

Manual de mecánica teórica

$$I = \int L dt = \int_R \mathcal{L}(\phi_{A,\alpha}, \phi_A, x)$$

$$I = \int L dt = \int_R \mathcal{L}(\phi_{A,\alpha}, \phi_A, x)$$

Jesús ibáñez

Departamento de Física Teórica
e Historia de la Ciencia

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

www.argitalpenak.ehu.es

ISBN: 84-8373-364-1

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

MANUAL DE MECÁNICA TEÓRICA

Jesús Ibáñez

Departamento de Física Teórica e Historia de la Ciencia

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea
servicio editorial argitalpen zerbitzua

© Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua
Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco

I.S.B.N.: 84-8373-364-1

Depósito Legal/Lege Gordailua: BI-2124-01

Impresión/Inprimatzea:

Servicio Editorial/Argitalpen Zerbitzua UPV/EHU

PREFACIO

Manual. ||m. 2.- Libro en que se compendia lo más substancial de una materia. (R.A.E.)

Atendiendo a la definición de *manual*, lo que se expone en las siguientes páginas ha de ser entendido como un resumen de la asignatura de Mecánica Teórica del segundo ciclo de las carreras de Física y Matemática. Es un complemento, por tanto, de cualquiera de los excelentes libros de texto que versan sobre esta materia. Este manual se ha basado en los siguientes libros: *Theoretical Mechanics* por E.J. Saletan y A.H. Cromer, Wiley (1971); *Mechanics* por L. Landau y E. Lifshitz, Pergamon (1976); *Classical Mechanics* por H. Goldstein, Addison-Wesley (1981); *Classical Mechanics* por J.V. José y E.J. Saletan, Cambridge U.P. (1998); *Mechanics* por F. Scheck, Springer-Verlag (1988); *A Treatise on Analytical Dynamics* por L.A. Pars, Heinemann (1965); *Mathematical Methods of Classical Mechanics* por V.I. Arnol'd, Springer-Verlag (1988) y *Geometrical Methods of Mathematical Physics* por B. Schutz, Cambridge U.P. (1980). Finalmente quiero agradecer los comentarios y la ayuda recibidos de J.A. Oteo y I. Egusquiza.

J. Ibáñez

*Ya, ya tan gran maldad ni la gran Juno
ni Júpiter permite con justicia.
No hay verdad, no hay fe en lugar alguno:
todo es traición, doblez, todo malicia.*

Virgilio, La Eneida

Índice General

1	FORMULACION LAGRANGIANA	11
1.1	Introducción	11
1.2	Ligaduras Holónomas	12
1.3	Coordenadas generalizadas	14
1.4	Principio de Hamilton	19
1.5	Constantes del movimiento	24
1.6	Simetrías	26
1.7	Lagrangiano de una partícula libre	31
2	FORMULACION HAMILTONIANA	35
2.1	Introducción	35
2.2	Ecuaciones de Hamilton	36
2.3	Corchetes de Poisson	38
2.4	Transformaciones en el espacio de fases	39
2.5	Transformaciones Canónicas	41
2.6	Función generatriz	46
2.7	Clasificación de la función generatriz	51
2.8	Familia continua de transformaciones canónicas	54
2.9	Simetrías y leyes de conservación	57
2.10	Teorema de Liouville	60
2.11	Principio de mínima acción	61
3	ECUACION DE HAMILTON-JACOBI	65
3.1	Introducción	65
3.2	Función principal	65
3.3	Propiedades de la función principal	68
3.4	Ecuación de Hamilton-Jacobi	70
3.5	Función característica de Hamilton	74
3.6	Variables angulares de acción	75
3.7	Sistemas Integrales	79

4	TEORIA DE PERTURBACIONES	81
4.1	Introducción	81
4.2	Términos seculares	81
4.3	Teoría de perturbaciones canónicas con un	85
4.4	Teoría de perturbaciones en varias dimensiones	91
4.5	Teorema adiabático	93
5	SISTEMAS CONTINUOS	97
5.1	Introducción	97
5.2	Transición al continuo	97
5.3	Formulación Lagrangiana	100
5.4	Cantidades conservadas. Corriente	102
5.5	Energía y momento del campo	104
5.6	Formalismo Hamiltoniano	105
5.7	Desarrollo en funciones ortonormales	107
6	MECANICA Y GEOMETRIA DIFERENCIAL	111

Capítulo 1

FORMULACION LAGRANGIANA

1.1 Introducción

El movimiento de un sistema mecánico está, a veces, forzado por agentes externos que actúan mediante fuerzas *no conocidas* aunque el efecto sobre el movimiento sea conocido. Estas fuerzas desconocidas se denominan *ligaduras* y pueden ser calculadas una vez que el movimiento general del sistema ha sido resuelto. Distinguiremos los siguientes tipos de ligaduras:

Ligaduras holónomas: son aquellas que pueden ser expresadas mediante K ecuaciones:

$$f_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \quad A = 1, \dots, K < 3N \quad (1.1)$$

donde se supone que las funciones f_A son continuas. En el caso más general las ligaduras varían con el tiempo, independientemente del movimiento de las partículas que forman el sistema. Las ecuaciones anteriores imponen $2K$ restricciones al movimiento del sistema ya que en cualquier instante de tiempo se ha de verificar que:

$$f_A = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{df_A}{dt} = \frac{\partial f_A}{\partial \vec{r}_i} \cdot \vec{v}_i + \frac{\partial f_A}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Es interesante notar que las ecuaciones (1.3) imponen limitaciones al valor de las velocidades de las partículas, en particular a las componentes normales a las superficies $f_A = 0$ definidas en el espacio de todas las coordenadas, de dimensión $3N$. Las derivadas superiores de las funciones f_A no imponen

nuevas restricciones ya que al depender de las aceleraciones, que vienen determinadas por las ecuaciones de Newton, son verificadas trivialmente.

Si la ecuación (1.3) no impone restricciones al valor de las velocidades, entonces la ligadura no es holónoma. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: Supongamos una partícula sometida a una ligadura dada por $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$. Esta ligadura implica que la partícula se mueve en el plano ortogonal al vector \vec{n} . La derivada de esta ligadura es: $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, que significa que la velocidad de la partícula está contenida en el plano. Si en lugar de usar la anterior expresión de la ligadura usamos $(\vec{n} \cdot \vec{r})^2 = 0$, que expresa lo mismo que antes, su derivada, ahora, es $(\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{n} \cdot \vec{v}) = 0$ que es satisfecha trivialmente y no impone ninguna restricción a la velocidad.

De este ejemplo deducimos que es necesario no solo que las ligaduras se expresen en la forma (1.1) para que sean holónomas sino que es preciso también que las ecuaciones (1.3) den lugar a condiciones en las velocidades.

Otra forma de ver las restricciones que imponen las ligaduras al movimiento del sistema consiste en escribir las ecuaciones (1.3) en forma diferencial:

$$df_A = \frac{\partial f_A}{\partial \vec{r}_i} \cdot d\vec{r}_i + \frac{\partial f_A}{\partial t} dt = 0. \quad (1.4)$$

Esta ecuación indica que los desplazamientos de las partículas no son arbitrarios.

De lo anterior deducimos que otra forma de expresar una ligadura es mediante una *ecuación de Pfaff*:

$$\sum_i (a_i dx_i + b_i dy_i + c_i dz_i) + e dt = 0, \quad (1.5)$$

donde a_i, b_i, c_i y e son funciones de las posiciones y del tiempo. Si la ecuación anterior es integrable entonces la ligadura es holónoma.

Ligaduras no holónomas: pueden ser dependientes de la velocidad (cuando las funciones f_A dependen de las velocidades) o del tipo

$$f_A(r_1, \dots, r_N, t) > 0 \quad A = 1, \dots, K < 3N \quad (1.6)$$

Un ejemplo de este tipo de ligadura es el movimiento de las partículas de un gas en un volumen finito. No existen métodos generales para tratar el caso de ligaduras no holónomas, por lo que a partir de ahora solo consideraremos ligaduras holónomas.

1.2 Ligaduras Holónomas

En esta Sección veremos que en el caso de ligaduras holónomas, el movimiento del sistema puede ser resuelto. Para ello consideraremos, primeramente, el

caso de una partícula sometida a una ligadura (es decir, forzada a moverse a lo largo de una superficie). En este caso las ecuaciones de Newton y la ligadura son:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{N} \quad (1.7)$$

$$f(\vec{r}, t) = 0 \quad (1.8)$$

donde \vec{F} representa la fuerza externa aplicada sobre la partícula y \vec{N} la fuerza debida a la ligadura. En el sistema anterior hay 6 incógnitas: \vec{r} y \vec{N} pero solo disponemos de 4 ecuaciones. Por tanto para poder resolver el sistema necesitamos añadir dos ecuaciones más. Para ello suponemos que \vec{N} es normal a la superficie descrita por la ligadura; es decir

$$\vec{N} = \lambda(t)\vec{\nabla}f, \quad (1.9)$$

donde λ es una función desconocida. Con esta suposición el sistema anterior se puede resolver ya que ahora tenemos sólo 4 incógnitas: \vec{r} y $\lambda(t)$. Una manera de encontrar la solución es despejando λ : como el vector $m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}$ es ortogonal a la superficie $f = 0$, sólo tiene dos componentes independientes, siendo la tercera ecuación la de ligadura. Así obtenemos $\vec{r}(t)$ y de (1.7) la fuerza \vec{N} .

Veamos ahora de qué forma la suposición sobre la fuerza de ligadura afecta al valor de la energía. Para ello supongamos que la fuerza externa es derivable de un potencial V ($\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r}, t)$). Entonces, de la ecuación de Newton, escribimos:

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \right) = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} + \lambda\vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}V \cdot \dot{\vec{r}} + \lambda\vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}}. \quad (1.10)$$

Supongamos que $\vec{r}(t)$ es una solución de las ecuaciones de movimiento que, por tanto, verifica la ligadura: $f(\vec{r}(t), t) = 0$, entonces

$$\frac{df}{dt} = \vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (1.11)$$

además,

$$\frac{dV}{dt} = \vec{\nabla}V \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación (1.10) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \right) &= -\frac{dV}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} \quad \Rightarrow \\ \frac{dE}{dt} &\equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V \right) = \frac{\partial V}{\partial t} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Es decir la energía total varía solo si V y f son funciones explícitas de t . Usualmente V no depende explícitamente de t y la variación de la energía es debida al “movimiento” de la superficie de ligadura.

Si la superficie es estacionaria, es decir que f no depende de t , entonces de la ecuación (1.11) se ve que la velocidad de la partícula es tangente a la superficie ($\vec{\nabla}f \cdot \dot{\vec{r}} = 0$) y, por tanto, la fuerza de ligadura no realiza trabajo ($\vec{N} \cdot \dot{\vec{r}} = 0$). Evidentemente esto no se verifica si f depende explícitamente del tiempo.

Cuando la condición (1.9) no se verifica y \vec{N} tiene una componente tangente a la superficie de ligadura, ésta se denomina *fuerza de rozamiento*.

Todo lo desarrollado hasta aquí se puede generalizar facilmente al caso de varias partículas.

1.3 Coordenadas generalizadas

De lo visto en la Sección anterior se deduce que al resolver el movimiento de un sistema con ligaduras no se necesita resolver todas las ecuaciones de Newton ya que alguna de ellas son satisfechas al tener en cuenta las ligaduras. En esta Sección vamos a desarrollar un procedimiento para resolver el movimiento general de un sistema con ligaduras holónomas integrando el número mínimo de ecuaciones necesarias.

Las ecuaciones de ligadura (1.1) definen una hipersuperficie de dimensión $3N - K$ en el espacio Euclideo \mathbb{E}^{3N} de dimensión $3N$ de las componentes \vec{r}_i tal que el sistema dinámico se mueve en esta hipersuperficie. Esta hipersuperficie se denomina *espacio de configuración* \mathcal{Q} . Introducimos nuevas coordenadas q_α , $\alpha = 1, \dots, 3N$, diferentes de las cartesianas, tales que

$$q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (1.14)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N}, t) \quad (1.15)$$

La invertibilidad implica que el jacobiano de q_α con respecto a \vec{r}_i es diferente de cero. Suponemos, además, que las funciones son continuas y dos veces diferenciables (continuamente).

Supondremos K ligaduras

$$f_A(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \quad (1.16)$$

Se define *coordenadas generalizadas* a las coordenadas (1.14) tales que al sustituir (1.15) en (1.16) las funciones f_A dependen explícitamente solo de K coordenadas q_α ; por ejemplo de las últimas K coordenadas:

$$f_A(q_{3N-K+1}, \dots, q_{3N}) = 0. \quad (1.17)$$

Llamaremos *grados de libertad* del sistema al número $n \equiv 3N - K$. Ya que las funciones f_A son independientes entre sí, la ecuación anterior la podemos invertir

$$q_{3N-K+A} = g_A(f_1, \dots, f_K) = g_A(0, \dots, 0) \quad (1.18)$$

es decir, las últimas K coordenadas q son constantes y sólo nos resta calcular n coordenadas q .

Antes de continuar veamos algunos ejemplos de espacio de configuración:
Línea finita. Supongamos una cuenta obligada a moverse por un alambre de longitud l . En este caso $N = 1$ y $K = 2$ (la ecuación de una curva en tres dimensiones viene dada por dos ecuaciones). Por tanto $n = 1$, la dimensión de \mathcal{Q} es 1 y solo hay una coordenada q cuyo rango es de 0 a l .

Círculo. En el caso de un péndulo la coordenada generalizada es el ángulo θ : el espacio de configuración es el círculo S^1 .

Esfera. Un ejemplo sería el péndulo esférico cuyas coordenadas generalizadas son el ángulo azimutal ϕ que toma valores entre 0 y 2π y el ángulo polar que varía de 0 a π . El espacio de configuración es la esfera S^2 .

