$

Pulstuen adibiderik arruntena $g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ pultsu gausstarra da, eta kasu honetan 3.2 irudian marraztutako $g_{\varepsilon}(x - a) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x-a)^2/\varepsilon^2}$ pultsuak lortzen dira. Pulstuen zabalera txikituz joan arren, integrala ez da aldatzen.



3.2 IRUDIA Gausstarren familia.

Orain kalkulatu nahi duguna edozein $g_{\varepsilon}(x - a)$ familiaren **limite orokortua** da, integral-ikurraren azpian honela definitzen dena:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_{\varepsilon}(x - a) \right] dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g_{\varepsilon}(x - a) dx. \quad (3.109)$$

Deribatu orokortuaren kasuan egin genuen bezalaxe, hemen ere funtzio arrunten kasuan batzuetan bakarrik betetzen den propietate bat —limite eta integralaren ordena aldatzeko posibilitatea, alegia— erabili dugu funtzio orokortuen eragiketa bat definitzeko.

Ondoko propietate garrantzitsua beharko dugu geroago.

3.28 ARIKETA Egiaztatu limite orokortua eta deribatu orokortua elkarrekin trukatea zilegia dela, hau da, limitearen deribatua deribatuaren limitea dela. Egia al da hau funtzio arrunten kasuan?

Defini dezagun hurrengo integral mugagabea:

$$G_{\varepsilon}(x - a) \equiv \int_{-\infty}^x g_{\varepsilon}(u - a) du. \quad (3.110)$$

3.29 ARIKETA Erabili g_ε funtzioen definizioa eta aldagai-aldaketa nabaria funtzio arrunten zentzuan ondoko propietatea betetzen dela frogatzeko:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x-a) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] \theta(x-a). \quad (3.111)$$

Lebesgue-k frogatu zuen konbergentziari buruzko teorema baten arabera, G_ε -en kasuan limite orokortua berbera da; hau da, g_ε -ekin ez bezala, G_ε -en kasuan (3.109) adierazpeneko bi gaiak funtzio arrunten zentzuan ere dira berdinak.

3.9.5 Dirac-en deltarantz jotzen duten segidak

(3.111) adierazpenaren deribatu orokortua kalkulatu, hurrengo emaitza erabilgarria lortzen dugu, (3.110) definizioari eta 3.28 eta 3.29 ariketetako emaitzei esker.

3.3 TEOREMA *Har dezagun edozein funtzio batugarri: $\int_{-\infty}^{\infty} |g| dx < \infty$. Orduan, funtzio orokortuen zentzuan zera dugu:*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] \delta(x-a). \quad (3.112)$$

Beste hitz batzuekin, $f(x)$ funtzioa edonolako izanik ere,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right) dx = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u) du \right] f(a) \quad (3.113)$$

frogatu dugu edo, nahiago bada, $\varepsilon \rightarrow 0$ egitean $g_\varepsilon(x-a)$ pultsuen intentsitatea konstantea dela, euren zabalera txikituz doala eta pultsuek integral-ikurraren azpian Dirac-en deltarantz (edo bere multiplo batera) jotzen dutela.

Adibidez, $\varepsilon \rightarrow 0$ limitean lehenagoko pulsu gausstarren zabalera txikituz doa intentsitatea aldatu gabe eta limitean $\delta(x-a)$ lortzen da:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} = \delta(x-a). \quad (3.114)$$

Emaitza honek funtzio orokortuen lengoia laburtura itzultzen du funtzio arrunten ondoko limitea:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} dx = f(a). \quad (3.115)$$

Integrala ebatzi baino lehenago, limitea funtzio arrunten zentzuan kalkulatu bada, emaitza nulua lortzen da integrakizuna nulua baita limitean, $x = a$ puntuan izan ezik. Limite orokortua, berriz, lehenengoz integrala eginez kalkulatu da eta horrela lortzen den emaitza desberdina erabiltzen dugu integral azpian agertzen den limitea zentzu orokortuan ulertzeko.

3.30 ARIKETA Erabili **ate funtzioa**,

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } |x| < 1/2, \\ 0, & \text{baldin } |x| > 1/2, \end{cases} \quad (3.116)$$

$\delta(x-a)$ funtziora jotzen duen segida bat eraikitzeko.

3.9.6 Oinarrizko soluzioa

$Ly = b$ ekuazio lineal osoaren oinarrizko soluzioa, unitate-pultsuari dagokion ekuazio osoa eta hastapen-baldintza nuluak betetzen dituen soluzioa da, definizioz:

$$\mathbb{L}E(x, a) = \delta(x - a), \quad (3.117)$$

$$E(x, a) = 0, \quad \text{baldin } x < a. \quad (3.118)$$

Unitate-pultsua Cauchy-ren metodoan ordezkaturik eta (3.105)–(3.106) propietateak erabiliz, zera dugu, $x_0 < a$ denean:

$$E(x, a) = \int_{x_0}^x K(x, s) b(s) ds = \int_{x_0}^x K(x, s) \delta(s - a) ds = \theta(x - a) K(x, a). \quad (3.119)$$

3.31 ARIKETA Egiaztatu zuzenean $E(x, a) = \theta(x - a)K(x, a)$ funtzioak (3.117)–(3.118) baldintzak betetzen dituela. Jarraituak al dira $x = a$ puntuan $E(x, a)$ funtzioa eta bere $n - 1$ lehen deribatuak

Alderantziz ere uler daiteke emaitza hau. $x < x_0$ tartean nulua den edozein $b(x)$ gai inhomogeneo, pultsuen gainezarmen lineal baten moduan idatz dezakegu, (3.105)-ren ondorioz zera baitugu $x > x_0$ denean:

$$b(x) = \int_{x_0}^{\infty} b(a) \delta(x - a) da. \quad (3.120)$$

Gainezarmenaren printzipioaren arabera, hastapen-baldintzak beti nuluak badira, $\delta(x - a)$ gaiari dagokion soluzioa $E(x, a)$ denez, $b(a) \delta(x - a) da$ delakoari dagokiona $b(a) E(x, a) da$ izango da eta, ondorioz, (3.120) adierazpenak emandako $b(x)$ orokorraren kasuan ondokoa:

$$y = \int_{x_0}^{\infty} b(a) E(x, a) da = \int_{x_0}^{\infty} b(a) \theta(x - a) K(x, a) da = \int_{x_0}^x b(a) K(x, a) da. \quad (3.121)$$

Cauchy-ren metodoaren soluzio partikularra da azken hau preseski, eta aipaturiko metodoa ikuspuntu berritik agertzen zaigu orain: problema lineala dela eta, unitate-pultsuari dagokion oinarrizko problema ebatzi ondoren, beste edozein problemari dagokion soluzioa lortzeko nahikoa da gai inhomogeneoa intentsitate egokiko pultsuen gainezarmen modura garatu ondoren dagozkien soluzioak batzea.

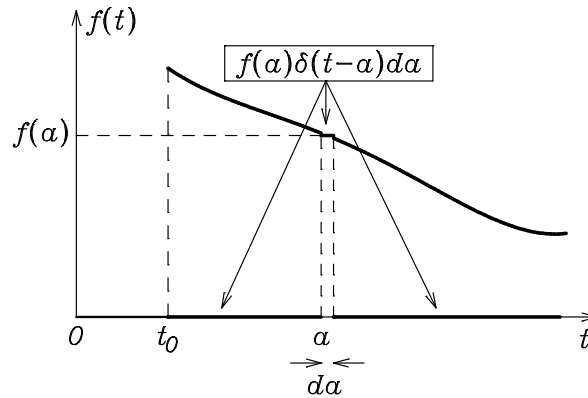
Adibide fisiko ezagunenak osziladore harmoniko bortxatua,

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (3.122)$$

eta RLC zirkuitua,

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dV}{dt}, \quad (3.123)$$

ditugu. $f(t)$ kanpo-indarra edo indar elektroeragilearen dV/dt deribatua zabalera arbuigarria duten bulkaden segida modura uler daitezke, (3.120) emaitza matematikoak eta 3.3 irudiak frogatzen dutenez. Nahikoa da, beraz, $f(t) = \delta(t - a)$ edo $dV/dt = \delta(t - a)$ pultsuari dagokion oinarrizko problema ebatzea, beste edozein kanpo-eragini dagokiona gainezarmenaren printzipioaren bidez kalkulatzeko. Cauchy-ren metodoan bezalaxe, horrela lortzen den soluzioa baldintza nuluei (hau da, kanpo-eragina hasi baino lehenago pausagunean zegoen osziladoreari edo karga gabeko zirkuituari) dagokiena da. Jakina, osoaren soluzio orokorrean badaude, gainera, homogeneoaren soluzio guztiak, kanpo-indarrak ez dagoenean ditugun sistema isolatuei dagozkienak hain zuzen.



3.3 IRUDIA $f(t)$ indarra bulkaden segida modura.

Lehen aztertu ditugun adibide fisikoetan, arin zein astiro indargetuz doazen portaera iragankorrei dagozkie homogeneoaren soluzioak, baina beste kasu batzuetan garrantzi handiko soluzioak izan daitezke, hala nola Maxwell-en teoriaren erradiazio elektromagnetikoa. Ekuazio osoak ebazteko metodo hau era naturalean hedatzen da eremuen teoretan agertzen diren deribatu partzialetako ekuazio linealetara, eta testuinguru horretan **Green-en funtzioaren** metodoa deritzo. Gainera, Sturm eta Liouville-ren problema inhomogeneoak 9.6 atalean aztertzean ere agertuko zaigu.

3.10 Koefiziente konstanteetako ekuazio homogeneoak

Ekuazio lineal homogeneoaren a_k koefiziente guztiak konstanteak badira,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (3.124)$$

L eragile diferentziala deribazio-polinomioa da:

$$L = P(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n. \quad (3.125)$$

Hemen $D \rightarrow z$ ordezkapen formal eginez, deribazio-polinomioari dagokion **polinomio karakteristikoa** lortzen da:

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (3.126)$$

Algebraren oinarrizko teoremaren ondorioz, badakigu polinomio hau

$$P(z) = \prod_{i=1}^r (z - k_i)^{m_i} \quad (3.127)$$

moduan idatz daitekeela, k_i balioa m_i anizkoiztasuneko erro erreal edo konplexua bada:

$$P(k_i) = P'(k_i) = \dots = P^{(m_i-1)}(k_i) = 0, \quad P^{(m_i)}(k_i) \neq 0. \quad (3.128)$$

Jakina, $\sum_{i=1}^r m_i = n$ dugu. Koefizienteak konstanteak direnez, $D = d/dx$ deribazio-eragilearen linealtasunari esker deribazio-polinomioak berak ere onartzen du faktORIZAZIO BERBERA:

$$P(D) = \prod_{i=1}^r (D - k_i)^{m_i}. \quad (3.129)$$

Polinomio karakteristikoaren kasuan bezalaxe, hemen ere faktoreen ordena edonolakoa izan daiteke.

3.32 ARIKETA Polinomio diferentzialak eta algebraikoen arteko isomorfismoa frogatzeko, egiaztatu zuzenean ondoko berdintzak:

$$(D - k)(D - k') = (D - k')(D - k) = D^2 - (k + k')D + kk'. \quad (3.130)$$

3.33 ARIKETA Froga ezazu polinomio karakteristiko eta diferentzialaren artean dagoen ondoko erlazioa:

$$P(D)e^{kx} = P(k)e^{kx}. \quad (3.131)$$

Koefiziente konstanteetako ekuazio homogeneoak ebazteko Euler-en¹⁴ metodoa, soluzio esponentzialak saiatzean oinarritzen da. Polinomio diferentzialaren faktORIZAZIOARI esker, $P(D)y = 0$ problemaren ebazpena $(D - k)^m y = 0$ motako oinarritzko problemak ebaztera laburtzen da. $m = 1$ kasuan soluzioa $y = C_1 e^{kx}$ dela 2.14 ariketan ikusi genuen, eta $m = 2$ balioari dagokiona $y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$ 3.20 delakoan. Kasu orokorra ondokoa da.

3.34 ARIKETA 3.6 probleman ikusiko dugun emaitza erabiliz, froga ezazu $(D - k)^m y = 0$ ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra $(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{kx}$ moduan idazten dela C_k hautazko konstanteen bidez.

Ikusten dugunez, $(D - k_i)^{m_i}$ faktore bakoitzak m_i soluzio linealki independente ematen ditu: $e^{k_i x}$, $x e^{k_i x}$, \dots , $x^{m_i-1} e^{k_i x}$. (Esan bezala, soluzio hauen independentzia lineala 3.6 probleman frogatuko dugu.) Gainera, $\sum_{i=1}^r m_i = n$ denez, metodoa soluzio guztiak lortzeko erabil daiteke. Prozedura, beraz, erraza da: nahikoa da polinomio karakteristikoaren k_i erroak —**erro karakteristikoak** edo **berretzaile karakteristikoak** deitzen direnak— eta euren m_i anizkoitzasunak kalkulatzeko. Polinomioaren mailaren arabera problema algebraiko hau erraza, zaila zein ezinezkoa gerta daiteke, baina ebatziz gero homogeneoaren soluzio orokorra adierazten duen hautazko koefizienteetako konbinazioa zuzenean idazten da:

$$y = \sum_{i=1}^r (C_{i1} + C_{i2}x + \dots + C_{im_i}x^{m_i-1}) e^{k_i x}. \quad (3.132)$$

Batugai bakoitza **quasipolinomio** bat da, hau da, polinomio baten eta esponentzial baten biderkadura.

Adibidez,

$$y''' + y'' - y' - y = 0 \quad (3.133)$$

honela idazten da:

$$(D + 1)^2(D - 1)y = 0. \quad (3.134)$$

Ondorioz, soluzio orokorra zuzenean idatz daiteke:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + C_3 e^x. \quad (3.135)$$



¹⁴ **Leonhard Euler** (1707-04-15, Basilea, Suitza; 1783-09-18, San Petersburg, Errusia). Johann Bernoulli-ren dizipulu hau inoiz bizi diren matematikari garrantzitsuen eta emankorrenetarikoa da, baita testu honetan gehienetan aipatzen den egilea ere. (Osoa izan arte handituz joan zen itsutasunak ez zion galarazi sei hamarkadatan matematika berriari buruz 15.000 orri idaztea.) 1736-37 bitarteko *Mechanica* liburuan lehenengoz azaldu zuen mekanika analisiaren bidez; ordu arte Newton-en metodo geometrikoak erabiltzen ziren. $f = ma$ idatzi zuen lehenengoa izan zen. Jorratu zituen arloen artean hauexek ditugu: solido zurrunaren mekanika, elastizitatea, Ilargiaren teoria, hiru gorputzen problema, akustika, optika, hidraulika eta musika. Berari zor dizkiogu faktore integratzaileak, ordena-beheratzearen metodo batzuk, aldakuntzen kalkuluaren lehen azterketa sistematikoa, γ konstantea, Γ funtzioa, $f(x)$ notazioa, e letraren erabilera logaritmo naturalen oinarria adierazteko, $i = \sqrt{-1}$ laburdura, zirkunferentzia eta diametroaren arteko erlazioaren π izena, batukariak adierazteko \sum ikurra eta abar.

3.35 ARIKETA Erabili Euler-en metodoa osziladore harmonikoa ebazteko:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.136)$$

Ekuazioa erreala bada, mota berekoak dira polinomio karakteristikoaren koefizienteak eta erro konplexuak egotekotan konplexu konjokatuen bikoteen bidez bakarrik ager daitezke: $k_i = \alpha + i\omega$, $k_j = \alpha - i\omega$. Horrelako kasu batean, $p_i(x) \equiv C_{i1} + C_{i2}x + \dots + C_{im_i}x^{m_i-1}$ notazioa erabiliz, dagozkien soluzioak $p_i(x)e^{k_i x} + p_j(x)e^{k_j x}$ moduan edo ondoko era baliokidean idatz daitezke:

$$e^{\alpha x} \{ [p_i(x) + p_j(x)] \cos \omega x + i [p_i(x) - p_j(x)] \sin \omega x \}. \quad (3.137)$$

Ekuazioa erreala izanik soluzio errealak bakarrik nahi baditugu, $p_j(x) = \overline{p_i(x)}$ aukeratu behar dugu eta sinu eta kosinuaren koefizienteak,

$$p_i(x) + p_j(x) = 2 \operatorname{Re} p_i(x) \equiv D_{i1} + D_{i2}x + \dots + D_{im_i}x^{m_i-1}, \quad (3.138)$$

$$i [p_i(x) - p_j(x)] = -2 \operatorname{Im} p_i(x) \equiv E_{i1} + E_{i2}x + \dots + E_{im_i}x^{m_i-1}, \quad (3.139)$$

polinomio errealak dira. Hortaz, izaera erreala nabariki agertzen duen ondoko eran adierazten dira konplexu konjokatuen bikoteari dagozkion soluzioak, hautazko koefiziente errealen bidez:

$$e^{\alpha x} \left[\begin{array}{l} (D_{i1} + D_{i2}x + \dots + D_{im_i}x^{m_i-1}) \cos \omega x + \\ (E_{i1} + E_{i2}x + \dots + E_{im_i}x^{m_i-1}) \sin \omega x \end{array} \right]. \quad (3.140)$$

3.36 ARIKETA Idatzi aurreko 3.35 ariketan lortu dugun osziladore harmonikoaren soluzioa forma nabariki errealean.

Atal hau amaitu baino lehenago, koefiziente konstanteetako ekuazio homogeneoak ebazteko —batez ere, hastapen-baldintzen problemen kasuan— 5. gaiko Laplace-ren transformazioaren metodoa ere erabilgarria dela aipatu nahi dugu.

3.11 Koefiziente konstanteetako ekuazio osoak

Ekuazio lineal osoan a_k koefizienteak konstanteak direnean,

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x), \quad (3.141)$$

$P(D)y = b$ moduan idatz daiteke eta, jakina, $P(D)y = 0$ homogeneoaren soluzio orokorri gehitzeko kalkulatu behar den soluzio partikularra bilatzeko, konstanteen aldakuntzaz zein Cauchy-ren metodoaz balia gaitzke. Hala eta guztiz ere, b gai inhomogeneoa quasipolinomioa,

$$b = (A_1 + A_2 x + \dots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x}, \quad (3.142)$$

edo quasipolinomioen batura bada, aipaturiko metodoetan agertzen diren integralak kalkulatzearraza, baina neketsua, izaten da, eta kasu berezi honetan soluzio partikularra aurkitzeko beste bi metodo erabilgarriago daude.

3.11.1 Koefiziente indeterminatuen metodoa

Saio-metodo honetan, A_i edozein konstanteetarako

$$(D - \lambda)^q \left[(A_1 + A_2x + \dots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x} \right] = 0 \quad (3.143)$$

betetzen dela erabiltzen da. Ebatzi nahi dugun ekuazioa

$$P(D)y = (A_1 + A_2x + \dots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x} \quad (3.144)$$

bada, zera dugu:

$$(D - \lambda)^q P(D)y = 0. \quad (3.145)$$

(Emaitza honi esker **eragile deuseztatzailearen metodo** izenez ere ezagutzen da hau.) Hasierako ekuazio homogeneoaren soluzioak ez diren $n + q$ ordenako (3.145) ekuazio homogeneoaren soluzioen artean egongo da derrigorrean aurkitu nahi den soluzio partikularra. Baina bi homogeneoen soluzioak zuzenean idatz ditzakegunez, erraz ikusten da nola kalkulatu behar den soluzio partikular hori.

1. Gai inhomogeneoan quasipolinomio bat baino gehiago badaude, ekuazio osoen gainezarmenaren printzipioaz balia gaitezke quasipolinomio bakoitzari dagokion soluzioaren zatia ondoren aztertzen den metodoaren bidez kalkulatzeko. Amaieran quasipolinomio guztiei dagozkien zatiak batu beharko dira, noski.
2. λ berretzailea hasierako ekuazio homogeneoaren erro karakteristikoaren artean ez badago, ($P(\lambda) \neq 0$), soluzio partikularra λ erroari dagozkion quasipolinomioetatik bakarrik etor daiteke. Hortaz, nahikoa da erro horri dagokion maila bereko quasipolinomio bat saiatzea,

$$P(D) (B_1 + B_2x + \dots + B_q x^{q-1}) e^{\lambda x} = (A_1 + A_2x + \dots + A_q x^{q-1}) e^{\lambda x}, \quad (3.146)$$

horrelakoa baita $(D - \lambda)^q y = 0$ ekuazioaren edozein soluzio. Polinomio honi deribazio-eragilea aplikatu ondoren, x -ren berretura bakoitzaren koefizienteak berdinduz, B_i konstanteak eta, beraz, soluzio partikularra aurkitzen dira.

Adibidez,

$$y''' + y'' - y' - y = 18e^{2x} - 64xe^{-3x} \quad (3.147)$$

ekuazioaren homogeneoa (3.133) da, erro karakteristikoak $\lambda = \pm 1$ izanik. $18e^{2x}$ gaiaren berretzaile karakteristikoa, $\lambda = 2$, ez dago homogeneoaren artean eta 0 mailako polinomio batekin biderkaturik agertzen da. Koefiziente zehaztugabetako egitura bereko quasipolinomio bat saiatu behar da: $y''' + y'' - y' - y = 18e^{2x}$ ekuazioan $y = Ae^{2x}$ ordezkaturik $A = 2$ lortzen da eta soluzio partikularren zatia $2e^{2x}$ izango da. $-64xe^{-3x}$ quasipolinomioaren maila 1 denez, $y = (A + Bx)e^{-3x}$ saiatu beharko da $y''' + y'' - y' - y = -64xe^{-3x}$ ekuazioan: emaitza $A = 5$ eta $B = 4$ da. Gainezarmenaren printzipioa eta (3.135) homogeneoaren soluzio orokorra gogoraturik, honela idazten da (3.147) ekuazioaren soluzio orokorra:

$$y = (C_1 + C_2x) e^{-x} + C_3 e^x + 2e^{2x} + (5 + 4x)e^{-3x}. \quad (3.148)$$

3.37 ARIKETA Aurki ezazu $\ddot{x} + x = (6t - 4t^2) e^{-t}$ ekuazioaren soluzio orokorra.

3. λ balioa hasierako homogeneousaren m anizkoitzasuneko erro karakteristikoa bada¹⁵ —hau da, $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0$, $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$ betetzen bada—, (3.145) ekuazio homogeneousan $(D - \lambda)^{m+q}$ faktorea agertuko da eta eragile honi dagokion soluzio orokorraren egitura bera duen quasipolinomio bat saiatu beharko da:

$$P(D) (B_1 + B_2x + \dots + B_{m+q}x^{m+q-1}) e^{\lambda x} = (A_1 + A_2x + \dots + A_qx^{q-1}) e^{\lambda x}. \quad (3.149)$$

Baina ezkerreko polinomioaren lehen m gaiak $P(D)$ eragilearen $(D - \lambda)^m$ faktoreak deuseztatzen ditu. Ondorioz, B_1, B_2, \dots, B_m zehaztu gabe geratuko dira (homogeneousaren soluzio orokorreko hautazko konstanteetan agertzen dira), eta nahikoa izango da

$$P(D) (D_1 + D_2x + \dots + D_qx^{q-1}) x^m e^{\lambda x} = (A_1 + A_2x + \dots + A_qx^{q-1}) e^{\lambda x} \quad (3.150)$$

saiaturik x -ren berretura bakoitzeko koefizienteak berdintzea $D_j \equiv B_{m+j}$ konstanteak kalkulatzeko.

Adibidez,

$$y''' + y'' - y' - y = -24x(x + 1)e^{-x} \quad (3.151)$$

ekuazioan polinomioa bigarren mailakoa da eta mota bereko $(A + Bx + Cx^2)e^{-x}$ polinomioaren eta x^2 faktorearen biderkadura saiatu beharko da, $\lambda = -1$ erroa bi aldiz agertzen baita homogeneousan. Izan ere, (3.151) ekuazioan $(A + Bx + Cx^2)x^2e^{-x}$ ordezkaturik $A = 6$, $B = 4$ eta $C = 1$ lortzen da, eta soluzio partikularra $(6 + 4x + x^2)x^2e^{-x}$ da.

3.38 ARIKETA Ebatzi $y'' - y' - 2y = \cosh 2x + x$.

Ekuazioa erreala izanik, gai inhomogeneousan sinu edo kosinuren bat agertzen bada, aipaturiko funtzio trigonometrikoak esponentzial konplexuen bidez adieraz daitezke, noski, baina beste posibilitate zuzenago bat dago: sinua daukan mota bereko quasipolinomio baten eta kosinua duen beste baten batura saiitzea, hain zuzen. Aipaturiko funtzio trigonometriketatik bat bakarrik agertzen bada ere, biak saiatu behar dira, zeren $e^\alpha \sin \omega x$ (edo $e^\alpha \cos \omega x$) gai bakoitzari sinua eta kosinua dauzkaten $\alpha \pm i\omega$ erro karakteristikoko biak baitagozkie. Adibidez,

$$y'' + y = 25xe^x \cos x \quad (3.152)$$

ekuazioan gai inhomogeneousoa $\lambda = 1 \pm i$ erroei dagokie aldi berean. Gainera, polinomioaren maila 1 denez, bi erroen anizkoitzasuna 2 da. Erroak ez dira agertzen homogeneousan; beraz, $(D_1 + D_2x)e^x \cos x + (E_1 + E_2x)e^x \sin x$ funtzioa saiatu behar da. Jakina, $(D_1 + D_2x)e^{(1 \pm i)x}$ erako quasipolinomioak ere saia daitezke dagozkien gai inhomogeneousaren zatiek. Edozein kasutan, honelaxe idatz daiteke soluzioa:

$$y = A \cos x + B \sin x + [(5x - 2) \cos x + 2(5x - 7) \sin x] e^x. \quad (3.153)$$

Azpimarratu behar da soluzio partikularrak sinu bat daukala nahiz eta gai inhomogeneousan horrelakorik ez egon.

$$y'' + y = x \cos x \quad (3.154)$$

ekuazioan $\lambda = \pm i$ erro karakteristikoen anizkoitzasuna 2 da gai inhomogeneousan eta 1 homogeneousan. Ondorioz, saiatu behar den soluzioa $x[(D_1 + D_2x) \cos x + (E_1 + E_2x) \sin x]$ da.

3.39 ARIKETA Aurkitu (3.154) ekuazioaren soluzio orokorra.

¹⁵Osziladore baten kasuan hau gertatzen denean **erresonantzia** dagoela esaten da mekanikan, gai inhomogeneousoko kanpo-indarraren maiztasuna eta osziladorearena berdinak dira eta.

3.11.2 Alderantzizko eragilearen metodoa

Metodo hau **Heaviside-ren kalkulu sinbolikoaren** oinarrian dago eta erabiltzen duen funtsezko ideia hau da:

$$P(D) \frac{1}{P(D)} = 1 \quad (3.155)$$

propietateak definituriko $\frac{1}{P(D)}$ alderantzizko eragile bat badago, $y = \frac{1}{P(D)}b$ funtzioak $P(D)y = b$ ekuazioa beteko du eta aurkitu nahi den soluzio partikularra izango da.

Adibidez, deribatuaren alderantzizko eragilea integral mugagabea da:

$$\frac{1}{D}f = \int f dx. \quad (3.156)$$

Kasu berezi honetan hautazko integrazio-konstantea agertzeak argi frogatzen duenez, alderantzizko eragilea ez da bakarria eta $P(D)\frac{1}{P(D)} = 1$ propietatetik ez da $\frac{1}{P(D)}P(D) = 1$ ondorioztatzen. (Bakartasunaren eza ekuazio osoak infinitu soluzio partikular edukitzeari dagokio, noski.) Helburua ez da hemen alderantzizko eragile guztiak eratzea: nahikoa dugu batekin soluzio partikular bat aurkitzeko.

Alderantzizko eragilearen ondoko propietateak errazak dira.

3.40 ARIKETA Froga ezazu alderantzizko eragilea ere lineala dela, hau da, hauxe betetzen dela, a eta b konstanteak badira:

$$\frac{1}{P(D)}(af + bg) = a\frac{1}{P(D)}f + b\frac{1}{P(D)}g. \quad (3.157)$$

3.41 ARIKETA Frogatu

$$\frac{1}{P(D)Q(D)} = \frac{1}{P(D)}\frac{1}{Q(D)}. \quad (3.158)$$

Beraz, (3.129) adierazpenetik alderantzizko eragilearen ondoko faktORIZAZIOA ondorioztatzen da:

$$\frac{1}{P(D)} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{(D - k_i)^{m_i}}. \quad (3.159)$$

Behar dugun alderantzizko eragilearen adierazpen formal bat dago,

$$\frac{1}{(D - k_i)^{m_i}}b(x) = e^{kx} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{m_i-1}}{(m_i-1)!} e^{-kt} b(t) dt, \quad (3.160)$$

baina integrala kalkulatu beharrak deuseztatu egiten du metodo honek konstanteen aldakuntzare-narekiko duen abantaila. Bestalde, $b(x)$ gai inhomogeneoa quasipolinomioen batura bada, metodo honen ideia erabiltzeko nahikoa da $\frac{1}{(D-k_i)^{m_i}}p(x)e^{kx}$ adierazpenaren esanahia aurkitzea koefiziente konstantetako $p(x)$ polinomio baterako. Urratsez urrats ikusiko dugu nola lor daitekeen helburu hau.

1. (3.131) adierazpenaren kasu berezi gisa, $(D - k')e^{kx} = (k - k')e^{kx}$ betetzen da eta, beraz,

$$\frac{1}{D - k'}e^{kx} = \frac{e^{kx}}{k - k'}, \quad \text{baldin } k' \neq k. \quad (3.161)$$

Ondorioz,

$$\frac{1}{P(D)}e^{kx} = \frac{e^{kx}}{P(k)}, \quad \text{baldin } P(k) \neq 0. \quad (3.162)$$

$y'' - y' - 2y = e^x$ ekuazioaren kasuan $P(D) = D^2 - D - 2$ eta $P(1) = -2 \neq 0$ enez,

$$\frac{1}{D^2 - D - 2}e^x = -\frac{1}{2}e^x, \quad (3.163)$$

dugu eta soluzio orokorra $C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - e^x/2$.

2. Indukzio osoaren bidez erraz egiaztatzen da

$$(D - k)^m \frac{x^m}{m!} e^{kx} = e^{kx} \quad (3.164)$$

betetzen dela eta, ondorioz,

$$\frac{1}{(D - k)^m} e^{kx} = \frac{x^m e^{kx}}{m!}. \quad (3.165)$$

Hortaz, k balioa $P(D)$ eragilearen m anizkoitzasuneko erroa bada,

$$P(D) = (D - k)^m Q(D), \quad Q(k) \neq 0, \quad (3.166)$$

zera dugu:

$$\frac{1}{P(D)} e^{kx} = \frac{x^m e^{kx}}{m! Q(k)}. \quad (3.167)$$

Esate baterako, $y'' - y' - 2y = e^{2x}$ ekuazioan $P(D) = (D - 2)(D + 1)$ eta, beraz,

$$\frac{1}{(D - 2)} \frac{1}{(D + 1)} e^{2x} = \frac{1}{3} x e^{2x}. \quad (3.168)$$

3. Erraz frogatzen denez, $(D - k')p(x)e^{kx} = e^{kx}(D + k - k')p(x)$ dugu eta deribazio-polinomioen faktORIZAZIOAREN ondorioz: $P(D)p(x)e^{kx} = e^{kx}P(D + k)p(x)$. Hortaz,

$$\frac{1}{P(D)} p(x) e^{kx} = e^{kx} \frac{1}{P(D + k)} p(x). \quad (3.169)$$

4. Aurkitu gabe dagoen gauza bakarra, alderantzizko eragileak $p(x)$ polinomio bati egokiarazten dion irudia da:

$$\frac{1}{P(D)} p(x), \quad \text{baldin } p(x) = a_0 x^q + a_1 x^{q-1} + \dots + a_{q-1} x + a_q. \quad (3.170)$$

Hasteko, $\frac{1}{D^s}$ motako biderkagaiak banantzen dira, polinomioen s integral errazak egitera laburtzen baitira.

Beste gai guztiekin, $1 = P(D)Q(D) + R(D)$ eran deskonposatu behar da identitatea, $R(D) = a_1 D^{q+1} + a_2 D^{q+2} + \dots$ motako kondar batekin. Honen maila q baino handiagoa denez, polinomioari aplikatzean $R(D)p(x) = 0$ lortuko dugu. Beraz, $p(x) = P(D)Q(D)p(x)$ eta

$$\frac{1}{P(D)} p(x) = Q(D)p(x) \quad (3.171)$$

beteko da. $Q(D)$ deribazio-polinomioaren bitarteko $p(x)$ polinomioaren irudia erraz kalkulatzeko metodoa da. Baina,

polinomio arrunten eta deribazio-polinomioen arteko isomorfismoa dela eta, horretarako nahikoa da polinomioen zatiketa sintetikoa berreturen ordena gorakorrean egitea.

Ikus dezagun adibide bat: $y'' - y' - 2y = x^2 e^{2x} - (1 + 2x)e^x$. Lehenengo gai inhomogeneoaren kasuan hauxe dugu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 - D - 2} x^2 e^{2x} &= e^{2x} \frac{1}{D^2 + 3D} x^2 = e^{2x} \frac{1}{D} \frac{1}{D + 3} x^2 = \\ &= e^{2x} \frac{1}{D} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) = \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{27} \right) e^{2x}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Emaitza hau frogatzeko,

$$1 = (3 + D) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \right) - \frac{1}{27}D^3 \quad (3.173)$$

erabili dugu, ondoko zatiketa egin ondoren:

$$\begin{array}{r} 1 \\ - \frac{1}{3}D \\ \frac{1}{9}D^2 \\ - \frac{1}{27}D^3 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3 + D \\ \hline \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{9}D \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \end{array} \right. \quad (3.174)$$

Beraz,

$$\frac{1}{D + 3} x^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}D + \frac{1}{27}D^2 \right) x^2 = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}. \quad (3.175)$$

3.42 ARIKETA Egiatzatu

$$\frac{1}{D^2 - D - 2} (1 + 2x)e^x = -(1 + x)e^x. \quad (3.176)$$

Azkenik, ekuazioaren soluzio partikularra honako hau da:

$$y_p = \left(\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{27} \right) e^{2x} + (1 + x)e^x. \quad (3.177)$$

3.12 Cauchy eta Euler-en ekuazioak

Cauchy eta Euler-en ekuazioa ondoko egitura duena da:

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = B(x), \quad (3.178)$$

a , b eta a_k konstanteak direlarik. Ekuazio hau $(ax + b)$ gaiarekiko ekidimentsionala da eta $ax + b = e^t$ aldagai independentearen aldaketak koefiziente konstanteetako ekuazio lineal batera laburtzen

du, ondoko deribatuen balioei esker:

$$\frac{dy}{dx} = ae^{-t} \frac{dy}{dt}, \quad (3.179)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right), \quad (3.180)$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= a^n e^{-nt} \left(\frac{d^n y}{dt^n} + \dots + (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned} \quad (3.181)$$

Kontuan hartu behar da e^{-kt} faktoreak $(ax+b)^k$ berreturekin sinplifikatzen direla.

Ondorioz, homogeneoa ebazteko aipaturiko aldagai-aldaketa erabil daiteke; baina beste posibilidadate bat dago: Euler-en metodoaren aldaera nabaria erabiltzea, alegia. Ekuazioan e^{kt} esponentzialen ordeaz $(ax+b)^k$ berreturak saiatu behar dira erro karakteristikoak aurkitzeko eta, gero, koefiziente konstanteetako kasurako emandako arauak aplikatu behar dira ondoko ordezkapen sistematikoekin:

$$t^p e^{kt} \longrightarrow \ln^p(ax+b)(ax+b)^k, \quad (3.182)$$

$$t^p e^{\alpha t} \cos \omega t \longrightarrow \ln^p(ax+b)(ax+b)^\alpha \cos[\omega \ln(ax+b)], \quad (3.183)$$

$$t^p e^{\alpha t} \sin \omega t \longrightarrow \ln^p(ax+b)(ax+b)^\alpha \sin[\omega \ln(ax+b)]. \quad (3.184)$$

Adibidez,

$$x^2 y'' + \frac{5}{2} x y' - y = 0 \quad (3.185)$$

ekuazioan $x = e^t$ eginez, $\ddot{y} + \frac{3}{2} \dot{y} - y = 0$ ekuaziora heltzen da. Bestalde, ekuazioan x^k zuzenean saiatus,

$$k(k-1) + \frac{5}{2}k - 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right)(k+2) = 0 \quad (3.186)$$

lortzen da. Beraz, $x^{1/2}$ eta x^{-2} soluzioak dira eta, linealki independenteak direnez, soluzio orokorra $y = A\sqrt{x} + B/x^2$ da.

3.43 ARIKETA Ebatzi $(2x+1)^2 y'' + (8x+4)y' + y = 9x$.

3.13 Problemak

3.1 Aurkitu planoko zirkunferentzia guztiek betetzen duten ekuazio diferentziala.

$$3.2 \quad \frac{d^5 y}{dx^5} - \frac{1}{x} \frac{d^4 y}{dx^4} = 0.$$

$$3.3 \quad y'' - xy''' + (y''')^3 = 0.$$

3.4 Laburtu koadraturetara

$$y'' + f(y) = 0$$

ekuazioa. Agertzen den azken integrala ebatzi gabe ere, horrelako ekuazioen soluzioei buruzko informazio kualitatibo interesgarria lor daiteke fisikaz baliatuz. Zergatik?

3.5 $y_1 = x$ eta $y_2 = |x|$ funtzioak linealki independenteak al dira $(-1, 1)$ tartean? Kalkulatu beraien wronskiarra eta azaldu emaitza.

3.6 Froga ezazu $\{x^{p_i} e^{k_i x} : p_i = 0, \dots, n_i; i = 1, \dots, n\}$ funtzioak linealki independenteak direla edozein segmentutan.

Oharra: $i \neq j$ denean, $k_i \neq k_j$ betetzen dela suposatzen da.

3.7 Aurki itzazu ondoko funtzio bikoteek betetzen dituzten bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoak: (a) x, x^2 , (b) $x + 1, x^2 + 1$, (c) x, e^{2x} .

$$3.8 \quad (x + 1)y'' + xy' - y = (x + 1)^2.$$

3.9 Deribazio-metodoa. Batzuetan, 2.15.6 ataleko metodoa erabilgarria da goi-ordenako ekuazioekin, nahiz eta ekuazioa lineala izan eta ordena handieneko deribatua askaturik agertu. Adibide moduan, ebatzi 3.8 problemako ekuazioa metodo horren bidez.

3.10 Eztabaidatu $y' + A(x)y = B(x)$ ekuazioaren oinarritzko problema.

3.11 Osziladore harmonikoaren bi puntutako Green-en funtzioa. Aurkitu eta sinplifikatu ondoko mugalde-problemaren soluzioa:

$$G''(x, s) + \omega^2 G(x, s) = \delta(x - s), \quad G(0, s) = G(\ell, s) = 0.$$

Eztabaidatu emaitza $0 \leq s \leq \ell$ parametroen balio desberdinetarako.

$$3.12 \quad y'' - y = xe^x.$$

$$3.13 \quad y'' + y = xe^{-x} \cos x.$$

$$3.14 \quad (D^3 + D)y = 1 + e^{2x} + \cos x.$$

$$3.15 \quad (D + 1)^3 y = e^{-x} + x^2.$$

$$3.16 \quad x^2 y'' - xy' + y = x \ln^3 x.$$

3.17 Mahai leun batean 6 m-ko katea kokatzen da, ertzean 1 m-ko zatia zintzilik dagoela. Noiz jausiko da azken maila?

$$3.18 \quad yy'' + (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$3.19 \quad (x^2 - 1)y'' - 6y = 1.$$

Iradokizuna: Homogeneoak soluzio polinomiko bat onartzen du.

$$3.20 \quad y'' + 10y' + 25y = 2^x + xe^{-5x}.$$

$$3.21 \quad xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}.$$

3.22 Egiaztatu $x^{-1/2} \sin x$ funtzioa,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$$

Bessel-en ekuazioaren soluzioa dela. Aurkitu soluzio orokorra.

3.23 Laburtu koadraturetara $y'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$ ekuazioa.

$$3.24 \quad (2x - 3)^2y'' - 6(2x - 3)y' + 12y = 0.$$

3.25 Osoaren hiru soluzio. Eman dezagun y_1, y_2 eta y_3 funtzioak

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

ekuazioaren soluzio partikularrak direla, ondoko baldintza betetzen dutenak:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Froga ezazu ekuazio diferentzialaren soluzio orokorra $y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$ dela eta ekuazioa bera $W[y_1 - y_3, y_2 - y_3, y - y_3] = 0$ moduan idatz daitekeela.

3.26 Froga ezazu y_1 eta y_2 funtzioak $x \in I$ puntu berean nuluak badira, ezin osa dezaketela I tartean ondoko ekuazio linealaren oinarritzko soluzio-sistema bat:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0.$$

3.27 Riccati-ren ekuazioa eta bigarren ordenako lineal homogeneoa. Froga ezazu $u = y'/y$ aldaketaren bidez $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ ekuazioa Riccati-ren ekuazio batera laburtzen dela. Aurkitu Riccati-ren edozein ekuazio bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneo baten modura idazteko erabil daitekeen transformazioa.

3.28 Osziladore bortxatua. Frogatu

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t, \quad (\gamma, \omega_0 > 0)$$

osziladorearen ekuazio homogeneoaren soluzio orokorra, **portaera iragankorra** deskribatzen duena, hauxe dela:

$$x = \begin{cases} e^{-\gamma t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), & \text{baldin } \gamma < \omega_0, \\ Ae^{-(\gamma+\lambda)t} + Be^{-(\gamma-\lambda)t}, & \text{baldin } \gamma > \omega_0, \\ (A + Bt)e^{-\omega_0 t}, & \text{baldin } \gamma = \omega_0, \end{cases}$$

non $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ eta $\lambda \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$ diren. Egiaztatu osziladorearen soluzio orokorra idazteko behar dugun soluzio partikularra, **portaera iraunkorra** deskribatzen duen ondoko soluzioa izan daitekeela:

$$x = f \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \Omega t + 2\gamma\Omega \sin \Omega t}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = A \cos(\Omega t + \alpha),$$

$$A \equiv \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}},$$

$$\alpha \equiv \arctan \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{2\gamma\Omega} - \frac{\pi}{2}.$$

3.29 Osziladore indargetua. Frogatu

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (\gamma^2 - \omega_0^2 > 0)$$

osziladorea gehienez behin pasatzen dela oreka-puntutik. Zer gertatzen da indargetze kritikoaren kasuan?

3.30 Kalkulatu ondoko moduan definitzen den **zeinu funtzioaren** deribatu orokortua:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } x > 0, \\ 0, & \text{baldin } x = 0, \\ -1, & \text{baldin } x < 0. \end{cases}$$

3.31 Kalkulatu hurrengo limite orokortua:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ng [n(x - a)].$$

3.32 Zein izango da $\delta'(x - a)$ deribatuak integrazio-ikurraren azpian duen eragiketa-definizioa? Zertarako erabil daiteke fisikan?

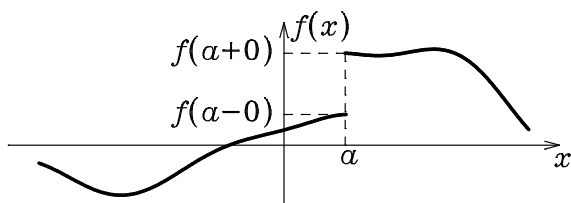
3.33 $\beta = (1 - \gamma^{-2})^{1/2}$ definizioa erabiliz, kalkulatu erlatibitate berezi eta orokorrean erabilgarri gertatzen den ondoko limitea, g edozein funtzio batugarri izanik:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma g(\gamma(x - \beta t)).$$

3.34 Kontsideratu

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \left[\arctan \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.187)$$

funtzioak eta kalkulatu $\varphi'_\varepsilon(x)$. Marraztu $\varphi_\varepsilon(x)$ eta $\varphi'_\varepsilon(x)$ funtzioak, $\varepsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ balioetarako. Kalkulatu $\varphi_\varepsilon(x)$ eta $\varphi'_\varepsilon(x)$ direlakoak $\varepsilon \rightarrow 0$ limitean. Emaitzaren iruzkina egin.



3.4 IRUDIA Funtzio zatikako jarraitua.

3.35 Zein da 3.4 irudiko funtzioaren deribatu arruntaren eta orokortuaren arteko diferentzia?

3.36 Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal zehatzak. $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$ bigarren ordenako adierazpen lineala zehatza da, $A_1(x)y' + A_2(x)y$ lehen ordenako adierazpen lineal egokiaren deribatua bada:

$$[A_1(x)y' + A_2(x)y]' = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y.$$

Aurkitu bigarren ordenako adierazpenak bete behar duen baldintza beharrezko eta nahikoa zehatza izateko. Zehatza ez bada, zein da $\mu(x)$ faktore integratzaileak bete behar duen baldintza $\mu(x) [a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y]$ biderkadura zehatza izateko? Eztabaidatu

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

ekuazioaren ebazpen-metodoa ezkerreko gaia zehatza denean. Erabili metodo hori ondoko ekuazioarekin:

$$y'' + xy' + y = 0.$$

3.37 Diferentzia finituetako ekuazioak. Koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealak ebazteko Euler-en metodoa mota bereko diferentzia finituetako ekuazioak ebaztera heda daiteke zuzenean. Adibide moduan, kontsidera ezazu

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

1. Mota egokiaren soluzioak saiaturaz, aurkitu ekuazio horren soluzio orokorra.
2. $x_0 = 0$ eta $x_1 = 1$ hastapen-baldintzei dagokie soluzio partikularra **Fibonacci-ren**¹⁶ **segida** da. Aurki ezazu Fibonacci-ren F_n zenbakiaren adierazpena.
3. Kalkulatu **urrezko zenbakia**, ondoko moduan ere defini daitekeena:

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1}/F_n.$$

3.38 C_1 eta C_2 hautazko konstanteak badira, zein da $y = C_1 + \ln(C_2x)$ soluzioak onartzen dituen ordena txikieneko ekuazio diferentziala? Azaldu emaitza.



¹⁶ **Leonardo Pisano Fibonacci** (1170, Pisa, Italia; 1250, Pisa). 1202 urtean argitaratu zuen *Liber abaci* liburuak Europara ekarri zuen zenbakikuntza indo-arabiarra eta 1220ko *Practica geometriae* delakoa, garai hartako geometriaren bilduma izateaz gain, zenbait kontzeptu trigonometrikoren sartzea izan zen.

3.39 Ebatzi

$$xy'' = 2yy'.$$

3.40 Froga ezazu $y_1 = 1$ eta $y_2 = 1/x$ funtzioak

$$y'' + 2yy' = 0$$

Burgers-en ekuazioaren soluzio linealki independenteak direla. Zein da soluzio orokorra? (Kontuz!)

3.41 Ebatzi ondoko ekuazio diferentziala:

$$xy'' + 2y' - xy = 0.$$

3.42 Aurkitu hurrengo ekuazioaren soluzioa orokorra:

$$(2x^2 - 2x)y'' + (5x - 1)y' + y = 0.$$

3.43 Eman dezagun $y' + A(x)y = 0$ lehen ordenako ekuazio lineal homogeneoaren soluzio partikular bat, y_h , ezagutzen dugula. Erabil ezazu konstanteen aldakuntzaren metodoa, $y' + A(x)y = B(x)$ ekuazio osoaren soluzio orokorra koadratura baten bidez idazteko.

4. GAIA

Ekuazio-sistemak

La multitude qui ne se réduit pas à l'unité est confusion. . .

Blaise Pascal

Aurreko bi gaien orokorpena da hau¹ eta ekuazio diferentzial arrunten kasurik orokorrena aztertzen du: ekuazio-sistemak. 3.3 atalean ikusi dugunez, beti idatz daiteke ekuazio bat lehen ordenako ekuazioen bidez eta, beraz, ez dago inolako murrizterik aztertuko diren sistemen ordena beti lehena dela suposatzean. Berriro ere arreta handiz aztertuko den kasu linealean, oso erabilgarria den matrize-notazio batez baliatuko gara.

4.1 Definizioa eta propietate orokorrak

Hiru dimentsioko espazioan $\varphi_1(x, y, z) = 0$ eta $\varphi_2(x, y, z) = 0$ gainazalen ebakidurak kurba bat definitzen du. Ereku batean definituriko

$$\varphi_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \quad (4.1)$$

$$\varphi_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \quad (4.2)$$

bi parametroko kurba-familia espazioko kurba-kongruentzia izango da baldin eta ereku horretako (x, y, z) puntu bakoitzeko familiaren kurba bat eta soilik bat pasatzen bada. Definizio-propietate honen ondorioz, (x, y, z) puntutik igarotzen den kurbari dagozkion parametroen baliok familiaren ekuazioetatik aska daitezke, kongruentziaren ekuazioak honela idazteko moduan:

$$\psi_1(x, y, z) = C_1, \quad (4.3)$$

$$\psi_2(x, y, z) = C_2. \quad (4.4)$$

Hemen, independentetzat aukeratzen dugun aldagaiarekiko (x -rekiko adibidez) deribatzean kongruentziaren ekuazio diferentzialak lortzen ditugu:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} z' = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} z' = 0. \quad (4.6)$$

¹Egia esan, 4.2.1 atalean esandakoaren arabera, funtsean 3. gaien ikusitakoaren errepikapena da hau; baina ikus-puntu berritik eta notazio berriaren bidez aztertzea emankorra izango da azkenean.

Deribatuak askatuz sistemaren **forma normala** dugu,

$$y' = f_1(x, y, z), \quad (4.7)$$

$$z' = f_2(x, y, z), \quad (4.8)$$

eta diferentzialak bakartuz **forma kanonikoa**,

$$\frac{dx}{g_1(x, y, z)} = \frac{dy}{g_2(x, y, z)} = \frac{dz}{g_3(x, y, z)}. \quad (4.9)$$

4.1 ARIKETA Aurkitu

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2, \quad (4.10)$$

$$x + y + z = B \quad (4.11)$$

zirkunferentzien ekuazio diferentzialak, bai forma normalean eta bai kanonikoan ere.

Sistemen kasuan notazioa apur bat aldatuko dugu eta erabilera hedatuenaren arabera aldagai independentea t izango da eta menpekoak x_i . Horrexegatik, $n + 1$ dimentsioko espazioaren kasuan koordenatuak $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ izango dira eta kongruentzia bakoitza n parametro dauzkan n ekuazioen familia bat izango da, ondoko moduan idatz daitekeena:

$$\psi_i(t, x_1, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.12)$$

Kongruentziaren ekuazio diferentzialak azken hauek deribatuz lortzen dira:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.13)$$

Deribatuak askaturik era normalean idazten da sistema:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

(Ohi bezala, «denborarekiko» deribatua puntu baten bidez adierazten dugu: $\dot{x} \equiv dx/dt$.) Diferentzialak bakarturik forma kanonikoa dugu:

$$\frac{dt}{g_0} = \frac{dx_1}{g_1} = \frac{dx_2}{g_2} = \dots = \frac{dx_n}{g_n}. \quad (4.15)$$

Kongruentziaren kurba bakoitza ekuazio diferentzialen sistema horien kurba integral bat da eta kurba integralen ekuazio finituen multzoak sistema diferentzialen soluzio orokor bat osatzen du.

3.3 atalean ikusi genuenez, ezezagun gehiago eta dagozkien ekuazioak sarturik beti behera daiteke ekuazio diferentzial baten ordena leheneraino. Horrexegatik gain honetan orokortasunik galdu gabe lehen ordenako sistemak aztertzea nahikoa izango da, horrelakoek edozein ordenatako ekuazioen sistemak barnean dauzkate eta. Sistema era normalean idazteko deribatuak aska daitezkeela ere suposatuko dugu aurrerantzean eta, komeni denean, forma kanoniko baliokidean idatziko dugu sistema.

Berrri ere hemen frogatuko ez dugun **existentzia eta bakartasunaren teorema** betetzen da. Era normalean idatz daitekeen

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

sistemako f_i eta $\partial f_i / \partial x_j$ funtzioak jarraituak badira, sistema bera eta ondoko erako n hastapen-baldintza betetzen dituen soluzio bakarra dago:

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.17)$$

4.1.1 Sistema dinamiko autonomoak

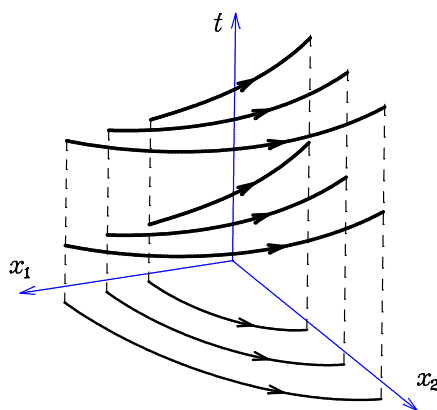
Mekanikaren eraginez, aztertzen ari garen lehen ordenako sistema bati **sistema dinamikoa** deitzen zaio maiz, eta aldagai independentea espliziturik agertzen ez denean **autonomoa** dela esaten da:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Jakina, edozein sistema autonomo bihurtzeko nahikoa da t aldagaia ezezagun berritzat hartzea eta sistemari $dt/d\tau = 1$ ekuazio nabaria gehitzea, t -ren ia berdina den τ hori aldagai independente berria izanik. Baina askotan hau ez da komenigarria konfigurazio-espazioari dimentsio berri bat gehitzen diolako.

Ekuazio autonomo bakarraren kasuan 3.4.2 atalean ikusi genuen bezalaxe, sistema autonomoa t aldagai independentearen translazioekiko aldaezina da eta, ondorioz, integrazio-konstante bat nabaria da: $t - t_0$ moduan agertzen da aldagai independentearekin batera.

4.2 ARIKETA Egiaztatu azken baieztapena; hau da, $x_i = g_i(t)$ funtzioak (4.18) sistemaren soluzioak badira, $x_i = g_i(t - t_0)$ transladatuak ere soluzioak direla t_0 balio guztietarako.



4.1 IRUDIA Sistema autonomo baten kongruentzia eta bere proiektzioa fase-espazioan.

Sistema autonomoen testuinguru honetan, (x_1, \dots, x_n) menpeko aldagaien n dimentsioko espazioa **fase-espazio**² izenaz ezagutzen da eta, ondorioz, sistema dinamikoaren $x_i = \varphi_i(t)$ soluzio bakoitzak **fase-ibilbide** bat definitzen du: $x_i = \varphi_i(t)$ ekuazio parametrikoez definituriko kurba, (t, x_1, \dots, x_n) espazioan dagokion kurba integralak fase-espazioan duen proiektzioa hain zuzen. (4.18) ekuazioen artean bat aukeratuz gero, beste guztiak berarekin zatitzen baditugu, t desagertu egiten da eta geratzen diren

$$\frac{dx_i}{dx_\alpha} = \frac{f_i(x_1, \dots, x_n)}{f_\alpha(x_1, \dots, x_n)}, \quad i = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, n \quad (4.19)$$

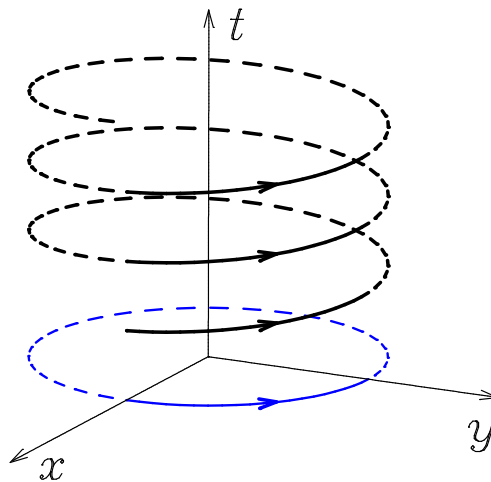
$n - 1$ ekuazio diferentzialak, fase-ibilbideenak dira. Emaitza honek frogatzen du (existentzia eta bakartasunaren teoremaren baldintzak betetzen badira) fase-ibilbideek ($n + 1$ espazioko kongruentzia baten proiektzioak izateaz gain) fase-espazioan ere osatzen dutela kongruentzia bat.

²Izen hau erabiltzean buruan dugun irudia mekanika hamiltondarreko lehen ordenako ekuazio kanonikoak dira eta ez bigarren ordenako Lagrange-ren mekanikakoak. Zoritxarrez, testu matematiko askotan fase-espazioko dimentsioa **askatasun-graduen kopurua** dela esan ohi da; mekanikan askatasun-graduen kopurua dimentsio horren erdia da.

Sistema dinamikoa forma kanonikoan idatziz,

$$dt = \frac{dx_1}{f_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1, \dots, x_n)}, \quad (4.20)$$

eta dt -ren lehen berdintza nabaria ahaztuz, fase-ibilbideak (f_1, f_2, \dots, f_n) abiadura-eremuaren korrante-lerroak direla ikusten dugu. Ondorioz, irudi hidrodinamikoaz baliatuz, fase-espazioko eboluzioa deskribatzen duen aplikazioari **jarioa** deritzo. Hastapen-baldintza bakoitzari «denborearen» edozein t aldiunetan dagokion fase-espazioko puntu adierazgarria ematen du jarioak.



4.2 IRUDIA (4.21) sistemaren soluzio bat eta bere proiektzioa fase-espazioran.

Adibidez,

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (4.21)$$

sistemaren soluzioak

$$x = R \cos(t - t_0), \quad y = R \sin(t - t_0) \quad (4.22)$$

dira eta, 4.2 irudian azaltzen denez, t ardatzean zentratutako R erradioko eta 2π urratseko helizeak dira. Gainera, fase-ibilbideen ekuazio parametrikokoak dira. Helizeak (x, y) fase-espazioran proiektatzean jatorrian zentratutako zirkunferentziak lortzen dira. t_0 integrazio-konstantearen balioa aldatzean helizea t -ren norabidean transladatzen da, baina fase-espazioran duen proiektzioa ez da aldatzen, puntu bakoitzari dagokion t balioa aldatzen bada ere. Azpimarratu behar da fase-espazioko ibilbideak lortzeko nahikoa dela t ezabatzea soluzioan ($x^2 + y^2 = R^2$) zein ekuazio diferentzialetan ($dy/dx = -x/y$).

4.2 Ebazpen-metodoak

Ekuazio bakarraren kasuan gertatu zen bezalaxe, sistema linealetarako teoria zehatza dugu, koefizienteak konstanteak direnean ebazpen-metodo sistematikoa barruan dagoela. Kasu orokoragoetan —kasu ez-linealetan, hain zuzen— dena izaten da askoz ere zailagoa eta hemen bi ebazpen-metodo besterik ez ditugu aipatuko: ekuazio bakar batera laburtzea eta lehen integralen bilatzea.

4.2.1 Ekuazio batera laburtzea

3.3 atalean ikusi genuenez, ezezagunak eta ekuazioak gehituz, edozein ekuazioren ordena lehenera labur daiteke. Alderantzizkoa ere egia da. Deribazioa eta ordezkapenaren bidez posible da, printzipioz, lehen ordenako n ekuaziok osaturiko sistema, menpeko aldagai baterako n ordenako ekuazio bakarraren bidez ordezkatzeko. Azken hau ebatzen bada, aldagai guztietarako soluzioak kalkula daitezke ordezkapen hutsaren bidez, *beste ezein ekuazio diferentzial ebatzi gabe*. Gainera, sistema lineala bada, n ordenako ekuazioa lineala izango da prozedura erraz bat erabiltzen denean. Ez dugu hemen teoria orokorra ikusiko —jakin-mina duen irakurleak Elsgoltz-en [3] liburura jo dezake—, baina adibide pare bat egingo ditugu.

Biz $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ sistema. Lehen ekuazioa deribaturik, $\ddot{x} = \dot{y}$, eta bigarrena hemen ordezkatzuz, $\ddot{x} = x$ lortzen da. Azken honen soluzioa erraz aurkitzen da Euler-en metodoaren bidez: $x = Ae^t + Be^{-t}$. Orain, y aurkitzeko ez da $\dot{y} = x$ ebatzi behar (x -ren soluzio orokorra bertan ordezkatu ondoren), zeren horrela hirugarren integrazio-konstante bat agertuko bailitzateke. Horren ordez, lehen ekuazioa $y = \dot{x}$ moduan erabili behar da; bertan x -ren soluzioa ordezkatzuz $y = Ae^t - Be^{-t}$ lortzen da.

4.3 ARIKETA Ebatzi $\dot{x} = 3x - 2y$, $\dot{y} = 2x - y$ sistema.

Ekuazio ez-linealekin ere saia daiteke metodo hau, noski.

4.4 ARIKETA Ebatzi $\dot{x} = y$, $\dot{y} = xy$ sistema.

4.2.2 Lehen integralak

$\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$ funtzioa sistemaren **lehen integrala** dela esaten da baldin eta jarioan zehar —sistemaren «eboluzioan» zehar, alegia— konstantea bada, hau da, x_i aldagaien ordez dagokien edozein soluzio sartzean Φ funtzioa konstante bihurtzen bada. Beraz,

$$\Phi(t, x_1, \dots, x_n) = C \quad (4.23)$$

moduko ekuazio bat dugu, soluzio bakoitzean zehar betetzen dena: C balioa soluzio batetik bestera aldatu egiten da, baina ez soluzio bakoitzean zehar t aldatzean. C bakoitzeko ekuazio horrek (t, x_1, \dots, x_n) espazioko hipergainazal bat adierazten du, kurba integralen $n - 1$ parametroko familia bat daukana, hain zuzen ere. Kurba integral baten puntu bat aipaturiko hipergainazalean badago, kurba osoa dago hipergainazal barruan.

Praktikan funtzio bat lehen integrala denetz egiaztatzeko ez da beharrezkoa sistemaren soluzioak aurkitzea, nahikoa baita jarioan zehar kalkulaturako deribatua nulua denetz egiaztatzea:

$$\frac{d\Phi}{dt} \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (4.24)$$

Adibidez, $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ sistemaren kasuan $\Phi = e^{-t}(x + y)$ lehen integrala da, bere deribatua nulua baita: $\dot{\Phi} = -e^{-t}(x + y) + e^{-t}(\dot{x} + \dot{y}) = -e^{-t}(x + y) + e^{-t}(y + x) = 0$.

4.5 ARIKETA Egiaztatu $e^{-t}(x + y)$ delakoaz gain, $e^t(x - y)$ eta $x^2 - y^2$ funtzioak ere $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x$ sistemaren lehen integralak direla.

Hautazko konstante bat sartzearen truke, menpeko aldagaietako bat askatzeko erabil dezakegu (4.23) lehen integral bakoitza: $x_i = \Psi(t, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, C)$. Horrela aipaturiko aldagaia desagertu egingo da problematik. Aurreko adibidearen kasuan, $e^{-t}(x+y) = A$ integraletik $y = Ae^{-t} - x$ erabil dezakegu y ezabatzeke eta problema ekuazio bakar batera laburtzeko: $\dot{x} = Ae^{-t} - x$. Sistemaren

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = C_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.25)$$

n lehen integral funtzionalki independentek,

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0, \quad (4.26)$$

soluzio orokor bat (hau da, kurba integralen kongruentzia bat) ematen dute, zeren printzipioz x_i ezezagunak aska baitaitezke (lokalki) t aldagai independentearen eta C_i hautazko konstanteen funtzioan.

4.6 ARIKETA Egiatzatu 4.5 ariketako $e^{-t}(x+y)$ eta $e^t(x-y)$ integralak independenteak direla eta sistema ebazteko erabil daitezkeela. Frogatu aurreko bi integralen menpekoea dela $x^2 - y^2$ delakoa.

Sistema dinamiko autonomoen kasuan, t -ren menpekoak ez diren $n - 1$ lehen integral independentek fase-ibilbideen ekuazioa ematen dute; «aldiune» bakoitzean sistema ibilbideko zein puntutan dagoen jakiteko beste lehen integral bat behar da, eta azken honen adierazpenean t esplicituki agertzen da, $\dot{x}_i = 0$ sistema ez bada behintzat. 4.5 ariketako adibidean $x^2 - y^2 = C$ integralak fase-ibilbideak hiperbolak direla diosku, baina beste integraletako bat behar da hiperbola bakoitzean sistema nola higitzen den jakiteko.

Lehen integralak bilatzeari buruz berriro gogoratuko dugu fisikan simetriak eta kontserbaziolegeak loturik daudela eta azken hauek lehen integralak ematen dituztela. Bestalde, ekuazioen simetria matematikoez baliatuz, batzuetan, ekuazioen transformazioen bidez aurki daitezke lehen integralak, ondoren adibide erraz batzuetan ikusiko dugun bezala.

Argi dago

$$\dot{x} = y - z, \quad (4.27)$$

$$\dot{y} = z - x, \quad (4.28)$$

$$\dot{z} = x - y \quad (4.29)$$

sistemak simetria handia erakusten duela. Hasteko, hiru ekuazioak batuz gero eskuineko gaiak desagertzen dira, $(x+y+z) = 0$, eta gauza bera gertatzen da x, y , eta z -rekin hurrenez hurren biderkatuz gero batzen baditugu: $x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$. Horrela $x+y+z = A$ eta $x^2 + y^2 + z^2 = B$ lehen integralak lortzen ditugu. Aldagai independentearen menpekoak ez direnez, fase-ibilbideen ekuazioak dira hauek.

4.7 ARIKETA Ezabatu t aldagaia (4.27)–(4.29) ekuazioetan, fase-ibilbideen ekuazio diferentzialak kalkulatzeko. Konparatu hemengo emaitza 4.1 ariketakoarekin.

4.8 ARIKETA Aurkitu 4.4 ariketako fase-ibilbideen ekuazioa.

Batzuetan, lehen integralak sortzen dituzten konbinazioak aurkitzeko egokiena forma kanonikoa izaten da, aldagai guztiak era simetrikoagoan erakusten dituelako edo. Adibidez,

$$\dot{x} = \frac{2tx}{t^2 - x^2 - y^2}, \quad \dot{y} = \frac{2ty}{t^2 - x^2 - y^2} \quad (4.30)$$

sistema honela idazten da forma kanonikoan:

$$\frac{dt}{t^2 - x^2 - y^2} = \frac{dx}{2tx} = \frac{dy}{2ty}. \quad (4.31)$$

Azken berdintza sinplifikaturik,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad (4.32)$$

lortzen dugu. Hemen t desagertu da eta x eta y aldagaiak banandurik agertzen dira; koadratura batek, beraz, $y = Ax$ lehen integrala ematen digu eta fase-ibilbideak jatorritik igarotzen diren zuzenak direla diosku. Bestalde, frakzio bakoitzeko zenbakitzailea eta izendatzailea t , x eta y balioekin hurrenez hurren biderkatuz, honako hau lortzen da:

$$\frac{t dt + x dx + y dy}{t(t^2 + x^2 + y^2)} = \frac{dx}{2tx}. \quad (4.33)$$

Bi izendatzaileetan agertzen den t sinplifikaturik, ekuazio honen bi gaiak diferentzial zehatzak direla ikusten da. Integrazio zuzen baten bidez $t^2 + x^2 + y^2 = Bx$ lehen integrala lortzen dugu, aurrekoarekin batera soluzio orokorra ematen duena.

4.9 ARIKETA Askatu ondoko sistema:

$$\dot{x} = \frac{y}{x+y}, \quad \dot{y} = \frac{x}{x+y}. \quad (4.34)$$

4.3 Lehen ordenako sistema linealak

Gai honetako hurrengo ataletan

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t) \quad (4.35)$$

sistema lineala aztertuko dugu eta a_{ij} eta b_i funtzioak I tarte jakin batean jarraituak direlako hipotesia egingo dugu. Tarte horretan, beraz, existentzia eta bakartasunaren teorema betetzen da. Gainera, sistema lineala denez, a_{ij} eta b_i funtzioak I tartean jarraituak badira, tarte horretako puntu batean emandako hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra existitzen da eta I tarte osoan dago definiturik. Ondorioz, a_{ij} eta b_i funtzioen jarraitasun-tarte osoan definituriko soluzioak kontsideratuko ditugu.

Notazioa arintzeko ezezagun guztiak zutabe-bektore batean bilduko ditugu,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

eta a_{ij} funtzioak matrize karratu batean, lehen (bigarren) azpiindizeak errenkada (zutabea) adierazten duelarik:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Era berean, b_i gai askeekin beste bektore bat osatuko dugu:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Matrize hauek aldagai independentearen menpekoak direnez, beraien deribatuak ere kalkula daitezke. Adibidez,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Matrize-notazioan ondoko era errazean idazten da sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (4.40)$$

edo, $\mathbf{Lx} \equiv \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ eragile lineala erabiliz,

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{b}. \quad (4.41)$$

Eragilearen linealtasuna oztoporik gabe egiaztatzen da: $\mathbf{L}(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\mathbf{Lx} + b\mathbf{Ly}$, baldin eta a eta b konstanteak badira.

4.10 ARIKETA Idatzi matrize-notazioaren bidez ondoko sistema:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x. \quad (4.42)$$

\mathbf{b} gaia identikoki nulua ez bada, **sistema osoa** da eta dagokion **sistema homogeneoa** \mathbf{b} gai inhomogeneoa kenduz lortzen da: $\mathbf{Lx} = \mathbf{0}$ edo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$. (Hemen, $\mathbf{0}$ delakoa bektore nulua da.)

Hurrengo ataletan garatuko dugun teoria, aurreko gaian ekuazio linealaren kasuan aztertu genuenaren hedapen naturala da. Izan ere, n ordenako edozein ekuazio lineal lehen ordenako n ekuazioren bidez (eta alderantziz) idatz daitekeenez, ondoren ikusiko duguna aipaturiko teoria bera da, baina matrize-notazio arinaren bidez adierazia.

4.4 Sistema lineal homogeneoak

Hasteko, $\mathbf{Lx} = \mathbf{0}$ (edo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$) sistema homogeneoa aztertuko dugu. Eragilearen linealtasunak gainezarmenaren printzipioa bermatzen du: sistema homogeneoaren soluzioen koefiziente konstanteetako edozein konbinazio, sistemaren soluzioa da:

$$\mathbf{Lx}_i = \mathbf{0} \quad \implies \quad \mathbf{L} \sum C_i \mathbf{x}_i = \sum C_i \mathbf{Lx}_i = \mathbf{0}. \quad (4.43)$$

Ondorioz, sistema lineal homogeneoaren soluzioen multzoa espazio bektoriala da, I tartean definituriko $\mathbf{x}(t)$ funtzio bektorial erregularren espazioaren azpiespazio bat hain zuzen. Espazio horretako \mathbf{x}_i bektoreen **independentzia lineala** ohi bezala definitzen da: tarte osoan nulua den konbinazio lineal bakarria koefiziente nulua dauzkana da. $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ bektore-sistema linealki menpekoa bada,

$$\sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0} \iff \sum_{j=1}^n x_{ij} C_j = 0, \quad \forall t \in I \quad (4.44)$$

sistema lineal homogeneoak soluzio ez-nulua onartzen du. (Hemen, \mathbf{x}_j zutabe-bektorearen i errenkada x_{ij} notazioaren bidez adierazi dugu.) Hortaz, sistemaren determinantea, definizioz bektoreen multzoaren **wronskiarra** dena,

$$W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \equiv |\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n| \equiv \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}, \quad (4.45)$$

nulua da I tarteko puntu guztietan.

Oro har, emaitza honen alderantzizkoa ez da egia, baina bektoreak sistema lineal homogeneo jakin baten soluzioak badira ($L\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$) eta wronskiarra puntu batean nulua bada ($W(t_0) = 0$),

$$\sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t_0) = \mathbf{0} \iff \sum_{j=1}^n x_{ij}(t_0) C_j = 0 \quad (4.46)$$

sistema lineal homogeneoak daukan C_j koefizienteetarako soluzio ez-nulua erabil dezakegu $t \in I$ balio guztietarako $\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$ bektorea eraikitzeko. Gainezarmenaren printzipioaren ondorioz bektore hori sistema diferentzial homogeneoaren soluzioa da eta, C_j koefizienteak auke-ratzeko metodoari esker, hastapen-baldintza nulua betetzen ditu $t = t_0$ puntuan. \mathbf{x} bektoreak sistema diferentziala eta hastapen-baldintza berberak betetzen dituen bektore nulua izan behar duela ziurtatzen du existentzia eta bakartasunaren teorema:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t) = \mathbf{0}, \quad \forall t \in I. \quad (4.47)$$

Beraz, bektoreak linealki menpekoak dira eta wronskiarra tarteko puntu guztietan nulua da. Fro-gatu dugunez, n ordenako sistemaren n soluzioen kasuan, menpeketasun lineala, wronskiarra puntu batean nulua izatea eta identikoki nulua izatea guztiz baliokideak dira, n ordenako ekuazio lineal homogeneoaren kasuan gertatzen den bezalaxe.

4.4.1 Soluzio-espazioa

Soluzio-espazioaren dimentsioa n baino txikiagoa ez dela existentzia eta bakartasunaren teo-rema erabiliz ikusten da, berari esker ondoko hastapen-baldintzei dagozkien n soluzio linealki independente existitzen baitira:

$$\mathbf{x}_1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{x}_n(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Jakina, gauza bera esan daiteke beste edozein aukerari buruz hastapen-baldintzen determinantea —hau da, t_0 puntuan wronskiarrak duen balioa— nulua ez bada. Beraz, **oinarrizko soluzio-sistemak** deitzen diren n soluzio linealki independentez osaturiko multzoak existitzen dira. Gainera, $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ oinarrizko sistema bakoitza soluzio-espazioaren oinarria dela (eta, hortaz, espazio horren dimentsioa n dela) frogatzeko, nahikoa da ikustea homogeen edozein soluzio ($L\mathbf{x} = \mathbf{0}$) oinarrizko sistemako soluzioen C_j koefiziente konstanteetako konbinazio baten berdina dela. Dagozkion C_j balioak kalkulatzeko,

$$\mathbf{x}(t_0) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t_0) \iff x_i(t_0) = \sum_{j=1}^n x_{ij}(t_0) C_j \quad (4.49)$$

sistemak t_0 puntuan duen soluzio bakarra (determinantea nulua ez denez existitzen dena) kalkulatu behar da. t_0 puntuan aukeratutako hastapen-baldintzei dagokien soluzioaren bakartasunaren ondorioz,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j(t), \quad \forall t \in I \quad (4.50)$$

betetzen da t_0 puntuan aukeratutako koefizienteak erabiltzen badira. Beraz, sistema homogeen soluzio orokorra —soluzio guztiak dauzkana— oinarrizko sistema bateko bektoreen hautazko koefiziente konstanteetako konbinazio lineala da: $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$.

4.11 ARIKETA Egiaztatu

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

bektoreek (4.42) sistemaren oinarrizko multzoa osatzen dutela eta idatzi sistemaren soluzio orokorra.

4.4.2 Oinarrizko matrizeak

Zutabetzat oinarrizko sistema baten n bektoreak aukeratuz **oinarrizko matrize** bat lortzen da:

$$\mathbf{F}(t) \equiv (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Oinarrizko matrizea ez da singularra,

$$\det \mathbf{F}(t) = W[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n](t) \neq 0, \quad (4.53)$$

eta sistema lineal homogeen matrize-soluzioa da,

$$L\mathbf{F} = \mathbf{0} \iff \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.54)$$

hemen $\mathbf{0}$ ikurrak $n \times n$ matrize nulua adierazten duelarik. Izan ere, $F_{ij} = x_{ij}$ elementua j soluzioaren i errenkada denez, hauxe dugu:

$$\dot{x}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj}. \quad (4.55)$$

Baina adierazpen hau $\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_j$ matrize-adierazpenaren eta $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$ delakoaren garrantzia denez, bi adierazpenok baliokideak dira. Ageri denez, alderantzizko emaitza ere betetzen da: sistema homogeen edozein matrize-soluzio ez-singular, oinarrizko matrizea da eta bere zutabeak oinarrizko sistema baten bektoreak.

4.12 ARIKETA Aurkitu (4.42) sistemaren oinarrizko matrize bat.

Soluzio orokorra oinarrizko sistema batean $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{x}_j$ moduan garatzen da eta honen errenkadak

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} C_j = \sum_{j=1}^n F_{ij} C_j \quad (4.56)$$

direnez, soluzioa bera oinarrizko \mathbf{F} matrizea eta

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

hautazko zutabe-bektore konstantea biderkatuz adieraz daiteke:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{c}. \quad (4.58)$$

4.13 ARIKETA Aurkitu (4.42) sistemaren soluzio orokorra oinarrizko matrize baten bidez.

Oinarrizko matrizea ez da bakarra, oinarrizko soluzio-sistemekin eta, testuinguru orokorra-go batean, espazio bektorialen oinarriekin gertatzen den bezalaxe. Baina, hastapen-baldintzak beti t_0 puntu jakin batean eman nahi baditugu, badago soluzio partikular bakoitza zehazten duten C_k konstanteetarako aipaturiko hastapen-baldintzak erabiltzen ahalbidetzen duen oinarrizko matrize bakar bat. Izan ere, (4.58) adierazpenetik $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{F}(t_0) \cdot \mathbf{c}$ lortzen da eta, \mathbf{F} alderanzkarria denez, $\mathbf{c} = \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$. Azken hau (4.58) adierazpenean ordezkaturik $\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$ dugu. Orain,

$$\mathbf{K}(t, t_0) \equiv \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1} \quad (4.59)$$

definitzen badugu, honela adierazten dira soluzioak hastapen-baldintzen menpean:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0). \quad (4.60)$$

Argi dago \mathbf{K} matrizea oinarrizkoa dela,

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}(t, t_0), \quad (4.61)$$

$$\det \mathbf{K}(t, t_0) = \frac{\det \mathbf{F}(t)}{\det \mathbf{F}(t_0)} \neq 0, \quad (4.62)$$

eta ondoko hastapen-baldintzak betetzen dituela:

$$\mathbf{K}(t_0, t_0) = \mathbf{1}, \quad (4.63)$$

$\mathbf{1}$ delakoa identitate matrizea izanik. Bakartasunak alderantzizkoa ere egiazkoa dela baieztatzen du: (4.61) sistemaren matrize-soluzioa $t = t_0$ puntuan identitatara laburtzen bada, soluzio orokorra (4.60) adierazpenaren bidez ematen duen oinarrizko matrizea da. Definizioz, (4.60) baldintza —edo (4.61) eta (4.63) direlakoak— betetzen duena sistemaren **oinarrizko matrize kanonikoa** da.

4.14 ARIKETA Zergatik ez da beharrezkoa (4.62) baldintza eskatzea?

4.15 ARIKETA Kalkulatu (4.42) sistemaren $\mathbf{K}(t, t_0)$ oinarrizko matrize kanonikoa.

4.5 Sistema lineal osoak

Ekuazio lineal osoarekin gertatzen zen bezalaxe, homogeneoaren soluzio bat eta osoaren beste bat batuz, osoaren soluzio berri bat lortzen da:

$$Lx_1 = 0, \quad Lx_2 = b \quad \implies \quad L(x_1 + x_2) = Lx_1 + Lx_2 = b. \quad (4.64)$$

Eta, alderantziz, osoaren bi soluzioen arteko kendura homogeneoaren soluzioa da:

$$Lx_1 = Lx_2 = b \quad \implies \quad L(x_1 - x_2) = Lx_1 - Lx_2 = 0. \quad (4.65)$$

Ondorioz, $Lx = b$ sistema osoaren soluzio orokorra, dagokion sistema homogeneoaren soluzio orokorra,

$$Lx = 0 \quad \iff \quad x = \sum_{j=1}^n C_j x_j, \quad (4.66)$$

eta osoaren edozein soluzio partikular,

$$Lx_p = b, \quad (4.67)$$

batuz lortzen da:

$$Lx = b \quad \iff \quad x = \sum_{j=1}^n C_j x_j + x_p. \quad (4.68)$$

Konstanteen aldakuntzaren metodoa era zuzenean hedatzen da sistemetara: (4.58) egiturako soluzioa saiatzeko da, baina hautazko bektore konstantearen ordez zehaztu behar den t -ren menpeko $g(t)$ bektore bat jarri. Izan ere, $\dot{x} = A \cdot x + b$ ekuazio osoan $x = F(t) \cdot g(t)$ bektorea saiatzeko bada, Leibniz-en³ araua erabiliz hauxe dugu:

$$F \cdot \dot{g} + \dot{F} \cdot g = A \cdot F \cdot g + b. \quad (4.69)$$

Hemen, F matrizeak homogeneoa betetzen duela ($\dot{F} = A \cdot F$) kontuan harturik $F \cdot \dot{g} = b$ lortzen da. F alderanzkarria denez, azken emaitzatik $\dot{g} = F^{-1} \cdot b$ askatzen da eta honen integrala $x = F(t) \cdot g(t)$ adierazpenean ordezkaturik,

$$x(t) = F(t) \cdot c + F(t) \cdot \int F(t)^{-1} \cdot b(t) dt \quad (4.70)$$

dugu, integrala egitean agertzen den c hautazko bektore konstantearen bitartez. Azken emaitza sistema osoaren soluzio orokorra da eta argi erakusten du bere egitura: homogeneoaren soluzio orokorraren eta osoaren soluzio partikular baten batura da.

4.16 ARIKETA Ebatzi $\dot{x} = y, \dot{y} = -x + \frac{1}{\cos t}$ sistema.



³ **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-07-01, Leipzig, Saxonia; 1716-11-14, Hannover, gaur egun Alemania). Christiaan Huygens-en dizipulu honek gaur egunean kalkulu diferentzial eta integralean erabiltzen den notazioa asmatu zuen. Newton-ek **fluxioen** metodoa lehenago (1671 urtean) idatzi bazuen ere, ez zen argitaratu 1736 arte. Atzerapen honen ondorioz, kalkulu infinitesimalaren bi sortaile handien artean eztabaida luzea eta garratza sortu zen.

(4.70) adierazpenean agertzen den integral mugagabearen orde goiko muga aldarreko integral mugatu baliokidea idatziz,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{F}(t) \cdot \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s)^{-1} \cdot \mathbf{b}(s) ds \quad (4.71)$$

lortzen da. Hemen $t = t_0$ egin ondoren, \mathbf{c} bektore konstantea aska daiteke hastapen-baldintzen menpean: $\mathbf{c} = \mathbf{F}(t_0)^{-1} \cdot \mathbf{x}(t_0)$. Orain $\mathbf{K}(t, t_0) \equiv \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t_0)^{-1}$ definizioa gogoratu, honako hau lortzen da:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{K}(t, t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{K}(t, s) \cdot \mathbf{b}(s) ds. \quad (4.72)$$

Adierazpen honetako eskuineko lehen gaia homogeneoaren soluzio orokorra da, eta bigarrena t_0 puntuan hastapen-baldintza nuluak betetzen dituen soluzio partikularra eta, beraz, **Cauchy-ren metodoak** sistemen kasuan emandako soluzio partikularra. Azpimarratu behar da $\mathbf{K}(t, s)$ soluzio-familiak betetzen dituen (4.61) eta (4.63) baldintzak, ekuazio bakarraren kasuan $K(x, s)$ funtzioak betetzen zituen (3.93) baldintzen ordekoak direla.

4.17 ARIKETA Erabili Cauchy-ren metodoa $\mathbf{b} = \delta(t - a)\mathbf{1}$ bektorearen kasuan, L eragilearen oinarritzko soluzioa, hau da,

$$\mathbf{L}\mathbf{E}(t, a) = \delta(t - a)\mathbf{1}, \quad \mathbf{E}(t, a) = \mathbf{0} \quad (t < a \text{ denean}) \quad (4.73)$$

problemaren soluzioa, $\mathbf{E}(t, a) = \theta(t - a)\mathbf{K}(t, a)$ dela frogatzeko. Egiaztatu emaitza ordezkapen zuzenaren bidez.

4.6 Koefiziente konstanteetako sistema linealak

Sistemaren matrizea konstantea bada ($\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$), sistema linealaren ebazpenari ekiteko metodo sistematikoak daude. Hasteko, ikuspuntu teorikotik eta konputagailuz eginiko algebrarako sistematik egiteko oso interesgarria den metodo bat ikusiko dugu, nahiz eta praktikan kalkuluak eskuz egiteko gutxitan erabiltzen den. Ikusi dugunez, bai problema homogeneo eta bai osoa ere ia-ia ebatzita daude \mathbf{F} oinarritzko matrize bat,

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}(t), \quad \det \mathbf{F}(t) \neq 0, \quad (4.74)$$

edota ondoko baldintzek definituriko \mathbf{K} oinarritzko matrize kanonikoa kalkulatu bada:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}(t, t_0) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}(t, t_0), \quad \mathbf{K}(t_0, t_0) = \mathbf{1}. \quad (4.75)$$

Problema honetan matrizeak daudela tartean ahaztuko bagenu —edo $n = 1$ kasua bakarrik aztertuko bagenu—, soluzioa zuzenean idatziko genuke:

$$\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}, \quad (4.76)$$

edota

$$\mathbf{K}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}. \quad (4.77)$$

Ondoren ikusiko dugunez, erantzuna n edonolako izanda ere erabil daiteke.

4.6.1 Matrize baten esponenziala

Zenbakien kasuan bezalaxe, matrize karratu baten esponenziala definitzeko

$$e^{\mathbf{A}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^n \quad (4.78)$$

limitea⁴ edo

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k \quad (4.79)$$

seriea erabil daiteke. Ohi bezala, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{1}$ eta $\mathbf{A}^k = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{k-1} = \mathbf{A}^{k-1} \cdot \mathbf{A}$ definizioak erabili ditugu hemen.

4.18 ARIKETA Frogatu ondoko propietateak:

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}, \quad (4.80)$$

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}, \quad \text{baldin } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.81)$$

Propietate hauen ondorio zuzen moduan, edozein matrizeren esponenziala alderanzkarria dela dugu,

$$\det e^{\mathbf{A}} \neq 0, \quad (4.82)$$

eta bere alderantzizkoa hauxe dela:

$$\left(e^{\mathbf{A}} \right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \quad (4.83)$$

Oro har, bi matrize ez dira elkarrekin trukutzen eta, ondorioz, gauza bera gertatzen da beraien esponenzialekin, 4.12, 4.13 eta 4.14 problemetan ikusiko dugunez. Hala ere, edozein matrize trukutzen da berarekin, identitatearekin eta, alderanzkarria bada, bere alderantzizko matrizearekin. Gainera, bere berreturekin eta esponenzialarekin ere trukutzen da; eta matrize batekin trukutzen bada, beronen berreturekin eta esponenzialarekin ere trukatu da.

Gehien interesatzen zaigun esponenziala, $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}(t - t_0)$ ordezkapenaren bidez lortzen dena da:

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \mathbf{A}^k. \quad (4.84)$$

4.19 ARIKETA Definizioa erabiliz, frogatu ondokoa:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.85)$$

(4.80), (4.82) eta (4.85) propietateek frogatzen dute nahi genituen (4.74) eta (4.75) oinarrizko matrizeak $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ eta $\mathbf{K}(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ direla, hurrenez hurren.

⁴Matrize-segiden limitea definitzeko normarekiko konbergentzia erabil daiteke: $\mathbf{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}_n$ baldin eta $\lim_{n \rightarrow \infty} |(\mathbf{A} - \mathbf{A}_n) \cdot \mathbf{x}| = 0$ betetzen bada edozein \mathbf{x} bektoretarako. Honen azterketa zehatzagoa [20] erreferentzian, adibidez, aurki daiteke.

4.20 ARIKETA Biz

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + b_1(t), \quad (4.86)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + b_2(t) \quad (4.87)$$

sistema eta dagokion matrizea:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Frogatu $\mathbf{A}^2 = 2\mathbf{1}$ dela. Kalkulatu \mathbf{A}^{2k} eta \mathbf{A}^{2k+1} eta ondorioztatu hauxe betetzen dela:

$$e^{\mathbf{A}t} = \cosh(\sqrt{2}t) \mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}t) \mathbf{A}. \quad (4.89)$$

Idatzi (4.86)–(4.87) sistemaren soluzioa.

Matrize bat diagonalitzen bada, bere esponentziala erraz kalkula daiteke, ageri denez, hauxe betetzen baita:

$$\exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Kasu orokorrean, badago Cayley⁵ eta Hamilton-en teoreman oinarritutako prozedura sistematikoa⁶ (baina nahiko neketsua; hobe da, beraz, kalkulu algebraikorako sistema bat erabiltzea: ikus B.5.2 atala). Ez dugu hemen aztertuko metodo hori, zeren jarraian ikusiko dugun ordezeko metodoak, erabilgarriagoa izateaz gain, 8. gaian aztertuko dugun egonkortasun lineala ulertzen lagunduko baitigu.

4.6.2 Sistema homogeenaren ebazpena

Koefiziente konstanteetako sistemak 5. gaian ikusiko dugun Laplace-ren metodoaren bidez ebatz daitezke, batez ere hastapen-baldintzen problemetan. Bestalde, deribazio eta ordezkapenen bidez, beti labur daiteke sistema koefiziente konstanteetako ekuazio lineal bakar batera, azken honi 3. gaiko metodoak aplikatzeko. Baina ez da beharrezkoa, hango **Euler-en metodoa** erraz hedatzen baita sistemen kasura.

Izan ere, $y = Ce^{kx}$ soluzio eskalarra saiatu beharrean, $\mathbf{x} = e^{kt} \mathbf{c}$ soluzio bektoriala erabili beharko da, \mathbf{c} delakoa zehaztu behar den bektore konstantea izanik. $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ ekuazio homogeneoan $\mathbf{x} = e^{kt} \mathbf{c}$ ordezkaturaz, $ke^{kt} \mathbf{c} = e^{kt} \mathbf{A} \cdot \mathbf{c}$ lortzen dugu eta, nulua inoiz ez den esponentziala sinplifikaturaz,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = k\mathbf{c}. \quad (4.91)$$

Argi dago baldintza hau sistemaren \mathbf{A} matrizearen balio propioen problema dela preseski. Hortaz, metodo honetan hasteko,

$$\det(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) = 0 \quad (4.92)$$



⁵ **Arthur Cayley** (1821-08-16, Richmond, Ingalaterra; 1895-01-26, Cambridge, Ingalaterra). Ekarpak handienak taldeen teoria, matrize-algebra eta geometria ez-euklidearrari buruz egin zituen. 900 lan baino gehiago argitaratu zituen, haietariko 250 inguru abokatu gisa aritu zen 14 urteetan, Cambridge-ko katedra onartu zuen arte. Azkenean, beraz, bere zaletasunari ekin zion bere diru-sartzeak asko gutxitu ziren arren.

⁶Ikus, adibidez, [2], 471–473 orr.

ekuazio karakteristikoak ebatzi behar da balio propioak —**berretzaile karakteristikoak** edo **erro karakteristikoak** ere deitzen direnak— aurkitzeko. Balio propio bakoitzari dagozkion bektore propioak kalkulatzeko,

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (4.93)$$

sistema algebraiko lineala ebatzi behar da. Bektore propio independente bakoitzak sistema linealaren soluzio bat ematen digu eta koefiziente konstanteetako edozein konbinazio lineal ere soluzioa izango da.

Adibidez, $\dot{x} = x + 2y$, $\dot{y} = 4x + 3y$ sistemaren matrizea

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

denez,

$$\det(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) = \begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 4 & 3-k \end{vmatrix} = (k+1)(k-5) = 0 \quad (4.95)$$

izango da ekuazio karakteristikoak. Balio propioak $k = -1, 5$ dira, beraz, eta dagozkien bi soluzioak linealki independenteak izango dira (esponentzial desberdinak dauzkatelako).

4.21 ARIKETA Egiaztatu $k = -1$ eta $k = 5$ balioen bektore propioak

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

(eta hauen proportzionalak diren guztiak, noski) direla hurrenez hurren.

Soluzio orokorra, hortaz, $\mathbf{x} = A\mathbf{x}_1e^{-t} + B\mathbf{x}_2e^{5t}$ da, A eta B konstanteak hautazkoak direlarik. Osagaiak hauexek ditugu:

$$x = Ae^{-t} + Be^{5t}, \quad (4.97)$$

$$y = -Ae^{-t} + 2Be^{5t}. \quad (4.98)$$

Azken adibidean bezala, sistemak n bektore propio independente badauzka —eta horrela gertatuko da, esaterako, n balio propio desberdin badaude, edo zenbaiten anizkoiztasuna 1 baino handiagoa izanik ere matrizea simetrikoa, hermitearra, ortogonala edo unitarioa bada— bektoreen eta dagozkien esponentzialen arteko biderkadurek oinarritzko soluzio-sistema osatzen dute. Hortaz, soluzio orokorra konbinazio lineal baten bidez idatz daiteke hautazko n koefiziente konstante erabiliz.

4.22 ARIKETA Ebatzi

$$\dot{x} = -2x + y + z, \quad (4.99)$$

$$\dot{y} = x - 2y + z, \quad (4.100)$$

$$\dot{z} = x + y - 2z. \quad (4.101)$$

Bektore propioek sorturiko espazioaren dimentsioa⁷ n baino txikiagoa bada, $e^{kt}\mathbf{c}$ motako soluzioak ez dira nahiko eta, ekuazio linealarekin gertatu zen bezalaxe, $t^p e^{kt}\mathbf{c}$ egiturako gaiak

⁷Matrizeen diagonaltzeari buruzko ezagutza gogora ekartzeko gomendatzen diogu irakurleari. Sistema diferentzialen ebazpenaren eta matrizeen diagonaltzearen arteko erlazioen azterketa osoa ikusteko [20] eta [25] liburuetara jo daiteke.

ere erabili behar dira. Hemen kasu guztietan soluzio orokorra ematen duen errezeta aurkeztera mugatuko gara (frogapena [20] eta [25] erreferentzietan aurki daiteke). m anizkoitzasuneko k berretzaile karakteristikoko bakoitzeko, ordezkatu sisteman

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_m t^{m-1}) e^{kt} \quad (4.102)$$

adierazpena eta, berretura bereko koefizienteak berdinduz, kalkulatu \mathbf{c}_k bektore konstanteak. Prozedura honek beti ematen ditu m soluzio independente (edo, nahiago bada, hautazko m konstante dauzkan soluzio bat). Beste balio propioekin prozedura hau errepikatuz beti aurki daitezke oinarriko sistema baten n bektore linealki independente. Kalkulua erraza da, baina neketsua gerta daiteke. Gaur egunean zeregin hau burutzeko (egia esan, koefiziente konstanteetako edozein sistema lineal zuzenean ebazteko), kalkulu sinbolikoa egiteko programarik ez erabiltzea alferrikakoa da. Soluzioek izan ditzaketan forma desberdinak, ordea, ondo menperatu behar dira 8. gaian aztertuko dugun egonkortasun lineala ulertzeko.