Péndulo doble. En este caso el espacio de configuración \mathcal{Q} es $S^2 \times S^2$

Hemos reducido el problema de describir el movimiento del sistema a un problema de n variables. Lo que tenemos que hacer ahora es obtener las ecuaciones diferenciales para estas coordenadas. Para ello suponemos N vectores $\vec{\omega}_i$, ($i = 1, \dots, N$) arbitrarios y tangentes a las superficies definidas por las ligaduras, es decir:

$$\vec{\nabla}_i f_A \cdot \vec{\omega}_i \equiv \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}_i f_A \cdot \vec{\omega}_i = 0, \quad (1.19)$$

donde $\vec{\nabla}_i$ significa el gradiente respecto de las variables \vec{r}_i y donde hemos supuesto el convenio de Einstein para la sumación. Estas ecuaciones son K ecuaciones que nos relacionan entre sí las $3N$ componentes de $\{\vec{\omega}_i\}$, es decir de éstas sólo hay $3N - K$ cantidades independientes.

Las ecuaciones de Newton son:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{N}_i. \quad (1.20)$$

Igual que en el caso de una partícula, aquí supondremos que las fuerzas de ligadura \vec{N}_i son ortogonales a las superficies definidas por las ligaduras:

$$\vec{N}_i = \lambda_A \vec{\nabla}_i f_A. \quad (1.21)$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones de movimiento, multiplicando éstas por los vectores $\vec{\omega}_i$ y sumando todas las ecuaciones obtenemos

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \vec{\omega}_i = \lambda \vec{\nabla}_i f_A \cdot \vec{\omega}_i = 0. \quad (1.22)$$

Es importante señalar que lo anterior es sólo una ecuación, cuya parte izquierda es una combinación lineal de las cantidades $\{\vec{\omega}_i\}$. Los coeficientes de las $3N - K$ componentes independientes en (1.22) han de ser iguales a cero. Es decir, de la ecuación anterior obtenemos $3N - K$ ecuaciones, cuya solución junto con las ecuaciones de ligadura determina el movimiento del sistema. Para obtener explícitamente estas ecuaciones usaremos los siguientes vectores:

$$\vec{\omega}_i = \epsilon_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, n \equiv 3N - K, \quad (1.23)$$

donde ϵ_α son constantes arbitrarias. Antes de obtener las ecuaciones de movimiento, demostraremos que los vectores anteriores satisfacen la condición (1.19). En efecto:

$$\vec{\nabla}_i f_A \cdot \vec{\omega}_i = \vec{\nabla}_i f_A \cdot \epsilon_\alpha \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \epsilon_\alpha \frac{\partial f_A}{\partial q_\alpha}. \quad (1.24)$$

Como las q_α son coordenadas generalizadas, las funciones f_A sólo dependen de las últimas K coordenadas, luego lo anterior es cero. Sustituyendo los vectores (1.23) en la parte derecha de la ecuación (1.22) obtenemos

$$\epsilon_\alpha \sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (1.25)$$

Como las constantes ϵ_α son independientes entre sí, obtenemos n ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (1.26)$$

donde \vec{r}_i son funciones de las coordenadas generalizadas q_α ($\alpha = 1, \dots, n$) ya que el resto de las coordenadas q son constantes, por definición. Teniendo en cuenta esto obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Teniendo en cuenta estas expresiones obtenemos

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}, \tag{1.28}
\end{aligned}$$

donde T es la energía cinética del sistema:

$$T \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i. \tag{1.29}$$

Con este resultado la ecuación (1.26) se escribe como

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.30}$$

Usualmente, se denomina *fuerza generalizada* al último término de esta ecuación:

$$Q_\alpha \equiv \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{1.31}$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema de n ecuaciones diferenciales de segundo orden cuya solución general es $q_\alpha(t)$ y mediante (1.15) nos permite encontrar $\vec{r}_i(t)$.

El sistema anterior puede ser escrito en una forma mucho más simple si todas las fuerzas son conservativas, es decir si derivan de un potencial:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V \Rightarrow \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\vec{\nabla}_i V \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \tag{1.32}$$

y (1.30) se escribe

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{1.33}$$

Generalmente el potencial V sólo depende de las coordenadas, y por tanto, sólo de las coordenadas generalizadas ($\partial V / \partial \dot{q}_\alpha = 0$). En este caso la ecuación anterior la podemos escribir como

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,} \tag{1.34}$$

donde la función L se llama *función lagrangiana* o *lagrangiano* y viene definida por

$$\boxed{L \equiv T - V.} \tag{1.35}$$

Las ecuaciones anteriores se denominan *ecuaciones de Euler-Lagrange* y es importante señalar lo siguiente:

- El movimiento del sistema viene determinado por una función escalar, el lagrangiano, en lugar de por cantidades vectoriales como en las ecuaciones de Newton. Esto simplifica el cálculo de la solución general.
- Veremos más adelante que podemos todavía simplificar más el problema al imponer ciertas condiciones de *simetría* al lagrangiano.
- Las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo grado. La solución general dependerá de $2n$ constantes de integración, que pueden ser las condiciones iniciales.
- Finalmente, vemos cómo el concepto de fuerza pasa a un segundo plano siendo más importante la energía para determinar el movimiento.

Otro aspecto a tener en cuenta es que no es importante la forma del lagrangiano sino las ecuaciones de movimiento que se derivan de él. En particular, si tenemos un lagrangiano L , entonces el lagrangiano L' definido por

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d\Lambda(q, t)}{dt} \quad (1.36)$$

donde la función Λ es arbitraria, conduce a las mismas ecuaciones de movimiento que las que se derivan de L . En la expresión anterior q y \dot{q} describen el conjunto de coordenadas q_α , \dot{q}_α (usaremos esta notación a partir de ahora). Lo contrario no es cierto, en general. Es decir si dos lagrangianos conducen a las mismas ecuaciones de movimiento no significa que están relacionados por (1.36). Por ejemplo, las ecuaciones de movimiento que se obtienen de los lagrangianos con dos grados de libertad $L = \dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_1 q_2$, $L' = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - q_1^2 - q_2^2)$ son las mismas, pero no existe una función $\Lambda(q_1, q_2, t)$ tal que se verifica la ecuación anterior.

Veamos ahora la forma general que toma la ecuación (1.34). De (1.27) obtenemos

$$T = \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \quad (1.37)$$

Desarrollando los productos obtenemos

$$T = a(q, t) + b_\alpha(q, t) \dot{q}_\alpha + c_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad (1.38)$$

donde:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \\ b_\alpha &= m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \\ c_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Como las funciones a , b_α y $c_{\alpha\beta}$ no dependen de \dot{q} , T es una función cuadrática de \dot{q} . Si la transformación de coordenadas no depende explícitamente del tiempo

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad a = b_\alpha = 0 \quad (1.40)$$

entonces T es una función cuadrática homogénea de \dot{q} .

Al desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange vemos que estas se escriben como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \ddot{q}_\beta = G_\beta(q, \dot{q}, t) \quad (1.41)$$

Para poder encontrar una solución al sistema de ecuaciones diferenciales anterior, \ddot{q} ha de estar unívocamente determinada, es decir

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right| \neq 0. \quad (1.42)$$

1.4 Principio de Hamilton

Hemos deducido las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir de las ecuaciones de Newton. Vamos a buscar, ahora, un principio que nos permita derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange sin necesidad de recurrir a dichas ecuaciones. Para ello supondremos que conocemos las coordenadas generalizadas q . Supongamos, además, que conocemos que en el espacio de configuración, en $t = t_1$ el sistema se encuentra en un punto $q^1 \equiv q(t_1)$ y en $t = t_2 > t_1$ se encuentra en $q^2 \equiv q(t_2)$. De todas las posibles curvas que unen estos dos puntos sólo una de ellas, la que verifica las ecuaciones de Euler-Lagrange, es la curva que sigue el sistema. Tomemos una curva C particular dada por $q(t)$, si la sustituimos en el lagrangiano $L(\dot{q}(t), q(t), t)$ obtenemos una función de t . Podemos calcular la integral

$$I[C] = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t), t) dt. \quad (1.43)$$

$I[C]$ significa que la integral anterior depende de la curva que hayamos escogido y se denomina *funcional de acción*. Demostremos ahora lo siguiente: *la curva física que sigue el sistema es un extremo de la funcional de acción*.

Para demostrarlo “etiquetamos” las curvas con el parámetro ϵ : $q(t, \epsilon)$, es decir para un valor dado de este parámetro tenemos una curva particular. Supondremos que la curva con $\epsilon = 0$ es la curva física. Todos los caminos verifican

$$q(t_1, \epsilon) = q^1, \quad q(t_2, \epsilon) = q^2, \quad \forall \epsilon, \quad (1.44)$$

que implica

$$\frac{\partial q_\alpha(t_1, \epsilon)}{\partial \epsilon} = \frac{\partial q_\alpha(t_2, \epsilon)}{\partial \epsilon} = 0. \quad (1.45)$$

La condición de extremo se expresa como

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \int_{t_1}^{t_2} L dt \Big|_{\epsilon=0} = 0. \quad (1.46)$$

Como los límites son fijos

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\epsilon} &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \epsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right] dt = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} dt. \end{aligned} \quad (1.47)$$

El primer término de la última igualdad se anula debido a (1.45). Imponiendo a la expresión anterior la condición de extremo, obtenemos

$$0 = \frac{dI}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right]_{\epsilon=0} \left[\frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} dt. \quad (1.48)$$

Como los límites de integración son totalmente arbitrarios, de la expresión anterior, deducimos que el integrando es igual a cero. El segundo factor del integrando es también arbitrario ya que depende de la familia de curvas que hayamos escogido y de la parametrización. Es decir el primer factor ha de ser cero que es precisamente la ecuación de Euler-Lagrange, que es la ecuación que verifica la trayectoria física.

El resultado anterior lo podemos elevar a la categoría de principio: *principio de Hamilton*; es decir podemos formular la mecánica a partir del mismo y no de las ecuaciones de Newton. Es evidente que partiendo de este principio con coordenadas cartesianas recuperamos las ecuaciones de Newton.

Es interesante encontrar una formulación más general del principio de Hamilton permitiendo que las curvas en el espacio de configuración tengan los extremos “abiertos”, es decir que cada curva empiece y acabe en tiempos diferentes. Consideremos que el sistema se encuentra en el punto q^1 en el tiempo t_1 y alcanza el punto q^2 en el tiempo t_2 a lo largo de una curva

C . Supongamos una nueva curva C' que difiere infinitesimalmente de C con puntos extremos q^1 y q^2 en los tiempos t'_1 y t'_2 respectivamente:

$$\begin{aligned} t'_1 &= t_1 + \Delta t_1, & t'_2 &= t_2 + \Delta t_2, \\ q'_\alpha(t) &= q_\alpha(t) + \delta q_\alpha(t), \\ \dot{q}'_\alpha(t) &= \dot{q}_\alpha(t) + \frac{d}{dt} \delta q_\alpha(t). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Calculemos la variación de la funcional de acción entre estos dos caminos.

$$\Delta I \equiv I[C'] - I[C] = \int_{t'_1}^{t'_2} L(\dot{q}', q', t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q, t) dt. \quad (1.50)$$

Ahora hacemos uso de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_{t'_1}^{t'_2} f dt &= \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_2 + \Delta t_2} f dt = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_1} f dt + \int_{t_1}^{t_2} f dt + \int_{t_2}^{t_2 + \Delta t_2} f dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} f dt + \int_{t_2}^{t'_2} f dt - \int_{t_1}^{t'_1} f dt. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Obtenemos, por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_1}^{t_2} [L(\dot{q}', q', t) - L(\dot{q}, q, t)] dt + \int_{t_2}^{t'_2} L(\dot{q}', q', t) dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t'_1} L(\dot{q}', q', t) dt. \end{aligned} \quad (1.52)$$

A primer orden:

$$L(\dot{q}', q', t) \simeq L(\dot{q}, q, t) + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_\alpha. \quad (1.53)$$

Usamos, también, el siguiente resultado

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = F(t + \Delta t) - F(t) \simeq \frac{dF}{dt} \Delta t = f \Delta t, \quad (1.54)$$

donde F es la primitiva de la función f . Sustituyendo (1.53) y (1.54) en (1.52) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \delta q_\alpha \right] dt + L(\dot{q}', q', t) \Delta t \Big|_{t=t_2} - \\ &\quad - L(\dot{q}', q', t) \Delta t \Big|_{t=t_1} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha \right] dt + \\ &\quad + L(\dot{q}', q', t) \Delta t \Big|_{t_2} - L(\dot{q}', q', t) \Delta t \Big|_{t_1} = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt + \left\{ L(\dot{q}, q, t) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right\}_{t_1}^{t_2} \quad (1.55) \end{aligned}$$

Los últimos términos dependían de q' pero, al orden considerado, podemos tomarlos como dependiendo de q .

Definimos *variación total* Δq_α a las siguientes cantidades:

$$\Delta q_\alpha(t) \equiv q'_\alpha(t') - q_\alpha(t). \quad (1.56)$$

La relación con la diferencia dada por la ecuación (1.49) es

$$\begin{aligned} \Delta q_\alpha(t) &\equiv q'_\alpha(t + \Delta t) - q_\alpha(t) = q'_\alpha(t) + \dot{q}'_\alpha(t)\Delta t - q_\alpha(t) = \\ &= \delta q_\alpha(t) + \dot{q}_\alpha(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Teniendo en cuenta esta relación el último término de (1.55) lo escribimos:

$$L\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha = L\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Delta q_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \Delta t, \quad (1.58)$$

Finalmente la variación de la acción viene dada por

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right] \delta q_\alpha dt + \\ &+ \left\{ \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Delta q_\alpha \right\}_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

A partir de la expresión anterior podemos recuperar el principio de Hamilton tomando variaciones tales que $\Delta t_i = \Delta q(t_i) = 0, i = 1, 2$, es decir no hay variación en los puntos final e inicial de la curva. En el caso más general vemos que si la curva C , alrededor de la cual calculábamos la variación Δ , es la curva física que sigue el sistema, la variación de la acción no es cero pero dicha variación no depende de los puntos de la curva sino solo de los puntos inicial y final. Como veremos más adelante, esta propiedad de la variación nos permitirá definir los momentos generalizados y el Hamiltoniano.

Otra forma de expresar el formalismo anterior es mediante la *derivada funcional*. La funcional $I[C]$ es tal que para cada curva C obtenemos un número. Calcular la variación de la funcional es como calcular la derivada de una función. Sea $F[f(x)]$ una funcional, definimos derivada funcional a la siguiente operación:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon}. \quad (1.60)$$

Antes de aplicarlo al funcional de acción, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Sea $F[f] = \int f(x)dx$, su derivada es:

$$\begin{aligned}\frac{\delta F}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int [f(x) + \epsilon \delta(x-y)] dx - \int f(x) dx \right\} = \\ &= \int \delta(x-y) dx = 1.\end{aligned}\quad (1.61)$$

Ejemplo 2: Sea $F_x[f] = \int G(x, y)f(y)dy$, su derivada es

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_x}{\delta f(z)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int [f(y) + \epsilon \delta(y-z)] G(x, y) dy - \int G(x, y)f(y) dy \right\} = \\ &= \int G(x, y) \delta(y-z) dy = G(x, z).\end{aligned}\quad (1.62)$$

En el caso de la funcional de acción:

$$\begin{aligned}\frac{\delta I[q]}{\delta q(t')} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int L[q + \epsilon \delta(t-t'), \dot{q} + \epsilon \delta'(t-t'), t] dt - \int L(q, \dot{q}, t) dt \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \epsilon \delta(t-t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon \delta'(t-t') \right] dt - \right. \\ &\quad \left. - \int L(q, \dot{q}, t) dt \right\} = \\ &= \int \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta(t-t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta'(t-t') \right] dt = \\ &= \int \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \delta(t-t') dt = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] (t').\end{aligned}\quad (1.63)$$

Otra forma de ver la derivada funcional es mediante lo siguiente: la diferencial de una función $f(z_1, \dots, z_n)$ viene dada por $df = a_i dz_i$ donde los coeficientes a_i son las derivadas parciales de la función respecto de sus variables. Si tenemos una funcional $I[q]$ y su variación respecto de la función q viene dada por

$$\delta I = \int A(q, t) \delta q dt, \quad (1.64)$$

entonces el coeficiente A será la derivada funcional de I .

La derivada de la funcional de acción está relacionada con la variación que hemos considerado al principio de esta Sección, es decir con la que es proporcional a δq . Esto es debido a que el límite que aparece en la definición de derivada funcional se calcula en un punto fijo de la variable, en nuestro caso t , por tanto las variaciones que hemos de considerar son aquellas que mantienen fijos los puntos inicial y final de la integral.

1.5 Constantes del movimiento

Una función $F(\dot{q}, q, t)$ es una constante del movimiento si no varía a lo largo de las curvas que son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} q_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (1.65)$$

Definimos *momento generalizado* p_α asociado a la coordenada q_α como:

$$p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (1.66)$$

De las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad (1.67)$$

Una coordenada q_α la llamaremos *cíclica* cuando no aparece en el lagrangiano. En este caso su momento correspondiente es una constante del movimiento.

Es importante señalar la diferencia entre una constante del movimiento y una ligadura. Una ligadura viene descrita por la ecuación (1.1) que se ha de verificar para la solución general de la ecuación de Euler-Lagrange, sin embargo una constante del movimiento toma diferentes valores según las condiciones iniciales que estemos considerando.

Sean F_1, F_2, \dots, F_m constantes del movimiento, es fácil ver que la función $G(F_1, \dots, F_m)$ también será una constante del movimiento; sin embargo no es interesante, ya que no proporciona información nueva sobre el movimiento que no esté contenida en las funciones iniciales. Es decir lo que interesa encontrar son constantes del movimiento que sean independientes entre sí. Lo primero que necesitamos saber es el número de constantes independientes que podemos encontrar en un sistema. Demostraremos el siguiente resultado: *un sistema con n grados de libertad tiene $2n$ constantes del movimiento independientes.*

Supongamos que encontramos la integral general de las ecuaciones de movimiento. Al ser las ecuaciones de Euler-Lagrange n ecuaciones de segundo grado, la solución general dependerá de $2n$ constantes de integración:

$$q_\alpha = q_\alpha(C_1, C_2, \dots, C_{2n}, t) \quad (1.68)$$

Para cada valor de las constantes C 's obtenemos movimientos particulares diferentes. Sea una función arbitraria $f(q, \dot{q}, t)$, sustituyendo la solución general obtenemos

$$f(q, \dot{q}, t) = f(q(C, t), \dot{q}(C, t), t) \equiv G(C, t). \quad (1.69)$$

La función G no puede ser independiente de las constantes C 's ya que si lo fuera obtendríamos, de la ecuación anterior, una nueva ligadura. Por tanto al menos la función G dependerá de una de las constantes. Derivando la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial G}{\partial C_i} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial C_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial C_i}. \quad (1.70)$$

Considerando como incógnitas las cantidades

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad (1.71)$$

las ecuaciones (1.70) constituyen un conjunto de $2n$ ecuaciones lineales inhomogéneas. Para una f particular las derivadas (1.71) existen luego el sistema ha de tener una única solución. La condición para que esto ocurra es que el determinante del sistema sea diferente de cero:

$$\left| \frac{\partial(q, \dot{q})}{\partial C} \right| \neq 0, \quad (1.72)$$

que es el Jacobiano de la transformación

$$q_\alpha = q_\alpha(C, t), \quad \dot{q}_\alpha = \dot{q}_\alpha(C, t). \quad (1.73)$$

Al ser el Jacobiano diferente de cero la relación anterior se puede invertir:

$$C_i = C_i(q, \dot{q}, t) \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (1.74)$$

Cada una de estas $2n$ funciones son constantes del movimiento; el valor que toman dependen de la solución particular que siga el sistema. Son independientes entre sí ya que son las constantes que aparecen en la solución general de las ecuaciones de movimiento.

Veamos ahora que no hay otra constante del movimiento independiente de las anteriores. Sea una constante F :

$$F(q, \dot{q}, t) = F(q(C, t), \dot{q}(C, t), t) \equiv G(C, t). \quad (1.75)$$

Al ser una constante del movimiento se cumple que

$$0 = \frac{dF}{dt} = \frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (1.76)$$

es decir $F = G(C)$ y por tanto no es independiente de las funciones C .

1.6 Simetrías

Habíamos visto anteriormente que si una coordenada es cíclica, por ejemplo q_1 , entonces su momento generalizado $p_1 = \partial L / \partial \dot{q}_1$ se conserva. Esta propiedad no es de la coordenada q_1 sino de todo el sistema completo de coordenadas ya que podemos introducir nuevas coordenadas q' tales que $q'_1 = q_1$ pero $\partial L / \partial q_1$ ya no sea cero y la coordenada q_1 ya no es cíclica. Como veremos en esta sección una coordenada cíclica corresponde a una simetría en el sistema.

Definimos *transformación puntual* a una transformación del tipo:

$$q'_\alpha = q'_\alpha(q, t) \quad (1.77)$$

que sea invertible. Bajo esta transformación el lagrangiano se transforma en otro lagrangiano L' :

$$L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t) = L' \left(q'(q, t), \frac{d}{dt} q'(q, t), t \right). \quad (1.78)$$

Es fácil demostrar que al hacer esta transformación las ecuaciones de movimiento se escriben de la misma forma en las nuevas coordenadas. Es decir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q'_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_\alpha} - \frac{\partial L'}{\partial q'_\alpha} = 0. \quad (1.79)$$

Esto es contrario a lo que sucede en la formulación Newtoniana. Por ejemplo cuando pasamos a un sistema de referencia no inercial las ecuaciones de Newton las tenemos que modificar para introducir las fuerzas no inerciales.

Las transformaciones anteriores las podemos representar en la forma:

$$q' = \mathcal{R}q \quad q = \mathcal{S}q', \quad (1.80)$$

donde \mathcal{R} y \mathcal{S} son operadores que pueden depender de t y no tienen que ser lineales. De lo anterior se deduce que

$$\mathcal{R}\mathcal{S} = \mathbf{1}. \quad (1.81)$$

Supongamos que en el lagrangiano L ninguna coordenada es cíclica. Podrá existir una transformación dada por las ecuaciones anteriores tal que el nuevo lagrangiano tenga una coordenada cíclica, por ejemplo q'_β , es decir que su momento conjugado p'_β es constante. Esto podría ser un procedimiento para obtener cantidades conservadas, sin embargo no es fácil encontrar una transformación que nos lleve a coordenadas cíclicas.

Lo que pretendemos es encontrar cantidades conservadas mediante transformaciones de las coordenadas según (1.80). Estas cantidades conservadas

no tienen porque estar asociadas a que una coordenada sea cíclica sino, como veremos, estarán relacionadas con las simetrías que existen en el sistema. Para hacer esto, en lugar de considerar una transformación, vamos a considerar una familia de transformaciones, “etiquetadas” cada una de ellas con el parámetro ϵ :

$$q'_\alpha = q'_\alpha(q, t, \epsilon), \quad q_\alpha = q_\alpha(q', t, \epsilon). \quad (1.82)$$

Supondremos, además, que la transformación anterior es continua y diferenciable en el parámetro ϵ y que la transformación identidad está contenida en la familia de transformaciones y viene dada por $\epsilon = 0$; es decir $q'(q, t, 0) = q$. Si usamos la notación de operadores lo anterior lo escribimos como:

$$\begin{aligned} q'(t, \epsilon) &= \mathcal{R}(\epsilon)q(t) & q(t) &= \mathcal{S}(\epsilon)q'(t, \epsilon), \\ \mathcal{R}(0) &= \mathcal{S}(0) = 1. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Los operadores \mathcal{R} y \mathcal{S} pueden depender explícitamente de t . Para cada ϵ hay una transformación diferente y por tanto da lugar a un lagrangiano diferente:

$$L(q, \dot{q}, t) = L_\epsilon(q', \dot{q}', t) = L_\epsilon \left(\mathcal{R}(\epsilon)q, \frac{d}{dt} [\mathcal{R}(\epsilon)q], t \right). \quad (1.84)$$

la primera igualdad la podemos escribir como:

$$L_\epsilon(q', \dot{q}', t) = L \left(\mathcal{S}(\epsilon)q', \frac{d}{dt} [\mathcal{S}q'], t \right). \quad (1.85)$$

La igualdad anterior constituye una definición de L_ϵ y es cierta para cualquier conjunto de variables que usemos q' . Es decir que la expresión anterior la podemos escribir como:

$$L_\epsilon(x, \dot{x}, t) = L \left(\mathcal{S}(\epsilon)x, \frac{d}{dt} [\mathcal{S}x], t \right), \quad (1.86)$$

donde x indica un conjunto de n variables totalmente arbitrario. En particular podemos tomar como variable la propia q y definir:

$$\bar{q}(t, \epsilon) = \mathcal{S}(\epsilon)q(t) \quad \Rightarrow \quad q = \mathcal{R}(\epsilon)\bar{q}(t, \epsilon). \quad (1.87)$$

Escribiremos, por tanto,

$$L_\epsilon(q, \dot{q}, t) = L(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t), \quad \bar{q}(t, 0) = q(t). \quad (1.88)$$

La dependencia de L_ϵ en ϵ viene a través de \bar{q} . Derivando lo anterior con respecto a ϵ obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha}{\partial \epsilon} = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \right) \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} = \\ &= \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{q}_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \right) \right] \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (1.89)$$

Supongamos que $q(t)$ describe el movimiento del sistema, es decir que es solución de la ecuación de Euler-Lagrange, entonces la expresión anterior calculada en $\epsilon = 0$ da:

$$\left(\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0}. \quad (1.90)$$

Si la parte izquierda de esta ecuación se puede expresar como una derivada total con respecto al tiempo de una función G :

$$\left(\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \frac{dG}{dt}, \quad (1.91)$$

entonces diremos que el lagrangiano es *cuasisimétrico* respecto de la transformación y, asociada con ella, hay una cantidad conservada:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=0} - G \right) = 0.} \quad (1.92)$$

Puede ocurrir que el lagrangiano sea invariante frente a la transformación, es decir que el lagrangiano transformado no dependa de ϵ . En este caso el lagrangiano es *simétrico* y, como antes, hay una cantidad conservada:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 0.} \quad (1.93)$$

Es interesante ver el resultado anterior desde el punto de vista de transformaciones infinitesimales. En este caso a primer orden en el parámetro ϵ obtenemos:

$$q_\alpha = q'_\alpha + \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \epsilon, \quad q'_\alpha = q_\alpha + \frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon} \epsilon, \quad (1.94)$$

y se verifica al orden considerado:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} = -\frac{\partial q'_\alpha}{\partial \epsilon}. \quad (1.95)$$

Usando esta relación, el cambio en el lagrangiano es:

$$\begin{aligned} L(q', \dot{q}', t) &= L\left(q - \epsilon \frac{\partial q}{\partial \epsilon}, \dot{q} - \epsilon \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial \epsilon}, t\right) = \\ &= L(q, \dot{q}, t) - \epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Si el lagrangiano es simétrico respecto de esta transformación, entonces el término a primer orden es cero:

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} = 0. \quad (1.97)$$

Es fácil demostrar que, si la ecuación anterior se verifica, la cantidad

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \quad (1.98)$$

es una constante del movimiento. Para demostrarlo lo que hay que hacer es derivar la cantidad anterior con respecto al tiempo y usar (1.97):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \frac{\partial q_\alpha}{\partial \epsilon} = 0. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Esta ecuación es cero debido a que q verifica la ecuación de Euler-Lagrange.

La expresión (1.98) es la misma que la que obteníamos en (1.93), ya que \bar{q} es la transformación inversa, lo mismo que q . Con este resultado podemos enunciar ahora el *teorema de Noether*: *Si el lagrangiano tiene una simetría, entonces hay una cantidad conservada dada por (1.93) o (1.98)*. El inverso de este teorema también es cierto, es decir, si conocemos una cantidad conservada existe una transformación bajo la cual el lagrangiano es simétrico. En este caso el problema de encontrar la transformación es, en general complicado. A partir de (1.98) podemos encontrar el primer orden de la transformación.

Veamos dos ejemplos.