Adibidez,

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.103)$$

$$\dot{y} = y \quad (4.104)$$

sistemaren matrizeak $k = 1$ balio propio bikoitzari dagokion $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bektore propio bakarra du. Beraz,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t \quad (4.105)$$

erako soluzioa saiatu behar da,

$$\begin{pmatrix} A + B + Bt \\ C + D + Dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A + Bt \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} A - C + (B - D)t \\ C + Dt \end{pmatrix} e^t \quad (4.106)$$

lortzeko. Errenkada bietan berretura bakoitzaren koefizienteak berdinduz, $C = -B$ eta $D = 0$ lortzen da; soluzioa, beraz, hau da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt \\ -B \end{pmatrix} e^t. \quad (4.107)$$

(Adibide erraz honetan, bigarren ekuazioan x ezezaguna agertzen ez denez, aldagaiak bananduz zuzenean lortzen da y , eta hau beste ekuazioan ordezkatzuz, lehen ordenako ekuazio lineal erraz bat ebatzi behar da.)

4.23 ARIKETA Aurkitu ondoko sistemaren soluzio orokorra:

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.108)$$

$$\dot{y} = x + 3y. \quad (4.109)$$

Sistema erreala izanik erro konplexu bat agertzen denean, soluzio nabariki errealak lor daitezke $k = \alpha \pm i\omega$ bikote konplexu konjugatuari dagozkion soluzio zatiak bilduz, hau da,

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} \left[(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_m t^{m-1}) \cos \omega t + (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 t + \cdots + \mathbf{d}_m t^{m-1}) \sin \omega t \right] \quad (4.110)$$

(\mathbf{c}_i eta \mathbf{d}_i bektore konstanteekin) saiatuz. Berreturen koefizienteak berdinduz, m anizkoitzasuneko bikote konplexu konjokatu bakoitzeko, hautazko $2m$ konstanteak geratuko dira amaieran. Esate baterako,

$$\dot{x} = x - y, \quad (4.111)$$

$$\dot{y} = x + y \quad (4.112)$$

sistemaren matrizeak $k = 1 \pm i$ balio propioak dauzka eta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \sin t \right] \quad (4.113)$$

soluzioa saiatzen bada, erraz ikusten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} \sin t \right] \quad (4.114)$$

dela soluzio orokorra.

4.24 ARIKETA Askatu honako sistema hau:

$$\dot{x} = x - 5y, \quad (4.115)$$

$$\dot{y} = 2x - y. \quad (4.116)$$

4.6.3 Sistema osoaren ebazpena

Gai inhomogeneoan

$$\left(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 t + \cdots + \mathbf{a}_q t^{q-1} \right) e^{\lambda t} \quad (4.117)$$

egiturako quasipolinomioak agertzen badira — \mathbf{a}_i bektore konstanteak ezagunak izanik—, **koefiziente indeterminatuen metodoan** mota bereko

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_q t^{q-1} \right) e^{\lambda t} \quad (4.118)$$

gaiak saiatzen dira \mathbf{c}_i bektore konstanteak aurkitzeko. Baina λ balioa ekuazio homogeneoaren $m \geq 1$ anizkoitzasuneko erro karakteristikoa bada,

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_{q+m} t^{q+m-1} \right) e^{\lambda t} \quad (4.119)$$

saiatu behar da eta *ekuazio linealaren kasuan ez bezala, orain ez da beti posiblea hasierako m gaiak ez sartzea*. Bikote konplexu konjokatu baten kasuan ($\lambda = \alpha \pm i\omega$),

$$\mathbf{x} = e^{\alpha t} \left[\left(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 t + \cdots + \mathbf{c}_{q+m} t^{q+m-1} \right) \cos \omega t + \left(\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 t + \cdots + \mathbf{d}_{q+m} t^{q+m-1} \right) \sin \omega t \right] \quad (4.120)$$

soluzio nabariki erreala saia daiteke, λ erro bikotearen anizkoitzasuna gai inhomogeneoan $q > 0$ bada eta ekuazio homogeneoan $m \geq 0$. Adibidez,

$$\dot{x} = x - y - 2te^t - 9t^2e^{-2t}, \quad (4.121)$$

$$\dot{y} = y + 2e^t - 3e^{-2t} \quad (4.122)$$

sistemaren kasuan, $k = 1$ erroa bi aldiz (hau da, lehen mailako quasipolinomio batean) agertzen da gai inhomogeneoan eta, (4.103)–(4.104) sistema aztertzean ikusi genuenez, $m = 2$ anizkoiztasuna du sistema homogeneoaren matrize linealean; hirugarren mailako bektore-quasipolinomio bat saiatu behar da, beraz:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \\ E + Ft + Gt^2 + Ht^3 \end{pmatrix} e^t. \quad (4.123)$$

$k = -2$ balioa sistema homogeneoaren erro karakteristikoa ez denez, bere kasuan bigarren mailako quasipolinomio bat saiatu behar da, maila horretakoa baita gai inhomogeneoan dagokion zatia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt + Ct^2 \\ D + Et + Ft^2 \end{pmatrix} e^{-2t}. \quad (4.124)$$

4.25 ARIKETA Saiatu banan-banan aipaturiko bi quasipolinomioak eta egiaztatu sistemaren soluzio orokorra ondokoa dela:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + Bt - 2t^2 \\ -B + 2t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 + 2t + 3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}. \quad (4.125)$$

4.26 ARIKETA Ebatzi

$$\dot{x} = x - y + e^t \cos t, \quad (4.126)$$

$$\dot{y} = x + y + e^t \sin t. \quad (4.127)$$

Bestalde, gai inhomogeneoan quasipolinomioak ez diren gaiak agertuz gero, dagozkien soluzio partikularraren zatiak lortzeko konstanteen aldakuntzaren (edo Cauchy-ren) metodo orokorrera jo behar da.

4.7 Problemak

4.1 $\ddot{x} = y, \quad \ddot{y} = x.$

4.2 $\ddot{x} - 2\dot{y} + x = 0, \quad \ddot{y} - 2\dot{x} + y = e^{2t}.$

4.3 Kalkula itzazu ondoko sistemaren lehen integral independente bi eta berauek erabili ondoren geratzen den lehen ordenako ekuazioa:

$$a\dot{x} = (b - c)yz, \quad b\dot{y} = (c - a)zx, \quad c\dot{z} = (a - b)xy.$$

(a , b eta c konstanteak dira.) Zein da sistema honen esanahia mekanikan? Zer adierazten dute lorturiko lehen integralek?

4.4 $\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$

4.5 Linealki independenteak al dira $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ eta $\begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ bektoreak? Kalkula beraien wronskiarra eta azaldu emaitza.

4.6 Liouville-ren formula. Matrize baten aztarna bere diagonaleko elementuen batura dela gogoratu ($\text{tr } \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{kk}$), froga ezazu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ sistema lineal homogeen oinarritzko sistema

baten wronskiarra, $W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^t \text{tr } \mathbf{A} dt$ erlazioa betetzen duela.

Iradokizuna: Hasteko azter ezazu $n = 2$ kasua.

4.7 Sistemak eta ekuazioak. Azter ezazu bigarren ordenako ekuazio lineal bati dagokion lehen ordenako sistema. Aurkitu ekuazioaren eta sistemaren oinarritzko sistemen arteko erlazioa eta konparatu dagozkien wronskiarra.

4.8 Aurkitu ondoko oinarritzko matrizea onartzen duen sistema lineala: $\begin{pmatrix} t & t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

4.9 Froga ezazu \mathbf{A} edozein matrizeren kasuan $\det e^{\mathbf{A}} = e^{\text{tr } \mathbf{A}}$ betetzen dela.

Iradokizuna: Erabili $\det e^{\mathbf{A}t}$ Liouville-ren formularen eta egin $t = 1$.

4.10 Jatorriaren egonkortasun asintotikoa. Eman dezagun $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ sistema lineal homogeen $n \times n$ matrizeak (konstantea izateaz gain) n balio propio errealek desberdin dituela. Zer baldintza bete behar dute aipaturiko balio propioek sistemaren $\mathbf{x}(t)$ soluzio guztiek $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$ bete dezaten? Zer gertatzen da balio propio guztiak ez badira errealek? Eta denak ez badira elkarren desberdinak?

4.11 Sailkatu, a eta b konstanteen arabera, ondoko sistema lineal homogeen fase-espazioko orbitak:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

4.12 Bira ondoko matrizeak:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kalkulatu $e^{\mathbf{A}}$, $e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$, $e^{\mathbf{B}} \cdot e^{\mathbf{A}}$ eta $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$. Azaldu emaitzak.

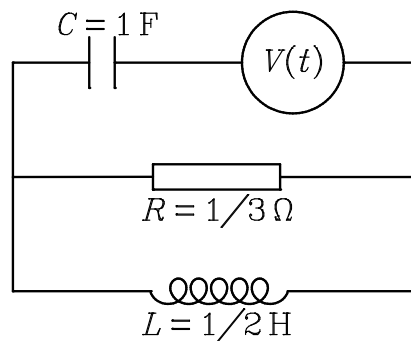
4.13 **Baker, Campbell eta Hausdorff-en formula.** Garatu $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{B} \cdot e^{-\mathbf{A}t}$ biderkadura $t = 0$ puntuaren inguruko Taylor-en serie baten bidez ondokoa frogatzeko:

$$e^{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B} = \left(\mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \cdots + \frac{1}{n!} \underbrace{[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \dots, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] \dots]}_{n \text{ aldiz}} + \cdots \right) \cdot e^{\mathbf{A}}.$$

Ohi bezala, \mathbf{A} eta \mathbf{B} matrizeen **trukatzailea** $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ da.

4.14 **Glauber-en formula.** Eman dezagun \mathbf{A} eta \mathbf{B} matrizeak euren $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ trukatzailearekin trukutzen direla. Aurkitu $\mathbf{F}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{B}t}$ biderkadurak betetzen duen ekuazio diferentziala honako adierazpen hau frogatzeko:

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \cdot e^{\frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}]}$$



4.3 IRUDIA RLC zirkuitua.

4.15 **RLC zirkuitua.** Aurkitu 4.3 irudiko zirkuitua deskribatzen duen ekuazio diferentziala. Erabili ezezaguntzat autoindukzioan zehar doan intentsitatea eta kondentsadorearen plaken arteko potentzial-erorketa. Kalkulatu oinarrizko matrizea eta hastapen-baldintza nuluei dagokien soluzioa V potentziala ondokoa denean:

$$V(t) = \begin{cases} 1, & \text{baldin } 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{baldin } t > 1. \end{cases}$$

4.16 $\dot{x} = x + y + z, \quad \dot{y} = -2y + t, \quad \dot{z} = 2z + \sin t.$

4.17 $\dot{x} + 6x + 3y - 14z = 0, \quad \dot{y} - 4x - 3y + 8z = 0, \quad \dot{z} + 2x + y - 5z = \sin t.$

4.18 $\vec{E} \perp \vec{B}$ moduko eremu elektromagnetiko uniforme konstante batean higitzen ari da elektroibat. Froga ezazu beraren ibilbide ez-erlatibista zikloide bat dela, pausagunetik abiatu bada.

$$4.19 \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 18 \\ 0 & -3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

4.20 Desintegrazio erradioaktiboa. Hasieran A isotopoa purua da, baina $A \rightarrow B \rightarrow C$ desintegrazio bikoitza pairatzen du, C ekoizpena egonkorra delarik. Erdi-bizitzak erabiliz, kalkulatu A , B eta C isotopoen kontzentrazio erlatiboak edozeinaldiunetan.

4.21 Aztertu partikula puntual baten erorketa, higitzen ari den ingurunean marruskadura abiaduraren proportzionala denean.

$$4.22 \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

$$4.23 \quad \dot{x} + 3x + 4y = 0, \quad \dot{y} + 2x + 5y = 0.$$

$$4.24 \quad \dot{x} = -5x - 2y, \quad \dot{y} = x - 7y.$$

$$4.25 \quad \dot{x} - y + z = 0, \quad \dot{y} - x - y = t, \quad \dot{z} - x - z = t.$$

4.26 Nola kalkula daiteke oinarrizko matrize jakin bat onartzen duen sistema lineal homogenea? Erabili erantzuna ondoko soluzio orokorra daukan sistema aurkitzeko:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{3t} + Ce^{-2t}, \\ y &= \frac{3}{2}Ae^{3t} + Be^{-t} - Ce^{-2t}, \\ z &= \frac{3}{2}Ae^{3t} - Be^{-t} - Ce^{-2t}. \end{aligned}$$

4.27 Ebatzi hurrengo sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= z \sin t - y, \\ \dot{y} &= x - z \cos t, \\ \dot{z} &= y \cos t - x \sin t. \end{aligned}$$

Emaitzaren interpretazio geometriko erraza aurki dezakezu?

Iradokizuna: Idatzi soluzioa matrizeen bidez eta $t = 0$ aldiuneari dagozkion hastapen-baldintzen menpean.

4.28 Kalkulatu ondoko sistemaren soluzio orokorra:

$$\begin{aligned} y' &= 4 \frac{xy - z}{x^2 - 1}, \\ z' &= 2 \frac{xz - y}{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

4.29 Cauchy eta Euler-en sistemak. Azaldu nola ebatz daitekeen ondoko eran idazten den ekuazio diferentzialen sistema,

$$t \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}, \quad (\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}).$$

Erabili horretarako izen bereko ekuazioaren kasuan ikusi genuen metodoaren antzeko zerbait eta aplikatu hurrengo sistemaren soluzio orokorra kalkulatzeko:

$$\begin{aligned} t \dot{x} &= 3x - 2y, \\ t \dot{y} &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

4.30 Ebatzi ondoko sistema:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{z}{x}, \\z' &= -xy.\end{aligned}$$

4.31 Askatu

$$\begin{aligned}\dot{u} &= 4v + 64te^{2t}, \\ \dot{v} &= u\end{aligned}$$

sistema eta erabili soluzioa ondokoa ia kalkulurik gabe ebazteko:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y^2 + 64te^{2t}, \\ \dot{y} &= \frac{x}{y}.\end{aligned}$$

5. GAIA

Laplace-ren transformazioa

*Change is not made without inconvenience,
even from worse to better.*
Samuel Johnson

Koefiziente konstantetako ekuazio eta sistema diferentzial linealen eta problema algebraiko batzuen ebazpenen arteko erlazio estua 3. eta 4. gaitan ikusi zen. Hemen berriro aztertuko da $f(t)$ funtzio bakoitzari

$$F(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt \quad (5.1)$$

transformatua egokiarazten dioten transformazio integral lineal egokiak erabiliz. Hauek problema algebraiko lineal baliokide batera laburtzen dute jatorrizko problema diferentzial lineala. Hurrengo taulan biltzen diren a eta b mugen eta k **gunearen** aukerak erabilgarrienak dira¹:

Transformatua	Zuzena	Alderantzizkoa
Laplace ²	$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{st} F(s) ds$
Fourier	$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-ipx} dx$	$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(p) e^{ipx} dx$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s) t^{-s} ds$
Hankel	$F(k) = \int_0^\infty f(t) J_n(kt) t dt$	$f(t) = \int_0^\infty F(k) J_n(kt) k dk$
Hilbert	$g(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) dx}{x - y}$	$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{g(y) dy}{y - x}$

Fisikan gehien erabiltzen direnak Fourier-en transformazioa eta Laplace-rena dira, B eranskinean aipatuko ditugun metodo sinbolikoetan maiz Mellin-en transformazioa erabiltzen den

¹Integral batzuetan D.2 atalean definituriko Cauchy-ren balio nagusia erabili behar da.

²Oso antzekoa da Carson eta Heaviside-ren transformazioa: $f(t) \rightarrow s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$. Alderantzizko transformazioan integrazio-bidea $F(s)$ -ren singularutasun guztien eskuinean dagoen edozein $\xi + iy$ zuzen bertikal izan daiteke.

arren. Fourier-en transformazioa zenbait problematan landuko badugu ere, gai honetako aztergaia Laplace-rena da. Azken hau egokiago da hastapen-baldintzen problemak aztertzean (eta, beraz, portaera iragankorra garrantzizkoa denean) baita gai inhomogeneoa («kanpo-indarra») zatikako jarraitua baino ez denean ere. Metodo sinbolikoen garapenaren ondorioz, ekuazioen soluzioak aurkitzerakoan honelako transformazioen erabilera gutxitu bada ere, ikuspuntu teorikotik duten garrantzia ez da aldatu: zirkuituen teorian, mekanika kuantikoan eta beste arlo askotan, erosoagoa da batzuetan transformatuaren espazioan lan egitea.

Laplace eta Fourier-en transformatuaren taulak, funtsezko propietateak ere biltzen dituztenak, E eta F eranskinetan aurki daitezke, hurrenez hurren, eta taula luzeagoak 319. orriko erreferentzia-lanetan.

5.1 Definizioa

Laplace-ren³ transformazioak f funtzioari ondoko integral inpropioaren bidez definituriko $F = \mathcal{L}[f]$ irudia egokiarazten dio:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (5.2)$$

5.1 ARIKETA Egiaztatu ondoko emaitza:

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \quad \text{baldin } s > 0. \quad (5.3)$$

Kontuan har dezagun f funtzioak $t < 0$ puntuetan dituen balioak ez direla agertzen transformazioaren definizioan. Beraz, f funtzioa jatorriaren ezkerrean nulua dela suposatuko dugu beti: $f(t) = \theta(t)f(t)$. Ondorioz, goiko emaitza Heaviside-ren funtzioaren transformatua da:

$$\mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[\theta(t)] = \frac{1}{s}, \quad \text{baldin } s > 0. \quad (5.4)$$

Bestalde, integral inpropioaren existentzia bermatzeko, f funtzioen multzoa nolabait murriztu behar da. Ikus ditzagun baldintza nahiko batzuk.

5.1.1 $F(\alpha)$ espazioa

α ordena esponentzial finituko funtzio zatikako jarraituen espazioari $F(\alpha)$ izena emango diegu. Esan bezala $t < 0$ tartean nulua den f funtzioa zatikako jarraitua bada, luzera finituko $[0, a]$ tarte bakoitzean jarraitua da, agian eten finituko puntuen multzo finitu batean izan ezik. Lehen hipotesi honen ondorioz $\int_0^a e^{-st} f(t) dt$ integrala a finitu guztietarako existitzen da. Integral inpropioa $a \rightarrow \infty$ limitean konbergentea dela bermatzeko, f funtzioa hazkunde esponentzialekoa izateko eskatzen dugu, hau da, ondoko baldintza betetzeko moduko α balio bat (ordena esponentziala deitzen dena) eta t_0 eta M konstante positiboak egon daitezela:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad \forall t > t_0. \quad (5.5)$$



³ **Pierre-Simon Laplace** (1749-03-28, Beaumont-en-Auge, Frantzia; 1827-03-05, Paris). 1796ko *Exposition du système du monde* liburuan bere nebulosa-hipotesia argitaratu zuen. Bere maisulana, *Traité de Mécanique Céleste* ikaragarria, 5 liburukitan argitaratu zen 1799–1825 bitartean eta bertan biltzen da grabitazioari buruz aurreko belaunaldiek eta berak ere egindako lana, potentzialaren teoria barne dagoela. Probabilitateen kalkuluaren oinarriak ezarri zituen 1812ko *Théorie Analytique des Probabilités* liburuan. Beste ekarpenen artean, Frantses Iraultzak sistema metriko hamartarra sortzeari lagundu ziola aipatu behar da.

5.2 ARIKETA Egiaztatu 1 , $\sin at$, $\cos at$ eta e^{iat} funtzioak $F(0)$ espazioan daudela.

5.3 ARIKETA Erabili e^{ct} funtzioaren Taylor-en garapena t^n berreturaren ordena esponentziala aurkitzeko $n > 0$ denean.

5.4 ARIKETA Froga ezazu $f \in F(\alpha)$, $g \in F(\beta) \Rightarrow fg \in F(\alpha + \beta)$.

5.1.2 Existentzia eta propietate asintotikoak

$f \in F(\alpha)$ betetzen bada, f funtzioa zatikako jarraitua da eta, beraz, bornaturik dago $[0, t_0]$ tartean: adibidez, $|f(t)| \leq L, \forall t \in [0, t_0]$. Emaitza hau, (5.5) delakoarekin batera, kontuan harturik, Laplace-ren transformazioa definitzen duen integrala honela bornatzen da $a > t_0$ guztietarako:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_0^{t_0} e^{-st} |f(t)| dt + \int_{t_0}^a e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq L \int_0^{t_0} e^{-st} dt + M \int_{t_0}^a e^{-(s-\alpha)t} dt \\ &= L \frac{1 - e^{-st_0}}{s} + M \frac{e^{-(s-\alpha)t_0} - e^{-(s-\alpha)a}}{s - \alpha}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

eta hemen $a \rightarrow \infty$ limitea eginez $f \in F(\alpha)$ hipotesitik hauxe ondorioztatzen dugu:

- $F(s)$ transformatua definiturik dago $s > \alpha$ zuzenerdian (edo $\operatorname{Re} s > \alpha$ denean).
- $sF(s)$ funtzioa bornatua da $s \rightarrow \infty$ limitean eta, beraz, $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.

Adibidez, $1 \in F(0)$ betetzen denez, $\mathcal{L}[1]$ transformatua $s > 0$ tartean dago definiturik, 5.1 ariketan zuzenean ikusi dugun bezalaxe. Gainera, beraren $1/s$ transformatuak zerora jotzen du infinituan, eta s -rekin biderkatuta bornatua da.

5.5 ARIKETA Frogatu

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \text{baldin } s > a. \quad (5.7)$$

Aurrerantzean, kontrakoa esplizituki esaten ez bada, $f(t)$ funtzioan $F(\alpha)$ espazio egokian dagoela suposatuko dugu implizituki.

5.2 Propietateak

5.2.1 Linealtasuna

Integralaren linealtasunetik Laplace-ren transformatuarena ondorioztatzen da zuzenean:

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a \mathcal{L}[f(t)] + b \mathcal{L}[g(t)], \quad (5.8)$$

a eta b konstante guztietarako. Funtsezko propietate honi esker, problema diferentziala algebraiko bihurtzean ez da linealtasuna galduko.

5.6 ARIKETA Erabili linealtasuna eta esponentzialaren transformatua

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad \text{baldin } s > |a| \quad (5.9)$$

frogatzeko, inolako integralik egin gabe.

5.2.2 Desplazamenduaren teorema

Laplace-ren transformazioaren (5.2) definizioa erabiliz, $s > \alpha$ denean $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ bada,

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a), \quad (s-a > \alpha) \quad (5.10)$$

eta, hortaz, zera frogatu dugu:

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a), \quad \text{baldin } s > \alpha + a. \quad (5.11)$$

Bestela esanda, $f(t)$ funtzioaren eta e^{at} esponentzialaren biderkaduraren transformatua, funtzioaren transformatuaren transladatua da. Adibidez, 5.1 probleman frogatuko ditugun

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \text{baldin } s > 0 \quad (5.12)$$

emaitzez baliaturik, ondokoak zuzenean lortzen dira:

$$\mathcal{L}[e^{at} \cos bt] = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \mathcal{L}[e^{at} \sin bt] = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad \text{baldin } s > a. \quad (5.13)$$

5.7 ARIKETA Erabili propietate hau eta (5.3) emaitza (5.7) delakoa integralik egin gabe berreskuratzeko.

Teorema honen alderantzizkoa ezartzeko, funtzioak $t < 0$ zuzenerdian nuluak direlako hipotesia ekarri behar dugu burura eta f funtzioaren transladatua $t < a$ puntuetan nulua dela suposatuz behar dugu.

5.8 ARIKETA Erabili aldagai-aldaketa bat haxe frogatzeko: $s > \alpha$ zuzenerdian $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ badugu eta $a > 0$ bada, orduan

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s), \quad \text{baldin } s > \alpha. \quad (5.14)$$

5.9 ARIKETA Egiatzatu, integralik egin gabe, $a > 0$ denean honako hau betetzen dela:

$$\mathcal{L}[\theta(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{baldin } s > 0. \quad (5.15)$$

Zer gertatzen da $a < 0$ bada?

5.2.3 Eskala-aldaketa

5.10 ARIKETA Eman dezagun $a > 0$ dela eta $s > \alpha$ denean $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ dugula. Froga ezazu

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{baldin } s > a\alpha \quad (5.16)$$

betetzen dela.

5.2.4 Deribatuak eta berretura-biderkatzaileak

Eman dezagun $f, f', \dots, f^{(n)} \in F(\alpha)$ eta $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ dela $s > \alpha$ guztietarako. Kalkula dezagun deribatuaren transformatua zatikako integrazioaren bidez, $[0, \infty)$ tartean f jarraitua dela suposatuz:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (5.17)$$

f funtzioaren ordena esponentziala α denez, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ beteko da $s > \alpha$ guztietarako. Ondorioz, (5.17) emaitza eta indukzio osoa erabiliz, deribatuaren transformatuak $s > \alpha$ zuzenerdian ondokoak direla ikusten dugu:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0), \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0), \quad (5.19)$$

⋮

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (5.20)$$

Jakina, $t < 0$ denean $f(t) = 0$ dela suposatu dugunez, $f^{(k)}(0)$ balioa jarraitasunaren ondorioz existitu behar den eskuin-limitea dela ulertu behar da aurreko adierazpen guztietan. Gainera, (5.19) adierazpenean f eta f' izan behar dira jarraituak, eta (5.20) horretan f, f', \dots, f^{n-1} .

5.11 ARIKETA Erabili (5.18) propietatea e^{at} funtzioaren transformatua zuzenean lortzeko.

Emaitza hauen garrantzia honetan datza: deribatuak konbinazio algebraikoekin ordezkatzeko dituztenez, problema diferentzial batzuk algebraiko bihurtuko dira Laplace-ren transformazioa erabiliz gero, 5.6 atalean ikusiko dugunez. Emaitza hauen alderantzizkoa are errazagoa da.

5.12 ARIKETA Erabili indukzio osoa hauxe frogatzeko: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ ($s > \alpha$) bada,

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -F'(s), \quad \text{baldin } s > \alpha \quad (5.21)$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad \text{baldin } s > \alpha. \quad (5.22)$$

5.13 ARIKETA Frogatu, integralik ebatzi gabe,

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{baldin } s > 0, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \text{baldin } s > a. \quad (5.24)$$

5.3 Alderantzizko transformazioa

Oro har, $F(s)$ funtzio jakin bat Laplace-ren transformatutzat onartzen duen $f(t)$ funtzioa aurkitzeko alderantzizko problema zailagoa izaten da. Hasteko, gerta daiteke soluziorik ez egotea. Adibidez, 1 funtzioak ez du zerora jotzen $s \rightarrow \infty$ limitean eta, beraz, ezin izan daiteke $F(\alpha)$ espazioko funtzio baten transformatua. Izan ere, ez da inolako funtzioaren transformatua, 5.5 atalean ikusiko dugunez $\delta(t)$ funtzio orokortuaren transformatua baizik.

Gainera, alderantzizko transformatua existitzen bada ez da halabeharrez bakarra, baina frogatuko ez dugun **Lerch-en**⁴ **teoremaren** arabera, bi funtzioen transformatu zuzenak berdinak badira ($\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[g]$), orduan

$$\int_0^x [f(t) - g(t)] dt = 0, \quad \forall x > 0, \quad (5.25)$$

eta honen deribatuak adierazten duenez, f eta g berdinak izan behar dira eten puntuetan izan ezik. Beraz, f eta g funtzioak jarraituak badira eta Laplace-ren transformazio zuzen berbera badute, berdinak dira $t > 0$ puntu guztietan. Beraz, alderantzizko transformatu jarraitua, existitzen bada, bakarra da, eta hemen interesatzen zaizkigun alderantzizkoak ekuazioen soluzioak eta, beraz, jarraituak dira.

Alderantzizko $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ transformatua kalkulatzeko formula bat dago,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (5.26)$$

(integrazio-zuzen bertikala F -ren singularitasunen eskuinean aukeratu behar da hemen), baina Laplace-ren transformatuak (zuzenak eta alderantzizkoak) erabilgarriak badira, integralik ebatzi gabe kalkuluak egitea ahalbidetzen dutelako da. Izan ere, E eranskinetako moduko taulak, alderantzizko transformatuaren linealtasuna —zuzenaren propietate berberaren ondorio erraza dena—,

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b \mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad (5.27)$$

eta oinarriko eragiketa algebraikoak erabiliz, praktikan erraz aurkitzen da adierazpen askoren alderantzizko transformatu jarraitua.

Gai honetan aztertutako problema motan (koefiziente konstanteetako ekuazio linealak) funtzio arrazionalen alderantzizko transformazioak kalkulatu behar direnez, frakzio sinpleetako deskonposizioa oso erabilgarria izaten da. Adibidez, $F(s) = 1/s(s+1)^2$ transformatuaren kasuan nahikoa da

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}, \quad (5.28)$$

(5.3), (5.7), (5.24) eta (5.27) emaitzak erabiltzea alderantzizko transformatu jarraitua honako hau dela ondorioztatzeko:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)^2} \right] = 1 - (1+t)e^{-t}. \quad (5.29)$$

Frakzio sinpleetako deskonposizioa egiteko, **Heaviside-ren garapen-formularen** zati den hurrengo emaitza erabilgarria izaten da.

5.14 ARIKETA Eman dezagun $P(s)$ polinomioaren maila $Q(s)$ -rena baino txikiagoa dela eta azken polinomioak erro bakuna duela $s = a$ puntuan: $Q(a) = 0, Q'(a) \neq 0$. Froga ezazu $P(s)/Q(s)$ funtzio arrazionalaren frakzio sinpleetako deskonposizioan a erroari dagokion A koefizientea,

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A}{s-a} + \dots, \quad (5.30)$$

honako kondar hau dela:

$$A = \lim_{s \rightarrow a} \frac{(s-a)P(s)}{Q(s)}. \quad (5.31)$$

Zer esan daiteke erroa bikoitza bada?



⁴ **Mathias Lerch** (1860-02-20, Milinov, Bohemia, gaur egun Txekiar Errepublikan; 1922-08-03, Susice, Txekoslovakia). Geometria eta zenbakizko metodoei buruz ere lan egin arren, analisisian eta zenbakien teorian egindako ekarpenak gehiago dira. Beraren lanaren zati bat garrantzi handikoa da eragileen teoria modernoan.

5.15 ARIKETA Aurkitu hurrengo funtzioen alderantzizko transformatuak:

$$F(s) = \frac{s}{s^3 - s^2 - s + 1}, \quad F(s) = \frac{2s}{s^2 + 1}. \quad (5.32)$$

Koefiziente guztiak errealak direnean soluzio nabariki errealak nahiago badira, izendatzai-lean agertzen diren diskriminatzaile negatiboko gai koadratikoak —erro konplexuei dagozkienak, alegia— faktorizatu beharrean, karratuak osatuz idatzi behar dira,

$$as^2 + bs + c = a \left[\left(s + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} \right)^2 \right], \quad \text{baldin } b^2 - 4ac < 0, \quad (5.33)$$

gero (5.13) emaitza eta bere deribatuei dagozkienak erabiltzeko. Adibidez,

$$\frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} = \mathcal{L} [e^{-t} \sin t]. \quad (5.34)$$

5.16 ARIKETA Aurkitu hurrengo funtzioaren alderantzizko transformatua:

$$F(s) = \frac{2s - 4}{s^2 + 4s + 8}. \quad (5.35)$$

5.4 Konboluzioa

Oro har, $f(t)$ eta $g(t)$ funtzioen $h = f * g$ konboluzio-biderkadura,

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - u)g(u) du \quad (5.36)$$

integralak definituriko funtzioa da. Baina gai honetan funtzioak jatorriaren ezkerrean nuluak dira suposatzen denez, lehen integralean $u < 0$ denean $f(u) = 0$ dugu eta $u > t$ balioetarako $g(t - u) = 0$; eta antzeko gauza bat gertatzen da bigarren integralean. Beraz, gai honetan erabiliko dugun konboluzioaren definizioa —batzuetan **Laplace-ren konboluzioa** deitzen dena— hauxe da:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du = \int_0^t f(t - u)g(u) du. \quad (5.37)$$

Konboluzio-biderketaren ondoko propietateak nabariak dira:

$$f * (g * h) = (f * g) * h, \quad (5.38)$$

$$f * (g + h) = (f * g) + f * h, \quad (5.39)$$

$$f * g = g * f, \quad (5.40)$$

$$f * 0 = 0. \quad (5.41)$$

Baina propietaterik garrantzitsuena hauxe da: Laplace-ren transformatuak biderkadura arruntera laburtzen du konboluzio-biderkadura. Izan ere, erabil ditzagun Laplace-ren transformazioaren eta konboluzioaren definizioak:

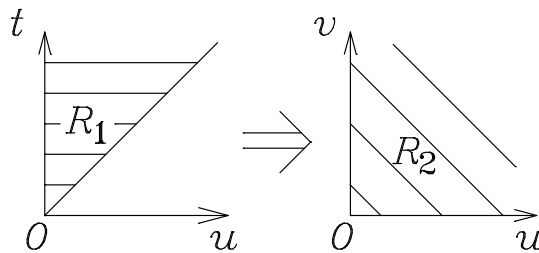
$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^{\infty} e^{-st} \left[\int_0^t f(u)g(t - u) du \right] dt = \iint_{R_1} e^{-st} f(u)g(t - u) du dt. \quad (5.42)$$

Integral bikoitzaren integrazio-eremua planoko R_1 bigarren oktantea da, baina, unitate-jacobia-
rreko⁵ $(u, v) = (u, t - u)$ aldagai-aldaketa eginez gero, integrazio-eremua R_2 lehen koadrantea
da, 5.1 irudian erakusten den bezala. Horrela,

$$\mathcal{L}[f * g] = \iint_{R_2} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) du dv = \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv, \quad (5.43)$$

dugu, hau da,

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \mathcal{L}[g] = F(s)G(s). \quad (5.44)$$



5.1 IRUDIA Integrazio-eremuak

Adibide moduan, alderantzizko transformatua kalkulatzeko erabiliko dugu propietate hau:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] = 1 * \sin t = \int_0^t \sin u du = 1 - \cos t. \quad (5.45)$$

Emaitza honek argi erakusten duenez, *konboluzio-unitatea ez da 1*, eta zein den aurkitzeko funtzio orokortuak berriro aztertu beharko ditugu.

5.5 Funtzio orokortuen transformazioa

$a > 0$ denean $\theta(-a) = 0$ dela, (5.15) emaitza, (5.18) propietatea eta Heaviside-ren funtzioa-
ren deribatua den $\delta(t - a) = \theta'(t - a)$ erabiliz, Dirac-en deltaren transformatua lortzen dugu:

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-as}, \quad \text{baldin } a, s > 0. \quad (5.46)$$

5.17 ARIKETA Egiaztatu emaitza bera lortzen dela deltaren definizioa Laplace-ren transformatua-
renean zuzenean erabiliz.

Emaitza hau frogatzeko aukeratu dugun bide bikoitzari esker, funtzio arrunten kasuan ikusita-
ko propietateak funtzio orokortuekin ere erabil daitezkeela egiaztatu dugu. Gauza bera gertatzen
da konboluzioarekin.



⁵ **Karl Gustav Jacob Jacobi** (1804-12-10, Potsdam, Prusia; 1851-02-18, Berlin). Funtzio elipti-
koen teoriaren sortzailea da. Deribatu partzialetako ekuazio diferentzialei buruz egindako lanak me-
kanikan erabili zituen. Azken arlo honetan funtsezkoak dira Jacobi-ren integrala eta Hamilton eta
Jacobi-ren teoria. Bere izeneko determinantea —Cauchy-k lehenago erabili bazuen ere— 1841eko *De*
determinantibus functionalibus liburuan aztertu zuen, funtzioen menpekotasunaren eta jacobiarraren
arteko erlazioa ezartzean.

5.18 ARIKETA Erabili konboluzioaren definizioa honako hau frogatzeko:

$$\delta(t-a) * f(t) = \theta(t-a)f(t-a). \quad (5.47)$$

Egiaztatu emaitza hau (5.14), (5.44) eta (5.46) propietateekin bateragarria dela.

$a \rightarrow 0$ limitean $\delta(t)$ funtzioari dagozkion propietateak lortzen ditugu:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \text{baldin } s > 0, \quad (5.48)$$

$$\delta(t) * f(t) = f(t). \quad (5.49)$$

Ondorioz, konboluzio-unitatea $\delta(t)$ da, eta biderketa arruntarena bere transformatua den 1 funtzioa.

5.19 ARIKETA Zergatik erabili dugu $a \rightarrow 0$ limitea?

5.6 Koefiziente konstanteetako ekuazio linealak

Deribatua biderkadura bihurtzeko Laplace-ren transformatuaren funtsezko propietateari esker, koefiziente konstanteetako ekuazio edo sistema baten hastapen-baldintzen problema bat ebatzi nahi denean, hurrengo metodoa da askotan erabilgarriena:

1. Kalkulatu problema diferentzialaren Laplace-ren transformatua, (5.18)–(5.20) propietateak eta hastapen-baldintzak erabiliz.
2. Askatu horrela lortu den problema algebraikoa.
3. Aurkitu emaitzaren alderantzizko transformatua.

Metodo hau eskuz erabiltzean praktikoa izateko, agertzen diren transformatu zuzenak eta alde-antzezkoak tauletan agertu behar dira edo gutxienez han daudenak erabiliz transformazio errazen bidez lortzeko modukoak. Zorionez, koefizienteak konstanteak badira, baldintza hau bete egiten da. Hastapen-baldintzak $t = 0$ puntuan ematen direla suposatzen da, noski; baina hau egia ez balitz, translazio erraz bat erabil liteke hastapen-baldintzak jatorrian emateko. Ikus ditzagun zenbait adibide.

5.6.1 Zeinahi ordenatako ekuazio bakarra

Adibidez, $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ bada,

$$\dot{x} - 2x = e^{5t}, \quad x(0) = 3 \quad (5.50)$$

problema

$$sX - 3 - 2X = \frac{1}{s-5} \quad (5.51)$$

problema algebraikora laburtzean da linealtasuna eta (5.18) propietatearen ondorioz. Ezezagunaren transformatua askaturik (alderantzizkoaren kalkulua taulak begiratze hutsa izateko) frakzio sinpleetara laburtuz,

$$X = \frac{3s-14}{(s-2)(s-5)} = \frac{8}{3} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-5} \quad (5.52)$$

lortzen dugu eta emaitza honen alderantzizko transformatua problemaren soluzioa da:

$$x = \frac{8}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{5t}. \quad (5.53)$$

5.20 ARIKETA Ebatzi $\ddot{x} + x = e^{-2t} \sin t$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ problema.

5.6.2 Ekuazio-sistemak

Metodo hau n ordenako ekuazio batekin zein lehen ordenako n ekuazioren sistema batekin erabil daiteke.

5.21 ARIKETA Ebatzi

$$\dot{x} - 6x + 3y = 8e^t, \quad (5.54)$$

$$\dot{y} - 2x - y = 4e^t \quad (5.55)$$

sistema, $x(0) = -1$ eta $y(0) = 0$ hastapen-baldintzekin.

5.6.3 Osziladoreak

Adibide honetan, (3.122) osziladore mekanikoaren eta (3.123) RLC zirkuituaren orokorpena den koefiziente konstantetako osziladore lineal orokorra aztertuko dugu:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t). \quad (5.56)$$

Hastapen-baldintzak $x(0) = x_0$ eta $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ badira, problemaren transformatua kalkulatu ondoren, ezezagunaren transformatua askatzen dugu:

$$X(s) = \frac{F(s) + (as + b)x_0 + a\dot{x}_0}{as^2 + bs + c}. \quad (5.57)$$

Bestalde,

$$H(s) \equiv \frac{1}{as^2 + bs + c} \quad (5.58)$$

delakoa **sistemaren funtzioa** edo **transferentzia-funtzioa** deitzen da eta osziladorearen menpeko hutsa da (hau da, ez da kanpo-eraginaren menpekoa). Osziladorearen soluzioa, beraz, honela idazten da:

$$X(s) = H(s)F(s) + \frac{(as + b)x_0 + a\dot{x}_0}{as^2 + bs + c}. \quad (5.59)$$

Azken adierazpenaren alderantzizko transformatua eta

$$h(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}[H(s)], \quad (5.60)$$

$$x_1(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{as + b}{as^2 + bs + c}\right], \quad (5.61)$$

$$x_2(t) \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{as^2 + bs + c}\right] \quad (5.62)$$

definizioak erabiliz, soluzioa hauxe da:

$$x(t) = \int_0^t h(t-u)f(u) du + [x_0 x_1(t) + \dot{x}_0 x_2(t)]. \quad (5.63)$$

Makoen arteko bi gaiek homogoneoaren soluzio orokorra adierazten dute, hautazko konstanteak hastapen-baldintzen berdinak egin ondoren. Problema askotan gai hauek —kanpo-eraginik ez dagoenean soluzio osoa ematen dutenak— txikituz doaz eta, ikuspuntu praktikotik, portaera iragankorra pasatu ondoren arbuigarriak dira. Bestalde, lehen gaia Cauchy-ren metodoak emandako soluzio partikularra da, $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ hastapen-baldintza nuluei dagokiena, hain zuzen. Izan ere, $h(t-u)$ funtzioa 3.8.2 atalean $K(t,u)$ deitu dugun homogoneoaren soluzio-familia da.

5.22 ARIKETA Egiaztatu $f(t) = \delta(t-a)$ balioa (5.63) adierazpenean ordezkatuz $E(t,a) = \theta(t-a)h(t-a)$ oinarritzko soluzioa berreskuratzen dela.

5.6.4 Funtzio zatikako jarraituak

Zatika definituriko funtzioekin Heaviside-ren funtzioa erabil daiteke tauletan agertzen diren transformatuak zuzenean erabili ahal izateko. Adibidez,

5.23 ARIKETA Biz

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} 1, & \text{baldin } 0 < t < \pi, \\ 0, & \text{baldin } t > \pi, \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (5.64)$$

Frogatu gai inhomogeneoa $\theta(t) - \theta(t - \pi)$ dela eta ebatzi problema. Jarraituak al dira soluzioa eta bere deribatua?

Azken ariketan bezalaxe, batzuetan $f(t)$ kanpo-indarra ez da jarraitua interesatzen zaigun $0 < t < T$ tartean, zatikako jarraitua baizik. Eman dezagun $t_0 \equiv 0$ eta $t_n \equiv T$ definizioak egiten ditugula eta eten-puntuak t_1, \dots, t_{n-1} direla. Gainera, ezker- eta eskuin-limiteak ohi bezala definitzen ditugu:

$$f(t \pm 0) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t \pm \epsilon). \quad (5.65)$$

Orduan, f jarraitua da (t_{i-1}, t_i) tarte bakoitzean ($i = 1, \dots, n$) eta $f(t_0 + 0)$, $f(t_1 \pm 0)$, \dots , $f(t_{n-1} \pm 0)$ eta $f(t_n - 0)$ limiteak finituak dira. Eten-puntuak gorabehera, hastapen-baldintzak betetzen dituen soluzio bakarra dago $0 < t < T$ tartean, ondoko propietateak betetzen dituen:

- $x(t)$ eta $\dot{x}(t)$ jarraituak dira $0 \leq t \leq T$ tarte osoan.
- $\ddot{x}(t)$ jarraitua da $t_{i-1} < t < t_i$ azpitarte bakoitzean.
- (5.56) ekuazioa betetzen da $t_{i-1} < t < t_i$ azpitarte bakoitzean.

Izan ere, existentzia eta bakartasunaren teoremari esker, aipaturiko propietateak $t_0 \leq t < t_1$ tartean betetzen dituen soluzio bakarra dago. Gainera, $x(t_1 - 0)$ eta $\dot{x}(t_1 - 0)$ finituak dira eta, x eta \dot{x} funtzioak $t = t_1$ puntuan jarraituak izateko, nahikoa da hurrengo azpitartean ondoko hastapen-baldintzak aukeratzea:

$$x(t_1 + 0) = x(t_1 - 0), \quad \dot{x}(t_1 + 0) = \dot{x}(t_1 - 0). \quad (5.66)$$

Beraz, soluzioa era bakarrean luzatzen da $t_1 \leq t < t_2$ tartera, eta handik, aurreko prozedura behin eta berriro erabiliz, tarte osora. Emaitza hau zuzenean hedatzen da gai inhomogeneo zatikako jarraitua duten sistema eta ekuazio orokorragoetara.

5.7 Problemak

5.1 Frogatu, *integralik egin gabe*, $s > 0$ denean honako hau betetzen dela:

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}.$$

5.2 Kalkulatu $\mathcal{L}[\sin^2 at]$, *inolako integralik ebatzi gabe*.

5.3 Aurkitu ondoko funtzioaren Laplace-ren transformatua:

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ \sin t + \cos t, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

5.4 Kalkulatu $F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}$ funtzioaren alderantzizko transformatua.

5.5 Aurkitu ondokoaren alderantzizko transformatua: $F(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$.

5.6 Demagun $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ dela. Froga ezazu

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u) du$$

betetzen dela baldin eta $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existitzen bada. Zergatik eskatzen dugu azken baldintza?

5.7 Froga ezazu $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ denean hauxe dugula:

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t f(u) du\right] = \frac{1}{s} \left[F(s) - \int_0^a f(u) du\right].$$

5.8 D.5 atalean aztertutako Euler-en gamma funtzioaren definizioa eta propietateak erabiliz, kalkulatu $\mathcal{L}[t^b]$ eta $\mathcal{L}[t^b e^{at}]$, $b > -1$ balioetarako. Bereziki, zeintzuk dira $\mathcal{L}[t^{-1/2}]$ eta $\mathcal{L}[t^{1/2}]$? Zer gertatzen da b balioa osoa eta ez-negatiboa denean? Aztertu nolakoa den $sF(s)$ balioa $s \rightarrow \infty$ limitean $-1 < b < 0$ denean. Iruzkina egin emaitzari.

5.9 D.4 atalean aztertutako errore-funtzioaren propietateez baliatuz, kalkulatu $\mathcal{L}[\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]$. Zer gertatzen da $a < 0$ denean?

5.10 Kalkulatu $\operatorname{Si}(t)$, $\operatorname{Ci}(t)$ eta $-\operatorname{Ei}(-t)$ funtzioen Laplace-ren transformatuak. D.7 atalean ikusten denez, honela definitzen dira aipaturiko funtzioak $t > 0$ denean:

$$\begin{aligned} \operatorname{Si}(t) &= \int_0^t \frac{\sin u}{u} du, \\ \operatorname{Ci}(t) &= -\int_t^\infty \frac{\cos u}{u} du, \\ -\operatorname{Ei}(-t) &= \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du. \end{aligned}$$

Iradokizuna: Egin aldagai-aldaketa egokiak azken bi integralen beheko muga berriak konstanteak izateko.

5.11 Aurkitu $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+1)}$ funtzioaren alderantzizko transformatua.

5.12 Volterra-ren⁶ ekuazio integrala. Azaldu nola ebazten diren ondoko egiturako ekuazio integralak Laplace-ren transformazioaren bidez:

$$x(t) = g(t) + \int_0^t k(t-u)x(u) du.$$

5.13 Ebatzi $x(t) = \cos t + \int_0^t e^{-(t-u)} x(u) du$.

5.14 Askatu ondoko problema:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = \delta(t - \pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

5.15 Biz T periodoko $f(t)$ funtzio periodikoa: $f(t+T) = f(t)$, baldin $t > 0$. Frogatu

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

5.16 Froga ezazu

$$x(t) + \int_0^t (t-u)x(u) du = \sin 2t$$

Volterra-ren ekuazio integrala eta

$$\ddot{y}(t) + y(t) = \sin 2t, \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0$$

hastapen-baldintzen problema baliokideak direla, $\ddot{y}(t) \equiv x(t)$ bada. Ebatzi bi problemak.

5.17 Definizioz, $J_0(x)$ **Bessel-en funtzioa** zero ordenako **Bessel-en ekuazioa**,

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

eta $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$ hastapen-baldintzak betetzen dituen funtzioa da.

(a) Kalkulatu J_0 -ren Laplace-ren transformatua.

(b) Emaitza honen $1/s$ -rekiko serie-garapena gaiez gai integratuz, kalkulatu J_0 -ren garapena.

Iradozizuna: Erabili (D.54) serie binomikoa eta sinplifikatu emaitza (D.61) azpifaktorialaren bidez.

5.18 Tautokronoa. Partikula puntual bat marruskadurarik gabe higitzen da kurba lau batean zehar grabitazioaren eraginpean. Minimoraino heltzeko behar den denbora, pausagunetik abiatu den puntuaren menpekora ez bada, aipaturiko kurbari tautokronoa deritzo. Eman dezagun kurba honen $x(y)$ ekuazioa lortzeko, y ardatza norabide bertikalean eta gorantz aukeratzen dugula, baita s dela minimotik neurtutako abszisa lerromakurra ere.



⁶ **Vito Volterra** (1860-05-23, Ancona, Estatu Pontifikalak; 1940-10-11, Erroma). Hiru gorputzen problemaren aurrerapen batzuk egin zituen 13 urte zituela. Uhin zilindrikoak aztertzean deribatu partzialak ekuazioak ikertu zituen, baina bere lan garrantzitsuenak ekuazio integralei buruzkoak dira. Ekologia matematikoan ere aritu zen, harrapari eta harrapakinaren erdua eta ekuazio logistikoa aztertu zituelarik.

- (a) Integratu energia mekanikoaren kontserbazio-legea minimoraino heltzeko behar den denbora aurkitzeko.
- (b) Erabili Laplace-ren transformazioa ds/dy deribaturako aurkitu duzun ekuazio integrala askatzeko.
- (c) Aurkitu eta integratu dx/dy , tautokronoaren ekuazioa lortzeko.

5.19 Kalkulatu $\mathcal{L} \left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \right]$.

5.20 Ebatzi ondoko problema: $\dot{x} + 2x + \int_0^t x(u) du = \sin t, \quad x(0) = 1.$

5.21 $\ddot{x} + x = \theta(t - \pi) - \theta(t - 2\pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

5.22 Askatu ondoko sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \dot{y} &= t + 1, \\ \dot{x} + \dot{y} - 3x + y &= 2t - 1, \\ x(0) = 0, \quad y(0) &= -11/9, \quad \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$

5.23 $\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(0) = 2, \quad \frac{d^3x}{dt^3}(0) = -3.$

5.24 $t\ddot{x} + (3t - 1)\dot{x} - (4t + 9)x = 0, \quad x(0) = 0.$

5.25 $\ddot{x} + x = e^{-t} \cos t, \quad x(\pi) = \dot{x}(\pi) = 0.$

5.26 Froga ezazu uhin sinusoidal arteztua

$$|\sin t| = \sin t + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta(t - k\pi) \sin(t - k\pi)$$

dela eta, beraz, beraren Laplace-ren transformatua $\frac{1}{s^2 + 1} \coth \frac{\pi s}{2}$ funtzioa.

5.27 Dirac-en delta. Kalkulatu ondoko integrala Laplace-ren transformazioaren bidez:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad \forall a > 0.$$

Erabili emaitza hau eta $a < 0$ kasuari dagokiona unitatearen Fourier-en transformatu zuzena eta alderantzizkoa, konstante bat gorabehera, Dirac-en delta direla frogatzeko:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ipx} dp = \delta(x).$$

Iradokizuna: Banandu parte erreala eta irudikaria, gogoratu 3.30 problema eta erabili D.25 emaitza.

5.28 Fourier-en alderantzika-formula. Erabili 5.27 problemaren emaitza

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp = f(x)$$

frogatzeko, $f(x)$ funtzioaren Fourier-en transformatua

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

izanik. Honek Fourier-en alderantzizko transformatua honako hau dela frogatzen du:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p) e^{ipx} dp.$$

5.29 Parseval-en teorema. Eman dezagun $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen Fourier-en transformatuak $\hat{f}(p)$ eta $\hat{g}(p)$ direla. Erabili 5.27 problema ondoko berdintza frogatzeko:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(p)} \hat{g}(p) dp = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx.$$

5.30 Erabili Parseval-en teorema ondoko integrala kalkulatzeko:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

5.31 Ekuazio diferentzial atzeratuak. Biz $-1 \leq t \leq 0$ tartean $x(t) = 1$ hastapen-baldintza betetzen duen ondoko ekuazio atzeratuaren soluzioa:

$$\dot{x}(t) + x(t-1) = 0.$$

Kalkulatu beraren Laplace-ren transformatua eta garatu emaitza $s^{-1}e^{-s}$ -ren berreturen seriean. Aurkitu alderantzizko transformatua soluzioa kalkulatzeko. Ba al dago bestelako metodorik soluzio bera aurkitzeko? Eztabaidatu soluzioaren deribagarritasuna.

5.32 Seguraski, zubi baten gainean formazio militarrean ibiltzen ari den talde batek zubia eroraz dezakeela entzun duzu noizbait. Azaldu hau ondoko problemaren ebazpenaz baliatuz:

$$\ddot{x} + x = \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - 2k\pi), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

Zergatik ez da beti gertatzen aipaturiko zorigaitza?

5.33 $f(t) = \ln t$ funtzioaren Laplace-ren transformatua hauxe da:

$$F(s) = -\frac{\ln s + \gamma}{s}.$$

Zergatik ez da $sF(s)$ bornatua $s \rightarrow \infty$ limitean?

5.34 Eman itzazu Laplace-ren transformaturik onartzen ez duten funtzioen bi adibide desberdin.

5.35 Duhamel-en formula. Demagun

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

koefiziente konstanteetako ekuazioan f funtzioa zatikako jarraitua eta ordena esponentzialekoa dela. Froga ezazu $y(0) = y'(0) = 0$ hastapen-baldintza nuluak betetzen dituen soluzioa

$$y(x) = \int_0^x z'(u)f(x-u) du$$

moduan idatz daitekeela baldin eta z funtzioa

$$az'' + bz' + cz = 1 \quad \text{eta} \quad z(0) = z'(0) = 0$$

problemaren soluzioa bada. Aplikatu formula hau

$$y'' + \omega^2 y = f(x)$$

osziladore bortxatura eta konparatu emaitza Cauchy-ren metodoaren bidez lortzen denarekin.

5.36 Zenbat denboraz aplikatu behar da kanpo-indar konstante bat, hasieran pausagunean dagoen osziladore harmoniko baten gainean, indarra desagertzean osziladoreak betiko pausagunean iraun dezan?

5.37 Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzioak:

$$\int_0^t y(u) du = \int_0^t y(u)y(t-u) du.$$

Ekuazio lineala al da?

5.38 Aurkitu ondoko hastapen-baldintzen problemaren soluzioa:

$$\ddot{x} + x = \begin{cases} t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi, \end{cases} \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$$

6. GAIA

Ekuazio linealen serieen bidezko ebazpena

Though this be madness, yet there is method in 't.
William Shakespeare

Fisikaren problema asko aztertzean bigarren ordenako ekuazio lineal bat ebatzi behar da (edo beraren soluzioen propietateak ikertu behar dira). 3. gaian ikusi genuenez, zailtasunik handiena homogeneoaren soluzio partikular bat bilatzean datza, hau egin ondoren koadraturen bidez idatz baitaitezke homogeneoaren eta osoaren soluzio orokorrak. Bertan ikusi genituen zenbait aldagai-aldaketa saia ditzakegu, baina gutxitan emango dute soluzioa. Bestalde, askotan ezin da soluzioa adierazi oinarritzko funtzioen bidez. Izan ere, bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoek funtzio bereziak definitzen dituzte sarritan. Bigarren ordenako ekuazio homogeneoen soluzioak berretura-serieen bidez aurkitzeko metodoa aztertuko dugu gai honetan. Seriearen batura funtzio berezia izango da askotan.

6.1 Berretura-serieen berrikusketa

Erosotasunagatik berretura-serieen propietate ezagunak biltzen ditugu hemen, inolako frogapenik gabe. Biz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ berretura-seriea.

$$\rho(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (6.1)$$

limitea existitzen bada edo $+\infty$ bada, seriearen **konbergentzia-erradioa** da eta $|x - x_0| < \rho$ zirkuluan seriea absolutu eta uniformeki konbergentea da eta $|x - x_0| > \rho$ denean dibergentea. Beraz, $\rho = 0$ denean seriea gehienez x_0 puntuan da konbergentea. Bestalde, $\rho = +\infty$ bada, nonahi konbergentea da.

6.1 ARIKETA Eman al dezakezu konbergentzia-erradioa kalkulatzeko bestelako adierazpenik?

Bira bi serie: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eta $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$. Eman dezagun biak konbergenteak direla $|x - x_0| < \rho$ denean (adibidez, ρ beraien konbergentzia-erradioen minimoa delako). Orduan, $|x - x_0| < \rho$ puntuetan:

1. Serie hauen a_n eta b_n koefizienteen konbinazio linealekin eraikitako edozein seriek, dagokion baturen konbinaziora jotzen du:

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) (x - x_0)^n, \quad (\alpha \text{ eta } \beta \text{ konstanteak}). \quad (6.2)$$

Bereziki, serieen batura eta kendura gaiez gai egin daitezke.

2. Serieen biderkadura formalak baturen biderkadurara jotzen du:

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right] (x - x_0)^n. \quad (6.3)$$

Era berean, $f(x)/g(x)$ zatiduraren seriea kalkula daiteke, $g(x_0) \neq 0$ bada, baina koefizienteen adierazpena ez da hain erraza eta lortzen den seriearen konbergentzia-erradioa ρ baino txikiagoa izan daiteke.

3. Seriea mugagabeki deribagarria da $|x - x_0| < \rho$ zirkuluan eta deribatuak gaiez gai kalkula daitezke:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \quad (6.4)$$

Gainera, seriearen beraren koefizienteak

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (6.5)$$

dira eta, hortaz, seriea bere Taylor-en garapena da:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n. \quad (6.6)$$

4. Bi serie berdinak dira, $f(x) = g(x)$, baldin eta soilik baldin berretura berdinen koefizienteak berdinak badira: $a_n = b_n$.

Bestalde, $\rho > 0$ bada, $f(x)$ funtzioa analitiko da $x = x_0$ puntuaren inguruan eta, berrikusi ditugun propietateen ondorioz, f eta g analitikoak badira x_0 -ren inguruan, horrelakoak dira $\alpha f + \beta g$, $f g$ eta f/g ere (azken kasuan, $g(x_0) \neq 0$ bete behar da, noski). Ageri denez, polinomioak analitikoak dira edozein punturen inguruan, eta gauza bera gertatzen da $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\sinh x$ eta $\cosh x$ funtzioekin. $(1+x)^\nu$ eta $\ln(1+x)$ funtzioen Taylor-en garapenen konbergentzia-erradioak, berriz, finituak dira: $\rho(0) = 1$. (Aipaturiko oinarriko funtzio guztien berretura-serieak idazteko eta ikustean arin ezagutzeko gai izan beharko luke irakurleak.)

6.2 ARIKETA Aurkitu hurrengo berretura-serieen konbergentzia-erradioa eta batura:

$$f_1(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad (6.7)$$

$$f_2(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \dots, \quad (6.8)$$

$$f_3(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots, \quad (6.9)$$

$$f_4(x) = 1 + x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{5}{16}x^8 + \frac{3}{16}x^{10} + \dots \quad (6.10)$$

6.2 Serieen bidezko soluzioak

Hemendik aurrera,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (6.11)$$

ekuazioaren soluzioak bilatzeko berretura-serie arruntak,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad (6.12)$$

edo **Frobenius-en¹ serieak** erabiliko ditugu. Definizioz, x_0 puntuaren inguruko Frobenius-en seriea berretura-serie bat $(x - x_0)^\lambda$ berreturarekin biderkatzean lortzen da:

$$y = (x - x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad c_0 \neq 0. \quad (6.13)$$

Hemen λ berretzailea —**indizea** deitzen dena— edonolakoa izan daiteke: positiboa, negatiboa, edo nulua; osoa edo ez²; erreala, irudikaria edo konplexua. Esan behar da $(x - x_0)^\lambda$ moduko faktoreak sartu beharra Cauchy eta Euler-en ekuazioak aztertzean agertu zela. Adibidez, (3.185) ekuazioaren soluzioek, $x^{1/2}$ eta x^{-2} direlakoek, $x = 0$ puntuaren inguruan ez dute Taylor-en garapenik, baina badira Frobenius-en serieak (finituak, kasu erraz honetan). Erabili behar den serie mota jakiteko x_0 puntuaren izaera aztertu behar da.

6.2.1 Puntu arruntak eta singularrak

Soluzioa $x = x_0$ puntuaren inguruan lortu nahi bada, x_0 puntua **arrunta** dela esango dugu baldin eta (y'' deribatua koefizientea unitatearen berdina egin ondoren, (6.11) adierazpenean bezala) $P(x)$ eta $Q(x)$ funtzioak x_0 -ren inguruan analitikoak badira. Bestela, x_0 **puntu singularra** da. Puntua singularra izanik,

$$p(x) \equiv (x - x_0)P(x), \quad q(x) \equiv (x - x_0)^2Q(x) \quad (6.14)$$

funtzioak x_0 -ren inguruan analitikoak badira (hau da, bertan P eta Q funtzioek gehienez lehen eta bigarren ordenako poloa badaukate hurrenez hurren) puntua **singular erregularra** dela esaten da. Hau ere egia ez bada, P -k edota Q -k ordena altuagoko poloa daukatelako, puntua **singular irregularra** da.

6.3 ARIKETA Sailkatu ondoko ekuazioaren puntu singularrak:

$$x^2(x^2 - 1)^2 y'' - 2x(x + 1)y' - y = 0. \quad (6.15)$$

Notazioa arintzeko, soluzioa $x_0 = 0$ puntuaren inguruan kalkulatu nahi dugula suposatuko dugu beti, zeren hori beti lor baitaiteke translazio nabariaren bidez (edo, infinituko puntuaren inguruan garatu nahi badugu, $x = 1/t$ aldagai independentearen aldaketa eginez).



¹ **Ferdinand Georg Frobenius** (1849-10-26, Berlin, Prusia; 1917-08-03, Berlin). Weierstrass-en dizipulu honek funtzio eliptikoak eta ekuazio diferentzialak landu zituen, baina bere ekarpen garrantzizkoenak taldeen teorian egindakoak dira, geroago mekanika kuantikoan funtsezkoa izango zen talde finituen adierazpideen teoria barne.

²Soluzio errealak nahi baditugu eta λ osoa ez bada, $(x - x_0)^\lambda$ faktorearen ordez $|x - x_0|^\lambda$ erabili beharko da.

6.3 Puntu arruntak

Kasu honetan (6.11) ekuazioaren P eta Q koefizienteak analitikoak dira jatorriaren inguruan eta, beraz,

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n \quad (6.16)$$

garapenak konbergenteak dira $|x| < \rho$ denean, $\rho > 0$ balio egoki baterako. Kontsidera ditzagun (6.12) seriea eta bere deribatuak,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad (6.17)$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n, \quad (6.18)$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n. \quad (6.19)$$

Hemen, serieak berriro $n = 0$ balioan has daitezzen $n \rightarrow n+1$ eta $n \rightarrow n+2$ indize-desplazamenduak egin dira. Serie horiek (6.11) ekuazioan saiatzen baditugu, hurrengo lortzen da, (6.16) garapenak eta (6.3) propietatea kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} Qy &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n Q_{n-k} c_k \right] x^n, \\ Py' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n (k+1) P_{n-k} c_{k+1} \right] x^n, \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n, \end{aligned}$$

$$y'' + Py' + Qy = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k] \right\} x^n. \quad (6.20)$$

Beraz, (6.17) seriea ekuazioaren soluzioa izateko, ondoko baldintza bete behar da, $n = 0, 1, 2, \dots$ balioetarako:

$$(n+2)(n+1) c_{n+2} + \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k] = 0. \quad (6.21)$$

Ondorioz, c_0 eta c_1 konstanteak nahi bezala aukeratu ondoren, beste guztiak banan-banan kalkula daitezke azken adierazpena erabiliz. Izan ere, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ ezagunak badira, hurrengo koefizientea hauxe da:

$$c_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^n [(k+1) P_{n-k} c_{k+1} + Q_{n-k} c_k]. \quad (6.22)$$

Azpimarratu behar da eskuin gain koefiziente ezagunak baino ez direla agertzen. Hemen frogatuko ez badugu ere (ikus [4], adibidez) horrela kalkulaturiko berretura-seriea konbergentea da $|x| < \rho$ puntuetan eta, c_0 eta c_1 hautazko konstanteak dauzkanez, (6.11) ekuazioaren soluzio orokorra da.

Laburbilduz, jatorria puntu arrunta bada, soluzioa (6.17) berretura-serie arruntaren bidez adieraz daiteke, c_0 eta c_1 koefizienteak hautazkoak izanik. Beste koefiziente guztiak (6.22) errepikapenak ematen ditu. Seriea konbergentea da $|x| < \rho$ puntuetan.

Adibiderik errazena $y'' + y = 0$ osziladore harmonikoarena da. (Beraren puntu guztiak arruntak dira.) Aurkitu berria dugun errepikapena erabil genezake, baina nahikoa da soluzioa (6.17) Taylor-en serie arrunta dela gogora ekartzea. Osziladorearen ekuazioan (6.17) seriea eta (6.19) deribatua ordezkaturik, x^n gaiaren koefizientea hauxe dela ikusten dugu:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.23)$$

Ondorioz, c_0 eta c_1 nahi dugun moduan aukeratu ondoren, beste koefiziente guztiak hauexek dira:

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.24)$$

Errepikapen honetan c_{n+2} eta c_n agertzen badira ere c_{n+1} falta denez, gai bikoitiak, $n+2 = 2k$, eta bakoitiak, $n+2 = 2k+1$, era naturalean banantzen dira eta dagozkien errepikapenak erraz desegiten:

$$c_{2k} = -\frac{c_{2k-2}}{(2k)(2k-1)} = \frac{c_{2k-4}}{(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)} = \dots = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}, \quad (6.25)$$

$$c_{2k+1} = -\frac{c_{2k-1}}{(2k+1)(2k)} = \frac{c_{2k-3}}{(2k+1)(2k)(2k-1)(2k-2)} = \dots = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}. \quad (6.26)$$

Balio hauek saiatu den soluzioan ordezkaturik

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = c_0 \cos x + c_1 \sin x \quad (6.27)$$

lortzen da, serieak kosinuarena eta sinuarena baitira.

6.4 ARIKETA Erabili serieen metodoa

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad (6.28)$$

ekuazioaren soluzioa aurkitzeko eta egiaztatu emaitza 3.22 ariketako Liouville-ren transformazioa erabiliz.

6.3.1 Hermite-ren ekuazioa

Osziladore harmonikoaren

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi \quad (6.29)$$

Schrödinger-en ekuazioa aztertzeko,

$$\tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad x_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad (6.30)$$

$$\epsilon = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 \equiv \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (6.31)$$

dimentsio gabeko aldagaiak erabilgarriak izaten dira.

6.5 ARIKETA

Frogatu aipaturiko aldagaietan osziladorearen ekuazioa

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\epsilon - x^2)\psi = 0 \quad (6.32)$$

moduan idazten dela, notazioa errazteko x gaineko tileta ezabatu ondoren. Saiatu berretura-serie bat ψ -rentzat eta frogatu koefizienteek ondoko errepikapena bete behar dutela:

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \epsilon c_n = 0, \quad n = 0, 1, \quad (6.33)$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + \epsilon c_n - c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.34)$$

Orain arte aurkitu ditugun errepikapenak ez bezala, azkena hiru puntutakoa da, c_{n+2} koefizientearen adierazpenean aurreko bi (eta ez bat bakarrik) agertzen baitira. Horrelako errepikapenak bi puntutakoak baino zailagoak izaten dira, 6.13 problemako adibidea erraz ebazten den arren. Praktikan hiru puntutako errepikapenak agertzen dira, batzuetan, kasu honetan bezala $t = 1/x = 0$ infinituko puntua singular irregularra denean, eta infinituko portaera faktorizatuz gerta daiteke errepikapen berria bi puntutakoa izatea. Izan ere, adibide honetan $|x|$ -ren balio handietarako soluzioen portaera asintotikoa $\psi \sim e^{\pm x^2/2}$ erakoa da, zeren hauxe ekuazioan ordezkaturik

$$(x^2 \pm 1 + \epsilon - x^2) e^{\pm x^2/2} \quad (6.35)$$

lortzen baita eta gai handienek ($x^2 e^{\pm x^2/2}$ -ren proportzionalak, alegia) elkar deuseztatzen baitute. Honek zera iradokitzen digu: soluzio gehienak $\psi \sim e^{x^2/2}$ erakoak izango dira (eta, beraz, onartezinak, uhin-funtzioak zerorantz joan behar baitu infinituan), baina gerta daiteke zenbait kasutan $\psi \sim e^{-x^2/2}$ moduko soluzioak egotea. Azken aukera hau arretaz aztertzeke, $\psi(x) \sim e^{-x^2/2}y(x)$ aldaketa nabaria erabilgarria da.

6.6 ARIKETA

Frogatu $\lambda = \epsilon - 1$ definiturik $\psi = e^{-x^2/2}y$ aldagai-aldaketa egiten bada, osziladore harmoniko kuantikoaren ekuazioa Hermite-ren³ ekuaziora laburtzen dela:

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (6.36)$$

Ekuazioan y' eta y -ren koefizienteak polinomioak direnez, puntu guztiak (eta, bereziki, jatorria) arruntak dira. (6.17) berretura-seriea eta bere deribatua, (6.18)–(6.19), ordezkaturik x^n -ren koefizienteak berdintzean,

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n + \lambda c_n = 0, \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (6.37)$$

lortzen da. Espero bezala, c_0 eta c_1 baldintzarik gabe aukera daitezke eta beste koefiziente guztiak

$$c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} c_n \quad (6.38)$$



³ **Charles Hermite** (1822-12-24, Dieuze, Frantzia; 1901-01-14, Paris). e zenbakia transzendentea delako lehen frogapena eman zuen. Funtzio eliptikoei eta bosgarren mailako ekuazioari buruz ere egin zuen lan. Beraren izena ekuazio diferentzial batean, polinomio batzuetan, interpolazio-metodo batean eta matrize mota batean aurki daiteke. Hermite-ren polinomioak eta matrize hermitearrak funtsezkoak gertatuko ziren geroago mekanika kuantikoan.

errepikapenak emandakoak dira. Berriro ere, berretura bakoitiak eta bikoitiak banandu egiten dira eta soluzio orokorra

$$y = c_0 \left[1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(4-\lambda)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda)}{6!}x^6 - \dots \right] + c_1 \left[x + \frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)}{5!}x^5 + \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)(10-\lambda)}{7!}x^7 + \dots \right] \quad (6.39)$$

da. Emaitza era laburragoan idazteko D.5 ataleko Euler-en gamma funtzioaz balia gaitzke eta, azkenik, soluzioa 6.22 probleman eta D.10 atalean aztertutako Kummer-en funtzioen bidez idazten da:

$$y = c_0 M \left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{1}{2}, x^2 \right) + c_1 x M \left(\frac{2-\lambda}{4}, \frac{3}{2}, x^2 \right). \quad (6.40)$$

Soluzioaren portaera asintotikoa aztertzeko, $|x|$ balio handietarako gairik garrantzizkoenak n -ren balio handiei dagozkienak direla hartu behar da kontuan; baina kasu horretan (6.38) errepikapena

$$c_{n+2} \approx \frac{2}{n+2}c_n \approx \frac{2}{n+1}c_n, \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6.41)$$

da, koefiziente bikoitien kasurako soluzioa e^{x^2} funtzioari dagokion $c_{2k} = c_{2(k-1)}/k = c_0/k!$ da.

6.7 ARIKETA Egiaztatu antzeko gauza bat gertatzen dela koefiziente bakoitiek $n \rightarrow \infty$ limitean.

Beraz, espero bezala, soluzio gehien portaera asintotikoa $\psi = e^{-x^2/2}y \sim e^{x^2/2}$ da, eta $\psi = e^{-x^2/2}y$ uhin-funtzioa infinituan dibergentea ez izateko —karratu batugarrikoa izateko, hain zuzen— n -ren balio guztiak ezin ager daitezke garapenean. Honek esan nahi du soluzio fisikoak polinomioei dagozkienak direla, eta horrelakoak lortzeko serie bat amaitu behar da bestearen koefizientea (c_0 edo c_1) nulua delarik. Hau ondoko kasuetan soilik gertatzen da:

- $\lambda = 0, \quad c_1 = 0, \quad y = c_0,$
- $\lambda = 2, \quad c_0 = 0, \quad y = c_1x,$
- $\lambda = 4, \quad c_1 = 0, \quad y = c_0(1 - 2x^2),$
- $\lambda = 6, \quad c_0 = 0, \quad y = c_1 \left(x - \frac{2}{3}x^3 \right),$
- eta abar.

Osziladorearen energiaren kuantizazioaren arrazoi matematikoa, soluzio onargarriak λ parametroaren balio diskretu batzuetarako soilik existitzea da preseski.

6.8 ARIKETA Energiaren zein E baliori dagokio Hermite-ren ekuazioaren soluzio polinomiko bakoitza?

Soluzio polinomikoen koefizienteak egokiro aukeratuz, **Hermite-ren polinomioak** lortzen dira. Aipaturiko polinomioak,

$$H_n(x) = \left(2x - \frac{d}{dx}\right) H_{n-1}(x), \quad H_0(x) = 1 \quad (6.42)$$

errepikapen-erlazioak edota D.12.2 ataleko Rodrigues-en⁴ formulak ere ematen dituzte. Polinomio hauen beste propietate interesgarriak Abramowitz eta Stegun-en [36] tauletan aurki daitezke, adibidez.

6.4 Bessel-en ekuazioa

Simetria zilindrikoa duten problema fisiko askotan deribatu partzialetako ekuazioetan aldagaiak banandu ondoren, Bessel-en⁵ ekuazioa agertzen da:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0. \quad (6.43)$$

Eman dezagun (6.17) berretura-seriea saiatzen dugula:

$$\begin{aligned} x^2 y &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n, \\ -\nu^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu^2 c_n) x^n, \\ xy' &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n, \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y &= -\nu^2 c_0 + (1 - \nu^2) c_1 x + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - \nu^2) c_n + c_{n-2}] x^n. \end{aligned}$$

Ekuazioa betetzeko x^n berretura guztien koefizienteek nuluak izan behar dute:

$$-\nu^2 c_0 = 0, \quad (6.45)$$

$$(1 - \nu^2) c_1 = 0, \quad (6.46)$$

$$(n^2 - \nu^2) c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.47)$$

⁴**Olinde Rodrigues** (1794-1851) Frantses bankari honen ardura gizartearen antolaketa zientifikoa zen, matematika baino areago. Matematikan egin zuen ekarpen bakarra Legendre-ren polinomioetarako Rodrigues-en formula da, baina izen berberarekin ezagutzen dira antzeko emaitza asko.



⁵**Friedrich Wilhelm Bessel** (1784-07-22, Minden, Westfalia; 1846-03-17, Königsberg, Prusia, gaur eguneko Errusiako Kaliningrad). Mekanika zerutiarrari buruzko ekarpen teorikoei eta astronomian egindako behaketa-lanei esker nabarmendu zen. Izar finko baten distantzia zehaztu zuen lehena izan zen eta Sirius izarrak lagun iluna duela frogatu zuen. Hiru gorputzen perturbazio-azterketan sartu zituen bere izeneko funtzioak, lehenago Jacob eta Daniel Bernoulli-k, Euler-ek eta Lagrange-k kasu berezietan erabili izan zituztenak.

Emaitza honen azterketa erraza da. Hasteko, $\nu = 0$ kasuan c_0 hautazkoa da, baina $c_1 = 0$ aukeratu behar da eta soluzio bakar bat lortzen dugu. $\nu = \pm 1$ denean, $c_0 = 0$ egin behar da eta c_1 hautazkoa da. Halaber, $\nu = \pm k \equiv \pm 2, \pm 3, \dots$ bada, $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$ aukeratu behar da eta c_k hautazkoa izango da. Beraz, ν osoa denean soluzio bat (eta ez bi) lortzen da berretura-seriea saiaturaz. Baina, ν osoa ez bada $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = 0$ soluzio nulua baino ez dugu lortzen. Ondorioz, berretura-serieak saiaturaz gero, gehienetan ez dugu inolako soluziorik lortuko.

Berretura-seriearen metodoak huts egiteko arrazoa jatorria puntu arrunta ez izatean datza. Jatorria puntu singular erregularra denez, Frobenius-en serie bat eta bere deribatua saiatu behar dira:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}, \quad (6.48)$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{\lambda+n-1}, \quad (6.49)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{\lambda+n-2}. \quad (6.50)$$

Serie hauek erabiliz, hauxe dugu:

$$\begin{aligned} x^2 y &= \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{\lambda+n}, \\ -\nu^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\nu^2 c_n) x^{\lambda+n}, \\ xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n) c_n x^{\lambda+n}, \\ x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1) c_n x^{\lambda+n}, \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y &= (\lambda^2 - \nu^2) c_0 x^\lambda + [(\lambda + 1)^2 - \nu^2] c_1 x^{\lambda+1} + \\ &\quad \sum_{n=2}^{\infty} \{ [(\lambda + n)^2 - \nu^2] c_n + c_{n-2} \} x^{\lambda+n}. \end{aligned}$$

Ondorioz, soluzioan x^λ , $x^{\lambda+1}$ eta $x^{\lambda+n}$ gaien koefizienteak hauexek dira, hurrenez hurren:

$$(\lambda^2 - \nu^2) c_0 = 0, \quad (6.52)$$

$$[(\lambda + 1)^2 - \nu^2] c_1 = 0, \quad (6.53)$$

$$[(\lambda + n)^2 - \nu^2] c_n + c_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (6.54)$$

Lehen baldintza, $\lambda^2 = \nu^2$, **indize-ekuazioa** da eta **indizeak** ematen dizkigu: $\lambda = \pm \nu$. Hortaz, Frobenius-en seriea Bessel-en ekuazioaren soluzioa izateko, λ balioa indizeetako bat izan behar da. Indize-ekuazioa (6.53) baldintzan ordezkaturik eta binomioaren karratua garatu ondoren $(2\lambda + 1)c_1 = 0$ lortzen dugu eta, ondorioz, $c_1 = 0$ dela. Esan behar da $\nu = -\lambda = 1/2$ kasu berezian c_1 koefizientea hautazkoa dela, baina ezerk ez digu debekatzeko balio nulua aukeratzeko. Gainera, kasu erraz hau oinarritzko funtzioen bidez ebatzi genuen 3.22 probleman eta 6.5 delakoan aztertuko dugu berriro. Azkenik, hirugarren baldintza hauxe da:

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{(\lambda + n)^2 - \nu^2} = -\frac{c_{n-2}}{n(2\lambda + n)}. \quad (6.55)$$

Orain, $c_1 = 0$ denez, koefiziente bakoiti guztiak nuluak dira: $c_{2k+1} = 0$. Bestalde, koefiziente bikoitiek (D.53) emaitzaren bidez erraz desegiten den errepikapena betetzen dute:

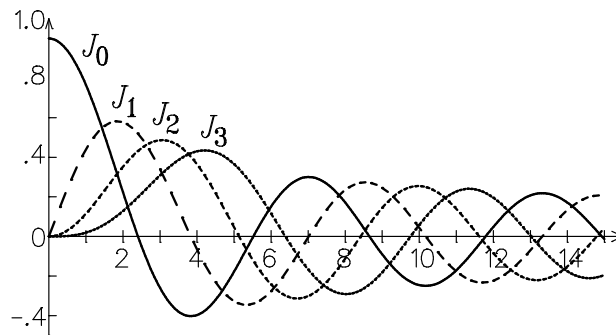
$$\begin{aligned} c_{2k} &= -\frac{c_{2(k-1)}}{4k(\lambda+k)} = \frac{c_{2(k-2)}}{4^2 k(k-1)(\lambda+k)(\lambda+k-1)} = \dots \\ &= \frac{(-1)^k c_0}{4^k k(k-1) \dots 1 (\lambda+k)(\lambda+k-1) \dots (\lambda+1)} = \\ &= \frac{(-1)^k c_0}{2^{2k} k! (\lambda+1)_k} = \frac{(-1)^k \Gamma(\lambda+1) c_0}{2^{2k} k! \Gamma(\lambda+k+1)}. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Balio hauek 2^λ faktorearekin biderkatu eta zatitu ondoren, (6.48) adierazpenean sartzen baditugu,

$$y = 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k} \quad (6.57)$$

soluzioa lortzen da, batukaririk kanpo agertzen den koefizientea kenduta, λ **ordenako lehen motako Bessel-en funtzioa** definitzen duena:

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}. \quad (6.58)$$



6.1 IRUDIA Ordena osoko J_n funtzio batzuk.

Horrela ikusten dugu Bessel-en ekuazioak $J_\nu(x)$ eta $J_{-\nu}(x)$ soluzioak onartzen dituela. ν ordenako **bigarren motako Bessel-en funtzioa** —Newmann-en edo Weber-en funtzioa ere deitzen da eta batzuetan N_ν ikurraz idazten da— koefiziente konstanteetako ondoko konbinazio lineala da:

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (6.59)$$

Argi dago hau ere ekuazioaren soluzioa dela. Gainera, [16] testuan adibidez ikus daitekeenez, J_ν eta $J_{-\nu}$ funtzioen wronskiarra hauex da:

$$W[J_\nu, J_{-\nu}] = -\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi x}. \quad (6.60)$$

Hortaz, bi kasu ditugu: ν osoa ez bada, J_ν eta $J_{-\nu}$ linealki independenteak dira eta soluzio orokorra $y = A J_\nu + B J_{-\nu}$ moduan idatz daiteke; baina $\nu = 0, 1, \dots$ denean, wronskiarra nulua da eta lehen motako bi funtzioak linealki menpekoak. Izan ere, $\nu = 0$ denean $\lambda = 0$ indize bakarra dugu eta (6.58) serieak soluzio bakar bat ematen digu. Gainera, (6.57) adierazpenetik (6.58) delakora joatean kendu den $\Gamma(\lambda+1)$ konstantea infinitua da $\lambda = -n = -1, -2, \dots$ kasuan, $\nu = n = 1, 2, \dots$ denean, eta geratzen den J_{-n} funtzioa J_n delakoaren berdina edo kontrakoa da.

6.9 ARIKETA Froga ezazu $\lambda = -1, -2, \dots$ denean ere erabil daitekeela (6.58) adierazpena,

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = \cos(n\pi) J_n(x) \quad (6.61)$$

erlazioa betetzen dela eta, beraz, (6.58) formulak definituriko J_{-n} funtzioa Bessel-en ekuazioaren soluzioa dela, J_n -ren linealki menpekkoa bada ere.

Kasu honetan Frobenius-en serieek ez dizkigute bi soluzio linealki independente ematen. Gerroago ikusiko dugunez, gauza bera gertatzen da indize bakarria dagoen bakoitzean (Bessel-en ekuazioaren kasuan, $\nu = 0$ denean) eta gerta daiteke bi indizeen kendura osoa denean (hemen gertatzen da ν osoa denean, baina ez erdiosoa bada, nahiz eta orduan 2ν kendura osoa izan). Hurrengo ataletan ikusiko dugu nola azter daitezkeen horrelako kasuak, baina Bessel-en ekuazioarekin hobe da hurrengo emaitzaz baliatzea.

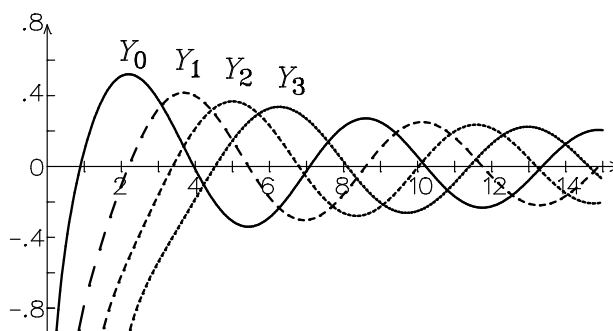
6.10 ARIKETA Egiaztatu haxe betetzen dela:

$$W[J_\nu, Y_\nu] = \frac{2}{\pi x}. \quad (6.62)$$

Beraz, J_ν eta Y_ν linealki independenteak dira beti, baita ν osoa denean ere, azken kasu honetan honela definitzen baita Y_ν :

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (6.63)$$

Ondorioz, Bessel-en ekuazioaren soluzioa $y = C J_\nu + D Y_\nu$ moduan idatz daiteke beti, ν edonolakoa izanik ere.



6.2 IRUDIA Ordena osoko Y_n funtzio batzuk.

Tauletan aurki daitezkeen Bessel-en funtzioen propietate askoren artean errepikapen-erlazio batzuk 6.4 problematan frogatuko dira. Hemen bakarrik azpimarratuko dugu ezen, definitiotik zein 6.1 iruditik ikus daitekeenez, $J_0(0) = 1$ eta $J_1(0) = J_2(0) = \dots = 0$ diren arren, jatorrian Y_n guztiak dibergenteak direla (ikus 6.2 irudia). Hurrengo ataletan ikusiko dugunez, indizeen arteko kendura osoa denean indize txikiari dagokion soluzioarekin askotan gertatzen da hau.

6.11 ARIKETA Erabili atal honetako emaitzak eta D.12 ariketa 1/2 ordenako Bessel-en ekuazioaren kasuan, oinarritzko funtzioen bidez 3.22 problematan aurkitu zen soluzioa berreskuratuzeko.

6.5 Frobenius-en metodoa

Jatorrira eraman dugun puntu arrunt edo singular erregular bati dagokion emaitza orokorra frogatzen dugu atal honetan. Kalkulua erosoago izaten da (6.11) ekuazioa x^2 -rekin biderkatu ondoren (6.14) notazioa erabiltzen badugu:

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.64)$$

Gainera, jatorria puntu arrunta edo singular erregularra dela suposatuko dugu, hau da p eta q koefizienteen

$$p(x) = xP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad (6.65)$$

$$q(x) = x^2 Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (6.66)$$

garapenak konbergenteak direla $|x| < \rho$ denean, $\rho > 0$ balio egoki baterako.

6.12 ARIKETA Egiaztatu jatorria puntu arrunta izateko baldintza beharrezko eta nahikoa $p_0 = q_0 = q_1 = 0$ dela.

Enuntziatu berriak ditugun hipotesiekin, (6.64) ekuazioan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda+n}, \quad (c_0 \neq 0) \quad (6.67)$$

Frobenius-en seriea saiatzean datza Frobenius-en metodoa. Seriea, gutxienez, $0 < |x| < \rho$ balioetarako izango da konbergentea. Azpimarratu behar da ekuazioaren linealtasun eta homogeneotasunari esker c_0 koefizientea hautazkoa dela, soluzioa existitzen bada behintzat.

Frobenius-en (6.67) seriea gaiez gai bi aldiz deribatu ondoren lehen eta bigarren deribatuak x eta x^2 faktoreekin hurrenez hurren biderkatzen baditugu,

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)c_n x^{\lambda+n}, \quad (6.68)$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda + n)(\lambda + n - 1)c_n x^{\lambda+n} \quad (6.69)$$

lortzen dugu, eta (6.3), (6.65) eta (6.66) erabiliz,

$$q(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n q_{n-k} c_k \right] x^{\lambda+n}, \quad (6.70)$$

$$xp(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n p_{n-k} (\lambda + k) c_k \right] x^{\lambda+n}. \quad (6.71)$$

Bi adierazpen hauek eta (6.69) delakoa (6.64) ekuazioan ordezkaturik berretura bakoitzeko koefizienteak berdinduz,

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1)c_n + \sum_{k=0}^n [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k = 0 \quad (6.72)$$

lortzen da $n = 0, 1, \dots$ balioetarako. Ekuazioaren **indize-funtzioa**

$$\mathcal{I}(u) \equiv u(u-1) + p_0u + q_0 \quad (6.73)$$

bada, lorturiko emaitza ondoko era laburragoan idazten da:

$$\mathcal{I}(\lambda + n)c_n + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k = 0. \quad (6.74)$$

(Azpimarratu behar da orain batukaria $k = n - 1$ balioan amaitzen dela.)

Berretura txikienaren koefizientea azken adierazpenean $n = 0$ eginez lortzen da: $\mathcal{I}(\lambda)c_0 = 0$. Beraz, $c_0 \neq 0$ denez — $c_0 = 0$ aukeratzea $(c_1, \lambda) \rightarrow (c_0, \lambda + 1)$ berdefinizioaren baliokidea izango litzateke—, (6.67) seriea (6.64) ekuazioaren soluzioa izateko,

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \quad (6.75)$$

indize-ekuazioa bete behar da. Ekuazio koadratiko honen bi soluzioak, λ_1 eta λ_2 , ekuazio diferentzialaren **indizeak** dira eta, geroago eztabaidatuko ditugun salbuespenak gorabehera, soluzio orokorra idazteko behar diren bi soluzio linealki independenteei dagozkie. Prozedura, hortaz, argi dago: indize bakoitzeko c_0 hautazkoa da; c_1 koefizientea kalkulatzeko nahikoa da bere balioa askatzea (6.74) adierazpenean $n = 1$ egitean lortzen den ekuaziotik,

$$c_1 = -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda + 1)} (p_1\lambda + q_1) c_0, \quad (6.76)$$

eta beste koefiziente guztiak ondoz ondo aurki daitezke. Izan ere, c_0, c_1, \dots, c_{n-1} ezagunak direnean, hurrengoa

$$c_n = -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda + n)} \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k \quad (6.77)$$

da eta adierazpen honen eskuineko gailan lehenago kalkulaturiko koefizienteak baino ez dira agertzen. Printzipioz, metodo honetan ager litekeen oztopo bakarra (6.77) adierazpeneko izendatzaila $n = N > 0$ balio batean zero bihurtzea da, eta hau bakarrik gerta daiteke $\lambda + N$ beste indizea bada, $\mathcal{I}(\lambda + N) = 0$, hau da, bi indizeen $N = \lambda_1 - \lambda_2$ kendura osoa bada. Bestalde, bi indizeak berdinak badira —hau da, indize bikoitz bakarra badugu—, prozedurak soluzio bakarra emango du. Kasu hauek geroago aztertuko ditugu: indize handiak (edo parte errealik handienekoak, edo indize bakarrak) soluzio bat beti ematen badu ere, bigarren soluzioan (6.67) moduko serie baten bidez ezin adieraz daitezkeen gai logaritmiko bat agertzen dela askotan ikusiko dugu.

6.1 TEOREMA (Frobenius) Eman dezagun

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \quad (6.78)$$

ekuazioaren $x = 0$ puntua arrunta edo singular erregularra dela. Beraz, p eta q funtzioen

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (6.79)$$

garapenak konbergenteak dira $|x| < \rho$ denean, $\rho > 0$ balio baterako.

$$\mathcal{I}(\lambda) \equiv \lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \quad (6.80)$$

indize-ekuazioaren bi erroak λ_1 eta λ_2 dira. Azpiindizeak $N \equiv \lambda_1 - \lambda_2$ definizioarekin $N \geq 0$ (edo $\text{Re } N \geq 0$) betetzeko moduan aukeratu dira. Bestalde,

$$a_0(\lambda) \equiv 1, \quad (6.81)$$

$$a_n(\lambda) \equiv -\frac{1}{\mathcal{I}(\lambda+n)} \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda+k) + q_{n-k}] a_k(\lambda), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (6.82)$$

funtzioak ondoz ondo definitzen ditugu. Orduan, (6.78) ekuazioak bi soluzio linealki independente dauzka $0 < |x| < \rho$ puntuetan: y_1 eta y_2 . Lehenengoa beti izan daiteke honako hau:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_1) x^{\lambda_1+n}. \quad (6.83)$$

Bigarrena, berriz, honela lortzen da:

1. $N \neq 0, 1, 2, \dots$ denean,

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_2) x^{\lambda_2+n}. \quad (6.84)$$

2. $N = 0$ bada,

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{\lambda_1+n}, \quad (6.85)$$

koefiziente hauekin:

$$b_n \equiv a'_n(\lambda_1) = \left. \frac{d}{d\lambda} a_n(\lambda) \right|_{\lambda=\lambda_1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.86)$$

3. $N = 1, 2, \dots$ denean,

$$y_2 = A y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{\lambda_2+n}, \quad (6.87)$$

konstante hauekin:

$$A \equiv \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} [(\lambda - \lambda_2) a_N(\lambda)], \quad (6.88)$$

$$c_0 \equiv 1, \quad (6.89)$$

$$c_n \equiv \left. \frac{d}{d\lambda} [(\lambda - \lambda_2) a_n(\lambda)] \right|_{\lambda=\lambda_2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.90)$$

6.5.1 Teoremaren frogapena

Soluzioak aipaturiko egiturakoak direlako frogapena egiteko,

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda) x^{\lambda+n} \quad (6.91)$$

erako soluzioa saiatzean da ekuazioan:

$$\mathcal{L}y \equiv x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \quad (6.92)$$

Izan ere, (6.68)–(6.74) adierazpenetan egindako kalkulia errepikatuz, ezkerreko gaia

$$\mathbb{L}y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \mathcal{I}(\lambda + n)c_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k(\lambda) \right\} x^{\lambda+n} \quad (6.93)$$

dela lortzen da. Orain,

$$\mathcal{I}(\lambda + n)c_n(\lambda) + \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(\lambda + k) + q_{n-k}] c_k(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.94)$$

betetzeko eskatzen badugu, (6.93) baldintza hurrengora laburtzen da:

$$\mathbb{L}y(x, \lambda) = \mathcal{I}(\lambda)c_0(\lambda)x^\lambda. \quad (6.95)$$

Ekuaio honen eskuineko gaia nulua da indizeetan, $\mathcal{I}(\lambda_1) = \mathcal{I}(\lambda_2) = 0$, eta, beraz, (6.91) adierazpenean $c_0(\lambda) = 1$ balio berezia aukeratuz gero $\lambda = \lambda_1$ eta $\lambda = \lambda_2$ eginez (6.83) eta (6.84) soluzioak lortzen ditugu hurrenez hurren, kasu horietan (6.94) baldintza (6.82) adierazpenera laburtzen baita.

Indizea bikoitza bada,

$$\mathcal{I}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2, \quad (6.96)$$

(6.83) eta (6.84) soluzioak berdinak dira, baina bigarren soluzioa orain ikusiko dugun moduan lor daiteke. Hasteko, $c_0(\lambda) = 1$ aukeratu ondoren (6.95) baldintza λ -rekiko deribatzen dugu eta (6.96) adierazpena eta \mathbb{L} eragilearen linealtasuna erabiliz hauxe lortzen da:

$$\mathbb{L} \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 2(\lambda - \lambda_1)x^\lambda + (\lambda - \lambda_1)^2 x^\lambda \ln x. \quad (6.97)$$

Baina adierazpen hau $\lambda = \lambda_1$ denean nulua denez, bigarren soluzioa (6.91) adierazpena $\lambda = \lambda_1$ puntuan deribatuz lortzen da:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(\lambda_1)x^{\lambda_1+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_1)x^{\lambda_1+n} \ln x. \quad (6.98)$$

Emaitza hau (6.85) soluzioa da preseski.

$\lambda_1 = \lambda_2 + N$ eta $N = 1, 2, \dots$ badira, $n = N$ denean (6.94) adierazpenean $c_N(\lambda)$ -ren koefizientea $\mathcal{I}(\lambda + N) = (\lambda + N - \lambda_1)(\lambda + N - \lambda_2) = (\lambda - \lambda_2)(\lambda + N - \lambda_2)$ da, eta $\lambda = \lambda_2$ baliorako nulua denez ezin dugu zuzenean soluzioa (6.84) moduan idatzi. Baina

$$c_0(\lambda) = \lambda - \lambda_2 \quad (6.99)$$

aukera egiten badugu, (6.94) baldintzaren ondorioz, $c_1(\lambda), \dots, c_{N-1}(\lambda)$ koefizienteek ere edukiko dute $(\lambda - \lambda_2)$ faktorea. Ondorioz, $n = N$ denean (6.94) baldintzaren batugai guztietan agertuko da aipaturiko faktorea eta $\lambda = \lambda_2$ egitean baldintza bete egingo da. Bestalde, (6.95) ekuaioa

$$\mathbb{L}y(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda \quad (6.100)$$

izango da eta, ageri denez, nulua da $\lambda = \lambda_2$ baliorako. Ondorioz, soluzio bat

$$y(x, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} = \sum_{n=N}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{N+n}(\lambda_2)x^{\lambda_1+n} = Ay_1 \quad (6.101)$$

da (6.83) eta (6.88) adierazpenetan definituriko balioekin. (Aurreko adierazpeneko lehen batukarian hasierako N batugaiaik nuluak ziren zegozkien koefiziente guztiek $(\lambda_2 - \lambda_2)$ faktorea zeukatelako. Hurrengo gaia $c_N(\lambda_2)x^{\lambda_2+N} = Ax^{\lambda_2+N} = Ax^{\lambda_1}$ zen.) Bigarren soluzioa aurkitzeko, (6.100) adierazpena λ -rekiko deribatuko dugu, lehen egin dugunaren antzera:

$$L \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda + 2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)x^\lambda + (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)^2 x^\lambda \ln x. \quad (6.102)$$

Hauex $\lambda = \lambda_2$ baliorako nulua denez,

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\lambda_2)x^{\lambda_2+n} \ln x \quad (6.103)$$

ekuazioaren soluzioa izango da, baina (6.87) adierazpena da hau, (6.101) emaitza eta (6.99) aukerara kontuan harturik erraz ikusten denez. (Konbergentzia-eremuan $0 < |x| < \rho$ puntuak daudelako frogapena [22] liburuan aurki daiteke.)

6.5.2 Oharrak

- Soluzioaren hasierako gai batzuk bakarrik kalkulatu nahi baditugu, mota egokiko seriea zuzenean saiaturik koefizienteak kalkulatzeko izan daiteke metodorik errazena.
- Lehen soluzioari dagokion seriea batzea lortu bada, bigarrena aurkitzeko (3.68) ordena-beheratzea izan daiteke metodorik erabilgarriena.
- Gai logaritmikoak batzuetan agertzea ez da harritzekoa, 3.12 ataleko Cauchy eta Euler-en ekuazio errazetan ere agertzen ziren eta.
- Indize bakarra dagoenean ($\lambda_1 = \lambda_2$) bigarren soluzioak gai logaritmikoa dauka ezinbestez.
- Indizeen $N = \lambda_1 - \lambda_2$ kendura oso ez-nulua bada, $c_N(\lambda_2)$ koefizienterako (6.94) ekuazioa

$$0 \cdot c_N(\lambda_2) + \sum_{k=0}^{N-1} [p_{N-k}(\lambda + k) + q_{N-k}] c_k(\lambda_2) = 0, \quad (6.104)$$

da eta, beraz, bi kasu desberdin ditugu:

- Ekuazioaren egituraren ondorioz,

$$\sum_{k=0}^{N-1} [p_{N-k}(\lambda + k) + q_{N-k}] c_k(\lambda_2) = 0 \quad (6.105)$$

gertatzen bada, $c_N(\lambda_2)$ hautazkoa da eta, hortaz, $A = 0$ dugu eta λ_2 indize txikiari dagokion soluzioak ez dauka gai logaritmikorik. Gainera, azken soluzio honetan $c_0(\lambda_2)$ eta $c_N(\lambda_2)$ hautazko konstanteak daudenez, soluzio orokorra izango da eta bertan egongo dira soluzio guztiak. Izan ere, λ_1 indize handiari dagokiona $c_0(\lambda_2) = 0$ eta $c_N(\lambda_2) = 1$ eginez berreskuratzen da. Kasu hau, puntu arrunt guztiekin gertatzen da, baita ordena erdiosoko Bessel-en ekuazioetan eta problemetan ikusiko ditugun zenbait adibidetan ere.

- (6.105) betetzen ez bada, (6.104) baldintzak ez du $c_N(\lambda_2)$ koefizienterako soluziorik eta λ_2 indizeari dagokion soluzioan gai logaritmikoa agertuko da: $A \neq 0$.

Ondoren, adibide batzuetan aplikatuko dugu teorema hau.

6.5.3 Indize bikoitza

Azter dezagun ondoko ekuazioa:

$$xy'' + (1+x)y' + y = 0. \quad (6.106)$$

Hemen $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ ordezkatu ondoren koefizienteak berdinduz, hauxe lortzen da:

$$\lambda^2 a_0 = 0, \quad (6.107)$$

$$(\lambda+n)^2 a_n + (\lambda+n)a_{n-1} = 0. \quad (6.108)$$

Lehen ekuazioak $\lambda = 0$ indizea bikoitza dela diosku eta bigarrenak

$$a_n(\lambda) = -\frac{a_{n-1}(\lambda)}{\lambda+n} = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{\lambda+k} \quad (6.109)$$

errepikapena ematen digu. Ohi bezala, $a_0(\lambda) = 1$ hartuko dugu. Azken ekuazioan $\lambda = 0$ eginez,

$$a_n(0) = \frac{(-1)^n}{n!} \quad (6.110)$$

lortzen da eta, beraz, soluzio bat ondokoa dugu:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}. \quad (6.111)$$

Bigarren soluzioa (6.85)–(6.86) adierazpenen bitartez kalkulatzeko deribatu logaritmikoa erabiliko dugu:

$$\begin{aligned} b_n = a'_n(0) &= a_n(0) \frac{d}{dx} \ln |a_n(\lambda)| \Big|_{\lambda=0} = -\frac{(-1)^n}{n!} \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n \ln(\lambda+k) \Big|_{\lambda=0} \\ &= -\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda+k} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{(-1)^n}{n!} \Omega_n. \end{aligned} \quad (6.112)$$

($\Omega_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ zenbaki harmonikoak 283. orrian definitzen dira.) Ekuazioaren soluzio orokorra, beraz, honako hau da:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 \left[e^{-x} \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Omega_n x^n \right]. \quad (6.113)$$

6.13 ARIKETA Egiaztatu y_2 soluzioa ondoko adierazpena zuzenean saiatuz lor daitekeela:

$$y_2 = e^{-x} \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \quad (6.114)$$

6.14 ARIKETA Froga ezazu y_1 eta (3.68) adierazpena erabilirik soluzio orokorra hauxe dela:

$$y = [A + B \operatorname{Ei}(x)] e^{-x}. \quad (6.115)$$

Erabili (6.111), (D.64) eta (D.66) soluzio berbera dela egiaztatzen.

6.15 ARIKETA Ebatzi

$$x^2(1+x)y'' + (x^2-x)y' + y = 0. \quad (6.116)$$

6.5.4 Gai logaritmikoa

Adibide honetan,

$$(x + x^2)y'' - xy' + y = 0 \quad (6.117)$$

ekuazioan $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ ordezkatzeko badugu, hauxe lortzen da:

$$\lambda(\lambda - 1) a_0 = 0, \quad (6.118)$$

$$(\lambda + n)(\lambda + n - 1) a_n + [(\lambda + n - 1)(\lambda + n - 3) + 1] a_{n-1} = 0. \quad (6.119)$$

Lehen ekuazioak $\lambda = 0, 1$ indizeak ematen dizkigu eta bigarrenak errepikapena:

$$a_n(\lambda) = -\frac{(\lambda + n - 2)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)} a_{n-1}(\lambda). \quad (6.120)$$

6.16 ARIKETA Egiaztatu ondokoa dela errepikapenaren soluzioa:

$$a_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda (\lambda - 1)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.121)$$

Indizeen arteko kendura $N = 1$ osoa bada ere, indize handiak beti ematen digu soluzio bat. Kasu berezi honetan $\lambda_1 = 1$ denez, soluzioa $y_1 = x$ da, zeren $a_0 = 1$ aukeratu ondoren (6.121) adierazpenean $a_n(1) = 0$ direla ikusten baitugu. Argi dagoenez, kasu erraz honetan soluzio hau ikuskapenez ere aurki liteke (3.67) motako ekuazioei buruz 51. orrian esandakoaz baliatuz. Kasu honetan soluzio orokorra bilatzeko metodarik errazena $y = x \int u dx$ ordena-beheratzea izango litzateke, baina Frobenius-en teoremaren erabilera aztertu nahi dugu. Kasu honetan $N = 1$ eta $\lambda_2 = 0$ direnez, hauxe dugu:

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda a_1(\lambda) = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \frac{\lambda(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 1)\lambda^2} = -1. \quad (6.122)$$

Bestalde,

$$c_n = \left. \frac{d}{d\lambda} \lambda a_n(\lambda) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \frac{(-1)^n \lambda^2 (\lambda - 1)^2}{(\lambda + n)(\lambda + n - 1)^2} \right|_{\lambda=0} \quad (6.123)$$

koefizientea nulua da $n \geq 2$ guztietarako, $\lambda = 0$ zenbakitzailearen erro bikoitza baita. $n = 1$ denean, berriz, λ^2 gaia izendatzailean ere agertzen da eta, beraz, honako hau geratzen zaigu:

$$c_1 = -\left. \frac{d}{d\lambda} \frac{(\lambda - 1)^2}{(\lambda + 1)} \right|_{\lambda=0} = 3. \quad (6.124)$$

Ondorioz, ekuazioaren soluzio orokorra $y = C_1 x + C_2(-x \ln x + 1 + 3x)$ edo, hautazko konstanteak berdefinitu ondoren, $y = Ax + B(1 - x \ln x)$ da.

6.17 ARIKETA Ebatzi

$$x(y'' + y') - y = 0. \quad (6.125)$$

6.5.5 Gai logaritmikorik gabeko adibidea

Lehen esan bezala, indizeen arteko diferentzia osoa eta ez-nulua denean, Frobenius-en seriearen bidezko soluzio bakar bat egon daiteke, bigarren soluzioak gai logaritmiko bat duelako. Horrelako kasu bat aurreko adibidean aztertu dugu. Hala eta guztiz ere, gai logaritmikorik ez egotea ere gerta daiteke kasu batzuetan, eta orduan Frobenius-en bi serie linealki independente daude. Hori gertatzen zen, hain zuzen, ordena erdioso Bessel-en ekuazioekin. Areago, bi berretura-serie arrunt linealki independente egon daitezke zenbait kasutan, hala nola puntu arrunten inguruan. Azken kasu honetan (6.11) ekuazioaren P eta Q koefizienteak analitikoak dira jatorriaren inguruan eta, beraz, $p_0 = q_0 = q_1 = 0$, $p_{n+1} = P_n$, $q_{n+2} = Q_n$, eta indize-ekuazioa

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad (6.126)$$

denez, indizeak $\lambda = 0, 1$ dira beti. Kasu honetan indizeen $N = 1$ kendura osoa bada ere, indize txikia erabiltzeak, arazorik sortu beharrean, soluzio guztiak ematen ditu zuzenean. Izan ere, (6.74) errepikapenean $\lambda = q_1 = 0$ egin ondoren $n = 0, 1$ hartzen baditugu —hau da, indize-ekuazioa eta arazoa sor lezakeen $n = N = 1$ gaiari dagokiona kalkulatzen baditugu— honako baldintza hauek lortzen ditugu:

$$\mathcal{I}(0)c_0 = 0, \quad (6.127)$$

$$\mathcal{I}(1)c_1 = 0. \quad (6.128)$$

Ageri denez, $\mathcal{I}(0) = \mathcal{I}(1) = 0$ berdintzen ondorioz bai c_0 eta bai c_1 ere nahi dugun moduan aukera daitezke $\lambda = 0$ indize txikiari dagokion seriean. Beraz, hautazko bi konstante daudenez, soluzio guztiak lortzen dira horrela. Izan ere, $\lambda = 1$ indize handiari dagokion soluzioa $c_0 = 0$ eta $c_1 \neq 0$ aukerekin berreskuratzen da.

Ikus dezagun bestelako adibide bat.

$$x^2 y'' - xy' - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right) y = 0 \quad (6.129)$$

ekuazioan jatorria singular erregularra da eta $y = \sum a_n x^{\lambda+n}$ saiaturaz, ondoko indize-ekuazioa lortzen da:

$$\mathcal{I}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 5/4 = \left(\lambda - \frac{5}{2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{2}\right). \quad (6.130)$$

Indizeak, beraz, $\lambda = 5/2, -1/2$ dira eta beraien arteko kendura $N = 3$. Gainera, koefizienteen errepikapena binaka doa:

$$\mathcal{I}(\lambda + 1) \quad a_1 = 0, \quad (6.131)$$

$$\mathcal{I}(\lambda + n) \quad a_n - a_{n-2} = 0. \quad (6.132)$$

Kasu bietan $\mathcal{I}(\lambda + 1) \neq 0$ denez, $a_1 = 0$ dugu.

Beti bezala, $\lambda = 5/2$ indize handiak soluzio bat ematen du. Indize bakoitiak nulua izango dira $a_1 = 0$ emaitzaren ondorioz, eta bikoitiak ondokoak:

$$a_{2k} \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{a_{2(k-1)}}{\mathcal{I}(5/2 + 2k)} = \frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k + 3)}. \quad (6.133)$$

6.18 ARIKETA Desegin errepikapena eta osatu faktorialak

$$a_{2k} \left(\frac{5}{2} \right) = \frac{3(2k+2)}{(2k+3)!} \quad (6.134)$$

dela eta, beraz, lehen soluzioa hauxe dugula frogatzeko:

$$y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(2k+2)x^{2k+5/2}}{(2k+3)!}. \quad (6.135)$$

Adibide honetan $\lambda_2 = -1/2$ denez, gai logaritmikoaren koefizientea

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) a_3(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{a_1(\lambda)}{\mathcal{I}(\lambda+3)} = \lim_{\lambda \rightarrow -1/2} \frac{a_1(\lambda)}{\lambda + 7/2} = 0 \quad (6.136)$$

da, zeren $a_1(\lambda) = 0$ izanik izendatzailea ez baita nulua. Puntu arruntekin gertatu zen bezalaxe, berriro ikusten dugu indizeen kendura oso positiboa bada ere gai logaritmikoa ez agertzea gerta daitekeela. Kasu berezi honetan emaitza honen arrazoia ikusteko (6.132) ekuazioa $n = N = 3$ baliorako aztertu behar da, horixe baita a_3 definitzeko erabili behar den baldintza:

$$\mathcal{I}(\lambda+3)a_3 - a_1 = 0. \quad (6.137)$$

Baina $\lambda = -1/2$ denean baldintza hau edozein a_3 baliorekin betetzen da, $\mathcal{I}(5/2)$ eta a_1 nulua baitira. A koefizientea nulua den guztietan bezalaxe, kasu honetan ere indize txikiarekin —oztoporik ez izateaz gain— soluzio osoa lortzen dugu, bigarren hautazko konstante bat agertzen zaigu eta. Gai bakoitiak a_3 faktore komuna onartzen dituzte eta ($a_1 = 0$ denez) $x^{3-1/2} = x^{5/2}$ berreturarekin hasten dira; hau da, y_1 soluzioa osatzen dute (beste kasu askotan, indize handiari dagokion soluzioa bestearekin konbinazio lineal batean nahasturik ager daiteke). Gai bikoitiek beste soluzio linealki independente bat ematen digute:

$$a_{2k} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{a_{2(k-1)}}{\mathcal{I}(2k-1/2)} = \frac{a_{2(k-1)}}{2k(2k-3)}. \quad (6.138)$$

6.19 ARIKETA Frogatu azken soluzioa honako hau dela:

$$y_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)x^{2k-1/2}}{(2k)!}. \quad (6.139)$$

6.5.6 Serieen batuketak

Soluzioa ematen duen seriea lortu ondoren, beraren batura kalkulatu saiatu beharko genuke beti. Taula onak edota kalkulu sinbolikorako programarik (ikus B.5.5 atala) ez badugu, kasu berezietan izan ezik ez da lan erraza, baina ez dago inolako aitzakiarik seriearen egitura ez aztertzeko: agian, ezaguna zaigu edo transformazio erraz bat erabil daiteke serie ezagunetako batera laburtzeko. Ondoren ematen ditugun arauak seriearen batura eman *dezakete* koefiziente orokorrean indizearen konbinazio algebraikoak eta faktorialak (edo gamma funtzioak) baino ez badira agertzen:

- Koefiziente orokorraren izendatzailean faktorialik gabe konbinazio algebraiko hutsak agertzen badira, funtzio logaritmikoen serieak (alderantzizko funtzio hiperbolikoei dagozkienak barne.) lagungarriak izan litezke.

- Koefiziente orokorraren izendatzailean faktorial bakarria badago, egitura bereko serie batera (edo batzuetara) laburtuz esponentziala eta bere konbinazioak (sinua, kosinua, sinu hiperbolikoa eta kosinu hiperbolikoa) ager daitezke. Gainera, (D.39) errore-funtzioa eta (D.64) esponentzial-integrala ere lagungarriak izan litezke.
- Izendatzailean bi faktorial —edo faktorial bat eta gamma bat— agertzen badira hautagai nabaria (6.58) Bessel-en funtzioak dira (edo, orokorragoak diren (D.91) Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorrak: ikus 6.22 problema eta D.10 atala).
- Izendatzailean bi faktorial —edo faktorial bat eta gamma bat— agertzeaz gain zenbakitzailan beste gamma bat badago, (D.55) serie binomikoa edo **Gauss-en⁶ funtzio hipergeometrikoa** saia daitezke. Azken funtzioa honela definitzen da, serie binomikoaren orokorpen moduan:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \beta; \gamma; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}.
 \end{aligned} \tag{6.140}$$

Gainera, D.11 atalean esaten denez, beste funtzio asko lortzen dira hemendik kasu berezietan.

Azken adibidean, (6.135) eta (6.139) adierazpenetan mota esponentzialeko serieei antzematen diegu:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)x^{2k+5/2}}{(2k+3)!} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+3)x^{2k+3}}{(2k+3)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\
 &= \frac{x \cosh x - \sinh x}{\sqrt{x}}.
 \end{aligned} \tag{6.141}$$

6.20 ARIKETA Frogatu ondoko berdintza:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)x^{2k-1/2}}{(2k)!} = \frac{x \sinh x - \cosh x}{\sqrt{x}}. \tag{6.142}$$

6.21 ARIKETA Ebatzi $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ ekuazioa.



⁶ **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777-04-30, Brunswick, gaur egun Alemania; 1855-02-23, Göttingen, Hannover). Tesian algebraren oinarriko teoremaren lehen frogapen osoa eman zuen. Ezagunenak geometria diferentzialean egindako ekarpenak badira ere, behaketa astronomikoak egin zituen oso zaharra izan arte eta, ekarpen praktikoak gorabehera, lan asko idatzi zituen mekanika zerutiarrari, magnetismoari, ekuazio diferentzialei, hurbilketen teoriari eta probabilitateei buruz. Ezagutza zientifiko eta teknikoaren arlo askotan eragin ikaragarria izan zuen.

6.6 Problemak

6.1 Legendre-ren⁷ ekuazioa. Laplace-ren ekuazioa koordenatu zilindrikoetan ebaztean ondoko ekuazioa agertzen da:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0.$$

- (a) Aurkitu $x = 0$ puntuaren inguruko serieen bidezko soluzioak, $(-1, 1)$ tartean.
 (b) Soluzio horien artean, zeintzuk dira polinomikoak?
 (c) Aurkitu **Legendre-ren polinomio** batzuk, hau da, $y(1) = 1$ baldintza betetzen duten soluzio polinomiko batzuk.

6.2 Chebyshev-en⁸ ekuazioa. Aurkitu $(-1, 1)$ tartean

$$(1 - x^2) y'' - xy' + \nu^2 y = 0$$

ekuazioak dituen soluzioak. Zehaztu zeintzuk diren polinomioak eta bereziki $y(1) = 1$ baldintza betetzen dutenak (**Chebyshev-en** polinomioak, alegia).

6.3 Kalkulatu seigarren ordenaraino ondoko problemaren soluzioa:

$$xy'' + y' + 2y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 4.$$

6.4 Bessel-en funtzioak. Froga itzazu Bessel-en funtzioen ondoko propietateak:

- (a) $\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(kx)] = kx^\nu J_{\nu-1}(kx).$
 (b) $\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(kx)] = -kx^{-\nu} J_{\nu+1}(kx).$
 (c) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = kJ_{\nu-1}(kx) - \frac{\nu}{x} J_\nu(kx).$
 (d) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = -kJ_{\nu+1}(kx) + \frac{\nu}{x} J_\nu(kx).$
 (e) $\frac{d}{dx} [J_\nu(kx)] = \frac{k}{2} [J_{\nu-1}(kx) - J_{\nu+1}(kx)].$
 (f) $J_\nu(kx) = \frac{kx}{2\nu} [J_{\nu-1}(kx) + J_{\nu+1}(kx)].$

Bigarren motako Y_ν funtzioek antzeko propietateak betetzen al dituzte?



⁷ **Adrien-Marie Legendre** (1752-09-18, Paris; 1833-01-10, Paris). Biraketa-simetria duten gorputz batzuek sorturiko grabitazio-eremua aztertzean sartu zituen bere izeneko polinomioak. Funtzio eta integral eliptikoen azterketa da, segur aski, bere ekarpenik handiena. Bestalde, π zenbakia irrazionala delako frogapen sinplifikatua eman zuen.



⁸ **Pafnuty Lvovich Chebyshev** (1821-05-16, Okatovo, Errusia; 1894-12-08, San Petersburg). Zenbakien teoriari egindako ekarpenari esker gogoratzen dugu batik bat. Baina beste gai asko ere landu zituen: mekanika, probabilitateen teoria, integrazioa eta abar.

6.5 $1/2$ ordenako Bessel-en ekuazioa. Aurkitu Bessel-en ekuazioan $y(x) = x^{-1/2}u(x)$ aldagai-aldaketa egitean lortzen dena. Erabili emaitza $1/2$ ordenako Bessel-en ekuazioaren soluzioa idazteko.

6.6 $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0.$

6.7 $x(x-1)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0.$

6.8 $(x^3 - x^2)y'' + (2x^2 - 3x)y' - y = 0.$

6.9 $xy'' - y = 0.$

6.10 $x^4y'' + xy' + 2y = 0.$

6.11 $2x^2y'' + x(2x+1)y' - y = 0.$

6.12 $y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$

6.13 $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0.$

6.14 Laguerre-ren⁹ ekuazioa. Aurkitu ondoko ekuazioak $x > 0$ zuzenerdian dituen soluzioak

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + \nu y = 0, \quad (\alpha \geq 0).$$

Eztabaidatu soluzio polinomikoak, Laguerre-ren polinomio orokortuen proportzionalak direnak.

6.15 Bessel-en ekuazioa. Froga ezazu

$$x^2y'' + (2c+1)xy' + [a^2b^2x^{2b} + (c^2 - \nu^2b^2)]y = 0$$

ekuazioa, Bessel-en ekuazio batera laburtzen dela $t \equiv ax^b$ eta $u \equiv x^c y$ adierazpenek definituriko $(x, y) \rightarrow (t, u)$ aldagai-aldaketaren bitartez.

6.16 Erabili serieen bidezko metodoa ondoko ekuazioa ebazteko:

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

6.17 Aurkitu hurrengo ekuazioaren soluzioen lehen gaiak:

$$y'' + (\cos x)y = 0.$$

6.18 $(x^3 - x)y''' + (9x^2 - 3)y'' + 18xy' + 6y = 0.$



⁹ **Edmond Nicolas Laguerre** (1834-04-09, Bar-le-Duc, Frantzia; 1886-08-14, Bar-le-Duc). Bere izeneko polinomio eta ekuazioari esker gogoratzen dugu bereziki, baina analisi, geometria eta hurbiltze-metodoen beste arlotan ere egin zuen lan.

6.19 Batzuetan, ekuazio osoaren soluzio partikular bat aurkitzeko ere erabil daitezke berretura-serieak eta Frobenius-enak. Adibide moduan, kontsidera dezagun

$$x^2 y'' - x(x+1)y' + (x+1)y = x^2.$$

Ebatzi ekuazio homogeneoa eta erabili serie egoki bat osoaren partikular bat aurkitzeko. Konparatu emaitza konstanteen aldakuntzaren metodoaz lortzen denarekin.

6.20 Gauss-en ekuazio hipergeometrikoa. Aurkitu

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0$$

ekuazioaren soluzioak $x = 0$ inguruan, $\gamma \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ denean. Soluzioa idazteko, erabili **Gauss-en** $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ **funtzio hipergeometrikoa**, $F(\alpha, \beta; \gamma; 0) = 1$ hastapen-baldintza betetzen duen soluzioa, alegia.

Iradokizuna: Erabili $y = x^{1-\gamma} z$ aldaketa bigarren soluzioa lortzeko.

6.21 Frogatu $F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x)$ eta aurkitu $F(1, \beta; \beta; x)$ eta $F(\alpha, \beta; \beta; x)$.

6.22 Ekuazio hipergeometriko baterakorra. Aurkitu

$$xy'' + (\beta - x)y' - \alpha y = 0$$

ekuazioaren indize nuluari dagozkion soluzioen artean, $\beta \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ denean $y(0) = 1$ baldintza betetzen duena. Aipaturiko soluzioari **funtzio hipergeometriko baterakorra** edota **Kummer-en**¹⁰ **funtzioa** deitzen zaio eta $M(\alpha, \beta, x)$ edo ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ moduan adierazten da. Ez-tabaidatu Kummer-en funtzioa polinomio bihurtzen deneko kasuak, baita oinarrizko funtzioak berreskuratzen direneko kasu batzuk ere. Kalkulatu bigarren soluzio linealki independentea $y = x^{1-\beta} z$ aldagai-aldaketaren bidez. Azaldu ekuazio honen eta Gauss-en hipergeometrikoaren arteko erlazioa eta nola erabil daitekeen hau aurreko puntuetako emaitzak era zuzenean berreskuratzeke. (*Iradokizuna:* Erabili $t = \beta x$ aldaketa Gauss-en ekuazioan.) Zergatik murriztu dira β parametroaren balioak?

6.23 Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzio orokorra:

$$xy'' + xy' + y = 0.$$

6.24 Aurkitu hurrengoaren soluzio guztiak:

$$xy'' - y' + y = 0.$$

6.25 Adierazi ondoko ekuazioaren soluzioak oinarrizko funtzioen bidez:

$$x(x-1)y'' + 3y' - 2y = 0.$$

6.26 Aurkitu ondoko ekuazioaren soluzioa orokorra:

$$(x^2 - x)y'' + (1 - 2x^2)y' + (4x - 2)y = 0.$$

6.27 Ebatzi hurrengo ekuazioa diferentziala:

$$x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0.$$



¹⁰ **Ernst Eduard Kummer** (1810-01-29, Sorau, Prusia; 1893-05-14, Berlin). Fermat-en azken teoremari buruz lan egiten zuela idealaren kontzeptua asmatu zuen. Gauss-en lana hedatu zuten serie hipergeometrikoari buruz egindako ikerketak eta bere izeneko gainazala gogoratzen dira.

7. GAIA

Metodo hurbilduak

*Although this may seem a paradox,
all exact science is dominated by the idea of approximation.*

Bertrand Russell

Egia esan, ez dakigu nola aurkitu integral gehienek soluzio zehatza eta ekuazio finituak hurbiltzeko gabe ebazteko metodo gutxi ezagutzen ditugu (gogoratu, adibidez, funtzio transzendentek dauzkaten ekuazioen zailtasuna, edo ekuazio polinomikoa, maila lau baino handiagoa denean). Beraz, ez litzateke harrigarria izan beharko ekuazio diferentzial gehienak era esplizitu zehatzean ebazteko gai ez izatea. Praktikan hurbiltzeko batera jo behar da gehienetan. Batzuetan soluzio zehatza ezaguna izanik ere, erabilgaitza izateko bezain korapilatsua izan daiteke, batez ere gure helburua praktikoa bada eta kalkulatu nahi duguna kasu interesgarri batzuetan aldagaien balioak (edo balio hurbilduak) badira. (Hobeto ezagutzen dugun testuinguru batean, Cardano¹ eta Ferrari-ren² metodoak hirugarren eta laugarren mailako ekuazio algebraikoetarako emandako soluzioak askotan erabiltezinak direla gogora daiteke.)

Aitortu behar da hemen gai bakar bat gutxi dela fisikaren benetako praktikan metodo hurbilduek duten garrantziari merezi duena emateko. Halaber, liburuetan agertu ohi diren metodo grafiko batzuk (isoklinak eta abar) ez dira aztertuak izango zeren eta (8. gaian testuinguru murriztu batean ikusiko dugunez) propietate kualitatiboak aztertzeko euren erabilgarritasuna mantentzen badute ere, ebazpen-metodo hurbilduak diren aldetik gaur eguneko zenbakizko metodo eraginkorrek ordezkatuak izan baitira. Hasteko, hurbilketa analitikorako oinarritzko zenbait metodo klasiko azalduko ditugu. Perturbazio-teoriak fisikan duen garrantzia apartekoa bada ere, hemen honetaz oso gutxi ikusiko dugu: irakurlearen jakin-mina sorraraziko ahal du! Gaur eguneko garrantziari esker zenbakizko metodoek berezko ikasgaia merezi dute, baina behintzat alderdi oinarritzkoenak aztertuko ditugu, gure eskumenean dauden errutina eraginkorren «magia» nolabait azaltzeko (ikus 317. orriko bibliografia).



¹ **Girolamo Cardano** (1501-09-24, Pavia, Milaneko Dukerria; 1576-09-21, Erroma). Latinezko eta ingelesezko Cardan izenaz ere ezagutzen da sendagile eta matematikari hau. Scipione del Ferro-k eta Tartaglia-k alde batetik eta Ferrari-k bestetik aurkituriko ekuazio kubiko eta koartikoen errokarrien bidezko ebazpenak 1545eko *Ars Magna* maisulanean argitaratu zituen lehenengoz.

² **Ludovico Ferrari** (1522-02-02, Bologna, Estatu Pontifikalak; 1565-10-05, Bologna). Hamazortzi urte zituela Cardano-k bere postua utzi zion. Ekuazio koartikoaren errokarrien bidezko ebazpen-metodoa aurkitu zuen, Tartaglia-k Cardano-ri isilpean jakinarazitako kubikoa ebazteko metodoaz baliatuz. Ondorioz, koartikoaren ebazpena ez zen argitaratua izan Cardano-k kubikoaren ebazpena Ferro-ren lehenagoko paperen artean aurkitu arte.

Gai honetako oinarriko maila kontuan harturik, eta notazioa eta adierazpenak beharrik gabe ez zailtzeko, askotan lehen (edo bigarren) ordenako ekuazio diferentzial bakarraren kasuan baino ez dugu aztertuko. Hala eta guztiz ere, esango dugunaren gehiena oso erraz hedatzen da ordena handiagoko ekuazioetara eta sistemetara: maiz nahikoa da ezezagunaren deribatuak edo menpeko aldagaiak zenbatzen dituen indizea sartzea.

7.1 Magnitude-ordenaren ikurra

Definizioz, $f(x)$ funtzioa $x \rightarrow x_0$ limitean $g(x)$ -ren magnitude-ordenakoa dela esango dugu eta $f(x) = O(g(x))$ idatziko dugu, baldin eta $f(x)/g(x)$ zatidura bornatua bada $x \rightarrow x_0$ limitean (adibidez, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x)$ balioa existitzeaz gain finitua delako).

« O » letra **Landau-ren ikurra** edo **Bachmann eta Landau-ren ikurra** deitzen da eta askotan erabiltzen da kalkulu hurbilduetan laburdura modura. Oro har, x_0 balioa (gehienetan 0 edo ∞) testuingurutik ondorioztatzen bada, $x \rightarrow x_0$ limitea ez da esplizituki aipatzen.

7.1 ARIKETA Froga ezazu $\tanh x = O(x)$, $\tanh x = x + O(x^3)$ eta $\tanh x = O(e^x)$ betetzen direla zehaztu behar duzun x_0 egokirako. Egia al da $\tanh x = O(x^2)$? Eta $\tanh x = O(2x)$?

7.2 ARIKETA Frogatu ondoko erlazioak:

$$O(f) + O(g) = O(|f| + |g|), \quad (7.1)$$

$$O(f)O(g) = O(fg), \quad (7.2)$$

$$O(O(f)) = O(f). \quad (7.3)$$

7.3 ARIKETA Egiaztatu $\epsilon \rightarrow 0$ limitean (a) $2/\sqrt{3 + e^{-\epsilon t}}$, (b) $1 + \sin(\epsilon t/8)$, (c) $1 + \tan(\epsilon t/8)$, eta (d) $\exp(\epsilon t/8)$ funtzioak baliokideak direla $O(\epsilon^2)$ ordenako gaiak arbuizaten badira. Zer gertatzen da $t \rightarrow \infty$ kasuan?

7.2 Berretura-serieak

1.4 atalean esandakoa kontuan harturik, metodo hurbildu nabaria,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \quad (7.4)$$

berretura-seriea ondoko hastapen-baldintzen probleman saiitzea da:

$$y' = f(x, y), \quad (7.5)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.6)$$

Azpimarratu behar da hemen nahi duguna ez dela 6. gaian eginikoa, bertan ekuazio *lineal* baten soluzio *guztiak* aurkitu nahi bagenituen ere, hemen ekuazio *lineal* edo *ez-lineal* baten soluzio *partikular* bat kalkulatu nahi baita. Gainera, aipaturiko gaiko serieak batzuetan batu zitezkeen edo funtzio bereziak definitzen zituzten, baina orain seriearen hasierako gai batzuk kalkulatzeko izango da gehienetan egin daitekeen gauza bakarra. Serie moztua soluzioaren hurbilketa egokia izango da $|x - x_0|$ «behar bezain txikia denean», baina askotan enuntziatu hau ezin zehatz daiteke gehiago, praktikan egiten diren hurbilketen kalitatea oso gutxitan froga daiteke eta. Ezer frogatzen ez badu ere, praktikan askotan irispide hau erabiltzen da: kalkulatu hurrengo hurbilketa (seriearen hurrengo gaia, adibidez) eta egiaztatu interesatzen zaigun eremuan aurrean aldaketa ez dela onartzeko prest gauden errore-maila baino handiagoa.

7.2.1 Taylor-en seriearen metodoa

Soluzioaren Taylor-en³ seriea $x = x_0$ puntuaren inguruan eraikitzeko,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} y^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n, \quad (7.7)$$

koefizienteak, hau da, x_0 puntuko deribatuak, ekuazioa eta bere deribatuak erabiliz era sistematikoan kalkula daitezke. Izan ere, ekuazioak lehen deribatua zuzenean ematen digu eta beste guztiak deribazioaren bidez:

$$y' = f(x, y), \quad (7.8)$$

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) f(x, y), \quad (7.9)$$

⋮

Beraz, hastapen-baldintza ordezkatzuz, seriea eraikitzeko behar ditugun koefizienteak lortzen dira ondoz ondo:

$$y(x_0) = y_0, \quad (7.10)$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0), \quad (7.11)$$

$$y''(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) f(x_0, y_0), \quad (7.12)$$

⋮

Adibide moduan, John Bernoulli-k 1694an eta Riccati-k 1724an (hauxe dugu preseski jatorrizko «Riccati-ren ekuazioa») aztertu zuten

$$y' = x^2 + y^2 \quad (7.13)$$

ekuazioa ebatziko dugu.

7.4 ARIKETA Egiaztatu Riccati-ren ekuazioaren soluzio orok hurrengo erlazioak betetzen dituela:

$$y'' = 2(x + yy'), \quad (7.14)$$

$$y''' = 2(1 + y'^2 + yy''), \quad (7.15)$$

$$y^{(4)} = 2(3yy'' + yy'''), \quad (7.16)$$

⋮

Aurkitu $y(0) = 1$ baldintzari dagokion soluzioa.

7.5 ARIKETA Froga ezazu James Bernoulli-k 1703an aztertu zuen $y(0) = 0$ baliorako Riccati-ren ekuazioaren soluzioa ondokoa dela:

$$\begin{aligned} y = & \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{13}{218295}x^{15} + \frac{46}{12442815}x^{19} \\ & + \frac{15178}{66108676095}x^{23} + \frac{404}{28332289755}x^{27} \\ & + \frac{190571}{215183740689225}x^{31} + \frac{5858822}{106515951641166375}x^{35} + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$



³ **Brook Taylor** (1685-08-18, Edmonton, Ingalaterra; 1731-12-29, Londres, Ingalaterra). Diferentzia finituetako kalkulua asmatu zuen, baita zatikako integrazioa eta bere izeneko formula ere. Gainera, hurbilketen teoria, mekanika eta magnetismoari buruz egin zuen lan. Perspektibaren oinarriak ezarri zituen.

7.2.2 Koefiziente indeterminatuen metodoa

Sarri askotan — f -ren deribatuak erraz kalkulatzeko ez badira, batik bat— serie moztua zuzenean saiatzeko erabilgarriagoa izaten da. Koefizienteak kalkulatzeko, aldagai independenteen berretura bakoitzeko gaiak bildu behar dira. Adibidez, Riccati-ren ekuazioarekin $y(0) = 1$ baldintza bete behar bada, badakigu seriea $y_0 = 1$ gaitik hasten dela eta ondoko modukoa dela:

$$y = 1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + O(x^5). \quad (7.18)$$

Honen deribatua eta karratua,

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + O(x^4), \quad (7.19)$$

$$y^2 = 1 + 2c_1x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + (2c_3 + 2c_1c_2)x^3 + O(x^4), \quad (7.20)$$

ekuazioan ordezkatzeko badira, honako ekuazio hauek lortzen dira ondoz ondo:

$$\begin{aligned} 1 & : c_1 = 1 & \implies & c_1 = 1, \\ x & : 2c_2 = 2c_1 & \implies & c_2 = 1, \\ x^2 & : 3c_3 = 1 + c_1^2 + 2c_2 & \implies & c_3 = 4/3, \\ & \vdots & & \end{aligned} \quad (7.21)$$

(Jakina, 7.4 ariketako emaitzak berreskuratzen ditugu.)

7.6 ARIKETA Aurkitu ondoko problemaren soluzio hurbildua: $y' = x + y^3$, $y(0) = 1$.

7.3 Hurrenez hurrenko hurbilketen Picard-en metodoa

Picard-en⁴ metodoan,

$$y' = f(x, y), \quad (7.22)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (7.23)$$

hastapen-baldintzen problema ebazteko, hurrenez hurrenko hurbilketak egiten dira zero ordenako hurbilketa batetik hasita:

$$y^{[0]}(x) = \psi(x). \quad (7.24)$$

Hemen (ia) edozein $\psi(x)$ funtzio erabil daiteke, baina ohiko aukera nabaria $y^{[0]}(x) = y_0$ izaten da. Orain, modu errepikakorren kalkulatu da: $y^{[n]}$ hurbilketa lortu ondoren ekuazio diferentzialaren eskuineko gaien ordezkatzeko da hurrengo kalkulatzeko. Horrela lortzen den ekuazioa aldagai bananduetakoa da,

$$y' = f[x, y^{[n]}(x)], \quad (7.25)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (7.26)$$



⁴ **Charles Émile Picard** (1856-07-24, Paris; 1941-12-11, Paris). Ekuazio diferentzialen soluzioaren existentzia eta bakartasuna frogatzen duen metodo honez gain, singularitasun esentzialen inguruko funtzio analitikoaren balioei buruzko Picard-en teorema handia gogoratzen da. Halaber, analisisian, geometrian, elastizitatean, termodinamikan eta elektrizitatean lan garrantzitsuak argitaratu zituen.

eta koadraturaren bidez ebazten da zuzenean:

$$y^{[n+1]}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, y^{[n]}(u)] du. \quad (7.27)$$

Existentzia eta bakartasunaren teorema A.1 atalean frogatzean ikusiko dugunez, baldintza egokiak betetzen badira, hastapen-baldintzen problemaren $y(x)$ soluziora jotzen du $y^{[n]}(x)$ segidak. Izan ere, $n \rightarrow \infty$ limitean aurkitzen den ondoko ekuazio integro-diferentzialaren baliokidea da aipaturiko problema:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, y(u)] du. \quad (7.28)$$

7.7 ARIKETA Froga ezazu hastapen-baldintzen (7.22)–(7.23) problema eta (7.28) ekuazio integro-diferentziala baliokideak direla.

Adibide moduan, Riccati-ren $y' = x^2 + y^2$ ekuazioa eta $y(0) = 1$ baldintza ebazteko $y^{[0]} = 1$ aukeratzuz gero, lehen hurbilketa hauxe da:

$$y^{[1]}(x) = 1 + \int_0^x (u^2 + 1) du = 1 + x + \frac{1}{3}x^3. \quad (7.29)$$

7.8 ARIKETA Egiaztatu hurrengo hurbilketak ondokoak direla:

$$y^{[2]}(x) = 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7, \quad (7.30)$$

$$\begin{aligned} y^{[3]}(x) = & 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^4 + \frac{8}{15}x^5 + \frac{29}{90}x^6 \\ & + \frac{47}{315}x^7 + \frac{41}{630}x^8 + \frac{299}{11340}x^9 + \frac{4}{525}x^{10} \\ & + \frac{184}{51975}x^{11} + \frac{1}{2268}x^{12} + \frac{4}{12285}x^{13} + \frac{1}{59535}x^{15}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Nahiz eta oso kasu erraza —polinomio hutsak— izan, hurbilketak azkar korapilatzen dira azken adibidean. Gauza bera gertatzen da kasu orokorragoetan eta, gainera, gehienetan agertzen diren integralak ezin ebatzizkoak dira. Horren ondorioz, gutxitan erabil daiteke metodo hau praktikan hurbilketak lortzeko, baina azpimarratu behar da beraren garrantzia teorikoa (A.1 atalean ikusiko dugunez, existentzia eta bakartasunaren teoremaren frogapen estandarra ematen du, besteak beste). Bestalde, oso erabilgarria gertatzen da zenbakizko metodo batzuetan, integralak erraz ebazteko zenbakizko algoritmo erabilgarriak baitaude.

7.4 Perturbazio-metodoak

Fisikan problema askotan parametro txiki bat dago, **perturbazio** bat, alegia. Horrelako kasu batean, garapen-aldagai naturala ez da aldagai independentea (x posizioa edo t denbora, adibidez), aipaturiko parametro txikia baizik. Zero ordenako hurbilketa —parametroari balio nulua (edo beste balio berezi bat) emanez lortzen dena—, soluzioa ondo ezagutzen den kasu berezi bati dagokio maiz, eta horrexegatik hurrenez hurreneko metodo baten abiapuntu egokia izaten da. Perturbazio-teoria fisikari trebatuaren oinarritzko tresnetarikoa da baina, berriro ere, hemen sarre-ra bat aurkeztera mugatuko gara, irakurlearen jakin-mina sortzeko asmoz. Beraz, funtsezko ideia batzuk baino ez ditugu ikusiko⁵, adibide erraz batean hasteko, eta gero beste kasu interesgarriago batean.

⁵Gehiago ikasi nahi duen irakurleak sarrera irakurgarri bat Strogatz-en [29] testuan aurki dezake eta azterketa sistematikoa Holmes-en [21] liburuan.

7.4.1 Perturbazio erregularrak

Eman dezagun ondoko osziladore ez-linealaren soluzio periodikoak aurkitu nahi ditugula, ϵ txikia denean:

$$\ddot{x} + 2x = \sin t + \epsilon x^2. \quad (7.32)$$

Hasteko, $\epsilon = 0$ denean oinarritzko osziladore lineala (harmonikoa) berreskuratzen dugu.

7.9 ARIKETA Froga ezazu $\ddot{x} + 2x = \sin t$ ekuazioaren soluzio periodiko bakarra $x = \sin t$ dela.

Kasu ez-lineala zailagoa da, noski, eta

$$x = \sin t + \epsilon x_1 + O(\epsilon^2) \quad (7.33)$$

erako soluzio hurbildua bilatuko dugu, ekuazioa ϵ parametroaren lehen ordenaraino betetzeko moduan.

7.10 ARIKETA Egiaztatu (7.33) hurbilketa (7.32) ekuazioan ordezkatzuz gero hauxe lortzen dela:

$$\epsilon \left[\ddot{x}_1 + 2x_1 = \frac{1 - \cos 2t}{2} \right] + O(\epsilon^2). \quad (7.34)$$

Askatu x_1 ezezagunerako ekuazioa eta aurkitu soluzio periodikorako lehen ordenako hurbilketa.

7.11 ARIKETA Kalkulatu hurrengo ordena perturbazio-garapenean.

7.4.2 Van der Pol-en osziladorea

Gaur egunean zaharkituta gelditu den balbula elektroniko bat deskribatzeko erabiltzen den ondoko ekuazioa ohorezko postuan dago ekuazio diferentzial ez-linealen historian:

$$\ddot{x} + \epsilon (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0. \quad (7.35)$$

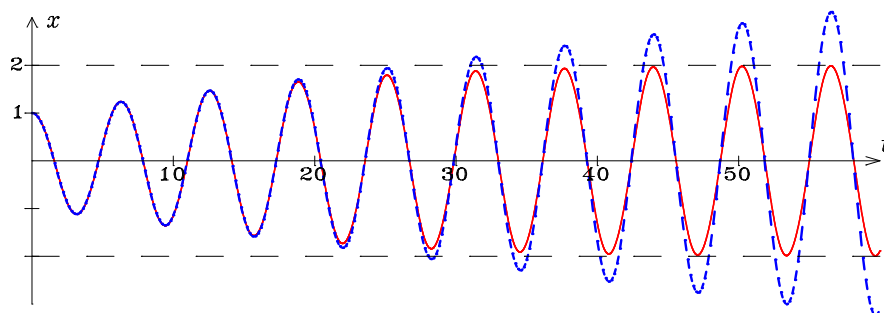
ϵ parametroa positiboa bada, x oso txikia denean $x^2 \dot{x}$ gaia arbuiagarria da eta osziladore antiindar-getua dugu $-\epsilon \dot{x}$ gaiaren eraginez: energia galdu beharrean irabazi egiten da. Beraz, oszilazioaren anplitudea handituz joango da; baina unitatearen parekoa denean, $x^2 \dot{x}$ gai iraungikorra ezin da arbuiatu eta energia galarazten du. Ez da harritzekoa, hortaz, ϵ parametroaren eremu zabal batean halako oreka dinamikoa ezartzea, anplitudea (aldakorra izanik ere) batez beste konstantea delarik. Baina nola egiazta dezakegu intuizio hau? Ikus dezagun perturbazio-teoriak dioskuna. Hasteko $\epsilon = 0$ kasuan $\ddot{x} + x = 0$ osziladore harmonikoa dugu eta soluzioa $x = A \cos(t + \varphi)$ eran idatz daiteke.

Hurrengo hurbilketaren egitura honelakoa izango da:

$$x(t) = A \cos(t + \varphi) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2). \quad (7.36)$$

7.12 ARIKETA Egiaztatu hurbilketa hau van der Pol-en ekuazioan ordezkatzuz gero, ϵ -en lehen ordena hauxe dela:

$$\epsilon \left[\ddot{x}_1 + x_1 = \frac{A^3}{4} \sin 3(t + \varphi) + \left(\frac{A^3}{4} - A \right) \sin(t + \varphi) \right]. \quad (7.37)$$



7.1 IRUDIA Mendetako gaiak dauzkan hurbilketa.

Berriro ere osziladore harmonikoa dugu, baina orain gai inhomogeneo batekin, hau da, kanpoindar batekin. Hau ez da oso zaila eta dagokion soluzioa erraz aurkitzen da (ikus B.3.3 atala); baina ez da kalkulatu behar azken gai inhomogeneoa, $(A - A^3/4) \sin(t + \varphi)$, ekuazio homogeneoaren (osziladore askearen) $k = \pm i$ berretzaile karakteristikoei (mekanikaren hizkeraz, $\omega = 1$ maiztasun askeari) dagokiela ikusteko. **Erresonantzia** dago, beraz, eta, 3. gaian ikusi genuenez, honen ondorioz dagokion soluzioa $\epsilon t [\alpha \cos(t + \varphi) + \beta \sin(t + \varphi)]$ modukoa izango da α eta β konstante egokiekin. Hor gai trigonometrikoak bornaturik daude, baina ez da gauza bera gertatzen ϵt gaiarekin, azken hau astiro baina muga gabe handituz baitoa. Horrelako oztopoa lehenengoz mekanika zerutiarrean agertu zenez, **mendetako gaia** dela esaten da eta, hemen bezala, perturbazio-metodo bakunak erabiltzean errazen agertzen diren problemetarikoa dugu. Izan ere, ϵx_1 gaia zero ordenako gaiari egindako zuzenketa txikia dela da perturbazio-garapenaren oinarritzko hipotesia; baina zero ordenakoa bornatua da eta aipaturiko hipotesia zuzena izango da ϵt txikia den bitartean bakarrik (hau da, nahiko handia den $t \lesssim 1/\epsilon$ denbora-tartean). Geroago, hipotesia betetzen ez denez, hurbilketa ez da egokia izango. Hau era grafikoan egiaztatzeko, 7.1 irudian $\epsilon = 0.1$ balioari dagokion zenbakizko soluzioa lerro jarraituan marraztu da, mendetako gaiak dauzkan hurbilketaren auresana lerro diskretuan adierazten delarik. Hasieran bi soluzioak ia berdinak diren arren, zenbakizko soluzioak oszilazio periodikoak egitera jotzen duen bitartean, hurbilketaren anplitudea mugarik gabe handitzen da.

7.3 adibidean ikusi genuenez, kasu bakoitzean hurbilketa bat baino gehiago egon daitekeela gogoratu behar da horrelako arazoak konpontzeko. Lehenago zero ordenan $\ddot{x} + x = 0$ ekuazioaren $A \cos(t + \varphi)$ soluzio zehatza erabili dugu, baina ezerk ez du debekatzen $x_0(t) = A \cos(t + \varphi) + \epsilon f(t)$ moduko soluzioa aukeratzea zeren, zero ordenan aurrekoaren berdina denez, zero ordenako ekuazioaren soluzioa izango baita ϵ ordenako gaiak arbuiatu ondoren. Zero ordenako infinitu soluzioaren artean, hurrengo hurbilketako gai erresonanteak desagerrarazteko propietatea duena aukeratzea komeni da, horrela mendetako gaiak saihestuko dira eta. Gure kasuan gai erresonanteak ϵt balioaren proportzionalak direnez, badirudi zero ordenako gaiak aldatzean ϵ -en menpeko gaiak baino hobeak ϵt biderkaduraren menpekoak izango lirakekeela. Izan ere, nahikoa izango da A anplitudea eta φ fasea konstanteak izan beharreak ϵt -ren funtzioak direla suposatzea:

$$A(\epsilon t) = A(0) + \epsilon t A'(0) + O(\epsilon^2), \quad \varphi(\epsilon t) = \varphi(0) + \epsilon t \varphi'(0) + O(\epsilon^2). \quad (7.38)$$

Hau egiten denean A eta φ direlakoak ϵt **denbora geldoaren** menpekoak direla esaten da, eta horrexegatik metodo honi **bi denborako metodoa** edo **eskala anitzeko metodoa** deritzo. Denbora bat osziladore askearen periodoarekin loturik dago, eta besteak mendetako gaien handitzea neurtzen du.

7.13 ARIKETA Egiaztatu

$$\begin{aligned} x(t) &= A(\epsilon t) \cos[t + \varphi(\epsilon t)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \\ &= [A(0) + \epsilon t A'(0)] \cos[t + \varphi(0) + \epsilon t \varphi'(0)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (7.39)$$

hurbilketa van der Pol-en ekuazioan ordezkatzuz gero, ϵ -ekiko lehen ordenako koefizientea hauxe dela:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1 &= \frac{A(0)^3}{4} \sin 3[t + \varphi(0)] + \left[2A'(0) + \frac{A(0)^3}{4} - A(0) \right] \sin[t + \varphi(0)] \\ &\quad + 2A(0)\varphi'(0) \cos[t + \varphi(0)]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Azken gai erresonantea kentzeko nahikoa da $\varphi(\epsilon t) = \varphi_0 + O(\epsilon^2)$ aukeratzea, eta lehenengoa saihesteko beraren koefizientea nulua izan behar da:

$$2A'(0) + \frac{A(0)^3}{4} - A(0) = 0. \quad (7.41)$$

Baina ez dugu pentsatu behar hemendik $A'(0)$ askatu ondoren (7.39) adierazpeneko azken gaietan ordezkatzeko nahikoa denik, hori egiten badugu saiatzen dugun soluzioak berak baitauka mendentako gai bat: lehenengoa, hain zuzen. Behar duguna

$$x(t) = A(\epsilon t) \cos(t + \varphi_0) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) \quad (7.42)$$

moduko adierazpen bat da, (7.41) betetzeaz gain t -rekin handitzen ez den $A(\epsilon t)$ anplitudea duena. Kasu honetan hauxe lortzeko, (7.41) baldintza $\epsilon t = 0$ balioan eta beste puntu guztietan ere betetzeko eskatzea nahikoa da. Beraz, anplitudeak ondoko ekuazio diferentziala bete dezala eskatzen dugu:

$$2A'(\epsilon t) + \frac{A(\epsilon t)^3}{4} - A(\epsilon t) = 0. \quad (7.43)$$

7.14 ARIKETA Egiaztatu (7.43) ekuazioaren soluzioa

$$A(\epsilon t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \quad (7.44)$$

dela, $A_0 \equiv A(0)$ definizioarekin. Ondorioztatu van der Pol-en ekuazioaren soluzioa

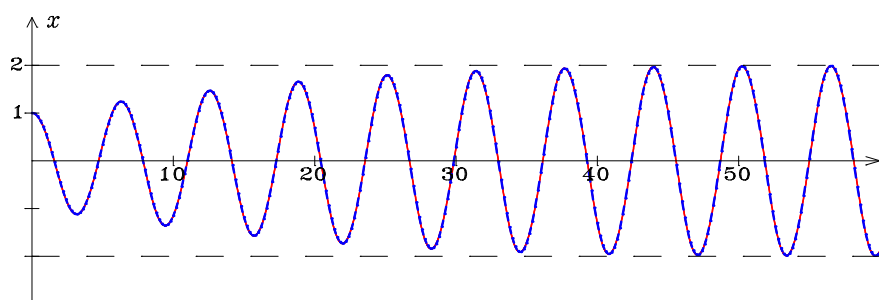
$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \cos(t + \varphi_0) - \frac{\epsilon}{32} A_0^3 \sin 3(t + \varphi_0) + O(\epsilon^2) \quad (7.45)$$

moduan idatz daitekeela edo, hurbilketa-maila berean, ondoko eran:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A_0^2} - 1\right) e^{-\epsilon t}}} \left[\cos(t + \varphi_0) - \frac{\epsilon}{32} A_0^2 \sin 3(t + \varphi_0) \right] + O(\epsilon^2). \quad (7.46)$$

Egiaztatu, hastapen-baldintzak direnak direla, soluzio hurbildu guztiak (bat izan ezik: zein?) orbita periodiko bakartu baterantz doazela. Aipaturiko orbita **muga-zikloa** deitzen da, 8. gaietan ikusiko dugun bezala.

7.2 irudian ikusten denez, $\epsilon = 0.1$ denean hurbilketak oso ondo deskribatzen du van der Pol-en ekuazioaren portaera eta honen muga-zikloa hurbilketa onarekin kalkulatzeko ahalbidetzen du. Irudiko bereizmen finituarekin zenbakizko integrazioak eta (7.46) hurbilketak emandako grafikoak ia bereiztezinak dira. Halaber, (7.46) soluzioan t denbora lasterra soluzioaren



7.2 IRUDIA Mendetako gairik gabeko hurbilketa.

zati periodikoan agertzen da, eta ϵt denbora geldoa astiro aldatzen den anplitudean —eta, beraz, muga-ziklorako hurbiltzeari lotuta dago—.

Ez da pentsatu behar oszilazioaren anplitudea denbora geldoaren menpeko funtzioa egitearekin beti nahikoa izaten denik. Oro har, hipotesi berbera egin behar da beste integrazio-konstantearekin, hasierako φ fasearekin hain zuzen. Gainera, batzuetan denbora geldo gehiago behar dira: $\epsilon^2 t$ edo $(\epsilon \ln \epsilon) t$, adibidez.

Gai iraungikorrik gabeko osziladoreen kasuetan (7.9 ariketan aztertzen dugu bat) aldeaz aurretik dakigu soluzioa periodikoa izango dela eta, ondorioz, maiztasuna —eta, beraz, periodoa— ϵ -en menpekoa delako hipotesia nahikoa izango da. Hortaz, ondoko egiturako zerbait saiatuko dugu:

$$x = A \cos [\omega(\epsilon)t + \varphi] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2), \quad (7.47)$$

$\omega(\epsilon) = 1 + \epsilon \omega_1 + \dots$ delarik. Anplitudea konstantea izanik hasierako fasea denbora geldoaren menpekoa delako hipotesiaren baliokidea da hau:

$$x = A \cos [t + \phi(\epsilon t)] + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2), \quad (7.48)$$

$\phi(\epsilon t) = \varphi + \epsilon t \omega_1 + \dots$ definizioarekin. Hipotesi sinplifikatu hau egitean, **Poincaré eta Lindstedt-en** metodoa erabiltzen ari gara kasu berezi batean.

7.4.3 WKB metodoa

Kasu gehienetan metodo hurbilduetara jo behar da $V(x)$ potentzialean higitzen den m masako partikularen Schrödinger-en ekuazioa ebazteko:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi = E \psi. \quad (7.49)$$

Hurbilketa erdiklasikoan \hbar txikia dela suposatzen da eta Wentzel, Kramers eta Brillouin-en metodoa erabil daiteke. Izatez, ϵ parametro txikia duen

$$\epsilon^2 y'' + f(x) y = 0 \quad (7.50)$$

moduko edozein ekuaziorekin erabil daiteke aipaturiko metodoa. Soluzioaren propietateak nolabait ulertzeko, $a \equiv \sqrt{-f(x)}$ konstantea deneko kasu bereziaz balia gaitzke, zeren orduan soluzioa esponentzial (erreal edo konplexu) biren konbinazio lineala baita:

$$y = A e^{ax/\epsilon} + B e^{-ax/\epsilon}. \quad (7.51)$$

Ageri denez, soluzio guztiak, nulua izan ezik, dibergenteak dira $\varepsilon \rightarrow 0$ limitean. Hau gertatzen da 7.50 ekuazioa singularra izanik, aipaturiko limitean ekuazioaren ordena zerora laburtzen delako. (Beste ekuazio singular bat ikusi genuen 2.35 problematan, baina han, teoria klasiko batean, limite egokian erregularra zen soluzioa interesatzen zitzaigun; baina mekanika kuantikoan $\hbar \rightarrow 0$ limitea singularra da.) Lehenago erabili dugun kasu bereziko soluzioaren egitura oinarriturik, badirudi komenigarria izan daitekeela menpeko aldagaia ondoko erako transformazio esponenzial baten bidez aldatzea:

$$y = \exp \left[\frac{u(x)}{\varepsilon} \right] = \exp \left[\frac{u_0 + \varepsilon u_1 + \dots}{\varepsilon} \right]. \quad (7.52)$$

WKB hurbilketan $u(x)$ funtzioaren garapeneko gai guztiak arbuizten dira, erraz kalkulatu diren u_0 eta u_1 izan ezik:

$$y \approx e^{\frac{1}{\varepsilon} u_0 + u_1}, \quad (7.53)$$

$$y' \approx \left[\frac{1}{\varepsilon} u_0' + u_1' \right] y, \quad (7.54)$$

$$y'' \approx \left[\frac{1}{\varepsilon^2} u_0'^2 + \frac{1}{\varepsilon} (u_0'' + 2u_0' u_1') + u_1'' + u_1'^2 \right] y. \quad (7.55)$$

7.15 ARIKETA Froga ezazu (7.52) funtzioa (7.50) ekuazioaren soluzioa izateko ondoko baldintzak bete behar direla:

$$u_0(x) = A \pm \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt, \quad u_1(x) = B - \frac{1}{4} \ln [f(x)]. \quad (7.56)$$

Ondorioz, honelaxe idazten da soluzio hurbildua hautazko bi konstante (erreal edo konplexu) erabiliz:

$$y = [f(x)]^{-1/4} \left\{ C_+ \exp \left[\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt \right] + C_- \exp \left[-\frac{1}{\varepsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{-f(t)} dt \right] \right\}. \quad (7.57)$$

Ez dugu hemen zehazki aztertuko WKB hurbilketaren baliotasunaren problema zaila, baina agerian da hurbilketa hau ezin erabil daitekeela $f(x) = 0$ baldintza betetzen den puntuen inguruan. Zoritzarrez, horrelako puntuak garrantzi handikoak izan daitezke. Potentzial batean higitzen den partikularen kasuan, $E = V(x)$ baldintzak definituriko **atzerapen-puntuak** dira horiek. Dago-kion problema klasikoan, $f(x) \equiv 2m [E - V(x)] \geq 0$ baldintza bete behar denez, puntu horiek higidura mugatzen dute. Baina (7.49) problema kuantikoan uhin-funtzioaren portaera desberdinen arteko mugak dira soilik: $f(x) > 0$ bada soluzioa oszilakorra da eta $f(x) < 0$ denean esponenziala, soluzioa potentzial-langan sartzean motelduz baitoa. Bi eremu horietako soluzioak elkartzeko problema garrantzitsua askatu behar da, beraz, eta hori egiteko, mekanika kuantikoari buruzko testuetan eta [26] liburuan azaltzen diren **lotura-formulak** erabil daitezke.

7.16 ARIKETA Askatu WKB metodoaren bitartez $\varepsilon^2 y'' + xy = 0$ ekuazioa.

7.5 Zenbakizko metodoak

Egungo egunean zenbakizko metodoak dira ekuazio diferentzialak ebazteko gehienetan erabiltzen direnak, dudarik gabe. Izan ere, oso hedatuak dira zenbakizko integrazioa egiteko errutina

eraginkorrak, bai zenbakizko liburutegietan, bai kalkulu matematikorako sistema osatuetan, eta bai zenbakizko simulaziorako programa berezitetan ere (ikus 319. orriko bibliografia). Ekuazio diferentzialak integartzeko errutinak nola idatz daitezkeen nolabait ulertzeko asmoz, oinarriko metodoak azaletik aztertuko ditugu. Hala ere, ez dugu gai honetan aztertutako metodoak erabiltzeko gomendatzen, hobeto ulertzeko saio moduan ez bada behintzat. *Benetako lana egiteko, errutina aurreratuak edo 319. orrian aipaturiko programak edo sistemak (edo antzekoren bat) erabili beharko lirateke.* Pertsona batzuen (eta ikertzaile serio batzuen) Runge eta Kutta-ren metodoa zuzenean programatzeko ahaleginak barregarriak dira, eragiketa matematiko segida luze bat egiteko, kalkulagailua erabili beharrean, abako bat eraikitzen hasiko litzatekeen pertsona bat ikustea bezain penagarriak. Zenbakizko metodo orokorrei buruz gehiago ikasteko, Stoer eta Bulirsch-en [35] testu klasikoa gomendatzen dugu, eta ekuazio diferentzialen ebazpenari buruz, Hairer, Norsett eta Wanner-en [33] liburua. FORTRAN eta C lengoaienez erabiltzeko prest dauden zenbakizko metodoak azken erreferentzian aurki daitezke, baita [34] eta [32] direlakoetan ere.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (7.58)$$

hastapen-baldintzen problema bat ebazteko, zenbakizko metodoek diskretizazioa erabiltzen dute: puntu guztietan $y(x)$ soluzioaren hurbilketa bat lortzen saiatu beharrean, x_n ($n = 1, 2, \dots$) puntu batzuk aukeratzen dira eta dagozkien soluzioaren $y_n = y(x_n)$ balioen hurbilketak kalkulatu dira. Soluzioa tarteko puntuetan ezagutu behar bada, (metodo aurreratu batzuek automatikoki ematen duten) interpolazioa erabiltzen da. Metodoak urratsez urrats erabiltzen dira: hastapen-baldintzak emandako (x_0, y_0) abiapuntutik hurrengo puntua, (x_1, y_1) , kalkulatu da, eta, oro har, (x_n, y_n) puntua lortu ondoren (x_{n+1}, y_{n+1}) delakoa. Bakoitzean aurreratzen den distantzia, $h \equiv x_{n+1} - x_n$, metodoaren **integrazio-urratsa** deritzo eta oinarriko metodoetan konstantea izaten da, baina metodo aurreratuetan era automatikoan aldatzen da, nahi den errore-maila kalkuluesfortzu txikienarekin lortzeko.

Azpimarratu behar da $f(x, y) = F(x)$ denean zenbakizko koadraturaren problema dugula:

$$y' = F(x), \quad y(x_0) = y_0 \quad \iff \quad y(x) = \int_{x_0}^x F(u) du. \quad (7.59)$$

Honelako problemak, beraz, gai honetan aztertutako metodoen bidez ere ebatz daitezke. Badaude, noski, horrelako kasu murriztuagoetan erabiltzeko metodo bereziak, baina ez dira hemen aipatuko.

7.5.1 Euler-en metodoa

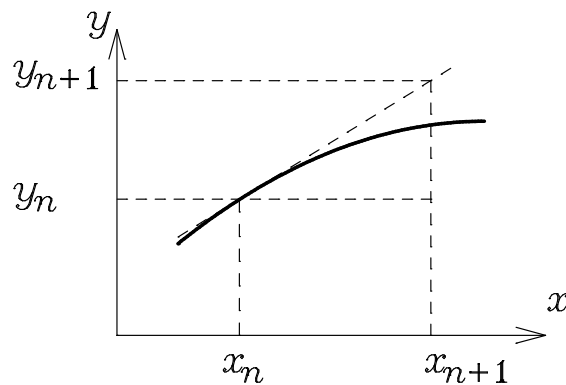
Poligonoaren metodoa ere deitzen den hau metodorik bakunena da eta

$$f(x_n, y_n) = y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O(h) \quad (7.60)$$

deribatuaren lehen hurbilketa baliatzen da hauxe lortzeko:

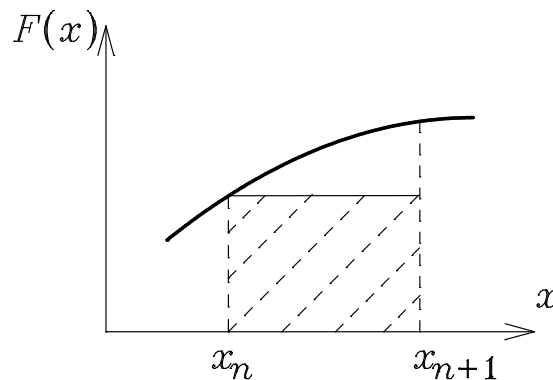
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) + O(h^2). \quad (7.61)$$

Metodo honetan (x_n, y_n) puntutik igarotzen den soluzioarekiko tangentearekin ordezkatzeko da x_n eta x_{n+1} puntuen arteko soluzioa, 7.3 irudian erakusten den bezala.



7.3 IRUDIA Euler-en metodoa.

Halaber, metodo hau ordena linealean moztutako Taylor-en serie-garapenaren erabilera dela pentsa dezakegu. Hurbilketan egindako errorea —**hurbilketa-errorea**, **mozte-errorea** edo **diskretizazio-errorea** deitzen dena— h -rekiko bigarren ordenakoa da, garapenean lehen ordenako gaiak baino ez baitira gordetzen. Metodoa **lehen ordenakoa** dela esaten da. Bestalde, orain arte aztertu dugun errorea urrats bakar batean egiten dena da: **errore lokala**, beraz. Urratsez urrats errorea metatzen denez eta Δx distantzia jakin bat egiteko egin behar diren urratsen kopurua $1/h$ -rekin handitzen denez, **errore globala** $h^2 \times 1/h = h$ ordenakoa izango da. Urrats txikiago bat aukeratzean mozte-errorea txikitu egiten da, baina, puntu gehiago aurkitu behar direnez, kalkulu-esfortzu handiagoa behar da. Gainera, urratsa ezin izan daiteke nahi bezain txikia, zeren eta, (erabilitako metodo eta sistemaren menpeko) balio bat baino txikiagoa bada, ordenagailuek erabilitako digituen kopuru finituak sortzen dituzten **biribiltze-erroreak** handitu egiten baitira. (Aipaturiko erroreak dira, besteak beste, zenbakizko deribazioari eta kenketari dagozkien zailtasunen zergatiak.)



7.4 IRUDIA Euler-en metodoa zenbakizko koadraturan.

Zenbakizko koadraturaren kasuan, metodo honetan $f(x, y) = F(x)$ funtzioak definituriko kurbaren azpiko azalera 7.4 irudian erakusten den laukizuzenarenarekin ordezkutzen da:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx h F(x_n). \quad (7.62)$$

7.5.3 Erdiko puntuaren metodoa

Metodo hau aurrekoaren aldaera dugu eta **Euler-en metodo aldatua** edo **poligonoaren metodo hobetua** ere deitzen da. Urrats osoa egin ondoren bi muturretako malden batez bestekoa erabili beharrean,

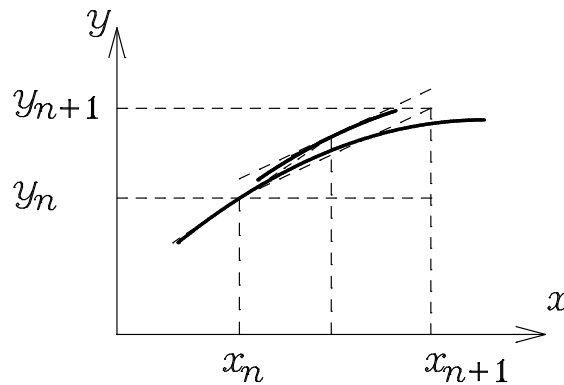
$$y_{n+1/2}^* = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n) \quad (7.67)$$

urrats erdia eginik bertako tangentearen malda erabiltzen da soluzioa (x_n, y_n) puntutik pasatzen den segmentuarekin hurbiltzeko:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1/2}^*), \quad (7.68)$$

hau da,

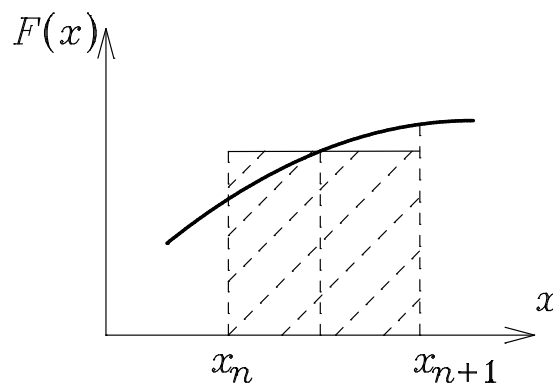
$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right) + O(h^3). \quad (7.69)$$



7.7 IRUDIA Erdiko puntuaren metodoa.

Zenbakizko koadraturaren kasuan, 7.8 irudian ikusten den metodoa lortzen da:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx hF\left(x_n + \frac{h}{2}\right). \quad (7.70)$$



7.8 IRUDIA Erdiko puntuaren metodoa zenbakizko koadraturan.

7.6 Runge eta Kutta-ren metodoak

Ordena guztietako metodoen familia handi honetan lehenago ikusitako bigarren ordenakoak daude, beste askoren artean. Metodo hauen ideia orokorra hauxe da: muturretako eta tarteko puntu batzuetan maldak kalkulatu ondoren, Euler-en urrats bat egiten da batez besteko malda egoki batekin. Adibidez, bigarren ordenako familia orokorrean bi malda kalkulatu dira,

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (7.71)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (7.72)$$

eta honela egiten da urrats bakoitza:

$$y_{n+1} = y_n + h[(1-a)k_1 + ak_2] + O(h^3). \quad (7.73)$$

7.18 ARIKETA Egiaztatu azken metodo hauek bigarren ordenakoak direla.

Familia honetan $a = 1/2$ denean Heun-en metodoa berreskuratzen da, $a = 1$ balioarekin erdiko puntuarena, eta $a = 2/3$ kasua arbuiatu diren h^3 ordenako gaien koefizienterako borne minimoari dagokio.

Runge⁶ eta Kutta-ren⁷ metodo klasikoa laugarren ordenakoa da.

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad (7.74)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (7.75)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (7.76)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \quad (7.77)$$

maldak kalkulatu ondoren ondoko hurbilketa erabiltzen da (ikus B.5.6 atala):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5). \quad (7.78)$$

Koadraturaren kasuan, **Simpson-en parabolaren formula**⁸ klasikoa berreskuratzen da:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} F(x) dx = y_{n+1} - y_n \approx \frac{1}{3} \frac{h}{2} \left[F(x_n) + 4F\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + F(x_n + h) \right]. \quad (7.79)$$



⁶ **Carle David Tolmé Runge** (1856-08-30, Bremen, Alemania; 1927-01-03, Göttingen, Alemania). Hurbilketen teorian, geometria diferentzialean, ekuazio diofantikoetan eta matematikaren beste arlo batzuetan egindako ekarpenez gain, espektroskopian lan esperimental ugari egin zuen, batez ere Zeeman efektuari buruz.

⁷ **Martin Wilhelm Kutta** (1867-11-03, Pitschen, Silesia, gaur egunean Poloniako Byczyna; 1944-12-25, Fürstentfeldbruck, Alemania). Runge-k aditzera eman zuen ekuazio diferentzialak ebazteko metodo honez gain, ekarpen interesgarriak egin zituen aerodinamikan.



⁸ **Thomas Simpson** (1710-08-20, Market Bosworth, Ingalaterra; 1761-05-04, Market Bosworth). Moivre-ren lanetan oinarriturik probabilitateen teoria ikertu zuen eta 1740an *The Nature and Laws of Chance* liburua argitaratu. Hala ere, ezagunagoak dira zenbakizko interpolazioa eta koadratura egiteko bere formulak. 1750ean *The Doctrine and Application of Fluxions* delakoa argitaratu zuen.

Metodo hau oso egonkorra eta fidagarria da, baita oso geldoa ere. Ez da arraroa ikerkuntzalanetan ere aipatua izatea, baina gaur egunean ez dago oraindik erabiltzeko inolako aitzakiarik, askoz ere metodo hobeak baitaude. Adibidez, Runge eta Kutta-ren familia berean bosgarren eta zortzigarren ordenako Dormand eta Prince-ren metodo sofistikatuak ditugu: urratsaren kontrol automatikoa edukitzeaz gain, irteera jarraitua ematen dute, zeren esfortzu gehigarri txikiaren bidez urrats bakoitzeko muturren artean soluzioa interpolatzen duen polinomio baten koefizienteak ematen baitituzte. (Azterketa ona eta erabiltzeko prest dauden algoritmoak [33] liburuan aurki daitezke.)

7.7 Urrats anitzeko metodoak

Orain arte aztertu ditugun metodo guztiak urrats bakarrekoak izan dira: urrats bakoitza beste guztien independentea izan da eta dagozkion kalkuluak egiteko urrats bereko informazioa soilik erabili dugu. Honek esan nahi du aipaturiko metodoetan ez dela soluzioari buruz aurreko urratsetan lortu den informazioa erabiltzen; baina, jarraian ikusiko dugunez, informazio horri esker kalkulu-esfortzua aurrera daiteke.

Eman dezagun urrats guztiak luzera berekoak direla ($x_{n\pm 1} = x_n \pm h$) eta, $y'_n = f(x_n, y_n)$ notazio laburra erabiliz, saia gaitezen x_n puntuaren inguruan bigarren ordenako ondoko erako hurbilketa aurkitzen:

$$y(x) = y_n + a(x - x_n) + b(x - x_n)^2 + O[(x - x_n)^3]. \quad (7.80)$$

Errorearen magnitudea esplizituki idazten ez badugu, ondoko baldintzak ezarri behar dira:

$$y'_n = a, \quad (7.81)$$

$$y'_{n-1} = a - 2bh, \quad (7.82)$$

$$y_{n+1} = y_n + ah + bh^2. \quad (7.83)$$

Lehen ekuazioa $-3h/2$ -rekin eta bigarrena $h/2$ -rekin biderkatu ondoren lorturiko emaitzak eta hirugarren ekuazioa batuz hauxe dugu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1}) + O(h^3). \quad (7.84)$$

7.19 ARIKETA Froga ezazu hauxe ere betetzen dela:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(y'_n + y'_{n+1}) + O(h^3). \quad (7.85)$$

Bigarren ordenako urrats anitzeko metodo bat eraiki daiteke emaitza hauekin. Izan ere, metodo **aurre-sale-zuzentzaileen** adibide moduan erabiliko dugu. Mota honetako metodoetan honela kalkulatzen da urrats bakoitza:

1. Urrats aurre-salean hurrengo puntuaren lehen hurbilketa bat kalkulatzen da estrapolazio polinomikoen bidez:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1}). \quad (7.86)$$

2. Hurrengo puntuko deribatua kalkulatzen da:

$$y'_{n+1}^* = f(x_{n+1}, y_{n+1}^*). \quad (7.87)$$

3. Bigarren hurbilketa bat kalkulatzeko zuzentzaile polinomiko bat erabiltzen da:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (y'_n + y'_{n+1}^*). \quad (7.88)$$

4. Hurrengo puntuko deribatua kalkulatzen da:

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1}). \quad (7.89)$$

Metodo sofistikuagoetan, zuzentzaile desberdinak segidan erabil daitezke, edo zuzentzaile bakarra behin eta berriro. Aurrealeak eta zuzentzaileak deribatuen polinomioak badira, ikusi berria dugun adibidean bezala, **Adams-en metodoa**⁹ dela esaten da eta dagokion auresalea **Adams eta Bashforth-en metodoa**, eta zuzentzailea **Adams eta Moulton-en metodoa**.

Adams, Bashforth eta Moulton-en metodo klasikoa laugarren ordenakoa da eta hurrengo adierazpenez baliatzen da:

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{h}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}), \quad (7.90)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9y'_{n+1}^* + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2}). \quad (7.91)$$

Mota honetako metodoen abantailen artean, oro har, ordena bereko Runge eta Kutta-renak baino kalkulu gutxiago behar dutela aipatuko dugu. Adibidez, laugarren ordenako Runge eta Kutta-ren metodoan urrats bakoitzean lau deribatu kalkulatzen diren arren, dagokion Adams-enean bi besterik ez dira behar. Horrexegatik, metodo hauek arinagoak izaten dira. Beste abantaila bat hau da: y_{n+1} balio berriaren hurbilketa bat baino gehiago ematen dutenez, egiten den errorea baliozta daiteke neke handirik gabe aipaturiko hurbilketen diferentzia erabiliz. Metodo hauen bi desabantaila nagusiak elkarren loturik daude:

- Metodoa ezin abia daiteke berez, hastapen-baldintzek emandako informazioa ez baita nahikoa.
- Erroreen kontrolaren ondorioz urratsaren luzera aldatzen denean, hurrengo urratsean behar den informazioa ez da, oro har, ezaguna.

Oztopo hauek gaindi daitezke (hasteko urrats txikiko Runge eta Kutta-ren metodo bat erabiliz, urratsa birekin zatituz (edo biderkatuz) eta interpolazioa erabiliz...), baina metodo hauen programazioa Runge eta Kutta-renena baino korapilotsuagoa egiten dute. Bestalde, arinagoak izaten dira, baina ez Runge eta Kutta-renak bezain egonkorak. Izan ere, mota honetako oso metodo erabilgarri eta sofistikuak idatzi dira, baina badirudi apurka-apurka haien ordez ondoan aztertzen ditugun estrapolazio-metodoak gero eta gehiago erabiltzen direla.



⁹ **John Couch Adams** (1819-06-05, Laneast, Ingalaterra; 1892-01-21, Cambridge, Ingalaterra). Ilargiaren higidura arretaz aztertu zuen eta Laplace-ren deskripzioa hobetu. Baina bere izena ezagunagoa da Uranoren higiduraren irregularitasunak aztertzean Neptunoren aurkitzaileetarikoa izan zelako. Cambridge-ko behatokiak ez zuen kontuan hartu Neptunoren posizioari buruz 1845eko irailean eman zuen informazioa, eta geroago Urbain Le Verrier-ek egin zuen iragarpena lehenago argitaratu zen eta Galle-k erabili zuen 1846ko irailaren 23an Berlineko behatokian planeta berria aurkitzeko.

7.8 Estrapolazio-metodoak

Metodo hauek oso arinak eta doiak izaten dira (zentzu batean ordena infinitukoak dira), baina oso soluzio erregularrak behar dituzte eta, hortaz, Runge eta Kutta-renak baino gehiagotan huts egiten dute. Denetan ezagunenak **Gragg-en metodoa (erdiko puntuaren metodo aldatua** ere deitzen dena) erabiltzen du. Bertan, x eta $x + H$ puntuen arteko H distantzia (txikia zein handia) egiteko, hurrengo bitarteko balioak kalkulatzeko $h = H/n$ luzerako n urratsetan:

$$y_0 = y(x), \quad (7.92)$$

$$y_1 = y_0 + hf(x, y_0), \quad (7.93)$$

$$y_2 = y_0 + 2hf(x + h, y_1), \quad (7.94)$$

$$\vdots$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(x + kh, y_k), \quad (k = 1, \dots, n-1). \quad (7.95)$$

Gero, $y(x + H)$ balio berrirako hurbilketa hau da:

$$y(x + H, n) = \frac{1}{2} [y_n + y_{n-1} + hf(x + H, y_n)]. \quad (7.96)$$

Metodoa, berez, ordena txikikoa da, baina, Gragg-ek frogatu zuenez, mozte-errorearen adierazpenean bakarrik agertzen dira urratsaren luzeraren berretura bikoitiak:

$$y(x + H) - y(x + H, n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h^{2k}. \quad (7.97)$$

Gainera, errorearen berretura bakoitiak agertzen ez direnean, h -ren beste balio batzuekin hurbilketaren kalitatea erraz hobeto daiteke. Nahikoa da horretarako, testuinguru eta egileen arabera **limiterako hurbilketa atzeratua**, **Richardson-en**¹⁰ **estrapolazioa**, **estrapolazio arrazionala** edo **Neville-ren estrapolazioa** deitzen den ideia emankorraz baliatzea.

7.20 ARIKETA Froga ezazu errorea h^4 gaiarekin hasten dela $\frac{4}{3}y(x + H, n) - \frac{1}{3}y(x + H, n/2)$ hurbilketa erabiltzen bada.

Emaitza hau neke gabe hedatzen da hurbilketaren errorea nahi bezain txikia izan arte. Praktikan, $n = 2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, \dots$ (Bulirsch eta Stoer-en metodo ezagunean, adibidez) edo $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ aukeratzen dira. Mota honetako metodoen programaziorako [35], [33] eta [34] testuak gomendatzen dizkiogu irakurleari. (Azken bi liburuetan erabiltzeko prest dauden algoritmoak ematen dira.) Richardson-en estrapolazioa oso erabilgarria izaten da zenbakizko deribazioan eta zenbakizko koadratura egiteko Romberg-en metodoan.



¹⁰ **Lewis Fry Richardson** (1881-10-11, Newcastle upon Tyne, Ingalaterra; 1953-09-30, Kilmun, Eskozia). Fisikari, kimikari eta meteorologo honen lanen artean kalkuluari eta difusioaren teoriari buruz egindako ekarpenak daude. Gerraren zergatien azterketarako teknika matematikoak erabili zituen. Baina ezagunagoa da eguraldiaren iragarpenerako matematika —diferentzia finituetako metodoa, hain zuzen— lehenengoz erabili zuelako, 1922ko *Weather Prediction by Numerical Process* liburuan.

7.9 Metodo implizituak

Azter ditzagun

$$\dot{x} = -501x + 499y, \quad (7.98)$$

$$\dot{y} = 499x - 501y \quad (7.99)$$

sistema eta bere soluzio orokorra:

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-1000t}, \quad (7.100)$$

$$y = Ae^{-2t} - Be^{-1000t}. \quad (7.101)$$

Begi-bistan dago soluzioak $x = y = 0$ puntura jotzen duela $t \rightarrow \infty$ limitean, eta egiaztatu nahi dugu portaera asintotiko hau, sistema Euler-en metodoaren bidez aztertzean ere agertzen denetz.

7.21 ARIKETA Froga ezazu Euler-en metodoan lorturiko hurbilketak hauek direla:

$$x_n = A(1 - 2h)^n + B(1 - 1000h)^n, \quad (7.102)$$

$$y_n = A(1 - 2h)^n - B(1 - 1000h)^n. \quad (7.103)$$

Ondorioz, zenbakizko metodoak soluzio guztiak jatorrira doazela lortuko du baldin eta soilik baldin $|1 - 2h| < 1$ eta $|1 - 1000h| < 1$ baldintzak betetzen badira. Hortaz, e^{-1000t} gaiak soluzioan duen ekarpena arras txikia den arren, bertan agertze hutsak integrazio-urratsari muga estua ezartzen dio ($h < 0.002$). Azken baldintza hau betetzen ez bada, bestela arbuigarria izan beharko litzatekeen gai horrek zenbakizko soluzioa menperatuko du eta azken hau zerora barik infinitura joango da. Horrelako portaerak (eta lehenago aipatu diren metodorik sofistikatuenekin ere ezin ebatzizkoak diren ekuazio **zurrunetan** agertzen direnak ere) **metodo implizituen** bidez saihestu daitezke. Hemen metodo implizitu errazena ikusiko dugu soilik, baina praktikan erabil daitezkeenak [33], [34] eta [32] liburuetan agertzen dira.

Euler-en metodo implizituan, tarte bakoitzean hasierako muturreko malda erabili beharrean, eskuin muturrekoaz baliatzen gara:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_{n+1}) + O(h^2). \quad (7.104)$$

Ekuazio honetatik y_{n+1} balioa askatu behar da. Badaude kasu orokorrean haxe egiteko zenbakizko iterazio-metodoak, baina oraintxe ez dugu haien beharrik.

7.22 ARIKETA Froga ezazu Euler-en metodo implizituak emandako hurbilketak ondokoak direla:

$$x_n = A(1 + 2h)^{-n} + B(1 + 1000h)^{-n}, \quad (7.105)$$

$$y_n = A(1 + 2h)^{-n} - B(1 + 1000h)^{-n}. \quad (7.106)$$

Ikusten denez, $h > 0$ guztietarako soluzioa zerora joango dela iragartzen du metodo implizituak.

Amaitu baino lehenago, zenbakizko kalkulua, beste hainbat diziplina bezala, zientzia eta artea dela esan nahi dugu. Esperientzia handia behar da ondo menperatzeko, tranpa eta iruzurrez beterik dago eta.

7.23 ARIKETA Zure ustez, zer gertatuko litzateke $y = e^{-100x}$ soluzioa duen

$$y'' = 10000y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -100 \quad (7.107)$$

problema zenbakizko metodo baten bidez askatzean?

7.10 Problemak

7.1 Erabili l'Hôpital-en¹¹ araua hauxe frogatzeko: e^{-x} funtzioa x -ren edozein berretura negatibo baino arinago txikiagotzen da, hau da, n nahi bezain handia izanik ere, $e^{-x} = O(x^{-n})$ dugu $x \rightarrow \infty$ limitean.

7.2 Froga ezazu $x \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$) limitean logaritmoa x -ren edozein berretura negatibo (positibo) baino astiroago jotzen duela infinitura, hau da, ϵ nahi bezain txikia izanik ere $\ln x = O(x^{-\epsilon})$ ($\ln x = O(x^\epsilon)$) dugula.

7.3 Aurkitu α -ren zein baliotarako betetzen den $f = O(x^\alpha)$ ($x \rightarrow 0$) hurrengo kasuotan: (a) $f = (1 - e^x)^{-2}$, (b) $f = \ln(1 - x)$, eta (c) $f = x \ln x$.

7.4 Riccati-ren ekuazioa. 3.27 probleman ikusi genuenez, $y' = x^2 + y^2$ Riccati-ren ekuazioa $u'' + x^2u = 0$ ekuazio lineal homogeneoaren baliokidea da, $y = -u'/u$ izanik. Kalkulatu $y(0) = 1$ baldintzari dagokion azken ekuazioaren soluzio hurbildua eta egiaztatu 7.4 ariketaren emaitza berreskuratzen dela.

7.5 Aurkitu

$$y' = \sin x + y^2, \quad y(0) = 0$$

problemaaren soluzio hurbildua berretura-serie baten bidez eta Picard-en metodoaz baliatuz. Konparatu emaitzak.

7.6 Erabili Picard-en metodoa

$$y' = 1 + x^2 - y^2, \quad y(0) = 0$$

problemaaren bi hurbilketa-segidak lortzeko: lehenengoa $y^{[0]} = 0$ funtziotik hasita eta bigarrena $y^{[0]}(x) = -x$ erabiliz. Konparatu bi kasuetan lorturiko hurbilketak.

7.7 1671ko *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* idazlanean, Newton-ek

$$y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy, \quad y(0) = 0$$

problemaaren soluzioa

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$$

dela frogatu zuen. Lortu emaitza hau bi metodo desberdinen bidez.

7.8 Osziladore indargetua. Ebatzi

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = A_0$$

problema (a) soluzio analitikoa aurkituz, (b) perturbazio erregularraren bidez, eta (c) bi denborako metodoaren bidez. Konparatu eta azaldu emaitzak.



¹¹ **Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpital** (1661, Paris; 1704-02-02, Paris). Johann Bernoulli, Jacob Bernoulli eta Leibniz-en dizipulu honek kalkuluari buruzko lehen testua idatzi zuen 1692 urtean: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Bertan aurki daiteke l'Hôpital-en arau ospetsua. Brakistokronoaren problema ebatzi zuen, Newton, Leibniz eta Jacob Bernoulli-k gauza bera egin zutenean.

7.9 Osziladore quasiharmonikoa. Biz ϵ parametro txikia daukan

$$\ddot{x} + \omega^2 (x + \epsilon x^3) = 0$$

ekuazioa. ω konstantea osziladorearen maiztasun naturala —hau da, perturbazio-gairik ez da goenean duena— da. Erabili parametro txikiaren metodoa problema ebazten saiatzeko. Agertzen al da mendetako gairik? Ordezkatu lehen ordenako perturbazio-soluzioa energia mekanikoaren adierazpenean eta aztertu azken honen portaera. Erabili Poincaré eta Lindstedt-en metodoa soluzio hurbildua aurkitzeko. Bestelako zer metodo erabil liteke periodorako hurbilketa kalkulatzeko?

7.10 Ebatzi $\epsilon^2 y'' = (1 + x^2)^2 y$ WKB metodoaren bidez.

7.11 Merkurioaren perihelioaren prezesioa. Kepler-en¹² problema erlatibitate orokorrean aztertzen denean, orbitaren ekuazioa honela idatz daiteke koordenatu polarretan:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \epsilon p u^2,$$

$u = 1/r$ izanik. $\epsilon = 0$ denean (2.124) ekuazioa berreskuratzen dugu. Bestalde, Eguzkiaren inguruko Merkurioaren orbita ekuazio honek $\epsilon = 3MG/pc^2 \approx 8 \times 10^{-8}$ balioarekin emandakoa da. Erabili lehen ordenako perturbazio-teoria orbita kalkulatzeko, mendetako gairik gabe. Ondoz ondoko perihelio biren arteko angelua —hau da, u -ren ondoz ondoko maximo biren arteko angelua— kalkulatu eta egiaztatu ez dela 2π balioaren berdina: perihelioa prezesatzen ari da, beraz. Merkurioak mende batean Eguzkiaren inguruko 415 bira egiten dituela erabiliz, frogatu erlatibitate orokorraren arabera Merkurioaren perihelioaren prezesioa denbora-tarte berdinean $43.03''$ balioa dela. (Emitza hau $43.11 \pm 0.45''$ mendeko balio neurtuarekin bat dator.)

7.12 Ebatzi

$$\ddot{x} + \epsilon \dot{x}^3 + x = 0$$

perturbazioen bidez eta erabili emitza oreka-puntuaren egonkortasuna eztabaidatzeko, ϵ balio txiki positibo eta negatiboetarako.

Zenbakizko problemak¹³

7.13 Marraztu soluzioen (x, y) espazioa, 2.6 problemako $(1 - x^2) y' = 1 - y^2$ ekuazioaren kasuan.

7.14 Aztertu 7.7 problemako Newton-en ekuazioa: $y' = 1 - 3x + y + x^2 + xy$. Nola aukeratu behar da $y(0) = y_0$ balioa $x \rightarrow \infty$ limitean soluzioa $\pm\infty$ -ra joateko?



¹² **Johannes Kepler** (1571-12-27, Weil der Stadt, Erromatar Inperio Saindua; 1630-11-15, Regensburg, gaur egunean Alemania). Bere maisu Maestlin-ek irakatsi zion Koperniko-ren astronomia heliozentrikoa, poliedro erregularren bidez azaltzen saiatu zen. Tycho Brahe-ren laguntzailea izan zen astronomo horren bizitzaren azken urtean eta beraren behaketek baliatu zen Eguzkiaren inguruko planeten higadura deskribatzen duten bere lege famatuak ezartzeko. Logaritmoak eta optika landu zituen.

Azken jakintza-arlo honetan ikusmena begiak argi-izpiak hartzearen ondorioa dela frogatu zuen, baita teleskopioa hobetu ere. Gaur egunean bere izenaz ezagutzen dugun 1604ko supernobari buruz idatzi zuen.

¹³Gai honetan aztertutako zenbakizko metodoen bat erabili behar da gainerako problemak ebazteko. Agertzen diren bigarren ordenako ekuazioak autonomoak dira eta, beraz, 3.4.2 ataleko metodoaz baliatu daiteke lehen ordenako ekuazio baliokidea lortzeko. Halaber, bi ekuazioz osaturiko sistemak autonomoak izango dira eta 4.1.1 atalean ikusitako fase-ibilbideen ekuazioa baino ez da ebatzi behar. Hurrengo problema gehien zenbakizko soluzioak 8. gailan erabiliko dira: bertan ikus daitezke dagozkien irudiak.

7.15 $\dot{x} = t - x^2$ ekuazioaren soluzioak $x \simeq \sqrt{t}$ bihurtzen dira t gehitzean. Zer gertatzen da integratze-metodo desberdinak erabiltzen badira $0 \leq t \leq 10000$ tartean?

7.16 Zer gertatzen da zenbakizko metodo desberdinak erabiltzen direnean (7.98)–(7.99) sistema ebazteko?

7.17 Erabili zenbakizko metodo desberdinak 7.23 ariketako problemaren soluzio zehatzaren hurbilketa on bat lortzen saiatzeko.