Ejemplo 1: Sea un lagrangiano que no depende explícitamente del tiempo: $L(q, \dot{q})$. Hagamos una translación de t :

$$\begin{aligned} q'(t, \epsilon) &= q(t + \epsilon) = \mathcal{R}(\epsilon)q(t) \\ \bar{q}(t, \epsilon) &= \mathcal{S}(\epsilon)q(t) = q(t - \epsilon) \end{aligned} \quad (1.100)$$

De lo anterior obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} = -\frac{dq_\alpha}{dt} = -\dot{q}_\alpha, \quad (1.101)$$

y

$$L_\epsilon = L(\bar{q}(t, \epsilon), \dot{\bar{q}}(t, \epsilon)) = L(q(t - \epsilon), \dot{q}(t - \epsilon)). \quad (1.102)$$

Calculamos ahora

$$\left(\frac{\partial L_\epsilon}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = - \left(\frac{dL}{d\tau} \right)_{\epsilon=0} = -\frac{dL}{dt}, \quad (1.103)$$

donde hemos usado $\tau = t - \epsilon$. Vemos, por tanto, que en este caso el lagrangiano no es simétrico respecto a la translación temporal, pero es cuasisimétrico. Usando (1.92) obtenemos que la cantidad conservada es:

$$h(q, \dot{q}) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L, \quad (1.104)$$

que, como veremos más adelante, es la energía bajo ciertas condiciones.

Ejemplo 2: Consideremos el lagrangiano de una partícula:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V(q_1^2 + q_2^2) + f(q_3). \quad (1.105)$$

Claramente el lagrangiano es invariante frente a rotaciones en el plano (q_1, q_2) :

$$q'_1 = q_1 \cos \epsilon + q_2 \sin \epsilon, \quad q'_2 = -q_1 \sin \epsilon + q_2 \cos \epsilon, \quad q'_3 = q_3. \quad (1.106)$$

La transformación inversa es

$$\bar{q}_1 = q_1 \cos \epsilon - q_2 \sin \epsilon, \quad \bar{q}_2 = q_1 \sin \epsilon + q_2 \cos \epsilon, \quad \bar{q}_3 = q_3. \quad (1.107)$$

Es fácil ver que la derivada de L_ϵ con respecto a ϵ es cero. La cantidad conservada es, por tanto,:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \bar{q}_\alpha}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -mq_2 \dot{q}_1 + mq_1 \dot{q}_2, \quad (1.108)$$

que es la componente z del momento angular.

1.7 Lagrangiano de una partícula libre

En esta Sección vamos a demostrar cómo a partir de consideraciones de simetría podemos deducir el lagrangiano de una partícula libre. Supongamos dos sistemas inerciales relacionados por una transformación de Galileo:

$$\vec{r} = R\vec{r}' + \vec{v}t + \vec{\xi} = \mathcal{S}(\epsilon)\vec{r}', \quad t = t' + \tau. \quad (1.109)$$

Sabemos que si una partícula es libre en el primer sistema ($\ddot{\vec{r}} = 0$) lo es también en el segundo sistema ($\ddot{\vec{r}}' = 0$). La transformación anterior depende de 10 parámetros (3 para las rotaciones, 3 para las velocidades, 3 para las traslaciones espaciales y 1 para la traslación temporal). Al tomar sucesivas transformaciones tales que todos los parámetros excepto uno son cero, podemos aplicar los métodos de la sección anterior. Evidentemente el lagrangiano será invariante al realizar cualquiera de estas diez transformaciones:

$$L_\epsilon(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = L\left(\mathcal{S}\vec{r}, \frac{d}{dt}\mathcal{S}\vec{r}, t + \tau\right). \quad (1.110)$$

Es decir los dos lagrangianos han de ser los mismos, lo que conduce a las mismas ecuaciones de movimiento.

Consideremos una traslación temporal, es decir $R = \mathbf{1}, \vec{v} = \vec{\xi} = 0$. La ecuación anterior se escribe $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t + \tau)$. Luego L no puede depender explícitamente de t .

Consideremos ahora una traslación espacial: $R = \mathbf{1}, \vec{v} = 0, \tau = 0$. En este caso $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r} + \vec{\xi}, \dot{\vec{r}})$. Por tanto L no puede depender de \vec{r} .

Tomemos ahora una rotación, $\vec{v} = \vec{\xi} = 0, \tau = 0$, entonces $L(\dot{\vec{r}}) = L(R\dot{\vec{r}})$ y L no puede depender de la dirección de $\dot{\vec{r}}$ sino solo de su módulo $\dot{\vec{r}}^2$.

Finalmente consideremos una transformación de galileo pura: $R = \mathbf{1}, \vec{\xi} = 0, \tau = 0$. Obtenemos $L(\dot{\vec{r}}^2) = L([\dot{\vec{r}} + \vec{v}]^2)$. Luego L tampoco puede depender del módulo de la velocidad. Es decir que L tiene que ser una constante que nos daría una ecuación de movimiento $0 = 0!!$. El problema estriba en que la exigencia de que los lagrangianos sean iguales es excesiva. Lo que tiene que ser igual son las ecuaciones de movimiento y sabemos que dos lagrangianos que se diferencian en la derivada total con respecto al tiempo de una función arbitraria de las posiciones dan lugar a las mismas ecuaciones de movimiento. Impongamos, por tanto, la invariancia en las ecuaciones del movimiento y no en el lagrangiano. Las ecuaciones del movimiento se escriben:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\alpha \partial \dot{x}_\beta} \ddot{x}_\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\alpha \partial x_\beta} \dot{x}_\beta + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\alpha \partial t} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (1.111)$$

Al hacer una transformación de Galileo \ddot{x}_α no cambia, luego su coeficiente en la ecuación anterior tampoco puede cambiar, es decir, ha de ser una constante:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_\alpha \partial \dot{x}_\beta} = K_{\alpha\beta}, \quad K_{\alpha\beta} = K_{\beta\alpha}. \quad (1.112)$$

Esto implica que el lagrangiano tiene que tener la siguiente forma:

$$L = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta + \dot{x}_\alpha F_\alpha(x, t) + G(x, t). \quad (1.113)$$

Las ecuaciones de movimiento se escriben:

$$K_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + \dot{x}_\beta \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (1.114)$$

Los tres últimos términos han de ser una constante para preservar su invariancia al hacer una transformación de Galileo. Como el segundo término es proporcional a \dot{x}_β ha de ser cero:

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial x_\alpha} \quad (1.115)$$

donde Ψ es una función arbitraria. Los dos últimos términos han de ser constantes:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = C_\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - C_\alpha, \quad (1.116)$$

cuya solución es:

$$G = \frac{\partial \Psi}{\partial t} - C_\alpha x_\alpha + A(t), \quad (1.117)$$

siendo $A(t)$ una función arbitraria. El lagrangiano se escribe ahora como

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta + \frac{\partial \Psi}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta + \frac{\partial \Psi}{\partial t} - C_\beta x_\beta + A(t) = \\ &= \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta - C_\beta x_\beta + \frac{d}{dt} \left(\Psi + \int A dt \right). \end{aligned} \quad (1.118)$$

El último término lo podemos eliminar ya que es una derivada total con respecto al tiempo que no afecta al lagrangiano. Entonces las ecuaciones de movimiento quedan:

$$K_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + C_\alpha = 0. \quad (1.119)$$

Consideremos ahora que realizamos una rotación: $x_\alpha = R_{\alpha\beta} x'_\beta$. El nuevo lagrangiano es:

$$L' = \frac{1}{2} K_{\alpha\beta} R_{\alpha\gamma} R_{\beta\delta} \dot{x}'_\gamma \dot{x}'_\delta - C_\alpha R_{\alpha\gamma} x'_\gamma, \quad (1.120)$$

y las ecuaciones de movimiento obtenidas con él son:

$$K_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta}\ddot{x}_\delta + C_\alpha R_{\alpha\gamma} = 0. \quad (1.121)$$

Estas ecuaciones han de ser idénticas a las anteriores, es decir:

$$K_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta} = K_{\gamma\delta} \quad C_\alpha R_{\alpha\gamma} = C_\gamma. \quad (1.122)$$

La última ecuación nos dice que \vec{C} ha de ser un vector invariante respecto de cualquier rotación. El único vector que cumple esta condición es el vector cero: $C_\alpha = 0$. Para ver cuanto vale $K_{\alpha\beta}$ tomamos la siguiente ecuación: $K_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = a$, donde a es una constante arbitraria. Esta ecuación nos define una superficie en el espacio. Si hacemos una rotación, la superficie anterior se transforma en: $K_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}R_{\beta\delta}x'_\gamma x'_\delta = a$, que teniendo en cuenta (1.122) se convierte en: $K_{\gamma\delta}x'_\gamma x'_\delta = a$, es decir la superficie es invariante respecto de las rotaciones. La única superficie que tiene esta propiedad es la esfera es decir:

$$K_{\alpha\beta} = k \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.123)$$

donde k es una constante arbitraria. Es decir, el lagrangiano que da lugar a ecuaciones de movimiento invariantes frente a las transformaciones de Galileo es:

$$L = \frac{1}{2}k\delta_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta = \frac{1}{2}k\dot{\vec{r}}^2 \quad (1.124)$$

que es el lagrangiano de la partícula libre.

Capítulo 2

FORMULACION HAMILTONIANA

2.1 Introducción

En un sistema con n grados de libertad las órbitas del sistema en el espacio de configuración vienen determinadas por las ecuaciones de Lagrange. Por otro lado siempre es posible reducir el orden de las ecuaciones de movimiento, que en el caso de las ecuaciones de Lagrange son de orden dos, a ecuaciones de un orden inferior duplicando el número de variables. Así, definiendo como variables el conjunto de $2n$ cantidades $q, u \equiv \dot{q}$ las ecuaciones de movimiento se convierten en

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = u_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial u_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (2.1)$$

Esta técnica puede resultar útil en ciertos casos con vistas a simplificar las ecuaciones. Habíamos visto, también, que dichas ecuaciones no cambian de forma si realizamos una transformación arbitraria de las coordenadas generalizadas q . Se puede conseguir una simplificación mayor haciendo transformaciones que mezclen las coordenadas q con las velocidades u . Sin embargo, debido a la forma asimétrica en que aparecen ambas cantidades en las ecuaciones de Lagrange, cualquier transformación general de la forma indicada anteriormente, destruiría la forma de las ecuaciones. Por tanto es conveniente introducir cantidades que den lugar a ecuaciones de movimiento simétricas respecto de ellas. La formulación Hamiltoniana consiste, básicamente, en la introducción de unas nuevas variables de tal forma que las ecuaciones de movimiento se escriben de una forma simétrica respecto de ellas, y son de primer orden.

2.2 Ecuaciones de Hamilton

En las ecuaciones (2.1), en lugar de q , podíamos haber usado como variables los momentos generalizados de las coordenadas:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}. \quad (2.2)$$

Estas n expresiones pueden ser invertidas y obtener \dot{q} como función de q y de p . La condición para que lo anterior sea invertible es que

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} \right| \neq 0. \quad (2.3)$$

Condición que hemos visto que se verificaba. Es decir de (2.2) obtenemos n ecuaciones de la forma $\dot{q}_\alpha = f(q, p, t)$, que junto con las ecuaciones de Lagrange $\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0$, constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden. Para asegurar la dependencia del lagrangiano respecto de las nuevas variables (q, p) hacemos una transformación de Lagrange:

$$H(q, p, t) = \dot{q}_\alpha(q, p, t) p_\alpha - L(q, \dot{q}(q, p, t), t). \quad (2.4)$$

Obviamente la función anterior solamente depende de las nuevas variables:

$$\begin{aligned} dH &= d\dot{q}_\alpha p_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt = \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt = -\dot{p}_\alpha dq_\alpha + \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (2.5)$$

De este resultado obtenemos:

$$\dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}. \quad (2.6)$$

Estas ecuaciones son las *ecuaciones canónicas del movimiento* en el formalismo hamiltoniano. La función H definida mediante la ecuación (2.4) se denomina *hamiltoniano* y las variables (q, p) que nos sirven para describir el movimiento del sistema se llaman *variables canónicas*.

De las ecuaciones (2.6) es fácil deducir las siguientes propiedades:

- Como habíamos comentado en la Introducción, las ecuaciones de movimiento presentan una gran simetría respecto de ambos conjuntos de variables.

- Las ecuaciones de movimiento constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya solución general dependerá de $2n$ constantes de integración.

- De la ecuación (2.5) obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (2.7)$$

es decir, si L no depende explícitamente de t entonces tampoco H . Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

H es una constante del movimiento si L , y por tanto H , no depende explícitamente de t .

- Habíamos visto que en algunos casos $L = T - V$ y que en general V no depende de \dot{q} . En este caso, suponiendo además que T es una función homogénea cuadrática de \dot{q} , obtenemos

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - (T - V) = 2T - T + V = T + V. \quad (2.9)$$

Es decir, bajo ciertas condiciones, el hamiltoniano coincide con la energía total del sistema.