7.18 Marraztu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y - \epsilon xy, \\ \dot{y} &= (1 + r + d)x + (1 + r)y + \epsilon (y^2 - x^2)\end{aligned}$$

sistemaren fase-espazioa $\epsilon = 0$ eta $\epsilon = 1$ kasuetan ondoko parametroen balioetarako:

d	1	-1	3	1	1
r	-5/2	-1	-1	0	-2

7.19 Marraztu ondoko sistemaren (x, y) fase-espazioa, $n = 2, 3$ denean:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x - y^n.\end{aligned}$$

7.20 Zein da ondoko sistemaren fase-espazioa $\epsilon = 0, 1$ kasuetan:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - \epsilon xy, \\ \dot{y} &= -y + \epsilon (y^2 - x^2)?\end{aligned}$$

7.21 Marraztu $\ddot{x} = x^2(x - 1)(x - 2) - \gamma \dot{x}$ ekuazioaren (x, \dot{x}) fase-espazioa, $\gamma = 0$ eta $\gamma = 0.1$ kasuetan.

7.22 Marrazu ondoko sistemaren fase-espazioa:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2xy, \\ \dot{y} &= x^2 - y^3.\end{aligned}$$

8. GAIA

Egonkortasunaren teoria

*Prediction is very difficult,
especially of the future.*
Niels Bohr

Ekuazio ez-linealak¹ ebazteko zailtasunaren ondorioz, askotan 7. gaiko metodo hurbilduetara jo behar da. Badago beste aukera bat, sistemaren soluzioen informazio kualitatiboa nahikoa denean. Adibidez, askotan aski da $t \rightarrow \pm\infty$ limitean sistemaren eboluzioa ezagutzea, batez ere iragankor labur baten ondoren portaera egonkorra oso arin ezartzen dela badakigu. 1880 inguruan, Henri Poincaré-k² sistema dinamikoaren fase-espazioak sailkatzeko egitasmoa azaldu zuen, baina dimentsioa bat edo bi denean bakarrik burutu zuen, dimentsio handiagoetako portaera dinamikoaren aniztasun harrigarriaren lehen alderdiak ikusi zituen. Gaur egun **dinamika kualitatiboa** deitzen denaren «aita» Poincaré izan zen, dudarik gabe, eta azken hogeitun urteotan lortu duen garapenak berak frogatzen ditu arloaren garrantzia eta zailtasuna.

Gai honetan teoria kualitatiboaren kontzeptu oinarritzkoenetarikoak aztertuko dugu: soluzio berezien hastapen-baldintzen aldaketa txikiekiko egonkortasuna. Bereziki, mekanikatik irakurleak ondo ezagutzen dituen oreka-puntuak aztertuko dira. **Kaos deterministarako** sarrera laburra ere egingo dugu. Arlo honetan sakondu nahi duen irakurleak 317. orriko bibliografian aurki ditzake erreferentzia onak.

¹Baten batek esan zuenez, ekuazio «ez-linealak» aipatzea «elefanteak ez diren animaliak» esatea bezain zehaztugabea da. Animalia gehienak ez dira elefanteak eta, halaber, ekuazioa lineala izatea salbuespena da. Aitortu behar da, hala ere, fisikan oso salbuespen garrantzitsua dela, oinarritzko ekuazio asko, baina ez denak, linealak baitira. Gainera, askotan —ia beste ezer egin baino lehenago— hurbilketa linealak erabiltzen ditugu fisikariok.



² **Jules Henri Poincaré** (1854-04-29, Nancy, Frantzia; 1912-07-17, Paris). Matematikaren arlo guztietan lan egin zuen: geometria eta topologia algebraikoan, aldagai konplexuan, zenbakien teorian eta ekuazio diferentzialetan, adibidez. Fisikan elektrizitatea, telegrafia, optika, kapilaritatea, elastizitatea, potentzialaren teoria eta termodinamika landu zituen. Einstein-en erlatibitate bereziaren zenbait emaitza aurreratu zituen. Mekanika zerutiarrean bere izena hiru gorputzen problemarekin eta planeten orbitarekin dago loturik: bertan aztertu zuen lehenengoz sistema determinista baten higidura kaotikoaren posibilitatea, lan honen garrantzi osoa denbora hartan nabaria izan ez arren (1960-1980 hamarkadetan bakarrik berpiztu zen arlo hau eta asmatu zuten «kaos determinista» izena).

8.1 Egonkortasunaren kontzeptua

Bira 79. orrian definituriko sistema dinamikoetako bat,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (8.1)$$

eta bere soluzio bat, $\mathbf{x}^*(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*(t)). \quad (8.2)$$

Sistema dinamiko bati buruz ezagutu nahi genezakeen informazio kualitatiboaren artean, soluzio berezien eta **multzo aldaezinen** existentzia eta kokapena daude. Multzo bat aldaezina da bertan hasten diren soluzioak betiko (eta betidanik) barruan badaude. Beraz, soluzio batek puntu bat badauka multzo aldaezin batean, soluzio osoa egongo da multzoan. Adibiderik errazena **oreka-puntua** (**puntu egonkorra**, **finkoa**, **kritikoa**, edo **pausaguneko puntua** ere deitzen dena) dugu. Horrelako bat $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ moduko soluzio konstantea da, berez soluzio osoa dena:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*) = 0, \quad \left(\text{eta } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}(t, \mathbf{x}^*) = 0 \right). \quad (8.3)$$

Bereziki (baina ez soilik) puntu finko **bakartuak** aztertuko ditugu: horrelako puntu baten ingurune batean ez dago bestelako puntu finkorik. Aztertuko ditugun beste multzo aldaezinen adibideen artean soluzio periodikoak —bereziki bakartuak, hau da, **muga-zikloak**— egongo dira, baita infinitu orbita periodiko ezegonkor dauzkaten **erakarle kaotikoak** ere.

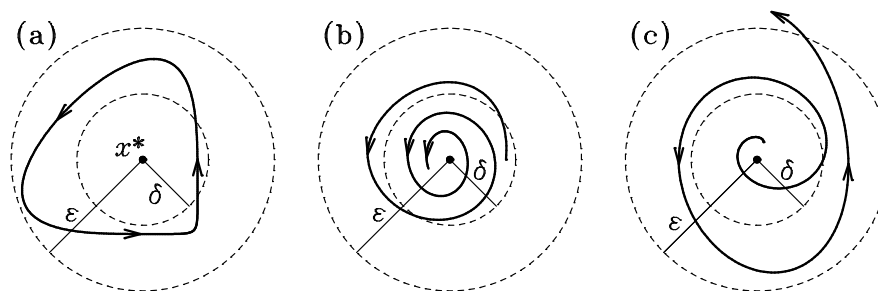
8.1 ARIKETA Aurkitu hurrengo sistema dinamikoen oreka-puntuak: (a) $\dot{x} = ax$, eta (b) $\dot{x} = ax - x^3$.

Edozein problema fisikoren hastapen-baldintzak zehaztean erroreak egiten dira beti eta era hurbilean bakarrik ezagutzen dira. Beraz, soluzio berezi bati dagozkion baldintzak apur bat aldatzean zer gertatzen den jakitea garrantzi handikoa da. Soluzio berri guztiak aurrekoaren hurbil badaude betiko, hasierakoa egonkorra dela esaten da. Gainera soluzio berriek hasierakora jotzen badute, azken hau asintotikoki egonkorra da. Bestalde, aukeratzen dugun soluzio bereziaren ingurunea nahi bezain txikia bada ere, soluzio aldatuaren batek (edo guztiek) handik ihes egiten badu, hasierakoa ezegonkorra da eta, agian baldintza berezietan izan ezik, ezin gerta daiteke praktikan. Penduluaren adibidean bi oreka-puntu daude: posizio bertikalak. Beheko puntuan dagoenean hastapen-baldintzak apur bat aldatzen dituen perturbazio txikiak ez du sistema oso urrun bidaltzen: pendulua oreka-puntuaren inguruko oszilazioak egiten hasiko da eta energia potentzialaren minimoari dagokion puntu hau egonkorra da. Gainera marruskadura badago, energia mekanikoa eta oszilazioen anplitudea txikituz doaz eta orain asintotikoki egonkorra den oreka-puntura hurbilduko da pendulua. Goiko posizioa, berriz, energia potentzialaren maximoari dagokio eta edozein perturbazio —nahi bezain txikia izanik ere— oreka deuseztatzen du eta pendulua handik urruntzen da: oreka-puntua ezegonkorra da.

Liapunov-en³ definizio zehatzaren arabera, $\mathbf{x}^*(t)$ soluzioa **egonkorra** da baldin eta $\epsilon > 0$ guztientzat honako hau betetzeko moduko $\delta(\epsilon) > 0$ bat existitzen bada: $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta(\epsilon)$ hastapen-baldintza betetzen dituen beste edozein $\mathbf{x}(t)$ soluzioak $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| < \epsilon$ ere beteko du $t > t_0$ guztietarako. Alderantziz, $\delta > 0$ nahi bezain txikia izanik ere, $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta$ eta ($t > t_0$ baterako) $|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| > \epsilon$ betetzen dituzten $\epsilon > 0$ bat eta $\mathbf{x}(t)$ soluzio bat existitzen badira, $\mathbf{x}^*(t)$ delakoa **ezegonkorra** dela esaten da.



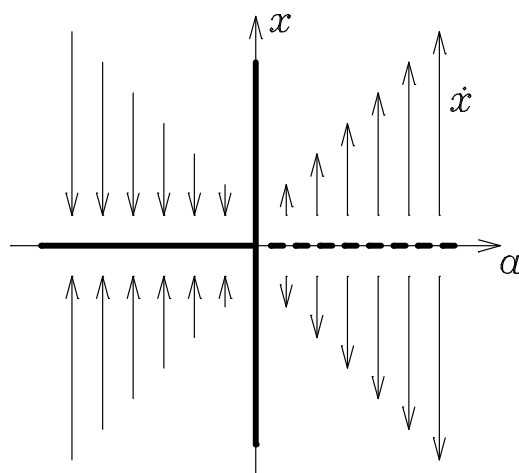
³ **Aleksandr Mikhailovich Liapunov** (1857-06-16, Yaroslavl, Errusia; 1918-11-03, Odesa). Ekuazio diferentzialak, potentzialaren teoria, probabilitateak eta hurbilketak landu zituen. Orekaren egonkortasuna aztertzeko metodo eta emaitza berriak lortu zituen, bere izeneko funtzioak barruan daudela. Sistema mekanikoetan, hidrodinamikan eta ekuazio diferentzialetan ikertu zuen oreka.



8.1 IRUDIA Oreka-puntu (a) egonkorra, (b) asintotikoki egonkorra, (c) ezegonkorra.

Bestalde, $\mathbf{x}^*(t)$ soluzioa **asintotikoki egonkorra** dela esaten da baldin eta, egonkorra izateaz gain, $\delta' > 0$ balio bat badago $|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)| < \delta'$ hastapen-baldintza guztiei dagozkien soluzioek $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)| = 0$ betetzeko modukoa. Gainera, $\mathbf{x}^*(t)$ **erakarlea** dela esaten da, bere inguruneko soluzioak erakarri egiten ditu eta. Oreka-puntua asintotikoki egonkorra bada eta soluzio guztiek (eta ez bakarrik ingurune batekoek) $\mathbf{x}^*(t)$ -ra jotzen badute, **eskala handiko egonkortasuna** dugu.

Adibidez, $\dot{x} = ax$ ekuazioaren soluzio orokorra $x = x_0 e^{at}$ denez, $a < 0$ denean soluzio guztiek jotzen dute $x = 0$ puntura: jatorria, beraz, egonkorra, asintotikoki egonkorra eta eskala handian egonkorra da. $a > 0$ dugunean soluzio guztiak, $x = 0$ izan ezik noski, infiniturantz doaz eta jatorria ezegonkorra da. $a = 0$ kasuan puntu guztiak oreka-puntu egonkorrak dira, baina ez asintotikoki egonkorrak. Adibide honetan bezala parametro bat aldatzean oreka-puntuen (edo bestelako multzo aldaezinen) izaera edota kopurua aldatzen denean, **adarkatze** bat gertatu dela esaten da. Azken adibidean, **adarkatze-parametroa** a izan da eta **adarkatze-diagrama** 8.2 iru-

8.2 IRUDIA Adarkatze-diagrama $\dot{x} = ax$ ekuazioaren kasuan.

dian erakusten da. Horrelakoetan, oreka-puntuaren posizioa (adibide honetan jatorria) adarkatze-parametroaren funtzioan marrazten da, egonkortasuna (ezegonkortasuna) adierazteko lerro jarraitua (etena) erabiltzen delarik. Aipaturiko irudian \dot{x} bektore-eremuaren magnitudea eta noranzkoa (jatorrirantz edo infiniturantz) ere marraztu dira. Azken honetaz balia gaitzke jatorriaren egonkortasuna modu grafikoan azaltzeko: oreka-puntutik hurbil dauden soluzioen noranzkoa eremuak adierazitakoa izango denez, erraz ikusten da perturbazio txikiek handituz ala txikituz joateko joera duten eta, ondorioz, oreka egonkorra ala ezegonkorra den. Kontuan hartu aipaturiko noranz-

koaren alderanzketak oreka-puntuetan (adibide honetan bi ardatzetan) gertatzen direla preseski, deribatuaren zeinua aldatzeko zerotik, hau da, puntu kritiko batetik pasatu behar baita.

8.2 ARIKETA Erabili, hasteko, metodo grafikoa eta, geroago, soluzio orokorra ondoko ekuazioaren oreka-puntuen adarkatze-diagrama lortzeko:

$$\dot{x} = ax - x^3. \quad (8.4)$$

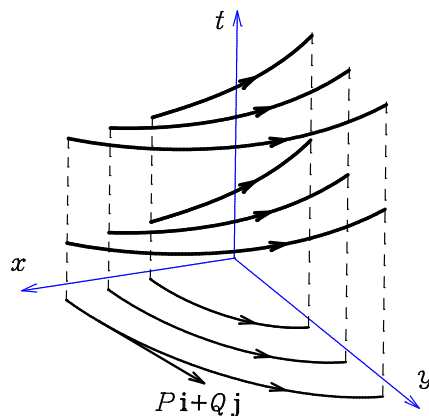
8.2 Sistema dinamiko autonomo bidimentsionalak

Gai honetako atal askotan sistema autonomo bidimentsionalak aztertzeraz mugatuko gara:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad (8.5)$$

$$\dot{y} = Q(x, y). \quad (8.6)$$

Horrelako kasuetan, 4.1.1 atalean esan bezala, sistema dinamikoaren soluzio orokorrak kongruentzia bat definitzen du (t, x, y) espazioan; baina, sistema autonomoa denez, haren proiektzioa beste kongruentzia bat da (x, y) fase-espazioan. Soluzio baten $(x(t), y(t))$ proiektzioak fase-espazioan kurba parametrikoko bat definitzen du, **fase-ibilbidea** edo, batzuetan, **fase-orbita** deitzen dena.



8.3 IRUDIA Sistema autonomoaren soluzio orokorra eta fase-espazioan duen proiektzioa.

Fase-ibilbideen $y(x)$ ekuazioa kalkulatzeko (agian, beren egitura geometrikoa ikusteko), aski da $(x(t), y(t))$ ekuazioetatik t ezabatzea. Gainera, t parametroa familiaren (8.5)–(8.6) ekuazio diferentzialetatik ere ezaba daiteke berauek elkarrekin zatituz:

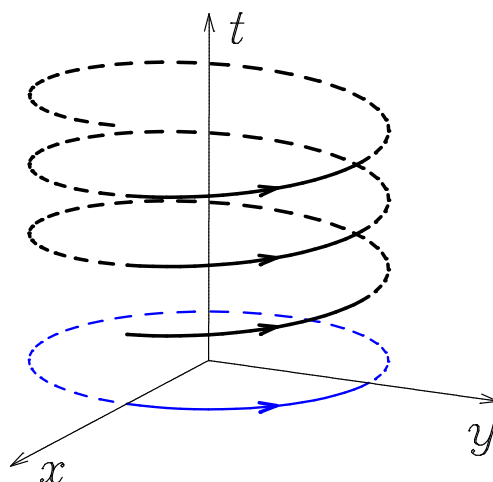
$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (8.7)$$

Ekuazio honi dagokion existentzia eta bakartasunaren teoremaren ondorioz, (erregulartasun-bal-dintza egokiak betetzen diren eremuan) fase-ibilbideek ez dute elkar ebakitzen eta, hortaz, sistemaren soluzio orokorrak fase-espazioan duen proiektzioa ere kongruentzia da. Fase-ibilbideen (8.7) ekuazioa forma kanonikoan idatziz,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \quad (8.8)$$

fase-ibilbideak, euren tangentea den $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ abiadura-eremuaren korrante-lerroak direla ikusten dugu. Irudi hidrodinamiko honen ondorioz, sistemaren eboluzioa fase-espazioan ematen duen aplikazioa **jarria** dela esaten da.

Fase-ibilbidea soluzio batean zehar aldatzen ez denez, fase-ibilbideen ekuazioa sistema dinamikoaren higidura-konstantea da, t aldagai independentearen menpekoa ez dena. Eta alderantziz, 4.2.2 atalean esan zen arabera, aldagai independentearen menpekoa ez den lehen integral batek fase-ibilbideen ekuazioa ematen digu $n = 2$ ekuazio dituen sistema dinamiko autonomoen kasuan. Beraz, hemen aztertzen ditugun sistemen fase-ibilbideak kalkulatzeko t gabeko higidura-konstante bat aurkitzearen baliokidea da.



8.4 IRUDIA (8.9) sistemaren soluzio bat eta fase-espazioan duen proiektzioa.

80. orrian ikusi genuenez,

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x \quad (8.9)$$

sistema dinamikoaren soluzio orokorra (eta, lineala denez, soluzio guztien multzoa) hau da:

$$x = R \cos(t - t_0), \quad y = R \sin(t - t_0). \quad (8.10)$$

Kongruentzia honetako kurbak t ardatzean zentratutako R erradioko eta 2π urratseko helizeak dira eta haien arteko bat 8.4 irudian erakusten da. Ekuazio autonomo guztiekin bezala, translazio-simetria dago eta integrazio-konstante bat ($t - t_0$ binomioan agertzen dena) aldagai independentearen jatorria adierazteko moduan aukera daiteke. t_0 konstantea aldatzean, helizea t norabidean transladatzen da, baina fase-espazioko proiektzioa ez da aldatzen eta beti da (8.10) soluzio orokorrean t ezabatuz, edota

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (8.11)$$

ibilbideen ekuazioa ebatziz, lortzen den R erradioko zirkunferentzia. Edozein modutan fase-espazioan lortzen den kongruentzia $x^2 + y^2 = R^2$ higidura-konstanteak deskribatutako zirkunferentzien multzoa da. (8.9) sistematik zuzenean ere lor daiteke lehen integral hori, aski baita lehen ekuazioa x -rekin biderkatzea, bigarrena y -rekin, eta emaitzak batzea.

Buruan beti izango dugun adibidea sistema mekaniko unidimentsionalarena da. Newton-en bigarren legearen arabera, posizioaren eta abiaduraren menpekoa den indar bati dagokion higi-

dura ekuazioa⁴,

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}), \quad (8.12)$$

honela idatziko dugu:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x, y). \quad (8.13)$$

(Abiadura $y = \dot{x}$ moduan idatzi dugu, beraz.) Adibidez, $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0$ osziladore harmoniko indargetua $\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2x - \gamma y$ moduan idatziko dugu.

8.3 ARIKETA Kontsideratu osziladore harmonikoa ($\gamma = 0$). Aurkitu fase-ibilbideen ekuazioa. Zein da lehen integral horren esangura fisikoa? Marratzu fase-espazioa.

Sistema hamiltondarra bada eta Hamilton-en⁵ funtzioa $H(x, y)$ moduan idazten badugu, momentu kanonikoa y delarik, higidura-ekuazioak hauexek dira:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (8.14)$$

Indar-eremu unidimentsionalaren kasua oso berezia, baina garrantzi handikoa, da:

$$\ddot{x} = F(x). \quad (8.15)$$

Horrelakoetan indarra energia potentzial batetik lortzen da,

$$F = -\frac{dV}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad V(x) = -\int F(x) dx, \quad (8.16)$$

eta sistema dinamikoa ondoko eran idatziko dugu:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -V'(x). \quad (8.17)$$

Sistema honen hamiltondarra $H = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$ energia mekanikoa da. Gai honetan sistema dinamikoen teoriaren oihurari jarraituz, sistema dinamiko kontserbakorra, fase-espazioaren azalera (edo bolumena, hiperbolumena...) kontserbatzen duenari deritzogu. Ondorioz, mekanikan kontserbakorrak deitzen direnak —(8.17) modukoak, adibidez— hemen **sistema mekaniko kontserbakorrak** deituko dira. Hauek hemen erabiliko dugun (eta hurrengo atalean aztertzen den) zentzuan ere dira kontserbakorrak, noski.

8.4 ARIKETA Idatz ezazu pendulu matematikoaren ekuazioa,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (8.18)$$

sistema dinamikoen notazioaz. Zein da hamiltondarra?

8.5 ARIKETA (8.9) sistema hamiltondarra al da? Nolako sistema fisikoa azal dezake?

⁴Notazioa errazteko gai honetan masa-unitatea $m = 1$ izateko moduan aukeratzen dugu aztertutako sistema mekaniko guztietan. (Edo, nahiago bada, masa-unitateko indarra eta energia erabiltzen ditugu.)



⁵ **William Rowan Hamilton** (1805-08-04, Dublin, Irlanda; 1865-09-02, Dublin). Optikan eta astronomian egin zituen ekarpenez gain, fisikan bere izena mekanikaren hiru formulaziorikin dago loturik: Hamilton-en printzipioa, ekuazio kanonikoak eta Hamilton eta Jacobi-ren teoria ekarpen ahaztezinak dira. Matematikan lehen algebra ez-trukakorra aurkitu zuela gogoratzen da: zenbaki errealen orokorpen moduan konplexuak lortzen diren bezalaxe, azken hauek orokortzean koaternoiak agertzen

zaizkigu.

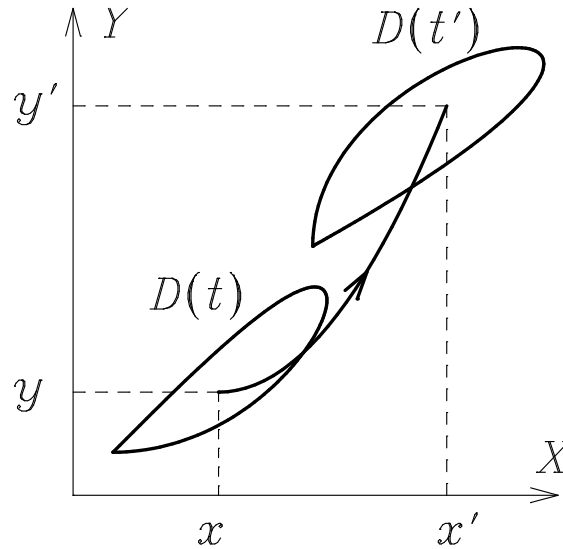
8.3 Sistema dinamiko kontserbakorrak

Fase-espazioaren azaleraren eboluzioa aztertzeko, $D(t)$ eremu bat jarioan zehar nola aldatzen den ikertuko dugu (ikus 8.5 irudia). (x, y) puntua t' «aldiunean» $(x', y') \equiv (\phi(t'), \psi(t'))$ puntuan egongo da, baldin eta $\phi(t')$ eta $\psi(t')$ funtzioek sistemaren soluzio bat osatzen badute,

$$\dot{\phi}(t') = P(\phi(t'), \psi(t')), \quad \dot{\psi}(t') = Q(\phi(t'), \psi(t')), \quad (8.19)$$

eta ondoko hastapen-baldintzak betetzen badituzte:

$$\phi(t) = x, \quad \psi(t) = y. \quad (8.20)$$



8.5 IRUDIA Fase-espazioko eremu baten eboluzioa.

t' aldiunean $D(t)$ eremuko puntuak $D(t')$ delakoan egongo dira, eta azken honen azalera ondokoa da:

$$S(t') = \int_{D(t')} dx' dy' = \int_{D(t)} \frac{\partial(\phi(t'), \psi(t'))}{\partial(x, y)} dx dy. \quad (8.21)$$

Integrala (x, y) koordenatu konstanteen bidez adierazteko, aldagai-aldaketa egokia egin dugu; horrela, t' -ren menpekotasuna integrazio-eremutik integrakizunera igarotzen da eta bertan errazago deribatzen da azaleraren aldaketa kalkulatzeko:

$$\frac{dS}{dt} = \left. \frac{dS(t')}{dt'} \right|_{t'=t} = \int_{D(t)} \mathcal{D}(x, y) dx dy, \quad (8.22)$$

non integrakizuna jacobiarren deribatua den,

$$\mathcal{D}(x, y) = \left. \frac{d}{dt'} \frac{\partial(\phi(t'), \psi(t'))}{\partial(x, y)} \right|_{t'=t}. \quad (8.23)$$

Hau erraz kalkulatzeko da (8.19) eta (8.20) erabiliz:

$$\mathcal{D}(x, y) = \frac{d}{dt'} \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \bigg|_{t'=t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \quad (8.24)$$

Ageri denez, $\mathcal{D}(x, y)$ integrakizuna $P \mathbf{i} + Q \mathbf{j}$ bektore-eremuaren dibergentzia da.

(8.5)–(8.6) sistema dinamikoa **kontserbakorra** dela esango dugu fase-espazioa kontserbatzen badu, hau da, dibergentzia nulua bada:

$$\frac{dS}{dt} = 0 \iff \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0. \quad (8.25)$$

Liouville-ren teoremaren arabera, sistema hamiltondarrak kontserbakorrak dira (dimentsio guztietan, hemen planoak bakarrik aztertzen badugu ere). Izan ere, (8.14) Hamilton-en ekuazio kanonikoen ondorioz, zera dugu:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (8.26)$$

Mekanikako sistema kontserbakorrak hamiltondarrak izaten dira eta, beraz, fase-espazioaren azalera kontserbatzen dute.

Dibergentzia negatiboa bada, fase-espazioaren azalera monotonoki txikitzen da eta sistema **iraungikorra** da.

8.6 ARIKETA Kalkulatu $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ osziladore harmoniko indargetuari dagokion eremuaren dibergentzia. Kontserbakorra al da?

8.4 Sistema quasilinealak

Aurrerantzean (8.5)–(8.6) sistema dinamikoak oreka-puntu bakartu bat daukala suposatuko dugu. Orokortasunik galdu gabe, translazio bat egin dezakegu aipaturiko puntua jatorrian kokatzeko:

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0. \quad (8.27)$$

Puntu finkoaren inguruan Taylor-en garapena egiteko,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{\partial(P, Q)}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x, y)=(0, 0)} \quad (8.28)$$

notazioa erabiltzen badugu, honela idazten da sistema dinamikoa:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + F(x, y), \quad (8.29)$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + G(x, y), \quad (8.30)$$

F eta G funtzioek bat baino ordena handiagoko gaiak biltzen dituzte adierazpen horietan. Sistema dinamikoa quasilineala dela esango dugu baldin eta (8.29)–(8.30) moduan idaztean a_{ij} koefizienteak konstanteak badira eta F eta G funtzioek gai linealek baino arinago jotzen badute zerora:

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{F(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0} \frac{G(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \quad (8.31)$$

Definizioz, gai ez-linealak arbuiatzean lortzen den koefiziente konstantetako sistema linealari **hurbilketa lineala, lehen hurbilketa** edo **sistema linealdua** deritzo:

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad (8.32)$$

$$\dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \quad (8.33)$$

Sistemaren \mathbf{A} matrizea erabiliz, hurbilketa lineala $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ moduan idazten da 4. gaiko notazioaz.

8.7 ARIKETA Aurki itzazu 8.4 ariketako pendulu matematikoaren hurbilketa linealak bere oreka-puntuen inguruan.

Jatorria sistema linealaren puntu finko bakartua dela emango dugu eta, beraz, sistemaren matrizea erregularra dela,

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0. \quad (8.34)$$

Orobat, jatorria hurbilketa linealaren oreka-puntu bakarra da (sistema quasilinealak gehiago izan ditzake, noski). ($\det \mathbf{A} = 0$ duten sistema linealen kasua 8.3 probleman aztertuko dugu.)

8.8 ARIKETA Sistemaren diskriminatzailea $\Delta \equiv \text{tr}^2 \mathbf{A} - 4 \det \mathbf{A}$ dela kontuan harturik, frogatu hurbilketa linealaren (eta, definizioz, sistema quasilinealaren) erro karakteristikoak

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (8.35)$$

direla, eta bektore propioak aurkitzeko ondoko sistema lineal homogeneoak ebatzi behar direla:

$$(a_{11} - k_i)x + a_{12}y = 0, \quad (8.36)$$

$$a_{21}x + (a_{22} - k_i)y = 0. \quad (8.37)$$

Egiaztatu $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ bektore-eremuaren dibergentzia jatorrian (eta hurbilketa linealarenarena puntu guztietan) $\text{tr} \mathbf{A}$ dela preseski.

8.9 ARIKETA Kalkulatu erro karakteristikoak 8.4 ariketako pendulu matematikoaren kasuan.

8.5 Egonkortasun lineala

Liapunov-en lehen metodoa —egonkortasun linealaren metodoa ere deitzen dena— erabiltzean, sistema ez-linealaren hurbilketa linealaren egonkortasuna aztertzen da, horrela lortzen diren emaitza kualitatiboak egiazkoak baitira sistema quasilinealaren kasuan, *salbuespenen bat gorabehera*. Oreka-puntutik oso hurbil dauden puntuetan gai ez-linealen eragina, oro har, arbuiagarria delako gertatzen da hau. Jarraian kasuz kasu aztertuko ditugu hurbilketa linealaren egonkortasuna eta sistema ez-linealarena.

Adibide askotan

$$\dot{x} = -x - y - \epsilon xy, \quad (8.38)$$

$$\dot{y} = (1 + r + d)x + (1 + r)y + \epsilon (y^2 - x^2) \quad (8.39)$$

sistema eta $\epsilon = 0$ eginez lortzen den bere hurbilketa lineala kontsideratuko ditugu.

8.10 ARIKETA Froga ezazu (8.38)–(8.39) sistemaren kasuan $\det \mathbf{A} = d$, $\text{tr} \mathbf{A} = r$ dugula eta $k = (r \pm \sqrt{r^2 - 4d})/2$ balio karakteristiko bakoitzari dagokion bektore propioa hauxe dela:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ k + 1 \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

8.5.1 Erro karakteristiko erreal desberdinak

$\Delta > 0$ denean bi erroak errealak eta desberdinak dira: $k_1 > k_2$. Beraz, k_1 eta k_2 balioei dagozkien bektore propioak

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (8.41)$$

badira, sistema linealaren soluzio orokorra

$$x = C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}, \quad (8.42)$$

$$y = C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t} \quad (8.43)$$

da eta, ondorioz, hauxe dugu:

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 e^{k_1 t} + C_2 y_2 e^{k_2 t}}{C_1 x_1 e^{k_1 t} + C_2 x_2 e^{k_2 t}}. \quad (8.44)$$

Badaude hurbilketa linealaren bi soluzio bereziak, bektore propioekiko paraleloak diren bi fase-ibilbide zuzenei dagozkienak:

$$C_2 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad (8.45)$$

$$C_1 = 0, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}. \quad (8.46)$$

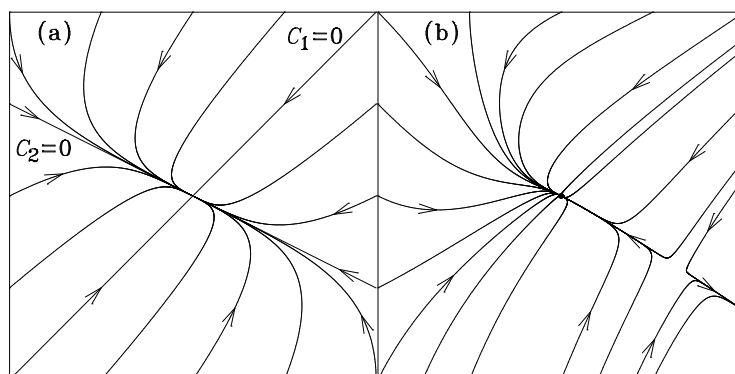
Erro negatiboak

$\Delta > 0$ izanik $\det \mathbf{A} > 0$ denean, bi erroek $\text{tr } \mathbf{A}$ -ren zeinua dute. Ondorioz, $\text{tr } \mathbf{A} < 0$ bada, $k_2 < k_1 < 0$ dugu, eta $t \rightarrow \infty$ limitean ekuazio linealaren (8.42)–(8.43) soluzio guztiak jatorri-rantz doaz, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, eta oreka-puntua asintotikoki egonkorra da. Gainera, soluzio guztiak malda berberarekin iristen dira jatorrirra, (8.44) adierazpenetik zera baitugu:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}. \quad (8.47)$$

Salbuespen bakarra (8.46) ibilbidea da, jakina. Beraz, ibilbideen forma geometrikoa jatorriaren inguruan, 8.6 irudian kasu berezi batean ikusten dena da. Oreka-puntuaren inguruko ibilbideen egitura geometrikoa hauxe denean (hau da, ia guztiak puntu finkorantz malda berberarekin doazenean) oreka-puntua **nodoa** dela esaten da. Kasu honetan, jatorria nodo asintotikoki egonkorra da.

8.6 irudiko eskuinaldean kasu berezi batean ikusten den emaitza, kasu orokorrean ere gertatzen dela frogatu daiteke: hurbilketa linealetik sistema quasilinealera igarotzean ez dago aldaketa kualitatiborik, *oreka-puntutik behar bezain hurbil dauden puntuetan*, eta puntu finkoa hemen ere nodo asintotikoki egonkorra da. Hau askotan gertatuko da: hurbilketa linealaren ondorioak —kasu gehienetan, behintzat— kualitatiboki berdinak dira sistema ez-linealaren kasuan oreka-puntutik oso hurbil, nahiz eta urrutiago gai ez-linealen eraginak ibilbideak deformatzen dituen. Adibide honetan, gainera, hurbilketa linealean ez zegoen beste puntu finko bat agertzen da sistema quasilinealean. (Non?)



8.6 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = -5/2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ direnean.

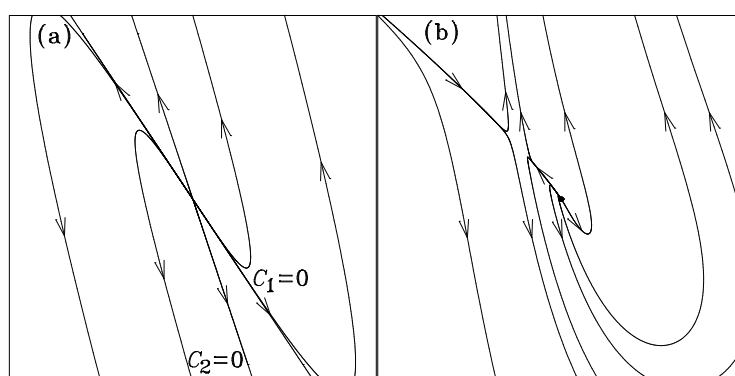
Erro positiboak

$\Delta > 0$, $\det \mathbf{A} > 0$ izanik $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ denean, $0 < k_2 < k_1$ dugu eta $t \rightarrow \infty$ limitean hurbilketa linealaren (8.42)–(8.43) soluzio guztiak infinitura doaz eta jatorritik urruntzen dira. Oreka-puntua, beraz, ezegonkorra da eta beraren egitura geometrikoa aztertzeko nahikoa da aurreko kasuan esan duguna (1 eta 2 indizeak elkarrekin trukatu ondoren) iraganeko infinituan (eta ez etorkizunekoan) erabiltzea. Izan ere, (8.44) adierazpenaren ondorioz,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{baldin } C_2 \neq 0, \quad (8.48)$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad \text{baldin } C_2 = 0, \quad (8.49)$$

eta geometria 8.6 irudikoa izango da, baina ibilbideen noranzkoa alderantzizkoa izango da eta $C_1 = 0$ eta $C_2 = 0$ etiketak elkarrekin trukatu behar dira. Kasu ez-linealean ere puntu finkoa nodo ezegonkorra dela frogatu daiteke, baita beraren itxura kualitatiboa aipaturiko irudiaren eskualdean agertzen dena (aurkako ibiltze-noranzkoarekin) dela ere.

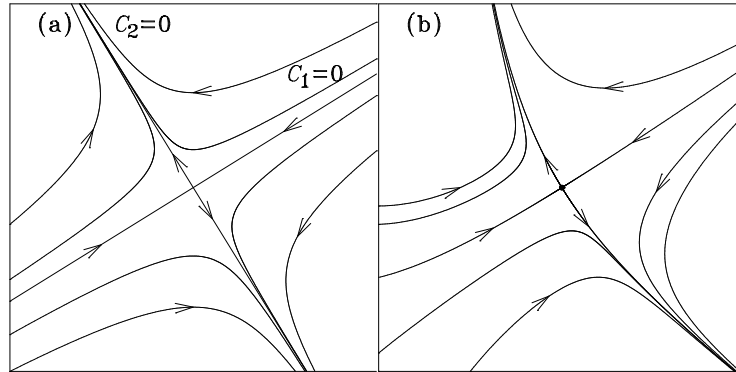


8.7 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = 5/2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ direnean.

Aurkako zeinuak dituzten erroak

$\Delta > 0$ eta $\det \mathbf{A} < 0$ direnean, bi erroen zeinuak elkarren kontrakoak dira, $k_2 < 0 < k_1$, eta $C_1 = 0$ soluzio partikularra jatorrirantz doa, **espazio egonkorra** deitzen den $y/x = y_2/x_2$

zuzenean zehar. Bestalde, $C_2 = 0$ balioari dagokion soluzioa zentrotik urruntzen da **espazio eze-gonkorra** deritzon $y/x = y_1/x_1$ lerro zuzenean zehar. Beste soluzio guztiak ez doaz jatorrirantz: etorkizuneko (iraganeko) infinituan espazio eze-gonkorrera (egonkorrera) jotzen dute asintotikoki:



8.8 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = r = -1$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}, \quad (8.50)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \frac{y_2}{x_2}. \quad (8.51)$$

Soluzio guztiak ($C_1 = 0$ balioari dagokiona izan ezik) jatorritik urruntzen direnez, oreka-puntua eze-gonkorra da eta, salbuespenezko norabide egonkor bat dagoenez, **zela-puntua**⁶ edo **mendatea**⁷ deitzen da. Adibide bat 8.8 irudian ikus daiteke. Bertan erakusten da, gainera, sistema quasilinealaren jatorria ere mendate eze-gonkorra dela. Jatorrirantz doan (jatorritik datorren) soluzioa **barietate egonkorra (ezegonkorra)** deitzen da eta ez da infinituraino doazen zuzena, jatorrian espazio egonkor (ezegonkor) harekiko tangentea bada ere. Oro har, benetako higidura fisikoa ez da inoiz bariedade egonkorrak adierazitakoa izango, edozein perturbazioren ondorioz handik aldenduko baita sistema, baina fase-espazioaren propietate kualitatiboak ulertzeko bariedade egonkorraren geometria funtsezkoa da.

8.5.2 Erro karakteristiko konplexuak

$\Delta < 0$ denean erro karakteristikoek bikote konplexu konjokatu bat osatzen dute: $k = \alpha \pm i\omega$, $\alpha = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}$ eta $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta}$ izanik. Hurbilketa linealaren soluzioak hauexek dira:

$$x = e^{\alpha t} (C_1 x_1 e^{i\omega t} + C_2 x_2 e^{-i\omega t}), \quad (8.52)$$

$$y = e^{\alpha t} (C_1 y_1 e^{i\omega t} + C_2 y_2 e^{-i\omega t}), \quad (8.53)$$

$C_1 x_1 = \overline{C_2 x_2}$ eta $C_1 y_1 = \overline{C_2 y_2}$ betetzen direlarik. Ekuazio bietan esponentzial bat eta gai periodiko bat agertzen direnez (ikus 8.11 ariketa), esponentzialeko $\alpha = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{A}$ balioaren zeinuaren arabera izango da soluzioen egonkortasuna.

⁶Izen hau zaldiz ibiltzeko zelarekin dago loturik: pentsatu nola higitzen den horrelako batean bolatxo bat.

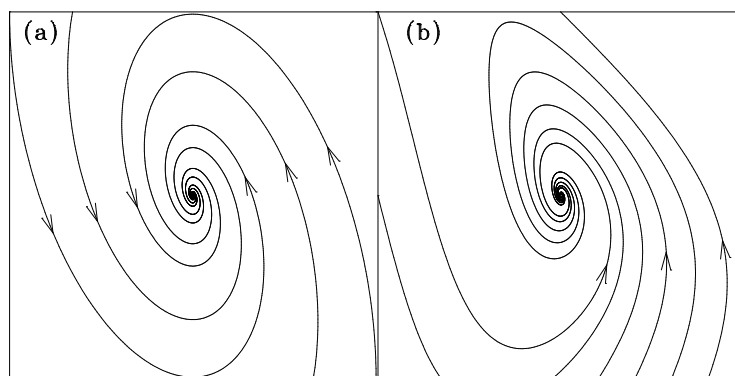
⁷Mendiarteko igarobideak zela baten itxurakoak izaten dira.

Parte erreal negatiboko erro konplexuak

$\Delta < 0$ eta $\text{tr } \mathbf{A} < 0$ direnean, $\alpha < 0$ dugu eta, $e^{\alpha t}$ beherakorra denez, sistema linealaren (8.52)–(8.53) soluzio guztiek zentrorra joko dute, baina ez norabide finko batean, zeren

$$\frac{y}{x} = \frac{C_1 y_1 \cos \omega t + C_2 y_2 \sin \omega t}{C_1 x_1 \cos \omega t + C_2 x_2 \sin \omega t} \quad (8.54)$$

periodikoa denez malda aldakorra izango baita. Jatorria, beraz, asintotikoki egonkorra da eta orbitak espiralak izango dira. Horrelako geometria duen puntu finkoa **fokua** edo **puntu espirala** dela esaten da. Adibide bat 8.9 irudian ikus daiteke.



8.9 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 3$, $r = -1$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.

Berriro ere sistema quasilinealen portaera kualitatiboa berbera da: agian infinituraino ez doan helizea oreka-puntutik urruntzean deformatzen den arren, jatorria foku asintotikoki egonkorra da.

Parte erreal positiboko erro konplexuak

$\Delta < 0$ eta $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ direnean, $\alpha > 0$ dugu eta (8.52)–(8.53) soluzioak jatorritik urrunduko dira. Oreka-puntua, hortaz, ezegonkorra izango da. Soluzioen portaera $t \rightarrow -\infty$ limitean aurreko kasukoek $t \rightarrow \infty$ delakoan zutena izango denez, jatorria foku ezegonkorra da. Gauza bera gertatzen da sistema quasilinealarekin eta soluzioen itxura kualitatiboa 8.9 irudiko eskuinaldekoarena izango da, ibilbideen noranzkoa alderantzuz ondoren, jakina.

Erro irudikariak

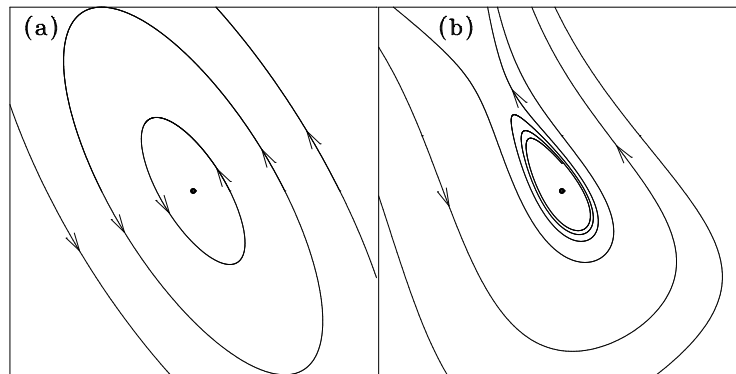
$\Delta < 0$ eta $\text{tr } \mathbf{A} = \alpha = 0$ direnean, sistema linealaren soluzioak hauexek dira:

$$x = C_1 x_1 \cos \omega t + C_2 x_2 \sin \omega t, \quad (8.55)$$

$$y = C_1 y_1 \cos \omega t + C_2 y_2 \sin \omega t. \quad (8.56)$$

8.11 ARIKETA Froga ezazu (8.55)–(8.56) ekuazioek fase-espazioko jatorrian zentratutako elipseak deskribatzen dituztela.

Soluzioak, beraz, periodikoak dira eta jatorria, egonkorra izan arren, ez da asintotikoki egonkorra: **zentroa** edo **zurrunbiloa** deitzen da.



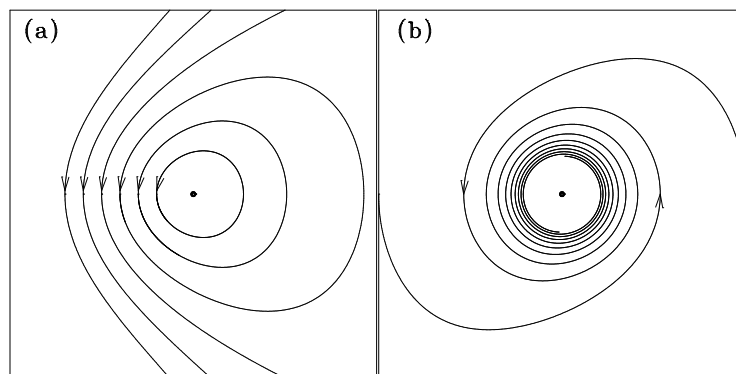
8.10 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = 0$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.

Hala eta guztiz ere, kasu honetan sistema quasilinealaren azterketa zailagoa da zeren eta, $\alpha = 0$ kasua $\alpha < 0$ eta $\alpha > 0$ direlakoan arteko muga denez, gai ez-linealak (txikiak izanik ere) egonkortasuna aldatzeko gai izan baitaitezke. Izan ere, sistema ez-linealaren oreka-puntua foku asintotikoki egonkorra, zentro egonkorra zein foku ezegonkorra izan daiteke kasu honetan: egonkortasun linealaren azterketa ez da erabakitzailea eta beste metodoren bat erabili behar da. 8.10 irudiaren kasuan, esaterako, gai ez-linealei esker oreka-puntua zentroa izan beharrean, foku ezegonkorra da. Beste adibide bat ikusteko, kasu berberari dagokion ondoko sistema aztertuko dugu:

$$\dot{x} = -y, \quad (8.57)$$

$$\dot{y} = x - y^n. \quad (8.58)$$

Hurbilketa lineala (8.9) sistema da eta beraren orbitak jatorrian zentratuak (8.10) zirkunferentziak dira. 8.38 problemaren frogatuko dugunez, $n = 2$ denean sistema ez-linealaren jatorria zentroa da berriro, baina $n = 3$ bada foku asintotikoki egonkorra bihurtzen da, 8.11 irudian erakusten den bezala.



8.11 IRUDIA (8.57)–(8.58) sistemaren fase-espazioa, (a) $n = 2$ eta (b) $n = 3$ balioekin.

Kasu honetako zailtasunaren zergatikoa matematikoa, oreka-puntua **ez-hiperbolikoa** izatean datza: parte erreal ez-nuluko balio propioei dagozkien bektore propioek sorturiko espazioaren dimentsioa (nulua, kasu honetan) fase-espazioarena baino txikiagoa da. Hiperbolikoa izateko propietatea emaitza askoren frogapenean erabiltzen da; beraz, betetzen ez bada, aipaturiko emaitzak

ez dira beti egiazkoak. Bereziki, orain arte inplizituki erabili dugun **Grobman eta Hartman-en teoremaren** arabera⁸, puntu finko hiperboliko baten egonkortasuna eta hurbilketa linealarenak berdinak dira, puntu finkoaren inguruan sistema ez-linealaren eta hurbilketa linealaren fase-espazioak **topologikoki baliokideak** baitira: bien artean homomorfismo bat (alderantziko jarraitua duen aplikazio jarraitu bat) dago. Beste modu batera esanda: bata bestea deformatuz (baina apurtu gabe) lortzen da. Bestalde, teoremaren ondorioa ez da beti egia izango puntu ez-hiperbolikoen inguruan: balio propioen baten parte erreala nulua bada, puntuaren mota geometrikoa desberdina izan daiteke eta, gainera, parte erreal positiboko balio propioarik ez badago, egonkortasuna bera ere izan daiteke desberdina.

8.5.3 Erro karakteristiko erreal berdinak

$\Delta = 0$ bada, erro karakteristiko erreal bikoitza dugu: $k_1 = k_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$. Gainera, $\Delta = 0$ baldintza eta $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0$ baliokideak direnez, bi kasu daude.

$$a_{12} = a_{21} = 0$$

Kasu honetan $a \equiv a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{A}$ dugu eta bi ekuazioak elkarren independenteak dira:

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay. \quad (8.59)$$

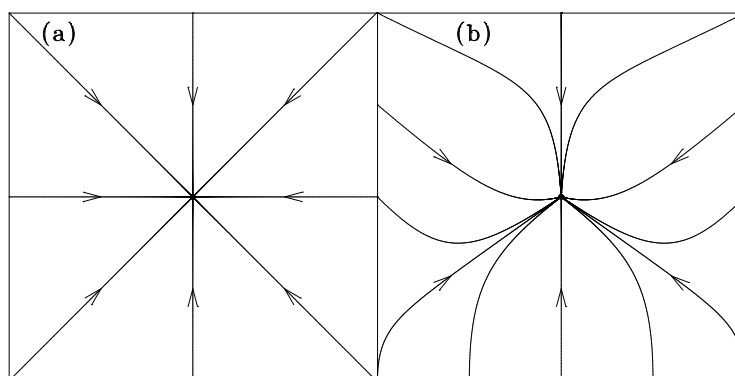
Soluzioak,

$$x = C_1 e^{at}, \quad y = C_2 e^{at}, \quad (8.60)$$

jatorrirantz doazen edo handik datozen zuzenerdiak dira: $y/x = C_2/C_1$. Beraz, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 2a < 0$ denean soluzio guztiak jatorrirantz doaz, baina malda desberdinekin, eta puntu finkoa, asintotikoki egonkorra izateaz gain, **nodo propioa** edo **izar-nodoa** da. Bestalde, $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 2a > 0$ denean soluzio guztiak infiniturantz doaz eta, iraganeko infinituan jatorritik irten direnez, puntu finkoa nodo propio ezegonkorra da. Adibidez, hurrengo sistemaren fase-espazioa 8.12 irudikoa da:

$$\dot{x} = -x - \epsilon xy, \quad (8.61)$$

$$\dot{y} = -y + \epsilon (y^2 - x^2). \quad (8.62)$$



8.12 IRUDIA (8.61)–(8.62) sistemaren fase-espazioa, (a) $\epsilon = 0$ eta (b) $\epsilon = 1$ kasuetan.

⁸Ikus, adibidez, Walter-en [31] testuliburua.

Sistema quasilineala ere ezegonkorra da $\text{tr } \mathbf{A} > 0$ denean eta asintotikoki egonkorra $\text{tr } \mathbf{A} < 0$ bada, baina puntu finkoaren forma geometrikoa alda daiteke. 8.12 irudiko kasuan bezalaxe sistema quasilinealaren oreka-puntua nodo propioa izan daiteke, baina gai ez-linealen eraginez nodo inpropioa —ia soluzio guztiak norabide berean sartzen (edo irteten) dira— edo fokua izan liteke. Arrazoa, berriro, kasu hau beste bien arteko muga izatean datza: gai ez-linealen eragin txikia puntu finkoaren forma aldatzeko gai da (puntua hiperbolikoa denez, egonkortasuna bera ez da aldatuko hurbilketa linealari sistema quasilinealera).

$$|a_{12}| + |a_{21}| \neq 0$$

Kasu honetan hurbilketa linealak bektore propio bakarra du, eta soluzioak te^{kt} erako gaiak dauzka.

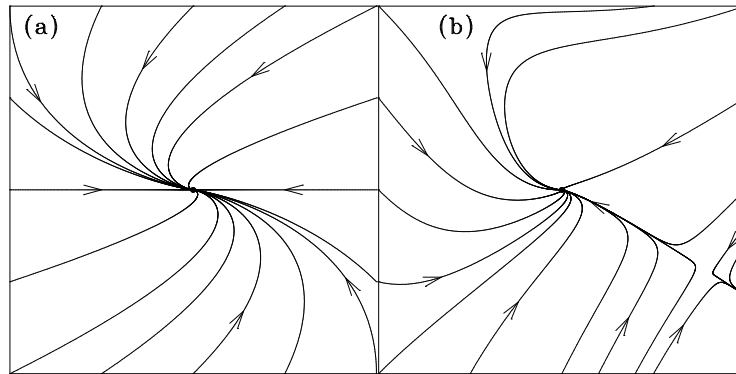
8.12 ARIKETA Froga ezazu kasu honetan, \mathbf{x}_1 bektore propioa bada, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_1 = k\mathbf{x}_1$, bigarren soluzio linealki independentea $(t\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)e^{kt}$ erakoa dela eta soluzio orokorra ondokoa:

$$x = [C_1x_1 + C_2(x_1t + x_2)]e^{kt}, \quad (8.63)$$

$$y = [C_1y_1 + C_2(y_1t + y_2)]e^{kt}. \quad (8.64)$$

Zergatik ez da hau gertatzen $a_{12} = a_{21} = 0$ denean?

Ageri denez, $2k = \text{tr } \mathbf{A} < 0$ bada, soluzio guztiak jatorrirantz doaz \mathbf{x}_1 bektorearen norabidean, $t \rightarrow \infty$ limitean $y/x \rightarrow y_1/x_1$ baitugu. Soluzio guztiak jatorrian malda berberarekin sartzen direnez, puntu finkoa **nodo endekatu** asintotikoki egonkorra da. Sistema quasilinealak ere puntu finko asintotikoki egonkorra izango du, baina nodoa izan daitekeen arren, gai ez-linealen eraginez foku bihur liteke.



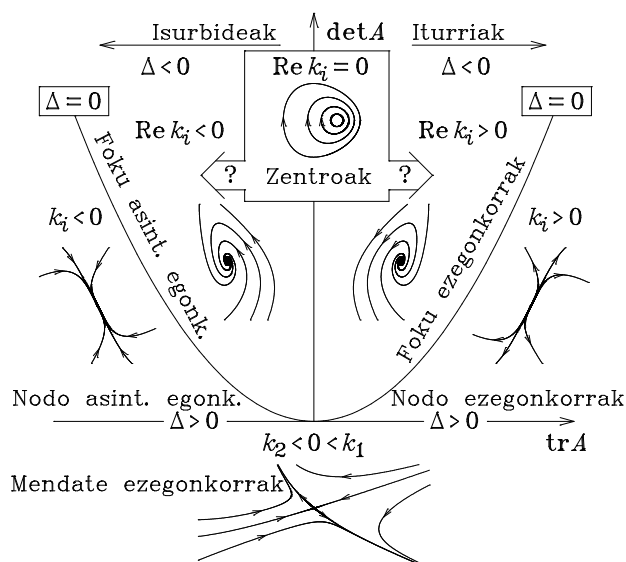
8.13 IRUDIA (8.38)–(8.39) sistemaren fase-espazioa, $d = 1$, $r = -2$ eta (a) $\epsilon = 0$, (b) $\epsilon = 1$ balioekin.

$2k = \text{tr } \mathbf{A} > 0$ denean, hurbilketa linealaren soluzio guztiak infinitura doaz eta jatorria ezegonkorra da. $t \rightarrow -\infty$ limitean $y/x \rightarrow y_1/x_1$ dugunez, puntu finkoa nodo ezegonkorra izango da. Sistema quasilinealaren kasuan, oreka-puntua nodo ezegonkorra edo foku ezegonkorra da.

8.5.4 Laburpena: Puntu finkoen sailkapena

Oreka-puntu bakartu bat duen sistema quasilineal lauaren egonkortasuna 8.14 irudian laburtzen dugu. Laburpen honetan ez dugu sartu ikusi berria dugun $\Delta = 0$ kasu berezia: sistema

quasilinealarena batzuetan alboko kasuetara laburtu arren, nodo propioa edo endekatua ere izan daiteke. $\det A = 0$ kasua ere kanpoan utzi dugu: hurbilketa lineala 8.3 problema ikusiko dugu eta kasu ez-lineala ez da hiperbolikoa. Beste kasu ez-hiperbolikoa ($k = \pm i\omega$), ordea, sartu egin dugu, praktikan maizago agertzen da eta. Esaterako, 8.7 atalean ikusiko dugunez, era honetakoak dira sistema mekaniko kontserbakorren potentzialaren minimoei dagozkien oreka-puntuak.



8.14 IRUDIA Puntu finkoen sailkapena.

Egonkortasunari begira, 8.14 irudiko sailkapena honela labur daiteke:

- Erro karakteristikoen parte erreal guztiak negatiboak badira, puntu finkoa erakarlea da, hau da, asintotikoki egonkorra.
- Nahikoa da parte erreal positiboko erro karakteristikoko bat egotea puntu finkoa ezegonkorra izateko.
- Parte errealik handiena nulua bada, hurbilketa linealaren azterketa ez da nahikoa sistema quasilinealaren egonkortasuna ezagutzeko: bestelako informazioa behar da.

Laburpen hau dimentsio guztietan aplikatu daiteke, puntu finkoen forma geometrikoen aniztasuna dimentsioarekin handituz bada ere. Jarraian ematen dugun emaitza honen enuntziatu zehatzaren frogapena, Walter-en [31] testuliburuan aurki daiteke, adibidez.

8.1 TEOREMA (Liapunov) Eman dezagun

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (8.65)$$

sistemak oreka-puntu bakartu bat duela:

$$f_i(t, x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.66)$$

Puntu horren inguruko lehen hurbilketa geldikorra bada,

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x_j^*) + R_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.67)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|R_i(t, x_1, \dots, x_n)|}{r} = 0, \quad r \equiv \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - x_j^*)^2}, \quad (8.68)$$

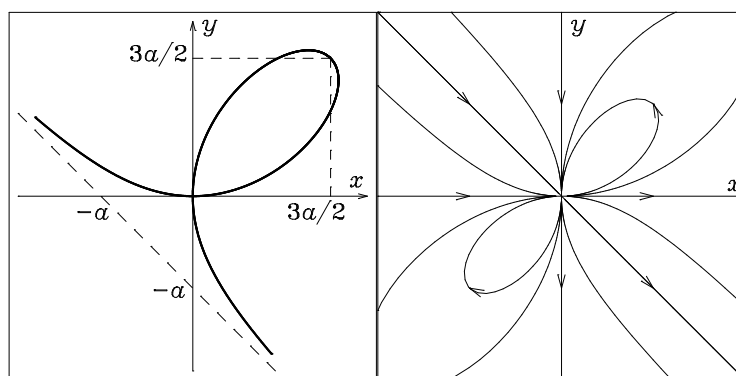
orduan:

- (a_{ij}) matrizearen balio propio guztien parte errealak negatiboak badira, oreka-puntua asintotikoki egonkorra da; eta
- balio propioen baten parte erreala positiboa bada, oreka-puntua ezegonkorra da.

Hurbilketa linealaren matrizea —funtzioak erregularrak badira $(\partial f_i / \partial x_j)$ matrize jacobiarrek puntu finkoan duen balioa— konstantea dela suposatu dugula azpimarratu behar da. Bestalde, parte erreal handieneko erro karakteristikoa irudikaria denean, metodo hau ez da erabakigarria sistema ez-linealaren kasuan, eta hurrengo ataletan aztertuko ditugun tekniketara jo beharko da.

8.6 Fase-ibilbideak

Kasu erraz batzuetan, (8.7) ekuazio diferentzialetik aise kalkula daiteke fase-ibilbideen ekuazioa (hau da, aldagai independenteen menpekoea ez den lehen integral bat). Hau gertatzen denean, ibilbideen azterketaz balia gaitzke oreka-puntuen (edo bestelako multzo aldaezinen) egonkortasuna ikertzeko.



8.15 IRUDIA Descartes-en orria eta (8.69) sistemaren fase-espazioa.

Adibidez,

$$\dot{x} = x^4 - 2xy^3, \quad \dot{y} = 2x^3y - y^4 \quad (8.69)$$

sistemaren jatorria ez da hiperbolikoa (zergatik?), baina ibilbideen ekuazio diferentziala 2.8 problematan ebatzi genuen: $x^3 + y^3 = 3axy$. Fase-ibilbide bakoitza **Descartes-en**⁹ orri bat da eta bere grafikoa, 8.15 irudiko ezkerrean agertzen dena, $x + y + a = 0$ zuzena asintotizatzen duela



⁹ **René Descartes** (1596-03-31, La Haye —gaur eguneko Descartes deitzen da—, Frantzia; 1650-02-11, Stockholm, Suedia). Galileo-ren atxilotzearen berriek *Le Monde, ou Traité de la Lumière* liburua ez argitaratzera bultzatu zuten. *Discours de la méthode* famatuaren ezagutzak seguruak eskuratzeko matematikaren erabilera defendatu zuen eta *La Géométrie* eranskinean gaur eguneko geometria cartesiarra deitzen duguna sortu zuen, erreferentzia-sistemak lehenengoz erabili zituelarik. Hala eta guztiz ere, lan batzuetan aurkeztu zituen mekanikari buruzko iritziz asko okerrak ziren. Orriaz gain, obalo cartesiarrak, zikloidea, espiral ekiangeluarra eta Newton-en hiruhortz aztertu zituen.

konprobatu ondoren ardatz koordinatuak jatorrian ukitzen dituela ikusiz lortzen da (edota kurba-
ren ekuazio parametrikoen bidez: $x = 3au/(1 + u^3)$, $y = 3au^2/(1 + u^3)$). Fase-espazioa irudi
horretako eskuinean marraztu da.

Fase-ibilbideen ekuazioarekin ez dakigu zein den haien ibiltze-noranzkoa, t -ren menpekota-
suna ezabatu baita. Hala ere, kasu gehienetan, jatorrizko sistema puntu berezi errazetan aztertuz,
oztoporik gabe ikus daiteke zeintzuk diren noranzkoak, zeren hauek era jarraituan aldatuko baitira
sistema dinamikoa erregularra den eremuan. Esaterako, oreka-puntuetan baizik ez dira alderanz-
tuko. Adibide honetan, hauxe dugu ardatz kartesiarretan eta diagonaletan:

Leku geometrikoa	\dot{x}	\dot{y}
$x = 0$	0	$-y^4 < 0$
$y = 0$	$x^4 > 0$	0
$y = x$	$-x^4 < 0$	$x^4 > 0$
$y = -x$	$3x^4 > 0$	$-3x^4 < 0$

Nahikoa da taula hau kasu honetan noranzkoak irudikoak direla ikusteko, baita horren ondorioz
jatorria ezegonkorra (baina egonkortasun lineala aztertzean ikusi genituen oreka-puntu ezegon-
korrak ez bezalakoa) dela ere.

8.13 ARIKETA Frogatu

$$\dot{x} = y^2, \quad \dot{y} = x^2 \quad (8.70)$$

sistemaren jatorria oreka-puntu ez-hiperbolikoa dela eta aztertu beraren egonkortasuna fase-ibilbideen
ekuazio diferentziala ebatziz.

8.7 Sistema mekaniko unidimentsionalak

Eman dezagun partikula baten gainean $F(x) = -V'(x)$ indar kontserbakorrak eta abiadura-
ren proportzionala den $R = -\gamma\dot{x}$ marruskadura-indarrak ($\gamma \geq 0$) eragiten dutela. Lehen esan
bezala $m = 1$ hartzen badugu,

$$\ddot{x} = -V'(x) - \gamma\dot{x} \quad (8.71)$$

higidura-ekuazioa sistema baten antzera idatz daiteke $v = \dot{x}$ abiadura erabiliz:

$$\dot{x} = P(x, v) \equiv v, \quad (8.72)$$

$$\dot{v} = Q(x, v) \equiv -V'(x) - \gamma v. \quad (8.73)$$

Sistema ez da lineala izango, $V = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$ energia potentzial elastikoari dagozkion osziladore
harmonikoaren eta osziladore harmoniko indargetuaren kasuetan izan ezik.

8.14 ARIKETA Egiaztatu

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x) \quad (8.74)$$

energia mekanikoa higidura-konstantea dela $\gamma = 0$ bada, eta monotono beherrakorra $\gamma > 0$ denean, hauxe betetzen baita:

$$\dot{E} = -\gamma v^2. \quad (8.75)$$

Aurkitu $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ eremu bektorialaren dibergentzia $\gamma = 0$ ($\gamma > 0$) denean, sistema kontserbakorra (iraungikorra) dela ondorioztatzeko.

Oreka-puntuak definitzen dituzten $v = 0$ eta $V'(x^*) = 0$ baldintzak, indar osoa nulua izanik hasieran partikula pausagunean dagoenean betetzen dira soilik, hau da, partikula potentzialaren mutur-puntu lokal batean geldirik dagoenean. Azter dezagun Liapunov-en lehen metodoak $(x^*, 0)$ puntuaren egonkortasunari buruz esaten duena.

8.15 ARIKETA Egiaztatu, $x = x^*$ puntuan $V(x^*) = 0$ betetzen bada, (8.71) ekuazioaren hurbilketa lineala ondokoa dela:

$$\ddot{x} = -V''(x^*)(x - x^*) - \gamma\dot{x}. \quad (8.76)$$

Idatzi ekuazio hau bi dimentsioko sistema baten modura eta egiaztatu esplizituki bere matrizea (8.72)–(8.73) sistema ez-linealaren matrize jacobiarrak x^* puntuan duen balioa dela. Ondorioztatu oreka-puntuaren erro karakteristikoak hauek direla:

$$k_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-V''(x^*) + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (8.77)$$

Emaitza hau eta $\gamma > 0$ dela kontuan harturik, oreka-puntuaren egonkortasuna honela sailkatzten da x^* mutur-puntuaren motaren arabera:

Maximo lokala $V''(x^*) < 0$ denean, erro karakteristikoaren zeinuak aurkakoak dira: $k_2 < 0 < k_1$. Maximoak, hortaz, mendate ezegonkorak dira beti.

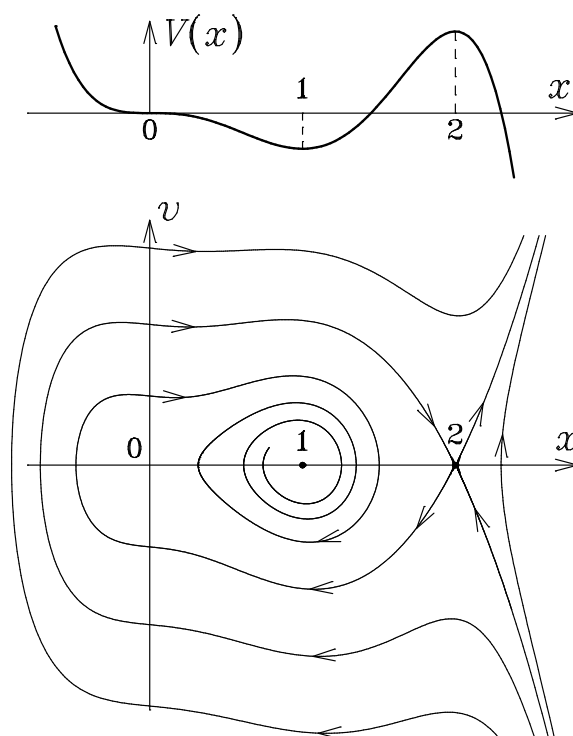
Minimo lokala $V''(x^*) > 0$ denean, (8.76) ekuazioa osziladore harmoniko indargetuarena da eta erro karakteristikoak ondokoak:

- Marruskadura oso handia ez bada ($\gamma^2 < 4V''(x^*)$), konplexuak eta parte erreal negatiboak: oreka-puntua foku asintotikoki egonkorra izango da.
- Kasu gainindargetuan ($\gamma^2 > 4V''(x^*)$) errealak eta negatiboak: oreka-puntua nodo asintotikoki egonkorra da. (Indargetze kritikoaren kasuan, $\gamma^2 = 4V''(x^*)$, foku edo nodo asintotikoki egonkorra dugu.)

Inflexio-puntua edo goi-ordenako muturra $V''(x^*) = 0$ denean, erro karakteristikoak 0 eta $-\gamma$ dira, oreka-puntua ez da hiperbolikoa, eta hurbilketa linealaren metodoak ez digu ezer esaten.

8.16 ARIKETA Egiaztatu 8.16 irudiko energia potentziala eta fase-espazioa ondoko sistemarenak direla:

$$\ddot{x} = x^2(x-1)(x-2) - \gamma\dot{x}. \quad (8.78)$$

8.16 IRUDIA (8.78) sistemaren energia potentziala, eta fase-espazioa $\gamma = 0.1$ kasuan.

Maximoen kasuan lorturiko emaitzak marruskadurarik gabeko kasuan ere zuzenak dira: kontrako zeinuko erro karakteristikoak dituztenez, maximo lokalak mendate ezegonkorak dira beti eta, praktikan, beraien barietate egonkorra ez dago baldintza normaletan gerta daitezkeen soluzioen artean.

Baina $\gamma = 0$ denean, minimoen kasuan (eta γ guztietarako inflexio-puntuen eta goi-ordenako muturren kasuetan) parte erreal handiena nulua da eta hurbilketa linealaren azterketa, sistema berez lineala denean (osziladore harmonikoaren kasuan, hain zuzen) soilik erabil daiteke: oreka-puntua zentro egonkorra, baina ez asintotikoki egonkorra, da kasu berezi honetan. Kasu ez-linealak ez dira hiperbolikoak eta bestelako informazioa behar dugu. Aipaturiko informazioa energia mekanikoaren kontserbazio-legeak ematen digu, zeren (8.75) ondorioz —edo (8.72)–(8.73) sistemari dagokion (8.7) ekuazioa $dv/dx = -V'(x)/v$ dela kontuan harturik—, zera baitugu:

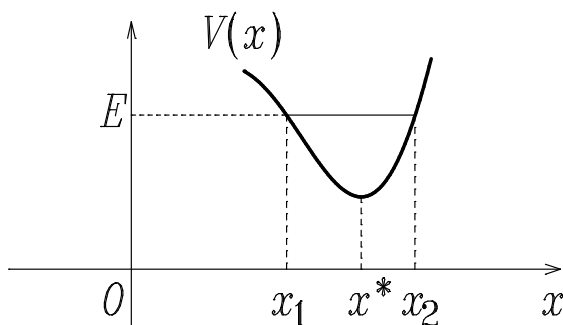
$$\frac{1}{2}v^2 + V(x) = E. \quad (8.79)$$

Denboraren menpekoa ez den lehen integral hau da fase-ibilbideen ekuazioa sistema mekaniko kontserbakorretan eta, 8.6 atalean testuinguru orokorrean aipatu genuenez, ezagutza honetaz balia gaitzake egonkortasuna aztertzeko. Mutur-puntu batean $V'(x^*) = 0$ dugunez, horren inguruan Taylor-en garapen moztuaren bidez hurbil dezakegu potentziala: $V(x) \approx V(x^*) + \frac{1}{2}V''(x^*)(x - x^*)^2 + \dots$. Ibilbideen ekuazioa, beraz, honela idazten da:

$$v^2 + V''(x^*)(x - x^*)^2 = 2[E - V(x^*)] + O[(x - x^*)^3]. \quad (8.80)$$

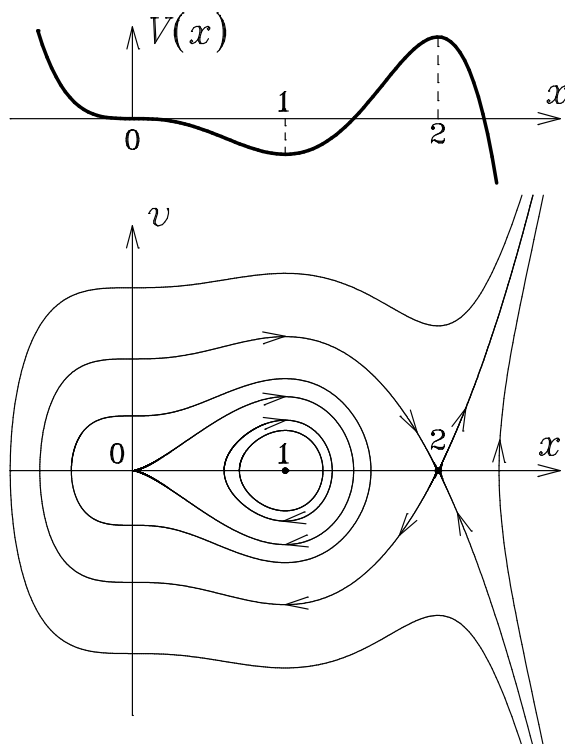
Ekuazio hau maximoen kasuan ($V''(x^*) < 0$) hiperbola batena da eta oreka-puntua mendatea dela egiaztatzen dugu. Minimoetarako ($V''(x^*) > 0$) elipse bat adierazten du eta, ondorioz, sistema mekaniko kontserbakorren kasuan hurbilketa linealaren zentroak sistema ez-linealean ere mota

berekoak direla espero dugu¹⁰. Izan ere, minimo koadratiko batetik oso hurbil energia potentziala parabola da eta dagokion sistema dinamikoa osziladore harmonikoa: fase-espazioa, beraz, G.5 irudikoa da. Gauza bera ikusteko mekanikaren ohiko arrazoibidea erabil daiteke: minimoaren



8.17 IRUDIA Minimo baten inguruko energia-diagrama.

hurbil energia-diagrama 8.17 irudikoaren antzekoa da eta partikula x^* oreka-puntuaren inguruan atzerapen-puntuaren artean ($x_1 < x < x_2$) ari da oszilatzeko; batez beste ez da puntu finkora hurbiltzen ezta handik urruntzen ere: jatorria zentro egonkorra da, baina ez asintotikoki egonkorra.



8.18 IRUDIA (8.78) sistemaren energia potentziala eta fase-espazioa $\gamma = 0$ baliorako.

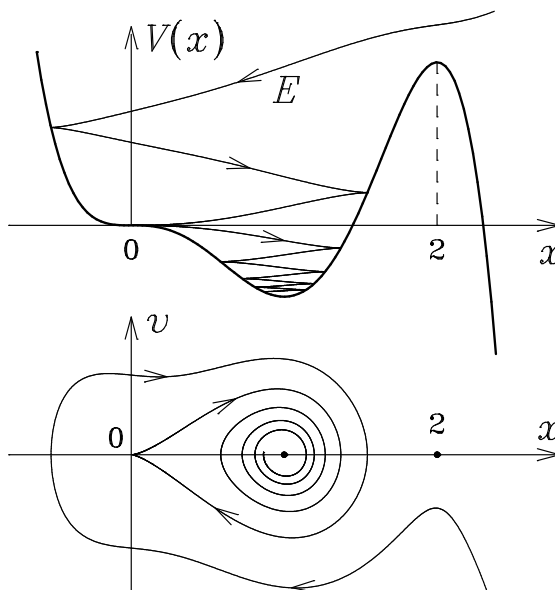
¹⁰Hurbilketa koadratikoan ibilbideak elipseak badira, oreka-puntuaren ingurune batean benetako ibilbideak ere itxiak direlako frogapen zehatza [30] testuan aurki daiteke, adibidez. Gainera, **Lagrange-ren teorema** edo **Lagrange-ren printzipioa** deitzen den emaitza hau, 8.8 atalean frogatuko dugu era zuzenean, testuinguru zabalago batean. Badirudi honen lehen frogapen zehatza Dirichlet-ena dela. Ikus [19] erreferentzia.

Inflexio-puntu baten kasuan, $V''(x^*) = 0$, garapenaren hurrengo ordena kalkulatu behar da hauxe lortzeko:

$$v^2 + \frac{1}{3}V'''(x^*)(x - x^*)^3 = 2[E - V(x^*)] + O[(x - x^*)^4]. \quad (8.81)$$

Hau parabola erdikubikoaren ekuazioa da eta mota honetako puntuari **goierpina** deritzo. Hone-lako oreka-puntuak ezegonkorak dira eta beraien forma geometrikoa 8.18 irudian erakusten da (8.78) sistemaren kasuan. Irudi berean maximo baten eta minimo baten inguruko fase-espazioa ere ikusten da.

Kasu kontserbakor honetan orbitak energia konstantekoak izateaz gain itxiak dira bornaturik daudenean. 8.18 irudian kasu berezi interesgarri bat ikusten da: maximoaren barietate ezegonkor bat aldi berean barietate egonkorra da, hau da, mendatetik irteten den orbita bat bertan sartzen da berriro. Horrelako orbitari **konexio homoklinikoa** deritzo. (Kualitatiboki desberdinak diren orbitak banantzen dituzenez, **banantzailea** ere deitzen zaio. Kasu honetan, orbita periodikoak eta bornaturik ez daudenak banantzen ditu.) Marruskadura dagoenean, $\gamma > 0$, energia mekanikoa etengabe txikitzen da eta minimoarenera (edo $-\infty$ -ra) jotzen du: mendateak eta goierpinak mota berekoak dira (ezegonkorak), baina zentroak egonkorrago bihurtzen dira eta foku asintotikoki egonkorak (edo, areago, nodo asintotikoki egonkorak) dira. Horrela, 8.18 iruditik 8.16 delakora joaten da. Azken sistema dinamiko horri dagokion 8.19 irudian, jatorrian dagoen goierpin eze-gonkoraren barietate egonkorra (alegia $t = \infty$ limitean oreka-puntura sartzen den soluzioa) eta ezegonkorra ($t = -\infty$ -an handik abiatu dena) ikusten ditugu, energia mekaniko beherrakorraren grafikoarekin batera.



8.19 IRUDIA Goierpinaren barietate egonkorra eta ezegonkorra.

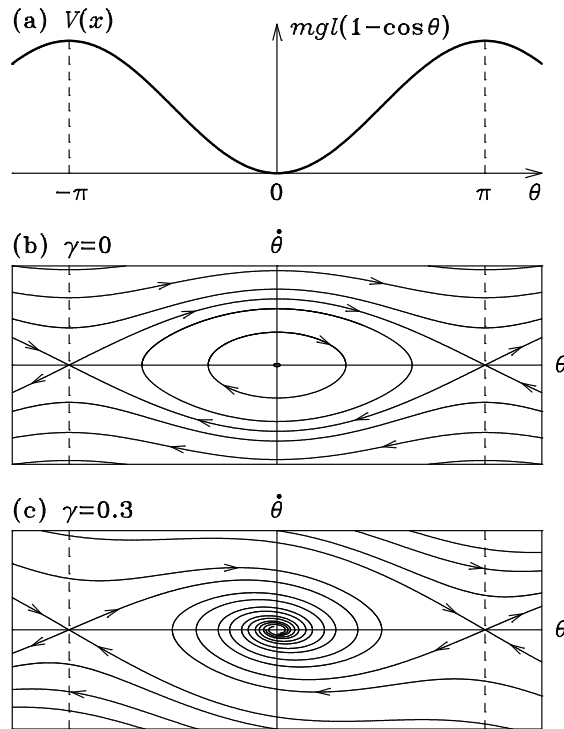
Pendulu indargetuaren kasuan, hauxe da higidura-ekuazioa:

$$ml^2\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl \sin \theta = 0. \quad (8.82)$$

8.17 ARIKETA Froga ezazu denbora-unitatetzat $\sqrt{l/g}$ aukeratuz eta $\gamma \equiv (c/mg)\sqrt{l/g}$ definizioa erabiliz, penduluaren ekuazioa ondoko eran idazten dela dimentsio gabeko aldagaietan:

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (8.83)$$

Energia potentziala $V(\theta) = mgl(1 - \cos \theta)$ da eta $\theta = 0$ puntuan minimo bat dauka eta maximo bat $\theta = \pm\pi$ delakoan ($-\pi \leq \theta \leq \pi$ aukeratuko dugu beti), 8.20 irudiko goiko aldean ikusten den bezala.



8.20 IRUDIA Penduluaren energia potentziala eta fase-espazioa.

Marruskadurarik gabe, $\gamma = 0$, minimoa zentro egonkorra, baina ez asintotikoki egonkorra, da eta maximoa mendate ezegonkorra. Azken honen barietate egonkorra, aldi berean barietate ezegonkorra denez, konexio homoklinikoa da. Minimo koadratiko guztien kasuan bezala, $\theta = 0$ puntuaren inguruan osziladore harmonikoaren G.5 fase-espazioa berreskuratzen dugu.

8.18 ARIKETA Zein da orbita homokliniko honen esangura fisikoa?

Marruskadura kontuan hartzen denean¹¹, $\theta = \dot{\theta} = 0$ jatorriaren egonkortasuna handitzen da eta ia orbita guztiak erakartzen duen foku (edo nodo) asintotikoki egonkorra bihurtzen da, $\theta = \pm\pi$ orain ere mendatea bada ere.

8.19 ARIKETA Zein orbita ez du erakartzen $\theta = \dot{\theta} = 0$ erakarleak? Ikuspuntu fisikotik, zeri dago-kio?

Sistema dinamiko orokorragoetan ez daukagu energia mekanikoak emandako informazio erabilgarria, baina, Liapunov-ek berak frogatu zuenez, oreka-puntuaren egonkortasuna zehazteko behar den informazioa ematen duen funtzio orokrago bat dago batzuetan. Funtzio hori egonkortasun linealak huts egiten duenean ere erabil daiteke eta energia mekanikoaren propietate batzuk orokortzen ditu.

¹¹Ikus, gainera, 8.8.4 atala.

8.20 ARIKETA Eman dezagun (8.72)–(8.73) sistemaren oreka-puntu bakartu bat $x^* = 0$ jatorri-
ra eraman ondoren bertan aukeratzen dela energia potentzialaren jatorria: $V(0) = 0$. Frogatu fase-
espazioan definituriko

$$E(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + V(x) \quad (8.84)$$

energia mekanikoa, definitu positiboa (negatiboa) dela potentzialaren minimo (maximo) bakartu baten
ingurune batean,

$$E(0, 0) = 0, \quad E(x, v) > 0, \quad \text{baldin } (x, v) \neq (0, 0), \quad (8.85)$$

eta beraren deribatua erdidefinitu negatiboa:

$$\frac{dE}{dt}(x, v) \leq 0. \quad (8.86)$$

8.8 Liapunov-en funtzioak

Liapunov-en **bigarren metodoa** —edo **metodo zuzena**—, oreka-puntuaren ingurune batean
definitua eta erregularra izateaz gain, propietate egokiak betetzen dituen $U(x, y)$ funtzio batez
baliatzen da.

8.2 TEOREMA (Liapunov) *Eman dezagun $(0, 0)$ jatorria (8.5)–(8.6) sistema dinamikoaren
oreka-puntu bakartua dela eta jatorriaren ingurune batean deribatu jarraituko $U(x, y)$ funtzio
bat dagoela, bertan definitu positiboa dena:*

$$U(0, 0) = 0, \quad U(x, y) > 0, \quad \text{baldin } (x, y) \neq (0, 0). \quad (8.87)$$

Orduan,

1. Jarioan zehar kalkulaturako deribatua erdidefinitu negatiboa bada,

$$\frac{dU}{dt}(x, y) \equiv \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) P(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) Q(x, y) \leq 0, \quad (8.88)$$

*jatorria egonkorra da (gerta liteke gainera asintotikoki egonkorra izatea, baina U funtzio
honek ez du azken propietate hau bermatzen).*

2. Deribatua nulua bada,

$$\frac{dU}{dt}(x, y) = 0, \quad (8.89)$$

jatorria egonkorra da, baina ez asintotikoki egonkorra.

3. Deribatua definitu negatiboa bada,

$$\frac{dU}{dt}(0, 0) = 0, \quad \frac{dU}{dt}(x, y) < 0, \quad \text{baldin } (x, y) \neq (0, 0), \quad (8.90)$$

jatorria asintotikoki egonkorra da.

4. Deribatua definitu positiboa bada,

$$\frac{dU}{dt}(0, 0) = 0, \quad \frac{dU}{dt}(x, y) > 0, \quad \text{baldin } (x, y) \neq (0, 0), \quad (8.91)$$

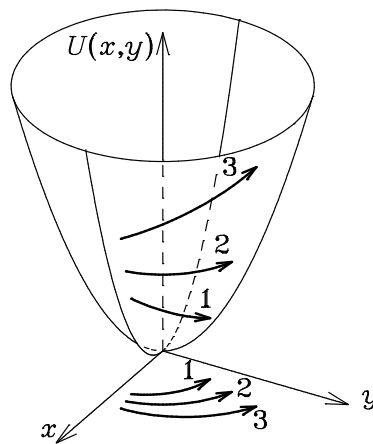
jatorria ezegonkorra da.

8.8.1 Oharrak

Aurreko baldintza multzoetako bat betetzen duen funtzioari **Liapunov-en funtzioa** deritzo. Azpimarratu behar da U funtzioa $-U$ -rekin ordezkatzuz eta «positibo» eta «negatibo» adjektiboak elkarrekin trukatzuz emaitza baliokide bat lortzen dela. Gainera, jatorria oreka-puntua denez, $dU/dt(0,0) = 0$ betetzen da beti; baina $U(0,0) = 0$ baldintza ez da garrantzitsua: nahikoa da puntu finkoan U -ren minimo bakartua egotea, $U(x,y) - U(0,0)$ transladatua Liapunov-en funtzioa izateko. Beraz, aurreko teorema ondoko moduan ere eman daiteke:

1. Oreka-puntuan U funtzioak minimo edo maximo bakartu bat badu eta dU/dt deribatuak alderantzizko motako mutur bat, oreka egonkorra da.
2. U funtzioa lehen integrala bada eta oreka-puntuan maximo edo minimo bakartu bat badu, oreka egonkorra da, baina ez asintotikoki egonkorra.
3. Funtzioak eta deribatuak oreka-puntuan dituzten muturrak bakartuak eta kontrako motakoak badira (bata maximoa eta bestea minimoa), egonkortasuna asintotikoa da.
4. Funtzioak eta deribatuak oreka-puntuan maximo bakartu bat dutenean, oreka-puntua eze-egonkorra da. Gauza bera gertatzen da, biek minimo bakartu bat dutenean.

Askatasun-graduak bi baino gehiago diren kasuetara era nabarian hedatzen da teorema hau eta hipotesi zabalagoak erabil daitezke, gero praktikan hain erraz egiaztatzen ez badira ere. (Ikus, adibidez, Elsgoltz-en [3] liburua.)



8.21 IRUDIA Zenbait fase-ibilbide eta dagozkien U funtzioaren balioen eboluzioa.

Teoremaren funtsezko ideia, energia-diagramekin egindakoaren orokorpen zuzena da; baina, oro har menpeko aldagai bat bestearen deribatua ez denez, beste dimentsio bat hartu beharko da kontuan. Eman dezagun U funtzioaren minimo baten ondoan hasten dela fase-ibilbide bat, 8.21 irudian erakusten den bezala. U funtzioa handitzen ez bada (bere deribatua positiboa ez delako) soluzioa ez da minimotik urrunduko eta oreka egonkorra izango da. Funtzioa higidura-konstantea bada, batez beste soluzioa ez da aldentuko, ezta hurbilduko ere: oreka egonkorra izango da, baina ez asintotikoki egonkorra. Deribatua negatiboa bada, U etengabe txikituko da eta soluzioak oreka-puntura joko du. Deribatua positiboa bada, funtzioa handituz joango da eta, oreka-puntutik oso hurbil hasi arren, handik urrunduko da.

8.8.2 Teoremaren frogapena

Teoremaren frogapen zehatza U funtzioaren eta bere deribatuaren jarraitasunean oinarritzen da. Lehen kasuan, $\epsilon > 0$ bakoitzeko ondokoa betetzeko moduko $\delta > 0$ bat dagoela frogatu behar dugu: jatorrian zentraturiko δ erradioko C_δ zirkuluko hastapen-baldintzei dagozkien $(x(t), y(t))$ soluzio guztiak ϵ erradioko C_ϵ zirkunferentziaren barruan daude betiko. U jarraitua eta definitu positiboa denez, C_ϵ zirkunferentzian zehar behe-borne bat dauka: $0 < M \leq U(x, y)$. Jatorrian nulua denez, beraren inguruan C_δ zirkulu bat aukera daiteke bere barnean $U(x, y) = |U(x, y) - U(0, 0)| < M$ betetzeko moduan. Hastapen-baldintza C_δ zirkuluaren barruan auke-ratzen bada, hasierako $U(x(t_0), y(t_0))$ balioa M baino txikiago izango da eta, soluzioan zehar kalkulaturako deribatua negatiboa denez, U ez da handitzen eta ezin irits daiteke M -raino eta are gutxiago C_ϵ zirkunferentzian dauzkan beste balioetaraino. Soluzioak, beraz, ez du C_ϵ zeharkatuko. C_ϵ zirkunferentzia U -ren definizio-eremuan zegoela suposatu dugu inplizituki; hau egia ez bada, nahikoa da hipotesia betetzeko bezain txikia den beste ϵ bati dagokion δ erabiltzea.

Argi dago bigarren kasuan ere aurrenekoan ikusitakoa betetzen dela. Gainera, $0 < |(x, y)| \leq \delta$ eremutik abiatzen den soluzio bakoitzeko, $U(x(t_0), y(t_0)) = K$ baldintza betetzen da, soluzioaren menpekora den $K > 0$ konstante egoki batekin. U funtzioa jarraitua eta definitu positiboa denez, $\eta > 0$ erradio bat aukera daiteke $|(x, y)| \leq \eta$ zirkuluan $U \leq K/2$ izateko moduan. Ibilbidean zehar $U = K$ dugunez, soluzioak ez du C_η zirkunferentzia zeharkatuko; hortaz, ez du jatorrirantz joko.

U definitu positiboa denez, hirugarren kasuko egonkortasun asintotikoa frogatzeko nahikoa da ikustea $U(t) = U(x(t), y(t)) \rightarrow 0$ betetzen dela $t \rightarrow \infty$ limitean. Jatorritik kanpo U behekorra da ($dU/dt < 0$) eta $(0, 0)$ puntuan hartzen duen balio nulua behe-bornetzat dauka. Beraz, limite ez-negatiboren baterantz doa: $U(t) \geq L = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \geq 0$. Eman dezagun $L > 0$ dela. $U(0, 0) = 0$ denez, $U(x, y) < L$ beteko da $\eta > 0$ erradio egokia duen jatorrian zentraturiko zirkulu baten barruan. Lehen kasuan frogaturiko emaitzaren ondorioz, $t \geq t_0$ guztietarako soluzioa $\eta \leq |(x, y)| \leq \epsilon$ eraztunean egongo da, baina dU/dt jarraitua eta definitu negatiboa denez, goi-borne negatiboren bat izango du aipaturiko eraztunean: $dU/dt \leq -K < 0$. Beraz,

$$U(t) = U(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dU}{dt} dt \leq U(t_0) - K(t - t_0) \rightarrow -\infty, \quad (8.92)$$

$t \rightarrow \infty$ limitean. Baina, U definitu positiboa denez, hau ezinezkoa da eta, ondorioz, $L = 0$.

Laugarren kasuan zera frogatu behar dugu: $\epsilon > 0$ jakin bat eta nahi bezain txikia den $\delta > 0$ bat aukeratuz, badagoela C_δ -ren barruan hasita C_ϵ zeharkatzen duen soluzioaren bat. U jarraitua denez, $M \geq U(x, y)$ borneren bat dago $|(x, y)| \leq \epsilon$ zirkuluan. Bestalde, deribatua jarraitua eta definitu positiboa denez, $0 < K \leq dU/dt$ borne positiboren bat dago $\delta/2 \leq |(x, y)| \leq \epsilon$ eraztunean. Beraz, soluzioa $\delta/2 < |(x, y)| < \delta$ eraztunean hasten bada, U era monotonoan handituko da C_ϵ zeharkatu arte.

8.8.3 Adibideak

Azter dezagun hurrengo sistema dinamikoa:

$$\dot{x} = -2xy, \quad (8.93)$$

$$\dot{y} = x^2 - y^3. \quad (8.94)$$

Jatorria oreka-puntu bakartua da; baina, hurbilketa lineala nulua denez, ez du inolako informazioerik ematen. Liapunov-en funtzioak kalkulatzeko ez dago metodo orokorrik, baina U definitua

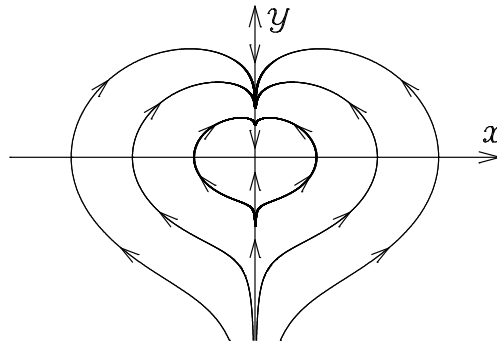
denetz egiaztatzen errazten duen ondoko egiturako funtzioak saia daitezke¹², gehienetan saioak huts egingo duen arren:

$$U = x^{2n} + ay^{2m}. \quad (8.95)$$

Kasu berezi honetan,

$$\dot{U} = -4nx^{2n}y + 2may^{2m-1}(x^2 - y^3) \quad (8.96)$$

lortzen da. y -ren berretura bakoitiak dauzkaten bi gaiek ez dute zeinu definiturik, baina ezaba daitezke $n = m = 1$ eta $a = 2$ aukeren bidez. Horrela, $U = x^2 + 2y^2$ definitu positiboa izanik, $\dot{U} = -4y^4$ deribatua erdidefinitu negatiboa dela ikusten dugu. Ondorioz, jatorria oreka-puntu egonkorra da. Deribatua definitua ez denez, Liapunov-en funtzio honekin ezin erabaki dezakegu gainera asintotikoki egonkorra den ala ez. Horretarako bestelako Liapunov-en funtzioen bat beharko genuke, baina esan bezala Liapunov-en funtzioak aurkitzeko gai izatea salbuespena da ohitura baino areago. Izan ere, kasu berezi honetan 8.22 irudiko zenbakizko azterketak —lehen erabili dugun Liapunov-en funtzioak ez bezala— jatorria asintotikoki egonkorra dela frogatzen du: ibilbide guztiak jatorrirantz doaz y ardatzean zehar.



8.22 IRUDIA (8.94) sistemaren fase-espazioa.

Adibide honetan gertatzen dena erraz uler daiteke oinarritzko arrazoibide kualitatibo batzuen bidez. Hasierako baldintza y ardatzean aukeratzen bada, $x = \dot{x} = 0$ izango dugu eta puntua ardatz horretan zehar higituko da eta, gainera, jatorrirantz zeren, kasu horretan y balioaren eta $\dot{y} = -y^3$ deribatuaren zeinuak elkarren kontrakoak direnez, $|y|$ txikituz joango baita. Ardatz bertikaletik kanpo, sistema $y \leq 0$ planoerdian hasten bada, $\dot{y} > 0$ izango da eta y handituz joango da puntua $y > 0$ planoerdia iritsi arte; eta ez da beheko planoerdia bueltatuko, $y = 0$ ardatzean $\dot{y} = x^2 > 0$ baita. Puntua $y > 0$ planoerdian dagoenean, x eta \dot{x} balioek aurkako zeinuak dituzte eta, beraz, $|x|$ txikituz joango da: puntua y ardatzerdi positiborantz joango da eta handik oso hurbil dagoenean, $\dot{y} \approx -y^3 < 0$ denez, jatorrirantz joko du.

8.21 ARIKETA Erabili $U = 2x^2 + y^2$ funtzioa ondoko sistemen jatorriaren egonkortasuna eztabai-datzeko:

$$\dot{x} = -x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = -2x^2y - y^3, \quad (8.97)$$

$$\dot{x} = -y + 2x^3, \quad \dot{y} = 2x + 3y^5. \quad (8.98)$$

Egiaztatu kasu hauetan ezin erabil daitekeela hurbilketa linealaren metodoa.

¹² x eta y aldagaien funtzio koadratiko orokorrak ere saia daitezke, definituak direnez ikusteko 8.12 problema-ren emaitza erabil daiteke eta. Agian, beste kasu batzuetan, problemaren fisikaz balia gintezke Liapunov-en funtzio egokiaren egitura asmatzeko.

8.8.4 Sistema mekaniko unidimentsional iraungikorak

Azpimarratu behar da, $\gamma > 0$ denean (8.71) sistema mekaniko iraungikorraren minimoen egonkortasun asintotikoa frogatzeko, ez genuela Liapunov-en metodo zuzena erabili (Liapunov-en funtziotzat erabili dugun energia mekanikoaren deribatua ez da definitu negatiboa), hurbilketa linealaren metodoa baizik. Eman dezagun $V(x)$ funtzioak minimo bakartua duela $x = x^*$ puntuan eta

$$\ddot{x} = -V'(x) - g(x, \dot{x})\dot{x} \quad (8.99)$$

sistema mekaniko orokorragoan $g(x, \dot{x})$ funtzioa ez dela negatiboa eta gehienez $(x, \dot{x}) = (x^*, 0)$ puntuan dela zeroa. Hori dela eta, energia mekanikoaren deribatua erdidefinitu negatiboa izango da: $\dot{E} = -g(x, \dot{x})\dot{x}^2 \leq 0$. Liapunov-en teoremaren ondorioz, aipaturiko puntua egonkorra da; baina oreka-puntuan izan ezik $\dot{E} < 0$ denez, energia mekanikoa monotono beherakorra izatea eta soluzioa oreka-punturantz joatea —eta egonkortasuna asintotikoa izatea, beraz— espero dugu fisikaren ikuspuntutik. Benetan horrela gertatzen dela [19] eta [31] testuetan frogatzen da, adibidez. Emaitza hau sistema mekanikoen energia mekanikoaren ekuazioaren ondorioa da: bestelako Liapunov-en funtzioekin, berriz, deribatu erdidefinitu negatibo batetik ez da beti egonkortasun asintotikoa ondorioztatzen.

8.22 ARIKETA Eztabaidatu

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x}^{2n+1} + \omega^2 x = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.100)$$

osziladore ez-linealen egonkortasuna, γ konstantea positiboa denean. Zer gertatzen da $\gamma < 0$ bada?

8.8.5 Sistema mekaniko unidimentsional kontserbakorrak

Bigarren motako Liapunov-en funtzio bat lehen integrala da eta, 4.1.1 atalean ikusi genuenez, fase-ibilbideen ekuazioa ematen du. Adibiderik garrantzitsuena, baina ez bakarra, lehenago aztertutako (8.15) sistema mekaniko kontserbakorretan gertatzen da: x^* puntuan energia potentzialaren minimo bakartu bat badago, fase-espazioko $(x^*, 0)$ puntua energia mekanikoaren minimo bakartu bati dagokio eta zentro egonkorra izango da, energia mekanikoa higidura-konstantea da eta.

Kasu berezi honetarako 8.7 atalean egindako azterketa geometrikoa, zuzenean heda daiteke kasu orokorrera. Notazioa errazteko, U funtzioaren maximoa edo minimoa $(0, 0)$ puntuan dagoela suposatuko dugu, baita $U(0, 0) = 0$ balioa aukeratu dugula ere. Oreka-puntuaren inguruko Taylor-en garapena eginez, honela agertzen zaigu $U = K$ balioari dagokion fase-ibilbidearen ekuazioa:

$$U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, 0)y^2 + \dots = K. \quad (8.101)$$

Hipotesiz, $(0, 0)$ puntuan dagoen muturra minimoa edo maximoa da; beraz, ondoko baldintza hau betetzen da:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} > 0. \quad (8.102)$$

Baina, hauxe betetzen bada, oreka-puntutik oso hurbil fase-ibilbideen ekuazioaren oso hurbilketa ona den

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(0,0)x^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(0,0)xy + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(0,0)y^2 = K \quad (8.103)$$

ekuazio koadratikoa, elipse batena da. Beraz, oreka-puntua zentroa izatea espero dugu, eta horixe da goiko teoremaren bigarren kasuak frogatzen duena.

8.9 Zentro ez-linealak

Praktikan gehienetan agertzen diren oreka-puntu ez-hiperbolikoak hurbilketa linealaren zentroei dagozkienak izaten dira. Erro karakteristikoak irudikariak dira eta, 8.5.2 atalean ikusi genuen bezala, sistema ez-linealaren oreka-puntua foku asintotikoki egonkorra edo ezegonkorra izan daiteke; eta batzuetan —hala nola 8.21 ariketaren kasuan— Liapunov-en funtzio egokiaren bidez froga daiteke horrelakoa dela. Baina atal honetan zentro ez-linealak aztertuko nahi ditugu: nola froga daiteke hurbilketa linealean zentroa dena sistema osoan ere horrelakoa dela?

Kasu bat aurreko atalean ikusi dugu: Liapunov-en teoremaren ondorioz, sistemaren lehen integral batek minimo edo maximo bakartu bat badu oreka-puntuan, azken hau zentroa da. Hori gertatzen da sistema mekaniko kontserbakorren energia potentzialaren minimoetan eta beste kasu batzuetan, ondoko adibideak erakusten duen bezala.

8.23 ARIKETA Aurkitu

$$\dot{x} = -y + x^2, \quad \dot{y} = x - 2xy \quad (8.104)$$

sistemaren jatorriaren erro karakteristikoak eta ondorioztatu zentroa dela hurbilketa linealean. Frogatu

$$U = x^2 + y^2 - 2x^2y \quad (8.105)$$

funtzua lehen integrala dela eta minimo bat duela jatorrian. Nolakoak izango dira jatorritik oso hurbil dauden fase-ibilbideak?

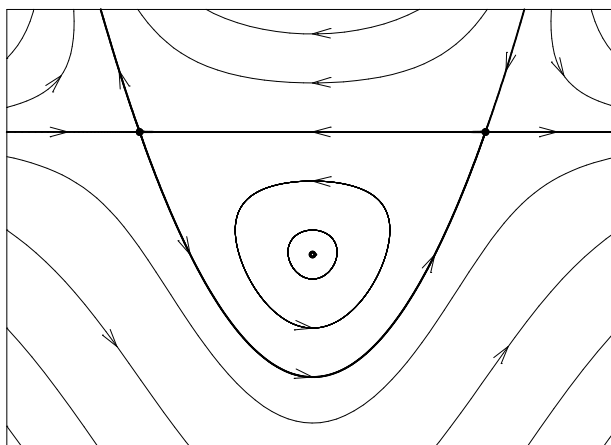
Hurrengo ataletan askotan gertatzen diren bestelako zentro ez-linealak aztertuko ditugu.

8.9.1 Sistema dinamiko kontserbakorrak

Definizioz, sistema kontserbakorretan fase-espazioaren azalera kontserbatu egiten da. Beraz, horrelako sistemetan fokuak eta nodoak debekaturik daude, horrelakoen inguruan fase-espazioaren azalera handituz baitoa ezegonkorak direnean, eta txikituz asintotikoki egonkorak badira. Horrelako sistemen hurbilketa linealean $\text{tr } \mathbf{A} = \partial P / \partial x(0,0) + \partial Q / \partial y(0,0) = 0$ denez, oreka-puntua ondoko hiru motatakoa izan daiteke soilik, bai hurbilketa linealean eta bai sistema osoan ere:

1. $\det \mathbf{A} > 0$ bada, zentro egonkorra.
2. $\det \mathbf{A} < 0$ bada, mendate ezegonkorra.
3. $\det \mathbf{A} = 0$ denean, hurbilketa linealaren oreka-puntua ez da bakartua (ikus 8.3 problema) eta bestelako metodoren bat erabili behar da sistema osoaren oreka aztertzeko.

8.24 ARIKETA Froga ezazu (8.104) sistema kontserbakorra dela. Egiaztatu fase-espazioa 8.23 irudikoa dela.



8.23 IRUDIA (8.104) sistema dinamikoaren fase-espazioa.

8.9.2 Sistema dinamiko hamiltondarrak

Liouville-ren teoremaren arabera sistema hamiltondarrak kontserbakorrak direnez, horrelakoen zentro linealak sistema osoaren zentroak dira beti.

8.25 ARIKETA Froga ezazu (8.104) sistema hamiltondarra dela.

8.9.3 Sistema dinamiko itzulgarriak

Azter dezagun ondoko sistema mekaniko unidimentsionala γ konstantea denean:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x}^{2n} + \omega^2 x = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.106)$$

Osziladore ez-lineal honen jatorrian zentro lineal bat dugu, hurbilketa lineala osziladore harmonikoa baita.

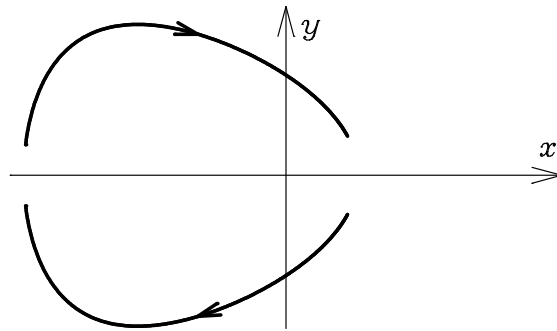
8.26 ARIKETA Froga ezazu (8.106) ekuazioari dagokion

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - \gamma y^{2n} \quad (8.107)$$

sistema dinamikoa ez dela kontserbakorra (eta, beraz, ez dela hamiltondarra) eta ezin dela energia mekanikoa erabili Liapunov-en funtziotzat.

Hiperbolikoa ez den oreka-puntu hau aztertzeko sistemaren simetria erabiliko dugu; izan ere, (8.107) sistema denbora-alderanzketarekiko aldaezina da: $(t, x, y) \rightarrow (-t, x, -y)$ aldaketa egiten badugu, sistema bera ez da aldatzen. Beraz, fase-ibilbide bakoitzak «biki» bat du, aurrekoaren x ardatzaren inguruko islapena egin ondoren aurkako ibiltze-noranzkoa aukeratuz lortzen dena, alegia. Argi dago foku baten inguruan fase-espazioak ezin izan dezakeela horrelako simetriarik; beraz, fokuak debekaturik daude eta hurbilketa linealean zentroa badago, gauza bera gertatuko da sistema osoan.

Testuinguru orokorrean, eman dezagun fase-espazioan definituriko $\mathbf{x}' = \mathcal{R}(\mathbf{x})$ transformazioa bi aldiz aplikatuz hasierako puntua berreskuratzen dela: $\mathcal{R}(\mathcal{R}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$. Sistema dinamikoa $(t, \mathbf{x}) \rightarrow (-t, \mathcal{R}(\mathbf{x}))$ transformazioarekiko aldaezina bada, **itzulgarria** dela esaten dugu eta hurbilketa linealean zentroak diren puntuak, mota berekoak dira sistema osorako. (Ikus [29] testuliburua.)



8.24 IRUDIA (8.107) sistemaren fase-ibilbide bat eta bere «bikia».

8.27 ARIKETA Froga ezazu (8.104) sistema itzulgarria dela. Zein da fase-espazioak erakusten duen simetria?

Kasu berezi gisa, $\ddot{x} = F(x)$ sistema mekaniko kontserbakorren energia potentzialaren minimoak zentroei dagozkiela ikusten dugu berriro ere, horrelako sistemak, hamiltondarrak eta kontserbakorrak izateaz gain, itzulgarriak baitira.

8.10 Muga-zikloak

Soluzio periodikoak, fase-espazioko orbita itxiei dagozkienak hain zuzen, ez dira urriak. Esaterako, potentzial-putzu batean harrapatuta dagoen partikula klasikoa, minimoaren inguruko orbita periodiko batean higitzen da. Oreka-puntuaren inguruko oszilazioen kasuan, soluzio periodikoen familia oso bat dugu, baina beste kasu batzuetan **muga-ziklo** bat —hau da, bere ingurune batean beste inolako soluzio periodikorik ez daukan orbita periodiko bakartu bat— ager daiteke. Adibide bat ikustearren ondoko sistema ez-lineala aztertuko dugu:

$$\dot{x} = \lambda x - y - x(x^2 + y^2), \quad (8.108)$$

$$\dot{y} = x + \lambda y - y(x^2 + y^2). \quad (8.109)$$

Sistema dinamiko hau adibide akademikoa denez, funtsean oso erraza da.

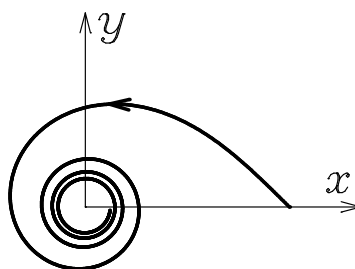
8.28 ARIKETA Egiaztatu (8.108)–(8.109) sistema honela idazten dela koordenatu polarretan:

$$\dot{r} = \lambda r - r^3, \quad (8.110)$$

$$\dot{\phi} = 1. \quad (8.111)$$

Koordenatu hauetan, beraz, sistema bitan banantzen da eta eboluzio angeluarra bistakoa da: $\varphi = t - t_0$. (8.110) ekuazioaren $r = 0$ puntu finkoari dagokion $(x, y) = (0, 0)$ oreka-puntuaren egonkortasun aztertuko dugu hasteko.

8.29 ARIKETA Froga ezazu (8.108)–(8.109) sistemaren berretzaile karakteristikoak $k = \lambda \pm i$ direla, eta (8.110) ekuazioarena $k = \lambda$.



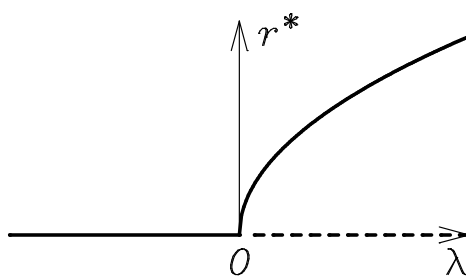
8.25 IRUDIA (8.108)–(8.109) sistemaren fase-espazioa, $\lambda = -0.01$ baliorako.

Bi bide hauetatik gauza bera lortzen da, noski: $\lambda < 0$ denean jatorria foku asintotikoki egonkorra da —8.25 irudian ikusten den bezala— eta $\lambda > 0$ balioetarako foku ezegonkorra. Hortaz, $\lambda = 0$ balioan oreka-puntuaren egonkortasuna aldatu da: adarkatze bat —Hopf-en¹³ adarkatzea deitzen dena— gertatu da.

8.30 ARIKETA Nolako oreka-puntua da (8.108)–(8.109) sistemaren jatorria $\lambda = 0$ denean?

Baina aipaturiko adarkatzean zerbait gehiago gertatu da, (8.110) ekuazio erradiala puntu finko bat eduki beharrean bi dauzka ondoren: $r = 0$ beti existitzen da, baina $r = \sqrt{\lambda}$ oreka-puntua $\lambda = 0$ denean sortzen da preseski. Hau guztiau 8.26 irudian erakusten da era grafikoan: puntu asintotikoki egonkorra lerro jarraituaren bidez adierazi da eta ezegonkorra lerro etenaz. $\lambda = 0$ puntuan, puntu asintotikoki egonkor berriaren sortzearekin batera gertatzen da $r = 0$ puntu finkoaren ezegonkortasunaren hasiera.

8.31 ARIKETA Aurkitu (8.110) ekuazioaren $r = \sqrt{\lambda}$ puntu finkoaren berretzaile karakteristikoa eta ondorioztatu asintotikoki egonkorra dela. Erabili 8.1 atalean ikusitako metodo grafikoa 8.26 irudiko adarkatze-diagrama beste modu batera egiaztatzeko.



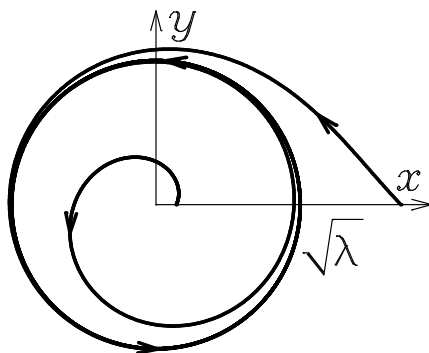
8.26 IRUDIA (8.110) ekuazioaren adarkatze-diagrama.

Orain, (8.110) ekuazioaren $r = \sqrt{\lambda}$ puntu finkoa (8.108)–(8.109) sistemaren orbita itxia (zirkularra: $x^2 + y^2 = \lambda$) eta, beraz, periodikoa da. Gainera bakartua denez, $r = \sqrt{\lambda}$ orbita muga-ziklo bat dugu.

$r = \sqrt{\lambda}$ puntua asintotikoki egonkorra da eta mota berekoa izango da $x^2 + y^2 = \lambda$ muga-zikloa ere. 8.27 irudian ikus daiteke erakarle unidimentsional hau.



¹³ **Heinz Hopf** (1894-11-19, Breslau, Alemania, gaur eguneko Poloniako Wrocław; 1971-06-03, Zollikon, Suitza). Topologia algebraikoari buruz egin zuen lan batik bat. Bektore-eremuak aztertu zituen eta kurbadura integralaren formula baten aurkitzailea da. Puntu finkoaren Lefschetz-en teorema orokortu, homotopia-klaseak aztertu eta bere izeneko aldaezina definitu zuen.



8.27 IRUDIA (8.108)–(8.109) sistemaren fase-espazioa, $\lambda = 1/2$ baliorako.

8.32 ARIKETA Aurkitu (8.110) ekuazioaren soluzio esplizitua eta frogatu soluzio guztiak (bat izan ezik: zein?) muga-ziklorantz doazela $t \rightarrow \infty$ limitean.

8.16 problematik ikusiko dugunez, bere inguruko orbitak aldaratzen dituen muga-ziklo eze-gonkorak eta erdiegonkorak ere ager daitezke. Azken hauek barrutik oso hur dauden orbitak erakartzen dituzte eta kanpoko ibilbide hurbilak aldaratzen, edo alderantziz.

Liapunov-en hurbilketa linealaren antzera, badago muga-zikloen egonkortasuna aztertzeko teoria bat: **Floquet-en teoria** deitzen dena, hain zuzen. Baina Floquet-en berretzaileak praktikan kalkulatzeko askoz ere zailagoa izaten da. Egia esan, horietariko bat oso erraza da: zikloaren norabide tangenteari dagokiona nulua da beti. Adibidez, (8.108)–(8.109) sisteman aipaturiko berretzaile nulua, eboluzioa zikloaren norabidean azaltzen duen $\dot{\varphi} = 1$ ekuazioari dagokio eta bestea erradioaren norabideari (eta -2λ da, zergatik?).

Jarrian aipatzen dugun teorema ospetsuaren arabera, lehenago ikusitako portaerak dira, funtsean, gerta daitezkeen guztiak bi dimentsioko sistema autonomoen kasuan: soluzioa puntu finko baterantz (edo infiniturantz) doa, periodikoa da, edo soluzio periodiko batera jotzen du.

8.3 TEOREMA (Poincaré eta Bendixson) *Eman dezagun planoko \mathcal{R} eremua trinkoa (hau da, bornatua eta itxia) dela eta bertan (8.5)–(8.6) sistema dinamikoak ez duela inolako puntu finkorik. Ibilbide bat $t \geq t_0$ aldiune guztietan \mathcal{R} eremuan badago, itxia (periodikoa) da edo ibilbide itxi baterantz doa; edozein kasutan, \mathcal{R} eremuan ibilbide itxi bat dago.*

Emaitza honen frogapena Hirsch eta Smale-ren [20] liburuan aurki daiteke, adibidez.

Atal hau amaitzeko, **Liénard-en ekuazio orokortua** aztertuko dugu:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0. \quad (8.112)$$

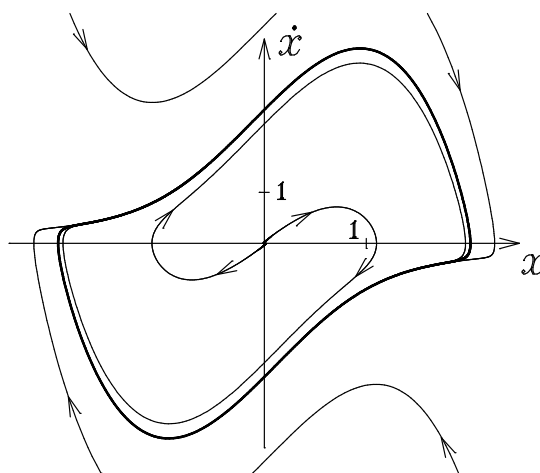
Ekuazio hau osziladoreen eredu orokorra da eta, kasu berezi gisa, osziladore harmonikoa eta van der Pol-ena lortzen dira. Orain,

$$F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad G(x) = \int_0^x g(u) du \quad (8.113)$$

definizioak eginik, **Levinson eta Smith-en teorema** —**Liénard-en teorema** ere deitzen dena— aipatuko dugu. (Frogapena Simmons-en [9] testuan aurki dezake irakurleak.) Eman dezagun ondoko baldintzak betetzen direla:

- f bikoitia da eta deribatu jarraitua du.
- Badago hurrengo bi baldintzak betetzen dituen $a > 0$ konstante bat:
 $0 < x < a$ denean $F(x) < 0$ da, eta
 $x > a$ guztietarako $F(x)$ positiboa eta monotono gorakorra da, eta $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.
- g bakoitia da, $x > 0$ denean $g(x) > 0$ dugu, eta $g'(x)$ jarraitua da.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$.

Orduan, Liénard-en (8.112) ekuazio orokortuak, jatorria inguratzen duen soluzio periodiko bakarra dauka eta beste soluzio guztiak $-x = \dot{x} = 0$ puntu finkoa izan ezik, jakina— bertarantz doazen espiralak dira.



8.28 IRUDIA Van der Pol-en osziladorearen muga-zikloa $\epsilon = 2$ baliorako.

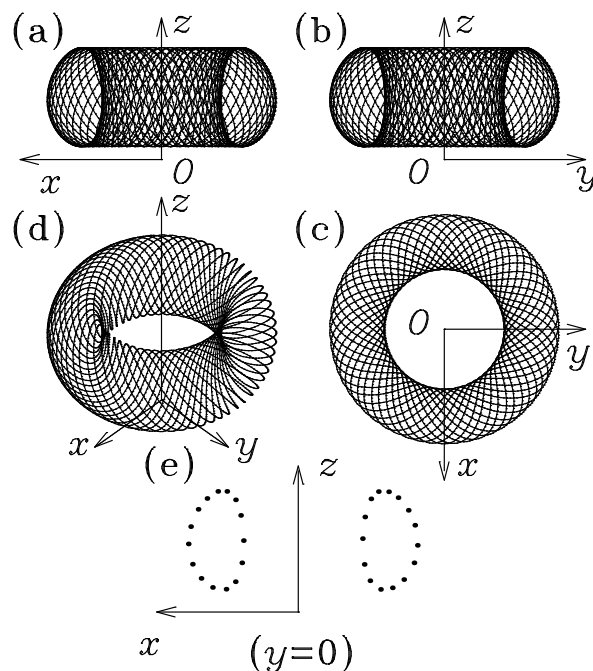
Izan ere, aurreko adibidearen muga-zikloa bezain erraza ez den beste bat 7. gaian ikusi genuen, (7.35) van der Pol-en osziladorea aztertzean. Muga-ziklo hura 8.28 irudian erakusten da bertarantz doazen orbita batzuekin batera. Kasu honetan ϵ balioa handiegia da 7.4.2 ataleko perturbazio-azterketa zuzenean erabili ahal izateko: ikusi berri dugun teoremaz baliatu behar da hemen.

8.33 ARIKETA Egiaztatu van der Pol-en (7.35) ekuazioak Levinson eta Smith-en teoremaren hipotesiak betetzen dituela $\epsilon > 0$ denean eta, beraz, muga-ziklo asintotikoki egonkor bat duela.

8.11 Dimentsio gehiago...

Bi dimentsioko fase-espazioak sailkatzeko Poincaré-ren egitasmoa, funtsean, Poincaré eta Bendixson-en teoremekin amaitu zen; baina, zer gertatzen da sistema dinamikoaren dimentsioa hiru edo handiagoa denean? Erraz asmatzen da bi periodo (edo gehiago) dauzkan soluzioak (barkartuak zein familia jarraitu batekoak, erakarleak zein ezegonkorak) ager daitezkeela; baina, Poincaré-ren beraren lan aitzindariak eta, batez ere, azken hogeita hamar urteko garapenek frogatu dutenez, hiru dimentsiotatik gora dinamikaren aldaeren aberastasuna askoz ere handiagoa da eta kaos determinista deitutako fenomeno erakargarria ager daiteke.

8.10 atalean Hopf-en adarkatze batek (8.108)–(8.109) sistemaren oreka-puntuaren egonkortasuna deuseztatzen zuen, muga-ziklo asintotikoki egonkor bat sortzen zen une berean; hau da, erakarle puntual bat unidimentsionala eta periodikoa den beste batekin ordezkatzeko. Hopf-en bigarren adarkatze baten ondorioz, muga-zikloaren egonkortasuna desagertu daiteke bi periodo dauzkan erakarle bidimentsional bat agertzeko. 8.29 irudiko adibidean,



8.29 IRUDIA (8.114)–(8.116) sistemaren proiektzioak eta Poincaré-ren sekzioa.

$$\dot{x} = x(a - b + z + d(1 - z^2)) - cy, \quad (8.114)$$

$$\dot{y} = y(a - b + z + d(1 - z^2)) + cx, \quad (8.115)$$

$$\dot{z} = az - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (8.116)$$

sistemaren orbita baten zati bat ikusten da, $a = 2.01$, $b = 3$, $c = 0.25$ eta $d = 0.2$ balioetarako. y , x eta z ardatzen norabideetan lorturiko proiektzioak irudiko (a), (b) eta (c) parteetan ikusten dira, hurrenez hurren. Lehen oktantearen erdikariaren norabideari dagokiona, ordea, (d) delakoan erakusten da. Aipaturiko kasuetan, proiektzioaren bidez hiru dimentsioko sistema dinamikoaren soluzioen adierazpen bidimentsionalak lortzen dira. Gauza bera egiteko, badago beste aukera bat, **Poincaré-ren sekzioa** deitzen dena. Azken metodo honetan soluzioaren eta gainazal jakin baten arteko ebakidura-puntuak marrazten dira. Irudiko (e) zatian, adibidez, soluzioa $y = 0$ planoan dagoenean dagozkion (x, z) koordenatuek definituriko puntua marraztu da. Edozein kasutan, 8.29 irudia arretaz aztertuz, portaera iragankorraren ondoren, orbita bi dimentsioko gainazal itxi batean kiribiltzen dela ikusten da. Erakarle honen forma geometrikoa **toru** izenaz ezagutzen da topologian, eta toruaren eta $y = 0$ planoaren ebakidura bi zirkunferentzia dira (zirkunferentzia topologikoak dira hauek, ohiko zirkunferentzia apurtu gabe deformatuz lor daitezkeenak). Irudiko orbitatik hasierako portaera iragankorra ezabatu da, sistema erakarlearen oso hurbil egoteko behar bezain tarte luzea pasatu dela eta ikuspuntu praktikotik erakarle barruan dagoela pentsatu ahal izateko asmoz. Hastapen-baldintzak aldatu ondoren, berriro portaera iragankorra igaro arte itxaroten bada, lortzen den orbita ikuspuntu kualitatibotik baliokidea da: ez

da berdina, baina gainazal berean antzeko moduan biribiltzen da. Erakarlea toruaren azala da, eta ez orbita bakar bat, dimentsioa 0 edo 1 zenean gertatzen zen ez bezala. Erakarlea bera ez da soluzioa —soluzioak dimentsio bateko kurbak dira— baina, oreka-puntuak eta muga-zikloak bezalaxe, **multzo aldaezina** da: multzoan puntu bat duen edozein soluzio, barruan egongo da betiko (eta betidanik).

Muga-ziklo baterantz jausten den orbita (ia) periodikoa da portaera iragankorra indargabetu denean. Antzeko gauza bat gertatzen da, 8.29 irudikoa bezalako erakarle baterantz doan orbita batekin, baina orain bi periodo egongo dira tartean: toruaren bi sekzio nagusietariko bakoitzaren inguruan bira bat egiteko behar den denbora-tarteak periodo bat definitzen du. Higidura **biperiodikoa** dela esaten da. Bi periodoak elkarneurgarriak badira, hau da, beraien zatidura zenbaki arrazionala bada ($T_1/T_2 = p/q$), orbita itxia eta periodikoa da, $qT_1 = pT_2$ periodoa onartzen baitu. Kasu orokorrean, berriz, bi periodoak ez dira elkarneurgarriak izango eta orbita, itxia izan beharrean, era dentsuan estaliko du torua, hau da, edozein puntutatik nahi bezain hurbil pasatuko da. Muga-zikloen kasuan bezalaxe, bi dimentsioko toru ezegonkorak eta erdiegonkorak ere ager daitezke.

Fase-espazioaren dimentsioa lau bada, hiru dimentsioko multzo aldaezinak ager daitezke. Esate baterako, hiru periodo dauzkan orbitak egon daitezke hiru dimentsioko toruetan. Era berean, dimentsioa handia (edo infinitua) bada, periodo anitzeko higidurak gerta daitezke. Izan ere, Landau-ren¹⁴ ereduari, jariakinen higidura azaltzen duten deribatu partzialetako ekuazioen fase-espazioa dimentsio infinitukoa denez, elkarren segidako Hopf-en adarkatzeek oszilazio-modu berriak kitzikatzen dituzten heinean portaera laminarretik turbulentura igarotzen da. Gaur egun badakigu, ordea, hau guztiau ez dela beharrezkoa portaera korapilotsua agertzeko. . .

8.12 ... eta kaos determinista

Izan ere, nahikoa da sistema dinamiko autonomo ez-linealaren dimentsioa hiru izatea **kaos determinista** izenaz ezagutzen diren portaeretako batzuk agertzeko. Adibiderik entzutetsuena Lorenz-en sistema dugu:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (8.117)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (8.118)$$

$$\dot{z} = xy - bz. \quad (8.119)$$

Sistema honen orbita baten hiru proiektzio kartesiarrak eta $(\theta, \varphi) = (60^\circ, 30^\circ)$ Euler-en angeluei dagokien norabidean kalkulaturakoa 8.30 irudian biltzen dira, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ eta $r = 27$ balioetarako.

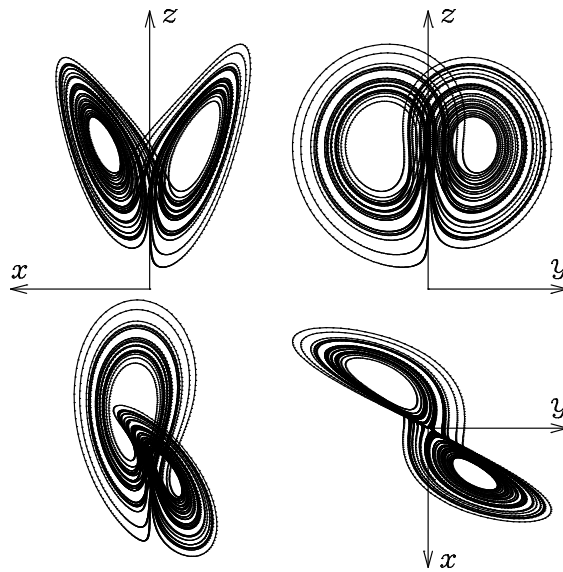
Orbita ez da periodikoa eta, portaera iragankor labur bat igaro ondoren, multzo korapilotsu batean dago. Multzo aldaezin honi **Lorenz-en erakarlea** deritzo eta egitura fraktalekoa —zehazkiago esateko, Cantor-en¹⁵ multzoaren egiturakoa— denez, **bitxia** dela esaten da. Gainera,



¹⁴ **Lev Davidovich Landau** (1908-01-22, Baku, Errusia; 1968-04-01, Mosku). Egin zuen lana eragin handikoa izan zen. Aipatu behar dira tenperatura baxuko fisikan, fisika atomiko eta nuklearrean eta plasmen fisikan egindako ekarpen teorikoak. Helio likidoaren superfluidotasunari buruzko bere teoriari esker, 1962ko Fisikako Nobel saria eskuratu zuen.

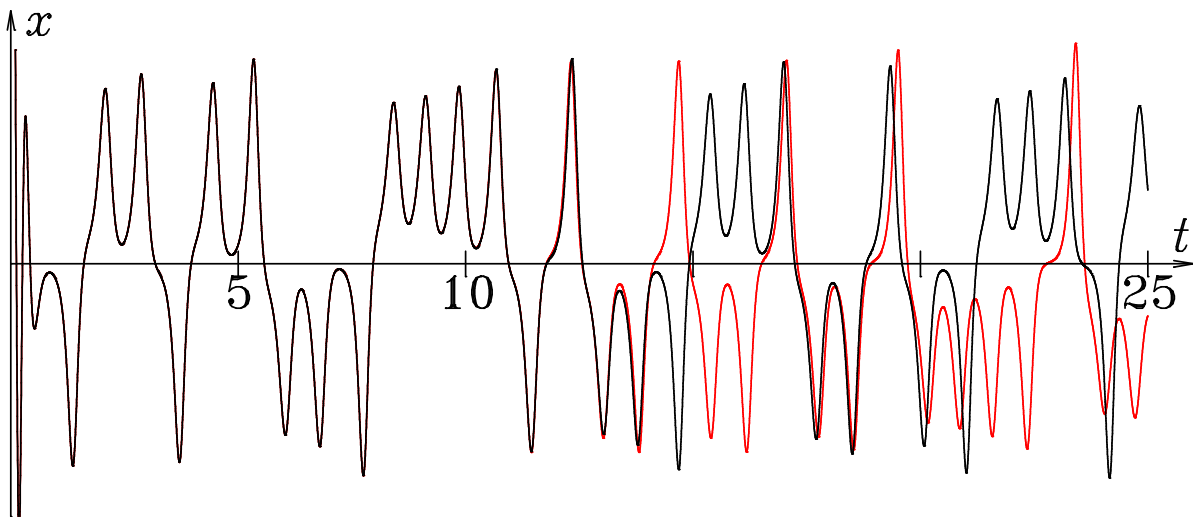


¹⁵ **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor** (1845-03-03, San Petersburg, Errusia; 1918-01-06, Halle, Alemania). Multzoen teoria sortu zuen eta infinituaren kontzeptuaren oinarri sendoak ezarri zituen zenbaki transfinituen teoriarekin. Lehenengoz frogatu zuen zenbaki errealak ez direla zenbaki-garriak, baita ia zenbaki guztiak transzendenteak direla ere. Serie trigonometrikoei buruz ere egin zuen lan.



8.30 IRUDIA Lorenz-en erakarleko orbita baten proiektzioak.

kaotikoa da, hasieran oso hurbil dauden soluzioak era esponentzian urruntzen baitira bata bestearekiko, 8.31 irudian ikus daitekeen bezala. Bertan, x aldagaiak $0 \leq t \leq 25$ tartean duen eboluzioa erakusten da, $(x_0, y_0, z_0) = (3, 97, 0)$ eta $(x_0, y_0, z_0) = (3.0001, 97, 0)$ hastapen-baldintzen multzoei dagozkien orbitetan zehar. Hastapen-baldintzak oso hurbil daudenez, irudian hasieran bi orbitak ez dira bereizten, baina beraien arteko distantzia oso azkarrean handitzen da eta nahiko tarte labur bat igaro ondoren ($t \approx 14$) zeharo desberdinak dira, biak oraindik (eta betiko) erakarle berean egon arren.



8.31 IRUDIA Hasieran oso hurbil dauden bi soluzio.

8.12.1 Hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra

Soluzio hurbilen arteko distantziaren handitze esponentziala hartzen da kaos deterministaren definiziotzat, eta **hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra** deitzen zaio. Hastapen-

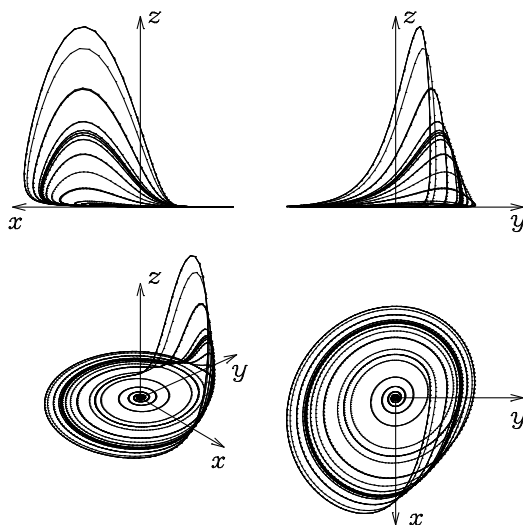
baldintzak zehaztean (edo zenbakizko kalkuluak egitean) nahitaez egiten diren erroreen leherketa da, preseski, sistema kaotikoen izaera matematikoak etorkizunaren iragarpenari egiten dion oztopo praktikoa. Azpimarratu behar da aipaturiko sistemak guztiz deterministak direla: existentzia eta bakartasunaren teorema betetzen dute. Beraz, printzipioz etorkizuna doitasun osoz alde aurretik kalkula badaiteke ere, praktikan erroreak saihestezinak dira eta, era esponenzialean handitzean, auresana hondatzen dute denbora-tarte (labur edo luze) bat igaro ondoren. Lorenz-ek berak **tximeleta efektu** izen bitxia asmatu zuen fenomeno hau izendatzeko: eguraldiaren iragarpenik onenak —etorkizunean tresna tekniko onenen bidez egingo direnak barne— hondatzeko gai omen da tximeleta batek hegoak astinduz sorturiko perturbazioa.

Esan behar da urruntzea esponenziala dela soluzioen arteko distantzia oso txikia den bitartean bakarrik: portaera iragankorra igaro ondoren ibilbide guztiak erakarlean daudenez, beraien arteko distantzia ezin izan daiteke erakarlearen diametroa baino handiagoa.

8.12.2 Liapunov-en berretzaileak

Lehenago aipatu ditugun hastapen-baldintzei dagokien 8.30 irudia bestelako hastapen-baldintzekin eginenez gero, ikuspuntu kualitatibotik berdina den beste irudi bat lortuko genuke (multzo geometriko berean egongo da orbita berria), baina xehetasunak —hala nola gingiletako batean soluzioak bakoitzean ematen duen denbora-tartea— guztiz desberdinak izango lirateke. Erakarlea bera aldaezina da eta —ikuspuntu praktikotik, doitasun matematiko osoz ez bada ere— orbita bertan egongo da, portaera iragankorraren ondoren; zailena da zehazki jakitea aldiune bakoitzean erakarleko zein puntutan dagoen. Orbita hurbilen arteko distantzia infinitesimala batez bestean $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| \approx ke^{\lambda t}$ moduan aldatzen bada, λ koefizientea **Liapunov-en berretzailea** (egia esan, Liapunov-en berretzaile maximoa) da, definizioz. λ positiboa denean sistema kaotikoa da. Liapunov-en berretzaileak kaosaren neurri kuantitatiboa ematen du, orbitaren hastapen-baldintzen oroimena galtzeko behar den denbora karakteristikoa $1/\lambda$ baita.

8.34 ARIKETA Aurkitu (8.83) penduluaren Liapunov-en berretzailerik handiena $\gamma = 0$, $0 < \gamma < 2$ eta $\gamma > 2$ balioetarako.



8.32 IRUDIA Rössler-en erakarleko orbita baten proiektzioak.

8.12.3 Okinaren transformazioa

Rössler-en adibide akademikoa Lorentz-en sistema baino egokiagoa izaten da kaosaren funtsezko mekanismoetako bat ulertzeko. Aipaturiko sistema dinamikoak (Lorentz-enak bezala) antz erraza du:

$$\dot{x} = -y - z, \quad (8.120)$$

$$\dot{y} = x + by, \quad (8.121)$$

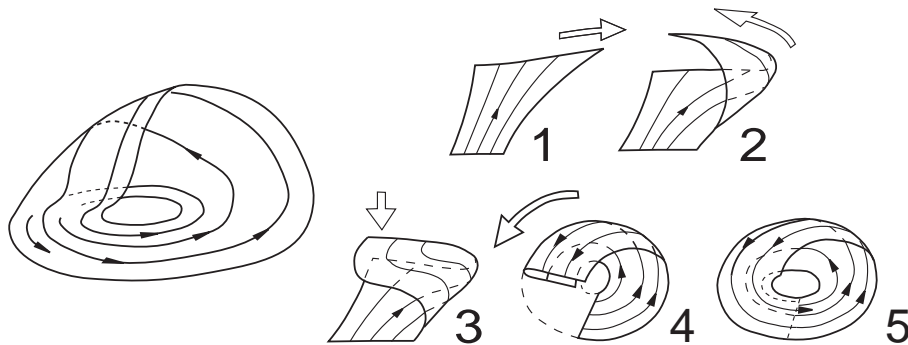
$$\dot{z} = b + (x - a)z. \quad (8.122)$$

(Hemen $a = 4.5$ eta $b = 0.2$ hartuko ditugu beti.) 8.32 irudian orbita baten hiru proiektzio cartesiarrak eta $(\theta, \varphi) = (59^\circ, -41^\circ)$ norabidean egindakoa biltzen dira. Berriro ere, hiru dimentsioko fase-espazioko azpimultzo batean dagoen orbita irregularra (ez-periodikoa) da. Izan ere, denboratarte luze batean (x, y) planotik oso hurbil dagoela ikusten dugu, baina bertan dinamikaren oso hurbilketa ona lortuko dugu (8.120)–(8.121) ekuazioetan $z = 0$ egitean:

$$\dot{x} = -y, \quad (8.123)$$

$$\dot{y} = x + by. \quad (8.124)$$

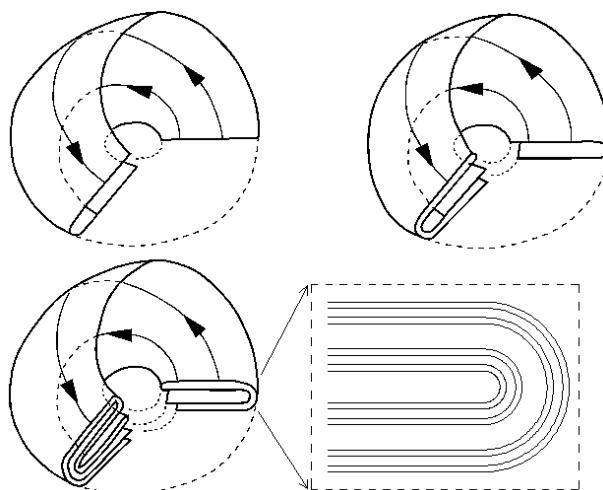
8.35 ARIKETA Froga ezazu (8.123)–(8.124) ekuazioen orbita, erradio gorakorreko espirala dela.



8.33 IRUDIA Okinaren transformazioa.

Emaitza honen arabera, $z = 0$ planotik hurbil dagoenean sistema kanporantz doan espiral batean higituko da, x ardatzerdi positiboaren inguruan x balioa (8.122) ekuazioan $\dot{z} > 0$ egiteko bezain handia izan arte. Hau gertatzen denean, z handitzen hasten da, x ardatzerdi negatiboraino heldu baino askoz lehenago $\dot{z} = b + (x - a)z$ deribatua negatibo bihurtzen den arte. Orduan, z txikituz doa eta orbita $z = 0$ planoaren ingurura itzultzen da. Bai $z \approx 0$ espiralean higitzen denean eta bai \dot{z} positiboa denean ere, soluzioen arteko distantzia era esponentzialean handituko da, hau da, hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra egongo da. 8.33 irudian argi ikusten denez, orbita bakoitza beste guztietatik urruntzen da. Gainera, $z \approx 0$ banda batean dauden ibilbideak $\dot{z} > 0$ denean zabalduz doan beste banda batean daude baina, gero, banda hau (x, y) planotik hurbil dagoen lehenagoko bandaren gainean tolestean da. Prozesu bikoitz honetan «zabaltzeari» esker orbitak esponentzialki urruntzen dira eta «tolestatzearen» bidez fase-espazioan ibilitako eremua bornaturik egotea lortzen da. Hauxe dugu kaos deterministaren funtsezko mekanismoetariko bat, eta **okinaren transformazioa**¹⁶ deritzo ogi-orea labean sartu baino lehenago egiten dena gogoratu: arrabolaz orea zabaltzen da osagaiak ondo («modu kaotikoan») nahasteko, eta gero tolestu egiten da mahaitik ez irteteko.

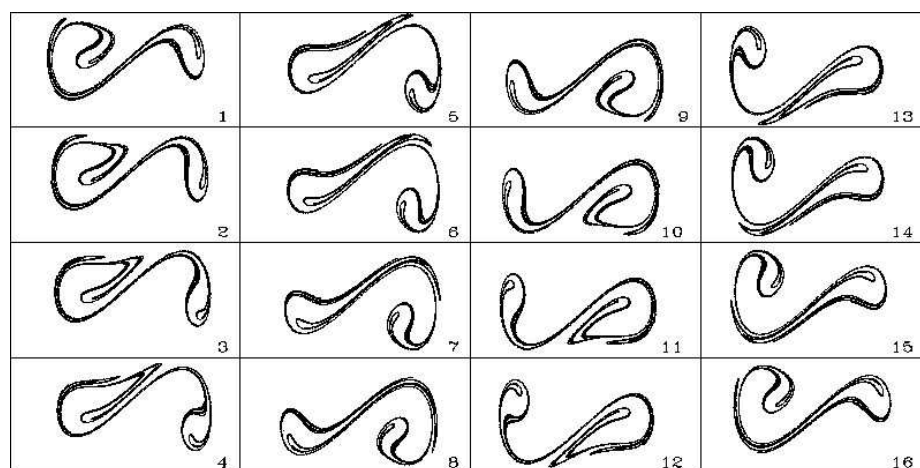
¹⁶Dirudenez, izen berriak aukeratzeko hizkuntza klasikoetara jo beharrean, izen bitxiak edo publizitatearen ikuspuntutik erakargarriak omen direnak nahiago dituzte kontsumo-gizarte honetako zientzialariek.



8.34 IRUDIA Rössler-en erakarlearen egitura fraktala.

8.12.4 Erakarle bitxiak

Erakarlea kaotikoa izateko behar den Liapunov-en berretzaile positiboa multzo aldaezina zabaltzean sortzeaz gain, erakarlearen egitura geometriko korapilotsua ere sortzen du okinaren transformazioak. Alde batetik, sistema iraungikorra da eta fase-espazioko bolumena txikituz doa etengabe; beraz, erakarlea multzo aldaezina denez, bolumen nulukoa izango da ezinbestez. Bestalde, behin eta berriro tolesten denez, infinitu geruza daude multzoan. Infinitu geruzak bolumen gabe dauzkan multzo bat nahiko bitxia izango da eta, izan ere, erakarle bitxia dela esaten da. 8.34 irudian erakusten den erakarlearen egitura geometrikoa fraktala —edo, zehazkiago, Cantoren multzo bat¹⁷— dela esaten da.



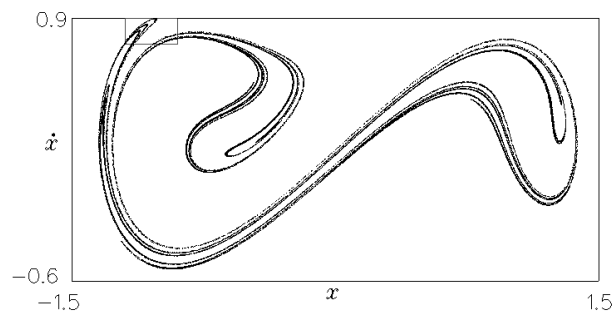
8.35 IRUDIA Duffing-en erakarlearen estroboskopio-sekzioak.

Fisikan interesgarria den adibide baten erakarle bitxia aztertuko dugu orain. Bira fisikan askotan agertzen den bi putzuko $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$ potentziala eta bertan higitzen den partikula klasikoa. Marruskadura eta kanpo-indar sinusoidala badaude, **Duffing-en ekuazioa** lortzen da:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = f \cos \omega t. \quad (8.125)$$

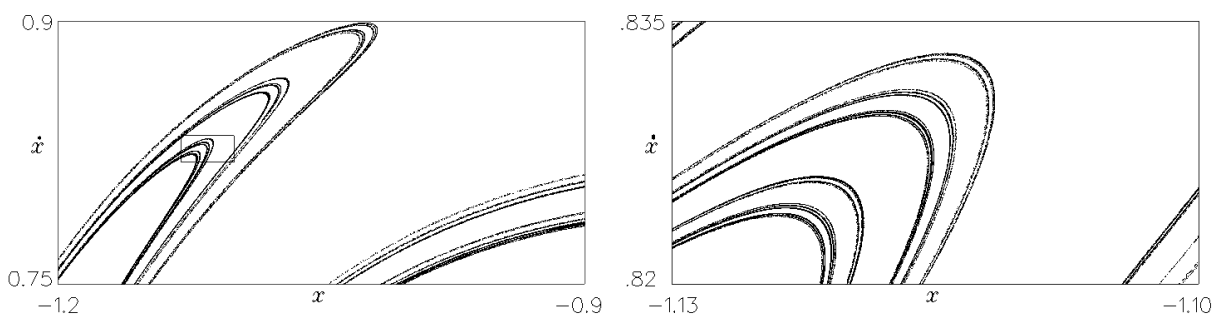
¹⁷Ikus 8.27 problema.

Hemen $\gamma = 0.2$, $f = 0.3$ eta $\omega = 1$ balioak hartuko ditugu (kanpo-indarra nulua den kasua 8.18 problematan aztertzen da). Ekuazioa autonomoa ez denez, fase-espazioak hiru dimentsio dauzka, baina hirugarren aldagaia (t denbora) periodikoa den kosinu funtzioan agertzen denez, kanpo-indarra $t \bmod{2\pi}$ aldiune guztietan berbera izango da. Duffing-en erakarlearen egitura errazago ulertzeko Poincaré-ren estroboskopio-sekzioak erabiliko ditugu: (t, x, \dot{x}) espazioan ibilbide osoa marraztu beharrean, t_0 balio bat aukeratuko dugu eta $t \bmod{2\pi} = t_0$ betetzen den bakoitzean (x, \dot{x}) puntuaren posizioa marraztuko dugu. Hots, (zenbakizko) estroboskopio batez baliatzen gara fase-espazioan sistema adierazten duen puntuaren «argazki» bat 2π «segundotan» behin egiteko, beti negatibo berean. Kanpo-indarraren 2π periodoa hamasei tarte berdinetan



8.36 IRUDIA Duffing-en erakarlearen estroboskopio-sekzioa $t \bmod{2\pi} = 0$ kasuan.

zatitu ondoren, $t \bmod{2\pi} = 0, \pi/8, \pi/4, \dots, 15\pi/8$ balioei dagozkien estroboskopio-sekzioak marraztu ditugu 8.35 irudian. Irudiko puntu guztiak orbita bakarrekoak dira. Erakarlea kaotikoa denez, beste orbita bat erabiliz gero, puntu bakoitzaren posizioa zeharo desberdina izango da, baina puntu guztiak dauden objektu geometrikoa, erakarlea hain zuzen, berbera da eta, puntu bakoitzari so ez bagaude, kasu guztietako irudia berbera dela ematen du. Estroboskopio-sekzioa periodo batean zehar nola itxuraldatzen den arretaz aztertzen badugu, erakarlea zabaltzen den heinean tolestu ere egiten dela argi ikusten dugu: okinaren transformazioaren eraginaren adibide ederra.



8.37 IRUDIA Duffing-en erakarlearen estroboskopio-sekzioaren handipenak.

Erakarlea multzo aldaezina izanik periodo bakoitzean behin tolestean denez, infinitu geruza izan beharko ditu, hau da, oso egitura geometriko korapilotsua. Hau argiago ikusteko lehen sekzioaren handipen bat egin da 8.36 irudian. Goian ikusten den laukizuzena 8.37 irudiko ezkerrean handitu da eta argi dago 8.36 irudian banda bakunen itxurakoak zirenak, egia esan,

hainbat bandaz osaturikoak direla. Eta handipen hau berriro handitzen badugu (aipaturiko irudiko eskuinean ikusten den bezala), banda bakoitzean banda gehiago daudela ikusten dugu. Hau eskala guztietan gertatzen da, panpina errusiar baten antzera: egitura bakoitzaren azpian, egitura gehiago... infinituraino. Eskala-aldaezintasuna (adibide akademiko errazetan zehatza eta kasu errealistagoetan hurbila dena) Cantor-en multzoen eta, oro har, fraktalen ezaugarrietako bat izaten da. Beraz, hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorrari esker kaotikoa izateaz gain, erakarlea bitxia da.

8.13 Problemak

8.1 Verhulst-en¹⁸ ekuazioa. Aztertu

$$\dot{x} = \epsilon x - \sigma x^2$$

ekuazioaren oreka-puntuen egonkortasuna ϵ eta σ parametroen zeinu guztietarako.

8.2 Froga ezazu puntu ez-kritiko batetik abiatzen den

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

sistema erregularraren soluzio bat ezin hel daitekeela oreka-puntu bateraino aldagai independenteen balio finitu batean.

8.3 Eztabaidatu

$$\dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \quad \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y$$

sistema linealaren jatorriaren egonkortasuna $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ denean.

8.4 Aztertu, ϵ parametroaren zeinu guztietarako, ondoko sistemaren jatorriaren egonkortasuna:

$$\dot{x} = \epsilon x + y, \quad \dot{y} = -x + \epsilon y.$$

8.5 Eztabaidatu hurrengo sistemaren puntu kritiko guztien egonkortasuna:

$$\dot{x} = x - x^2 - xy, \quad \dot{y} = 3y - xy - 2y^2.$$

8.6 Mendate ez-lineala. Froga ezazu ondoko sistemak eta bere hurbilketa linealak mendate eze-gonkor bat dutela jatorrian:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y + x^2.$$

Aurkitu hurbilketa linealaren kasuan oreka-puntuaren espazio egonkorra eta eze-gonkorra. Kontsideratu orain sistema ez-lineala, frogatu $x = 0$ zuzena eta $y = x^2/3$ parabola multzo aldaezinak direla eta ondorioztatu jatorriaren barietate egonkorra eta eze-gonkorra direla hurrenez hurren. Marraztu bi sistemen fase-espazioak.

8.7 Aztertu ondoko sistema ez-linealen jatorriaren izaera:

$$(a) \quad \dot{x} = y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2),$$

$$(b) \quad \dot{x} = y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2).$$

8.8 Ikertu ondoko sistemaren jatorriaren egonkortasuna:

$$\dot{x} = 2y - z, \quad \dot{y} = 3x - 2z, \quad \dot{z} = 5x - 4y.$$

¹⁸**Pierre Francois Verhulst** (1804-10-28, Brusela; 1849-02-15, Brusela). Zenbakien teoriari buruz lan egiten hasi arren, laster gizarte-estatistikaz arduratu zen, bertan populazioaren hazkunde-legea —geometrikoa zela uste zen lehenago— aztertu zuelarik. Populazio biologikoen eboluzioa deskribatzen duen bere izeneko ekuazio ez-lineala proposatu eta aztertu zuen.

8.9 Aztertu ondokoaren soluzio nulua egonkortasuna:

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x - y^3.$$

8.10 Eman dezagun $i \neq j$ balioetarako $a_{ij} = -a_{ji}$, eta $a_{ii} < 0$ baldintzak betetzen direla. Froga ezazu, $\sum_{i=1}^n x_i^2$ Liapunov-en funtzioaren bidez,

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

sistema linealaren soluzio nulua egonkorra dela.

8.11 α parametroaren zein balioetarako da egonkorra

$$\dot{x} = \alpha x - y, \quad \dot{y} = \alpha y - z, \quad \dot{z} = \alpha z - x$$

sistemaren puntu finkoa?

8.12 Forma definituak. Frogatu $U(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ funtzioa definitu positiboa dela baldin eta soilik baldin $a > 0$ eta $b^2 - 4ac < 0$. Zein da definitu negatiboa izateko baldintza beharrezko eta nahikoa?

8.13 Aztertu $(0, 0)$ puntuaren egonkortasuna ondoko sisteman:

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2, \quad \dot{y} = -y^3.$$

8.14 Erabili Liapunov-en funtzio egokia hauxe frogatzeko:

$$\dot{x} = y - xf(x, y), \quad \dot{y} = -x - yf(x, y)$$

ekuazio-sistemaren jatorria asintotikoki egonkorra (ezegonkorra) da baldin eta $-f(0, 0)$ nulua bada ere— jatorriaren ingurune batean $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) bada. Zein izango da orbiten geometria puntu kritikoaren inguruan?

8.15 Aztertu

$$U_1 = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x), \quad U_2 = \frac{1}{2}(x + y)^2 + x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Liapunov-en funtzioek

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -y - \sin x$$

sistemaren jatorriaren egonkortasunari buruz ematen duten informazioa. Nola azter liteke errazago aipaturiko egonkortasuna?

8.16 Froga ezazu

$$\dot{x} = -y + \frac{x}{r}f(r), \quad \dot{y} = x + \frac{y}{r}f(r), \quad (r^2 \equiv x^2 + y^2)$$

sistemak $f(r)$ funtzioaren erro bakoitzeko soluzio periodiko bat duela. Zein da ibilbide itxien noranzkoa? Nola aztertuko genuke beraien egonkortasuna? Aurkitu sistemaren soluzio periodiko guztiak eta beraien egonkortasuna $f(r) = r(r - 2)^2(r^2 - 4r + 3)$ kasu berezian.

8.17 Aurkitu

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = 2x^2y^2$$

sistemaren puntu kritikoak eta ibilbideen ekuazioa. Marraztu fase-espazioa.

8.18 Biz $\ddot{x} - x + x^3 = 0$ ekuazioa. Aurkitu ibilbideen ekuazioa eta marraztu fase-espazioa. Zer gertatzen da ezkerreko gaiari $\gamma\dot{x}$ gai iraungikorra ($\gamma > 0$) gehitzen bazaio?

8.19 Duffing-en ekuazioa. Kotsidera ezazu $\ddot{x} + \gamma\dot{x} - x + x^3 = 0$ ekuazioaren jatorria $\gamma > 0$ denean. Marraztu beraren barietate egonkorra eta egiaztatu bi erakarleen osinen arteko muga dela.

Oharra: Erakarle batera jotzen duten soluzioak pasatzen diren puntuetako leku geometrikoa, erakarlearen **osina** —edo erakarpen-osina— da.

8.20 Aztertu $\ddot{x} = (\cos x - 1) \sin x$ ekuazioaren fase-espazioa.

8.21 Aurkitu $\ddot{x} = x^2 - \lambda x + 9$ ekuazioaren adarkatzeen $\lambda = \lambda_0$ balio kritikoa. Marraztu fase-espazioa $\lambda = 10$ eta $\lambda = \lambda_0$ kasuetan.

8.22 Marraztu ondoko sistemaren fase-espazioa:

$$\dot{x} = x^2 - y^3, \quad \dot{y} = 2x(x^2 - y).$$

8.23 Marraztu ondoko sistema dinamikoaren fase-espazioa:

$$\dot{x} = y - y^3, \quad \dot{y} = -x - y^2.$$

8.24 Aurkitu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 - (x^2 + y^2)], \\ \dot{y} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} [1 - (x^2 + y^2)] \end{aligned}$$

sistemaren muga-zikloa eta eztabaidatu bere egonkortasuna.

8.25 Frogatu ondoko ekuazioak muga-ziklo bat duela:

$$\ddot{x} + (x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0.$$

8.26 Aurkitu 8.24 problemako sistemaren Liapunov-en berretzaile maximoa.

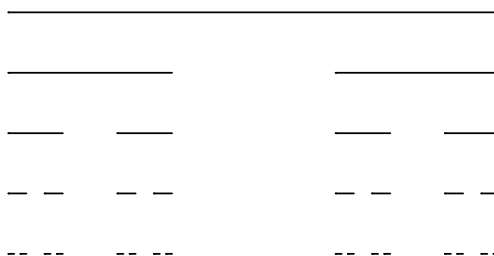
8.27 Dimentsio fraktala. Egiazta ezazu, espazioko azpimultzo «arruntak» (puntu bat, kurba edo gainazal leun bat, poliedro baten barrua, ...) estaltzeko, ε aldeko $N(\varepsilon) \sim k\varepsilon^{-d}$ kubo behar direla $\varepsilon \rightarrow 0$ limitean, d balioa azpimultzoaren dimentsioa (0, 1, 2, eta 3 aipaturiko adibideetan) bada. Frogatu, multzoaren tamainaren menpekoea izan arren dimentsioaren independentea den k konstantea ezabatzeko, ondoko era baliokidean idatz daitekeela aipaturiko emaitza:

$$d = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (8.126)$$

Ondorioz, adierazpen hau erabil daiteke **dimentsioaren** definiziotzat. Aztertu **Cantor-en multzo hirutarra**, 8.38 irudian ikusten den modu errepikarian definitzen dena:

- segmentu batetik hasita, erdiko herena kentzen da;
- geratzen diren bi herenetan gauza bera egiten da, bakoitzaren erdiko herena ezabatzen delarik;
- geratzen diren segmentu guztietan prozedura bera errepikatzen da;
- ...

Limitean geratzen diren puntuen multzoa da Cantor-en multzo hirutarra. (Cantor-ek berak definituriko zentzu zehatzean, muga-multzoan hasierako segmentuan beste puntu daude, zeren batean eta bestean dauden puntuen artean bana-banako korrespondentzia bat eraiki baitaiteke.) Frogatu multzoaren luzera nulua dela eta kalkulatu bere dimentsioa. Ondorioztatu dimentsioa osoa ez dela eta, beraz, multzoa **fraktala** dela.



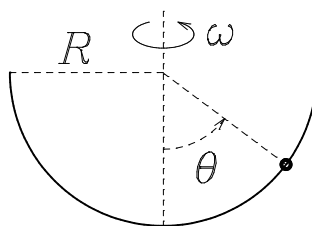
8.38 IRUDIA Cantor-en multzo hirutarraren eraikuntza.

8.28 Lotka eta Volterra-ren ekuazioak. Gerratean Adriatikoko uretan marrazoak ugaltzea azaltzeko, Volterra-k harrapari eta harrapakinaren eredu klasikoa sortu zuen. Elkarrekintzan ari diren populazioen dinamika deskribatzeko eredu hura, honela adieraz daiteke unitate egokietan $a > 0$ parametroaren bidez:

$$\dot{x} = x(1 - y), \tag{8.127}$$

$$\dot{y} = -ay(1 - x). \tag{8.128}$$

Sistemaren soluzioa ezin idatz daiteke oinarritzko funtzioen bidez, baina ibilbideen ekuazioa erraza da. Aurkitu beraren adierazpena. Aztertu sistemaren oreka-puntuen egonkortasuna eta egin fase-espazioaren zirriborroa.



8.39 IRUDIA Burdin hari leunean sarturiko alea.

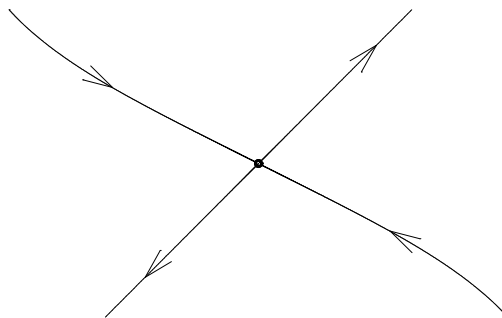
8.29 8.39 irudiko burdin hari leun erdizirkularra ω abiadura angeluarraz ari da biratzen ardatz bertikalaren inguruan. Eztabaidatu alearen oreka erlatiboaren angeluen egonkortasuna, dimentsio gabeko $\lambda = \omega^2 R/g$ parametroaren bitartez.

8.30 Diferentzia finituetako ekuazioak (berriz). 3.37 probleman diferentzia finituetako ekuazio linealak ebazteko Euler-en metodoa erabil daitekeela ikusi genuen, baita ondoko adibidea aztertu ere:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

n indizea osoa delarik. Eztabaidatu sistema dinamiko diskretu honen oreka-puntuen egonkortasuna.

8.31 Existentzia eta bakartasunaren teoremari esker, badakigu $\ddot{x} = -V'(x)$ egiturako ekuazioaren fase-espazioko orbitak ez dutela elkar ebakitzen. Eraitza hau kontuan harturik, nola uler daiteke V potentzialaren maximo bati dagokion zeladura-puntu baten diagrama klasikoa? (Ikus 8.40 irudia.) Iruzkina egin erantzunari.



8.40 IRUDIA Mendate baten inguruko fase-espazioa.

8.32 Potentzial zentrala. Biz $V(r)$ potentzial zentrolean higitzen den m masadun partikula puntuala. Aztertu dagokion problema unidimentsional baliokidea eta aurkitu momentu angeluarren L balio bakoitzeko oreka-puntuak definitzen dituen baldintza. Eztabaidatu beraien egonkortasuna. $V(r) = -k/r^n$ denean, n -ren zein baliotarako izango dira egonkorak? Egiaztatu azken eraitza ez dela m , L eta k balioen menpekoa. Zer azaltzen du problema baliokidearen puntu baten egonkortasunak partikularen benetako higidurari buruz?

8.33 Indar-eremu unidimentsionala. Zergatik dira periodikoak indar-eremu unidimentsional batean higitzen den partikularen orbita bornatu guztiak? (Bi eta hiru dimentsiotan, berriz, indarra zentrala bada, hori $V = -k/r$ potentzial newtondarrekin eta $V = kr^2$ potentzial harmoniko isotropoarekin bakarrik gertatzen dela frogatzen du **Bertrand-en**¹⁹ **teoremak**.)



¹⁹ **Joseph Louis Francois Bertrand** (1822-03-11, Paris; 1900-04-05, Paris). Hemen aipatzen dugun teoremaz gain, zenbakien teoria eta geometria diferentzialari buruz egin zituen lanak gogoratzen dira; baina ezagunagoa da probabilitateen teorian egindako ekarpenei esker. Batez ere, Bertrand-en paradoxa aipatu behar da azken arlo honetan.

8.34 Orbita zirkularrak erlatibitate orokorrean. 7.11 probleman ikusi denez, erlatibitate orokorrean Kepler-en problemaren orbitaren ekuazioa honela idatz daiteke (r, φ) koordenatu polarretan:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{p} + \epsilon p u^2,$$

$u = 1/r$ delarik. p *semilatus rectum* delakoa positiboa da eta, oro har, ϵ oso txikia. Aurkitu ekuazio honen oreka-puntuak eta aztertu beraien egonkortasuna. Frogatu puntu finko bakoitza espazio fisikoko orbita zirkular bati dagokiola. Egiaztatu $\epsilon = 0$ balioari dagokion kasu ez-erlatibistaren emaitza ezagunak eta hemengoak elkargarriak direla.

8.35 Erabili 8.34 problemaren azterketa, 7.11 delakoan aurkitu zen Merkurioren preziesioaren periodoa modu arinean kalkulatzeko, eszentrikotasun txikiko orbiten kasu berezian.

8.36 Zer gertatzen da 7.12 problemaren oreka-puntuaren egonkortasunarekin ϵ txikia ez denean?

8.37 Nola erabil daiteke

$$\frac{\partial F}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} Q(x, y) = 0$$

baldintza betetzen duen $F(x, y)$ funtzio ez-konstante bat,

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

sistemaren —agian bakartuak edo hiperbolikoak ez diren— puntu finkoen egonkortasuna aztertzeko? Erabili emaitza

$$\ddot{x} + 2x\dot{x} = 0$$

sisteman, non $F(x, y) = x^2 + y$ eta $y = \dot{x}$ diren.

8.38 Kontsideratu (8.57)–(8.58) sistema dinamikoa:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x - y^n. \end{aligned}$$

Aurkitu sistemaren oreka-puntua eta froga ezazu egonkorra dela $n = 0, 1, 2, 3, 5, 7, \dots$ balioetarako. Noiz da asintotikoki egonkorra?

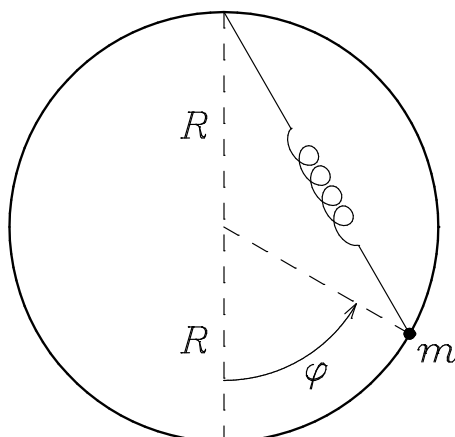
Iradokizuna: Aztertu banan-banan $n = 0, n = 1, n = 2$ eta $n = 3, 5, 7, \dots$ kasuak.

8.39 Zer gertatzen da 8.38 problemako sisteman $n = 4, 6, 8, \dots$ denean?

8.40 Partikula bat marruskadurarik gabe higi daiteke R erradioko eraztun bertikal batean zehar, azken honen punturik goretik malguki batez loturik dagoelarik. Malgukiaren luzera propioa R da eta konstante berreskuratzailea k . Froga ezazu higidura-ekuazioa

$$mR^2 \ddot{\varphi} + mgR \sin \varphi - kR^2 \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} - 1 \right) \sin \frac{\varphi}{2} = 0$$

dela, koordenatu orokortutzat 8.41 irudiko φ angelua aukeratzen badugu. Aurkitu orekaren adar-katze-diagrama, dimentsio gabeko $\alpha = \frac{kR}{mg} \geq 0$ parametroaz baliatuz.

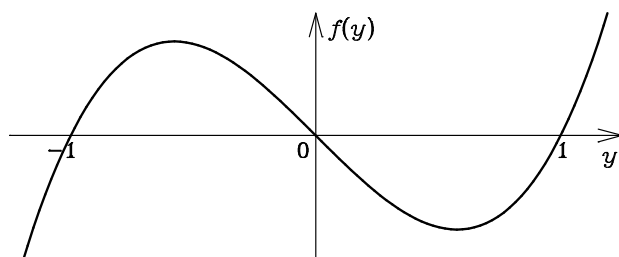


8.41 IRUDIA 8.40 problemako sistema mekanikoa.

8.41 Orbita zirkularrak Schwarzschild-en²⁰ soluzioan. Erlatibitate Orokorrean partikula puntual baten grabitazio-eremua deskribatzeko erabiltzen den soluzioan, fotoien orbitek betetzen duten bigarren ordenako ekuazio diferentzialak ondoko lehen integrala onartzen du unitate geometrikoetan ($G = c = 1$):

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2},$$

non r distantzia polarra den, M izarren masa eta b «jotze-parametroa» (momentu angeluarraren eta linealaren zatidura). Gainera, denboraren ordez, λ parametro «afina» erabili da. Aztertu orbita zirkularren existentzia eta egonkortasuna. Frogatu infinitutik $b < 3^{3/2}M$ jotze-parametroarekin datorren fotoia harrapatua izango dela, $r = 2M$ erradioan dagoen «horizontea» zeharkatuko baitu.

8.42 IRUDIA 8.42 problemako $f(y)$ funtzioaren grafikoa.

8.42 Kontsideratu

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$



²⁰ **Karl Schwarzschild** (1873-10-09, Frankfurt am Main, Alemania; 1916-05-11, Potsdam, Alemania). 16 urterekin argitaratu zuen bere lehen lan zientifikoa, mekanika zerutiarrari buruz. Astronomian eta astrofisikan lan egin zuen, besteak beste izarren atmosferan gertatzen diren erradiazio-prozesuak aztertu zituelarik. Espektra atomikoen teoria kuantikoaren aitzindarien artean dago, baina, agian, ezagunagoa da Einstein-en ekuazioen lehen soluzio zehatza aurkitu zuelako. Gainera soluzio hori garrantzitsuenetakoa da, izar bakunen grabitazio-eremua deskribatzen baitu.

ekuazio diferentziala, non $f(y)$ funtzioak 8.42 irudiko grafikoa duen. Aurkitu oreka-puntuak eta eztabaidatu euren egonkortasuna. Marraztu $y(0) = 1/2$ eta $y(0) = 2$ betetzen dituzten soluzioen grafikoak eta aurkitu kasu horietan lortzen diren $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y$ balioak.

9. GAIA

Sturm eta Liouville-ren mugalde-problemak

*All progress is precarious,
and the solution of one problem
brings us face to face with another problem.*
Martin Luther King Jr.

Mugalde-problemak hastapen-baldintzenak baino zailagoak izaten dira eta kontu handiagoz ibili behar da existentzia (eta bakartasuna) bermatzeko baldintzak ezartzerakoan. Gai honetan aztertuko dugun horrelako problemen familia bakarra, deribatu partzialetako zenbait ekuazioen ebazpenarekin loturik dago.

Sarrera moduan, azter dezagun

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{baldin } 0 < x < \ell, \\ \infty, & \text{bestela} \end{cases} \quad (9.1)$$

potenzial-putzu infinituan dagoen partikula kuantikoaren

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi \quad (9.2)$$

Schrödinger-en ekuazioa, ondoko mugalde-baldintzekin batera:

$$\psi(0) = \psi(\ell) = 0. \quad (9.3)$$

Honela idazten da problema hau $y \equiv \psi$ eta $\lambda \equiv 2mE/\hbar^2$ definizioen bidez:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0. \quad (9.4)$$

Ekuazio hau ondo ezagutzen dugun osziladore harmoniko klasikoarena denez, dagokion soluzio orokorra hau da:

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x. \quad (9.5)$$

Beraz, mugalde-baldintzak

$$A = 0, \quad B \sin \sqrt{\lambda}\ell = 0 \quad (9.6)$$

dira. Soluzio bakarra nulua da, $\lambda = n^2\omega^2$, $n = 1, 2, \dots$, eta $\omega \equiv \pi/\ell$ betetzen diren kasuetan izan ezik. Soluzio ez-nulua onartzen duten kasu hauetan,

$$y = C_n \sin n\omega x \quad (9.7)$$

dugu, C_n konstantea hautazkoa delarik.

9.1 ARIKETA Zer gertatzen da $\lambda = 0$ edo $\lambda < 0$ bada? Iruzkina egin erantzunari.

Gai honetan aztertuko ditugun problemetan, oro har, ekuazio diferentzialak bigarren ordenako lineal homogeneousak izango dira,

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (9.8)$$

eta mugalde-baldintzak linealak eta homogeneousak:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (9.9)$$

$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ eta $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ balioekin. Hala ere, kasu orokorragoei buruz ere zertxobait esango dugu.

9.1 Funtzioen biderketa eskalarra

(a, b) tartean definituriko funtzio erregularren espazioetan, egitura linealaz gain, funtzioen arteko ondoko biderkadura eskalarra definitzen da:

$$\langle f, g \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\rho(x) dx = \int_a^b \overline{f(x)}g(x) d\mu. \quad (9.10)$$

Hemen, $\rho(x) \geq 0$ **pisuak** definituriko

$$\mu(x) = \int_a^x \rho(u) du \quad (9.11)$$

neurria monotono gorakorra da.

9.2 ARIKETA Egiaztatu (9.10) definizioak biderkadura eskalar hermitearren definizio-baldintzak betetzen dituela:

1. Definitu positiboa da:

$$\langle f, f \rangle_\rho \geq 0, \quad (9.12)$$

$$\langle f, f \rangle_\rho = 0 \iff f = 0. \quad (9.13)$$

2. Hermitearra da:

$$\langle g, f \rangle_\rho = \overline{\langle f, g \rangle_\rho}, \quad (9.14)$$

3. Eskuin-lineala da, zeren a eta b konstanteak badira hauxe betetzen baita:

$$\langle h, af + bg \rangle_\rho = a \langle h, f \rangle_\rho + b \langle h, g \rangle_\rho. \quad (9.15)$$

Ezker-lineala al da?

Beste edozein biderketa eskalarrekin bezalaxe, f bektore baten $\|f\|_\rho$ norma (hau da, funtzio baten norma) honela defini daiteke:

$$\|f\|_\rho^2 = \langle f, f \rangle_\rho = \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx. \quad (9.16)$$

Orobat, normak $\|f - g\|_\rho$ distantzia eta konbergentzia (**normarekiko konbergentzia** deitzen dena) definitzen ditu:

$$f_n \rightarrow f, \quad \text{baldin } \|f - f_n\|_\rho^2 = \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \rho(x) dx \rightarrow 0. \quad (9.17)$$

(a, b) tartean definituriko norma finituko funtzio erregularrak dauzkan espazio lineal oso txikiena $L^2(a, b; d\mu)$ ikurraz izendatuko dugu: bertan Cauchy-ren segida guztiak ($n, m > N(\epsilon)$ guztientzat $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ baldintza betetzen dutenak) konbergenteak dira. (Riemann-en integralaren ordeztu Lebesgue-rena erabili behar da $L^2(a, b; d\mu)$ espazioan.) Pisia $\rho(x) = 1$ denean, $d\mu = dx$ dugu, eta notazioa laburtzeko $L^2(a, b) = L^2(a, b; dx)$ eta $\langle g, f \rangle = \langle g, f \rangle_1$ erabiliko ditugu.

f eta g funtzioak (ρ pisuarekiko) **ortogonalak** direla esaten da beraien biderkadura eskalarra nulua bada: $\langle f, g \rangle_\rho = 0$. Era berean, $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ bektore-sistema **ortonormala** da, ϕ_i funtzio bakoitzaren norma unitatea izateaz gain, funtzio bikote bakoitza ortogonalak bada:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}. \quad (9.18)$$

Hemen δ_{nm} **Kronecker-en¹ delta** da:

$$\delta_{nm} \equiv \begin{cases} 1, & \text{baldin } n = m, \\ 0, & \text{baldin } n \neq m. \end{cases} \quad (9.19)$$

9.3 ARIKETA Egiaztatu $L^2(a, b)$ espazioko $\{\sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin n\omega x : n = 1, 2, \dots\}$ bektore-sistema ortonormala dela, $\omega = 2\pi/(b-a)$ aukera egiten badugu.

Froga daitekeenez, $L^2(a, b; d\mu)$ espazioa **Hilbert-en² espazioa** da, **banangarria** delako: badaude **multzo ortonormal osoak**, hau da, $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ oinarri ortonormal zenbakigarriak. Ondorioz, $f \in L^2(a, b; d\mu)$ espazioko edozein bektore f_n koefiziente konstanteetako konbinazio lineal infinitu konbergentearen moduan garatu daiteke multzo ortonormal batean:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n. \quad (9.20)$$



¹ **Leopold Kronecker** (1823-12-07, Liegnitz, Prusia, gaur egun Poloniako Legnica; 1891-12-29, Berlin). Ekarpen handienak funtzio eliptiko, ekuazio algebraiko eta zenbaki algebraikoei buruzkoak dira. Cantor-en multzoen teoriaren aurkako mugimenduaren burua izan zela gogoratzen da. Matematikan zenbaki osoak eta urratsen kopuru finituak erabiltzen dituzten arrazoibideetara mugatu behar zen bere iritziz: *Jainkoak osoak sortu zituen, gainerako guztia gizakiak egina da.*



² **David Hilbert** (1862-01-23, Königsberg, Prusia, gaur egun Errusiako Kaliningrad; 1943-02-14, Göttingen, Alemania). Geometria oinarri sendoetan ezarri zuen 1899ko *Grundlagen der Geometrie* maisulanean, eta handik hona matematikan erabili diren metodo axiomatikoetan oso eragin handia izan du. Fisikan garrantzi handikoak dira analisi funtzionalean egindako ekarpenak, Hilbert-en espazioak barne. Einstein-ek baino lehentxeago argitaratu zituen grabitazio-eremuaren ekuazioak, baina ez zuen inoiz ere lehentasuna aldarrikatu eta duela gutxiko ikerketek erlatibitate orokorraren sortzaileak berak jakinarazi zizkiola frogatu bide dute. Hilbert-en 23 problemak, oraindik guztiz gainditu gabe dagoen erronka handia izan dira XX. mendeko matematikarientzat. *Grundlagen der Mathematik* delakoaren 1934 eta 1939ko liburukietan matematikaren tinkotasuna ezartzen saiatu zen, baina Gödel-ek 1931n frogatu zuenez, helburua ezinezkoa zen.

Honek esan nahi du zera betetzen dela $N \rightarrow \infty$ limitean:

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \phi_n \right\|_{\rho}^2 = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{n=1}^N f_n \phi_n(x) \right|^2 \rho(x) dx \rightarrow 0. \quad (9.21)$$

9.4 ARIKETA Froga ezazu (9.20) garapena bakarra dela eta koefizienteak ondoko adierazpenek emandakoak direla:

$$f_n = \langle \phi_n, f \rangle_{\rho} = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx. \quad (9.22)$$

9.2 Ekuazio adjuntua

Definizioz,

$$L = a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x) \quad (9.23)$$

eragile linealaren **Lagrange-ren adjuntu formal**a hauxe da:

$$L^{\dagger} = \bar{a}_0 D^2 + (2\bar{a}'_0 - \bar{a}_1) D + \bar{a}''_0 - \bar{a}'_1 + \bar{a}_2. \quad (9.24)$$

Hori dela eta, bigarren ordenako $Ly = 0$ ekuazio lineal homogeneo bakoitzari $L^{\dagger}y = 0$ **ekuazio adjuntua** dagokio.

9.5 ARIKETA Egiaztatu ekuazio adjuntua honako hau dela:

$$L^{\dagger}y = \left[\overline{a_0(x)y} \right]'' - \left[\overline{a_1(x)y} \right]' + \overline{a_2(x)y} = 0. \quad (9.25)$$

L eragilearen **konkomitante bilineala**

$$\mathcal{P}(\bar{z}, y) \equiv a_0(\bar{z}y' - \bar{z}'y) + (a_1 - a'_0)\bar{z}y \quad (9.26)$$

moduan definitzen badugu, ondoko propietateak betetzen dira:

Lagrange-ren identitatea

$$\bar{z}Ly - \overline{L^{\dagger}z}y = \frac{d}{dx}\mathcal{P}(\bar{z}, y). \quad (9.27)$$

Green-en formula

$$\int_a^b (\bar{z}Ly - \overline{L^{\dagger}z}y) dx = \mathcal{P}(\bar{z}, y) \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.28)$$

9.6 ARIKETA Frogatu Lagrange-ren identitatea eta egiaztatu honen ondorio zuzena den Green-en³ formula honela ere idatz daitekeela

$$\langle z, Ly \rangle - \langle L^{\dagger}z, y \rangle = \mathcal{P}(\bar{z}, y) \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.29)$$

9.7 ARIKETA Frogatu $L^{\dagger\dagger} = L$.

³**George Green** (1793, Sneinton, Ingalaterra; 1841-05-31, Sneinton). Hamar lan baino ez zituen argitaratu eta haietariko gehienak —garrantzitsuena den *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* barne— 40 urterekin Cambridge-ra ikasle joan baino lehenago. Ekarpen garrantzizkoenak potentzialaren teorian egin arren, elektrizitatea, hidrodinamika, optika eta akustika ere landu zituen.

L eragilea (**formalki**) autoadjuntua dela esaten da bere adjuntu formalaren berdina denean: $L^\dagger = L$.

Eragile adjuntuaren (9.24) definizioaz baliatuz, erraz egiaztatzen da ekuazioa erreala denean ($\bar{a}_i = a_i$) —hau da, eragilea erreala denean ($\bar{L} = L$)— ondoko hiru baldintzak elkarren balioki-deak direla:

$$L = L^\dagger, \quad (9.30)$$

$$a'_0 = a_1, \quad (9.31)$$

$$Ly = (a_0 y')' + a_2 y. \quad (9.32)$$

9.8 ARIKETA Froga ezazu ekuazioa erreala eta autoadjuntua denean zera dugula:

$$\mathcal{P}(\bar{z}, y) = a_0 W[\bar{z}, y], \quad (9.33)$$

$$\langle z, Ly \rangle - \langle Lz, y \rangle = a_0 W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.34)$$

Jakina, ekuazio guztiak ez dira autoadjuntuak, baina horrela idatz daitezke beti zeren, $L = \bar{L}$ izanik

$$\rho(x) \equiv \exp \left[\int_a^x \frac{a_1(u) - a'_0(u)}{a_0(u)} du \right] \quad (9.35)$$

definitzen badugu, erraz ikusten baita $\rho L = (\rho L)^\dagger$ eragilea autoadjuntua dela eta, ondorioz,

$$\langle z, \rho Ly \rangle - \langle \rho Lz, y \rangle = \langle z, Ly \rangle_\rho - \langle Lz, y \rangle_\rho = \rho a_0 W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.36)$$

9.9 ARIKETA Egiaztatu L eragile lineal erreal oro autoadjuntu bihurtzen dela $\rho \geq 0$ funtzio ez-negatiboarekin biderkatuz, baita (9.36) betetzen dela ere.

Hemendik aurrera eragile erreal formalki autoadjuntuak aztertzeraz mugatuko gara eta ekuazioa forma autoadjuntuan idatziko dugu:

$$Ly = (a_0 y')' + a_2 y = 0. \quad (9.37)$$

9.10 ARIKETA Idatzi forma autoadjuntuan hurrengo ekuazioak:

$$\text{Legendre : } (1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad (9.38)$$

$$\text{Laguerre : } xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0, \quad (9.39)$$

$$\text{Hermite : } y'' - 2xy' + \lambda y = 0. \quad (9.40)$$

9.3 Sturm eta Liouville-ren problemak

Eman dezagun (a, b) tartean

$$Ly = [P(x)y']' + Q(x)y = 0 \quad (9.41)$$

ekuazio lineal autoadjuntua dugula eta bertan $P(x) > 0$ izateaz gain $P(a) \geq 0$ eta $P(b) \geq 0$ betetzen direla. Bestalde, ρ funtzio bat dago, (a, b) tartean $\rho(x) > 0$ izateaz gain, $\rho(a) \geq 0$ eta $\rho(b) \geq 0$ balioak dituena. Eraiki dezagun

$$Ay \equiv -\frac{1}{\rho} [P(x)y']' - \frac{Q(x)}{\rho} y \quad (9.42)$$

adierazpenak emandako $A = -\frac{1}{\rho}L$ eragile lineala eta azter dezagun

$$Ay = \lambda y \quad (9.43)$$

balio propioen problema,

$$L_\lambda y = [P(x)y']' + [Q(x) + \lambda\rho(x)]y = 0 \quad (9.44)$$

edo

$$Ly = -\lambda\rho(x)y \quad (9.45)$$

moduetan ere idatz daitekeena. Azpimarratu behar da, L eragilea ez bezala, L_λ delakoa ez dela beti erreal eta formalki autoadjuntua.

9.11 ARIKETA Frogatu honako propietate hau:

$$\langle z, Ay \rangle_\rho - \langle Az, y \rangle_\rho = -P(x)W[\bar{z}, y] \Big|_{z=a}^{z=b}. \quad (9.46)$$

Sturm⁴ eta Liouville-ren problema batean, A eragilea benetan autoadjuntua izateko mugalde-baldintzak aurkitzen saiatzen da:

$$\langle z, Ay \rangle_\rho = \langle Az, y \rangle_\rho. \quad (9.47)$$

Izan ere, azken hau da, laster ikusiko dugun funtsezko teorema frogatzeko behar den baldintza matematikoa eta, (9.46)-en ondorioz, ondoko moduan ere idazten da:

$$P(b)W[\bar{z}, y](b) - P(a)W[\bar{z}, y](a) = 0. \quad (9.48)$$

Hauxe lortzeko bide bakoitzeko Sturm eta Liouville-ren problema bat definitzen da, hala nola jarraian definitzen direnak.

Problema erregularra

Baldintza lineal homogeenok ezartzen dira honelakoetan:

$$W(a) = 0 \iff \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0), \quad (9.49)$$

$$W(b) = 0 \iff \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad (\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0). \quad (9.50)$$

Problema periodikoa

$P(a) = P(b)$ baldintza betetzen denean, problema periodikoa azter daiteke, ondokoa eskatzen bada:

$$W(a) = W(b) \iff \begin{cases} y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b). \end{cases} \quad (9.51)$$

Problema singularra

Hauen artean mota desberdinetakoak daude. Adibidez:



⁴ **Jacques Charles Francois Sturm** (1803-09-22, Ginebra, Suitza; 1855-12-18, Paris). Batez ere gai honetan aztertutako teoriari esker gogoratzen badugu ere, geometria diferentziala eta proiektiboa, ekuazio diferentzialak, optika geometrikoa eta beroaren barreiapena ikertu zituen. Polinomioek tartebatean dituzten erroen kopuruari buruzko emaitza interesgarri bat frogatu zuen.

- $P(a) = 0$ bada, $W(b) = 0$ ezarri ondoren $x \rightarrow a$ limitean y eta y' bornatuak izateko eska daiteke.
- $P(b) = 0$ bada, $W(a) = 0$ ezarri ondoren $x \rightarrow b$ limitean y eta y' bornatuak izateko eska daiteke.
- $P(a) = P(b) = 0$ badira, nahikoa da muturretan y eta y' bornatuak izatea.

(a, b) tartea bornatua ez denean ere problema singularra dela esaten da.

9.12 ARIKETA Froga ezazu Sturm eta Liouville-ren problema ororen balio propioak errealak direla eta, eragilea erreal bada, bektore propio errealak aukera daitezkeela.

9.13 ARIKETA Froga ezazu Sturm eta Liouville-ren problema batean balio propio desberdinei dagozkien funtzio propioak ($\mathbb{L}y_n = -\lambda_n \rho y_n$) elkarren ortogonalak direla:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = \|y_n\|^2 \delta_{nm}. \quad (9.52)$$

Problema erregularra bada, eragilea autoadjuntua da eta ondoko teorema froga daiteke analisi funtzionalaren bidez (ikus [22] edo [31]).

9.1 TEOREMA Sturm eta Liouville-ren problema erregular batean infinitu balio propio daude, $n \rightarrow \infty$ limitean infinitura doan

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \quad (9.53)$$

segidan ordenatu daitezkeenak. Balio propioak bakunak dira, λ_n -ri dagokion y_n funtzio propioa,

$$\mathbb{L}y_n = -\lambda_n \rho y_n, \quad (9.54)$$

erreal izateko moduan aukera daiteke eta (a, b) tartean $n - 1$ zero ditu preseski. Balio propio desberdinei dagozkien funtzio propioak ortogonalak dira:

$$\langle y_n, y_m \rangle_\rho = \int_a^b y_n(x) y_m(x) \rho(x) dx = \|y_n\|^2 \delta_{nm}. \quad (9.55)$$

Funtzio propio ortogonal normalizatuaren multzoa, $\phi_n = y_n / \|y_n\|_\rho$, sistema ortonormal osoa da eta $f \in L^2(a, b; d\mu)$ funtzio oro —mugalde-baldintzak betetzen ez baditu ere— normarekiko konbergentea den seriean garatu daiteke:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n = \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \phi_n(x) f(x) \rho(x) dx. \quad (9.56)$$

Gainera, f eta f' zatikako jarraituak badira, hauxe betetzen da $x \in (a, b)$ puntu guztietan —baina ez beti a eta b muturretan— ohiko konbergentziaren zentzuan:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n(x). \quad (9.57)$$

Azter dezagun berriro gaiaren hasieran aztertutako adibidea:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\ell) = 0. \quad (9.58)$$

$\omega \equiv \pi/\ell$ definitzen badugu, balio propioak $\lambda = n^2 \omega^2$ dira.

9.14 ARIKETA Froga ezazu dagokion multzo ortonormal osoa hauxe dela:

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin n\omega x. \quad (9.59)$$

Beraz, f eta f' funtzioak $[0, \ell]$ tartean jarraituak badira,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\omega x, \quad c_n \equiv \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin n\omega x dx \quad (9.60)$$

Fourier-en⁵ sinu-seriea konbergentea izango da $x \in (a, b)$ puntu guztietan. Ikus daitekeenez, $x = 0, \ell$ puntuetan serieak 0-ra jotzen du —hauexek dira mugalde-baldintzak!— eta ez $f(0)$ eta $f(\ell)$ balioetara, oro har. Bestalde, seriea periodikoa denez (periodoa 2ℓ da) $[0, \ell]$ tartetik kanpo ere konbergentea izango da, batura $(0, \ell)$ tartean $f(x)$ -ren berdina den 2ℓ periodoko funtzio bakoitia izanik.

9.15 ARIKETA Eman dezagun $f(x) = 1$ dela. Froga itzazu ondoko erlazioak:

$$c_{2n} = 0, \quad c_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}. \quad (9.61)$$

Zein izango da

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega x}{2n+1} \quad (9.62)$$

seriearen batura lerro zuzen erreal osoan?

Problema singularrak askoz ere zailagoak izaten dira eta teoria orokorra testu honen arlotik at dago, baina zera aipa dezakegu: balio propioak ez dira beti bakunak eta espektroa —balio propioen multzoa— diskretua edo jarraitua izan daiteke; areago, espektroan zati batzuk jarraituak izan arren, beste batzuk diskretuak izan daitezke.

Hemen, adibide moduan, ondoko problema $(0, 1)$ tartean aztertzeraz mugatuko gara:

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0. \quad (9.63)$$

Jatorria puntu singularra denez, aztertuko dugun probleman funtzioa $x \rightarrow 0$ limitean bornatua izateko eta $y(1) = 0$ baldintza betetzeko eskatuko da.

9.16 ARIKETA Egiaztatu aldagai independentearen $t = \sqrt{\lambda}x$ aldaketa eginez, ekuazioa 0 ordenako Bessel-en ekuazioa laburtzen dela.

Ekuazioaren soluzioa, beraz, $y = AJ_0(\sqrt{\lambda}x) + BY_0(\sqrt{\lambda}x)$ da. Y_0 funtzioak jatorrian divergentzia logaritmiko bat duenez, $B = 0$ aukeratu behar da. Gainera, $y(1) = AJ_0(\sqrt{\lambda}) = 0$ bete behar denez, balio propioak J_0 funtzioaren zero positiboen karratuak izango dira. D.8 irudian susmatzen denez, aipaturiko zeroak infinitu dira eta, ikusi berri dugunaren ondorioz, ondoko baldintzak bete behar dituzte:

$$\langle J_0(\alpha_n x), J_0(\alpha_m x) \rangle_x = \int_0^1 x J_0(\alpha_n x) J_0(\alpha_m x) dx = 0, \quad (9.64)$$

$n \neq m$ eta $J_0(\alpha_n) = 0$ izanik.