El espacio de las variables (q, p) se denomina *espacio de fases* que, a diferencia del espacio de configuración, es un espacio de $2n$ dimensiones. Para poner de manifiesto la simetría que existe entre ambos grupos de variables introduciremos la siguiente notación: a partir de ahora usaremos ξ_α para indicar las variables del espacio de fases, donde α toma valores entre 1 y $2n$, y en términos de q, p las definimos como:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha &= q_\alpha, & \alpha &= 1, \dots, n \\ \xi_\alpha &= p_{\alpha-n}, & \alpha &= n+1, \dots, 2n. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Definimos ahora la *matriz simpléctica* del sistema como una matriz $2n \times 2n$ dada por:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & 0 \end{array} \right) = (\gamma_{\alpha\beta}), \quad (2.11)$$

donde cada una de las cajas de la matriz anterior representa una matriz $n \times n$. Veamos, como ejemplo, la forma de la matriz anterior en los casos de

uno y de dos grados de libertad:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Las propiedades de la matriz simpléctica son:

$$\begin{aligned} \Gamma^T \Gamma &= \mathbb{1}, & \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\rho} &= \delta_{\beta\rho}, \\ \Gamma^T + \Gamma &= 0, & \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha} &= 0, \\ \det \Gamma &= 1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Con esta notación es fácil ver que las ecuaciones de movimiento se escriben en la forma compacta

$$\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}. \quad (2.14)$$

2.3 Corchetes de Poisson

Sea F una *variable dinámica*, es decir una función de las variables del espacio de fases y del tiempo $F(\xi, t) = F(q, p, t)$. La variación de esta función a lo largo de las trayectorias del sistema en el espacio de fases es

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Definimos *corchetes de Poisson* de dos funciones F y G a una nueva función definida mediante la siguiente expresión:

$$[F, R] = \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial R}{\partial \xi_\beta} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial R}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial R}{\partial q_\alpha}. \quad (2.16)$$

Con esta definición la ecuación (2.15) la podemos escribir como:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de movimiento pueden escribirse, también, en términos de los corchetes de Poisson:

$$\dot{\xi}_\alpha = [\xi_\alpha, H]. \quad (2.18)$$

Los corchetes de Poisson son una aplicación entre las funciones del espacio de fases que verifican las siguientes propiedades:

i) *lineal*:

$$[\alpha F + \beta R, S] = \alpha [F, S] + \beta [R, S].$$

ii) *antisimetría*:

$$[F, R] = -[R, F].$$

iii) *regla del producto*:

$$[F, RS] = [F, R]S + [F, S]R.$$

iv) *identidad de Jacobi*:

$$[F, [R, S]] + [R, [S, F]] + [S, [F, R]] = 0.$$

v) El corchete de Poisson de dos coordenadas cualquiera vale:

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta] = \gamma_{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{cases} [q_\alpha, q_\beta] = [p_\alpha, p_\beta] = 0 \\ [q_\alpha, p_\beta] = \delta_{\alpha\beta} \end{cases} \quad (2.19)$$

La demostración de estas propiedades es trivial a partir de la definición (2.16).

2.4 Transformaciones en el espacio de fases

Un aspecto importante a la hora de estudiar las ecuaciones de movimiento es su comportamiento frente a cambios de coordenadas en el espacio de fases. Al hacer una transformación de coordenadas, las curvas $\xi_\alpha(t)$, solución de las ecuaciones de movimiento (2.14), se transforman en otras curvas $\eta_\alpha(t)$. La cuestión importante es saber si estas nuevas curvas verifican una ecuación de movimiento semejante a la ecuación (2.14), es decir si respecto de las nuevas coordenadas existe un hamiltoniano que representa al sistema físico cuya evolución viene descrita por las curvas $\eta_\alpha(t)$. Veamos primero un ejemplo:

Consideremos un oscilador armónico cuyo hamiltoniano es : $H = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2$. En este caso las ecuaciones de movimiento son $\dot{\xi}_1 = \xi_2$, $\dot{\xi}_2 = -\xi_1$, cuya solución general es $\xi_1(t) = a \sin(t + t_0)$, $\xi_2(t) = a \cos(t + t_0)$. Supongamos que hacemos una transformación en el espacio de fases dada por: $\eta_1 = \xi_1$, $\eta_2 = \xi_2^2$. Las trayectorias en términos de las nuevas coordenadas son: $\eta_1(t) = a \sin(t + t_0)$, $\eta_2(t) = a^2 \cos^2(t + t_0)$. Las ecuaciones de movimiento son: $\dot{\eta}_1 = a \cos(t + t_0) = \sqrt{\eta_2}$, $\dot{\eta}_2 = -2a^2 \cos(t + t_0) \sin(t + t_0) = -2\eta_1 \sqrt{\eta_2}$. El nuevo hamiltoniano $K(\eta, t)$ en esta coordenadas lo podemos obtener a partir de las ecuaciones canónicas:

$$\frac{\partial K}{\partial \eta_1} = -\dot{\eta}_2 = 2\eta_1 \sqrt{\eta_2}, \quad \frac{\partial K}{\partial \eta_2} = \dot{\eta}_1 = \sqrt{\eta_2}. \quad (2.20)$$

es fácil ver, sin embargo, que no existe ninguna función K que satisfice las ecuaciones anteriores ya que no se verifican las condiciones de integrabilidad.

Supongamos una transformación de coordenadas $\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t)$; el corchete de Poisson de dos funciones en terminos de las nuevas coordenadas viene dado por:

$$[R, S] = \frac{\partial R}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial S}{\partial \xi_\sigma} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\sigma} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} [\eta_\alpha, \eta_\beta] \frac{\partial S}{\partial \eta_\beta} \quad (2.21)$$

La solución general de las ecuaciones de movimiento describen unas curvas en el espacio de fases. Lo que nos preguntamos ahora es cuando un conjunto de curvas dadas en dicho espacio corresponden al movimiento de un sistema. La respuesta viene dada por el siguiente teorema:

Teorema: Sea $\xi_\alpha(t)$ un conjunto de curvas en el espacio de fases. Este conjunto representa el movimiento de un sistema con hamiltoniano $H(\xi, t)$ si y sólo si cualquier par de variables dinámicas $R(\xi, t)$ y $S(\xi, t)$ satisfacen:

$$\frac{d}{dt} [R, S] = \left[\frac{dR}{dt}, S \right] + \left[R, \frac{dS}{dt} \right]. \quad (2.22)$$

Demostremos primero la condición necesaria. Si el desarrollo está generado por $H(\xi, t)$:

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [[R, S], H] + \frac{\partial}{\partial t} [R, S] = [[R, H], S] + [R, [S, H]] + \frac{\partial}{\partial t} [R, S]. \quad (2.23)$$

Por otra parte, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [R, S] &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial \xi_\alpha \partial t} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_\beta \partial t} = \\ &= \left[\frac{\partial R}{\partial t}, S \right] + \left[R, \frac{\partial S}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sustituyendolo en la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{d}{dt} [R, S] = [[R, H] + \frac{\partial R}{\partial t}, S] + [R, [S, H] + \frac{\partial S}{\partial t}] = \left[\frac{dR}{dt}, S \right] + \left[R, \frac{dS}{dt} \right]. \quad (2.25)$$

Demostremos, ahora, la condición suficiente. Supongamos que (2.22) se verifica, y mostraremos que entonces existe una función H que cumple las ecuaciones (2.14). Si (2.22) se verifica para cualquier par de funciones entonces también se verificará cuando $R = \xi_\alpha$ y $S = \xi_\beta$:

$$\frac{d}{dt} [\xi_\alpha, \xi_\beta] = \frac{d}{dt} \gamma_{\alpha\beta} = 0 = [\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta] + [\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta]. \quad (2.26)$$

Sea $\dot{\xi}_\alpha = \Psi_\alpha(\xi, t)$, entonces lo anterior se escribe:

$$0 = \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \xi_\nu} + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\nu} = \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\beta} + \gamma_{\alpha\nu} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\nu}. \quad (2.27)$$

Si multiplicamos esta expresión por $\gamma_{\alpha\rho} \gamma_{\beta\sigma}$, teniendo en cuenta las propiedades de $\gamma_{\alpha\beta}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\beta} \gamma_{\alpha\rho} \gamma_{\beta\sigma} + \gamma_{\alpha\rho} \gamma_{\beta\sigma} \gamma_{\alpha\nu} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\nu} = -\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\mu} \delta_{\mu\sigma} \gamma_{\alpha\rho} + \delta_{\rho\nu} \gamma_{\beta\sigma} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\nu} = \\ &= -\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\sigma} \gamma_{\alpha\rho} + \gamma_{\beta\sigma} \frac{\partial \Psi_\beta}{\partial \xi_\rho}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Si existe una función H de la cual se derivan las curvas ξ_α se verifica lo siguiente:

$$\gamma_{\rho\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \dot{\xi}_\rho, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \dot{\xi}_\alpha = \Psi_\alpha \gamma_{\alpha\beta}. \quad (2.29)$$

Esta ecuación es la que determina la función H . Para que el sistema de ecuaciones diferenciales anterior tenga solución se han de cumplir las condiciones de integrabilidad:

$$0 = \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\rho \partial \xi_\sigma} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi_\sigma \partial \xi_\rho} = \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\sigma} \gamma_{\alpha\rho} - \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\alpha\sigma}. \quad (2.30)$$

que es, precisamente, la ecuación (2.28). Por tanto al verificarse las condiciones de integrabilidad el sistema anterior tiene solución y por tanto existe la función H .

Como corolario del teorema anterior deducimos que si R y S son constantes del movimiento entonces también lo es la función $[R, S]$. Lo que, sin embargo, no está asegurado es que el corchete sea independiente de las dos funciones.

2.5 Transformaciones Canónicas

Habíamos visto que al resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange, a veces, se recurría a realizar una transformación de coordenadas que simplificara las ecuaciones de movimiento. Una transformación de coordenadas también podía servir para encontrar cantidades conservadas. Una propiedad importante de la mecánica lagrangiana es que, frente a las transformaciones de coordenadas, las ecuaciones de movimiento no cambian. Adaptaremos aquí el mismo punto de vista, es decir vamos a considerar transformaciones en el espacio

de fases para intentar simplificar las ecuaciones de movimiento. Supongamos que $(q(t), p(t))$ describen el movimiento de un sistema en el espacio de fases en forma paramétrica. Si realizamos un cambio de coordenadas y a las nuevas las denominamos Q, P , las trayectorias con estas nuevas coordenadas serán $(Q(t), P(t))$. Lo que no es evidente, como vimos en la Sección anterior, es que estas nuevas curvas deriven de un hamiltoniano, e incluso en este caso, que el nuevo hamiltoniano sea la transformación del anterior. Llamaremos *transformación canónica* a aquella transformación que hace que las nuevas curvas deriven de un hamiltoniano y, por tanto, mantiene las ecuaciones canónicas del movimiento.

Supongamos un sistema dado por el hamiltoniano $H(\xi, t)$ y una transformación en el espacio de fases:

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t). \quad (2.31)$$

Respecto de las nuevas coordenadas, la variación a lo largo de las trayectorias del sistema viene dada por

$$\dot{\eta}_\alpha = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\beta} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = [\eta_\alpha, H] + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t}. \quad (2.32)$$

Invirtiendo (2.31), obtenemos $\xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta, t)$ y de aquí $\dot{\eta}_\alpha = \psi_\alpha(\eta, t)$. Si la transformación es canónica, de (2.32) obtenemos:

$$\psi_\alpha(\eta, t) = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta}, \quad (2.33)$$

donde $K(\eta, t)$ es el nuevo hamiltoniano en las nuevas coordenadas. Evidentemente, no todas las transformaciones verifican lo anterior. Cuando una transformación cumple lo anterior sólo para un hamiltoniano determinado y no para otros hamiltonianos se denomina *transformación canonoide*. La diferencia con la canónica es que ésta se verifica para cualquier hamiltoniano. Veamos un ejemplo:

Ejemplo: Sea el hamiltoniano $H = 1/2 p^2$, cuyas ecuaciones canónicas son

$$\dot{p} = 0 \quad \dot{q} = p. \quad (2.34)$$

Consideremos la transformación:

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t) : \begin{cases} Q = q \\ P = \sqrt{p} - q^2 \end{cases} \Rightarrow \xi_\alpha = \xi_\alpha(\eta, t) : \begin{cases} q = Q \\ p = (P + Q^2)^2 \end{cases} \quad (2.35)$$

Las nuevas ecuaciones de movimiento las encontramos derivando la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{q} = p = (P + Q^2)^2 = \frac{\partial K}{\partial P}, \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -2qp = -2Q(P + Q^2)^2 = -\frac{\partial K}{\partial Q}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

Con la última igualdad en ambas ecuaciones planteamos la ecuación diferencial que ha de satisfacer el nuevo hamiltoniano $K(Q, P, t)$, si existe. En este caso es fácil ver que $K = 1/3 (P + Q^2)^3$. Es interesante comprobar que este nuevo hamiltoniano no se obtiene cambiando las coordenadas en H . De esta forma hemos demostrado que la transformación (2.35) al menos es canonoide para el hamiltoniano del problema. Para demostrar que es canónica tendríamos que demostrar la existencia de K para cualquier hamiltoniano H . Veamos que, efectivamente, la transformación anterior es canonoide. Para ello consideremos el siguiente hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2, \quad (2.37)$$

cuyas ecuaciones de movimiento son: $\dot{q} = p$ y $\dot{p} = -q$. Repitiendo lo mismo que antes:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{q} = p = (P + Q^2)^2 = \frac{\partial K}{\partial P}, \\ \dot{P} &= \frac{\dot{p}}{2\sqrt{p}} - 2q\dot{q} = -\frac{q}{2\sqrt{p}} - 2qp = \\ &= -\frac{1}{2}Q(P + Q^2)^{-1} - 2Q(Q + P^2)^2 = -\frac{\partial K}{\partial Q}.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Sin embargo, en este caso no existe la función K ya que la condición de integrabilidad del sistema anterior no se satisface:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} \neq \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q}. \quad (2.39)$$

Para ver cuando una transformación es canónica usaremos el siguiente teorema:

Teorema: Sean R y S dos variables dinámicas que dependen de las coordenadas del espacio de fases ξ_α y de t . Sea $\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t)$ una transformación de coordenadas en el espacio de fases, invertible. Entonces los siguientes resultados son equivalentes:

i) La transformación es canónica.

ii) Se verifica el siguiente resultado:

$$[R, S]^n = \lambda [R, S]^\xi \quad (2.40)$$

donde λ es una constante diferente de cero. (El superíndice en los corchetes determina las coordenadas respecto de las cuales han de ser calculados).

iii) La transformación es canonoide con respecto a todos los hamiltonianos de la forma:

$$H = c + c_\alpha \xi_\alpha + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \quad (2.41)$$

donde c, c_α y $\omega_{\alpha\beta}$ son constantes.

Lo que dice este teorema es que si uno de los tres resultados anteriores se cumple también se verifican los otros dos. El tercer resultado es usado para demostrar que i) implica ii). Veamos la demostración:

Es trivial ver que i) \Rightarrow iii), ya que si la transformación es canónica por tanto también lo será para el hamiltoniano (2.41). Veamos ahora que ii) \Rightarrow i):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[R, S]^n &= \lambda \frac{d}{dt}[R, S]^\xi = \lambda \left(\left[\frac{dR}{dt}, S \right]^\xi + \left[R, \frac{dS}{dt} \right]^\xi \right) = \\ &= \left[\frac{dR}{dt}, S \right]^n + \left[R, \frac{dS}{dt} \right]^n, \end{aligned} \quad (2.42)$$

es decir, $\eta_\alpha(t)$ está generado por un hamiltoniano, independientemente del hamiltoniano de partida. Por tanto la transformación es canónica.