⁵ **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768-03-21, Auxerre, Frantzia; 1830-05-16, Paris). Matematika huts eta aplikatuan egindako ekarpenez gain, beroaren eroankortasunaren teoria matematikoa zor diogu: berak aurkitutako barreiapen-ekuazioa ebazteko, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange eta bestek lehenago ezagutzen zituzten bere izeneko serie trigonometrikoez baliatu zen.

9.4 Fourier-en serieak

Osziladore harmonikoaren kasuan mugalde-baldintza periodikoak erabiltzen badira,

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y\left(-\frac{T}{2}\right) = y\left(\frac{T}{2}\right), \quad y'\left(-\frac{T}{2}\right) = y'\left(\frac{T}{2}\right), \quad (9.65)$$

funtzio propio ortogonalak sinuak eta kosinuak dira.

9.17 ARIKETA Froga ezazu osziladore honen balio propioak $n\omega$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \omega \equiv 2\pi/T$) direla eta dagokion sistema ortonormala ondokoa:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin n\omega x : n = 1, 2, \dots \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos n\omega x : n = 1, 2, \dots \right\}. \quad (9.66)$$

Beraz, edozein f funtzioaren

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x \quad (9.67)$$

Fourier-ren seriea eraiki daiteke, hurrengo koefizienteen bidez:

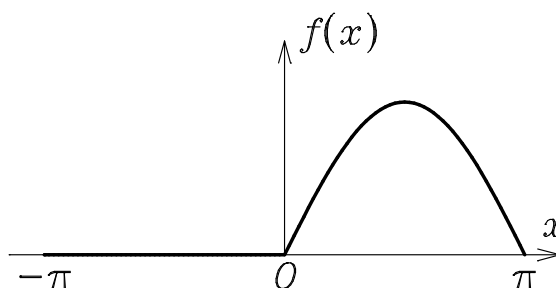
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx, \quad (9.68)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x dx, \quad (9.69)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x dx. \quad (9.70)$$

Fourier-ren serieak $(-T/2, T/2)$ tartean f -rantz jotzen du normarekiko. Gainera, f eta f' zatikako jarraituak badira, $x \in (-T/2, T/2)$ puntu guztietan $(f(x+0) + f(x-0))/2$ balioaren berdina da seriaren batura. Aipaturiko tartetik kanpo, $(-T/2, T/2)$ delakoan f -ren berdina den T periodoko funtziorantz joko du. Testu askotan a_0 koefizientea (9.69) formularen bidez kalkulatu da eta, beraz, seriea ondoko era baliokidean idazten da:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega x. \quad (9.71)$$



9.1 IRUDIA $f(x) = \theta(x) \sin x$ funtzioa $(-\pi, \pi)$ tartean.

9.18 ARIKETA Kalkulatu $\theta(x) \sin x$ funtzioaren Fourier-en seriea $(-\pi, \pi)$ tartean.

9.5 Sturm eta Liouville-ren problema inhomogeneoa

Azter dezagun orain problema inhomogeneo bat,

$$L_\lambda y = [P(x)y']' + [Q(x) + \lambda\rho(x)]y = f(x), \quad (9.72)$$

honela ere idazten dena:

$$Ly = -\lambda\rho(x)y + f. \quad (9.73)$$

Mugalde-baldintzak hauexek izango dira:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \quad (9.74)$$

Dagokion problema homogeneoaren multzo ortonormal osoa ezagutzen badugu,

$$L\phi_n = -\lambda_n \rho \phi_n, \quad \langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho = \delta_{nm}, \quad (9.75)$$

nahi dugun soluzio erregularrak ondoko garapena izango du:

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x). \quad (9.76)$$

Orain, adierazpen hau muturretan ere beteko da, bertan mugalde-baldintzaren ondorio zuzena baita. Hortaz, zera beteko da:

$$f = \rho \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n) c_n \phi_n(x). \quad (9.77)$$

9.19 ARIKETA Egiaztatu azken baieztapena.

Eman dezagun $f/\rho \in L^2(a, b; d\mu)$ dela; beraz, $\{\phi_n\}$ oinarrian garatu daiteke,

$$f = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n = \langle \phi_n, f \rangle = \int_a^b \phi_n(x) f(x) dx, \quad (9.78)$$

eta, $\rho > 0$ denez,

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda - \lambda_n) c_n - f_n] \phi_n(x) = 0. \quad (9.79)$$

Baina azken emaitza ondoko kasuotan bakarrik bete daiteke:

1. λ balioa espektroan ez badago, $\lambda - \lambda_n \neq 0$ eta, beraz, $c_n = f_n / (\lambda - \lambda_n)$ da eta problema inhomogeneoak soluzio bakarra du:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \phi_n}{\lambda - \lambda_n}. \quad (9.80)$$

2. λ espektroan badago, $\lambda = \lambda_p$, bi kasu gerta daitezke:

(a) $f_p = \langle \phi_p, f \rangle \neq 0$ denean ez dago soluziorik.

(b) $f_p = \langle \phi_p, f \rangle = 0$ bada,

$$y = \sum_{n \neq p} \frac{f_n \phi_n}{\lambda - \lambda_n} + C \phi_p \quad (9.81)$$

erako infinitu soluzio daude, C konstantea hautazkoa baita.

Korolario moduan, kasu berezi honi dagokion **Fredholm-en⁶ hautabidearen teorema** dugu: edo problema inhomogeneoak soluzio bakarra du edo problema homogeneoak soluzio ez-nuluren bat du (ϕ_p kasu honetan). Beste testuinguru batzuetan ere betetzen da teorema hau: ekuazio algebrako linealen sistemen kasuan ere aplikatzen dela gogoratu beharko luke irakurleak.

Azter dezagun ondoko adibidea:

$$y'' + \lambda y = -x, \quad y(0) = y(\ell) = 0. \quad (9.82)$$

Hemen $\omega \equiv \pi/\ell$ definizioa eginez gero, balio propioak $\lambda = n^2\omega^2$ ($n = 1, 2, \dots$) dira eta bektore propioak $\phi_n = \sqrt{2/\ell} \sin n\omega x$. Nahikoa da, beraz, Fourier-en sinu-seriearen koefizienteak kalkulatzeko.

9.20 ARIKETA Egiaztatu, $f = -x$ denean hauxe dugula:

$$\langle \phi_n, f \rangle = \frac{(-1)^n \sqrt{2} \ell^{3/2}}{n\pi}. \quad (9.83)$$

Ondorioztatu soluzioa ondokoa dela:

$$y = \frac{2\ell}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\omega x}{n(\lambda - n^2\omega^2)}. \quad (9.84)$$

9.21 ARIKETA Erabili ekuazioaren soluzio orokorra mugalde-baldintzen problema ebazteko eta egiaztatu emaitza honako hau dela $\lambda > 0$ denean:

$$y = \frac{\ell \sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda \sin \sqrt{\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda}. \quad (9.85)$$

Emaitza hau eta lehenago aurkitutakoa berdinak al dira? Zer gertatzen da $\lambda < 0$ bada? Zein da erantzuna bi metodoetan $\lambda = 0$ kasuan?

9.6 Green-en funtzioa

$$L_\lambda y = f(x), \quad (9.86)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (9.87)$$

problema inhomogeneoaren **Green-en funtzioa** (edo **Green-en bi puntutako funtzioa**) gai inhomogeneoaren ordez Dirac-en delta erabiliz lortzen den kasuaren $G_\lambda(x, s)$ soluzioa da:

$$L_\lambda G_\lambda(x, s) = \delta(x - s), \quad (9.88)$$

$$\alpha_1 G_\lambda(a, s) + \alpha_2 G'_\lambda(a, s) = 0, \quad \beta_1 G_\lambda(b, s) + \beta_2 G'_\lambda(b, s) = 0. \quad (9.89)$$

Problema homogeneoaren soluzio-oinarri ortogonal bat erabiliz, Green-en funtzioa (9.80) eta (9.78) adierazpenek emandakoa izango da.



⁶ **Erik Ivar Fredholm** (1866-04-07, Stockholm, Suedia; 1927-08-17, Stockholm). Idatzi zituen lanak gutxi izan ziren, baina kalitate eta zorroztasun handikoak. Hautabidearen teorema ospetsuaz gain, ekuazio integralei eta espektro-teoriari buruz egindako ekarpenak gogoratzen dira.

9.22 ARIKETA Egiaztatu $f(x) = \delta(x - s)$ denean koefizienteak $f_n = \phi_n(s)$ direla.

Beraz, L_λ eragilearen espektroan ez dauden λ balioetarako hauxe dugu:

$$G_\lambda(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(s)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (9.90)$$

Adierazpen honetan ikusten denez, x eta s aldagaiak era simetrikoan agertzen dira:

$$G_\lambda(x, s) = G_\lambda(s, x). \quad (9.91)$$

Green-en funtzioa ezaguna bada, (9.86)–(9.87) problema inhomogeneoaren soluzioa, $f(x)$ guztietarako, hauxe da:

$$y(x) = \int_a^b G_\lambda(x, s)f(s) dx. \quad (9.92)$$

Izan ere, (9.87) hastapen-baldintzak eraikuntzagaratik betetzen dira eta, L_λ eragilea lineala denez, zera dugu:

$$L_\lambda y(x) = \int_a^b L_\lambda G_\lambda(x, s)f(s) dx = \int_a^b \delta(x - s)f(s) dx = f(x). \quad (9.93)$$

Argi dago, beraz, oso kontzeptu emankorra dela eta —3.8.2 eta 3.9 ataletako Cauchy-ren metodoa eta oinarritzko soluzioa bezalaxe— oso erabilgarria unitate-bulkadari dagokion problema oinarritzkoena ebatzi ondoren beste guztiak sistematikoki aztertzeko.

Gaian zehar askotan erabili dugun adibidean,

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y(0) = y(\ell) = 0 \quad (9.94)$$

dugu, eta Green-en funtzioa ondoko problemaren soluzioa da:

$$G_\lambda''(x, s) + \lambda G_\lambda(x, s) = \delta(x - s), \quad G_\lambda(0, s) = G_\lambda(\ell, s) = 0. \quad (9.95)$$

9.23 ARIKETA Froga ezazu aipaturiko kasuan hauxe betetzen dela:

$$G_\lambda(x, s) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\omega x \sin n\omega s}{\lambda - n^2\omega^2}. \quad (9.96)$$

Problema homogeneoaren soluzio-multzo ortonormal osoa aurkitzeko gai garen kasuetan ere, (9.90) serie infinituak ez du beti adierazpenik erabilgarriena ematen; baina, beste modu batera idatz daiteke Green-en funtzioa.

9.2 TEOREMA Eman dezagun, problema homogeneoaren balio propioa ez den λ balio bantentzat, y_1 (y_2) funtzioak problema homogeneoa eta ezkerreko (eskuineko) mugalde-baldintza betetzen duela, baina ez beste muturrekoa:

$$L_\lambda y_1 = 0, \quad \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0, \quad \beta_1 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) \neq 0, \quad (9.97)$$

$$L_\lambda y_2 = 0, \quad \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0, \quad \alpha_1 y_2(a) + \alpha_2 y_2'(a) \neq 0. \quad (9.98)$$

Orduan, honako propietate hauek ere betetzen dira:

1. y_1 eta y_2 linealki independenteak dira: $W(x) = W[y_1, y_2] \neq 0$.

2. $P(x)W(x)$ konstantea da.

3. Problemaren Green-en funtzioa hauxe da:

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(s)}{P(x)W(x)}, & \text{baldin } a \leq x \leq s, \\ \frac{y_1(s)y_2(x)}{P(x)W(x)}, & \text{baldin } s \leq x \leq b. \end{cases} \quad (9.99)$$

4. Green-en funtzioa jarraitua da, baina deribatuak $1/P(s)$ balioko jauzia egiten du $x = s$ puntuetan:

$$G_\lambda(s+0, s) = G_\lambda(s-0, s), \quad G'_\lambda(s+0, s) - G'_\lambda(s-0, s) = \frac{1}{P(s)}. \quad (9.100)$$

Izan ere, y_1 eta y_2 linealki menpekoak balira, elkarren proportzionalak izango lirateke eta, ondorioz, bi mugalde-baldintzak beteko lituzkete eta hau hipotesien kontra doa (gainera, λ balio propioa ez denez, $y_1 = y_2 = 0$ kausan gerta daiteke soil-soilik). Bestalde, $P(x)W(x)$ konstantea dela ikusteko, nahikoa da bere deribatua kalkulatzeko, soluzioek betetzen duten ekuazio diferentziala kontuan hartuz:

$$\begin{aligned} [PW]' &= [P(y_1y_2' - y_1'y_2)]' = P'(y_1y_2' - y_1'y_2) + P(y_1y_2'' - y_1''y_2) \\ &= y_1(Py_2')' - y_2(Py_1')' = -y_1(Q + \lambda\rho)y_2 + y_2(Q + \lambda\rho)y_1 = 0. \end{aligned} \quad (9.101)$$

Argi dago $G_\lambda(x, s)$ funtzioa,

$$G_\lambda(x, s) = \frac{y_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} \quad (9.102)$$

moduan ere idazten dena, jarraitua dela $x = s$ puntuetan:

$$G_\lambda(s+0, s) = G_\lambda(s-0, s) = \frac{y_1(s)y_2(s)}{P(s)W(s)}. \quad (9.103)$$

Deribatua kalkulatzeko badugu,

$$\begin{aligned} G'_\lambda(x, s) &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s) + [y_1(s)y_2(x) - y_1(x)y_2(s)]\delta(x-s)}{P(x)W(x)} \\ &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{y_1(s)y_2(s) - y_1(x)y_2(s)}{P(s)W(s)}\delta(x-s) \\ &= \frac{y_1'(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y_2'(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)}, \end{aligned} \quad (9.104)$$

hauxe lortzen da:

$$G'_\lambda(s+0, s) - G'_\lambda(s-0, s) = \frac{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}{P(s)W(s)} = \frac{1}{P(s)}. \quad (9.105)$$

Bigarren deribatua erraz kalkulatu da,

$$\begin{aligned}
 G''_{\lambda}(x, s) &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s) + [y_1(s)y'_2(x) - y'_1(x)y_2(s)]\delta(x-s)}{P(x)W(x)} \\
 &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{y_1(s)y'_2(s) - y'_1(s)y_2(s)}{P(s)W(s)}\delta(x-s) \\
 &= \frac{y''_1(x)y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)y''_2(x)\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \frac{1}{P(s)}\delta(x-s), \tag{9.106}
 \end{aligned}$$

eta, y_1 eta y_2 problema homogeneoaren soluzioak direnez, $L_{\lambda}y_i(x) = 0$, hauex dugu azkenean:

$$L_{\lambda}G_{\lambda}(x, s) = \frac{[L_{\lambda}y_1(x)]y_2(s)\theta(s-x) + y_1(s)[L_{\lambda}y_2(x)]\theta(x-s)}{P(x)W(x)} + \delta(x-s) = \delta(x-s). \tag{9.107}$$

Gainera, argi dago (9.89) mugalde-baldintzak betetzen direla: problemaren Green-en funtzioa $G_{\lambda}(x, s)$ da, beraz.

(9.95) adibidean, $\lambda = 0$ kasuan argi dago soluzioak $y_1 = x$ eta $y_2 = x - \ell$ direla; beraz,

$$G_{\lambda}(x, s) = \begin{cases} \frac{x(s-\ell)}{\ell}, & \text{baldin } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{s(x-\ell)}{\ell}, & \text{baldin } s \leq x \leq \ell. \end{cases} \tag{9.108}$$

Ageri denez, adierazpen hau (9.96) emaitzan $\lambda = 0$ eginez lortzen den baliokidea baino erabilgarriagoa da.

9.24 ARIKETA Kalkulatu problema berberaren Green-en funtzioa $\lambda > 0$ eta $\lambda < 0$ kasuetan.

9.7 Problemak

9.1 Parseval-en⁷ teorema. Konsideratu $[a, b]$ tartean definituriko $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ sistema ortonormal oso bat,

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}$$

eta

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \quad f_n \equiv \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx,$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \phi_n, \quad g_n \equiv \langle \phi_n, g \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} g(x) \rho(x) dx$$

garapenak. Frogatu formalki ondoko erlazio hauek:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{f_n} g_n,$$

$$\|f\|^2 \equiv \langle f, f \rangle_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2.$$

9.2 Hurbilketa onena. Biz $\{\phi_1, \dots, \phi_p\}$ multzo ortonormal finitua:

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_\rho \equiv \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) \rho(x) dx = \delta_{nm}.$$

Definizioz, $\sum_{n=1}^p c_n \phi_n$ egiturako konbinazioa batez besteko koadratikoarekiko f funtzioaren hurbilketa ezin hobea dela esango dugu ondoko adierazpena minimoa egiteko c_n koefizienteak aukeratzeko badira:

$$\|S(c)\|_\rho^2 = \langle S(c), S(c) \rangle_\rho = \int_a^b |S(c)|^2 \rho(x) dx,$$

$S(c) \equiv f - \sum_{n=1}^p c_n \phi_n$ delarik. Froga ezazu hurbilketa onena, c_n direlakoak Fourier-en koefizienteak direnean preseski lortzen dela:

$$c_n = f_n \equiv \langle \phi_n, f \rangle_\rho = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} f(x) \rho(x) dx.$$

Iradokizuna: Idatzi $S(c) = f - \sum_{n=1}^p f_n \phi_n + \sum_{n=1}^p f_n \phi_n - \sum_{n=1}^p c_n \phi_n$ eta kalkulatu $\|S(c)\|_\rho^2$.

9.3 Ebatzi balio propioen ondoko problema:

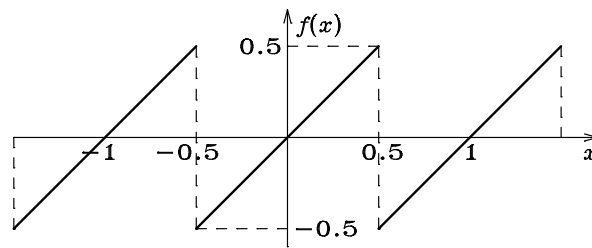
$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

9.4 Ebatzi ondoko mugalde-problema bi metodo desberdinen bidez:

$$y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

9.5 Aztertu ondoko Sturm eta Liouville-ren problemari dagozkion **Fourier-en kosinu-serieetako garapenak:**

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\ell) = 0.$$



9.2 IRUDIA Zerra funtzioa.

9.6 Aztertu funtzio bakoiti eta bikoitien Fourier-en serie arrunten propietateak.

9.7 Fourier-en serieen deribatuak. Berretura-serieen kasuan ez bezala, Fourier-en serieak funtzio ez-jarraituekin erabil daitezke, baina deribatuaren seriea ez da beti lortzen gaiez gai deribatuz. Adibidez, kalkulatu 9.2 irudian marraztu den

$$f(x) = x - \left[x + \frac{1}{2} \right]$$

zerra funtzioaren eta bere deribatuaren Fourier-en serieak. Azken seriea zerra funtzioarena gaiez gai deribatuz lortzen dena al da? Integra daitezke gaiez gai Fourier-en serieak?

9.8 Erabili 9.7 problemako Fourier-en seriea ondoko baturak egiaztatzeko:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

9.9 Gibbs-en⁸ fenomenoa. Marraztu 9.7 problemako Fourier-en serie moztuak, hurrenez hurren 1, 4, 16 eta 64 gai dituztenak. Iruzkina egin emaitzei.

9.10 Kalkulatu $\cos ax$ funtzioaren Fourier-en seriea $(0, T)$ tartean.

9.11 Weierstrass-en⁹ funtzioa. Erabili Fourier-en serie egokia

$$f(2\theta) = \lambda f(\theta) + \cos \theta, \quad (0 \leq \theta < 2\pi, 1 < \lambda < 2)$$

ekuazio funtzionalaren $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ soluzio periodikoa aurkitzeko. Marraztu emaitza. Jarraitua al da? Eta deribagarria?

⁷**Marc-Antoine Parseval des Chênes** (1755-04-27, Rosières-aux-Saline, Frantzia; 1836-08-16, Paris). Bost lan besterik ez zituen argitaratu, baina bigarrenak bere izeneko teorema dauka.



⁸**Josiah Willard Gibbs** (1839-02-11, New Haven, AEB; 1903-04-28, New Haven). Termodinamikan egin zituen ekarpenak ahaztezinak dira eta mekanika estatistikoaren oinarri matematikoei buruzkoak Maxwell-en teorian eta mekanika kuantikoenetan erabiliko ziren geroago. Analisi bektoriala landu zuen eta gaur egun mekanikan eta fisikaren beste arloetan erabilitako notazio bektorialak asko zor dio. Argiaren teoria elektromagnetiko eta mekanika zerutiarrari buruz ere egin zuen lan.



⁹**Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815-10-31, Bavaria; 1897-02-19, Alemania). Analisi modernoaren «aita» da. Serie eta biderkadura infinituen konbergentzia ikertu zuen eta ezein puntutan deribatua onartzen ez duten funtzio jarraituen lehen adibidea eman zuen. Funtzio analitikoak, eliptikoak, abeldarrak eta periodikoak aztertu zituen, baita aldakuntzen kalkulua eta forma koadratikoak ere.

9.12 Fourier-en serie konplexuak. Froga ezazu, (9.65) problemaren kasuan soluzio konplexuak onartzen baditugu, dagokion multzo ortonormal bat ondokoa dela:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in\omega x} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}$$

Ondorioz, $f(x)$ funtzio erreal edo konplexuaren Fourier-en seriea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right)$$

moduan idatz daiteke koefizienteak honako hauek badira:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx.$$

Zergatik agertzen da $e^{-in\omega x}$, eta ez $e^{in\omega x}$, azken integralean? Zein da serie honen eta (9.67) delakoaren arteko erlazioa? Nolako baldintzak bete behar ditu $\{c_n\}$ **Fourier-en espektoak** f funtzioa erreal izan dadin?

9.13 Frogatu $f(x) = f(x + T)$ funtzio periodikoaren batez besteko balio hauexek dela:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

9.14 Dirac-en orratza. Froga ezazu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega x} = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n\omega x, \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right).$$

9.15 Poisson-en¹⁰ formula. Eman dezagun $f(x)$ funtzioaren Fourier-en transformatua hauexek dela:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx.$$

Erabili 9.14 problemako Dirac-en orratza ondoko formula frogatzeko:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT), \quad \left(\omega \equiv \frac{2\pi}{T} \right).$$

9.16 Frogatu ondoko berdintza:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-tn^2} = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{t}}.$$

9.17 Egin berriro 9.7 problema funtzio orokortuak erabiliz.



¹⁰ **Siméon Denis Poisson** (1781-06-21, Pithiviers, Frantzia; 1842-04-25, Sceaux, Frantzia). Bere ekarpen ugarien artean, fisikan ezagunenak hauexek dira: Poisson-en ekuazioa potentzialaren teorian eta Poisson-en makoak mekanika hamiltondarrean. Astronomia, mekanika eta elektromagnetismoa ere landu zituen. Matematikan probabilitate buruzko lanak, Poisson-en banaketa barne, gogoratzen dira, baina, agian, garrantzitsuenak integral mugatu eta Fourier-en serieei buruz egindakoak dira.

9.18 Aurkitu ondokoaren Green-en funtzioa:

$$y'' - k^2 y = f(x), \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

9.19 Kalkulatu hurrengo problemaren Green-en funtzioa:

$$y'' + \lambda y = f(x), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

9.20 Aurkitu ondokoaren soluzio periodikoa (existitzen bada):

$$y'' + 2y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}.$$

9.21 Aurkitu hurrengo ekuazioaren soluzio periodikoa (existitzen bada):

$$y'' + 4y = \sin^2 x.$$

9.22 Eztabaidatu balio propioen ondoko problema:

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad y(1) = y'(e^\pi) = 0.$$

9.23 Aurkitu $[0, \pi)$ tartean $\cos x$ funtzioaren berdina den π periodoko funtzioaren Fourier-en garapen trigonometrikoa. Zeintzuk dira dagozkion sinu- eta kosinu-garapenak?

9.24 Aztertu Legendre-ren ekuazioa,

$$\left[(1 - x^2) y' \right]' + \lambda y = 0,$$

ondoko mugalde-baldintzak betetzen direnean:

$$y(0) = 0, \quad y \text{ eta } y' \text{ bornatuak dira } x \rightarrow 1 \text{ limitean.}$$

Frogatu problema singular honen funtzio propioak Legendre-ren polinomioak direla eta aurkitu dagozkien balio propioak. Kalkulatu Green-en funtzioaren adierazpen formala eta dagokion problema inhomogeneoaren soluzioa.

9.25 Erabili Cauchy-ren metodoa ondokoaren soluzio orokorra kalkulatzeko:

$$y'' + \frac{x}{1+x} y' - \frac{1}{1+x} y = 1 + x.$$

Aurkitu dagokion Sturm eta Liouville-ren ekuazioa eta eraiki Green-en funtzioa hurrengo mugalde-baldintzetarako:

$$y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Askatu mugalde-problema bi metodo desberdinen bidez.

9.26 Aurkitu ℓ -ren balio minimoa ondoko mugalde-problemak soluzio ez-nuluak izan ditzan:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0.$$

ERANSKINAK

A ERANSKINA

Oinarrizko teoremak

*Everything should be made as simple as possible,
but not simpler.*
Albert Einstein

Ekuazio diferentzial arrunten teorian agertzen diren oinarrizko teorema batzuen frogapenak biltzen ditugu eranskin honetan. Ordezko enuntziatuak eta frogapenak 320. orriko bibliografian aurki ditzake irakurleak, baita hemen aipatzen ez diren beste teorema garrantzitsu batzuk ere.

A.1 Picard-en teorema

Hasteko existentzia eta bakartasunaren teorema klasikoa kasurik errazenean frogatuko dugu. Horrela, ekuazio-sistemen eta goi-ordenako ekuazioen kasuetan agertzen diren zailtasun teknikoak saihestuko ditugu eta frogapenaren funtsezko ideiak nabariago agertuko zaizkigu.

A.1 TEOREMA (Existentzia eta bakartasuna) *Eman dezagun $f(x, y)$ funtzioa*

$$\mathcal{R} = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq A, |y - y_0| \leq B \} \quad (\text{A.1})$$

laukizuzen itxian jarraitua dela. Ondorioz, bornaturik dago bertan:

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{R}. \quad (\text{A.2})$$

Aipaturiko \mathcal{R} laukizuzenean

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|, \quad \forall (x, y), (x, z) \in \mathcal{R} \quad (\text{A.3})$$

Lipschitz-en baldintza lokala¹ *betetzen bada,*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (\text{A.4})$$



¹ **Rudolf Otto Sigismund Lipschitz** (1832-05-14, Königsberg, Prusia, gaur egun Errusiako Kaliningrad; 1903-10-07, Bonn, Alemania). Ekuazio diferentzialen soluzioaren bakartasuna bermatzen duen baldintza honi esker gogoratzen dugu, baina garrantzizko ekarpenak egin zituen mekanikan, aldakuntzen kalkulan, forma diferentzial koadratikoen teorian, taldeen adierazpideetan, Bessel-en funtzioei buruz, eta jariakin likatsuen teorian.

hastapen-baldintzen problemak $y(x)$ soluzio bakarra du

$$I = [x_0 - h, x_0 + h], \quad h \equiv \min\left(A, \frac{B}{M}\right) \quad (\text{A.5})$$

tartean eta bertan $y'(x)$ jarraitua da. Gainera, I tartean problema berberaren soluzioa den beste edozein funtzio, $y(x)$ -ren berdina izango da I osoan zehar. Soluzioa x_0 -rekiko jarraitua da.

Geroxeago frogatu dugun teorema honen hipotesi eta ondorioen esanahia ulertzen lagunduko digu hurrengo ariketak.

A.1 ARIKETA

1. Froga ezazu Lipschitz-en baldintzatik y -rekiko jarraitasuna ondorioztatzen dela.
2. Erabili $f(x, y) = \sqrt{y}$ funtzioa $[0, 1] \times [0, 1]$ karratuan, jarraitasun hutsetik ez dela Lipschitz-en baldintza ondorioztatzen frogatzeko.
3. Aurki ezazu Lipschitz-en baldintza bete arren x -rekiko jarraitua ez den funtzioaren bat.
4. Froga ezazu f funtzioa eta $\partial f / \partial y$ deribatua \mathcal{R} laukizuzenean jarraituak badira, Lipschitz-en baldintza betetzen dela.
5. Egiaztatu f funtzioaren jarraitasuna ez dela nahikoa soluzioaren bakartasuna bermatzeko (nahiz beraren existentzia Peano-ren teoremaren ondorioa den).
6. Erabili $y' = y^2$, $y(0) = y_0$ problema, soluzioaren I tarte \mathcal{R} laukizuzenaren A zabalera baino laburragoa izan daitekeela frogatzeko.

Teoremaren frogapena, 7.3 atalean ikusi genuen hurrenez hurreneko hurbilketen Picard-en metodoaz baliatzen da eta hiru urratsetan egingo da.

A.1.1 Soluzioaren existentzia

Eman dezagun Picard-en iterazioa abiarazteko ondoko laukizuzenean dagoen $y^{[0]}(x) = y_0$ aukeratzten dugula:

$$\mathcal{R}' = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq B \} \subset \mathcal{R}. \quad (\text{A.6})$$

Indukzio osoaren bidez, $y^{[n]}$ hurbilketa guztiak \mathcal{R}' laukizuzenean daudela frogatuko dugu, hau da, $|x - x_0| \leq h$ guztientzat $|y^{[n]}(x) - y_0| \leq B$ betetzen dela. Izan ere, $y^{[n]}$ funtzioa \mathcal{R}' horretan badago, bertan dago $y^{[n+1]}$ delakoa, (7.27) adierazpenaren ondorioz, hauxe betetzen baita $x \in I$ guztietarako:

$$|y^{[n+1]}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[u, y^{[n]}(u)] du \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq B. \quad (\text{A.7})$$

Defini ditzagun

$$S_n(x) \equiv |y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.8})$$

eta balia gaitzen berriro indukzio osoaz ondokoa frogatzeko:

$$S_n(x) \leq MK^{n-1} \frac{|x - x_0|^n}{n!}. \quad (\text{A.9})$$

Propietate hau $n = 1$ kasuan betetzen da,

$$S_1(x) \leq \left| \int_{x_0}^x f(u, y_0) du \right| \leq M |x - x_0|, \quad (\text{A.10})$$

eta, S_n -rekin betetzen bada, hauxe dugu:

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x) &= \left| \int_{x_0}^x [f(u, y^{[n]}(u)) - f(u, y^{[n-1]}(u))] du \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x |y^{[n]}(u) - y^{[n-1]}(u)| du \right| \\ &= K \left| \int_{x_0}^x S_n(u) du \right| \leq K \left| \int_{x_0}^x MK^{n-1} \frac{|u - x_0|^n}{n!} du \right| = MK^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq \frac{M}{K} \frac{(Kh)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Baina

$$\frac{M}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Kh)^n}{n!} = \frac{M}{K} (e^{Kh} - 1) \quad (\text{A.12})$$

seriea, konbergentea izateaz gain, $\sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)]$ seriearen goi-bornea da. Beraz, azken seriea absolutuki eta uniformeki konbergentea da. Gainera, serie teleskopiko honen batura partziala hauxe da:

$$\sum_{n=1}^N [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)] = y^{[N]}(x) - y_0. \quad (\text{A.13})$$

Ondorioz,

$$y(x) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} y^{[N]}(x) \quad (\text{A.14})$$

limitea existitzen da eta, konbergentzia uniformeari esker, (7.27) segidak (7.28) limitera jotzen du. Beraz, (A.14) adierazpenak definituriko funtzioa hastapen-baldintzen problemaren soluzioa da. Gainera, $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)] - y_0$ seriearen konbergentzia absolutua eta uniforme denez, horrelakoa izango da deribatuarena,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [y'^{[n]}(x) - y'^{[n-1]}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} y'^{[n]}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f[x, y^{[n-1]}(x)], \quad (\text{A.15})$$

eta, ondorioz, y' jarraitua da.

Aipatu behar da, hala ere, iterazioa edozein $y^{[0]}(x) = \psi(x)$ funtzio integragarriekin has daitekeela zeren, horrelako funtzioak bornatuak direnez, goiko arrazoibidea errepika baitaiteke, M konstantea $\max(M, \sup |\psi(x)|)$ balioarekin ordezkatzuz, $\sum_{n=1}^{\infty} [y^{[n]}(x) - y^{[n-1]}(x)]$ seriea uniformeki konbergentea dela ikusteko.

A.1.2 Soluzioaren bakartasuna

Eman dezagun \mathcal{R}' laukizuzenean bi soluzio daudela: $y(x)$ eta $z(x)$. Bi soluzioak hastapen-baldintza berberari dagozkionez,

$$\psi(x) \equiv [y(x) - z(x)]^2 \quad (\text{A.16})$$

funtzioak $\psi(x_0) = 0$ baldintza betetzen du eta bai ondokoa ere:

$$\psi'(x) = 2(y - z)(y' - z') \leq 2|y - z| |f(x, y) - f(x, z)| \leq 2K|y - z|^2 = 2K\psi(x). \quad (\text{A.17})$$

Ondorioz,

$$\psi'(x) - 2K\psi(x) \leq 0 \quad (\text{A.18})$$

dugu eta inekuazio hau e^{-2Kx} biderkatzaile positiboarekin biderkatuz,

$$\frac{d}{dx} [e^{-2Kx}\psi(x)] \leq 0. \quad (\text{A.19})$$

Honek frogatzen du $e^{-2Kx}\psi(x)$ ez dela gorakorra eta, $x > x_0$ guztientzat,

$$e^{-2Kx}\psi(x) \leq e^{-2Kx_0}\psi(x_0) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Emaitza hau eta ψ negatiboa ez dela erabiliz, $x \geq x_0$ puntuetan $\psi(x) = 0$ dela eta, beraz, bi soluzioak berdinak direla frogatzen da. Aurreko arrazoibidea $\psi'(x) + 2K\psi(x) \geq 0$ bornearekin berriz ginez, erraz froga daiteke emaitza $x < x_0$ puntuetan ere betetzen dela.

A.1.3 Hastapen-baldintzen menpekotasun jarraitua

Hastapen-baldintzen menpekotasuna era esplizituan adieraziz, $y(x_0; y_0) = y_0$ eta $y(x_0; z_0) = z_0$ hastapen-baldintza desberdinei dagozkien bi soluzio kontsideratuko ditugu. Hauekin

$$\psi(x) \equiv [y(x; y_0) - y(x; z_0)]^2 \quad (\text{A.21})$$

funtzioa definitzen badugu, aurreko ataleko arrazoibidea erabil dezakegu $x > x_0$ puntuetan haxe gertatzen dela frogatzeko:

$$e^{-2Kx}\psi(x) \leq e^{-2Kx_0}\psi(x_0). \quad (\text{A.22})$$

Erro karratua kalkulatu,

$$|y(x; y_0) - y(x; z_0)| \leq e^{K(x-x_0)} |y_0 - z_0| \leq e^{Kh} |y_0 - z_0|, \quad (\text{A.23})$$

erraz froga dezakegu jarraitasuna, $\epsilon > 0$ bakoitzeko $|y_0 - z_0| < \delta \equiv \epsilon e^{-Kh}$ aukeratzeko badugu, haxe betetzen baita:

$$|y(x; y_0) - y(x; z_0)| < \epsilon. \quad (\text{A.24})$$

A.2 Soluzioen konparazioa

Hurrengo teorema oso erabilgarria izaten da zenbait emaitza kualitatibo frogatzeko.

A.2 TEOREMA *Eman dezagun $f(x, y)$ eta $g(x, y)$ funtzio jarraituek Lipschitz-en baldintza eta $f(x, y) \leq g(x, y)$ desberdintza betetzen dituztela \mathcal{R} laukizuzenean. Bira hastapen-baldintza berberari dagozkion $y(x)$ eta $z(x)$ soluzioak,*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (\text{A.25})$$

$$z' = g(x, z), \quad z(x_0) = y_0, \quad (\text{A.26})$$

eta $x_1 > x_0$ puntua (soluzio biak definiturik dauden tartean dagoena). Orduan,

1. $y(x_1) < z(x_1)$, edo, bestela,
2. $y(x) = z(x), \forall x_0 \leq x \leq x_1$.

Absurdura eramanez, $y(x_3) > z(x_3)$ betetzeko moduko $x_3 > x_0$ puntu bat dagoela suposatuko dugu. Soluzioak jarraituak izanik x_0 puntuan berdina direnez, badago ondoko bi baldintzak betetzeko moduko x_2 puntu bat: $x_0 \leq x \leq x_2$ denean $y(x) \leq z(x)$, eta $x_2 < x \leq x_3$ puntuetan $y(x) > z(x)$. Orain, $\psi(x) \equiv y(x) - z(x)$ definiturik, $x_2 < x \leq x_3$ puntuetan zera dugu:

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= f(x, y) - g(x, z) \leq g(x, y) - g(x, z) \leq |g(x, y) - g(x, z)| \\ &\leq K|y - z| = K(y - z) = K\psi(x),\end{aligned}\tag{A.27}$$

non K delakoa g -ri dagokion Lipschitz-en konstantea baita. Inekuazioa e^{-Kx} -rekin biderkatuz $e^{-Kx}\psi(x)$ funtzioa $x_2 < x \leq x_3$ tartean ezin handi daitekeela ikusten da, eta, beraz,

$$e^{-Kx_3}\psi(x_3) \leq e^{-Kx_2}\psi(x_2) = 0.\tag{A.28}$$

Baina honek $y(x_3) > z(x_3)$ delako hipotesia ukatzen du. Ondorioz, definizio-tarte komuneko $x > x_0$ puntuetan $y(x) \leq z(x)$ dugu.

Eman dezagun, orain, $y(x_2) < z(x_2)$ betetzen dela x_2 puntu batean. Orduan, $\psi(x_2) < 0$ eta

$$\psi'(x) \leq K|y - z| = K(z - y) = -K\psi(x).\tag{A.29}$$

Azken hau e^{Kx} faktorearekin biderkatuz, $e^{Kx}\psi(x)$ ez dela gorakorra ikusten da eta, beraz, $x > x_2$ puntuetan

$$e^{Kx}\psi(x) \leq e^{Kx_2}\psi(x_2) < 0.\tag{A.30}$$

Ondorioz, $\psi(x) < 0$ eta $y(x) < z(x)$ betetzen dira $x > x_2$ puntuetan. Beraz, punturen batean $y(x_1) = z(x_1)$ betetzen bada, $y(x) = z(x)$ izango dugu $x_0 \leq x \leq x_1$ guztietan.

A.3 Soluzioen existentzia globala

Lehenago aipatu dugun bezala, oro har, existentzia eta bakartasunaren hipotesiak betetzen diren tartea baino laburragoa izan daiteke soluzioaren definizio-tartea: A.1 ataleko teorema soluzioaren existentzia *lokala* bermatzen du eta tartearen h luzera A baino askoz txikiagoa izan daiteke. Hurrengo teoremari esker, zenbait kasutan —ekuazio lineal garrantzitsuak barne daudela— soluzioa tarte osoan zehar hedatzen dela frogatu daiteke. (Emitza hau, ekuazio lineal bat goibornetzat onartzen duten ekuazioetara ere hedatzen dela [4] liburuan ikus daiteke.)

A.3 TEOREMA Eman dezagun $f(x, y)$ funtzio jarraituak

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|\tag{A.31}$$

Lipschitz-en baldintza $\mathcal{B} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty\}$ bandan betetzen duela. Orduan, $(x_0, y_0) \in \mathcal{B}$ bakoitzeko,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0\tag{A.32}$$

problema $a \leq x \leq b$ tarte osoan definituriko soluzio bakarra du.

Bereziki,

$$y' + A(x)y = B(x)\tag{A.33}$$

ekuazio linealaren soluzioa A eta B funtzioak jarraituak diren tarte osoan dago definiturik.

$M \equiv |y_0| + \sup |y^{[1]}|$ bada, ia hitzez hitz erabil daiteke berriro A.1.1 ataleko arrazoibidea hauxe frogatzeko:

$$|y^{[n+1]}(x) - y^{[n]}(x)| \leq M \frac{K^n |x - x_0|^n}{n!} \leq M \frac{K^n (b - a)^n}{n!}, \quad (\text{A.34})$$

eta, beraz, Picard-en hurbilketen konbergentzia uniformea da $a \leq x \leq b$ tarte osoan.

Bakartasuna frogatzeko, eman dezagun beste soluzio bat, $z(x)$, dagoela:

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[u, z(u)] du. \quad (\text{A.35})$$

Orduan, z jarraitua denez, badago $C \geq |z(x) - y_0|$ borne bat tarte osoan eta, beraz,

$$\begin{aligned} |z(x) - y^{[1]}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f[u, z(u)] - f[u, y_0]| du \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x |z(u) - y_0| du \right| \leq CK |x - x_0|, \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$\begin{aligned} |z(x) - y^{[2]}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f[u, z(u)] - f[u, y^{[1]}(u)]| du \right| \\ &\leq K \left| \int_{x_0}^x |z(u) - y^{[1]}(u)| du \right| \\ &\leq CK^2 \left| \int_{x_0}^x |u - x_0| du \right| \leq CK^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

eta, kasu orokorrean,

$$|z(x) - y^{[n]}(x)| \leq CK^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \leq CK^n \frac{(b - a)^n}{n!}. \quad (\text{A.38})$$

Eskuineko gaia zerorantz doa azken ekuazioaren $n \rightarrow \infty$ limitea kalkulatzean; beraz, $z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y^{[n]}(x) = y(x)$ dela frogatu dugu.

Ekuazio linealaren kasuan, nahikoa da hauxe ikustea: A eta B funtzioak $a \leq x \leq b$ tartean jarraituak badira,

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq |-A(x)(y - z)| \leq K|y - z| \quad (\text{A.39})$$

betetzen da \mathcal{B} banda osoan.

B ERANSKINA

Metodo sinbolikoak

*One machine may do the work of fifty ordinary men.
No machine can do the work of one extraordinary man.*
Elbert Hubbard

Gure ustez, hauxe ez da lekurik egokiena kalkulu sinbolikoen sistemen erabilera ikasleari irakasteko¹, zeren, beste leku batean [41] esan dugunez, hain erabilgarria eta arriskugarria den tresna erabiltzen ikasteko, denbora luzea eta lan handia behar dira. Ekuazio diferentzial arruntak ebazteko ahalbideak oso gaineratik aztertzeraz mugatuko gara eranskin honetan. Mathematica programa aukeratu dugu hemen, baina antzeko zerbait esan liteke beste edozein sistemari buruz. Hau idaztean dugun argitaraldia honako hau da:

```
In[1]:= { $Version, $ReleaseNumber }  
Out[1]= { 4.0 for Microsoft Windows (July 21, 1999), 1 }
```

Hemen aurkituko ditugun oztopo eta huts egite batzuk programaren hurrengo argitaraldian desagertu litezke, baina antzeko batzuk agertuko dira euren ordean, dudarik ez. Izan ere, gai hau lehenengo idatzi genuenean programaren aurreko argitaraldi bat erabiltzen genuen, baina oraingo argitaraldiaren arazoak erakusteko bilatu behar izan genituen ordean adibideak inolako nekerik gabe aurkitu genituen.

B.1 Metodo zehatzak

Gaur egun kalkulu sinbolikorako sistemak oso erabilgarriak dira ekuazio diferentzialen ebazpen zehatza egiteko, hainbat metodo klasikoekin gain, eskuz ezin erabil daitezkeen zenbait algoritmo ezagutzen dituzte eta. Horrelakoetan agertzen diren tarteko kalkulu astun bukaezinak ordenagailuak bakarrik egin ditzake, *idiot savant* baten antzera.

Mathematica sisteman ekuazio diferentzial bat edo ekuazio diferentzialen sistema bat ebazteko funtzioa `DSolve` deitzen da eta mako artean eta komaz banandurik agertzen diren hiru argumentu dauzka:

¹Testu honen gaia, Mathematica barik, ekuazio diferentzialak direnez, irakurleak programa honen oinarriko erabilera ezagutzen duela suposatuko dugu. Mathematica-rako sarrera zaharkitu bat, doakoa eta laburra izateko abantaila (bakarra) duena, [40] erreferentzian aurki daiteke.

1. Ebatzi behar den ekuazioa edo ekuazio-sistema giltzen artean. Ekuazio baten berdintasun-ikurra == moduan idatzi behar da (esleipena adierazten duen = ikurretik bereizteko). Aldagai independentearen menpekotasuna esplizituki adierazi behar da (esaterako, $y[x]$ eta $y'[x]$ moduan).
2. Menpeko aldagaia (edo menpeko aldagaiak giltzen artean).
3. Aldagai independentea.

Adibidez, 2.17 problemako ekuazioa honela ebazten da (programak forma kanonikoa ulertzen ez duenez, forma normalean idatzi behar dugu):

```
In[2]:= DSolve[Y[x]^2 - 1 + (3 x^2 - 2 x Y[x]) Y'[x] == 0, Y[x], x]
```

```
Out[2]= {{Y[x] -> 1/2 (3 x - Sqrt[4 + 9 x^2 + 4 x C[1]])},
          {Y[x] -> 1/2 (3 x + Sqrt[4 + 9 x^2 + 4 x C[1]])}}
```

Soluzioa bi ordezkapen-arauren bidez ematen da eta hautazko konstantea $C[1]$ eran adierazten da. Agerienez, sistemak ez du beti idazten soluzioa modurik «egokienean».

B.1 ARIKETA Nola idatziko zenuke soluzio hau era laburrago eta «politago» batean?

Ekuazio diferentzialekin batera hastapen-baldintzak ere adieraz daitezke:

```
In[3]:= DSolve[{Y[x]^2 - 1 + (3 x^2 - 2 x Y[x]) Y'[x] == 0, Y[1] == 1},
               Y[x], x]
```

```
Out[3]= {{Y[x] -> 1}}
```

Baina honetan, eta beste gauza askotan, sarritan laguntza behar du, 2.6 problemaren kasuan ere ikus daitekeen bezala:

```
In[4]:= DSolve[{(1 - x^2) Y'[x] == 1 - Y[x]^2, Y[1] == 1}, Y[x], x]
```

```
Power::infy : Infinite expression 1/0 encountered.
```

```
Out[4]= {}
```

Hemen ez da oso «azkarra» izan, soluzio orokorra kalkulatu badaki ere:

```
In[5]:= DSolve[(1 - x^2) Y'[x] == 1 - Y[x]^2, Y[x], x]
```

```
Out[5]= {{Y[x] -> (1 + x - C[1] + x C[1]) / (1 + x + C[1] - x C[1])}}
```

Izan ere, azken adierazpen honetan «ikuskapena» (honelako irakasgaietan trebatzen den azken gaitasun hau gizakiok bakarrik dugu) erabil daiteke hastapen-baldintza integrazio-konstantearen balio guztietarako betetzen dela (baina ez, ordea, $y = -1$ soluzioa ematen duen $C[1] \rightarrow \infty$ limitean) ikusteko.

Bestalde, ez daki ebazten testu hau ondo ikasi ondoren irakurleak askatzen jakingo dituen ekuazio guztiak. Esaterako, ondoko Clairaut-en ekuazioa ebazteko eskatzen bazaio, ez du ezer egiten:

```
In[6]:= DSolve[Y[x] == x Y'[x] - Y[x]^3, Y[x], x]
```

```
Out[6]= DSolve[Y[x] == x Y'[x] - Y[x]^3, Y[x], x]
```

B.2 ARIKETA Saiatu 2.30 ariketako ekuazioa ebazten kalkulu sinbolikorako programa baten bidez.

Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneousen soluzioak aurkitzeko erakusten duen trebetasuna, aitzitik, harrigarria gerta daiteke. Adibidez, 6.9 problemaren kasuan hauxe ematen du:

```
In[7]:= DSolve[x Y'[x] - Y[x] == 0, Y[x], x]
```

```
Out[7]= {{Y[x] -> Sqrt[x] BesselI[1, 2 Sqrt[x]] C[1] + Sqrt[x] BesselK[1, 2 Sqrt[x]] C[2]}}
```

B.3 ARIKETA Egiaztatu soluzio hau eta han eskuz kalkulatu zena berdinak direla.

Ekuazio-sistemak ebazteko ere gai da. Errazena koefiziente konstantetako sistema linealak dira, noski, baina programaren azken argitaraldietan sartu den FullSimplify funtzioaz baliatu behar da gehienetan soluzioaren adierazpen erabilgarriak lortzeko. Adibidez, zera dugu 4.24 problemaren kasuan:

```
In[8]:= DSolve[{x'[t] == -5 x[t] - 2 y[t],
               y'[t] == x[t] - 7 y[t]}, {x[t], y[t]}, t] //
FullSimplify
```

```
Out[8]= {{x[t] -> e^{-5 t} (C[1] Cos[t] + (C[1] - 2 C[2]) Sin[t]),
          y[t] -> e^{-5 t} (C[2] Cos[t] + (C[1] - C[2]) Sin[t])}}
```

B.4 ARIKETA Saiatu sistema hau ebazten aipaturiko sinplifikatze-funtzioa erabili gabe.

Orobat, badaki sistema ez-lineal (apur) batzuk ebazten baina, beste askotan bezalaxe, laguntza behar du soluzioa sinplifikatzeko.

B.5 ARIKETA Erabili Mathematica ondoko sistema ebazteko:

$$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = -y + x^2 - 2y^2. \quad (\text{B.1})$$

Saiatu emaitza sinplifikatzen, soluzioa ondoko eran adierazteko, $t = 0$ puntuan emandako hastapen-baldintzen bidez:

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2(t - 1 + e^{-t})x_0^2 + 2(1 - e^{-t})y_0}}, \quad y = (1 - e^{-t} + y_0 x_0^{-2} e^{-t}) x^2. \quad (\text{B.2})$$

Emaitzak ikaragarriak izan daitezke. Esaterako, 2.26 problemako ekuazioa saiatzen badugu, hurrengo orrietan erakusten den emaitza ulergaitza lortzen da; baina, praktika apur batekin, bi ekuazio kubikoren erroak direla ikusten da eta programa erabil daiteke soluzioa forma implizituan idazteko. Lehen esan dugun bezala, programa hauek oso tresna erabilgarriak (gaur egun, behar-beharrezkoak) dira; baina horrelakoak erabiltzen eta ematen dituzten emaitzak ulertzen ikasi behar da.

Huge.nb

1

In[1]:= yy = DSolve[y' [x]^2 - 2 x y' [x] + y[x] == 0, y[x], x]

Out[1]= { {Y[x] → $\frac{x^2}{4} + \frac{e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{36 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} - \frac{1}{4} e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },

{Y[x] → $\frac{x^2}{4} - \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{72 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \frac{1}{8} (1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },

{Y[x] → $\frac{x^2}{4} - \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)}{72 (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \frac{1}{8} (1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} - 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 e^{12c[1]} (1 + e^{3c[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}$ },

{Y[x] → $\frac{x^2}{4} + (e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (36 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) - \frac{1}{4} e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ },

, {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - ((1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (72 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) + \frac{1}{8} (1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ },

, {Y[x] → $\frac{x^2}{4} - ((1 - i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (-72 e^{9c[1]} x - 9 e^{12c[1]} x^4)) / (72 (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}) + \frac{1}{8} (1 + i \sqrt{3}) e^{-6c[1]} (8 e^{12c[1]} + 20 e^{15c[1]} x^3 - e^{18c[1]} x^6 + 8 \sqrt{e^{24c[1]} - 3 e^{27c[1]} x^3 + 3 e^{30c[1]} x^6 - e^{33c[1]} x^9})^{1/3}$ }}

Huge.nb

2

In[2]:= **yy = Simplify[PowerExpand[Simplify[yy]]]**

$$\begin{aligned}
 \text{Out}[2]= & \left\{ \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 - i \sqrt{3}) e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{-C[1]} x (-8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 + i \sqrt{3}) e^{-2 C[1]} (8 - 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 (1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} - \right. \right. \\
 & \left. \left. e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 + i \sqrt{3}) e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 - i \sqrt{3}) e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\}, \\
 & \left\{ Y[x] \rightarrow \frac{1}{8} \left(2 x^2 + \frac{(1 - i \sqrt{3}) e^{3 C[1]} x (8 + e^{3 C[1]} x^3)}{(e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. (1 + i \sqrt{3}) e^{-6 C[1]} (e^{12 C[1]} (8 + 20 e^{3 C[1]} x^3 - e^{6 C[1]} x^6 + 8 i (-1 + e^{3 C[1]} x^3)^{3/2})^{1/3} \right) \right\} \}
 \end{aligned}$$

In[3]:= **(y - (y[x] /. yy[[1, 1]]))**
(y - (y[x] /. yy[[2, 1]])) (y - (y[x] /. yy[[3, 1]])) // Simplify

$$\text{Out}[3]= \frac{1}{4} (e^{-6 C[1]} + y^2 (-3 x^2 + 4 y) + e^{-3 C[1]} (-4 x^3 + 6 x y))$$

In[4]:= **(y - (y[x] /. yy[[4, 1]]))**
(y - (y[x] /. yy[[5, 1]])) (y - (y[x] /. yy[[6, 1]])) // Simplify

$$\text{Out}[4]= \frac{1}{4} (e^{-6 C[1]} + y^2 (-3 x^2 + 4 y) + e^{-3 C[1]} (4 x^3 - 6 x y))$$

Ezin dugu atal hau amaitu irakurleak kontuan hartu beharko lituzkeen bi ohar egin gabe. Hasteko, kalkulu sinbolikorako programa batek emaitza bat emateak ez du frogatzen emaitza hori zuzena dela. *Programa guztietan daude akatsak*, integral-taula guztietan eta testu guztietan (eta testu honetan, noski) bezalaxe. Adibidez, 6.25 problemaren kasuan, bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneousaren soluzio orokorrean programak bi konstante idazten ditu,

```
In[9]:= DSolve[ x (x - 1) Y' [x] + 3 Y' [x] - 2 Y[x] == 0, Y[x], x]
Out[9]= {{Y[x] -> \frac{x^4 C[1]}{(-1+x)^2} + \frac{x^4 C[2]}{(-1+x)^2}}}
```

baina ez dira independenteak:

```
In[10]:= Simplify[ Out[9] ]
Out[10]= {{Y[x] -> \frac{x^4 (C[1] + C[2])}{(-1+x)^2}}}
```

Batzuetan, programazio-akatsa ez bada ere, erabiltzailearen begi-bistatik kanpo ondo ezkutatirik dauden hipotesi inplizituen menpean egon daiteke emaitza baten zuzentasuna (ikus [41]). Eskuz egindako kalkuluekin bezalaxe, *kalkulu algebraikorako sistemek emandako emaitzak beti egiaztatu behar dira*. Zorionez, behar hau betetzeko sistema bera erabil daiteke gehienetan: oso erraza izaten da soluzioa programaren bidez ekuazioan saiatzzea benetan soluzioa den egiaztatze-ko. (Aitortu behar da, hala ere, batzuetan hau ez dela hain erraza, bi adierazpen berdinak direnez ikusteko erabil daitezkeen sinplifikatze-funtzioak askotan ez baitira nahi bezain onak.) Jakina, egiaztapen horrek ez du baztertzen (agian garrantzi fisiko handiena duen) bestelako soluzioaren bat egotea, ezta aurkitu dena hipotesi inplizitu murriztaile batzuekin bakarrik definiturik egotea ere. Esaterako, ekuazio ez-linealen soluzio singularrak aurkitzeko alferrikakoak izaten dira gaur eguneko sistemak. Adibidez, 2.29 ariketako kasuan, badaki Clairaut-en ekuazioaren soluzio orokorra aurkitzen,

```
In[11]:= eq = Y[x] == x Y' [x] - Y' [x]^2;
          DSolve[eq, Y[x], x]
Out[12]= {{Y[x] -> -\frac{1}{4} C[1] (2 x + C[1])}}
In[13]:= yy = Y[x] /. %[[1]] /. C[1] -> -2 C // Expand
Out[13]= -C^2 + C x
```

baina ez erraz kalkula daitezkeen parabola inguratzaila:

```
In[14]:= Eliminate[{ Y == yy, D[yy, C] == 0 }, C]
Out[14]= 4 Y == x^2
```

Bestalde, programa bera erabil dezakegu aurkitu duen soluzio orokorrak ekuazioa betetzen duela egiaztatzeko:

```
In[15]:= eq /. Y -> Function[x, Evaluate[yy]] // Simplify
Out[15]= True
```

B.6 ARIKETA Egiaztatu $4y = x^2$ parabola ekuazioaren soluzio singularra dela.

Zorionez, ebatzi nahi dugun problemaren soluzioa aurkitzeko gai ez denean ere, horrelako sistema bat oso lagungarri gerta dakioko ekuazio diferentzialak eta programa ondo ezagutzen dituen erabiltzaileari, soluzioa —edo, behintzat, bere propietate batzuk— aurkitzeko. Izan ere, irakasgai honetan ikasitako teknikak erabiltzerakoan agertzen diren tarteko kalkulu luzeak aise egiten dira kalkulu sinbolikorako sistema baten bidez. Ikus dezagun adibide bat. (6.117) ekuazioaren kasuan programaren erantzuna ez da erraz ulertzen:

```
In[16]:= eq = (x + x^2) y' - x y' + y[x];
          DSolve[eq == 0, y[x], x]
Out[17]= {{y[x] -> x C[1] + C[2] MeijerG[{{}, {2, 2}], {{0, 1}, {}], -x]}}
```

Kasu batzuetan `FunctionExpand` eta `FullSimplify` erabil daitezke `MeijerG` funtzioa sinplifikatzeko, baina ez honetan:

```
In[18]:= % // FunctionExpand // FullSimplify
Out[18]= {{y[x] -> x C[1] + C[2] MeijerG[{{}, {2, 2}], {{0, 1}, {}], -x]}}
```

Lehen soluzioa ($C_2 = C[2] = 0$ eginez lortzen dena) erraza denez, 3.7.5 ataleko d'Alembert-en metodoaz balia gaitzeko, kalkuluak programaren bidez egiteko eta soluzioa egiaztatzeko:

```
In[19]:= eq1 = Expand[eq /. y -> Function[x, x Integrate[z[x] dx]]]
Out[19]= 2 x z[x] + x^2 z[x] + x^2 z'[x] + x^3 z'[x]
In[20]:= DSolve[eq1 == 0, z[x], x][[1, 1, 2]] // Simplify
Out[20]= (1 + x) C[1]
          x^2
In[21]:= x (Integrate[% dx + C[2]]) // Simplify
Out[21]= -C[1] + x C[2] + x C[1] Log[x]
In[22]:= eq /. y -> Function[x, A x + B (x Log[x] - 1)] // Simplify
Out[22]= 0
```

B.7 ARIKETA Erabili Mathematica $2y'y''' = 3(y'')^2$ ebazteko.

B.2 Laplace eta Fourier-en transformazioak

Mathematica erabil daiteke Laplace-ren transformatu zuzenak eta alderantzizkoak aurkitzeko. Adibidez, 5.16 ariketaren kasuan hauxe dugu:

```
In[1]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{2s-4}{s^2+4s+8}$ , s, t]
Out[1]=  $e^{(-2-2i)t} ((1-2i) + (1+2i)e^{4it})$ 
```

Askotan bezala, erabiltzailearen laguntza apur bat behar da emaitza sinplifikatzeko:

```
In[2]:= % // ExpToTrig // Simplify
Out[2]= 2 (Cos[2 t] - 2 Sin[2 t]) (Cosh[2 t] - Sinh[2 t])
```

Azken biderkagaia esponentzial bakuna dela ikusten dugu, eta programa bera erabil dezakegu emaitza egiaztatzeko:

```
In[3]:= LaplaceTransform[ $2 e^{-2t} (\cos[2t] - 2 \sin[2t])$ , t, s] //
Simplify
Out[3]=  $\frac{2(-2+s)}{8+4s+s^2}$ 
```

Taula guztietan agertzen ez diren transformatu batzuk ezagutzen ditu,

```
In[4]:= LaplaceTransform[ $\frac{1}{1+t^2}$ , t, s]
Out[4]= CosIntegral[s] Sin[s] +  $\frac{1}{2}$  Cos[s] ( $\pi - 2$  SinIntegral[s])
```

baina ez da gai aurkitu berri duen transformatu honen alderantzizkoa kalkulatzeko,

```
In[5]:= InverseLaplaceTransform[%, s, t]
Out[5]= InverseLaplaceTransform[
CosIntegral[s] Sin[s] +  $\frac{1}{2}$  Cos[s] ( $\pi - 2$  SinIntegral[s]), s, t]
```

ezta irakurleak edireten jakin beharko lukeen 5.19 problemako transformatua ere:

```
In[6]:= LaplaceTransform[ $\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ , t, s]
Out[6]= -LaplaceTransform[ $\frac{e^{-2t}}{t}$ , t, s] + LaplaceTransform[ $\frac{e^{-t}}{t}$ , t, s]
```

Halaber, funtzio orokortuen transformatuak kalkula ditzake. Hurrengo adibidean, oso emaitza zuzena ematen du Heaviside-ren funtzioa adierazteko erabiltzen duen UnitStep funtzioaren bidez: $\mathcal{L}[\delta(t-a)] = \theta(a)e^{-as}$ (Mathematica-n UnitStep[0]=1 hitzarmena erabiltzen denez, $a=0$ kasuan ere balio du honek).

```
In[7]:= LaplaceTransform[DiracDelta[t-a], t, s]
Out[7]=  $e^{-as}$  UnitStep[a]
```

Zoritxarrez, badirudi transformatu honen alderantzizkoa kalkulatzean itsu-itsuan aplikatzen duela desplazamenduaren teorema:

```
In[8]:= InverseLaplaceTransform[e-a s UnitStep[a], s, t]
        InverseLaplaceTransform[e-a s, s, t]

Out[8]= DiracDelta[a - t] UnitStep[a] UnitStep[-a + t]

Out[9]= DiracDelta[a - t] UnitStep[-a + t]
```

B.8 ARIKETA Zergatik ez da zuzena sartzen duen UnitStep[t-a] gaia?

Programak badaki koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial linealak ekuazio algebrakoetara laburtzen, baina ez du merezi horretaz baliatzea horrelako problemen soluzioa aurkitzeko, horretarako DSolve erabiltzea errazagoa (eta arinagoa) baita. Hala eta guztiz ere, programak zuzenean ezagutzen ez dituen Volterra-ren ekuazio integral batzuk ebatz daitezke Laplace-ren transformatua kalkulatu. Esaterako, 5.13 problemaren kasuan erraz kalkulatu da ezezagunaren transformatua,

```
In[10]:= equ = x[t] == Cos[t] +  $\int_0^t e^{-(t-u)} x[u] du$ ;
        LaplaceTransform[equ, t, s]
        Solve[%, LaplaceTransform[x[t], t, s]] // Simplify

Out[11]= LaplaceTransform[x[t], t, s] ==
           $\frac{s}{1+s^2} + \frac{\text{LaplaceTransform}[x[t], t, s]}{1+s}$ 

Out[12]= {{LaplaceTransform[x[t], t, s]  $\rightarrow \frac{1+s}{1+s^2}$ }}
```

eta, gero, soluzioa. Gainera, aise egiaztatzen da emaitza benetako soluzioa dela (lehenago azpimarratu dugunez, *beti egin beharko litzateke egiaztapen hau*):

```
In[13]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{1+s}{1+s^2}$ , s, t]
        equ /. x  $\rightarrow$  Function[t, Evaluate[%]] // Simplify

Out[13]= Cos[t] + Sin[t]

Out[14]= True
```

B.9 ARIKETA Ebatzi Mathematica-ren bidez 5.20 problema.

Bestalde, Fourier-en transformazioa definitzean egin daitezkeen hitzarmen guztiak ezagutzen ditu programak eta FourierParameters aukera egokiaren bidez adierazi behar zaio nahiago duguna. Hurrengo adibideetan notazioa arintzeko, ondoko funtzioak definituko ditugu Fourier-en transformatu zuzena eta alderantzizkoa kalkulatzeko:

```
In[15]:= DF[f_] := FourierTransform[f, x, p, FourierParameters  $\rightarrow$  {1, -1}]
        IF[f_] := InverseFourierTransform[f, p, x,
        FourierParameters  $\rightarrow$  {1, -1}]
```

Horrela, funtzio arrunten transformatuak kalkula daitezke,


```

In[17]:= DF [ e^{-x^2/a^2} ]
          IF [%]

Out[17]= \sqrt{a^2} e^{-\frac{1}{4} a^2 p^2} \sqrt{\pi}

Out[18]= e^{-\frac{x^2}{a^2}}

```

baita funtzio orokortuenak ere,

```

In[19]:= DF [1]
          IF [DiracDelta[p]]

Out[19]= 2 \pi DiracDelta[p]

Out[20]= \frac{1}{2 \pi}

```

baina ohi bezala, kontuz ibili behar da: transformatu ezagunetako bat gaizki kalkulatzen du, nahiz eta alderantzizkoa ondo aurkitu.

```

In[21]:= IF [ \frac{Sin[a p]}{p} ]
          DF [%] // Expand // FullSimplify

Out[21]= \frac{1}{4} (Sign[a - x] + Sign[a + x])

Out[22]= -2 \pi DiracDelta[p] + \frac{Sin[a p]}{p}

```

B.3 Metodo hurbildu analitikoak

Metodo hurbilduetan tarteko kalkuluak nekagarriak izaten dira; ez da, beraz, harrigarria, kalkulu sinbolikorako sistemak guztiz erabilgarriak izatea arlo honetan ere. Hurrengo ataletan ikusiko ditugu zenbait adibide.

B.3.1 Taylor-en seriearen metodoa

7.2 atalean aztertu genuen metodo honen adibide bat ikusteko, 7.5 ariketa egingo dugu orain. Hasteko, ekuazioa, hastapen-baldintza eta kalkulatu nahi den azken garapen-ordena idazten ditugu:

```

In[1]:= equ = Y' [x] == x^2 + Y[x]^2;
        x0 = 0;
        Y0 = 0;
        solorder = 36;

```

Kalkulua zuzenean egiten da 7.2.2 ataleko koefiziente indeterminatuen metodoaz baliatuz:

```

In[5]:= sol = Y0 + Sum[c_n (x - x0)^n, {n, 1, solorder};
equ = equ /. y -> Function[x, Evaluate[sol]];
equ = Map[Normal[# + 0[x]^solorder] &, equ];
sol /. SolveAlways[equ, x]

Out[8]= {
  x^3/3 + x^7/63 + 2x^11/2079 + 13x^15/218295 + 46x^19/12442815 + 15178x^23/66108676095 +
  404x^27/28332289755 + 190571x^31/215183740689225 + 5858822x^35/106515951641166375 }

```

B.10 ARIKETA Erabili kalkulu sinbolikorako sistemaren bat 7.6 ariketa ebazteko.

B.3.2 Picard-en metodoa

Hurrenez hurreneko hurbilketen metodoa 7.3 atalean aztertu genuen. Hemen, hango adibidea ebatziko dugu berriro. Ekuazioa $y' = f(x, y)$ forma normalean idatzi ondoren, problema definitzen duten $f(x, y)$ funtzioa eta $y(x_0) = y_0$ hastapen-baldintza sartzen dira:

```

In[1]:= f[x_, y_] = x^2 + y^2;
x0 = 0;
y0 = 1;

```

Metodoa zuzenean idazten da ondoko moduan:

```

In[4]:= Clear[y];
y[0] = y0;
y[n_] := y[n] = y0 + Integrate[f[x, y[n-1]], {x, x0, x}];

```

Orain, nahi diren hurbilketak nekerik gabe kalkulatu ditugu:

```

In[7]:= y[1]
y[2]
y[3]

Out[7]= 1 + x + x^3/3

Out[8]= 1 + x + x^2 + 2x^3/3 + x^4/6 + 2x^5/15 + x^7/63

Out[9]= 1 + x + x^2 + 4x^3/3 + 5x^4/6 + 8x^5/15 + 29x^6/90 + 47x^7/315 + 41x^8/630 +
  299x^9/11340 + 4x^10/525 + 184x^11/51975 + x^12/2268 + 4x^13/12285 + x^15/59535

```

B.11 ARIKETA Kalkulatu adibide honetako hurrengo hurbilketa.

B.3.3 Perturbazio-metodoak

Perturbazio-metodoa erabili genuen 7.4.2 atalean van der Pol-en osziladorea aztertzeko. Horretarako behar diren kalkulu guztiak berriro egin ditugu Mathematica-ren bidez hurrengo orrietan ikusten den saioan.

B.12 ARIKETA Aipaturiko saioa ikasi ondoren, erabili metodo sinbolikoak 7.4.1 ataleko perturbazio erregularren kalkulua errepikatzeko.

van der Pol-en osziladorea

```
In[1]:= ec = x''[t] + ε x'[t] (x[t]^2 - 1) + x[t] ;
```

- Programak ez daki hau ebazten:

```
In[2]:= DSolve[ec == 0, x[t], t]
```

```
Out[2]= DSolve[x[t] + ε (-1 + x[t]^2) x'[t] + x''[t] == 0, x[t], t]
```

- Soluzio hurbildua honako hau da:

```
In[3]:= ec1 = ec /. x -> Function[t, (A Cos[t + φ] + ε x1[t] + O[ε]^2)]
```

```
Out[3]= (-A (-1 + A^2 Cos[t + φ]^2) Sin[t + φ] + x1[t] + x1''[t]) ε + O[ε]^2
```

- Funtzio trigonometrikoen biderkadurak eta berreturak ezabatzen ditugu:

```
In[4]:= ec1 = ec1 // Normal // TrigReduce // Expand
```

```
Out[4]= A ε Sin[t + φ] - 1/4 A^3 ε Sin[t + φ] - 1/4 A^3 ε Sin[3 t + 3 φ] + ε x1[t] + ε x1''[t]
```

- Beharrezkoa ez bada ere, ekuazioa esplizituki ebazten dugu mendeetako gaiak ikusteko:

```
In[5]:= Simplify[x1[t] /.
```

```
DSolve[ec1 == 0, x1[t], t][[1]]]
```

```
Out[5]= 1/32 (32 C[2] Cos[t] - 4 A (-4 + A^2) t Cos[t + φ] -
32 C[1] Sin[t] - 8 A Sin[t + φ] + 2 A^3 Sin[t + φ] - A^3 Sin[3 (t + φ)])
```

- ϵ t denbora geldoaren menpeko anplitudea ($A(\epsilon t) = A(0) + \epsilon t A'(0) + \dots$) saiatzten dugu:

```
In[6]:= ec1 = Expand[TrigReduce[Normal[ec /.
```

```
x ->
```

```
Function[t, ((A[0] + ε t A'[0]) Cos[t + φ] + ε x1[t] + O[ε]^2)]
]]]
```

```
Out[6]= ε A[0] Sin[t + φ] - 1/4 ε A[0]^3 Sin[t + φ] -
1/4 ε A[0]^3 Sin[3 t + 3 φ] + ε x1[t] - 2 ε Sin[t + φ] A'[0] + ε x1''[t]
```

- $A'(0)$ aukeratuz, gai erresonanteak ezabatzen ditugu:

```
In[7]:= ec1 = Simplify[ec1 /. A'[0] -> A[0]/2 (1 - A[0]^2/4)]
```

```
Out[7]= -1/4 ε A[0]^3 Sin[3 (t + φ)] + ε x1[t] + ε x1''[t]
```

- x_1 gairako ekuazioa ebazten dugu:

```
In[8]:= Simplify[TrigReduce[x1[t] /.
      DSolve[ec1 == 0, x1[t], t][[1]]]]
```

```
Out[8]= C[2] Cos[t] - C[1] Sin[t] -  $\frac{1}{32} A[0]^3 \text{Sin}[3(t + \phi)]$ 
```

- Anplituderako baldintza $\epsilon t = 0$ puntutik denbora geldoaren balio guztietarako hedatzen dugu:

```
In[9]:= DSolve[{A'[u] ==  $\frac{A[u]}{2} \left(1 - \frac{A[u]^2}{4}\right)$ , A[0] == A}, A[u], u] // Simplify
```

```
Out[9]= {{A[u] ->  $-\frac{2 e^{u/2}}{\sqrt{-1 + \frac{4}{A^2} + e^u}}$ }, {A[u] ->  $\frac{2 e^{u/2}}{\sqrt{-1 + \frac{4}{A^2} + e^u}}$ }}
```

- Ageri denez, anplitudea bigarren adierazpena da eta soluzio hurbildua ondokoa:

```
In[10]:= xx =  $\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A^2} - 1\right) E^{-\epsilon t}}} \text{Cos}[t + \phi] - \frac{\epsilon}{32} A^3 \text{Sin}[3(t + \phi)];$ 
```

- Soluzioa dela egiaztatzen dugu:

```
In[11]:= D[xx, {t, 2}] + \epsilon D[xx, t] (xx^2 - 1) + xx + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[11]= O[\epsilon]^2
```

- Soluzioaren beste adierazpen bat haxe dugu:

```
In[12]:= y =  $\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{4}{A^2} - 1\right) E^{-\epsilon t}}} \left(\text{Cos}[t + \phi] - \frac{\epsilon}{32} A^2 \text{Sin}[3(t + \phi)]\right);$ 
```

- Aurrekoaren berdina da, lehen ordenaraino,

```
In[13]:= y - xx + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[13]= O[\epsilon]^2
```

- eta ekuazioa betetzen du, noski:

```
In[14]:= D[y, {t, 2}] + \epsilon D[y, t] (y^2 - 1) + y + O[\epsilon]^2 // PowerExpand // Simplify
```

```
Out[14]= O[\epsilon]^2
```

B.4 Zenbakizko metodoak

Metodo analitikoek huts egiten dutenean, edo ematen dituzten soluzio korapilotsuak erabilgaitzak direnean, matematika egiteko sistema onak (Mathematica, Maple, Macsyma eta abar) erabil daitezke zenbakizko azterketa egiteko, problemaren ebazpenean nolabait aurrera egiteko asmoz edo. Esan behar da, hala ere, bibliografiaren 320. orrian biltzen diren tresnak bezalako programak, ekuazio diferentzialen zenbakizko soluzioak aurkitzeko asmo hutsez idatzi direnak, erabilgarriagoak eta egokiagoak izaten direla.

Ekuazio diferentzialen zenbakizko integrazioa egiteko Mathematica-n `NDSolve` funtzioa erabili behar da. Lehen argumentuan ekuazioa(k) eta hastapen-baldintza(k) sartu behar dira giltzen artean, bigarrenean ezezaguna (edo ezezagunak giltzen artean), eta hirugarrenean aldagai independentea eta bere lehen eta azken balioak giltzen artean. Hauei, zenbakizko algoritmoaren zenbait alderdi zuzentzeko aukera batzuk gehi dakizkieke.

Adibide moduan, hurrengo orrian `NDSolve` funtzioaz baliatzen gara 8.12 ataleko

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{z} = xy - bz \quad (\text{B.5})$$

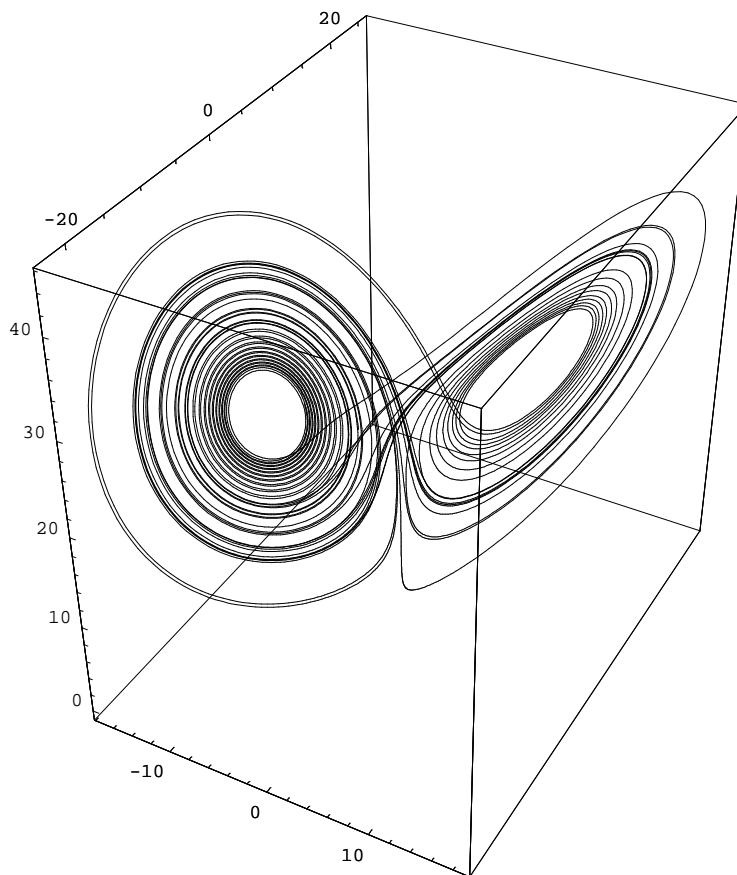
Lorenz-en sistemaren soluzioa $0 \leq t \leq 50$ tartean lortzeko, $\sigma = 10$, $r = 27$ eta $b = 8/3$ parametroekin. Portaera iragankorra pasatu ondoren, $5 \leq t \leq 50$ tarteko soluzioa proiektatzen badugu, Lorenz-en erakarlea deitutako objektu korapilotsuan dagoen ibilbide bat lortzen dugu: erakarle kaotiko ospetsuenaren irudia dugu hemen.

B.13 ARIKETA Hurrengo orriko kalkulua ikasi ondoren, ebatzi 8.32 irudiko Rössler-en sistema.

Lorenz.nb

1

```
In[1]:= NDSolve[{ x'[t] == 10 (y[t] - x[t]),  
y'[t] == 27 x[t] - y[t] - x[t] z[t],  
z'[t] == x[t] y[t] - 8/3 z[t],  
x[0] == y[0] == 1, z[0] == 1},  
{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 50},  
MaxSteps->10000 ];  
  
In[2]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. %],  
{t, 5, 50}, PlotPoints -> 10000];
```



B.5 Bestelako kalkuluak

Testu hau ikastean egin behar diren bestelako kalkulu askotarako ere oso erabilgarria izango da ordenagailuz eginiko algebra, jarraian zenbait adibidetan ikusiko dugun legez.

B.5.1 Ekuazio algebraikoak

Oso onak eta azkarrak izaten dira kalkulu sinbolikorako programak ekuazio algebraikoak ebazten. Adibidez, 1.6 ariketako ekuazio kubikoaren erroak erraz kalkulatu dira,

```
In[1]:= Solve[Y3 - 3 x Y == 2 C, Y] // Simplify
```

$$\text{Out[1]} = \left\{ \left\{ Y \rightarrow \frac{x + (C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ Y \rightarrow \frac{(-1 - i\sqrt{3})x + i(1 + \sqrt{3})(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{2(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ Y \rightarrow \frac{i(1 + \sqrt{3})x + (-1 - i\sqrt{3})(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{2/3}}{2(C + \sqrt{C^2 - x^3})^{1/3}} \right\} \right\}$$

eta begi-bistako forma laburra egiaztatzen da zuzenean:

```
In[2]:= a = (C + sqrt(C^2 - x^3))^(1/3);
```

$$Y_1 = \frac{x + a^2}{a};$$

$$Y_2 = -\frac{(1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})a^2}{2a};$$

$$Y_3 = -\frac{(1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})a^2}{2a};$$

```
(Y - Y1) (Y - Y2) (Y - Y3) // Simplify
```

$$\text{Out[6]} = -2 C - 3 x Y + Y^3$$

Orobat, 2.30 ariketako soluzio parametrikotik parametroa ezabatzeko —eta, beraz, soluzio implizitua lortzeko— erabil daiteke Mathematica:

```
In[7]:= Eliminate[{x == 3/4 u^2 + C/u^2, Y == 1/2 u^3 + 2 C/u}, u] // FullSimplify
```

$$\text{Out[7]} = 64 C (C + x^2)^2 + 27 Y^4 == 16 x (9 C + x^2) Y^2$$

B.5.2 Matrizeen esponenziala

Matrizen baten esponenziala kalkulatu ere badaki,

$$\text{In[1]:= } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

MatrixExp[A t] // Simplify

$$\text{Out[2]= } \left\{ \left\{ \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2} t} \left(2 - \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2}) e^{2\sqrt{2} t} \right), \frac{e^{-\sqrt{2} t} (-1 + e^{2\sqrt{2} t})}{2\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{e^{-\sqrt{2} t} (-1 + e^{2\sqrt{2} t})}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4} e^{-\sqrt{2} t} \left(2 + \sqrt{2} - (-2 + \sqrt{2}) e^{2\sqrt{2} t} \right) \right\} \right\}$$

baina 4.20 ariketan aurkitu genuen forma laburra berreskuratzeko hauxe egin behar da:

In[3]:= % // ExpToTrig // Simplify

$$\text{Out[3]= } \left\{ \left\{ \text{Cosh}[\sqrt{2} t] + \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}}, \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}}, \text{Cosh}[\sqrt{2} t] - \frac{\text{Sinh}[\sqrt{2} t]}{\sqrt{2}} \right\} \right\}$$

B.15 ARIKETA Erabili sistemaren matrizearen esponenziala 4.22 ariketa ebazteko.

B.5.3 Balio eta bektore propioak

Hauxe da ebazten dakien beste problema algebraiko bat. Adibide moduan, 4.22 ariketa Euleren metodoaren bidez ebazti nahi izanez gero, hauxe egin dezakegu:

In[1]:= Eigensystem[{{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}}]

Out[1]= {{-3, -3, 0}, {-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}

Argi dago, baina, eginkizun horretarako erosoagoa dela `DSolve` erabiltzea. Egonkortasun lineala aztertzeko, berriz, gaitasun hau oso lagungarria izan daiteke. Ondoa, 8.10 ariketako kasua aztertzen da:

$$\text{In[2]:= } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1+r+d & 1+r \end{pmatrix};$$

Det[A]

Tr[A]

Eigensystem[A]

Out[3]= d

Out[4]= r

$$\text{Out[5]= } \left\{ \left\{ \frac{1}{2} \left(r - \sqrt{-4d+r^2} \right), \frac{1}{2} \left(r + \sqrt{-4d+r^2} \right) \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \left\{ -\frac{2+r+\sqrt{-4d+r^2}}{2(1+d+r)}, 1 \right\}, \left\{ -\frac{2+r-\sqrt{-4d+r^2}}{2(1+d+r)}, 1 \right\} \right\} \right\}$$

B.16 ARIKETA Egiaztatu Mathematica-k emandako soluzioa han aurkitu genuena dela.

B.5.4 Funtzio bereziak

Funtzio berezi asko ezagutzen ditu Mathematica-k, baita euren zenbakizko balioak eta propietate nagusiak, `FunctionExpand` eta `FullSimplify` funtzioen bidez erabil daitezkeenak. Adibidez, 6.4 eta 6.5 problemetako eta D.4 irudiko kasuetan hauxe dugu:

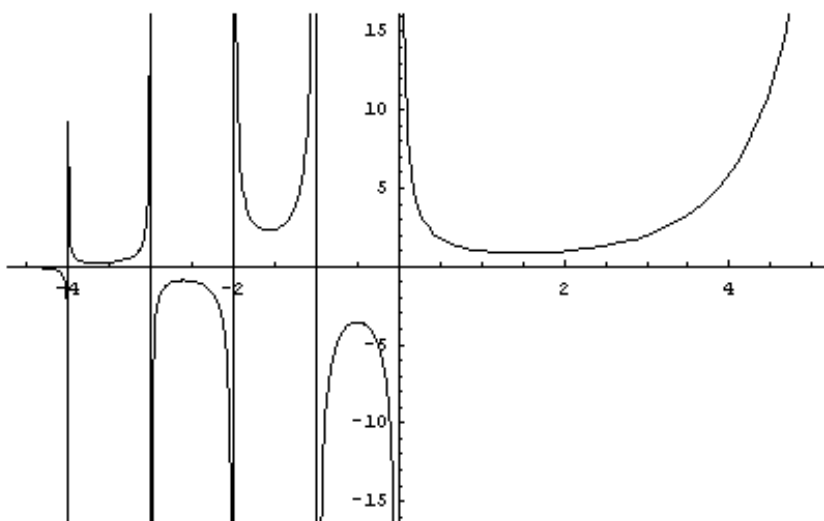
```
In[1]:= D[x^y BesselJ[v, k x], x] // FullSimplify
```

```
Out[1]= k x^y BesselJ[-1 + v, k x]
```

```
In[2]:= BesselJ[1/2, x]
```

$$\text{Out[2]} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[x]}{\sqrt{x}}$$

```
In[3]:= Plot[Gamma[x], {x, -4.5, 5}];
```



B.17 ARIKETA Ezagutzen al du Mathematica-k (D.93) propietatea?

B.5.5 Serieen batuketa eta integralen ebazpena

Zeregin hauetan ere oso trebea da, (6.113) ekuazioan bezala funtzio bereziak tartean egon arren:

$$\text{In[1]} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \text{HarmonicNumber}[n] x^n}{n!}$$

```
Out[1]= e^{-x} Gamma[0, -x] + e^{-x} (EulerGamma + Log[-x])
```

6.14 ariketako emaitza berreskuratzeko `FunctionExpand` erabil daiteke:

```
In[2]:= % // FunctionExpand // Simplify
```

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{2} e^{-x} \left(2 \text{EulerGamma} - 2 \text{ExpIntegralEi}[x] - \text{Log}\left[\frac{1}{x}\right] + \text{Log}[x] \right)$$

B.18 ARIKETA Erabili Mathematica 6.20 ariketako seriea batzeko.

Era berean, 2.13 problemako

$$\text{In[1]} := \int y e^{-1/y} dy$$

$$\text{Out[1]} = e^{-1/y} \left(-\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \text{ExpIntegralEi}\left[-\frac{1}{y}\right]$$

integral mugagabea eta 1.13 ariketako mugatua erraz kalkulatu dira:

$$\text{In[2]} := \int_0^{\theta} \frac{1}{2 \sqrt{\sin\left[\frac{\alpha}{2}\right]^2 - \sin\left[\frac{\varphi}{2}\right]^2}} d\varphi$$

$$\text{Out[2]} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\frac{-\cos[\alpha] + \cos[\theta]}{1 - \cos[\alpha]}} \text{EllipticF}\left[\frac{\theta}{2}, \frac{2}{1 - \cos[\alpha]}\right]}{\sqrt{-\cos[\alpha] + \cos[\theta]}}$$

B.19 ARIKETA Egiaztatu emaitza hau eta han emandakoa berdina direla.

B.5.6 Serie-garapenak

B.3.1. atalean ikusi dugunez, Taylor-en (eta Laurent-en) garapenak egiteko gai da programa. Hemen, 7.6 ataleko Runge eta Kutta-ren metodo klasikoak laugarren ordenakoa dela frogatuko dugu. Hasteko, soluzioak ekuazioa betetzen duela —hau da, $y' = f(x, y)$ dugula— irakatsiko diogu programari:

```
In[1]:= Y(n) := Function[x, D[f[x, Y[x]], {x, n - 1}]];
```

```
In[2]:= Y'[x]
Y''[x]
```

```
Out[2]= f[x, Y[x]]
```

```
Out[3]= f[x, Y[x]] f(0,1)[x, Y[x]] + f(1,0)[x, Y[x]]
```

Orain, zuzenean egin daiteke Taylor-en garapena metodoaren ordena egiaztatzeko:

```
In[4]:= k1 = f[x, Y[x]];
```

$$k_2 = f\left[x + \frac{h}{2}, Y[x] + \frac{h}{2} k_1\right];$$

$$k_3 = f\left[x + \frac{h}{2}, Y[x] + \frac{h}{2} k_2\right];$$

$$k_4 = f[x + h, Y[x] + h k_3];$$

$$Y[x + h] - \left(Y[x] + \frac{h}{6} (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) \right) + 0[h]^5 // Simplify$$

```
Out[8]= 0[h]^5
```

B.20 ARIKETA Froga ezazu 7.7 ataleko Adams, Bashforth eta Moulton-en metodo klasikoa ere laugarren ordenakoa dela.

B.5.7 Fourier-en serieak

Fourier-en serieak artez kalkula daitezke sarritan. Esaterako, 9.18 ariketan agertzen dena hau xe da:

$$\begin{aligned} \text{In}[1]:= & \mathbf{f = UnitStep[x] Sin[x];} \\ & \mathbf{T = 2 \pi;} \\ \mathbf{a_0} = & \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f} \, dx \\ \mathbf{a_n} = & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f} \, \text{Cos}\left[\mathbf{n} \frac{2 \pi}{T} \mathbf{x}\right] \, dx \\ \mathbf{b_n} = & \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbf{f} \, \text{Sin}\left[\mathbf{n} \frac{2 \pi}{T} \mathbf{x}\right] \, dx \end{aligned}$$

$$\text{Out}[3]= \frac{1}{\pi}$$

$$\text{Out}[4]= \frac{-1 - \text{Cos}[n \pi]}{(-1 + n^2) \pi}$$

$$\text{Out}[5]= -\frac{\text{Sin}[n \pi]}{(-1 + n^2) \pi}$$

Programak n indizea osoa dela ulertu ez duenez, esplizituki azaldu behar zaio:

$$\text{In}[6]:= \mathbf{Simplify[a_n, n \in Integers]}$$

$$\text{Out}[6]= -\frac{1 + (-1)^n}{(-1 + n^2) \pi}$$

$$\text{In}[7]:= \mathbf{Simplify[b_n, n \in Integers]}$$

$$\text{Out}[7]= 0$$

Zoritxarrez, ez dago argi nola ulertu behar den lehen emaitza a_1 koefizientarekin eta bigarrena ez da zuzena b_1 -en kasuan, $n = 1$ indizeari dagozkion koefizienteak limite moduan,

$$\text{In}[8]:= \mathbf{Limit[a_n, n \rightarrow 1]}$$

$$\text{Out}[8]= 0$$

$$\text{In}[9]:= \mathbf{Limit[b_n, n \rightarrow 1]}$$

$$\text{Out}[9]= \frac{1}{2}$$

zein zuzenean kalkulatu ikus daitekeen bezala:

$$\text{In}[10]:= \mathbf{a_1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \text{Cos}\left[\frac{2\pi}{T} x\right] dx$$

$$\mathbf{b_1} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f \text{Sin}\left[\frac{2\pi}{T} x\right] dx$$

Out[10]= 0

Out[11]= $\frac{1}{2}$

Emaitza egiaztatzeko, lorturiko seriea batzeko eskatzen diogu programari:

$$\text{In}[12]:= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \text{Sin}[x] - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Cos}[2n x]}{4n^2 - 1} // \text{PowerExpand} // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out}[12]= \frac{(\pi + 2 \operatorname{ArcTanh}[e^{-i x}] - 2 \operatorname{ArcTanh}[e^{i x}]) \text{Sin}[x]}{2\pi}$$

B.21 ARIKETA Marraztu emaitzaren grafikoa, $(-\pi, \pi)$ tartean $\theta(x)$ sin x balio duen 2π periodoko funtzioa dela ikusteko.

Programak badaki Fourier-en serie moztuak zuzenean kalkulatzeko. Adibidez, 9.9 problemaren kasuan Gibbs-en fenomenoaz aztertzeko, hauxe egin daiteke:

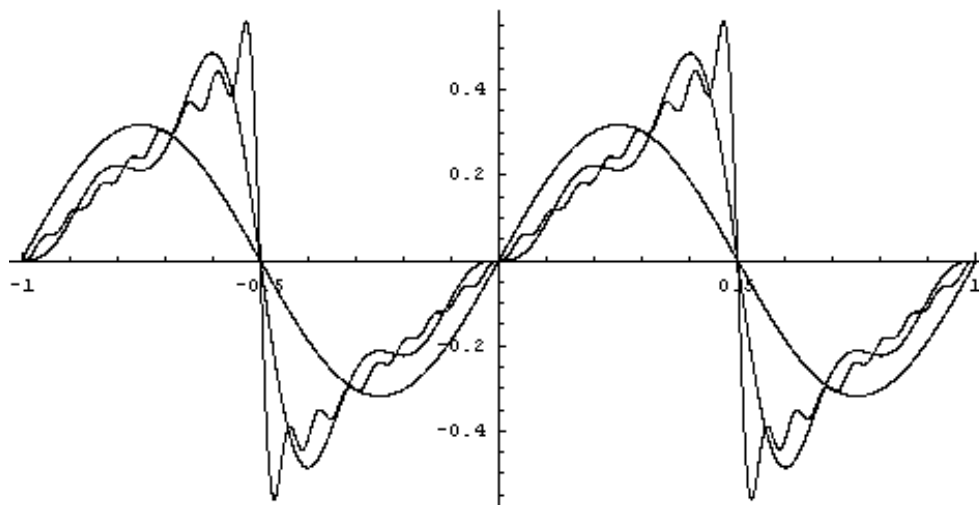
In[1]:= << Calculus`FourierTransform`

In[2]:= **fst = Table[FourierTrigSeries[x, x, 4ⁿ], {n, 0, 2}];**

fst[[2]]

$$\text{Out}[3]= \frac{\text{Sin}[2\pi x]}{\pi} - \frac{\text{Sin}[4\pi x]}{2\pi} + \frac{\text{Sin}[6\pi x]}{3\pi} - \frac{\text{Sin}[8\pi x]}{4\pi}$$

In[4]:= **Plot[Evaluate[fst], {x, -1, 1}, AspectRatio → 1/2,
PlotPoints → 5000];**



B.22 ARIKETA Marraztu, kasu berean, 64 gai dituen serie moztua.