Finalmente demostremos que iii) \Rightarrow ii). Consideremos primero el caso cuando $c_\alpha = \omega_{\alpha\beta} = 0$, es decir $H = c$. Las ecuaciones de movimiento son $\dot{\xi}_\alpha = 0$. Como la transformación es canonoide, $\eta_\alpha(t)$ deriva de un hamiltoniano y, por tanto, se verifica:

$$\frac{d}{dt}[\xi_\alpha, \xi_\beta]^n = [\dot{\xi}_\alpha, \xi_\beta]^n + [\xi_\alpha, \dot{\xi}_\beta]^n = 0. \quad (2.43)$$

Usando la transformación inversa podemos escribir el corchete anterior en términos de las coordenadas ξ y definimos:

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta]^n = \varphi_{\alpha\beta}(\xi, t). \quad (2.44)$$

Las funciones $\varphi_{\alpha\beta}(\xi, t)$ no dependen de la forma particular del hamiltoniano sino solo de la transformación. Como $H = c$, la ecuación (2.43) la podemos escribir:

$$0 = \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt} = [\varphi_{\alpha\beta}, H]^\xi + \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial t}. \quad (2.45)$$

Es decir $\varphi_{\alpha\beta}(\xi, t)$ no depende explícitamente de t .

Tomamos ahora $c = \omega_{\alpha\beta} = 0$, es decir $H = c_\alpha \xi_\alpha$, y las ecuaciones de movimiento son $\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} c_\beta$. Haciendo lo mismo de antes llegamos a la misma ecuación que (2.43), ya que $\dot{\xi}_\alpha$ son constantes. Así obtenemos:

$$0 = \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt} = [\varphi_{\alpha\beta}, H]^\xi + \frac{\partial\varphi_{\alpha\beta}}{\partial t} = [\varphi_{\alpha\beta}, c_\rho \xi_\rho]^\xi = \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{d\xi_\sigma} \gamma_{\sigma\nu} c_\nu. \quad (2.46)$$

Como las constantes c_α son arbitrarias lo anterior nos dice que las funciones $\varphi_{\alpha\beta}$ tampoco dependen de ξ_α , es decir son constantes.

Finalmente consideremos el caso cuando $c = c_\alpha = 0$, es decir $H = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$, siendo las ecuaciones de movimiento $\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}\omega_{\beta\rho}\xi_\rho$. Haciendo como antes y teniendo presente que $\varphi_{\alpha\beta}$ son constantes, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}[\xi_\alpha, \xi_\beta]^\eta = \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dt} = 0 = \gamma_{\alpha\rho}\omega_{\rho\sigma}[\xi_\sigma, \xi_\beta]^\eta + \gamma_{\beta\rho}\omega_{\rho\sigma}[\xi_\alpha, \xi_\sigma]^\eta. \quad (2.47)$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$0 = \gamma_{\alpha\rho}\omega_{\rho\sigma}\varphi_{\sigma\beta} + \varphi_{\alpha\sigma}\gamma_{\beta\rho}\omega_{\rho\sigma}. \quad (2.48)$$

La ecuación anterior la podemos expresar en forma matricial, definiendo las cantidades $\varphi_{\alpha\beta}$ como una matriz M y $\omega_{\alpha\beta}$ como Ω :

$$\Gamma\Omega M = M\Omega\Gamma \quad (2.49)$$

Si multiplicamos a la derecha por Γ^T y a la izquierda por $-\Gamma$ obtenemos: (recordemos las propiedades (2.13) de la matriz Γ)

$$\Omega M\Gamma = \Gamma M\Omega. \quad (2.50)$$

Como la matriz Ω es arbitraria podemos tomar $\Omega = 1$ es decir $M\Gamma = \Gamma M$, es decir $M\Gamma$ es simétrica, y obtenemos:

$$\Omega(M\Gamma) = (M\Gamma)\Omega, \quad (2.51)$$

es decir, $M\Gamma$ es una matriz simétrica que conmuta con todas las matrices simétricas. Se puede demostrar que si una matriz simétrica conmuta con todas las matrices simétricas entonces es un múltiplo de la matriz unidad. Por razones de simplificación tomaremos este múltiplo negativo:

$$M\Gamma = -\lambda \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad M = \lambda\Gamma, \quad (2.52)$$

y obtenemos, por tanto,

$$\varphi_{\sigma\beta} = [\xi_\alpha, \xi_\beta]^\eta = \lambda\gamma_{\alpha\beta} \quad (2.53)$$

Finalmente, el corchete de dos variables dinámicas, usando (2.21), es:

$$[R, S]^\eta = \frac{\partial R}{\partial \xi_\rho} [\xi_\rho, \xi_\sigma]^\eta \frac{\partial S}{\partial \xi_\sigma} = \lambda [R, S]^\xi \quad (2.54)$$

Con lo que completamos la demostración.

i) \Rightarrow ii) ya que i) \Rightarrow iii) \Rightarrow ii), con lo que el teorema queda demostrado.

Este teorema nos permite determinar de una manera sencilla cuando una transformación de coordenadas en el espacio de fases es o no canónica. Para ello usamos este teorema y el resultado dado por (2.21). De (2.21) obtenemos que:

$$[R, S]^\eta = \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha} [\xi_\alpha, \xi_\beta]^\eta \frac{\partial S}{\partial \xi_\beta}, \quad (2.55)$$

y para que la transformación sea canónica:

$$[R, S]^\eta = \lambda [R, S]^\xi \quad (2.56)$$

luego, la condición necesaria y suficiente para que la transformación sea canónica es que

$$[\xi_\alpha, \xi_\beta]^\eta = \lambda \gamma_{\alpha\beta}. \quad (2.57)$$

La constante λ puede ser absorbida redefiniendo la transformación, es decir, que sin pérdida de generalidad tomaremos a partir de ahora $\lambda = 1$. Lo que nos indica el resultado anterior es que las transformaciones canónicas son aquellas cuya matriz jacobiana deja invariante la matriz simpléctica del espacio de fases. Por otra parte es fácil demostrar que las transformaciones canónicas forman un grupo.

2.6 Función generatriz

Hemos visto un criterio sencillo para determinar cuando una transformación en el espacio de fases es canónica. Un problema importante que nos queda por resolver es la forma del nuevo hamiltoniano. Vamos a ver en esta sección como encontrar este hamiltoniano y demostraremos que las transformaciones canónicas pueden ser derivadas a partir de una función. Esto nos permitirá, más adelante, clasificar dichas transformaciones. A partir de ahora vamos a considerar sólo aquellas transformaciones para las cuales $\lambda = 1$. Ya hemos dicho que en caso contrario podemos redefinir la constante λ absorbiéndola en la propia transformación. En este caso se verifica:

$$[\eta_\alpha, \eta_\beta]^\xi = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\sigma} = \gamma_{\alpha\beta}. \quad (2.58)$$

Tomando determinantes en esta ecuación:

$$\left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right|^2 |\Gamma| = |\Gamma| \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right| = \pm 1. \quad (2.59)$$

Supongamos una transformación canónica $\eta_\alpha = \eta_\alpha(\xi, t)$. Consideremos la siguiente expresión:

$$\lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu \xi_\nu - \lambda_{\mu\nu} \dot{\eta}_\mu \eta_\nu, \quad (2.60)$$

donde $\lambda_{\mu\nu}$ son los elementos de una matriz Λ de $2n \times 2n$ elementos definida por:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = (\lambda_{\alpha\beta}). \quad (2.61)$$

Esta matriz verifica la siguiente propiedad:

$$\Lambda - \Lambda^T = \Gamma, \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu} = \gamma_{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

El significado de la expresión (2.60) quedará claro más adelante. En esta expresión consideramos todas las cantidades funciones de las coordenadas ξ_α . Es decir:

$$\dot{\eta}_\alpha = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \dot{\xi}_\mu + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t}. \quad (2.63)$$

Sustituyéndolo en (2.60):

$$\begin{aligned} \lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu \xi_\nu - \lambda_{\mu\nu} \dot{\eta}_\mu \eta_\nu &= \lambda_{\mu\nu} \dot{\xi}_\mu \xi_\nu - \lambda_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \eta_\mu}{\partial \xi_\alpha} \dot{\xi}_\alpha + \frac{\partial \eta_\mu}{\partial t} \right) \eta_\nu = \\ &= \left(\lambda_{\mu\nu} \xi_\nu - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \eta_\beta \right) \dot{\xi}_\mu - \lambda_{\mu\nu} \frac{\partial \eta_\mu}{\partial t} \eta_\nu \equiv \varphi_\mu \dot{\xi}_\mu + \Psi, \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde hemos definido las siguientes cantidades:

$$\varphi_\mu = \lambda_{\mu\nu} \xi_\nu - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \eta_\beta, \quad \Psi = -\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial \eta_\mu}{\partial t} \eta_\nu. \quad (2.65)$$

Realizamos ahora el siguiente cálculo:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \xi_\nu} = \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu \partial \xi_\nu} \eta_\beta - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}. \quad (2.66)$$

Y de aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi_\mu} &= \lambda_{\mu\nu} - \lambda_{\nu\mu} - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} + \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} = \\ &= \gamma_{\mu\nu} - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} + \lambda_{\beta\alpha} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Definimos *corchetes de Lagrange* respecto a la variable η a las siguientes cantidades:

$$\{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu}. \quad (2.68)$$

Con esta definición lo anterior se escribe:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi_\mu} = \gamma_{\mu\nu} - \{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta. \quad (2.69)$$

Vamos a demostrar que los corchetes de Lagrange están relacionados con los corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta [\xi_\mu, \xi_\rho]^\eta &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \eta_\sigma} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial \eta_\tau} \gamma_{\sigma\tau} = \\ &= \delta_{\alpha\sigma} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\sigma\tau} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial \eta_\tau} = \\ &= \delta_{\beta\tau} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial \eta_\tau} = \frac{\partial \eta_\tau}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\rho}{\partial \eta_\tau} = \delta_{\rho\nu}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Si la transformación es canónica

$$\{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta \gamma_{\mu\rho} = \delta_{\rho\nu}. \quad (2.71)$$

Multiplicando esta ecuación por $\gamma_{\sigma\rho}$ obtenemos:

$$\{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta \gamma_{\mu\rho} \gamma_{\sigma\rho} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\}^\eta \delta_{\mu\sigma} = \{\xi_\sigma, \xi_\nu\}^\eta = \gamma_{\sigma\nu}. \quad (2.72)$$

Antes de proseguir es interesante ver que una condición necesaria y suficiente para que la transformación sea canónica es que $\{\xi_\sigma, \xi_\nu\}^\eta = \gamma_{\sigma\nu}$.

Hemos demostrado la condición necesaria, demostremos que si lo anterior se verifica entonces la transformación es canónica. Esto es trivial de demostrar; usando (2.70) obtenemos que $[\xi_\sigma, \xi_\nu]^\eta = \gamma_{\sigma\nu}$ y por tanto la transformación es canónica.

Sustituyendo (2.72) en (2.69) obtenemos:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \xi_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi_\mu} = \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\nu} = 0. \quad (2.73)$$

Esto significa que existe una función $F(\xi, t)$ tal que:

$$\varphi_\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} \quad (2.74)$$

De esta forma hemos conseguido obtener una nueva relación para la función φ_μ . Veamos ahora como hacer lo mismo para la función Ψ ; para ello calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_\mu} &= -\lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial t \partial \xi_\mu} \eta_\beta - \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial t} + \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \eta_\alpha}{\partial t \partial \xi_\mu} \eta_\beta + \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} = \\ &= \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} - \lambda_{\beta\alpha} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} = \{t, \xi_\mu\}^\eta. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Al ser una transformación canónica, tenemos que:

$$\dot{\xi}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}, \quad \dot{\eta}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta}, \quad (2.76)$$

donde K representa el nuevo hamiltoniano en términos de las nuevas coordenadas η . De esta última expresión deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha &= \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \frac{\eta_\alpha}{\partial t}, \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} &= \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta} - \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Sustituyendo esta expresión en (2.75) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_\mu} &= -\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\rho} \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial \xi_\mu} + \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\eta_\beta}{\partial \xi_\mu} = \\ &= -\{\xi_\rho, \xi_\mu\}^\eta \gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \delta_{\rho\beta} \frac{\partial K}{\partial \eta_\rho} \frac{\eta_\beta}{\partial \xi_\mu} = -\delta_{\mu\sigma} \frac{\partial H}{\partial \xi_\sigma} + \frac{\partial K}{\partial \eta_\beta} \frac{\eta_\beta}{\partial \xi_\mu} = \\ &= -\frac{\partial H}{\partial \xi_\mu} + \frac{\partial K}{\partial \xi_\mu} = \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (-H + K). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Finalmente obtenemos de (2.74):

$$0 = \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} (\Psi - H + K) - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \left(\Psi - H + K - \frac{\partial F}{\partial t} \right). \quad (2.79)$$

Es decir $\Psi - H + K - \frac{\partial F}{\partial t}$ es una función solo de t . F viene definida por (2.74), es decir que está determinada salvo una función arbitraria de t . Podemos tomar, por tanto, una función de t tal que se verifique que

$$\Psi - H + K = \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.80)$$

Por último sustituimos en (2.64) los valores obtenidos para φ_μ y para Ψ :

$$\lambda_{\mu\nu}\dot{\xi}_\mu\xi_\nu - \lambda_{\mu\nu}\dot{\eta}_\mu\eta_\nu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu}\dot{\xi}_\mu + H - K + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (2.81)$$

y de aquí obtenemos

$$\left(\lambda_{\mu\nu}\dot{\xi}_\mu\xi_\nu - H\right) - \left(\lambda_{\mu\nu}\dot{\eta}_\mu\eta_\nu - K\right) = \frac{dF}{dt}. \quad (2.82)$$

Además habíamos obtenido las siguientes ecuaciones:

$$\varphi_\mu = \frac{\partial F}{\partial \xi_\mu} = \lambda_{\mu\nu}\xi_\nu - \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial \xi_\mu}\eta_\beta \quad (2.83)$$

$$\Psi = H - K + \frac{\partial F}{\partial t} = -\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial \eta_\mu}{\partial t}\eta_\nu. \quad (2.84)$$

Si $\eta(\xi, t)$ es una transformación canónica, de la ecuación (2.83) podemos encontrar la función F , llamada *función generatriz* de dicha transformación, salvo una función arbitraria de t . Conocida la función F , la ecuación (2.84) nos permite encontrar el hamiltoniano K , salvo una función de t , que es irrelevante ya que no interviene en las ecuaciones de movimiento que se derivan de él. De esta forma asociamos una función, la función generatriz, a cada transformación canónica que, además, nos permite calcular el nuevo hamiltoniano. Las ecuaciones anteriores las podemos contemplar en el sentido inverso, es decir, supongamos una función arbitraria $F(\xi, t)$, la ecuación (2.83) representa un sistema de ecuaciones diferenciales para las funciones $\eta(\xi, t)$ que nos permiten calcular la transformación canónica asociada con dicha función; y de nuevo la ecuación (2.84) da el hamiltoniano. En este caso, al contrario que lo anterior, para cada función F no obtenemos una sola transformación canónica ya que las ecuaciones (2.83) para las funciones η no son lineales. Es decir a cada función F le puede corresponder más de una transformación canónica.