B.5.8 Diferentzia finituetako ekuazioak

Horrelako ekuazioak 3.37 probleman agertu zitzaizkigun, Fibonacci-ren segida definitzean:

```
In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
In[2]:= fib = RSolve[{ x[n] == x[n - 1] + x[n - 2], x[0] == 0, x[1] == 1}, x[n], n]
Out[2]:= {{x[n] -> -\frac{\left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^n}{\sqrt{5}}}}
```

Emitza programak ezagutzen dituen Fibonacci-ren zenbakiak direla egiazta dezakegu,

```
In[3]:= Table[Fibonacci[n] - x[n] /. fib[[1]] // Simplify, {n, 10}]
Out[3]:= {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

baita beraien arteko zatidurak urrezko zenbakira jotzen duela ere:

```
In[4]:= Limit[Evaluate[\frac{x[n] /. fib[[1]]}{x[n] /. fib[[1]]}], n -> n + 1], n -> \infty]
Out[4]:= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})
In[5]:= % - GoldenRatio // FullSimplify
Out[5]:= 0
```

B.23 ARIKETA Ebatzi Mathematica-ren bidez 8.30 problema.

Bestalde, 6. gaian Taylor eta Frobenius-en serieen koefizienteak kalkulatzeko errepikapen-erlazioak diferentzia finituetako ekuazioak dira; baina, zoritxarrez, programak emaitza okerrak ematen ditu maiz, hala nola (6.108) eta (6.120) ekuazioen kasuan:

```
In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
RSolve[{(\lambda + n)^2 a[n] + (\lambda + n) a[n - 1] == 0, a[0] == 1}, a[n], n]
RSolve[{(\lambda + n) (\lambda + n - 1) a[n] + (\lambda + n - 2)^2 a[n - 1] == 0, a[0] == 1},
a[n], n]
Out[2]:= {{a[n] -> \frac{(-1)^n}{n!}}}
Power::infty: Infinite expression \frac{1}{0} encountered.
Out[3]:= {}
```

Arazoa apur bat ikertu ondoren, Method->MethodEGF aukera erabiltzen bada emaitza zuzenak lortzen direla aurki daiteke,

```

In[4]:= RSolve[{(λ + n)2 a[n] + (λ + n) a[n - 1] == 0, a[0] == 1}, a[n], n,
           Method → MethodEGF]
           RSolve[{(λ + n) (λ + n - 1) a[n] + (λ + n - 2)2 a[n - 1] == 0, a[0] == 1},
           a[n], n, Method → MethodEGF]

Out[4]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n}{\text{Pochhammer}[1 + \lambda, n]}$ }}

Out[5]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n \text{Pochhammer}[-1 + \lambda, n]^2}{\text{Pochhammer}[\lambda, n] \text{Pochhammer}[1 + \lambda, n]}$ }}

```

baita (6.121) berreskura dezakegula ere:

```

In[6]:= % // FunctionExpand // FullSimplify

Out[6]= {{a[n] →  $\frac{(-1)^n (-1 + \lambda)^2 \lambda}{(-1 + n + \lambda)^2 (n + \lambda)}$ }}

```

B.24 ARIKETA Erabili Mathematica (6.132) errepikapena desegiteko.

C ERANSKINA

Metodo analitiko zehatzen laburpena

Les conseils faciles à pratiquer son les plus utiles.
Luc de Clapiers Vauvenargues

Kalkulu sinbolikoa egiteko programa erabilgarririk ez dagoenean, aztertu nahi dugun ekuazio diferentziala ebazten ez badaki, edo eskuz askatu nahi badugu —adibidez, programak emandako soluzioak guztiak direla egiaztatzeko— errezeta- edo erabiltzaile-liburu gisa jarraian aipatzen ditugun urratsak egiten saia gaitezke. Honek ere huts egiten badu, [39] eta [38] bezalako gidaliburu aurreratuetara edo lagun trebe batengana jo dezakegu.

Kalkulatzen hasi aurretik pentsatzea, praktikak garatzen duen sen ona eta problemaren fisikaren ezagutza oso lagungarriak izan daitezkeela gogoratu beharko zenuke ezer egin baino lehenago. Geroago, ondoren aipatzen diren metodo sistematikoetara jo dezakezu.

1. Koefiziente konstanteetako ekuazio edo sistema lineal baterako hastapen-baldintzen problema bada, erabili 5. gaiko **Laplace-ren transformazioa**.
2. Ekuazio bakarraren kasuan:
 - (a) Lehen ordenakoa bada eta ezezagunaren deribatua askaturik badago, $y' = f(x, y)$, edo neke handirik gabe aska badaiteke,
$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0, \quad \text{edo} \quad Q(x, y) y' + P(x, y) = 0,$$
joan zaitez 266. orriko C.1 atalera.
 - (b) Lehen ordenakoa izanda ere, deribatua askaturik ez badago, joan 268. orriko C.2. atalera.
 - (c) Ordena bat baino handiagoa izanik ekuazioa lineala bada, jo ezazu 269. orriko C.3 atalera.
 - (d) Ekuazioa lineala ez bada, joan 271. orriko C.4 atalera.
3. Sistema bat ebatzi nahi denean ekuazioren baten ordena bat baino handiagoa bada, sartu behar diren ezezagun eta ekuazio berriak lehen ordenako sistema bihurtarazteko. Orduan:
 - (a) Sistema lineala bada, erabili 272. orriko C.5 atala.
 - (b) Sistema lineala ez bada, jo 273. orriko C.6 atalera.

C.1 Lehen ordenako deribatu askatuko ekuazioak

Biz ezezagunaren deribatua (ia) askaturik duen lehen ordenako ekuazioa:

$$Q(x, y) y' + P(x, y) = 0. \quad (\text{C.1})$$

1. **Aldagai bananduetakoa** bada,

$$Q(y) y' + P(x) = 0,$$

zuzenean integratzen da: $\int Q(y) dy + \int P(x) dx = C$. (Ikus 19. orriko 2.3 atala.)

2. Ekuazioa **banangarria** bada,

$$U(x)V(y)y' + R(x)S(y) = 0,$$

aldagaiak banandurik integratu egiten da. Ohar zaitez $S(y) = 0$ ekuazio finituak (edo, ezezaguna x dela ematen badugu, $U(x) = 0$ delakoak) soluzio singularrak eman ditzakeela. (Ikus 21. orriko 2.5 atala.)

3. (C.1) ekuazioa **zehatza** bada,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$u(x, y) = C$ soluzioa, $\partial u / \partial x = P$ eta $\partial u / \partial y = Q$ baldintzak betetzen dituen u funtzioak emandakoa da. (Ikus 17. orriko 2.3 atala.)

4. Ekuazioa **lineala** bada,

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x),$$

x -ren menpeko faktore integratzaile bat onartzen du: $\mu(x) = \frac{1}{a_0} \exp\left(-\int \frac{a_1}{a_0} dx\right)$. (Ikus 23. orriko 2.7 atala.)

5. **Bernoulli-ren** ekuazioa bada,

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = b(x)y^n,$$

$y = u^{\frac{1}{1-n}}$ aldaketak lineal bihurtarazten du. (Ikus 26. orriko 2.12 atala.)

6. **Riccati-ren** ekuazioa denean:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x)y^2 = b(x).$$

(a) Baldin eta y_1 soluzio partikular bat ezagutzen bada, $y = y_1 + 1/u$ aldaketaren bidez ekuazio lineal bat lortzen da. (Ikus 26. orriko 2.13 atala)

(b) Bestela, $y = \frac{a_0 u'}{a_2 u}$ aldaketarekin u -rako bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneo bat lortzen da. (Ikus 72. orriko 3.27 problema.)

7. (C.1) ekuazioa $(x, y) \rightarrow (ax, ay)$ eskala-aldaketarekiko aldaezina bada, hau da, **homogeneoa** bada edo a guztietarako

$$\frac{P(ax, ay)}{Q(ax, ay)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

betetzen bada, $y = xu$ aldaketarekin (x, u) aldagaierako ekuazio banangarri bat lortzen da. (Ikus 24. orriko 2.9 atala.)

8. (C.1) ekuazioa $(x, y) \rightarrow (ax, a^\lambda y)$ eskala-aldaketarekiko aldaezina bada λ egoki baterako, hau da, **isobarikoa** bada edo a guztietarako eta λ egoki baterako

$$\frac{P(ax, a^\lambda y)}{Q(ax, a^\lambda y)} = a^{\lambda-1} \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

betetzen bada, $y = x^\lambda u$ aldaketa egin ondoren (x, u) aldagaiekiko banangarria da. (Ikus 36. orriko 2.16 problema.)

9. Ondoko ekuazioa $(x, u \equiv ax + by)$ eta $(x, u \equiv ax + by + c)$ aldagaiekiko banangarria da:

$$y' = f(ax + by + c).$$

(Ikus 25. orriko 2.10 atala.)

10. Ondoko ekuazioarekin bi kasu ditugu:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

- (a) Baldin eta $a/\alpha = b/\beta$ bada, ekuazioa $(x, u \equiv ax + by)$ aldagaiekiko banangarria da.
 (b) Bestela, ekuazioa homogeneoa da jatorria $ax + by + c = 0$ eta $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ zuzenen ebakidura-puntura eramaten denean.

(Ikus 25. orriko 2.11 atala.)

11. Aurreko guztiak huts egiten badu:

- (a) Menpeko aldagaitzat x eta independentetzat y harturik, eman berriro 4, 5 eta 6 urratsak.
 (b) Problemaaren egiturak horrelakorik aditzera ematen badu, saiatu (x, y) aldagaien aldaketa bat; koordinatu-aldaketa bat (polarretara, adibidez) zein esanahi geometriko zuzenik gabeko transformazioa izan daiteke.
 (c) Saiatu aldagai independentearen menpeko faktore integratzaile bat. (Ikus 21. orriko 2.6.1 atala.)
 (d) Saiatu menpeko aldagaiaren funtzio hutsa den faktore integratzaile bat. (Ikus 22. orriko 2.6.2 atala.)
 (e) Erabili problemaaren ezagutzak iradokitzen duen $h(x, y)$ funtzio egokiaren menpeko faktore integratzailea: $\mu(x + y)$, $\mu(xy)$... (Ikus 23. orriko 2.6.3 atala.)

Gogoratu transformazioak egitean soluzioak gal (edo irabaz) daitezkeela.

C.2 Lehen ordenako deribatu askatugabeko ekuazioak

Deribatua ez bada erraz askatzen,

$$F(x, y, y') = 0, \quad (\text{C.2})$$

ondokoa saia dezakezu.

1. Ondoko ekuazioaren soluzioa $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$ da:

$$F(y') = 0.$$

(Ikus 31. orriko 2.15.1 atala.)

2. Ondoko ekuazioaren soluzio parametrikoa $x = g(u)$, $y = \int u g'(u) du + C$ da:

$$x = g(y').$$

(Ikus 31. orriko 2.15.2 atala.)

3. Ondoko ekuazioaren soluzio parametrikoa $x = \int \frac{g'(u)}{u} du + C$, $y = g(u)$ da:

$$y = g(y').$$

(Ikus 31. orriko 2.15.3 atala.)

4. Ondoan agertzen den **Clairaut-en ekuazioaren** soluzio orokorra $y = Cx + g(C)$ da:

$$y = xy' + g(y').$$

Inguratzaileraren bat badago, soluzio singularra izango da. (Ikus 32. orriko 2.15.4 atala.)

5. **Lagrange-ren**

$$y = xf(y') + g(y')$$

ekuazioa ebazteko, egin $y' = u$ aldaketa, deribatu ekuazioa eta erabili u -ren menpeko faktore integratzailea. Soluzio singularrak ager daitezke. (Ikus 33. orriko 2.15.5 atala.)

6. (C.2) ekuazioaren soluzio parametrikoa aurkituz gero,

$$F[\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)] = 0,$$

saiatu (u, v) aldagaietarako $d\beta = \gamma d\alpha$ ekuazioa ebazten. (Ikus 28. orriko 2.15 atala.)

7. Deribatu ekuazioa lortzen dena errazagoa ote den ikusteko, 34. orriko 2.15.6 atalean adibide batzuetan egin genuen bezala.

C.3 Ekuazio linealak

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \quad (\text{C.3})$$

n ordenako ekuazio linealaren kasuan saiatu ondoren aipatzen dena:

1. Hasteko, ebatzi dagokion ekuazio lineal homogeneoa $-b = 0$ eginez lortzen dena—, C.3.1 atalean aztertzen den moduan.
2. Erabili, gero, C.3.2 ataleko metodoak ekuazio osoaren soluzio partikular bat aurkitzeko.
3. (C.3) ekuazioaren soluzio orokorra, dagokion homogeneoaren soluzio orokorra eta osoaren edozein soluzio partikular batuz lortzen da.

(Ikus 52. orriko 3.8 atala.)

C.3.1 Ekuazio lineal homogeneoak

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}(x)y'' + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \quad (\text{C.4})$$

ekuazio lineal homogeneoaren soluzio orokorra wronskiar ez-nulua duten n soluzioren hautazko koefiziente konstantetako konbinazio lineala da. (Ikus 47. orriko 3.7.2 atala.)

1. a_k koefizienteak konstanteak badira, 62. orriko 3.10 ataleko **Euler-en** metodoa erabil daiteke soluzio orokorra prozedura algebrakoen bidez kalkulatzeko.
2. a_k koefizienteen egiturari esker, ekuazioa

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = 0$$

moduan idatz badaiteke, **Cauchy eta Euler-en ekuazioa** dugu eta $x \rightarrow t \equiv \ln(ax + b)$ aldaketarekin koefiziente konstantetako ekuazio lineal batera eramán daiteke. Bestalde, x delakoa $\ln(ax + b)$ balioarekin sistematikoki ordezkatzuz lortzen den Euler-en metodoaren aldaera nabariarekin ere ebatzen da. (Ikus 69. orriko 3.12 atala.)

3. Saiatu y_1 soluzio partikular bat aurkitzen. Horrelako batekin ordena behera daiteke (bere linealtasuna eta homogeneotasuna aldatu gabe) $y = y_1 \int u \, dx$ adierazpenak emandako $y \rightarrow u$ aldaketaren bidez. (Ikus 50. orriko 3.7.5 atala.) Saiatu prozedura hau errepikatzen, aldagaiak bananduz integratzen den lehen ordenako ekuazio homogeneo batera iritsi arte. Hau ezinezkoa bada, agian behean aipatzen den bigarren ordenako ekuazio batera hel daiteke. Kasu berezi batzuetan erraz asmatzen da soluzio partikularra. Adibidez, $a_{n-1}(x) = -xa_n(x)$ bada, $y_1 = x$ soluzioa da. y agertzen ez denean (hau da, $a_n(x) = 0$ denean), $y_1 = 1$ da soluzio partikularra. Era berean, $\sum_{k=0}^n a_k = 0$ bada, $y_1 = e^x$ dugu soluzio partikularizat, eta $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = 0$ betetzen denean $y_1 = e^{-x}$. (Ikus 51. orriko 3.16 ariketa.)
4. Bigarren ordenako ekuazio lineal homogeneoaren kasuan,

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (\text{C.5})$$

hauxe egiten saia daiteke:

- (a) Baldin eta $\frac{2a_1a_2 + a_0a_2' - a_0'a_2}{a_0^{1/2}a_2^{3/2}}$ konstantea bada, $t = \int \sqrt{a_2/a_0} dx$ aldagai independentearen aldaketak koefiziente konstanteetako (t, y) aldagaietarako ekuazio lineal homogeneo batera laburtzen du hasierakoa. (Ikus 52. eta 306. orrietako 3.21 ariketa.)
- (b) Baldin eta $\frac{4a_0a_2 - a_1^2 - 2a_0a_1' + 2a_0'a_1}{a_0^2}$ konstantea bada, $y \rightarrow u \equiv y e^{\frac{1}{2} \int \frac{a_1}{a_0} dx}$ menpeko aldagaiaren aldaketa erabiliz, koefiziente konstanteetako (x, u) aldagaietarako ekuazio lineal homogeneo bat lortzen da. (Ikus 52. eta 306. orrietako 3.22 ariketa.) Bestalde, aipaturiko adierazpena, a , b eta c konstanteen bidez $c/(ax + b)^2$ moduan idazten denean, (x, u) aldagaietarako Cauchy eta Euler-en ekuazio bat lortzen da.
- (c) Egiatzatu ekuazioa fisikan maiz agertzen diren ekuazioetariko bat denetz (edo modu horretan idatz daitekeenetz):

$$\text{Bessel}^1 \quad : \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0.$$

$$\text{Bessel (aldaerak)}^2 \quad : \quad x^2 y'' + (2c + 1)xy' + [a^2 b^2 x^{2b} + (c^2 - \nu^2 b^2)] y = 0.$$

$$\text{Chebyshev}^3 \quad : \quad (1 - x^2) y'' - xy' + \nu^2 y = 0.$$

$$\text{Gauss}^4 \quad : \quad x(1 - x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x] y' - \alpha\beta y = 0.$$

$$\text{Hermite}^5 \quad : \quad y'' - 2xy' + \mu y = 0.$$

$$\text{Kummer}^6 \quad : \quad xy'' + (\nu - x)y' - \alpha y = 0.$$

$$\text{Laguerre}^7 \quad : \quad xy'' + (1 - x)y' + \nu y = 0.$$

$$\text{Legendre}^8 \quad : \quad (1 - x^2) y'' - 2xy' + \nu(\nu + 1)y = 0.$$

(Ikus 6. gaia.)

- (d) Bilatu (berretura- edo Frobenius-en) serieen bidezko soluzioa 6. gaiko metodoekin. Saiatu serieak batzen 136. orriko 6.5.6 atalean emandako iradokizunez baliatuz.
- (e) $(a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1 = 0$ baldintza betetzen duen) y_1 soluzio partikular bat ezagutzen bada, soluzio orokorra

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx}}{y_1^2} dx \quad (\text{C.6})$$

da, 51 orriko 3.7.5 atalean ikusi genuen bezala.

¹Ikus 124. orriko 6.4 atala.

²Ikus 139. orriko 6.15 problema.

³Ikus 138. orriko 6.2 problema.

⁴Ikus 140. orriko 6.20 problema.

⁵Ikus 121. orriko 6.3.1 atala.

⁶Ikus 140. orriko 6.22 problema.

⁷Ikus 139. orriko 6.14 problema.

⁸Ikus 138. orriko 6.1 problema.

C.3.2 Ekuazio lineal osoak

Dagokion homogeneoa ebatzi ondoren,

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

ekuazio osoaren soluzio orokorra ebatzeko falta den soluzio partikularra honela bila daiteke:

1. a_k konstanteak izateaz gain b gai inhomogeneoa quasipolinomio bat edo quasipolinomioen batura bat bada, erabili 65. orriko 3.11.1 ataleko **koefiziente indeterminatuen metodoa** edo, nahiago bada, 67. orriko 3.11.2 ataleko **alderantzizko eragilearen metodoa**.
2. a_k koefizienteen egiturari esker, ekuazioa

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax + b) y' + a_n y = B(x)$$

moduan idatz badaiteke, $B(x)$ gai inhomogeneoa $\ln(ax + b)$ -ren polinomioen eta $(ax + b)$ -ren berreturen arteko biderkaduren batura izanik, **Cauchy eta Euler-en ekuazioa** dugu eta, $x \rightarrow t \equiv \ln(ax + b)$ aldaketarekin, gai inhomogeneo quasipolinomikoa duen koefiziente konstanteetako ekuazio batera laburtzen da. (Ikus 69. orriko 3.12 atala.) Soluzio partikularra bilatzeko 65. orriko 3.11.1 ataleko koefiziente indeterminatuen metodoaren aldaera nabaria ere erabil daiteke.

3. Erabili 53. orriko 3.8.1 ataleko **konstanteen aldakuntzaren metodoa**. Ekuazioa zenbait gai inhomogeneo desberdinetarako ebatzi behar baduzu, onuragarria izan daiteke 55. orriko 3.8.2 ataleko **Cauchy-ren metodoa** erabiltzea.

C.4 Ekuazio ez-linealak

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{C.7})$$

ekuazioa lineala ez bada, beraren ordena behar bezain zehatzki ondoan aipatzen diren metodoen bidez. Amaieran, egindako aldaketak desegin ondoren geratzen diren ekuazio diferentzialak ebatzen saiatu beharko da, noski.

1. (C.7) ekuazioan menpeko aldagaia agertzen ez bada,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$(x, y) \rightarrow (x, u \equiv y')$ aldagai-aldaketarekin behar bezain zehatzki ondoan aipatzen diren metodoen bidez. Gainera, $y, y', \dots, y^{(m)}$ falta badira, $(x, u \equiv y^{(m+1)})$ aldagaietan ordenari $m + 1$ unitate kentzen zaizkio. (Ikus 41. orriko 3.4.1 atala.)

2. (C.7) ekuazioan aldagai independentea agertzen ez bada, hau da, $x \rightarrow x + a$ translazioekiko aldaezina bada,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

ekuazio autonomoa dugu eta ordena behar bezain zehatzki ondoan aipatzen diren metodoen bidez. Gainera, $(x, y) \rightarrow (y, u \equiv y')$ aldagai-aldaketa erabil daiteke. (Ikus 41. orriko 3.4.2 atala.)

3. (C.7) ekuazioa x -ren eskala-aldaketekiko aldaezina bada,

$$(x, y) \rightarrow (ax, y),$$

x -rekiko **ekidimentsionala** da eta ordena behertzeko $(x, y) \rightarrow (y, u \equiv xy')$ aldagai-aldaketa erabiltzen da. (Ikus 42. orriko 3.4.3 atala.)

4. (C.7) ekuazioa y -ren eskala-aldaketekiko aldaezina bada,

$$(x, y) \rightarrow (x, ay),$$

y -rekiko **ekidimentsionala** da eta ordena behertzeko $(x, y) \rightarrow (x, u \equiv y'/y)$ aldagai-aldaketa erabiltzen da. (Ikus 43. orriko 3.4.4 atala.)

5. (C.7) ekuazioa deribatu baten moduan idatz badaiteke,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0,$$

ekuazio **zehatza** da eta bere ordena behertzeko nahikoa da $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$ lehen integrala erabiltzea. (Ikus 44. orriko 3.4.5 atala.)

C.5 Ekuazio linealen sistemak

Biz n ekuazioko sistema lineal bat:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t). \quad (\text{C.8})$$

1. Hasteko, ebatzi dagokion sistema homogeneoa $—b_i = 0$ eginez lortzen dena— C.5.1 atalean ikusten den bezala.
2. C.5.2 ataleko metodoak erabiliz, aurkitu sistema osoaren soluzio partikular bat.
3. (C.8) sistema osoaren soluzio orokorra, dagokion sistema homogeneoaren soluzio orokorra eta osoaren edozein soluzio partikular batuz lortzen da.

(Ikus 88. orriko 4.5 atala.)

C.5.1 Ekuazio linealen sistema homogeneoak

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{C.9})$$

ekuazio lineal homogeneoen sistemaren soluzio orokorra **oinarrizko matrize** baten eta hautazko zutabe-bektore konstante baten biderkadura da. (Ikus 86. orriko 4.4.2 atala.)

1. a_{ij} koefizienteak konstanteak badira, 91. orriko 4.6.2 ataleko **Euler-en metodoa** soluzio orokorra kalkulatzeko prozedura algebraikoa da.

2. (C.8) sistema **Cauchy eta Euler-en sistema** baten antzera idatz badaiteke,

$$t \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

a_{ij} koefizienteak konstanteak direlarik, aldagai independentearen $t = e^u$ aldaketak aurreko ataleko koefiziente konstanteetako sistema batera laburtzen du hemengoa. Nahiago bada, t aldagaia $\ln t$ balioarekin sistematikoki ordezkatzuz lortzen den Euler-en metodoaren aldaera erabil daiteke. (Ikus 98. orriko 4.29 problema.)

3. Beste kasu batzuetan, 81. orriko 4.2.1 atalean esan zenez, deribazioa eta ordezkapena erabiliz sistema n ordenako ekuazio lineal bakar batera labur daiteke, gero C.3.1 ataleko metodoak erabiltzeko.

C.5.2 Ekuazio linealen sistema osoak

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + b_i(t)$$

sistema osoari dagokion homogeneoa ebatzi ondoren, soluzio orokorra idazteko behar dugun osoaren soluzio partikularra bilatzeko ondoan deskribatzen den prozeduraz balia gaitzke.

1. a_{ij} koefizienteak konstanteak badira —agian Cauchy eta Euler-en sistema batean $t = e^u$ aldaketa egin ondoren— eta b_i gai inhomogeneoak quasipolinomioak, erabili 94. orriko 4.6.3 ataleko **koefiziente indeterminatuen metodoa**.
2. Bestela, erabili 88. orriko 4.5 ataleko **konstanteen aldakuntzaren metodoa**.

C.6 Ekuazio ez-linealen sistemak

1. Saiatu sistemaren **lehen integralak** aurkitzen, 81. orriko 4.2.2 atalean ikusi den moduan.
2. Bestalde, 81. orriko 4.2.1 atalean esan zenez, deribazioaz eta ordezkapenaz baliatuz, n ordenako ekuazio bakar batera labur daiteke sistema, gero C.4 ataleko metodoak erabiltzeko asmoz.

D ERANSKINA

Funtzio batzuen definizioa eta propietateak

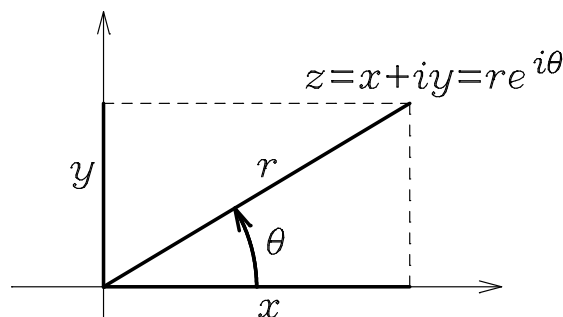
*Mathematics possesses not only truth, but supreme beauty
—a beauty cold and austere, like that of sculpture.*

Bertrand Russell

Beste gai guztietan agertzen diren funtzio berezien definizioak eta propietate batzuk bildu ditugu eranskin honetan. Gure helburua ez da aipaturiko funtzioen azterketa sistematikoa —Arfken eta Weber-en [16] testuan, adibidez, aurki daitekeena—, baizik eta irakurlearen lana erraztea teoria ulertzen eta ariketak egiten saiatzeko denean. Propietate gehiago Abramowitz eta Stegun [36] tauletan aurki daitezke. Hasteko, zenbaki konplexuen oinarritzko propietateak bilduko ditugu eta, Cauchy-ren balio nagusia definitu ondoren, ekuazio transzendente batek inplizituki definituriko funtzio bat ikusiko dugu, geroago definituzat integral bat edo serie bat duten beste batzuk aztertzeko. Amaitzeko, polinomio ortogonal interesgarrien propietateak aipatuko ditugu.

D.1 Zenbaki konplexuak

Zenbaki konplexuak $z = x + iy$ **forma cartesiarrean** edo $z = re^{i\theta}$ **forma polarrean** idazten dira, $i = \sqrt{-1}$ unitate irudikaria delarik. $\operatorname{Re} z = x = r \cos \theta$ **parte erreala** eta $\operatorname{Im} z = y = r \sin \theta$ **parte irudikaria** zenbaki errealak dira eta mota berekoak dira $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **modulua** eta $\arg z = \theta = \arctan y/x$ **argumentua**. Azken hau ez da bakarria eta $\theta + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) angeluak zenbaki konplexu berberari dagozkio forma polarrean. Argumentuaren **balio nagusia** $-\pi < \theta \leq \pi$ baldintza betetzen duena da.



D.1 IRUDIA Zenbaki konplexu baten forma cartesiarra eta polarra.

$z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}$ ($k = 1, 2$) zenbaki konplexuen batura, kendura, biderkadura eta zatidura hauexek dira:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2), \quad (\text{D.1})$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) \pm i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) \pm i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (\text{D.3})$$

z zenbakiaren konplexu konjokatua $\bar{z} = x - iy = r e^{-i\theta}$ da eta ondoko propietateak betetzen dira:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad (\text{D.4})$$

$$\arg \bar{z} = -\arg z, \quad (\text{D.5})$$

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad (\text{D.6})$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad (\text{D.7})$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z, \quad (\text{D.8})$$

$$z \bar{z} = |z|^2, \quad (\text{D.9})$$

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad (\text{D.10})$$

$$\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (\text{D.11})$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad (\text{D.12})$$

D.1 ARIKETA Erabili berretura-serie egokiak

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{D.13})$$

Euler-en formula eta

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (\text{D.14})$$

de Moivre-ren¹ teorema egiaztatzeko.

Esponentzialak eta berreturak honela kalkulatzen dira:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (\text{D.15})$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (\text{D.16})$$

Argumentua bakarra ez denez, $z = r e^{i(\theta+2k\pi)} \neq 0$ zenbaki konplexuaren n -garren erroak n dira:

$$z^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (\text{D.17})$$

Erro nagusia $k = 0$ balioarekin lortzen da ($-\pi < \theta \leq \pi$ aukeratu bada).

D.2 ARIKETA Ebatzi $z^3 - 1 = 0$ ekuazioa.



¹ **Abraham de Moivre** (1667-05-26, Vitry, Frantzia; 1754-11-27, Londres, Ingalaterra). Higanoten kanporatzearen ondorioz, Ingalaterrara joan zen; baina, han atzerritarra zenez, ez zuen katedrarik lortu. Geometria analitikoaren eta probabilitateen teoriaren aitzindaria izan zen. Badirudi bere adiskidea zen Stirling-en formula famatua berak aurkitu zuela lehenengoz. $(\cos x + i \sin x)^n$ berreturarako aurkitu zuen formulari esker, analisis oso erabilgarria da trigonometriari.

D.2 Cauchy-ren balio nagusia

Demagun f funtzioa singularra dela $c \in (a, b)$ puntuan, baina puntu hori ez duen edozein azpitartetan integragarria dela. Adibidez, $f = 1/\sqrt{x}$ eta $f = 1/x$ funtzioak $x = c = 0$ puntuan singularrak izan arren, integragarriak dira jatorria ez duten tarte finitu guztietan. Integral (inpropio) arrunta existitzen bada ($f = 1/\sqrt{x}$ funtzioaren kasuan, adibidez), ondoko berdintza bikoitza betetzen da:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

(Atal honetan limite ikur azpian agertzen diren aldagaiak positiboak dira, notazioa arintzeko esplizituki adierazten ez den arren.) Hala eta guztiz ere, gerta daiteke, bigarren gaiko bi limite independenteak konbergenteak izan ez arren, hirugarreneneko limite bakarra konbergentea izatea. Hori gertatzen denean, integrala dibergentea da, baina azken limitea erabil daiteke bere balio nagusia definitzeko:

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (\text{D.19})$$

$f = 1/x$ funtzioaren adibidean, $a < 0 < b$ aukeratuz, integral arrunta dibergentea da,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \lim_{\eta \rightarrow 0} \ln \frac{b}{\eta} = -\infty + \infty, \quad (\text{D.20})$$

baina bi limiteak aldi berean kalkulatu balio finitu bat lortzen da:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \ln \frac{b}{\varepsilon} \right] = \ln \frac{b}{|a|}. \quad (\text{D.21})$$

D.3 ARIKETA Eman dezagun $f(x)$ funtzioa erregularra eta integragarria dela. Frogatu honako emaitza hau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) dx}{x-y} = \int_0^{\infty} \frac{f(y+x) - f(y-x)}{x} dx. \quad (\text{D.22})$$

Orobat, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ integral inpropioa existitzen denean honela idatz daiteke:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \right]. \quad (\text{D.23})$$

Limite bikoitza dibergentea izanik azken gaiko limitea finitua bada, Cauchy-ren balio propioa definitzen du:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \equiv \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x) dx. \quad (\text{D.24})$$

D.4 ARIKETA Egiaztatu ondoko balio nagusia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = 0. \quad (\text{D.25})$$

D.3 Lambert-en funtzioa

Dakigunez, $e^y = x$ ekuazioaren soluzioa $y = \ln x$ da. Logaritmoa orokortzeko, $y e^y = x$ ekuazioa erabil daiteke Lambert-en funtzioa inplizituki definitzeko: $y = \mathcal{W}(x)$. Logaritmoaren kasuan bezalaxe, infinitu soluzio ditu aipaturiko ekuazioak, baina haien artean $x = 0$ puntua-
ren inguruan analitiko den bakarra, Lambert-en funtzioaren \mathcal{W}_0 adar nagusia da. Hemen beste
adarrak aztertuko ez ditugunez, \mathcal{W} notazio laburtua erabiliko dugu adar nagusiaren kasuan.

D.5 ARIKETA Erabili Lambert-en funtzioaren definizioa ondoko propietateak frogatzeko:

$$\mathcal{W}(x) e^{\mathcal{W}(x)} = x, \quad (\text{D.26})$$

$$\mathcal{W}(x) + \ln \mathcal{W}(x) = \ln x. \quad (\text{D.27})$$

Funtzio honen deribatua kalkulatzeko (D.26) adierazpenaren deribatua kalkulatu behar da:

$$\frac{d\mathcal{W}}{dx}(x) = \frac{e^{-\mathcal{W}(x)}}{1 + \mathcal{W}(x)} = \begin{cases} \frac{\mathcal{W}(x)}{x(1 + \mathcal{W}(x))}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \quad (\text{D.28})$$

D.6 ARIKETA Erabili (D.26) eta (D.27) propietateak D.2 irudia egiteko eta ondoko balioak kalkulatzeko:

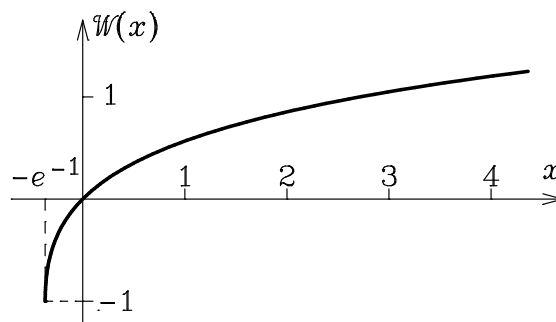
$$\mathcal{W}(-e^{-1}) = -1, \quad (\text{D.29})$$

$$\mathcal{W}(0) = 0, \quad (\text{D.30})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{W}(x) = +\infty, \quad (\text{D.31})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{W}(x)}{\ln x} = 1. \quad (\text{D.32})$$

Frogatu $[-e^{-1}, \infty)$ tarte errealean Lambert-en funtzioaren adar nagusia erreala eta monotono gora-
korra dela.



D.2 IRUDIA Lambert-en funtzioaren adar nagusia zuzen errealean.

Definizioa garatuz, ondoko Taylor-en seriea lortzen da:

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{n-1} \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{D.33})$$

D.7 ARIKETA Froga ezazu aurreko seriearen konbergentzia-erradioa $\rho = e^{-1}$ dela.

Lambert-en funtzioa $f(y) = ye^y$ delakoaren alderantzizkoa denez, integral batean $\mathcal{W}(x)$ agertzen bada, $x = ye^y$, $y = \mathcal{W}(x)$ aldagai-aldaketa erabil daiteke askotan integrala kalkulatzeko.

D.8 ARIKETA Erabili aipaturiko aldaketa ondoko integralak kalkulatzeko:

$$\int \mathcal{W}(x) dx, \quad \int x \mathcal{W}(x) dx. \quad (\text{D.34})$$

Lambert-en funtzioa oso erabilgarria da esponentziala edo logaritmoa duten ekuazio transzendente batzuk ebazteko (izan ere, horrelako baten bidez definitu dugu funtzioa). Adibidez,

$$e^x + x = 0 \quad (\text{D.35})$$

ekuazioa askatzeko, $-xe^{-x} = 1$ moduan idatziko dugu eta azken hau (D.26) adierazpenarekin erkatuz, $-x = \mathcal{W}(1)$ dela ikusten dugu; beraz, $x = -\mathcal{W}(1) \approx -0.567143$ aipaturiko ekuazioaren soluzioetako bat da.

D.9 ARIKETA Askatu ondoko ekuazioak (a , b eta c konstanteak dira):

$$\begin{aligned} \ln x + x &= 0, \\ e^{ax} &= bx^c, \\ \ln x + ax^b &= c, \\ xe^x &= e^x + 1. \end{aligned}$$

Lambert-en funtzioaren azterketa sakona eta aplikazioak [42] artikuluan aurki daitezke.

D.4 Errore-funtzioa

Errore-funtzioa gausstarraren integral mugagabearen bidez definitzen da:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (\text{D.36})$$

D.10 ARIKETA Froga itzazu ondoko propietateak:

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad (\text{D.37})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \quad (\text{D.38})$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}. \quad (\text{D.39})$$

Zein da $\operatorname{erf}(x)$ eta $\operatorname{erf}(-x)$ funtzioen arteko erlazioa?

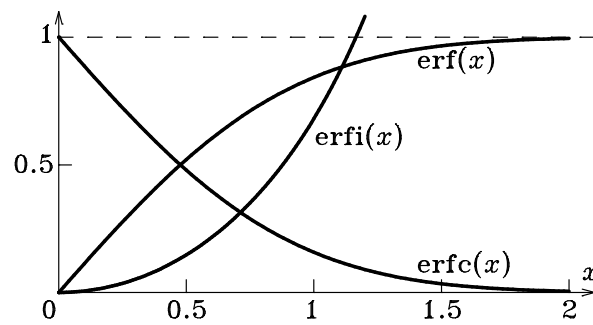
Bestalde, **errore-funtzio osagarria**,

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du, \quad (\text{D.40})$$

eta **errore-funtzio irudikaria**,

$$\operatorname{erfi}(x) \equiv \frac{\operatorname{erf}(ix)}{i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{u^2} du, \quad (\text{D.41})$$

ere erabilgarriak izaten dira.



D.3 IRUDIA Errore-funtzioak.

D.5 Euler-en gamma funtzioa

Funtzio berezi erabilgarri hau zenbaki naturalen faktoriala orokorpena da eta honela defini daiteke, $x > 0$ (edota $\text{Re } x > 0$) balioetarako:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (\text{D.42})$$

D.11 ARIKETA Erabili zatikako integrazioa eta $x = 1$ aukera, gehien interesatzen zaizkigun ondoko propietateak frogatzeko:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (\text{D.43})$$

$$\Gamma(1) = 1. \quad (\text{D.44})$$

Ondorioztatu argumentuaren balio naturalen kasuan gamma funtzioa faktorial bihurtzen dela:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{D.45})$$

(D.43) adierazpena definitzotzat hartzen bada, $\Gamma(x)$ funtzioak $0 < x < 1$ tartean dituen balioak erabil daitezke argumentuaren balio negatiboetara hedatzeko:

$$\Gamma(x-n) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)\cdots(x-n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{D.46})$$

Horrela, funtzioa zuzen erreal (plano konplexu) osoan dago definiturik, $x = 0, -1, -2, \dots$ puntuetan izan ezik. Azken puntu hauetan asintota bertikalak daude, D.4 irudian ikusten den bezala. (Plano konplexuan $(-1)^n/n!$ kondarreko polo bakunak daude.)

Funtzio honen propietate ugarien artean ezagunena Stirling-en² hurbilketa da, apika:

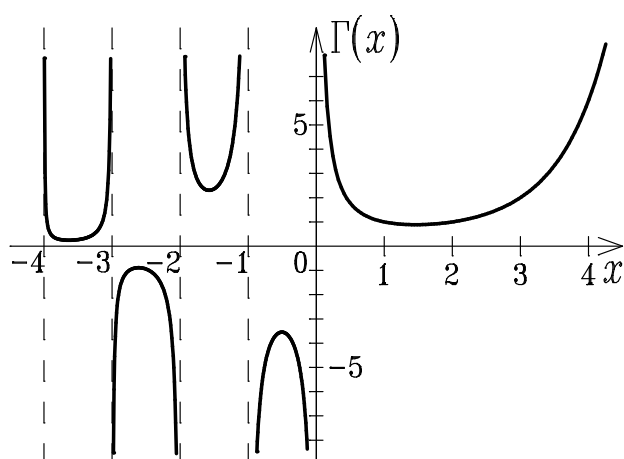
$$\ln \Gamma(x) \sim \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} + \dots \quad (|x| \gg 1). \quad (\text{D.47})$$

Zenbaki naturaletan faktoriala berreskuratzeaz gain, beste argumentu berezi batzuen kasuetan ere aurki daitezke gamma funtzioaren balio zehatzak.

D.12 ARIKETA Egin gamma funtzioa definitzen duen integralean aldagai-aldaketa egokia ondoko frogatzeko:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2k)! \sqrt{\pi}}{k! 2^{2k}}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{D.48})$$

²James Stirling (1692, Garden, Eskozia; 1770-12-05, Edinburgh, Eskozia). Egile honen lanik garrantzitsuena, 1730eko *Methodus Differentialis* liburua, serie, batura, interpolazio eta integrazioari buruzko tratatua da, eta bertan agertzen da $n!$ faktorialaren adierazpen asintotikoa



D.4 IRUDIA Euler-en gamma funtzioa zuzen errealean.

6. gaian agertzen diren errepikapen-erlazioak ebazteko ere baliagarria da funtzio hau. Izan ere, zenbait segidaren elementuen biderkadura era laburrean idazteko erabilgarria gertatzen da oso.

D.13 ARIKETA Pochhammer-en ikurrak honela definitzen dira:

$$(z)_0 \equiv 1, \quad (\text{D.49})$$

$$(z)_1 \equiv z, \quad (\text{D.50})$$

$$(z)_2 \equiv z(z+1), \quad (\text{D.51})$$

$$\vdots$$

$$(z)_n \equiv z(z+1)\cdots(z+n-1). \quad (\text{D.52})$$

Frogatu honako adierazpen hau:

$$(z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}. \quad (\text{D.53})$$

D.14 ARIKETA Erabili D.13 ariketako Pochhammer-en ikurrak serie binomikoa,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1), \quad (\text{D.54})$$

ondoko era laburtuan idazteko:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha-n+1)} x^n. \quad (\text{D.55})$$

D.6 Azpifaktorial funtzioa

Dakigunez, $n!$ faktoriala lehenengo n zenbaki naturalen biderkadura da:

$$n! \equiv (1)_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1, \quad (0! \equiv 1). \quad (\text{D.56})$$

$n!!$ azpifaktoriala definitzeko, ondoz ondoko zenbakiak biderkatu beharrean, txandakako zenbakiak erabili behar dira:

$$(2n)!! \equiv 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2, \quad (\text{D.57})$$

$$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1. \quad (\text{D.58})$$

Aurreko bi biderkadurek n biderkagai dauzkate zehazki. Gainera,

$$n! = n!!(n-1)!!, \quad n > 1. \quad (\text{D.59})$$

D.15 ARIKETA Froga ezazu faktorialak erabil daitezkeela azpifaktorialak hurrengo moduan idazteko:

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (\text{D.60})$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (\text{D.61})$$

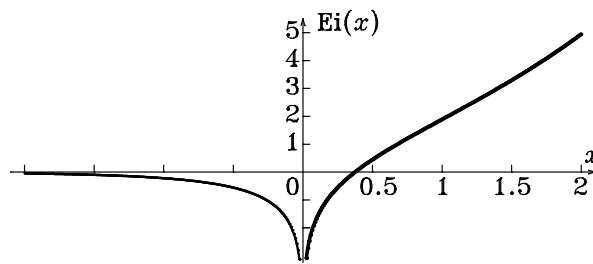
D.7 Esponentzial-integrala

Ei esponentzial-integrala honela definitzen da $x < 0$ balioetarako:

$$\text{Ei}(x) \equiv \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du. \quad (\text{D.62})$$

$x > 0$ denean, jatorrian dagoen dibergentzia logaritmikoa gaintzeko, Cauchy-ren balio nagusia kalkulatu behar da:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^u}{u} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^u}{u} du + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^u}{u} du \right]. \quad (\text{D.63})$$



D.5 IRUDIA Esponentzial-integrala.

Ondoko serie-garapena argumentu erreal guztietarako erabil daitezke:

$$\text{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} + \cdots \quad (\text{D.64})$$

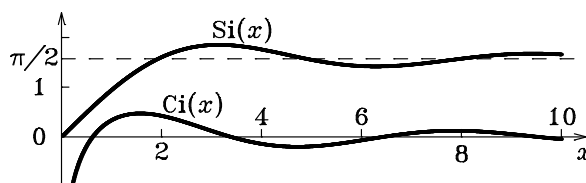
Hemen **Euler eta Mascheroni-ren konstantea**, C letraz eta **Euler-en konstante** izenez ere ezagutzen dena, erabili dugu:

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv -\Gamma'(1) \\ &= -\int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\Omega_N - \ln N) \\ &= 0.577215664901532860606512090082402431042\dots \end{aligned} \quad (\text{D.65})$$

Aurreko adierazpenean Ω_n ikurraren bidez **zenbaki harmonikoak** —hau da, serie harmonikoaren batura partzialak— adierazi ditugu:

$$\Omega_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k}. \quad (\text{D.66})$$

(Ikus [37] liburuko 0.155.4 adierazpena.)



D.6 IRUDIA Sinu- eta kosinu-integralak.

Antzeko funtzioak ditugu Si **sinu-integrala** eta Ci **kosinu-integrala**, $x > 0$ denean honela definitzen direnak:

$$\begin{aligned} \text{Si}(x) &= \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \\ \text{Ci}(x) &= - \int_x^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{\cos u - 1}{u} du \\ &= \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}. \end{aligned} \quad (\text{D.67})$$

D.8 Integral eliptikoak

Definizioz, $R(x, y)$ funtzioa arrazionala izanik, $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ polinomioaren maila hiru edo lau bada ($|a_0| + |a_1| > 0$) eta erro guztiak bakunak badira,

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx \quad (\text{D.68})$$

integrala eliptikoa da. Transformazio-formula egokien bidez, ondoan hurrenez hurren definitzen diren **lehen**, **bigarren** eta **hirugarren motako Legendre eta Jacobi-ren integral eliptikoen** bidez adieraz daiteke beste edozein integral eliptiko:

$$F(\varphi|\alpha) = F(\varphi|m) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}}, \quad (\text{D.69})$$

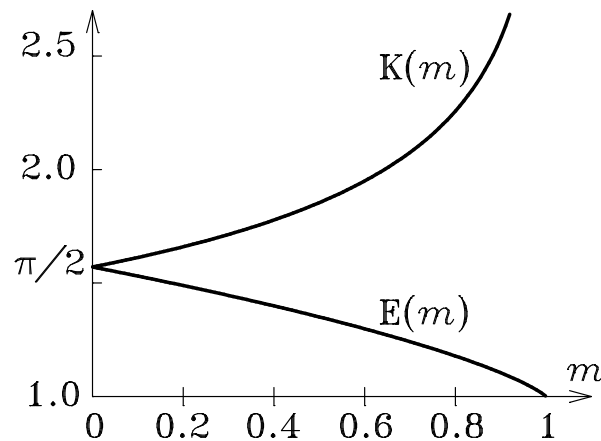
$$E(\varphi|\alpha) = E(\varphi|m) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - mt^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt, \quad (\text{D.70})$$

$$\begin{aligned} \Pi(n; \varphi|\alpha) = \Pi(n; \varphi|m) &= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \theta}} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{(1 - nt^2) \sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - mt^2}}. \end{aligned} \quad (\text{D.71})$$

Hemen $x \equiv \sin \varphi$ eta $0 \leq m \equiv \sin^2 \alpha \leq 1$ definizioak erabili ditugu $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ tartean. Lehen eta bigarren motako integral eliptikoetan $\varphi = \pi/2$ (hau da, $x = 1$) egiten denean, **lehen** eta **bigarren motako integral eliptiko osoak** lortzen dira:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-mt^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}, \quad (\text{D.72})$$

$$E(m) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-mt^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m\sin^2\theta} d\theta. \quad (\text{D.73})$$



D.7 IRUDIA Integral eliptiko osoak.

D.16 ARIKETA Egiaztatu ondoko Taylor-en serie-garapenak:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 m^n \right\}, \quad (\text{D.74})$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{m^n}{2n-1} \right\}. \quad (\text{D.75})$$

Integral eliptikoek **Jacobi-ren funtzio eliptikoak** definitzen dituzte implizituki. Adibidez, $u = F(\varphi|m)$ bada, alderantzizko funtzioa, $\varphi = \text{am } u = \text{am}(u|m)$, **anplitude jacobiarra** da, eta beste funtzio eliptiko batzuk honela definitzen dira:

$$\text{sn } u = \text{sn}(u|m) = \sin \varphi, \quad (\text{D.76})$$

$$\text{cn } u = \text{cn}(u|m) = \cos \varphi, \quad (\text{D.77})$$

$$\text{dn } u = \text{dn}(u|m) = \sqrt{1-m\sin^2\varphi}. \quad (\text{D.78})$$

D.17 ARIKETA Frogatu ondoko propietateak:

$$\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1, \quad (\text{D.79})$$

$$\text{dn}^2 u + m \text{sn}^2 u = 1, \quad (\text{D.80})$$

$$\text{dn}^2 u - m \text{cn}^2 u = 1 - m. \quad (\text{D.81})$$

D.9 Bessel-en funtzioak

6.4 atalean ikusi genuen bezala, ν ordenako lehen motako Bessel-en funtzioa, honela definitzen da:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}. \quad (\text{D.82})$$

Bere propietateen artean,

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (\text{D.83})$$

$$= -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \quad (\text{D.84})$$

$$= \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] \quad (\text{D.85})$$

deribatuaren adierazpenak eta

$$J_\nu(x) = \frac{x}{2\nu} [J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x)] \quad (\text{D.86})$$

errepikapen-erlazioa aipa daitezke (ikus 6.4 ariketa).

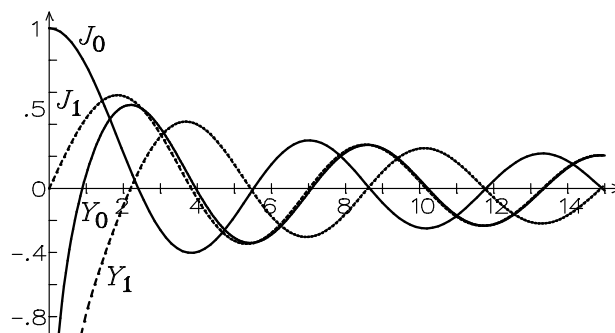
Bigarren motako Bessel-en funtzioa

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{D.87})$$

dugu, ν osoa ez bada. $\nu = n$ kasuan, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ da eta limite batez baliatu behar da:

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (\text{D.88})$$

(Batzuetan, funtzio honi **Newmann-en funtzioa**, edo **Weber-en funtzioa** deitzen zaio eta N_ν moduan ere idazten da.)



D.8 IRUDIA Ordena osoko Bessel-en funtzio batzuk.

Lehen motako Bessel-en funtzio aldatua

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (\text{D.89})$$

da x balio errearen kasuan, eta **bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua** hauxe:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{2 \sin(\nu\pi)}. \quad (\text{D.90})$$

Hemen ν ordena n oso baten berdina bada, $K_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(x)$ adierazpenaren bidez definitu behar da, $I_{-n}(x) = I_n(x)$ betetzen da eta.

Bessel-en ekuazio aldatua

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2) y = 0$$

da eta bere soluzio orokorra $y = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x)$.

D.10 Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorra

Funtzio hau $M(\alpha, \beta, x)$ edo ${}_1F_1(\alpha; \beta; x)$ eran idazten da eta ondokoa da bere definizioa:

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)} \frac{x^n}{n!}, \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

x guztietarako. $\beta = 0, -1, -2, \dots$ denean seriea definiturik egoteko, $\beta < m \leq 0$ betetzeko moduko m zenbaki osoa izan behar da α balioa. Izan ere, $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ bada, (D.91) formularen azken adierazpena ezin da erabili, eta funtzioa polinomio batera laburtzen da.

Funtzio hauen kasu berezi gisa

$$e^x = M(\alpha, \alpha, x), \quad (\text{D.92})$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -x^2\right) \quad (\text{D.93})$$

ditugu, baita Bessel-en funtzioak,

$$J_\nu(x) = \frac{e^{-ix}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu M\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1, 2ix\right), \quad (\text{D.94})$$

Laguerre-ren polinomioak,

$$L_n(x) = M(-n, 1, x), \quad (\text{D.95})$$

Hermite-renak,

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} M\left(-n, \frac{1}{2}, x^2\right), \quad (\text{D.96})$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x M\left(-n, \frac{3}{2}, x^2\right) \quad (\text{D.97})$$

eta abar. (Ikus [36] taulen 509. or.)

D.18 ARIKETA Egiaztatu (D.92) eta (D.93) adierazpenak.

D.11 Gauss-en funtzio hipergeometrikoa

Funtzio hau $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ edota ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ moduan idazten da eta, $|x| < 1$ denean, honela definitzen da:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta; \gamma; x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned} \quad (\text{D.98})$$

Azken adierazpena ezin erabil daiteke α (edo β) $0, -1, -2, \dots$ denean; horrelako kasuetan funtzioa polinomioa da. Seriea ez dago definiturik $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ bada, aldi berean α (edo β) ez bada m zenbaki oso bat, $\gamma < m \leq 0$ betetzeko modukoa. Lehen bi argumentuekiko simetrikoak dira funtzio hauek,

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\beta, \alpha; \gamma; x), \quad (\text{D.99})$$

eta kasu berezi moduan serie geometrikoak eta binomikoak,

$$(1+x)^\alpha = F(-\alpha, \beta; \beta; -x), \quad (\text{D.100})$$

Chebyshev-en polinomioak,

$$T_n(x) = F\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{D.101})$$

eta Legendre-renak,

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (\text{D.102})$$

agertzen dira, baita oinarritzko funtzio batzuk ere:

$$\ln x = (x-1)F(1, 1; 2; 1-x), \quad (\text{D.103})$$

$$\arcsin x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right) = x\sqrt{1-x^2} F\left(1, 1; \frac{3}{2}; x^2\right), \quad (\text{D.104})$$

$$\operatorname{arcsinh} x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (\text{D.105})$$

$$\arctan x = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right), \quad (\text{D.106})$$

$$\operatorname{arctanh} x = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; x^2\right). \quad (\text{D.107})$$

Integral eliptiko osoak ere berreskuratzen dira:

$$K(m) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right), \quad (\text{D.108})$$

$$E(m) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; m\right). \quad (\text{D.109})$$

D.19 ARIKETA Egiaztatu (D.100) eta (D.103)–(D.109) adierazpenak.

D.12 Polinomio ortogonalak

Testu honetan agertzen diren polinomio ortogonalen zenbait propietate biltzen ditugu hemen. Familia bakoitzeko polinomioak Sturm eta Liouville-ren problema baten soluzioak direnez, (a, b) tarte egoki batean definituriko funtzio erregularren espazioan daude eta espazio horretan $\rho(x)$ pisua erabiltzen da funtzioen biderketa eskalarra eta norma definitzeko, 9.1 atalean ikusi genuen bezala. Familia bakoitzeko $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ polinomioak errealak eta ortogonalak dira:

$$\langle f_i, f_j \rangle_\rho \equiv \int_a^b f_i(x) f_j(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|f_i\|_\rho^2, & i = j. \end{cases} \quad (\text{D.110})$$

D.12.1 Chebyshev-en polinomioak

Ekuazio diferentziala	$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0$
Tartea	$[-1, 1]$
Pisua	$(1 - x^2)^{-1/2}$
Norma	$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} [T_n(x)]^2 dx = \begin{cases} \pi, & n = 0, \\ \pi/2, & n > 0. \end{cases}$
Adierazpen esplizitua ³	$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$
Rodrigues-en formula	$T_n(x) = \frac{\sqrt{\pi(1-x^2)}}{(-2)^n \Gamma(n+1/2)} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$
Errepikapen-erlazioa	$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
$T_0(x)$	1
$T_1(x)$	x
$T_2(x)$	$2x^2 - 1$
$T_3(x)$	$4x^3 - 3x$
$T_4(x)$	$8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x)$	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

³ $\lfloor x \rfloor$ delakoa x zenbakiaren **parte osoa** da, hau da, x baino handiago ez den zenbaki oso handiena.

D.12.2 Hermite-ren polinomioak

Ekuazio diferentziala	$y'' - 2xy' + 2ny = 0$
Tartea	$(-\infty, \infty)$
Pisua	e^{-x^2}
Norma	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$
Adierazpen esplizitua	$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m}$
Rodrigues-en formula	$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$
Errepikapen-erlazioa	$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$
$H_0(x)$	1
$H_1(x)$	$2x$
$H_2(x)$	$4x^2 - 2$
$H_3(x)$	$8x^3 - 12x$
$H_4(x)$	$16x^4 - 48x^2 + 12$
$H_5(x)$	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

D.12.3 Laguerre-ren polinomio orokortuak

Laguerre-ren polinomioak $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$ dira.

Ekuazio diferentziala	$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$
Tartea	$[0, \infty)$
Pisua	$x^\alpha e^{-x}$
Norma	$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} [L_n^{(\alpha)}(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$
Adierazpen esplizitua	$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n + \alpha}{n - m} x^m$
Rodrigues-en formula	$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n! x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x})$
Errepikapen-erlazioa	$(n + 1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$
$L_0(x)$	1
$L_1(x)$	$1 - x$
$L_2(x)$	$\frac{2 - 4x + x^2}{2}$
$L_3(x)$	$\frac{6 - 18x + 9x^2 - x^3}{6}$
$L_4(x)$	$\frac{24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4}{24}$
$L_5(x)$	$\frac{120 - 600x + 600x^2 - 200x^3 + 25x^4 - x^5}{120}$

D.12.4 Legendre-ren polinomioak

Ekuazio diferentziala	$(1 - x^2) y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$
Tartea	$[-1, 1]$
Pisua	1
Norma	$\int_{-1}^1 [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n + 1}$
Adierazpen esplizitua	$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n - 2m}{n} x^{n-2m}$
Rodrigues-en formula	$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$
Errepikapen-erlazioa	$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$
$P_0(x)$	1
$P_1(x)$	x
$P_2(x)$	$\frac{3x^2 - 1}{2}$
$P_3(x)$	$\frac{5x^3 - 3x}{2}$
$P_4(x)$	$\frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}$
$P_5(x)$	$\frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}$

E ERANSKINA

Laplace-ren transformatuen taulak

Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.
Pierre Simon de Laplace

Irakurlearen onerako 5. gaian ikusi genituen Laplace-ren transformazioaren propietate nagusiak biltzen ditugu hurrengo orrietan, baita transformatuen bi zerrenda ere. Taula luzeagoak 319. orriko erreferentzia-lanetan aurki daitezke.

E.1 Laplace-ren transformazioaren propietateak

$f(t) = \theta(t)f(t)$ ¹	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	baldin eta
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$	$s > \alpha$
$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$	$s > \alpha + a$
$\theta(t - a)f(t - a)$	$e^{-as} F(s)$	$s > \alpha, a > 0$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$s > a\alpha, a > 0$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	$s > \alpha$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$	$s > \alpha$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	$s > \alpha$
$\int_a^t f(u) du$	$\frac{1}{s} \left[F(s) - \int_0^a f(u) du \right]$	$s > \alpha$
$tf(t)$	$-F'(s)$	$s > \alpha$
$t^2 f(t)$	$F''(s)$	$s > \alpha$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	$s > \alpha$
$\frac{f(t)}{t} \left(\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t} \right)$	$\int_s^{\infty} F(u) du$	$s > \alpha$
$f * g$	$F(s)G(s)$	$s > \alpha$
$f(t + T) = f(t)$	$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$s > 0$
$f(t + T) = -f(t)$	$\frac{1}{1 + e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$s > 0$

¹ f funtzioa eta ezkerreko zutabean agertzen diren $g, f', f'' \dots$ direlakoak $F(\alpha)$ espazioan daudela (hau da, zatikako jarraituak eta α ordena esponentzial finitukoak direla) suposatzen da, baita deribatuen propietateetako funtzioa (edo aurreko deribatua) jarraitua dela ere.

E.2 Limiteetako balioak

Hauxe betetzen da	baldin eta
$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$	$f(t)$ delakoa funtzio arrunta (eta ez orokortua) bada
$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$	$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$
$\lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) = \int_0^{\infty} f(t) dt$	$\exists \int_0^{\infty} f(t) dt$
$\lim_{s \rightarrow 0^+} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\exists \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ eta $sF(s)$ analitikoa bada $\text{Re } s \geq 0$ planoerdian

E.3 Oinarrizko funtzioen transformatuak

$f(t) = \theta(t)f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	baldin eta
$1 = \theta(t)$	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$\delta(t)$	1	$s > 0$
$\theta(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0, a \geq 0$
$\delta(t - a)$	e^{-as}	$s > 0, a \geq 0$
$\ln t$	$-\frac{\ln s + \gamma}{s}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$s > a$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$s > a $
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$s > 0$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}$	$s > a$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}$	$s > a$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$s > a$
$t^x e^{at}$	$\frac{\Gamma(x + 1)}{(s - a)^{x+1}}$	$s > a, x > -1$

E.4 Funtzio berezi batzuen transformatuak

$f(t) = \theta(t)f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$	baldin eta
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{s\sqrt{s+a^2}}$	$s > 0$
$\operatorname{Si}(at)$	$\frac{1}{s} \operatorname{arccot} \frac{s}{a}$	$s > 0$
$\operatorname{Ci}(at)$	$-\frac{1}{2s} \ln \left(1 + \frac{s^2}{a^2} \right)$	$s > 0$
$-\operatorname{Ei}(-at)$	$\frac{1}{s} \ln \left(1 + \frac{s}{a} \right)$	$s > 0, a > 0$
$J_{\nu}(at)$	$\frac{a^{\nu}}{\sqrt{s^2+a^2} (\sqrt{s^2+a^2}+s)^{\nu}}$	$s > 0, \nu > -1$
$L_n(at)$	$\frac{(s-a)^n}{s^{n+1}}$	$s > 0$

F ERANSKINA

Fourier-en transformatuen taulak

*“Live in the layers,
not on the litter”
No doubt the next chapter
in my book of transformations
is already written.
I am not done with my changes.
Stanley Kunitz*

Fourier-en transformazioaren propietate nagusiak eta transformatuen zerrenda bat biltzen ditugu hurrengo orrietan. Taula luzeagoak 319. orriko erreferentzia-lanetan aurki daitezke.

Ondoko hitzarmena aukeratu dugu, mekanika kuantikoan hedatuena delakoan:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (\text{F.1})$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp. \quad (\text{F.2})$$

Hala eta guztiz ere, hurrengoak ere sarritan erabiltzen dira:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx, \quad (\text{F.3})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp, \quad (\text{F.4})$$

edota

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ipx} dx, \quad (\text{F.5})$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{2\pi ipx} dp. \quad (\text{F.6})$$

Esponentzian unitate irudikariaren zeinua aurkakoa da askotan eta integralaren aurreko konstantea transformatu zuzen eta alderantzizkoaren artean trukutzen da maiz.

E.1 Fourier-en transformazioaren propietateak

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp$	$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$
$af(x) + bg(x)$	$aF(p) + bG(p)$
$f(x - a)$	$e^{-iap} F(p)$
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{p}{a}\right)$
$f'(x)$	$ipF(p)$
$f''(x)$	$-p^2 F(p)$
$f^{(n)}(x)$	$(ip)^n F(p)$
$xf(x)$	$iF'(p)$
$x^2 f(x)$	$-F''(p)$
$x^n f(x)$	$i^n F^{(n)}(p)$
$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - u)g(u) du$	$F(p)G(p)$
$f(x)g(x)$	$\frac{1}{2\pi} F * G$
$f(-x) = f(x)$	$F(-p) = F(p)$
$f(-x) = -f(x)$	$F(-p) = -F(p)$
$F(x)$	$2\pi f(-p)$
$\bar{f}(x)$	$\bar{F}(-p)$

F.2 Fourier-en transformatuak

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} dp$	$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$
1	$2\pi\delta(p)$
$\delta(x)$	1
$\delta(x - a)$	e^{-iap}
$\theta(x)$	$\pi\delta(p) - \frac{i}{p}$
$\text{sign}(x)$	$-\frac{2i}{p}$
$\theta(a - x)$	$2\frac{\sin ap}{p}$
$\theta(x - a)$	$2\left[\pi\delta(p) - \frac{\sin ap}{p}\right]$
$\cos ax$	$\pi[\delta(p + a) + \delta(p - a)]$
$\sin ax$	$i\pi[\delta(p + a) - \delta(p - a)]$
e^{iax}	$2\pi\delta(p - a)$
e^{-x^2/a^2}	$a\sqrt{\pi}e^{-a^2p^2/4}$
$e^{-a x }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{p^2 + a^2}$

G ERANSKINA

Ariketa batzuetarako iradokizunak eta soluzioak

The answer, my friend, is blowin' in the wind...
Bob Dylan

1. GAIA

1.1 $-1 \leq x \leq 1$, soluzio konplexurik onartzen ez badugu.

1.6 $\alpha = (C + \sqrt{C^2 - x^3})$ definizioarekin:

$$y = \frac{x + \alpha^2}{\alpha}, \quad y = -\frac{(1 + i\sqrt{3})x + (1 - i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}, \quad y = -\frac{(1 - i\sqrt{3})x + (1 + i\sqrt{3})\alpha^2}{2\alpha}.$$

1.7 Partikularra, partikularra, singularra.

1.8 $y = 0$ eta $y = x^2/4$. $x = 0$ eta $y = 1$ eginez, ekuazio diferentziala soluzio errealik gabeko $(y')^2 + 1 = 0$ eran agertzen da.

1.9 $y^{1/3}$ funtzioaren deribatua singularra da jatorrian.

1.10 $y = 2 \sin x + \cos x$. $B = 1 = -2$ ezinezkoa da. $y = A \sin x$.

1.11 $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \alpha$.

2. GAIA

2.2 $y^2 (y'^2 + 1) = 1$. $y = \pm 1$.

2.5 $\frac{1}{2}x^2 + xy + x - \frac{1}{3}y^3 + 3y = C$.

2.6 $y = x(\ln|x| - 1) + C$. Bai.

2.7 $ye^y = x^2 + C$, edo, D.3 ataleko Lambert-en funtzioa erabiliz, $y = W(x^2 + C)$.

2.8 $y = \frac{x}{C - \ln|x|}$. $C \rightarrow \infty$ limitean $y = 0$ lortzen da.

2.9 $\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = C$. Zer gertatzen da $y = 0$ soluzioarekin?

2.10 $x^2y^2 + 2x^3y = C$.

2.11 Ez.

2.12 $x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 = C$.

2.13 $e^{2x} - 2xe^xy = C$.

2.16 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$.

2.17 $y = \tan(x + C) - x - 1$.

2.18 $y^2 + 2(1 - x)y + x^2 = C$.

2.19 $y^2 + 2xy - 6y - x(x + 2) = C$.

2.20 $\left(\frac{1}{y} + \sin x - 1\right)e^{\sin x} = C$.

2.21 $y = \frac{C + 2x^3}{Cx - x^4}$.

2.22 $y = \pm 1$ zuzenak.

2.23 $\sqrt{1 - y^2} = C \pm x$. C edonolakoa denez, $(x - C)^2 + y^2 = 1$ eran idatz daiteke emaitza. 2.2 ariketan ere ikusi genuenez, $y = \pm 1$ soluzio singularrak daude eta orokorraren ingurutzailak dira, preseski.

2.24 $x = \sin v + C$ eta $y = \cos v$. Parametroa ezabatuz: $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

2.25 $y = C \pm \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)$.

2.26 Ez. Maila bakoitiko polinomio orok soluzio erreal bat du, gutxienez.

2.27 $x = u^2 - 1$, $y = \frac{2}{3}u^3 + C$, edota parametroa kenduz, $9(y + C)^2 = 4(x + 1)^3$.

2.28 $x = \frac{5}{4}u^4 + \frac{3}{2}u^2 + \ln u + C$, $y = u^5 + u^3 + u + 5$.

2.29 $y = Cx - C^2$ eta parabola ingurutzaila: $y = x^2/4$.

2.30 $x = \frac{3}{4}u^2 + \frac{C}{u^2}$, $y = \frac{1}{2}u^3 + 2\frac{C}{u}$, edota parametroa ezabatuz,

$$27y^4 - 16x(x^2 + 9C)y^2 + 64C(x^2 + C)^2 = 0.$$

Azken adierazpen honetan $C = 0$ eginez, $y = 0$ soluzioa berreskuratzen da.

2.31 $\mu(u) = \exp \int \frac{du}{f(u) - u}$.

2.32 $y = \frac{1 - (x - A)^2}{2}$ parabolak eta $y = \frac{1}{2}$ inguratzaila.

3. GAIA

3.1 $y''^2 = (1 + y'^2)^3$.

3.3 Marruskadura-indarra $-kz^2$ bada eta z ardatza beherantz aukeritzen badugu, hauxe da abiadura: $v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \sqrt{\frac{kg}{m}}(t - C)$. Ondorioz, $\lim_{t \rightarrow \infty} v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ eta $z = A + \frac{m}{k} \ln \cosh \sqrt{\frac{kg}{m}}(t - C)$.

3.4 $y = A \tan [A(x - x_0)] - \frac{1}{2}$, $y = -A \tanh [A(x - x_0)] - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{x - x_0} - \frac{1}{2}$ eta $y = C$.

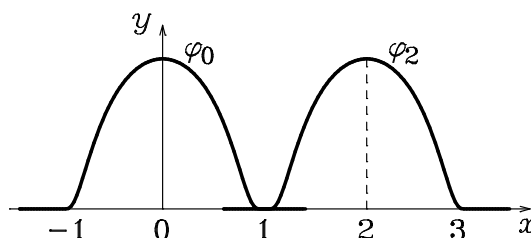
3.5 $y = 2A \tan(A \ln x + B) - 1$, $y = -2A \tanh(A \ln x + B) - 1$, $y = -\frac{2}{\ln x + C} - 1$ eta $y = C$.

3.6 $y = C_1 e^{C_2 x}$.

3.7 $y^2 = C_1 x + C_2$.

3.8 Ikus 3.6 ariketa.

3.11 G.1 irudian ikusten denez, puntu bakoitzean haietariko bat (gutxienez) nulua da; wronskiarra, beraz, nulua da. Baina puntu batzuetan bata nulua da eta bestea ez: linealki independenteak dira, hortaz.



G.1 IRUDIA φ_0 eta φ_2 funtzioak.

3.12 Ondoan agertzen den **Vandermonde-ren¹ determinantea** eta $e^{(k_1+\dots+k_n)x}$ funtzioa biderkatuz lortzen da wronskiarra:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i).$$

3.14 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$. $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$ edota $x = 1$ ez daukan beste edozein tartetan.

3.15 Kalkulua $(-\infty, 1)$ tartean egiten da!

3.16 $C_1x + C_2[x \operatorname{Ei}(x) - e^x]$. y ez da agertu behar: $a_n = 0$. $a_0 \pm a_1 \pm \dots + (\pm 1)^n a_n = 0$.

3.17 $y = C_1(x^2 - 1) + C_2x$.

3.21 $y = A \cos x^2 + B \sin x^2$. $\frac{2PQ + Q'}{2Q^{3/2}}$ konstantea denean.

3.22 $y = \frac{A \cos x + B \sin x}{x}$.

3.23 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$.

3.24 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + (\ln \cos x) \cos x$.

3.25 $C_k(s)$ ezezagunetarako sistema algebraiko lineala da eta bere determinantea oinarritzko soluzio-sistemaren wronskiarra s puntuan.

3.26 $y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_{t_0}^t f(s) \sin \omega(t-s) ds$.

3.31 $E, E', \dots, E^{(n-2)}$ jarraituak izan arren, $E^{(n-1)}$ deribatuak 1 balioko jauzia egiten du.

3.34 Erabili indukzio osoa.

3.37 $(1 - t - 2t^2) e^{-t} + A \cos t + B \sin t$.

3.38 $\left(C_1 + \frac{x}{6}\right) e^{2x} + \frac{1}{8} e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$.

3.39 $y = \left(A + \frac{x}{4}\right) \cos x + \left(B + \frac{x^2}{4}\right) \sin x$, A eta B hautazko konstanteak direlarik.

3.43 $\frac{A + B \ln(2x+1)}{\sqrt{2x+1}} + x - 4$.

¹**Alexandre Théophile Vandermonde** (1735-02-28, Paris; 1796-01-01, Paris). Musikaz aritu ondoren, 35 urtekin hasi zen matematikan lan egiten, ekuazio eta determinanteen teoriari buruz. Hala ere, Lebesgue-ri esker bere izena duen determinantea ez da agertzen bere lan argitaratuetan.

4. GAIA

4.1 $x + yy' + zz' = 0$, $1 + y' + z' = 0$. Era simetrikoan: $\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$.

4.3 $x = (C_1 + C_2 t) e^t$, $y = \left[\left(C_1 - \frac{1}{2} C_2 \right) + C_2 t \right] e^t$.

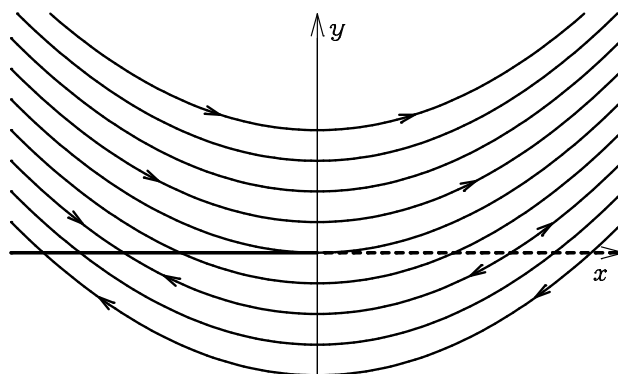
4.4 $\ddot{x} = x\dot{x}$ integratuz hauxe dugu:

$$x = -\frac{2}{t-t_0}, \quad y = \frac{2}{(t-t_0)^2};$$

$$x = 2C \tan [C(t-t_0)], \quad y = 2C^2 \sec^2 [C(t-t_0)];$$

$$x = -2C \tanh [C(t-t_0)], \quad y = -2C^2 \operatorname{sech}^2 [C(t-t_0)].$$

Azken soluzioan $t_0 \rightarrow \pm\infty$ limiteak hartuz, $x = C$, $y = 0$ oreka-puntuen zuzena lortzen da.



G.2 IRUDIA 4.4 ariketako fase-espazioa.

4.8 $y = \frac{1}{2}x^2 + A$.

4.9 $x^2 + y^2 = A$, $x + y - t = B$.

4.11 Ondoko biraketa-matrizea: $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

4.13 Erabili 4.12 ariketako matrizea.

4.16

$$\begin{aligned} x &= (\ln \cos t + C_1) \cos t + (t + C_2) \sin t, \\ y &= -(\ln \cos t + C_1) \sin t + (t + C_2) \cos t. \end{aligned}$$

4.18 $k + l$ balore bereko $\mathbf{A}^k \mathbf{B}^l$ gaiak bildu eta gogoratu Newton-en binomioa,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} \mathbf{A}^m \mathbf{B}^{n-m},$$

elkarrekin trukutzen diren matrizeetarako ere balio duena.

4.22 $x = A + Be^{-3t}$, $y = A + Ce^{-3t}$, $z = A - (B + C)e^{-3t}$. Matrizea simetrikoa denez, hiru bektore propio daude, bi balio propio besterik ez badago ere.

4.23 $x = (A + Bt)e^{2t}$, $y = -(A + B + Bt)e^{2t}$. Bektore propio bakarra dago.

4.24 $x = 5C_1 \cos 3t + 5C_2 \sin 3t$, $y = (C_1 - 3C_2) \cos 3t + (3C_1 + C_2) \sin 3t$.

4.26 $x = [(A + t) \cos t - B \sin t] e^t$, $y = [(A + t) \sin t + B \cos t] e^t$.

5. GAIA

5.3 Taylor-en garapenaren bidez ikusten dugunez, $\epsilon > 0$ edonolakoa izanda ere $t^n \in \mathcal{F}(\epsilon)$ dugu:

$$e^{\epsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k t^k}{k!} > \frac{\epsilon^n t^n}{n!} \implies t^n < \frac{n!}{\epsilon^n} e^{\epsilon t}.$$

5.14 $\lim_{s \rightarrow a} (s - a)^2 P(s)/Q(s)$ balioak $A/(s - a)^2$ gaiaren A koefizientea ematen du; $B/(s - a)$ horretan agertzen dena, haatik, hauxe da:

$$B = \lim_{s \rightarrow a} \frac{d}{ds} \left[\frac{(s - a)^2 P(s)}{Q(s)} \right].$$

5.15 $\frac{1}{4} [(1 + 2t)e^t - e^{-t}]$, $2 \cos t$.

5.16 $2e^{-2t}(\cos 2t - 2 \sin 2t)$.

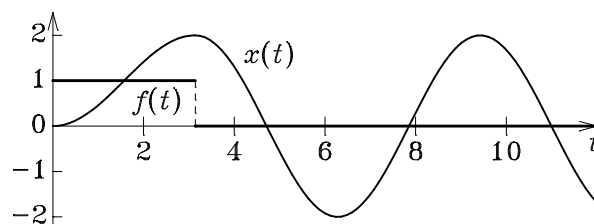
5.19 $\int_a^b \delta(x - a)f(x) dx$ ez dago ondo definiturik.

5.20 $\frac{1}{8} (e^{-2t} - 1) \cos t + \frac{1}{8} (e^{-2t} + 1) \sin t$.

5.21 $x = -2e^t + e^{4t}$, $y = -\frac{2}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{4t}$.

5.23 $x = \begin{cases} 0, & \text{baldin } t \leq 0, \\ 1 - \cos t, & \text{baldin } 0 \leq t \leq \pi, \\ -2 \cos t, & \text{baldin } t \geq \pi. \end{cases}$

Bai, ikus G.3 irudia eta 111 orriko azterketa orokorragoa.



G.3 IRUDIA 5.23 ariketako indarra eta soluzioa.

6. GAIA

6.1 $\rho(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-\frac{1}{n}}$.

6.2

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad (|x| < 1),$$

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} = \cos \sqrt{x}, \quad (|x| < \infty),$$

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (|x| < 1),$$

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^{2n} = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{-2}, \quad (|x| < \sqrt{2}).$$

6.3 $x = 0, -1$ erregularrak eta $x = 1$ irregularra.

6.4 $y = \frac{c_0 + c_1 x}{1 - x^2}$. $u'' = 0$.

6.7 $y \sim \frac{e^{x^2} - 1}{x} \sim x e^{x^2}$, $|x| \rightarrow \infty$.

6.8 $E = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega$.

6.9 Erabili $|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = |\Gamma(-2)| = \dots = \infty$.

6.15 $y = \frac{x}{1+x}(A + B \ln x)$.

6.17 $y = Ax + B [e^{-x} + x \operatorname{Ei}(x)] = C_1 x + C_2 \left[x \ln x + 1 - 2x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n-1)} x^n \right]$.

6.21 $y = A \cos x^2 + B \sin x^2$.

7. GAIA

7.4 $y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{37}{30}x^6 + \frac{404}{315}x^7 + \frac{369}{280}x^8 + \frac{428}{315}x^9 + \frac{1961}{1400}x^{10} + \dots$

7.6 $y = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \frac{11}{2}x^4 + \frac{21}{2}x^5 + \frac{81}{4}x^6 + \frac{1109}{28}x^7 + O(x^8)$.

7.10 $x = \sin t + \epsilon \frac{1 + \cos 2t}{4} + O(\epsilon^2)$.

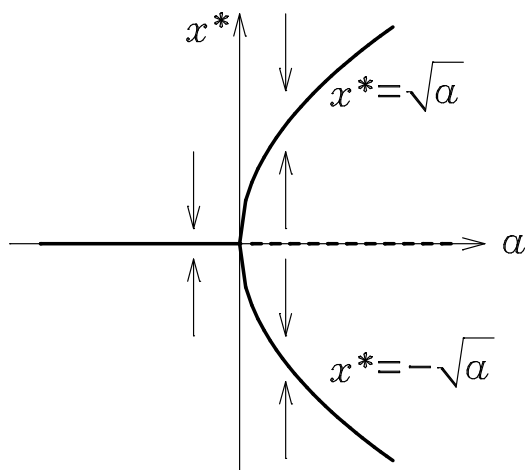
7.11 $x = \sin t + \epsilon \frac{1 + \cos 2t}{4} + \epsilon^2 \frac{7 \sin t - \sin 3t}{28} + O(\epsilon^3)$.

7.16 $y = x^{-1/4} (A \cos \omega x^{3/2} + B \sin \omega x^{3/2})$, non $\omega = \frac{2}{3\epsilon}$.

8. GAIA

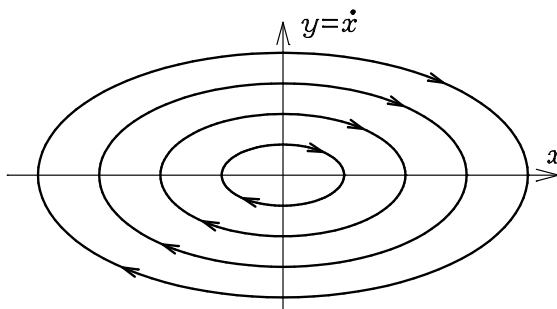
8.2 Ondoko soluzio orokorrari dagokion adarkatze-diagrama G.4 irudian ikus daiteke:

$$x = x_0 \sqrt{\frac{a}{x_0^2 + (a - x_0^2) e^{-2at}}}$$



G.4 IRUDIA (8.4) ekuazioaren adarkatze-diagrama.

8.3 Fase-ibilbideen ekuazioa, $y' = -\omega^2 x/y$, banangarria da eta bere soluzioa $E = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$. Honek energia mekanikoa konstantea dela eta fase-ibilbideak elipseak direla diosku. Fase-ibilbideen noranzkoa y abiadura dela kontuan hartuz ikusten da: $y = \dot{x}$ positiboa (negatiboa) denean, x handituz (txikituz) doa eta sistema eskuinerantz (ezkerrerantz) higitzen da fase-espazioan.



G.5 IRUDIA Osziladore harmonikoaren fase-espazioa.

8.4 $\dot{\theta} = \omega, \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta. H = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{g}{l} \cos \theta.$

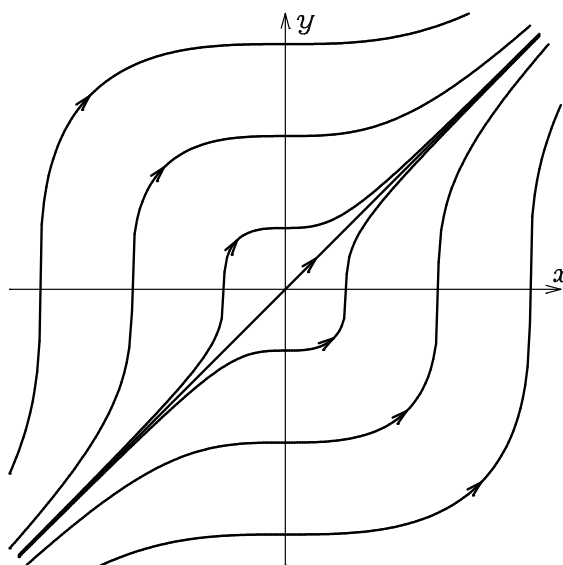
8.7 $\dot{\theta} = \omega, \dot{\omega} = -\frac{g}{l} \theta. \dot{\varphi} = \omega, \dot{\omega} = +\frac{g}{l} \varphi, (\varphi \equiv \theta - \pi).$

$$8.9 \quad k = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}. \quad k = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

8.11 Oroit zaitez Lissajous-en² irudiez. (Nahiago baduzu, ezabatu t eta erabili bigarren mailako kurben —sekzio konikoen— propietateak.)

8.12 Soluzioa ekuazioan sartuz gero, $(\mathbf{A} - k\mathbf{1}) \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ lortzen da. Azken honek soluzioak dauzka $\mathbf{A} - k\mathbf{1}$ identikoki nulua ez bada, hau da, $a_{12} = a_{21} = 0$ betetzen ez bada.

8.13 Fase-ibilbideen ekuazioa $y^2 dy = x^2 dx$ da. $y = (x^3 + y_0^3)^{1/3}$ soluzioen asintota, inflexio-puntuak eta deribatuaren balioa aztertuz, G.6 irudiko fase-espazioa lortzen da. (Noranzkoak aurkitzeko, nahikoa da $\dot{x}, \dot{y} \geq 0$ erabiltzea.) Ageri denez, jatorria ezegonkorra da.



G.6 IRUDIA (8.70) sistemaren fase-espazioa.

8.21 Asintotikoki egonkorra lehen kasuan eta ezegonkorra bigarreanean.

8.23 Zirkunferentziak.

$$8.25 \quad H = x^2 y - \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

$$8.26 \quad \partial P / \partial x + \partial Q / \partial y = -2n\gamma y^{2n-1}.$$

$$E = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ energia mekanikoaren deribatua ez da definitua: } \dot{E} = -\gamma y^{2n+1}.$$

8.27 $(t, x, y) \rightarrow (-t, -x, y)$ aldaketarekiko aldaezina da.

8.30 $r = (2t + C)^{-1/2} \rightarrow 0$. (Soluzioa $t > -C/2$ zuzenerdian dago definiturik eta $r = -\infty$ zegoen $t = -C/2$ baliorako.)

²Jules Antoine Lissajous (1822-03-04, Versailles, Frantzia; 1880-06-24, Plombières, Frantzia). Bibrazioak aztertzeko metodo optiko bat garatu zuen eta oszilazioen eta uhin-higiduraren arlo desberdinak landu zituen, taupadak barne.

8.31 -2λ .

8.32 $r = \sqrt{\frac{\lambda}{1 + Ce^{-2\lambda t}}}$. (Ikus 8.2 ariketa.)

8.34 $\lambda = 0, -\frac{\gamma}{2}, -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - 1}$.

9. GAIA

9.1 Soluzio nulua baino ez dago.

9.10

$$\text{Legendre} : \left[(1 - x^2) y' \right]' + n(n + 1)y = 0,$$

$$\text{Laguerre} : \left[x e^{-x} y' \right]' + \lambda e^{-x} y = 0,$$

$$\text{Hermite} : \left[e^{-x^2} y' \right]' + \lambda e^{-x^2} y = 0.$$

9.12 $Ay = \lambda y \implies (\lambda - \bar{\lambda}) \|y\|_\rho^2 = \langle y, Ay \rangle_\rho - \langle Ay, y \rangle_\rho = 0 \implies \lambda = \bar{\lambda}$.

9.13 $Ay_n = \lambda y_n \implies (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_n, y_m \rangle_\rho = \langle y_n, Ay_m \rangle_\rho - \langle Ay_n, y_m \rangle_\rho = 0 \implies \langle y_n, y_m \rangle_\rho = 0$.

9.18 $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

9.21 Bai, $\sqrt{\frac{2}{\ell}} \int_0^\ell \left(\frac{\ell \sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda \sin \sqrt{\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin n\omega x \, dx = \frac{\sqrt{2\ell^3}}{\pi} \frac{(-1)^n}{n(\lambda - n^2\omega^2)}$. Emaitza bera erabil daiteke $\lambda < 0$ denean, baina adierazpen nabariki erreala nahiago bada $\sin(ix) = i \sinh x$ erlazioaz balia gaitzke:

$$y = \frac{\ell \sinh \sqrt{-\lambda} x}{\lambda \sinh \sqrt{-\lambda} \ell} - \frac{x}{\lambda}.$$

$\lambda = 0$ denean, kalkulu zuzenak edota $\lambda \rightarrow 0$ limiteak hauxe ematen du:

$$y = \frac{x}{6} (\ell^2 - x^2) = -\frac{2\ell}{\pi\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n\omega x}{n^3}.$$

9.24 $\lambda > 0$ denean 3.11 problemaren kasuan gaude,

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda}(s - \ell)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \ell}, & \text{baldin } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda} s \sin \sqrt{\lambda}(x - \ell)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \ell}, & \text{baldin } s \leq x \leq \ell, \end{cases}$$

eta $\lambda < 0$ denean,

$$G_\lambda(x, s) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} x \sinh \sqrt{-\lambda}(s - \ell)}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda} \ell}, & \text{baldin } 0 \leq x \leq s, \\ \frac{\sinh \sqrt{-\lambda} s \sinh \sqrt{-\lambda}(x - \ell)}{\sqrt{-\lambda} \sinh \sqrt{-\lambda} \ell}, & \text{baldin } s \leq x \leq \ell. \end{cases}$$

A ERANSKINA

A.1

1. Kalkulatu $z \rightarrow y$ limitea (A.3) adierazpenean. (Edo, nahiago baduzu, erabili bertan δ eta ϵ ikurren bidezko notazio klasikoa.)

$$2. |f(x, y) - f(x, 0)| = \frac{1}{\sqrt{y}}|y - 0|.$$

3. $y + \ln x$ funtzioa $[0, 1] \times [0, 1]$ karratuan.

4. Balio ertainaren teoremaren ondorioz, $f(x, y) - f(x, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y - z)$, balio ertain baterako: $y < \xi < z$ (edo $z < \xi < y$). Beraz, deribatua jarraitua denez, bornatuta dago \mathcal{R} laukizuzenean, $|\partial f / \partial y| < K$. Hortaz,

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi) \right| |y - z| \leq K|y - z|.$$

5. Erabili 1.9 ariketa.

6. $x_0 = 0$ bada, soluzio maximoa $y(x) = y_0 / (1 - xy_0)$ da, eta $A = \infty$ (hau da, nahi bezain handia) bada ere, soluzioa $(-\infty, 1/y_0)$ tartean —edo, y_0 negatiboa bada, $(1/y_0, \infty)$ delakoan— baino ez dago definiturik.

B ERANSKINA

B.1 Soluzioen itxurak berak erakusten du erraz eraiki daitekeen bigarren mailako ekuazio baten erroak direla.

B.3 Erabili D.9 ataleko Bessel-en funtzio aldatuak.

B.7 Ez daki ekuazioa ebazten,

```
In[1]:= DSolve[2 Y'[x] Y''[x] == 3 Y'[x]^2, Y[x], x] // Simplify
```

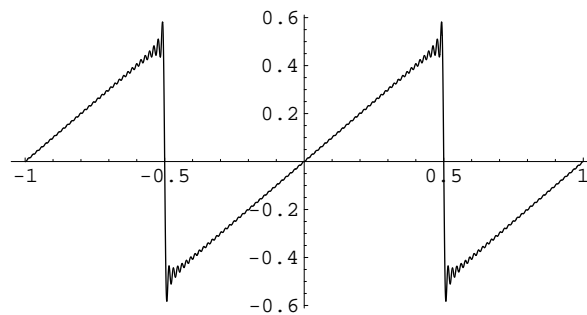
```
Out[1]= DSolve[2 Y'[x] Y'''[x] == 3 Y''[x]^2, Y[x], x]
```

baina ordena behartzeko eskuz $z = y'$ aldaketa egiten badugu, badaki askatzen lortzen den ekuazio baliokidea:

```
In[2]:= DSolve[2 z[x] z'[x] == 3 z[x]^2, z[x], x] // Simplify
```

```
Out[2]= {{z[x] -> \frac{4}{C[1]^2 (x - C[2])^2}}}
```

B.8 $\theta(x - a)\delta(x - a)$ ez dago ondo definiturik ($\theta(0) = 1$ hitzarmenarekin ere ez), Heaviside-ren funtzioaren eten-puntuan hartzen baita delta.



G.7 IRUDIA 9.2 irudiko funtzioaren Fourier-en seriea: 64 gai erabili dira.

B.22 Ikus G.7 irudia.

B.24 Gogoratu Method- \rightarrow MethodEGF aukera:

```

In[1]:= << DiscreteMath`RSolve`
In[2]:= II[λ_] := λ2 - 2 λ - 5 / 4;
In[3]:= RSolve[{II[λ + 2 k] a2[k] - a2[k - 1] == 0, a2[0] == 1}, a2[k],
k, Method -> MethodEGF]
Out[3]:= {{a2[k] ->  $\frac{4^{-k}}{\text{Pochhammer}[-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2}, k] \text{Pochhammer}[\frac{5}{4} + \frac{\lambda}{2}, k]}$ }}
In[4]:= % /. λ ->  $\frac{5}{2}$  // FunctionExpand // FullSimplify
Out[4]:= {{a2[k] ->  $\frac{3}{(3 + 2 k) \text{Gamma}[2 + 2 k]}$ }}

```

D ERANSKINA

D.2 $z = 1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D.7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-1} = e^{-1}$.

D.8

$$\int \mathcal{W}(x) dx = x \frac{\mathcal{W}^2(x) - \mathcal{W}(x) + 1}{\mathcal{W}(x)},$$

$$\int x \mathcal{W}(x) dx = \frac{1}{8} x^2 \frac{[2\mathcal{W}^2(x) + 1][2\mathcal{W}(x) - 1]}{\mathcal{W}^2(x)}.$$

D.9 $x = \mathcal{W}(1) \approx 0.567143$.

$$x = -\frac{c}{a} \mathcal{W} \left[-\frac{a}{b^{1/c} c} \right].$$

$$x = \left[\frac{\mathcal{W}(abe^{bc})}{ab} \right]^{\frac{1}{b}}.$$

$x = 1 + \mathcal{W}(e^{-1}) \approx 1.27846$.

D.10 Nahikoa da Gauss-en integrala,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

eta integrakizunaren berretura-seriea erabiltzea. Bestalde, $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$.

D.12 Berrero ere Gauss-en integrala erabiliz,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \stackrel{t=u^2}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\end{aligned}$$

eta beste guztiak indukzio osoaren ondorio zuzenak dira.

BIBLIOGRAFIA

*Some books are to be tasted,
others to be swallowed,
and some few to be chewed and digested.*
Francis Bacon

Atal honen helburua ez da ekuazio diferentzialei buruzko bibliografia ugariaren bilduma osoa egitea. Erudizio-ariketa horri ekin beharrean, oinarrizko testu batzuen azken argitaraldien zerrenda labur bat egin nahiago izan dugu. Liburu horiek erabiltzeko gomendatzen diogu irakurleari. Testuliburuek problema-bildumak eduki ohi dituzten arren, problema-liburu batzuk ere sartu ditugu bibliografian, irakasgaia prestatzerakoan ikasleari lagungarri gerta dakizkiokeelakoan. Bestalde, formula matematikoen eskulibururen bat lortzeko gomendatzen dugu, irakasgai batzuetan —baita etorkizuneko lanbide-praktikan ere— erabilgarria izango da eta. Amaitzeko, zenbait testuliburu osagarri, erreferentzia-gidaliburu eta tresna informatiko aipatzen dira.

Oinarrizko testuak

- [1] W. E. Boyce y R. C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4^a ed., Limusa (1998).
- [2] W. R. Derrick and S. I. Grossman, *Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems*, 4th ed., Addison-Wesley (1997).
- [3] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, 4^a ed., URSS (1994).
- [4] A. Gray, M. Mezzino and M. A. Pinsky, *Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica*, Springer (1997).
- [5] F. Marcellán, L. Casasús y A. Zarzo, *Ecuaciones diferenciales*, McGraw-Hill (1990).
- [6] E. Martínez, *Ekuazio diferentzialak: Aplikazioak eta ariketak*, Udako Euskal Unibertsitatea eta Euskal Herriko Unibertsitatea (1994).
- [7] S. Novo, R. Obaya y J. Rojo, *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, McGraw-Hill (1995).
- [8] S. L. Ross, *Ecuaciones diferenciales*, Reverté (1992).
- [9] G. F. Simmons, *Ecuaciones diferenciales*, 2^a ed., McGraw-Hill (1993).

Problema-bildumak

- [10] F. Ayres, *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales*, Schaum, McGraw-Hill (1991).
- [11] A. I. Kiseliiov, M. L. Krasnov y G. I. Makarenko, *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*, Mir-Rubiños 1860 (1992).
- [12] M. L. Krasnov, A. I. Kiselev y G. I. Makarenko, *Funciones de variable compleja. Cálculo operacional. Teoría de la estabilidad*, Mir-Rubiños 1860 (1992).

Taulak

- [13] M. R. Spiegel y L. Abellanas, *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, Schaum McGraw-Hill (1999).
- [14] I. Bronshtein y K. Semendiaev, *Manual de Matemáticas*, 9^a ed., Mir-Rubiños 1860 (1992).
- [15] I. Bronshtein and K. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*, Springer (1997).

Testu osagarriak eta aurreratuak

- [16] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th ed., Academic Press (1995).
- [17] V. I. Arnold, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Rubiños-1860 (1995).
- [18] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, (2 Vols.), Wiley (1962).
- [19] F. R. Gantmájér, *Mecánica Analítica*, Editorial URSS (1996).
- [20] M. W. Hirsch y S. Smale *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*, Alianza-Universidad (1983).
- [21] M. H. Holmes *Introduction to perturbation Methods*, Springer (1995).
- [22] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover (1956).
- [23] D. S. Jones, *Funciones Generalizadas*, Urmo (1972).
- [24] L. M. Jones, *An Introduction to Mathematical Methods of Physics*, Benjamin (1979).
- [25] A. M. Krall, *Linear Methods of Applied Analysis*, Addison-Wesley (1973).
- [26] J. Mathews and R. L. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Benjamin (1970).
- [27] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (2 Vols.), McGraw-Hill (1953).
- [28] L. Schwartz, *Métodos matemáticos para las ciencias físicas*, Selecciones Científicas (1969).

- [29] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley (1994).
- [30] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer (1996).
- [31] W. Walter, *Ordinary Differential Equations*, Springer (1998).

Zenbakizko kalkuluari buruzko testuak³

- [32] G. Engeln-Müllges and F. Uhlig, *Numerical Algorithms with C*, Springer (1996).
- [33] E. Hairer, S. P. Norsett and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations*, 2 Vols., 2nd ed., Springer (1993,1996). Doako programak lortzeko:
`ftp://ftp.unige.ch/pub/doc/math`
- [34] W. H. Press, S. A. Flannery, B. P. Teukolsky and V. T. Vetterling, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Programming*, 2nd ed., Cambridge University Press, (1992).
- [35] J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., Springer (1993).

Erreferentzia-gidaliburuak

- [36] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1972).
- [37] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, 5th ed., Academic Press (1994).
- [38] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*, Chelsea Publishing Company (1947-48).
- [39] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations*, 3rd ed., Academic Press (1998).

Bestelako erreferentziak

- [40] J. M. Aguirregabiria, "Getting started with Mathematica". Postscript fitxategia:
`http://tp.lc.ehu.es/anonym/mathemat/mathematica.ps`
- [41] J. M. Aguirregabiria, A. Hernández and M. Rivas, "Are we careful enough when using computer algebra systems?", *Computers in Physics*, **8**, No. 1, 56 (1994).
- [42] R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey and D.E. Knuth, "On the Lambert W Function", Technical Report CS-93-03, Dept. Comp. Sci., University of Waterloo (1993).
`ftp://cs-archive.uwaterloo.ca/cs-archive/CS-93-03/W.ps.Z`

³Doako zenbaki-errutina on asko —FORTRAN, C eta C++ lengoaietz— `http://www.netlib.no` artxioban aurki daitezke.

Kalkulu matematikoa egiteko programak

Ekuazio diferentzialak ebazteko metodo sinboliko eta zenbakizkoak dauzkate, besteak beste. Sistema eragile gehienetan erabil daitezke.

- [43] Macsyma, Macsyma Inc., 20 Academy Street, Arlington, MA 02174, USA.
- [44] Maple V, Waterloo Maple Software, 160 Columbia Street, Unit 2, Waterloo, Ontario N2L 3L3, Canada.
- [45] *Mathematica*, Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA.

Ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko programak

MS-DOS sistema eragilerako

- [46] J. M. Aguirregabiria, *ODE Workbench*, Physics Academic Software, American Institute of Physics (1994).
- [47] H. Koçak, *Differential and Difference Equations through Computer Experiments*, 2nd ed., Springer(1989).

Windows ingurunerako

- [48] J. M. Aguirregabiria, *Dynamics Solver*.
(Ikus <http://tp.lc.ehu.es/JMA/ds/ds.html>)

X-Windows ingurunerako

- [49] A. Back, J. Guckenheimer, M. R. Myers, F. J. Wicklin and P. A. Worfolk, *DsTool*.
(Ikus <http://www.geom.umn.edu/software/dstool/>)

Ekuazio diferentzialen historia

Irakurleak ondoko artxiboa erabil dezake:

John J. O'Connor and Edmund F. Robertson, *MacTutor History of Mathematics archive*, School of Mathematical and Computational Sciences, University of St Andrews, Scotland.

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

Bertan bibliografia ugaria aurki daiteke, baita biografia labur anitz ere.

AURKIBIDE ALFABETIKOA

- !, *ikus* faktorial funtzioa
- !!, *ikus* azpifaktorial funtzioa
- ' (x -rekiko deribatua), 1
- $\dot{}$ (t -rekiko deribatua), 2
- $[x]$, *ikus* parte osoa
- \oint , *ikus* Cauchy-ren balio nagusia
- $\mathbf{0}$, *ikus* matrize nulua
- $\mathbf{1}$, *ikus* identitate matrizea
- Γ , *ikus* Euler-en gamma funtzioa
- Ω , *ikus* zenbaki harmonikoa
- γ , *ikus* Euler eta Mascheroni-ren konstantea
- δ , *ikus* Dirac-en delta eta Kronecker-en delta
- θ , *ikus* Heaviside-ren funtzioa

- A, *ikus* eragile lineala
- Abel, 49
- Abel-en formula, *ikus* Liouville-ren formula
- abiadura, 10
 - muga-abiadura, 41
- abiadura-eremua, 80, 167
- Abraham, 38
- Abraham eta Lorentz-en ekuazio diferentziala, 38
- absidea, 29, 34
- Adams, 157
- Adams eta Bashforth-en metodoa, 157
- Adams eta Moulton-en metodoa, 157
- Adams, Bashforth eta Moulton-en metodoa, 157, 261
- Adams-en metodoa, 157
- adarkatze-diagrama, 165, 195, 211, 310
- adarkatze-parametroa, 165, 208
- adarkatzea, 165, 195
 - Hopf-en adarkatzea, 195, 198, 199
- aldaezintasuna
 - eskala-aldaezintasuna, 25, 36, 42, 43, 205
 - translazio-aldaezintasuna, 41, 271
- aldagai independentea, 1
- aldagai-aldaketa, 9, 24–27, 43, 50, 52, 108, 139, 271, 272, 279
- aldagaia
 - dimentsio gabeko aldagaia, 7, 121, 185
- aldagaien banantzearen metodoa, 8
- aldaketa
 - aldagai-aldaketa, 9, 24–27, 43, 50, 52, 108, 139, 271, 272, 279
 - eskala-aldaketa, 104
- alderantzizko eragilea, 67, 271
- alderantzizko eragilearen metodoa, 271
- angelua
 - Euler-en angelua, 199
- apozentroa, 29
- araua
 - l'Hôpital-en araua, 160
 - Leibniz-en araua, 88
- argumentua
 - zenbaki konplexuaren argumentua, 275
- argumentuaren balio nagusia, 275
- askatasun-graduaren kopurua, 79
- ate funtzioa, 60
- atzerapen-puntua, 150
- azpifaktorial funtzioa, 113, 281–282
- aztarna, 96, 171

- Bachmann eta Landau-ren ikurra, *ikus* magnitude-ordenaren ikurra
- bakartasuna, 10
- Baker, Campbell eta Hausdorff-en formula, 97
- baldintza
 - hastapen-baldintza, 6, 7
 - Lipschitz-en baldintza, 235, 239
 - mugalde-baldintza, 7, 215
- balio nagusia
 - argumentuaren balio nagusia, 275
 - Cauchy-ren balio nagusia, 101, 277, 282
- balio propioa, 92, 258
- baliokidetasun topologikoa, 177
- banaketa, *ikus* funtzio orokortua
- banantzailea, 185
- barietate egonkorra, 174, 183, 185, 186, 206, 208
- barietate ezegonkorra, 174, 185, 186, 206
- batuketa
 - serieen batuketa, 136, 259
- bektore nulua, 84
- bektore propioa, 92, 258
- Bernoulli, 26
- Bernoulli-ren ekuazio diferentziala, 26, 266
- berretura-seriea, 117, 142
- berretzaile karakteristikoa, 63, 92
- berretzailea
 - Floquet-en berretzailea, 196
 - Liapunov-en berretzailea, 201, 208
- Bertrand, 210
- Bertrand-en teorema, 210
- Bessel, 124
- Bessel-en ekuazio diferentziala, 72, 113, 124–127, 135, 139, 222, 270
- Bessel-en funtzioa, 113, 137, 138, 285–286

- bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua, 286, 313
 bigarren motako Bessel-en funtzioa, 126, 285
 lehen motako Bessel-en funtzio aldatua, 285, 313
 lehen motako Bessel-en funtzioa, 126, 285
- bi denborako metodoa, 147, 160
- bi puntutako funtzioa
 Green-en bi puntutako funtzioa, 71, 225
- biderkatzailea, 20
- biderketa eskalarra, 216
- bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua, 313
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 51, 117
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal osoa, 117
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal zehatza, 74
- Binet-en ekuazio diferentziala, 34
- binomioa
 Newton-en binomioa, 281, 287, 307
- Bulirsch eta Stoer-en metodoa, 158
- Burgers-en ekuazio diferentziala, 75
- Cantor, 199
- Cantor-en multzoa, 199, 203
 multzo hirutarra, 208
- Cardano, 141
- Carson eta Heaviside-ren transformazioa, 101
- Cauchy, 55
- Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala, 69–70, 119, 132, 269, 271
- Cauchy eta Euler-en sistema, 98, 273
- Cauchy-ren balio nagusia, 101, 277, 282
- Cauchy-ren ekuazio diferentziala, *ikus* Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala
- Cauchy-ren metodoa, 55, 89, 232, 271
- Cauchy-ren problema, 6
- Cayley, 91
- Cayley eta Hamilton-en teorema, 91
- Chebyshev, 138
- Chebyshev-en ekuazio diferentziala, 270, 289
- Chebyshev-en polinomioa, 138, 287, 289
- Ci, *ikus* kosinu-integral funtzioa
- Clairaut, 32
- Clairaut-en ekuazio diferentziala, 32, 246, 268
- D, *ikus* deribazio-eragilea
- d'Alembert, 50
- d'Alembert-en metodoa, 50, 247
- de Moivre, 276
- de Moivre-ren teorema, 276
- definizio-tartea, 10
- delta
 Dirac-en delta, 58, 61, 71, 73, 89, 105, 108–110, 113, 114, 225–227, 231, 248, 308, 313
 Kronecker-en delta, 217
- denbora geldoa, 147, 149
- denbora lasterra, 148
- deribatu gurutzatuak, 17
- deribatu logaritmikoa, 133
- deribatu orokortua, 57
- deribatu partzialetako ekuazio diferentziala, 2
- deribazio-eragilea, 46, 62
- deribazio-metodoa, 34, 71
- deribazio-polinomioa, 62
- Descartes, 180
- Descartes-en orria, 180
- desintegrazio erradioaktiboa, 98
- deskonposizioa
 frakzio sinpleetako deskonposizioa, 106
- desplazamenduaren teorema, 104
- determinantea
 Vandermonde-ren determinantea, 306
 Wronski-ren determinantea, *ikus* wronskiarr
- diagrama
 adarkatze-diagrama, 165, 195, 211, 310
 adarkatze-parametroa, 208
- dibergentzia, 170, 171
- diferentzia finituetako ekuazioa, 74, 210, 263
- diferentzial zehatza, 83
- dimentsio fraktala, 208
- dimentsio gabeko aldagaia, 7, 121, 185
- dimentsioa, 208
- dinamika kualitatiboa, 163
- Dirac, 58
- Dirac-en delta, 58–60, 61, 71, 73, 89, 105, 108–110, 113, 114, 225–227, 231, 248, 308, 313
- Dirac-en orratza, 231
- diskretizazioa, 151
- diskriminatzailea, 171
- distantzia, 217
- Duffing-en ekuazio diferentziala, 203, 208
- Duffing-en erakarlea, 204
- ebazpen-metodoa, 7–9, 80, 91, 94, 265
- efektua
 tximeleta efektua, 201
- egonkortasun asintotikoa, 96, 165
- egonkortasun lineala, 91, 171–180
- egonkortasun linealaren metodoa, 171
- egonkortasuna, 164
- Ei, *ikus* esponenzial-integral funtzioa
- Einstein, 3
- Einstein-en ekuazioak, 3
- ekuazio batera laburtzea, 81
- ekuazio diferentzial adjuntua, 218
- ekuazio diferentzial arrunta, 1
- ekuazio diferentzial atzeratua, 115
- ekuazio diferentzial autonomoa, 41–42, 79, 167, 271
- ekuazio diferentzial banangarria, 21, 266
- ekuazio diferentzial hipergeometrikoko baterakorra, 140
- ekuazio diferentzial hipergeometrikoa, 140, 270
- ekuazio diferentzial homogeneoa, 24–25, 36, 43, 267
- ekuazio diferentzial isobarikoa, 25, 36, 267

- ekuazio diferentzial lineal ezosoa, *ikus* ekuazio diferentzial lineal homogeneoa
- ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 23, 46–52, 269
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 51, 72, 117, 269
 - koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 269
- ekuazio diferentzial lineal inhomogeneoa, *ikus* ekuazio diferentzial lineal osoa
- ekuazio diferentzial lineal osoa, 23, 46, 52–56, 269, 271
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal osoa, 72, 117
- ekuazio diferentzial lineala, 3, 7, 23–24, 46, 266, 269
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 51, 72, 117, 269
 - koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal homogeneoa, 62–64
 - koefiziente konstanteetako ekuazio diferentzial lineal osoa, 64–69
- ekuazio diferentzial singularra, 150
- ekuazio diferentzial zehatza, 17–19, 44, 266, 272
- bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal zehatza, 74
- ekuazio diferentzial zurruna, 159
- ekuazio diferentziala, 1–3
- $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 41, 271
 - $F(y') = 0$, 31, 268
 - $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, 41, 271
 - $x = g(y')$, 31, 268
 - $y' = f(ax + by + c)$, 25, 267
 - $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$, 25–26, 267
 - $y = g(y')$, 31, 268
- Abraham eta Lorentz-en ekuazio diferentziala, 38
- aldagai bananduetako ekuazio diferentziala, 19, 266
- Bernoulli-ren ekuazio diferentziala, 26, 266
- Bessel-en ekuazio diferentzial aldatua, 286
- Bessel-en ekuazio diferentziala, 72, 113, 124, 135, 139, 222, 270
- Binet-en ekuazio diferentziala, 34
- Burgers-en ekuazio diferentziala, 75
- Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala, 69, 119, 132, 269, 271
- Cauchy-ren ekuazio diferentziala, *ikus* Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala
- Chebyshev-en ekuazio diferentziala, 270, 289
- Clairaut-en ekuazio diferentziala, 32, 268
- deribatu askatugabeko ekuazio diferentziala, 28–33, 268
- deribatu partzialetako ekuazio diferentziala, 2
- Duffing-en ekuazio diferentziala, 203, 208
- ekuazio diferentzial x -rekiko ekidimentsionala, 42–43, 69, 272
- ekuazio diferentzial y -rekiko ekidimentsionala, 43, 272
- esangura geometrikoa, 13, 39, 77
- Euler-en ekuazio diferentziala, *ikus* Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala
- forma kanonikoa, 78, 83, 242
- forma normala, 6, 15, 40, 52, 78, 242
- forma simetrikoa, 15
- Friedmann-en ekuazio diferentziala, 37
- Gauss-en ekuazio diferentzial hipergeometrikoa, 140, 270
- Hermite-ren ekuazio diferentziala, 121, 219, 270, 290, 312
- kongruentziaren ekuazio diferentziala, 77
- Kummer-en ekuazio diferentziala, 270
- kurba-familia baten ekuazioa diferentziala, 14, 39
- Lagrange-ren ekuazio diferentziala, 33, 268
- Laguerre-ren ekuazio diferentziala, 219, 270, 291, 312
- Legendre-ren ekuazio diferentziala, 219, 232, 270, 292, 312
- Liénard-en ekuazio diferentziala, 196
- menpeko aldagai gabeko ekuazio diferentziala, 19, 41
- ordena, 3
- Riccati-ren ekuazio diferentziala, 26, 72, 160, 266
- istema baten ekuazio diferentzial baliokidea, 40
- soluzio motak, 3
- soluzioa, 3–4
- van der Pol-en ekuazio diferentziala, 146, 196, 197
- Verhulst-en ekuazio diferentziala, 206
- ekuazio diferentzialen sistema, 2
- ekuazio finitua, 1, 4
- ekuazio funtzionala, 3, 230
- ekuazio homogeneoaren ebazpena, 50
- ekuazio integrala, 113
- Volterra-ren ekuazio integrala, 113
- ekuazio karakteristiko, 92
- ekuazioa
- diferentzia finituetako ekuazioa, 74, 210, 263
 - indize-ekuazioa, 125, 129
 - Newton-en ekuazioa, 3
 - Schrödinger-en ekuazioa, 2, 121, 149, 215
- ekuazioak
- Einstein-en ekuazioak, 3
 - Hamilton-en ekuazio kanonikoak, 170
 - Lotka eta Volterra-ren ekuazioak, 209
 - Maxwell-en ekuazioak, 3
- energia mekanikoa, 8, 29, 42, 44, 183
- energia mekanikoaren kontserbazio-legea, 8, 29, 42, 44, 183
- eragile autoadjuntua, 219
- eragile deuseztatzailea, 65
- eragile formalki autoadjuntua, 219

- eragile lineala, 49, 62, 84, 89, 131, 218–220
- eragilea
- alderantzizko eragilea, 67
 - alderantzizko eragilearen metodoa, 271
 - deribazio-eragilea, 46, 62
 - Lagrange-ren adjuntu formal, 218
- erakarle bitxia, 199, 203, 205
- erakarle kaotikoa, 164, 200, 203, 204, 255
- erakarle, 165, 199
- Duffing-en erakarle, 204
 - Lorenz-en erakarle, 199, 255
 - Rössler-en erakarle, 203
- erakarpen-osina, 208
- erakarpen-osinen arteko muga, 208
- eredu kosmologiko estandarra, 37
- eredua
- harrapari eta harrapakinaren eredua, 209
 - Landau-ren eredua, 199
 - Volterra-ren eredua, 209
- eremu bektoriala, 18, 20, 165, 170, 171, 182
- eremu eskalarra, 18
- eremu integragarria, 20
- eremu kontserbakorra, 18
- eremua
- abiadura-eremua, 80, 167
 - norabide-eremua, 15
- erf, *ikus* errore-funtzioa
- erfc, *ikus* errore-funtzio osagarria
- erfi, *ikus* errore-funtzio irudikaria
- erlatibitate berezia, 36, 73
- erlatibitate orokorra, 73, 211
- erlazioa
- errepikapen-erlazioa, 124, 127, 285
- erradioa
- konbergentzia-erradioa, 117
- errepikapen-erlazioa, 121–124, 127, 133–136, 263, 281, 285, 289–292
- hiru puntutako errepikapena, 122
- erresonantzia, 66, 147
- erro karakteristikoa, 63, 92
- erro nagusia, 276
- errore globala, 152
- errore lokala, 152
- errore-funtzio irudikaria, 279
- errore-funtzio osagarria, 279
- errore-funtzioa, 35, 112, 137, 279
- errorea
- biribiltze-errorea, 152
 - diskretizazio-errorea, 152
 - hurbilketa-errorea, 152
 - mozte-errorea, 152
- eskala anitzeko metodoa, 147
- eskala handiko egonkortasuna, 165
- eskala-aldaezintasuna, 25, 36, 42, 43, 205
- eskala-aldaketa, 25, 104
- eskuin-limitea, 111
- espazio banangarria, 217
- espazio egonkorra, 173
- espazio ezegonkorra, 174
- espazio osoa, 217
- espazioa
- $L^2(a, b)$, 217
 - $L^2(a, b; d\mu)$, 217
 - $F(\alpha)$, 102
 - ekuazio lineal homogeenaren soluzio-espazioa, 47
 - fase-espazioa, 79, 166
 - Hilbert-en espazioa, 217
 - sistema lineal homogeenaren soluzio-espazioa, 85
- espektroa, 222
- Fourier-en espektroa, 231
- esponentzial-integral funtzioa, 35, 112, 137, 282–283
- esponentziala
- matrize baten esponentziala, 90, 258
- estrapolazio arrazionala, 158
- estrapolazio-metodoa, 158
- estrapolazioa
- Neville-ren estrapolazioa, 158
 - Richardson-en estrapolazioa, 158
- estrofoidea, 37
- eszentrikotasuna, 29
- Euler, 63
- Euler eta Mascheroni-ren konstantea, 282
- Euler-en angelua, 199
- Euler-en ekuazio diferentziala, *ikus* Cauchy eta Euler-en ekuazio diferentziala
- Euler-en formula, 276
- Euler-en gamma funtzioa, 112, 137, 280–281
- Euler-en konstantea, *ikus* Euler eta Mascheroni-ren konstantea
- Euler-en metodo aldatua, 154
- Euler-en metodo hobetua, 153
- Euler-en metodo inplizitua, 159
- Euler-en metodoa, 63, 74, 91, 151–152, 269, 273
- Euler-en método, 272
- existentzia, 7
- existentzia eta bakartasunaren teorema, 7, 11, 16, 27, 40, 46–48, 78, 145, 166, 201, 210, 235
- existentzia globala, 239
- ezegonkortasuna, 164
- ezker-limitea, 111
- \mathcal{F} , *ikus* Fourier-en transformazioa
- $F(\alpha)$ espazioa, 102
- $f(t + 0)$, *ikus* eskuin-limitea
- $f(t - 0)$, *ikus* ezker-limitea
- faktore integratzaile berezia, 21, 267
- faktore integratzailea, 19–23, 44, 74
- faktorial funtzioa, 136, 280, 281
- familia
- kurba-familia, 13
- fase-espazioa, 79, 166

- fase-ibilbidea, 79, 166, 180, 191
fase-orbita, 166
fenomenoa
 Gibbs-en fenomenoa, 230, 262
Ferrari, 141
Fibonacci, 74
Fibonacci-ren segida, 74, 263
Fibonacci-ren zenbakia, 74
Floquet-en berretzailea, 196
Floquet-en teoria, 196
fokua, 175
forma kartesiarra
 zenbaki konplexuaren forma kartesiarra, 275
forma definitu negatiboa, 207
forma definitu positiboa, 207
forma definitua, 207
forma normala, 6, 15, 40, 52
forma polarra
 zenbaki konplexuaren forma polarra, 275
forma simetrikoa, 15, 17
formula
 Abel-en formula, *ikus* Liouville-ren formula
 Baker, Campbell eta Hausdorff-en formula, 97
 Euler-en formula, 276
 Fourier-en alderantzketak-formula, 115
 Glauber-en formula, 97
 Green-en formula, 218
 Heaviside-ren garapen-formula, 106
 Liouville-ren formula, 49, 96
 lotura-formula, 150
 Ostrogradski-ren formula, *ikus* Liouville-ren formula
 Poisson-en formula, 231
 Rodrigues-en formula, 124, 289–292
 Stirling-en formula, 280
Fourier, 222
Fourier-en alderantzizko transformazioa, 114, 115
Fourier-en espektroa, 231
Fourier-en kosinu-seriea, 229
Fourier-en seriaren deribatua, 230
Fourier-en serie konplexua, 231
Fourier-en serie moztua, 230, 262
Fourier-en seriea, 223, 261
Fourier-en sinu-seriea, 222, 225
Fourier-en transformatuaren taulak, 299–301
Fourier-en transformazioa, 101, 114, 115, 231, 247, 299
 Fourier-en alderantzizko transformazioa, 114, 115
fraktala, 199, 203, 205, 209
frakzio sinpleetako deskonposizioa, 106
Fredholm, 225
Fredholm-en hautabidearen teorema, 225
Friedmann-en ekuazio diferentziala, 37
Frobenius, 119
Frobenius-en metodoa, 128
Frobenius-en seriea, 119
funtzio analitikoa, 118
funtzio batugarria, 59
funtzio berezia, 8, 117, 259, 275
funtzio eliptikoa, 284
funtzio erregularra, 17
funtzio hipergeometriko baterakorra, 140, *ikus* Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorra
funtzio hipergeometrikoa, *ikus* Gauss-en funtzio hipergeometrikoa
funtzio homogeneoa, 24
funtzio orokortua, 57–62, 71, 73, 89, 105, 108–110, 113, 114, 225–227, 231, 248, 308, 313
funtzio osagarria, 53
funtzio zatikako jarraituak, 111
funtzioa
 ate funtzioa, 60
 azpifaktoriala, 281
 Bessel-en funtzioa, 113, 137, 138, 285
 bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua, 286, 313
 bigarren motako Bessel-en funtzioa, 126, 285
 Ci, *ikus* kosinu-integrala
 Dirac-en delta, 58
 Ei, *ikus* esponentzial-integrala
 errore-funtzioa, 137, 279
 esponentzial-integrala, 112, 137, 282
 Euler-en gamma, 112, 137, 280
 Gauss-en funtzio hipergeometrikoa, 137, 140, 287
 Green-en funtzioa, 62, 71, 225
 Hamilton-en funtzioa, *ikus* hamiltondarra
 Heaviside-ren funtzioa, 57, 60, 61, 89, 102, 104, 108–111, 114, 223, 227, 228, 248, 262, 313
 indize-funtzioa, 129
 integral eliptiko osoa, 284
 integral eliptikoa, 9, 283
 kosinu-integrala, 112, 283
 Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorra, 123, 137, 140, 286
 Lambert-en funtzioa, 21, 278
 lehen motako Bessel-en funtzio aldatua, 285, 313
 lehen motako Bessel-en funtzioa, 126, 285
 Liapunov-en funtzioa, 187, 188, 207
 Newmann-en funtzioa, 126, 285
 oinarrizko funtzioa, 8, 117
 Si, *ikus* sinu-integrala
 sinu-integrala, 112, 283
 sistemaren funtzioa, 110
 transferentzia-funtzioa, 110
 unitate-bulkada, 58
 unitate-maila, 57
 Weber-en funtzioa, 126, 285
 Weierstrass-en funtzioa, 230
 zeinua, 73
 zerra funtzioa, 230
gainazal ortogonal, 20
gainezarmenaren printzipioa, 3, 47, 52, 84, 85

- Gauss, 137
 Gauss-en ekuazio diferentzial hipergeometrikoa, 140, 270
 Gauss-en funtzio hipergeometrikoa, 137, 140, 287
 Gauss-en integrala, 315
 Gibbs, 230
 Gibbs-en fenomenoa, 230, 262
 Glauber-en formula, 97
 goierpina, 37
 Gragg-en metodoa, 158
 Green, 218
 Green-en bi puntutako funtzioa, 71, 225
 Green-en formula, 218
 Green-en funtzioa, 62, 71, 225–228
 Grobman eta Hartman-en teorema, 177
 gunea, 101
- H_n , *ikus* Hermite-ren polinomioa
 Hamilton, 168
 Hamilton-en ekuazio kanonikoak, 170
 hamiltondarra, 168
 Hankel-en transformazioa, 101
 harrapari eta harrapakinaren eredu, 209
 hastapen-baldintza, 16
 hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra, 200
 hastapen-baldintzen problema, 6, 109
 hazkunde esponontziala, 102
 Heaviside, 57
 Heaviside-ren funtzioa, 57, 60, 61, 89, 102, 104, 108–111, 114, 223, 227, 228, 248, 262, 313
 Heaviside-ren garapen-formula, 106
 Heaviside-ren kalkulu sinbolikoa, 67
 Hermite, 122
 Hermite-ren ekuazio diferentziala, 121, 219, 270, 290, 312
 Hermite-ren polinomioa, 124, 286, 290
 Heun-en metodoa, 153
 higidura-konstantea, *ikus* lehen integrala
 Hilbert, 217
 Hilbert-en espazioa, 217
 Hilbert-en transformazioa, 101
 Hopf, 195
 Hopf-en adarkatzea, 195, 198, 199
 hurbilketa
 limiterako hurbilketa atzeratua, 158
 hurbilketa lineala, 171
 hurbilketarik onena, 229
 hurrenez hurreneko hurbilketen metodoa, 144, 236, 251
- \mathcal{I} , *ikus* indize-funtzioa
 I_ν , *ikus* bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua
 ibilbide ortogonal, 20, 36
 ibilbidea, 209
 fase-ibilbidea, 79, 166, 180, 183, 191
 identitate matrizea, 87
 identitatea
 Lagrange-ren identitatea, 218
 ikurra
 magnitude-ordenaren ikurra, 142
 Pochhammer-en ikurra, 281
 ikuskapenaren metodoa, 10, 26, 53, 134, 242
 Im, *ikus* parte irudikaria
 indar-eremua, 210
 independentzia lineala, 85
 indize bikoitza, 133
 indize-ekuazioa, 125
 indize-funtzioa, 129
 indizea, 119, 125, 129
 infinituko baldintza, 37
 infinituko puntua, 119, 122
 inguratzailea, 27–28, 29, 32, 37, 246, 268, 304, 305
 integral eliptiko osoa, 287
 integral eliptikoa, 9, 283–284
 integrala
 Cauchy-ren balio nagusia, 277
 Gauss-en integrala, 315
 Lebesgue-ren integrala, 58, 217
 lehen integrala, 8, 44, 191, 272, 273
 lerro-integrala, 18
 Riemann-en integrala, 58, 217
 integrazio-urratsa, 151
 interpolazioa, 151
 irudia
 Lissajous-en irudia, 311
 isoklina, 141
 izar-nodoa, 177
- J_ν , *ikus* lehen motako Bessel-en funtzioa
 Jacobi, 108
 jacobiarra, 108, 169
 jariakina, 10
 jariora, 80, 167
 jarraitasuna
 zatikako jarraitasuna, 102
- K_ν , *ikus* bigarren motako Bessel-en funtzio aldatua
 kalkulu sinbolikoa, 8, 91, 93, 136
 Heaviside-ren kalkulu sinbolikoa, 67
 kaos determinista, 163, 197, 199–205
 Kepler, 161
 Kepler-en problema, 29, 30, 34, 161, 211
 koadratura, 8, 19, 21, 25, 37, 44, 50, 51, 56, 71, 72, 117, 145
 zenbakizko koadratura, 151
 koadraturetarako laburtzea, 8, 19, 21, 25, 37, 50, 51, 56, 71, 72, 117, 145
 koefiziente indeterminatuen metodoa, 65, 94, 144, 250, 271, 273
 konbergentzia, 217
 normarekiko konbergentzia, 90, 217
 konbergentzia-erradioa, 117
 konboluzioa, 107–108
 Laplace-ren konboluzioa, 107

- kondarra, 106
 konexio homoklinikoa, 185, 186
 kongruentziaren ekuazio diferentziala, 77
 konikoa, *ikus* sekzio konikoa
 konkomitante bilineala, 218
 konparazioa
 soluzioen konparazioa, 238
 konstantea
 Euler eta Mascheroni-ren konstantea, 282
 konstanteen aldakuntzaren metodoa, 53, 75, 88, 140, 271, 273
 kontserbazio-legea, 8, 29, 42, 44, 82, 183
 korrante-lerroa, 80, 167
 kosinu-integral funtzioa, 112, 283
 Kronecker, 217
 Kronecker-en delta, 217
 Kummer, 140
 Kummer-en ekuazio diferentziala, 270
 Kummer-en funtzio hipergeometriko baterakorra, 123, 137, 140, 286
 kurba
 bigarren mailako kurba, 311
 estrofoidea, 37
 isoklinoa, 141
 kurba gausstarra, 59
 kurba integrala, 14, 40, 78
 kurba konikoa, 311
 kurba-familia, 13, 39
 kurba-familia uniparametrikoa, 13
 kurba-familiaren ekuazio diferentziala, 14, 39
 kurba-kongruentzia, 14, 77
 Kutta, 155

 \mathcal{L} , *ikus* Laplace-ren transformazioa
 L , *ikus* eragile lineala
 L_n , *ikus* Laguerre-ren polinomioa
 l'Hôpital, 160
 l'Hôpital-en araua, 160
 laburtzea
 ekuazio batera laburtzea, 81
 Lagrange, 33
 Lagrange-ren ekuazio diferentziala, 33, 268
 Lagrange-ren eragile adjuntu formala, 218
 Lagrange-ren identitatea, 218
 Lagrange-ren printzipioa, 184
 Lagrange-ren teorema, 184
 Laguerre, 139
 Laguerre-ren ekuazio diferentziala, 219, 270, 291, 312
 Laguerre-ren polinomio orokortua, 139, 291
 Laguerre-ren polinomioa, 139, 286, 291
 Lambert-en funtzioa, 21, 278–279
 Landau, 199
 Landau-ren eredua, 199
 Landau-ren ikurra, *ikus* magnitude-ordenaren ikurra
 Laplace, 102
 Laplace-ren konboluzioa, 107
 Laplace-ren transformatuen taulak, 293–297
 Laplace-ren transformazioa, 39, 101, 103, 247, 265, 293
 Laplace-ren transformazioaren propietateak, 103
 Lebesgue, 58
 Lebesgue-ren integrala, 58, 217
 legea
 kontserbazio-legea, 8, 29, 42, 44, 82, 183
 Newton-en bigarren legea, 167
 Torricelli-ren legea, 11
 Legendre, 138
 Legendre-ren ekuazio diferentziala, 219, 232, 270, 292, 312
 Legendre-ren polinomioa, 138, 232, 287, 292
 lehen hurbilketa, 171
 lehen integrala, 8, 44, 81–83, 191, 272, 273
 lehen motako Bessel-en funtzio aldatua, 285, 313
 Leibniz, 88
 Leibniz-en araua, 88
 Lerch, 106
 Lerch-en teorema, 106
 lerro ekuipotenziala, 18, 20
 lerro-integrala, 18
 lerroa
 korrante-lerroa, 80, 167
 Levinson eta Smith-en teorema, 196
 Liapunov, 164
 Liapunov-en berretzailea, 201, 208
 Liapunov-en bigarren metodoa, 187
 Liapunov-en funtzioa, 187–192, 207
 Liapunov-en lehen metodoa, 171
 Liapunov-en metodo zuzena, 187
 limite orokortua, 59
 limitea
 eskuin-limitea, 111
 ezker-limitea, 111
 limiterako hurbilketa atzeratua, 158
 Liouville, 52
 Liouville-ren formula, 49, 96
 Liouville-ren teorema, 170, 193
 Liouville-ren transformazioa, 52, 121
 Lipschitz, 235
 Lipschitz-en baldintza, 235, 239
 Lissajous, 311
 Lissajous-en irudia, 311
 Liénard-en ekuazio diferentziala, 196
 Liénard-en teorema, 196
 Lorentz, 38
 Lorenz-en erakarlea, 199–201, 255
 Lorenz-en sistema, 199, 255
 Lotka eta Volterra-ren ekuazioak, 209
 lotura-formula, 150

 magnitude-ordena, 160
 marruskadura, 10
 masa aldakorra, 36
 masa erlatibista, 36
 matrize baten esponenziala, 90, 258

- matrize jacobiarra, 180, 182
 matrize nulua, 86
 matrize-notazioa, 84
 matrizea
 identitate matrizea, 87
 oinarrizko matrize kanonikoa, 87
 oinarrizko matrizea, 86–87, 272
 sistemaren matrizea, 171
 Maxwell, 3
 Maxwell-en ekuazioak, 3
 Mellin-en transformazioa, 101
 mendate ez-lineala, 206
 mendatea, 174
 mendetako gaia, 147
 menpeko aldagaia, 1
 menpekotasun lineala, 44
 menpekotasun sentikorra
 hastapen-baldintzen menpekotasun sentikorra, 200
 metodo analitiko zehatza, 265
 metodo aurreale-zuzentzailea, 156–157
 metodo grafikoa, 8, 141, 166, 195
 metodo hurbildu analitikoa, 8, 250
 metodo hurbildua, 8
 metodo inplizitua, 159
 metodo kualitatiboa, 8, 190
 metodo kuantitatiboa, 8
 metodo sinbolikoa, 8, 102
 metodo zehatza, 7, 241, 265
 metodoa
 Adams eta Bashforth-en metodoa, 157
 Adams eta Moulton-en metodoa, 157
 Adams, Bashforth eta Moulton-en metodoa, 157, 261
 Adams-en metodoa, 157
 aldagaien banantzearen metodoa, 8
 alderantzizko eragilearen metodoa, 67–69, 271
 bi denborako metodoa, 147, 160
 Bulirsch eta Stoer-en metodoa, 158
 Cauchy-ren metodoa, 55, 89, 232, 271
 d'Alembert-en metodoa, 50, 247
 deribazio-metodoa, 34, 71
 ebazpen-metodoa, 7, 80, 91, 94
 egonkortasun linealaren metodoa, 171
 ekuazio batera laburtzea, 81
 eragile deuseztatzailearen metodoa, 65
 erdiko puntuaren metodo aldatua, 158
 erdiko puntuaren metodoa, 154
 eskala anitzeko metodoa, 147
 estrapolazio-metodoa, 158
 Euler-en metodo aldatua, 154
 Euler-en metodo hobetua, 153
 Euler-en metodo inplizitua, 159
 Euler-en metodoa, 63, 74, 91, 151, 269, 273
 Frobenius-en metodoa, 128
 Gragg-en metodoa, 158
 Heun-en metodoa, 153
 hurrenez hurreneko hurbilketen metodoa, 144, 236, 251
 ikuskapenaren metodoa, 10, 26, 53, 134, 242
 koefiziente indeterminatuen metodoa, 65–66, 94, 144, 250, 271, 273
 konstanteen aldakuntzaren metodoa, 53, 75, 88, 140, 271, 273
 Liapunov-en bigarren metodoa, 187
 Liapunov-en lehen metodoa, 171
 Liapunov-en metodo zuzena, 187
 ordena-beheratzearen metodoa, 40–44, 134, 269, 271
 parabolen metodoa, 155
 perturbazio-metodoa, 145–150, 252
 Picard-en metodoa, 144, 236, 251
 Poincaré eta Lindstedt-en metodoa, 149, 161
 poligonoaren metodo hobetua, 154
 poligonoaren metodoa, 151
 Romberg-en metodoa, 158
 Runge eta Kutta-ren metodoa, 155, 260
 Simpson-en metodoa, 155
 Taylor-en garapena, 143, 250
 transformazio-metodoa, 24
 trapezioen metodoa, 153
 urrats anitzeko metodoa, 156
 urrats bakarreko metodoa, 156
 zenbakizko metodoa, 8, 150–159, 255
 metodoaren ordena, 152
 modulua
 zenbaki konplexuaren modulua, 275
 momentu angeluarra, 29
 momentu angeluarraren kontserbazio-legea, 29
 muga
 erakarpen-osinen arteko muga, 208
 muga-abiadura, 41
 muga-ziklo erdiegonkorra, 196
 muga-ziklo ezegonkorra, 196
 muga-zikloa, 148, 164, 194–197, 208
 mugalde-baldintza, 7, 215
 mugalde-baldintzen problema, 7, 215
 multzo aldaezina, 164, 199
 multzo ortonormala, 217
 multzo osoa, 217
 multzoa
 Cantor-en multzoa, 199, 203
 multzo hirutarra, 208
 método
 Euler-en método, 272
 neurria, 216
 Neville-ren estrapolazioa, 158
 Newmann-en funtzioa, 126, 285
 Newton, 2
 Newton-en bigarren legea, 167
 Newton-en binomioa, 281, 287, 307
 Newton-en ekuazioa, 3
 nodo endekatua, 178

- nodo propioa, 177
 nodoa, 172
 izar-nodoa, 177
 norabide-eremua, 15
 norma, 217
 normarekiko konbergentzia, 90
 notazio matematikoa, vii
 notazioa, 78
 matrize-notazioa, 84
- oinarrizko funtzioa, 8, 117
 oinarrizko matrize kanonikoa, 87
 oinarrizko matrizea, 86–87, 272
 oinarrizko problema, 61, 71
 oinarrizko soluzio-sistema, 48, 49
 oinarrizko soluzioa, 61–62, 89, 226
 okinaren transformazioa, 202
 orbita, 29
 fase-orbita, 166
 orbita bornatua, 210
 orbita homoklinikoa, 185, 186
 orbita itxia, 194
 orbita periodikoa, 148, 164, 185, 194, 210
 orbita zirkularra, 211, 212
 ordena
 magnitute-ordena, 160
 magnitute-ordenaren ikurra, 142
 metodoaren ordena, 152
 ordena esponenziala, 102
 ordena-beheratzea, 40, 271
 ordena-beheratzearen metodoa, 40, 134, 269, 271
 oreka-puntu bakartua, 164
 oreka-puntu ez-hiperbolikoa, 176, 179–183, 192, 211
 oreka-puntua, 164
 orratza
 Dirac-en orratza, 231
 orria
 Descartes-en orria, 180
 ortogonaltasuna, 217
 osina, 208
 erakarpen-osina, 208
 Ostrogradski, 49
 Ostrogradski-ren formula, *ikus* Liouville-ren formula
 osziladore ez-lineala, 191, 193
 osziladore harmoniko bortxatua, 56, 61, 73, 110
 portaera iragankorra, 73
 portaera iraunkorra, 73
 osziladore harmoniko indargetua, 73, 160, 168, 181, 182
 osziladore harmoniko kuantikoa, 121
 osziladore harmonikoa, 3, 10, 34, 48, 71, 121, 168, 181, 183, 184, 186, 310
 osziladore orokorra, 196
 osziladore quasiharmonikoa, 161
 osziladorea
 van der Pol-en osziladorea, 146, 196, 197, 252
- $P(D)$, *ikus* deribazio-polinomioa
 \mathcal{P} , *ikus* konkomitante bilineala
 P_n , *ikus* Legendre-ren polinomioa
 parametro txikia, 145, 149, 161
 parametroa
 adarkatze-parametroa, 165
 Parseval, 230
 Parseval-en teorema, 115, 229
 parte erreala
 zenbaki konplexuaren parte erreala, 275
 parte irudikaria
 zenbaki konplexuaren parte irudikaria, 275
 parte osoa, 230, 289
 Peano, 7
 Peano-ren teorema, 236
 pendulua, 1, 8, 11, 164, 168, 171, 185, 201
 periodikotasuna, 199
 perizentroatu, 29
 perturbazio erregularra, 146, 160, 252
 perturbazioa, 145
 Picard, 144
 Picard-en metodoa, 144–145, 251
 Picard-en teorema, 235
 pisua, 216, 288–292
 Pochhammer-en ikurra, 281
 Poincaré, 163
 Poincaré eta Bendixson-en teorema, 196
 Poincaré eta Lindstedt-en metodoa, 149, 161
 Poincaré-ren estroboskopio-sekzioa, 204
 Poincaré-ren sekzioa, 198
 Poisson, 231
 Poisson-en formula, 231
 poligonoaren metodo hobetua, 154
 poligonoaren metodoa, 151
 polinomio karakteristikoa, 62
 polinomio orokortua
 Laguerre-ren polinomio orokortua, 139
 polinomio ortogonal, 288–292
 polinomioa
 Chebyshev-en polinomioa, 138, 287, 289
 deribazio-polinomioa, 62
 Hermite-ren polinomioa, 124, 286, 290
 Laguerre-ren polinomio orokortua, 291
 Laguerre-ren polinomioa, 139, 286, 291
 Legendre-ren polinomioa, 138, 232, 287, 292
 poloa, 119
 potentzial harmonikoa, 210
 potentzial newtondarra, 210
 potentzial zentrala, 210
 potentziala, 18
 printzipioa
 gainezarmenaren printzipioa, 47, 52, 84, 85
 Lagrange-ren printzipioa, 184
 problema
 Cauchy-ren problema, 6
 hastapen-baldintzen problema, 6, 16, 109

- Kepler-en problema, 29, 30, 34, 161, 211
 mugalde-baldintzen problema, 7, 71, 215
 oinarrizko problema, 61
 Sturm eta Liouville-ren problema, 219
 erregularra, 220
 inhomogeneoa, 224
 periodikoa, 220
 singularra, 220
- pultsu gausstarra, 59
 puntu aknodala, 28
 puntu anizkoitza, 28, 37
 puntu arrunta, 119, 120, 135
 puntu egonkorra, *ikus* oreka-puntua
 puntu espirala, 175
 puntu finkoa, *ikus* oreka-puntua
 puntu kritikoa, *ikus* oreka-puntua
 puntu singularra, 17, 119
 puntu singular erregularra, 119, 128
 puntu singular irregularra, 119
- puntua
 atzerapen-puntua, 150
 goierpina, 185
 indefinituko puntua, 119, 122
 oreka-puntu bakartua, 164
 oreka-puntua, 164
 pausaguneko-puntua, *ikus* oreka-puntua
- quasipolinomioa, 63, 271, 273
- Re, *ikus* parte erreala
 Riccati, 26
 Riccati-ren ekuazio diferentziala, 26–27, 72, 160, 266
 Richardson, 158
 Richardson-en estrapolazioa, 158
 Riemann, 58
 Riemann-en integrala, 58, 217
 RL zirkuitua, 36
 RLC zirkuitua, 61, 97, 110
 Robertson eta Walker-en unibertsoa, 37
 Rodrigues, 124
 Rodrigues-en formula, 124, 289–292
 Romberg-en metodoa, 158
 Runge, 155
 Runge eta Kutta-ren metodoa, 155–156, 260
 Rössler-en erakarlea, 203
 Rössler-en sistema, 202, 255
- Schrödinger, 2
 Schrödinger-en ekuazioa, 2, 121, 149, 215
 Schwarz-en teorema, 17
 Schwarzschild, 212
- segida
 Fibonacci-ren segida, 74, 263
- sektzio konikoa, 311
 sektzioa
 Poincaré-ren estroboskopio-sektzioa, 204
 Poincaré-ren sektzioa, 198
- semilatus rectum parametroa, 29, 211
 serie binomikoa, 113, 137, 281, 287
 serie geometrikoa, 287
 serie harmonikoa, 283
- seriea
 berretura-seriea, 117–118, 142
 Fourier-en kosinu-seriea, 229
 Fourier-en serie konplexua, 231
 Fourier-en serie moztua, 230, 262
 Fourier-en seriea, 223, 261
 Fourier-en sinu-seriea, 222, 225
 Frobenius-en seriea, 119
 serieen batuketa, 136, 259
 Taylor-en seriea, 143, 250
- Si, *ikus* sinu-integral funtzioa
 sign, *ikus* zeinu funtzioa
 simetria, 44, 82
 Simpson, 155
 Simpson-en metodoa, 155
 sinu-integral funtzioa, 112, 283
- sistema
 Cauchy eta Euler-en sistema, 98, 273
 Lorenz-en sistema, 199, 255
 Rössler-en sistema, 202, 255
- sistema dinamiko autonomoa, 79–80, 82, 166
 sistema dinamiko diskretua, 210
 sistema dinamiko hamiltondarra, 168, 170, 193
 sistema dinamiko iraungikorra, 170
 sistema dinamiko itzulgarria, 193
 sistema dinamiko kontserbakorra, 168–170, 192
 sistema dinamiko linealdua, 171
 sistema dinamiko quasilineala, 170
 sistema dinamikoa, 79
 sistema lineal homogeneoa, 84–87
 sistema lineal osoa, 84, 88–89
- sistema lineala
 koefiziente konstanteetako sistema lineala, 89–95, 109
 lehen ordenako sistema lineala, 83–95
- sistema mekaniko kontserbakorra, 168, 170, 179, 183, 191
 sistema mekaniko unidimentsionala, 167, 181, 191, 193, 194
- sistemaren funtzioa, 110
 soluzio esplizitua, 4, 257
 soluzio formala, 4, 31
 soluzio inplizitua, 4, 10, 257
 soluzio mota, 3
 soluzio orokorra, 5, 10, 14, 40, 78
 soluzio parametrikoa, 4, 257
 soluzio partikularra, 5, 53, 140, 269
 soluzio periodikoa, 164, 194
 soluzio singularra, 5, 10, 20, 27, 32, 48, 246
 soluzio-familia parametrikoa, 5, 14
- soluzioa
 definizio-tartea, 4

- ekuazio homogeenaren ebazpena, 50
- ekuazio lineal homogeenaren soluzio-espazioa, 47
- infinitu baldintza, 37
- oinarrizko soluzio-sistema, 48, 49, 86
- oinarrizko soluzioa, 61, 89
- sistema lineal homogeenaren soluzio-espazioa, 85
- soluzioaren bakartasuna, 6–7
- soluzioaren definizio-tartea, 4
- soluzioaren existentzia, 5, 7
- soluzioen konparazioa, 238
- Stirling, 280
- Stirling-en formula, 280
- Sturm, 220
- Sturm eta Liouville-ren problema, 219
 - erregularra, 220
 - inhomogeneoa, 224
 - periodikoa, 220
 - singularra, 220
- T_n , *ikus* Chebyshev-ren polinomioa
- tautokronoa, 113
- Taylor, 143
- Taylor-en seriea, 143, 250
- teorema
 - algebraren oinarritzko teorema, 62
 - Bertrand-en teorema, 210
 - Cayley eta Hamilton-en teorema, 91
 - de Moivre-ren teorema, 276
 - desplazamenduaren teorema, 104
 - existentzia eta bakartasunaren teorema, 7, 11, 16, 27, 40, 46–48, 78, 145, 166, 201, 210, 235
 - existentzia globalaren teorema, 239–240
 - Fredholm-en hautabidearen teorema, 225
 - Grobman eta Hartman-en teorema, 177
 - Lagrange-ren teorema, 184
 - Lerch-en teorema, 106
 - Levinson eta Smith-en teorema, 196
 - Liouville-ren teorema, 170, 193
 - Liénard-en teorema, 196
 - Parseval-en teorema, 115, 229
 - Peano-ren teorema, 236
 - Picard-en teorema, 235
 - Poincaré eta Bendixson-en teorema, 196
 - Schwarz-en teorema, 17
- teoria
 - Floquet-en teoria, 196
 - kualitatiboa, 163
- Torricelli, 11
- Torricelli-ren legea, 11
- torua, 198
- tr, *ikus* aztarna
- transferentzia-funtzioa, 110
- transformazio integrala, 101
- transformazio-metodoa, 24
- transformazioa
 - Carson eta Heaviside-ren transformazioa, 101
 - Fourier-en alderantzizko transformazioa, 114, 115
 - Fourier-en transformazioa, 101, 114, 115, 231, 247, 299
 - Hankel-en transformazioa, 101
 - Hilbert-en transformazioa, 101
 - Laplace-ren transformazioa, 39, 101, 103, 247, 265, 293
 - Liouville-ren transformazioa, 52, 121
 - Mellin-en transformazioa, 101
 - okinaren transformazioa, 202
- translazio-aldaezintasuna, 41, 271
- trukatzailea, 97
- tximeleta efektua, 201
- uhin sinusoidal arteztua, 114
- unibertsoa
 - Robertson eta Walker-en unibertsoa, 37
- unitate irudikaria, 275
- urrezko zenbakia, 74
- van der Pol-en ekuazio diferentziala, 146, 196, 197
- van der Pol-en osziladorea, 146–149, 196, 197, 252
- Vandermonde, 306
- Vandermonde-ren determinantea, 306
- Verhulst, 206
- Verhulst-en ekuazio diferentziala, 206
- Volterra, 113
- Volterra-ren ekuazio integrala, 113
- Volterra-ren eredu, 209
- \mathcal{W} , *ikus* Lambert-en funtzioa
- Weber-en funtzioa, 126, 285
- Weierstrass, 230
- Weierstrass-en funtzioa, 230
- WKB metodoa, 149–150, 161
- Wronski, 45
- wronskiarra, 45, 47, 85
- Y_ν , *ikus* bigarren motako Bessel-en funtzioa
- zaticako jarraitasuna, 102
- zeinu funtzioa, 73
- zela-puntua, 174
- zenbaki komplexu konjokatua, 276
- zenbaki harmonikoa, 133, 283
- zenbaki konplexua, 275–276
- zenbaki konplexuaren argumentua, 275
- zenbaki konplexuaren forma kartesiarra, 275
- zenbaki konplexuaren forma polarra, 275
- zenbaki konplexuaren modulua, 275
- zenbaki konplexuaren parte erreala, 275
- zenbaki konplexuaren parte irudikaria, 275
- zenbakia
 - Fibonacci-ren zenbakia, 74
 - urrezko zenbakia, 74
- zenbakizko metodoa, 8
- zentro ez-lineala, 192–194

zentroa, 175

zerra funtzioa, 230

zikloa

 muga-zikloa, 194–197, 208

zirkuitua

 RL zirkuitua, 36

 RLC zirkuitua, 61, 110

zurrunbiloa, 175

HIZTEGIA

Ondoko orrietan hiztegitxo bat bildu dut, irakurleak testu honetan ikasten duena frantsesez, gaztelaniaz eta ingelesez nola esaten den jakin dezan. Hitzak ez ezik, esapideak ere agertzen dira, hauexek baitira askotan zailtasunik handienetakoak. Ez ditut bildu testuan erabiltzen diren hitz eta esapide tekniko guztiak, noski. Izan ere, Matematika eta Fisika hiztegieta agertzen diren hainbat adiera ez daude hemen: batez ere gehienok ezagutzen eta erabiltzen ditugunak kanpoan geratu dira. Halaber, egitura bereko esapideen adibideren bat biltzera mugatu naiz, zeren teoremen izenak, esaterako, nola egiten diren jakiteko, nahikoa baita kasuren bat ikustea (horrexegatik, teorema guztien izenak aurkibide alfabetikoan agertzen dira, ez hemen). Euskaltzaindiaren arauak errespetatzen saiatu naiz, puntu batean izan ezik: $\text{\LaTeX } 2_{\epsilon}$ delakoan lerroz aldatzean marratxoak jartzeko Babel programa nik neuk egin behar izan dut¹, baina oraindik ez dut asmatu lerro-aldaketa hitz elkartu baten marratxoan gertatzen denean hurrengo lerroaren hasieran beste marratxo bat agerrarazteko modua. Euskal Hiztegiaren zati ezagunak ere errespetatu dira. Beraz, «ibilbideen *noranzkoa*», «funtzio *jarraitua*», «*biderketa* eskalarra» eta «*berretura*-seriea» erabili ditut, besteak beste. Jakina, egin ditudan beste aukera guztiak ez dira egokienak izango, gauzak ahalik eta ondoen egiten saiatu arren. Esan beharrik ez dago hemen ere irakurlearen iritzia lagungarria izango litzatekeela.

¹Ikus <http://tp.lc.ehu.es/JMA/basque.html>

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
abiadura-eremu	champ de vitesse	campo de velocidades	velocity field
Abraham eta Lorentz-en ekuazio	équation de Abraham-Lorentz	ecuación de Abraham-Lorentz	Abraham-Lorentz equation
Adams-en metodo	méthode d'Adams	método de Adams	Adams' method
adarkatze	bifurcation	bifurcación	bifurcation
adarkatze-diagrama	diagramme de bifurcation	diagrama de bifurcación	bifurcation diagram
adarkatze-parametro	paramètre de bifurcation	parámetro de bifurcación	bifurcation parameter
aldaezintasun	invariance	invariancia	invariance
aldagai-aldaketa	changement de variables	cambio de variables	change of variables
aldagai bananduetako ekuazio diferentzial	équation différentielle à variables séparées	ecuación diferencial de variables separadas	differential equation with separate variables
aldagai independente	variable indépendant	variable independiente	independent variable
aldagaien banantze	séparation de variables	separación de variables	separation of variables
aldagaien banantzearen metodo	méthode de séparation de variables	método de separación de variables	method of separation of variables
alderantzizko eragile	opérateur inverse	operador inverso	inverse operator
alderantzizko eragilearen metodo	méthode de l'opérateur inverse	método del operador inverso	method of the inverse operator
alderanzkarri	inversible	invertible	invertible
algebraren oinarriko teorema	théorème fondamental de l'algèbre	teorema fundamental del álgebra	fundamental theorem of Algebra
anizkoitz multiplo	multiple	múltiplo	multiple
anizkoiztasun	multiplicité	multiplicidad	multiplicity
arteztu	redressé	rectificado	rectified
askatasun-gradu	degré de liberté	grado de libertad	degree of freedom
ate funtzio	fonction porte	función puerta	door function
atzerapen-puntu	point de rebroussement point tournant	punto de retroceso	turning point
azpifaktorial funtzio	fonction sous-factoriel	función subfactorial	subfactorial function
aztarna	trace	traza	trace
bakartasun	unicité	unicidad	uniqueness
bakoiti	impair	impar	odd
balio ertainaren teorema	théorème de la valeur moyenne	teorema del valor medio	mean-value theorem
balio nagusi	valeur principale	valor principal	principal value
balio propio	valeur propre	valor propio	eigenvalue
baliokidetasun topologiko	équivalence topologique	equivalencia topológica	topological equivalence
banan-banako biuniboko	biunivoque	biunívoco	one-to-one
banaketa	distribution	distribución	distribution

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
barietate	variété	variedad	manifold
barietate egonkor	variété stable	variedad estable	stable manifold
barietate ezegonkor	variété instable	variedad inestable	unstable manifold
batugarri	sommable	sumable	summable
bektore nulu	vecteur nul	vector nulo	null vector
bektore propio	vecteur propre	vector propio	eigenvector
berretura-serie	série de puissances	serie de potencias	power series
berretzaile karakteristikoko	exposant caractéristique	exponente característico	characteristic exponent
Bessel-en ekuazio aldatu	équation modifié de Bessel	ecuación modificada de Bessel	Bessel modified equation
Bessel-en funtzio	fonction de Bessel	función de Bessel	Bessel function
Bessel-en funtzio aldatu	fonction modifié de Bessel	función de Bessel modificada	modified Bessel function
bi denborako metodo	méthode de deux temps	método de los dos tiempos	two-timing method
biderkadura eskalar	produit scalaire	producto escalar	scalar product
biderkatzaile	multiplicateur	multiplicador	multiplier
biderketa eskalar	multiplication scalaire	multiplicación escalar	scalar product
bigarren motako Bessel-en funtzio	fonction de Bessel de seconde espèce	función Bessel de segunda especie	Bessel function of the second kind
bigarren motako Bessel-en funtzio aldatu	fonction modifié de Bessel de seconde espèce	función modificada de Bessel de segunda especie	modified Bessel function of the second kind
bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal homogeneo	équation différentielle linéaire homogène du second ordre	ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden	second-order homogeneous linear differential equation
bikoiti	pair	par	even
biperiodikotasun	bipériodicité	biperiodicidad	biperiodicity
biribiltze-errore	erreur d'arrondi	error de redondeo	roundoff error
Cantor-en multzo hirutar	ensemble ternaire de Cantor	conjunto ternario de Cantor	Cantor's ternary set
Cauchy-ren balio nagusi	valeur principale de Cauchy	valor principal de Cauchy	Cauchy principal value
definizio-tarte	intervalle de définition	intervalo de definición	interval of definition
denbora geldo	temps lent	tiempo lento	slow time
denbora laster	temps rapide	tiempo rápido	fast time
deribatu askatugabeko ekuazio diferentzial	équation différentielle non résolue par rapport à la dérivée	ecuación diferencial no resuelta en la derivada	differential equation not solved for the derivative
deribatu frakzionario	dérivée fractionnaire	derivada fraccionaria	fractional derivative
deribatu gurutzatu	dérivée croisée	derivada cruzada	cross derivative
deribatu logaritmiko	dérivée logarithmique	derivada logarítmica	logarithmic derivative
deribatu orokortu	dérivée généralisée	derivada generalizada	generalized derivative
deribatu partzialetako ekuazio diferentzial	équation différentielle aux dérivées partielles	ecuación diferencial en derivadas parciales	partial differential equation

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
deribazio-eragile	opérateur de dérivation	operador de derivación	derivation operator
deribazio-polinomio	polynôme de dérivation	polinomio de derivación	differential polynomial
Descartes-en orri	folium de Descartes	hoja de Descartes	folium of Descartes
deskonposizio	décomposition	descomposición	decomposition
desplazamendu	déplacement	desplazamiento	displacement
desplazamenduaren teorema	théorème de déplacement	teorema del desplazamiento	theorem of displacement
determinante	déterminant	determinante	determinant
dibergentzia	divergence	divergencia	divergence
diferentzia finituetako ekuazio	équations aux différences finies	ecuación en diferencias finitas	finite difference equation
diferentziagarritasun-klase	classe de différentiabilité	clase de diferenciabilidad	differentiability class
diferentzial	différentielle (iz.) différentiel (izond.)	diferencial	differential
diferentzial zehatz	différentielle exacte	diferencial exacta	exact differential
dimentsio	dimension	dimensión	dimension
dimentsio gabeko aldagai	variable sans dimensions variable réduite	variable adimensional	dimensionless variable
dinamika kualitatibo	dynamique qualitative	dinámica cualitativa	qualitative dynamics
Dirac-en delta	delta de Dirac	delta de Dirac	Dirac delta
Dirac-en delta funtzio	fonction delta de Dirac	función delta de Dirac	Dirac delta function
diskretizazio	discrétisation	discretización	discretization
diskretizazio-errore	erreur de discrétisation	error de discretización	discretization error
diskriminatzaile	discriminant	discriminante	discriminant
ebazpen-metodo	méthode de résolution	método de resolución	resolution method
efektu	effet	efecto	effect
egonkortasun	stabilité	estabilidad	stability
egonkortasun asintotiko	stabilité asymptotique	estabilidad asintótica	asymptotic stability
egonkortasun lineal	stabilité linéaire	estabilidad lineal	linear stability
egonkortasun linealaren metodo	méthode de la stabilité linéaire	método de la estabilidad lineal	method of linear stability
ekipotentsial	équipotentiel	equipotencial	equipotential
ekuazio batera laburtze	réduction à une équation	reducción a una ecuación	reduction to an equation
ekuazio diferentzial	équation différentielle	ecuación diferencial	differential equation
ekuazio diferentzial adjuntu	équation différentielle adjointe	ecuación diferencial adjunta	adjoint differential equation
ekuazio diferentzial arrunt	équation différentielle ordinaire	ecuación diferencial ordinaria	ordinary differential equation
ekuazio diferentzial atzeratu	équation différentielle à retard	ecuación diferencial con retraso	delay differential equation
ekuazio diferentzial autonomo	équation différentielle autonome	ecuación diferencial autónoma	autonomous differential equation
ekuazio diferentzial banagarri	équation différentielle séparable	ecuación diferencial separable	separable differential equation

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
ekuazio diferentzial hipergeometriko	équation différentielle hypergéométrique	ecuación diferencial hipergeométrica	hypergeometric differential equation
ekuazio diferentzial hipergeometriko baterakor	équation différentielle hypergéométrique dégénérée	ecuación diferencial hipergeométrica confluyente	confluent hypergeometric differential equation
ekuazio diferentzial homogeneo	équation différentielle homogène	ecuación diferencial homogénea	homogeneous differential equation
ekuazio diferentzial isobariko	équation différentielle isobarique	ecuación diferencial isobárica	isobaric differential equation
ekuazio diferentzial lineal	équation différentielle linéaire	ecuación diferencial lineal	linear differential equation
ekuazio diferentzial lineal ezoso	équation différentielle linéaire incomplète	ecuación diferencial lineal incompleta	incomplete linear differential equation
ekuazio diferentzial lineal homogeneo	équation différentielle linéaire homogène	ecuación diferencial lineal homogénea	homogeneous linear differential equation
ekuazio diferentzial lineal inhomogeneo	équation différentielle linéaire non homogène	ecuación diferencial lineal inhomogénea	inhomogeneous linear differential equation
ekuazio diferentzial lineal oso	équation différentielle linéaire non homogène	ecuación diferencial lineal completa	complete linear differential equation
ekuazio diferentzial x -rekiko ekidimentsional	équation différentielle équidimensionnelle par rapport à x	ecuación diferencial equidimensional con respecto a x	equidimensional-in- x differential equation
ekuazio diferentzial zehatz	équation différentielle exacte	ecuación diferencial exacta	exact differential equation
ekuazio diferentzial zurrun	équation différentielle rigide	ecuación diferencial rígida	stiff differential equation
ekuazio diferentzialen sistema	système d'équations différentielles	sistema de ecuaciones diferenciales	system of differential equations
ekuazio finitu	équation finie	ecuación finita	finite equation
ekuazio funtzional	équation fonctionnelle	ecuación funcional	functional equation
ekuazio homogeneoaren soluzioen espazio	espace des solutions de l'équation homogène	espacio de soluciones de la ecuación homogénea	space of solutions of the homogeneous equation
ekuazio integral	équation intégrale	ecuación integral	integral equation
ekuazio karakteristiko	équation caractéristique	ecuación característica	characteristic equation
elastizitate	élasticité	elasticidad	elasticity
elektrizitate	électricité	electricidad	electricity electrics
elektromagnetismo	électromagnétisme	electromagnetismo	electromagnetism electromagnetics
eragile	opérateur	operador	operator
eragile autoadjuntu	opérateur autoadjoint	operador autoadjunto	self-adjoint operator
eragile deuseztatzaile deuseztapen-eragile	opérateur d'annulation	operador de anulación	annihilator operator

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
eragile deuseztatzaileren metodo deuseztapen-eragilearen metodo	méthode de l'opérateur d'annulation	método del operador de anulación	method of the annihilator operator
eragile formalki autoadjuntu	opérateur formellement autoadjoint	operador formalmente autoadjunto	formally self-adjoint operator
eragile lineal	opérateur linéaire	operador lineal	linear operator
erakarle	attracteur	atractor	attractor
erakarle bitxi	attracteur étrange	atractor extraño	strange attractor
erakarle kaotiko	attracteur chaotique	atractor caótico	chaotic attractor
erakarpen-osin	bassin d'attraction	cuenca de atracción	attraction basin
erakarpen-osinen arteko muga	frontière entre bassins d'attraction	frontera entre cuencas de atracción	attraction basin boundary
erdi-bizitza	période de semi-désintégration	período de semidesintegración	half-life
erdidefinitu	semi-défini	semidefinido	semidefinite
eredu	modèle	modelo	model
eredu kosmologiko estandar	modèle cosmologique standard	modelo cosmológico estándar	standard cosmological model
eremu	champ	campo	field
eremu	domaine	dominio	domain
eremu bektorial bektore-eremu	champ de vecteurs champ vectoriel	campo vectorial	vector field
eremu eskalar	champ scalaire	campo escalar	scalar field
eremu integragarri	champ intégrable	campo integrable	integrable field
eremu kontserbakor	champ conservatif	campo conservativo	conservative field
erkaketaren teorema	théorème de comparaison	teorema de comparación	comparison theorem
erlatibitate	relativité	relatividad	relativity
erlatibitate berezi	relativité restreinte	relatividad especial	special relativity
erlatibitate orokor	relativité générale	relatividad general	general relativity
errepikapen	récence	recurrencia	recurrence
errepikapen-erlazio	relation de récence	relación de recurrencia	recurrence law
erresonantzia	résonance	resonancia	resonance
erro karakteristiko	racine caractéristique	raíz característica	characteristic root
errore	erreur	error	error
errore-funtzio	fonction d'erreur	función error	error function
errore-funtzio irudikari	fonction d'erreur imaginaire	función error imaginaria	imaginary error function
errore-funtzio osagarri	fonction d'erreur complémentaire	función error complementaria	complementary error function
errore global errore oso	erreur global	error global	global error
errore lokal	erreur local	error local	local error
eskala-aldaezintasun	invariance d'échelle	invariancia de escala	scale invariance

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
eskala-aldaketa	changement d'échelle	cambio de escala	change of scale
eskala-aldaketekiko aldaezintasuna	invariance par rapport aux changements d'échelle	invariancia frente a cambios de escala	invariance under changes of scale
eskala anitzeko metodo	méthode à plusieurs échelles	método de las múltiples escalas	multiple-scale method
eskala handian egonkorra	stable à grande échelle	estable a gran escala	stable at large
eskala handiko egonkortasun	stabilité à grande échelle	estabilidad a gran escala	large scale stability
eskuin-limite	limite à droite	límite por la derecha	right limit
espazio banangarri	espace séparable	espacio separable	separable space
espazio egonkor	espace stable	espacio estable	stable space
espazio ezegonkor	espace instable	espacio inestable	unstable space
espazio oso	espace complet	espacio completo	complete space
espektr	spectre	espectro	spectrum
esponentzial-integral	exponentielle intégrale	integral exponencial	exponential integral
esponentzial-integral funtzio	fonction exponentielle intégrale	función integral exponencial	exponential integral function
estrapolazio	extrapolation	extrapolación	extrapolation
estrapolazio arrazional	extrapolation rationnelle	extrapolación racional	rational extrapolation
estrapolazio-metodo	méthode d'extrapolation	método de extrapolación	extrapolation method
estrofoide kurba	courbe strophoïde	curva estrofoide	strophoid curve
Euler-en gamma funtzio	fonction gamma d'Euler	función gamma de Euler	Euler gamma function
Euler-en metodo	méthode d'Euler	método de Euler	Euler's method
Euler-en metodo aldatu	méthode modifiée d'Euler	método modificado de Euler	modified Euler method
Euler-en metodo hobetu	méthode améliorée d'Euler	método mejorado de Euler	improved Euler method
Euler-en metodo inplizitu	méthode implicite d'Euler	método implícito de Euler	implicit Euler method
existentzia eta bakartasun	existence et unicité	existencia y unicidad	existence and uniqueness
existentzia eta bakartasunaren teorema	théorème d'existence et d'unicité	teorema de existencia y unicidad	existence-uniqueness theorem
existentzia global	existence globale	existencia global	global existence
ezegonkortasun	instabilité	inestabilidad	instability
ezker-limite	limite à gauche	límite por la izquierda	left limit
faktore	facteur	factor	factor
faktore integratzaile	facteur intégrant	factor integrante	integrating factor
faktore integratzaile berezi	facteur intégrant spécial	factor integrante especial	special integrating factor
faktorial	factoriel	factorial	factorial
faktorial funtzio	fonction factoriel	función factorial	factorial function
faktorizazio	factorisation	factorización	factorization
fase-espazio	espace de phase	espacio de fases	phase space
fase-ibilbide	trajectoire de phase	trayectoria de fases	phase trajectory

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
fase-orbita	orbite de phase	órbita de fases	phase orbit
Floquet-en berretzaile	exposant de Floquet	exponente de Floquet	Floquet exponent
Floquet-en teoria	théorie de Floquet	teoría de Floquet	Floquet's theory
fluxu	flux	flujo	flux
foku	foyer	foco	focus
forma definitu	forme définie	forma definida	definite form
forma kanoniko	forme canonique	forma canónica	canonical form
forma simetriko	forme symétrique	forma simétrica	symmetric form
Fourier-en alderantzizko transformazio	transformation inverse de Fourier	transformación inversa de Fourier	inverse Fourier transformation
Fourier-en kosinu-serie	série de Fourier de cosinus	serie de Fourier de cosenos	Fourier cosine series
Fourier-en serie	série de Fourier	serie de Fourier	Fourier series
Fourier-en sinu-serie	série de Fourier de sinus	serie de Fourier de senos	Fourier sine series
Fourier-en transformazio	transformation de Fourier	transformación de Fourier	Fourier transformation
fraktal	fractal	fractal	fractal
frakzio sinpleetako deskonposizio	décomposition en facteurs simples	descomposición en fracciones simples	decomposition into simple fractions
Fredholm-en hautabidearen teorema	théorème de l'alternative de Fredholm	teorema de la alternativa de Fredholm	Fredholm alternative theorem
funtzio analitiko	fonction analytique	función analítica	analytic function
funtzio batugarri	fonction sommable	función sumable	summable function
funtzio berezi	fonction spéciale	función especial	special function
funtzio definitu	fonction définie	función definida	definite function
funtzio definitu negatibo	fonction définie négative	función definida negativa	negative definite function
funtzio definitu positibo	fonction définie positive	función definida positiva	positive definite function
funtzio erregular	fonction régulière	función regular	regular function
funtzio hipergeometriko	fonction hypergéométrique	función hipergeométrica	hypergeometric function
funtzio hipergeometriko baterakor	fonction hypergéométrique dégénérée	función hipergeométrica confluyente	confluent hypergeometric function
funtzio homogeneo	fonction homogène	función homogénea	homogeneous function
funtzio orokortu	fonction généralisée	función generalizada	generalized function
funtzio osagarri	fonction complémentaire	función complementaria	complementary function
funtzio transzendente	fonction transcendante	función trascendente	transcendental function
gainazal	surface	superficie	surface
gainazal ortogonal	surface orthogonale	superficie ortogonal	orthogonal surface
gainezarmen	superposition	superposición	superposition
gainezarmenaren printzipioa gainezarmen-printzipio	principe de superposition	principio de superposición	superposition principle
goi-ordenako ekuazio	équation d'ordre supérieur	ecuación de orden superior (al primero)	higher-order equation
goi-ordenako mutur	extrême d'ordre supérieur	extremo de orden superior (al primero)	higher-order extremum

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
goierpin	sommet	punto cúspide	cuspid
gradiente-sistema	système gradient	sistema gradiente	gradient system
Green-en bi puntutako funtzio	fonction de Green à deux points	función de Green de dos puntos	two-point Green function
Green-en funtzio	fonction de Green	función de Green	Green function
gune	noyau	núcleo	kernel
hamiltondar	hamiltonien	hamiltoniano hamiltoniana	Hamiltonian
harrapari eta harrapakinaren eredu	modèle de déprédateur et proie	modelo de depredador y presa	prey-predator model
hastapen-baldintza hasierako baldintza	condition initiale	condición inicial	initial condition
hastapen-baldintzen menpekotasun sentikor	dépendance sensible des conditions initiales	dependencia sensible de las condiciones iniciales	sensitive dependence on initial conditions
hastapen-baldintzen problema	problème de conditions initiales	problema de condiciones iniciales	initial-value problem
Heaviside-ren garapen-formula	formule de développement de Heaviside	fórmula de desarrollo de Heaviside	Heaviside's expansion formula
Hermite-ren polinomio	polynôme d'Hermite	polinomio de Hermite	Hermite polynomial
Hilbert-en espazio	espace de Hilbert	espacio de Hilbert	Hilbert space
homogeneo	homogène	homogéneo	homogeneous
hurbilketa	approximation	aproximación	approximation
hurbilketa-errore	erreur d'approximation	error de aproximación	approximation error
hurbilketarik onena	meilleure approximation	aproximación óptima	best approximation
hurrenez hurreneko hurbilketak	approximations successives	aproximación sucesivas	successive approximations
hurrenez hurreneko hurbilketen metodoa	méthode des approximations successives	método de aproximaciones sucesivas	method of successive approximations
ibilbide	trajectoire	trayectoria	trajectory
ibilbide ortogonal	trajectoire orthogonale	trayectoria ortogonal	orthogonal trajectory
identitate matrize	matrice identité	matriz identidad	identity matrix
ikur	symbole	símbolo	symbol
ikuskapen	inspection	inspección	inspection
independentzia lineal	indépendance linéaire	independencia lineal	lineal independence
indize	indice	índice	index
indize bikoitz	indice double	índice doble	double index
indize-ekuazio	équation déterminante	ecuación indicial	indicial equation
induzitu	induire	inducir	induce
infinetuko baldintza	condition à l'infini	condición en el infinito	condition in the infinity
infinetuko puntu	point de l'infini	punto del infinito	point of infinity

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
inguratzaile	enveloppe	envolvente	envelope
integrazio-urrats	pas d'intégration	paso de integración	integration step
interpolazio	interpolation	interpolación	interpolation
isoklina (iz.) isoklino (izond.)	isocline	isoclina	isocline
itzulgarri	réversible	reversible	reversible
izar-nodo	nœud étoilé	nodo en estrella	star node
jacobiari	jacobien	jacobiano	Jacobian
jariakin fluido	fluide	fluido	fluid
jario	flot	flujo	flow
jarraitasun	continuité	continuidad	continuity
jarraitu	continu	continuo	continuous
jatorrizko	primitive (iz.)	primitiva (iz.)	primitive
kalkulu sinboliko	calcul symbolique	cálculo simbólico	symbolic calculus
kalkulu sinbolikoaren sistema	système de calcul symbolique	sistema de cálculo simbólico	system of symbolic calculus computer algebra system
kaos determinista	chaos déterministe	caos determinista	deterministic chaos
katendaria	caténaire	catendaria	catenary
koadrante	quadrant	cuadrante	quadrant
koadratura	quadrature	cuadratura	quadrature
koadraturetarako laburtzea	réduction à quadratures	reducción a cuadraturas	reduction to quadratures
koefiziente indeterminatuak	coefficients indéterminés	coeficientes indeterminados	undetermined coefficients
koefiziente indeterminatuen metodo	méthode des coefficients indéterminé	método de coeficientes indeterminados	method of undetermined coefficients
koefiziente konstantetako ekuazio diferentzial lineal homogeneo	équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants	ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes	homogeneous linear differential equation with constant coefficients
koefiziente konstantetako ekuazio diferentzial lineal oso	équation différentielle linéaire non homogène à coefficients constants	ecuación diferencial lineal completa con coeficientes constantes	complete linear differential equation with constant coefficients
koefiziente konstantetako sistema lineal	équation différentielle linéaire à coefficients constants	sistema lineal con coeficientes constantes	complete linear system with constant coefficients
konbergentzia	convergence	convergencia	convergence
konbergentzia-erradio	rayon de convergence	radio de convergencia	convergence radius
konboluzio	convolution	convolución	convolution
kondar	résidu	residuo	residue
konexio	connexion	conexión	connection
konexio homokliniko	connexion homoclinique	conexión homoclínica	homoclinic connection

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
kongruentzia	congruence	congruencia	congruence
koniko	conique	cónica	conic
konjektura	conjecture	conjetura	conjecture
konkomitante bilineal	concomitant bilinéaire	concomitante bilineal	bilinear concomitant
konparazio	comparaison	comparación	comparison
konstante	constant	constante	constant
konstanteen aldakuntza	variation des constants	variación de constantes	variation of constants
konstanteen aldakuntzaren metodo	méthode de variation des constants	método de variación de constantes	method of variation of constants
kontserbazio-lege iraupen-lege	loi de conservation	ley de conservación	conservation law
korrante-lerro	ligne de courant	línea de corriente	current line
kosinu-integral funtzio	fonction intégral cosinus	función integral coseno	cosinus integral function
kurba	courbe	curva	curve
kurba-familia	famille de courbes	familia de curvas	family of curves
kurba-familia baten ekuazio diferentzial	équation différentielle d'une famille de courbes	ecuación diferencial de una familia de curvas	differential equation of a family of curves
kurba-familia uniparametrikoko	famille de courbes à un paramètre	familia uniparamétrica de curvas	one-parameter family of solutions
kurba gausstar	courbe gaussienne	curva gaussiana	gaussian curve
kurba integral	courbe intégrale	curva integral	integral curve
kurba isoklino	courbe isocline	curva isoclina	isoclinic curve
kurba-kongruentzia	congruence de courbes	congruencia de curvas	congruence of curves
kurba-sorta	faisceau de courbes	haz de curvas	pencil of curves
laburtze beheratze	réduction	reducción	reduction
Lagrange-ren alderanzketa-formula	formule d'inversion de Lagrange	fórmula de inversión de Lagrange	Lagrange's inversion formula
Lagrange-ren eragile adjuntu formal	opérateur adjoint formel de Lagrange	operador adjunto formal de Lagrange	Lagrange's formal adjoint operator
Lagrange-ren identitate	identité de Lagrange	identidad de Lagrange	Lagrange identity
Landau-ren eredu	scénario de Landau	modelo de Landau	Landau scenario
Landau-ren ikur	symbole de Landau	símbolo de Landau	Landau symbol
lehen hurbilketa	première approximation	primera aproximación	first approximation
lehen integral	intégrale première	integral primera	first integral
lehen motako Bessel-en funtzio	fonction de Bessel de première espèce	función de primera especie de Bessel función de Bessel de primera especie	Bessel function of first kind

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
lehen motako Bessel-en funtzio aldatu	fonction modifié de Bessel de première espèce	función modificada de primera especie de Bessel función de Bessel modificada de primera especie	modified Bessel function of first kind
lehen ordenako sistema lineal	système linéaire du premier ordre	sistema lineal de primer orden	first-order linear system
lerro ekipotenzial	ligne équipotentielle	línea equipotencial	equipotential line
lerro-integral	intégral curviligne	integral curvilínea	line integral
Liapunov-en berretzaile	exposant de Liapounov	exponente de Liapunov	Liapunov exponent Lyapunov exponent
Liapunov-en bigarren metodo	deuxième méthode de Liapounov	segundo método de Liapunov	Liapunov's second method
Liapunov-en lehen metodo	première méthode de Liapounov	primer método de Liapunov	Liapunov's first method
Liapunov-en metodo zuzen	méthode directe de Liapounov	método directo de Liapunov	Liapunov's direct method
Liapunov-en teorema	théorème de Liapounov	teorema de Liapunov	Liapunov's theorem
limite muga	limite	límite	limit
limite orokortu	limite généralisée	límite generalizado	generalized limit
limiterako hurbilketa atzeratu	approximation différée à la limite	aproximación diferida al límite	deferred approach to the limit
Liouville-ren formula	formule de Liouville	fórmula de Liouville	Liouville's formula
Lissajous-en irudi	figure de Lissajous	figura de Lissajous	Lissajous figure
Lorenz-en sistema	système de Lorentz	sistema de Lorenz	Lorenz system
lotura-formula	formule de connexion	fórmula de enlace	connection formula
magnetismo	magnétisme	magnetismo	magnetism magnetics
magnitude-ordena	ordre de magnitude	orden de magnitud	order of magnitude
magnitude-ordenaren ikur	symbole d'ordre de magnitude	símbolo de orden de magnitud	order of magnitude symbol
maila gradu (termodinamikan)	degré	grado	degree
matrize	matrice	matriz	matrix
matrize baten esponentzial	exponentielle d'une matrice	exponencial de una matriz	exponential of a matrix
matrize jacobiar	matrice jacobienne	matriz jacobiana	Jacobian matrix
matrize-notazio	notation matricielle	notación matricial	matrix notation
matrize nulu	matrice nulle	matriz nula	null matrix
mendate zela-puntu	col point-selle	puerto punto de silla	saddle point
mendetako	séculaire	secular	secular
mendetako gai	terme séculaire	término secular	secular term

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
menpeko aldagai	variable dépendant	variable dependiente	dependent variable
menpekotasun lineal	dépendance linéaire	dependencia lineal	linear dependence
menpekotasun sentikor	dépendance sensible	dependencia sensible	sensitive dependence
metodo	méthode	método	method
metodo auresale-zuzentzaile	méthode prédicteur-correcteur	método pronosticador-corrector	predictor-corrector method
metodo grafiko	méthode graphique	método gráfico	graphics method
metodo hurbildu	méthode approchée	método aproximado	approximate method
metodo hurbildu analitiko	méthode approchée analytique	método aproximado analítico	analytic approximate method
metodo inplizitu	méthode implicite	método implícito	implicit method
metodo kualitatibo	méthode qualitative	método cualitativo	qualitative method
metodo kuantitatibo	méthode quantitative	método cuantitativo	quantitative method
metodo sinboliko	méthode symbolique	método simbólico	symbolic method
metodo zehatz	méthode exacte	método exacto	exact method
mozte-errore	erreur de troncature	error de truncamiento	truncation error
muga	frontière	frontera	boundary
muga-abiadura	vitesse limite	velocidad límite	limit speed
muga-ziklo	cycle limite	ciclo límite	limit cycle
muga-ziklo erdiegonkor	cycle limite semi-stable	ciclo límite semiestable	semistable limit cycle
muga-ziklo ezegonkor	cycle limite instable	ciclo límite inestable	unstable limit cycle
mugalde-baldintza	condition aux limites	condición de contorno	boundary condition
mugalde-baldintzen problema	problème des conditions aux limites	problema de contorno	boundary-value problem
multiple anizkoitz	multiple	múltiplo	multiple
multzo aldaezin	ensemble invariant	conjunto invariante	invariant set
multzo ortonormal	ensemble orthonormal	conjunto ortonormal	orthonormal set
multzo oso	ensemble complet	conjunto completo	complete set
n ordenako bigarren motako Bessel-en funtzio aldatu	fonction modifiée de Bessel de seconde espèce d'ordre n	función modificada de Bessel de segunda especie de orden n	modified Bessel function of the second kind of order n
nabariki erreal	manifestement réel	manifestamente real	manifestly real
neurri	mesure	medida	measure
nodo	nœud	nodo	node
nodo propio	nœud propre	nodo propio	proper node
norabide-eremu	champ de directions	campo de direcciones	direction field
normarekiko konbergentzia	convergence en norme	convergencia en norma	convergence in norm
notazio	notation	notación	notation
notazio matematiko	notation mathématique	notación matemática	mathematical notation

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
oinarri	base	base	basis
oinarrizko funtzio	fonction fondamentale	función elemental	elementary function
oinarrizko matrize	matrice fondamentale	matriz fundamental	fundamental matrix
oinarrizko problema	problème fondamental	problema elemental	elementary problem
oinarrizko soluzio	solution fondamentale	solución elemental	elementary solution
oinarrizko soluzio-sistema	système fondamental de solutions	sistema fundamental de soluciones	fundamental system of solutions
okinaren transformazio	transformation du boulanger	transformación del panadero	baker's transformation
oktante	octant	octante	octant
orbita	orbite	órbita	orbit
orbita homokliniko	orbite homoclinique	órbita homoclínica	homoclinic orbit
orbita itxi	orbite fermée	órbita cerrada	closed orbit
orbita periodiko	orbite périodique	órbita periódica	periodic orbit
ordena	ordre	orden	order
ordena-beheratze	abaissement d'ordre	reducción de orden	order reduction
ordena-beheratzearen metodo	méthode de abaissement d'ordre	método de reducción de orden	order-reduction method
ordena esponenzial	ordre exponentiel	orden exponencial	exponential order
ordena-ikur	symbole d'ordre	símbolo de orden	order symbol
oreka	équilibre	equilibrio	equilibrium
oreka-puntu	point d'équilibre	punto de equilibrio	equilibrium point
oreka-puntu bakartu	point d'équilibre isolé	punto de equilibrio aislado	isolated equilibrium point
oreka-puntu ez-hiperboliko	point d'équilibre non hyperbolique	punto de equilibrio no hiperbólico	non-hyperbolic equilibrium point
ortogonaltasun	orthogonalité	ortogonalidad	orthogonality
osin	bassin	cuenca	basin
osin-muga	frontière du bassin	frontera de la cuenca	basin boundary
osziladore	oscillateur	oscilador	oscillator
osziladore bortxatu	oscillateur forcé	oscilador forzado	forced oscillator
osziladore harmoniko	oscillateur harmonique	oscilador armónico	harmonic oscillator
osziladore harmoniko kuantiko	oscillateur harmonique quantique	oscilador armónico cuántico	quantum harmonic oscillator
osziladore indargetu	oscillateur amorti	oscilador amortiguado	damped oscillator
osziladore quasiharmoniko	oscillateur quasi-harmonique	oscilador cuasiarmónico	quasiharmonic oscillator
parabolen metodo	méthode des paraboles	método de las parábolas	parabolas method
parametro	paramètre	parámetro	parameter
parametro txiki	paramètre petit	parámetro pequeño	small parameter
parte oso	partie entière	parte entera	integer part
pausaguneko puntu	point de repos	punto de reposo	rest point
pendulu	pendule	péndulo	pendulum

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
perturbazio	perturbation	perturbación	perturbation
perturbazio erregular	perturbation régulière	perturbación regular	regular perturbation
perturbazio-metodo	méthode perturbative	método perturbativo	perturbation method
pisu	poids	peso	weight
planoerdi	semi-plan	semiplano	semiplan
planteatu	poser	plantear	pose
Poincaré-ren estroboskopia-sekzio	section stroboscopique de Poincaré	sección estroboscópica de Poincaré	stroboscopic Poincaré section
Poincaré-ren sekzio	section de Poincaré	sección de Poincaré	Poincaré section
poligonoaren metodo	méthode du polygone	método del polígono	polygon method
poligonoaren metodo hobetu	méthode améliorée du polygone	método mejorado del polígono	improved polygon method
polinomio karakteristiko	polynôme caractéristique	polinomio característico	characteristic polynomial
polo	pôle	polo	pole
polo bakun	pôle simple	polo simple	simple pole
potentzial	potentiel	potencial	potential
potentzial-erorketa	chute de potentiel	caída de potencial	voltage drop
potentzial-langa	barrière de potentiel	barrera de potencial	potential well
printzipio	principe	principio	principle
problema	problème	problema	problem
problema erregular	problème régulier	problema regular	regular problem
problema inhomogeneo	problème non homogène	problema inhomogéneo	inhomogeneous problem
problema periodiko	problème périodique	problema periódico	periodic problem
problema singular	problème singulier	problema singular	singular problem
proiekzio	projection	proyección	projection
pultsu	pulsation	pulso	pulse
pultsu gausstar	pulsation gaussienne	pulso gaussiano	gaussian pulse
puntu	point	punto	point
puntu aknodal	point acnodal	punto acnodal	acnodal point
puntu anizkoitz	point multiple	punto múltiple	multiple point
puntu arrunt	point ordinaire	punto ordinario	ordinary point
puntu egonkor	point stable	punto estacionario	stationary point
puntu espiral	point spiral	punto espiral	spiral point
puntu finko	point fixe	punto fijo	fixed point
puntu kritikiko	point critique	punto crítico	critical point
puntu singular	point singulier	punto singular	singular point
puntu singular erregular	point singulier régulier	punto singular regular	regular singular point
puntu singular irregular	point singulier irrégulier	punto singular irregular	irregular singular point

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
quasipolinomio	quasi-polynôme	cuasipolinomio	quasipolynomial
Richardson-en estrapolazio	extrapolation de Richardson	extrapolación de Richardson	Richardson extrapolation
Robertson eta Walker-en unibertso	univers de Robertson-Walker	universo de Robertson-Walker	Robertson-Walker universe
segida	suite	sucesión	sequence
sekzio ebaki	section	sección	section
sekzio koniko	section conique	sección cónica	conic section
serie	série	serie	series
serie binomiko	série binomiale	serie binómica	binomial series
serie geometriko	série géométrique	serie geométrica	geometric series
serie harmoniko	série harmonique	serie armónica	harmonic series
sinu-integral funtzio	fonction sinus intégral	función integral seno	sinus integral function
sistema	système	sistema	system
sistema dinamiko	système dynamique	sistema dinámico	dynamical system
sistema dinamiko autonomo	système dynamique autonome	sistema dinámico autónomo	autonomous dynamical system
sistema dinamiko diskretu	système dynamique discrète	sistema dinámico discreto	discrete dynamical system
sistema dinamiko hamiltondar	système dynamique hamiltonien	sistema dinámico hamiltoniano	Hamiltonian dynamical system
sistema dinamiko iraungikor	système dynamique dissipatif	sistema dinámico disipativo	dissipative dynamical system
sistema dinamiko kontserbakor	système dynamique conservatif	sistema dinámico conservativo	conservative dynamical system
sistema dinamiko linealdu	système dynamique linéarisé	sistema dinámico linealizado	linearized dynamical system
sistema dinamiko quasilineal	système dynamique quasi-linéaire	sistema dinámico cuasilineal	quasilinear dynamical system almost linear dynamical system
sistema dinamiko unidimentsional	système dynamique unidimensionnel	sistema mecánico unidimensional	one-dimensional mechanical system
sistema lineal	système linéaire	sistema lineal	linear system
sistema lineal homogeneo	système linéaire homogène	sistema lineal homogéneo	homogeneous linear system
sistema lineal oso	système linéaire complet	sistema lineal completo	complete linear system
sistema mekaniko	système mécanique	sistema mecánico	mechanical system
sistemaren funtzio	fonction du système	función del sistema	system function
soluzio	solution	solución	solution
soluzio esplizitu	solution explicite	solución explícita	explicit solution
soluzio-familia parametrikor	famille paramétrique de solutions	familia paramétrica de soluciones	parametric family of solutions
soluzio formal	solution formelle	solución formal	formal solution
soluzio inplizitu	solution implicite	solución implícita	implicit solution
soluzio maximo	solution maximale	solución máxima	maximal solution
soluzio mota	type de solution	tipo de solución	solution type
soluzio orokor	solution générale	solución general	general solution

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
soluzio oszilakor	solution oscillante	solución oscilatoria solución oscilante	oscillatory solution
soluzio parametriko	solution paramétrique	solución paramétrica	parametric solution
soluzio parametrikoen familia	famille de solutions paramétriques	familia de soluciones paramétricas	family of parametric solutions
soluzio partikular	solution particulière	solución particular	particular solution
soluzio periodiko	solution périodique	solución periódica	periodic solution
soluzio singular	solution singulière	solución singular	singular solution
Sturm eta Liouville-ren problema	problème de Sturm-Liouville	problema de Sturm-Liouville	Sturm-Liouville problem
tautokrono	tautochrone	tautocrona	tautochrone
Taylor-en seriearen metodo	méthode de la série de Taylor	método de la serie de Taylor	Taylor series method
Torricelli-ren lege	loi de Torricelli	ley de Torricelli	Torricelli's law
toru	tore	toro	torus
transferentzia-funtzio	fonction de transférence	función de transferencia	transference function
transformazio	transformation	transformación	transformation
transformazio integral	transformation intégrale	transformación integral	integral transformation
transformazio-metodo	méthode de transformation	método de transformación	transformation methods
translazio	translation	traslación	translation
translazio-aldaezintasuna	invariance par rapport aux translations	invariancia frente a traslaciones	invariance under translations
transzendente	transcendante	trascendente	transcendent
trapezioen metodo	méthode des trapèzes	método de los trapecios	trapezoidal method
trukatzaile	commutateur	conmutador	commutator
tximeleta efektu	effet papillon	efecto mariposa	butterfly effect
unibertso	univers	universo	universe
unitate-bulkada funtzio	fonction impulsion unité	función impulso unidad	unit impulse function
unitate-maila funtzio	fonction échelon-unité	función escalón unidad	unit step function
unitate natural	unité naturelle	unidad natural	natural unit
urrats	pas	paso	step
urrats anitzeko metodo	méthode à pas multiples	método de varios pasos	multistep method
urrats bakarreko metodo	méthode à un pas	método de un paso	single-step method
urrezko zenbaki	nombre d'or	sección áurea número de oro	golden number
van der Pol-en osziladore	oscillateur de van der Pol	oscilador de van der Pol	van der Pol oscillator
wronskiar	wronskien	wronskiano	Wronskian
zatikako jarraitasun	continuité par morceaux	continuidad por trozos	piecewise continuity
zeinu funtzio	fonction signe	función signo	sign function

Euskara	Frantsesa	Gaztelania	Ingelesa
zela-puntu mendate	point-selle col	punto de silla puerto	saddle point
zenbaki	nombre	número	number
zenbakikuntza	numération	numeración	numeration
zenbakizko koadratura	quadrature numérique	cuadratura numérica	numerical quadrature
zenbakizko metodo	méthode numérique	método numérico	numerical method
zentro	centre	centro	center
zientzia ez-lineal	science non linéaire	ciencia no lineal	non-linear science
ziklo	cycle	ciclo	cycle
zirkuitu	circuit	circuito	circuit
zurrunbilo	tourbillon	vórtice	vortex