Si la transformación canónica no depende explícitamente de t ($\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = 0$), lo más simple es suponer que la función F tampoco depende explícitamente de t . En este caso obtenemos que $H = K$.

Es interesante escribir las ecuaciones (2.82)-(2.84) en términos de las variables (q, p) . Las variables correspondientes a η las denominaremos (Q, P) . La ecuación (2.81) se escribe:

$$\left(\dot{q}_\mu p_\mu - H\right) - \left(\dot{Q}_\mu P_\mu - K\right) = \frac{dF}{dt}. \quad (2.85)$$

Ahora podemos ver más claramente el significado de la expresión de partida (2.60): cada uno de los sumandos de la parte izquierda de la expresión anterior es el lagrangiano obtenido a partir de cada uno de los hamiltonianos correspondientes. Como ambos nos dan las mismas ecuaciones de movimiento, las funcionales de acción correspondientes han de ser iguales salvo la derivada total con respecto al tiempo de una función F que al calcular la integral de acción se anulará en los puntos inicial y final de la trayectoria del sistema:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_\mu p_\mu - H) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{Q}_\mu P_\mu - K) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \quad (2.86)$$

La ecuación (2.83) se escribe:

$$\boxed{p_\mu - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu} P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\mu}, \quad -\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\mu}.} \quad (2.87)$$

Finalmente escribimos la ecuación (2.84):

$$\boxed{-H + K - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial t}.} \quad (2.88)$$

2.7 Clasificación de la función generatriz

Hemos visto como podemos asociar a cada transformación canónica una función F . También podemos verlo a la inversa, es decir, dada una función arbitraria F encontramos una transformación canónica resolviendo las ecuaciones diferenciales (2.83). Vamos a ver en esta Sección cómo imponiendo una condición adicional podemos simplificar las ecuaciones diferenciales (2.83) y clasificar parcialmente la función F .

Supongamos que la transformación canónica que nos pasa de las coordenadas (q, p) a las coordenadas (Q, P) es tal que las cantidades (q, Q) constituyen un sistema de $2n$ cantidades independientes entre sí. Veamos un ejemplo: sea la transformación $Q_\alpha = -p_\alpha$, $P_\alpha = q_\alpha$. Es fácil ver que esta transformación es canónica y que la función generatriz, resolviendo (2.87) es $F = q_\mu p_\mu$. Las cantidades (q, Q) en esta transformación forman un conjunto de $2n$ cantidades independientes, lo mismo que (p, P) . Por tanto vamos a considerar ahora las transformaciones canónicas para las cuales las cantidades (q, Q) , o (q, P) , o (p, Q) o (p, P) son independientes. Esto dará lugar a cuatro tipos diferentes de transformaciones y por tanto cuatro tipos de función F . Sin

embargo puede ocurrir que una transformación no pertenezca a ninguno de estos tipos o que pertenezca a más de uno a la vez, como hemos visto en el ejemplo anterior.

Supongamos, por tanto, una transformación canónica

$$q_\alpha = q_\alpha(Q, P, t), \quad p_\alpha = p_\alpha(Q, P, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p, q, t), \quad P_\alpha = P_\alpha(p, q, t), \quad (2.89)$$

tal que las cantidades (q, Q) son independientes entre sí. La tercera ecuación la podemos invertir obteniendo:

$$p_\alpha = p_\alpha^1(q, Q, t). \quad (2.90)$$

Sustituyendo lo anterior en la función F :

$$F(q, p^1, t) = F^1(q, Q, t). \quad (2.91)$$

De esta relación obtenemos las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial F^1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu^1}{\partial q_\alpha}, \quad \frac{\partial F^1}{\partial Q_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu^1}{\partial Q_\alpha}. \quad (2.92)$$

Por otro lado como q, Q son independientes

$$\frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} = 0 = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\mu} \frac{\partial p_\mu^1}{\partial q_\beta}. \quad (2.93)$$

Usando (2.87) en estas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{\partial F^1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\mu} P_\beta \frac{\partial p_\mu^1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} P_\beta = p_\alpha \quad (2.94)$$

y

$$\frac{\partial F^1}{\partial Q_\alpha} = -\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_\mu} P_\beta \frac{\partial p_\mu^1}{\partial Q_\alpha} = -\frac{\partial Q_\beta}{\partial Q_\alpha} P_\beta = -\delta_{\alpha\beta} P_\beta = -P_\alpha. \quad (2.95)$$

Al suponer la independencia entre q y Q vemos que las ecuaciones (2.87) se reducen a las ecuaciones (2.94) y (2.95) que son mucho más sencillas. Partiendo de una función arbitraria $F^1(q, Q, t)$, de (2.94) obtenemos p como función de q, Q y t . Invertiendo estas funciones obtenemos Q como función de q, p y t . Finalmente P viene dado por (2.95) con lo que obtenemos la transformación canónica asociada a la función F^1 de partida. El hamiltoniano K lo determinamos a partir de (2.88):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F^1}{\partial t} + \frac{\partial F^1}{\partial Q_\alpha} \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial F^1}{\partial t} - P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial F^1}{\partial t}. \quad (2.96)$$

Lo anterior lo podíamos haber obtenido de una forma más sencilla a partir de la expresión (2.85):

$$(\dot{q}_\mu p_\mu - H) - (\dot{Q}_\mu P_\mu - K) = \frac{\partial F^1}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial F^1}{\partial Q_\mu} \dot{Q}_\mu + \frac{\partial F^1}{\partial t}. \quad (2.97)$$

Multiplicando por dt y teniendo en cuenta que las variables independientes son q , Q y t obtenemos las ecuaciones (2.94)-(2.96).

Lo anterior constituye las transformaciones canónicas de tipo I. Consideraremos ahora las de tipo II para las cuales las cantidades independientes son q y P . Como antes suponemos que de (2.89) obtenemos p y Q como función de q , P y t . En este caso partimos de la función \bar{F}^2 definida como:

$$\bar{F}^2(q, P, t) = F(q, p(q, P, t), t). \quad (2.98)$$

Usamos la expresión (2.85), teniendo en cuenta que las variables independientes son q , P y t :

$$\begin{aligned} \dot{q}_\mu p_\mu - H - \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial Q_\mu}{\partial P_\alpha} \dot{P}_\alpha + \frac{\partial Q_\mu}{\partial t} \right) P_\mu + K = \\ = \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial P_\mu} \dot{P}_\mu + \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

De esta expresión obtenemos:

$$p_\mu - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\mu} P_\alpha - \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial q_\mu} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_\mu = \frac{\partial}{\partial q_\mu} (\bar{F}^2 + Q_\alpha P_\alpha), \quad (2.100)$$

$$-\frac{\partial Q_\alpha}{\partial P_\mu} P_\alpha - \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial P_\mu} = 0, \quad \Rightarrow \quad Q_\mu = \frac{\partial}{\partial P_\mu} (\bar{F}^2 + Q_\alpha P_\alpha), \quad (2.101)$$

$$-H + K - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} P_\alpha - \frac{\partial \bar{F}^2}{\partial t} = 0, \quad \Rightarrow \quad K = H + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{F}^2 + Q_\alpha P_\alpha). \quad (2.102)$$

Definimos ahora la función F^2 :

$$F^2(q, P, t) = \bar{F}^2 + Q_\alpha P_\alpha \quad (2.103)$$

que será la función generatriz de las transformaciones de tipo II. Vemos que F^2 la obtenemos mediante una transformación de Legendre de F^1 . Las ecuaciones son:

$$p_\mu = \frac{\partial F^2}{\partial q_\mu}, \quad Q_\mu = \frac{\partial F^2}{\partial P_\mu}, \quad K = H + \frac{\partial F^2}{\partial t}. \quad (2.104)$$

Dos transformaciones importantes que pertenecen a este tipo son la transformación identidad, cuya función generatriz es $F^2 = q_\mu P_\mu$, y las transformaciones puntuales generadas por la función $F^2 = f_\mu(q, t)P_\mu$.

Las transformaciones de tipo III y IV se obtienen de la misma forma que las anteriores.

2.8 Familia continua de transformaciones canónicas

Vamos a considerar ahora una familia de transformaciones canónicas continuamente conectadas con la identidad y dependientes de un parámetro θ . Tomaremos el parámetro de tal forma que la transformación identidad corresponda a $\theta = 0$. Supongamos que la familia de transformaciones viene descrita por:

$$\xi_\alpha = \xi_\alpha(\xi^0, t, \theta). \quad (2.105)$$

Hemos cambiado la notación usada hasta ahora; las coordenadas de partida las denominaremos ahora ξ_α^0 , y las coordenadas nuevas serán ξ_α . El motivo de este cambio quedará más evidente al final de la Sección. Para cada valor del parámetro θ tenemos una transformación canónica a la que podemos asociar una función generatriz F . Es evidente, por tanto, que dicha función dependerá de θ , además de las coordenadas de partida ξ_α^0 y de t . La transformación inversa es:

$$\xi_\alpha^0 = \xi_\alpha^0(\xi, t, \theta). \quad (2.106)$$

La dependencia en θ de las transformaciones anteriores no puede ser arbitraria ya que estamos imponiendo que todas las transformaciones deben ser canónicas. Queremos por tanto obtener cual es la condición que ha de verificar la familia de transformaciones (2.105). Para ello partimos de la condición de transformación canónica (2.83):

$$\lambda_{\mu\nu}\xi_\nu^0 - \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\xi_\mu^0}\xi_\beta = \frac{\partial F}{\partial\xi_\mu^0}. \quad (2.107)$$

Derivando esta expresión con respecto a θ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\xi_\mu^0}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\theta} + \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\xi_\alpha}{\partial\xi_\mu^0\partial\theta}\xi_\beta + \frac{\partial^2 F}{\partial\xi_\mu^0\partial\theta} = \\ &= \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\xi_\mu^0}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\theta} - \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\xi_\mu^0}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\xi_\mu^0}\left(\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\theta}\xi_\beta\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial\xi_\mu^0\partial\theta} = \\ &= \gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\xi_\mu^0}\frac{\partial\xi_\beta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\xi_\mu^0}\left(\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi_\alpha}{\partial\theta}\xi_\beta + \frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = \end{aligned}$$

2.8. FAMILIA CONTINUA DE TRANSFORMACIONES CANÓNICAS 55

$$= \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0}, \quad (2.108)$$

donde hemos definido una nueva función:

$$\bar{G}(\xi^0, t, \theta) \equiv \lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \theta} \xi_\beta + \frac{\partial F}{\partial \theta}. \quad (2.109)$$

Multiplicamos lo anterior por $\frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu} = \gamma_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\nu} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu} = \\ &= \gamma_{\nu\beta} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Multiplicamos ahora por $\gamma_{\nu\alpha}$, y teniendo en cuenta las propiedades de la matriz Γ , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_{\nu\beta} \gamma_{\nu\alpha} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \gamma_{\nu\alpha} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu} = \delta_{\beta\alpha} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \theta} + \gamma_{\nu\alpha} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu} = \\ &= \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \theta} + \gamma_{\nu\alpha} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\mu^0} \frac{\partial \xi_\mu^0}{\partial \xi_\nu}. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Definimos:

$$G(\xi, t, \theta) = \bar{G}(\xi^0(\xi, t, \theta), t, \theta) \quad (2.112)$$

y, entonces, (2.111) se escribe:

$$\boxed{\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \theta} = \gamma_{\alpha\nu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu}} \quad (2.113)$$

Esta es la ecuación diferencial que ha de verificar la familia de transformaciones para que todas ellas sean canónicas, siendo la función G la función generatriz de dicha familia. Podemos partir de una función arbitraria G y obtener la transformación canónica resolviendo las ecuaciones diferenciales anteriores. Para obtener una solución necesitamos una condición inicial ξ^0 que representa las coordenadas de partida. La solución, por tanto, describe la “trayectoria” $\xi(\theta)$ que siguen las coordenadas a partir de la condición inicial mediante la serie de transformaciones.

Es interesante notar que la ecuación (2.113) es formalmente idéntica a las ecuaciones canónicas del movimiento. Es decir, el desplazamiento por

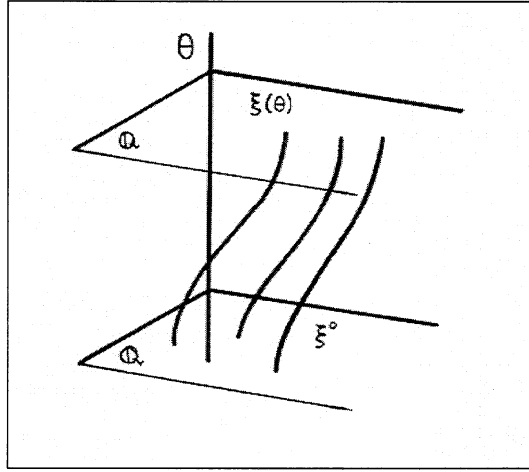


Figura 2.1: Familia continua de transformaciones canónicas como "trayectorias"

las trayectorias que el sistema sigue en el espacio de fases es equivalente a sucesivas transformaciones canónicas cuyo parámetro es el tiempo t y cuya función generatriz es el propio hamiltoniano.

Veamos un ejemplo de lo anterior: sea una función $G = -\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_2^2$; queremos obtener la transformación canónica que genera. Para ello escribimos la función en términos de q, p y resolvemos las ecuaciones (2.113):

$$G = -Q + \frac{1}{2}P^2, \quad (2.114)$$

$$\frac{dQ}{d\theta} = \frac{\partial G}{\partial P} = P, \quad \frac{dP}{d\theta} = -\frac{\partial G}{\partial Q} = 1. \quad (2.115)$$

Es trivial encontrar la solución de estas ecuaciones diferenciales:

$$Q = b + a\theta + \frac{1}{2}\theta^2, \quad P = a + \theta, \quad (2.116)$$

donde a y b son constantes de integración. Identificamos ahora las condiciones iniciales ($\theta = 0$) con las coordenadas originales (q, p) y obtenemos:

$$Q = q + p\theta + \frac{1}{2}\theta^2, \quad P = p + \theta, \quad (2.117)$$

que es la familia de transformaciones canónicas generada por la función (2.114).

Finalmente vamos a demostrar que cualquier función $G(\xi, t, \theta)$ genera, a través de las ecuaciones (2.113), una transformación canónica, es decir que $\xi(\theta)$ está relacionado con la condición inicial ξ^0 mediante una transformación canónica. Para ello demostraremos que:

$$\{\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0\}^\xi = \gamma_{\alpha\beta}. \quad (2.118)$$

Definimos $\{\xi_\alpha^0, \xi_\beta^0\}^\xi = f_{\alpha\beta}(\xi^0, \theta)$. Como las coordenadas ξ^0 son canónicas la función anterior verifica que $f_{\alpha\beta}(\xi^0, 0) = \gamma_{\alpha\beta}$. Veamos como varía esta función respecto de θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_\beta^0} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial \theta} \gamma_{\mu\nu} \right) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_\beta^0} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \right) \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_\beta^0} - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial \xi_\beta^0} \right) - \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} \frac{\partial^2 \xi_\nu}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \xi_\beta^0} - \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \left(\frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0} \right) - \frac{\partial G}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial \xi_\alpha^0 \partial \xi_\beta^0} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha^0} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\beta^0} - \frac{\partial}{\partial \xi_\beta^0} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \xi_\alpha^0} = 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Como la función $f_{\alpha\beta}$ no depende de θ tomará el mismo valor que el correspondiente a $\theta = 0$, y por tanto la transformación es canónica para cualquier valor de θ .

2.9 Simetrías y leyes de conservación

En esta Sección vamos a desarrollar los resultados que se extraen de las ecuaciones obtenidas en la Sección anterior. Para ello consideremos, primero, una variable dinámica arbitraria $R(\xi, t)$ y veamos cual es el efecto que sobre ella tiene una familia de transformaciones canónicas con parámetro θ :

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu} \frac{d\xi_\mu}{d\theta} = \frac{\partial R}{\partial \xi_\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial G}{\partial \xi_\nu} = [R, G]. \quad (2.120)$$

Esta ecuación diferencial la podemos usar, conociendo la función G , para obtener la dependencia respecto de θ de la función R . Formalmente la solución es:

$$R(\theta) = R_0 + \left(\frac{dR}{d\theta} \right)_0 \theta + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2 R}{d\theta^2} \right)_0 \theta^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3 R}{d\theta^3} \right)_0 \theta^3 + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= R_0 + [R, G]_0 \theta + \frac{1}{2!} [[R, G], G]_0 \theta^2 + \\
&\quad + \frac{1}{3!} [[[R, G], G], G]_0 \theta^3 + \dots
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Si R es el hamiltoniano

$$\frac{dH}{d\theta} = [H, G]. \tag{2.122}$$

Si H es invariante bajo la transformación, entonces su derivada con respecto a θ es cero y obtenemos:

$$0 = [H, G] = \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{dG}{dt}, \tag{2.123}$$

si, además, G no depende explícitamente de t , entonces G es una cantidad conservada. Por ejemplo, si la coordenada q_β es cíclica, es evidente que el hamiltoniano es invariante bajo las transformaciones:

$$q_\alpha = q_\alpha^0 + \theta \delta_{\alpha\beta}, \quad p_\alpha = p_\alpha^0 \tag{2.124}$$

cuya función generatriz la obtenemos a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dq_\alpha}{d\theta} = \delta_{\alpha\beta} = \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{d\theta} = 0 = -\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}. \tag{2.125}$$

La solución de lo anterior es: $G = p_\beta$, que es una cantidad conservada.

Es interesante ver también la forma que toman las ecuaciones cuando consideramos una transformación canónica infinitesimal. En este caso tenemos:

$$\xi_\alpha \simeq \xi_\alpha^0 + \theta X_\alpha(\xi^0, t). \tag{2.126}$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.113) obtenemos a primer orden

$$X_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi_\beta} \simeq \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi_\beta^0}, \tag{2.127}$$

donde ahora la función G , al orden considerado, es una función de las coordenadas de partida ξ^0 . De esta forma obtenemos

$$\xi_\alpha \simeq \xi_\alpha^0 + \theta \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi_\beta^0}. \tag{2.128}$$

Estas ecuaciones en términos de las coordenadas (q, p) se escriben:

$$Q_\alpha \simeq q_\alpha + \theta \frac{\partial G}{\partial p_\alpha}, \quad P_\alpha \simeq p_\alpha - \theta \frac{\partial G}{\partial q_\alpha}. \tag{2.129}$$

Las expresiones anteriores las podemos obtener también usando una transformación canónica “cercana” a la identidad. habíamos visto que la transformación identidad era generada por una función de tipo II: $F^2 = q_\alpha P_\alpha$. Podemos ver cual es la transformación generada por la función:

$$F^2 = q_\alpha P_\alpha + \theta G(q, P). \quad (2.130)$$

Con esta función la transformación es:

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial F^2}{\partial q_\alpha} = P_\alpha + \theta \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \\ Q_\alpha &= \frac{\partial F^2}{\partial P_\alpha} = q_\alpha + \theta \frac{\partial G}{\partial P_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.131)$$

A primer orden estas expresiones coinciden con (2.129).

De (2.121) vemos que a primer orden la variación de una variable dinámica viene dada por:

$$\delta R \equiv R(\theta) - R_0 \simeq \theta [R(\xi^0, t), G(\xi^0, t)]. \quad (2.132)$$

Si consideramos el hamiltoniano obtenemos que para una transformación infinitesimal su variación es:

$$\delta H = \theta [H, G]. \quad (2.133)$$

Como antes, si el hamiltoniano es invariante G es una constante del movimiento. Veamos un ejemplo: supongamos un sistema con $3N$ grados de libertad y tomamos como función generatriz de una transformación infinitesimal la definida por:

$$G = \sum_{i=1}^N (x_i p_{i_y} - y_i p_{i_x}) \equiv l_z. \quad (2.134)$$

La transformación a la que da lugar es:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i - \theta y_i, & y'_i &= y_i + \theta x_i, & z'_i &= z_i, \\ p'_{i_x} &= p_{i_x} - \theta p_{i_y}, & p'_{i_y} &= p_{i_y} + \theta p_{i_x}, & p'_{i_z} &= p_{i_z}. \end{aligned} \quad (2.135)$$

Esta transformación corresponde a un giro alrededor del eje z . Si el hamiltoniano es invariante frente a esta rotación, la cantidad conservada es la componente z del momento angular. En general si tomamos en este sistema $G = \vec{l} \cdot \vec{n}$ la transformación que origina es una rotación alrededor de un eje determinado por el vector unitario \vec{n} . En este último caso la variación de una variable dinámica en este sistema viene dada por:

$$\delta R = \theta [R, \vec{l} \cdot \vec{n}]. \quad (2.136)$$

Si consideramos una variable vectorial cada una de sus componentes se transformará según la expresión anterior, es decir:

$$\delta \vec{F} = \theta [\vec{F}, \vec{l} \cdot \vec{n}]. \quad (2.137)$$

Ahora bien, si contemplamos la transformación desde el punto de vista *activo*, es decir, que el espacio de fases no cambia sino que la transformación canónica manda un punto del espacio de fases a otro punto del mismo espacio de fases, entonces, frente a un giro el cambio que experimenta un vector \vec{F} viene dado por:

$$\delta \vec{F} = \theta \vec{n} \times \vec{F}. \quad (2.138)$$

Igualando las dos expresiones anteriores obtenemos:

$$[\vec{F}, \vec{l} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad [F_i, l_j] = \epsilon_{ijk} F_k. \quad (2.139)$$

En esta expresión la referencia a la transformación canónica de partida ha desaparecido y es útil para obtener el valor de ciertos corchetes de Poisson en lugar de calcularlos por evaluación directa. Si en lugar de tener una función vectorial hubiéramos tenido un escalar, como bajo rotaciones no cambia, entonces el corchete anterior sería cero. Esto se puede aplicar cuando la función vectorial es el propio momento angular:

$$[\vec{l}, \vec{l} \cdot \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{l} \quad \Rightarrow \quad [l_i, l_j] = \epsilon_{ijk} l_k \quad (2.140)$$

o cuando es el módulo del momento angular:

$$[l^2, \vec{l} \cdot \vec{n}] = 0. \quad (2.141)$$

2.10 Teorema de Liouville

Consideremos un sistema formado por muchas partículas, por ejemplo, un gas. El número de partículas en un volumen medio es de unas 10^{25} lo que hace imposible el estudio de la dinámica de dicho sistema. La mecánica estadística nos permite calcular ciertas magnitudes medias del sistema mediante el estudio de un conjunto estadístico de sistemas. Cada sistema es un punto en el espacio de fases cuya evolución viene determinada por las ecuaciones canónicas. Inicialmente todos los sistemas del conjunto estadístico constituyen un volumen en el espacio de fases, vamos a demostrar que dicho volumen no cambia cuando el sistema evoluciona temporalmente. Para ello consideremos un sistema cuyas coordenadas en el espacio de fases vienen dadas por ξ_α . El volumen de cualquier región arbitraria del espacio de fases viene dado por:

$$J = \int \cdots \int (d\xi) = \int \cdots \int dq_1 dq_2 \cdots dq_n dp_1 dp_2 \cdots dp_n. \quad (2.142)$$

Si realizamos una transformación canónica a unas nuevas coordenadas η_α el elemento de volumen se transforma con el valor absoluto del jacobiano de la transformación:

$$(d\xi) = \left| \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \eta_\beta} \right| (d\eta) \quad (2.143)$$

Si la transformación es canónica, entonces, según (2.59), el valor absoluto del jacobiano es 1 y por tanto los dos elementos de volumen son iguales: el volumen no cambia al realizar una transformación canónica.

Como la evolución con respecto al tiempo de un sistema en el espacio de fases se puede considerar como una transformación canónica, un volumen arbitrario en el espacio de fases no cambiará con el tiempo. El número de puntos que constituyen el conjunto estadístico tampoco cambia con el tiempo. Es decir la densidad de puntos D del conjunto estadístico es independiente del tiempo:

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad [D, H] = -\frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.144)$$

que es lo se conoce como el *teorema de Liouville*.

2.11 Principio de mínima acción

Habíamos visto que las ecuaciones de Euler-Lagrange las podíamos derivar de un principio variacional: el principio de Hamilton. En dicho principio calculábamos la variación de la funcional de acción cuando variábamos la trayectoria en el espacio de configuración. Las ecuaciones canónicas del movimiento las podemos derivar, a su vez, de un principio similar pero considerando las variaciones en el espacio de fases. Así, tomando variaciones de la funcional de acción

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_\alpha p_\alpha - H(q, p, t)) dt \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} F dt, \quad (2.145)$$

teniendo en cuenta que nuestras variables en el espacio de fases son (q, p) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{p}_\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0. \quad (2.146)$$

Es fácil comprobar que las ecuaciones canónicas se obtienen de (2.146).

Al aplicar el principio variacional anterior hemos supuesto que las trayectorias en el espacio de fases no variaban en los puntos inicial y final, igual que cuando derivábamos las ecuaciones de Euler-Lagrange. En el caso de Lagrange esto implicaba las ecuaciones (1.45) y en nuestro caso esto supone

que para t_1 y t_2 se ha de verificar que $\delta q_\alpha = \delta p_\alpha = 0$. Aunque parece que tenemos que imponer más condiciones que en el caso anterior, no es así ya que estas condiciones las imponíamos, en el caso de Lagrange, para eliminar los términos que, fuera de la integral, dependían de la derivada del lagrangiano con respecto a \dot{q}_α . En este caso, como el integrando en (2.145) no depende de \dot{p}_α no necesitamos imponer la condición de que $\delta p_\alpha = 0$.

Un principio que está ligado con el hamiltoniano es el llamado *principio de mínima acción*: para un sistema cuyo hamiltoniano no depende explícitamente de t se verifica que

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_\alpha p_\alpha dt = 0, \quad (2.147)$$

donde la variación Δ es la variación total definida en (1.56), con la condición de que en los puntos inicial y final $\Delta q_\alpha = 0$ y que el valor de H es el mismo en todas las trayectorias, tanto en la física como en las obtenidas por la variación de ésta. La primera condición significa que todos los caminos tienen el mismo punto inicial y final pero son recorridos en tiempos diferentes.

Habíamos visto anteriormente que la variación de la funcional de acción era (ecuación (1.59)):

$$\begin{aligned} \Delta I &= \Delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha \right) \Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \Delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} = \\ &= -H \Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Imponiendo las condiciones anteriores obtenemos que

$$\Delta I = -H(t_2 - t_1). \quad (2.149)$$

A partir de este resultado obtenemos:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_\alpha p_\alpha dt = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (L + H) dt = \Delta I + H(t_2 - t_1) = 0, \quad (2.150)$$

con lo que queda demostrado el principio.

Si las ecuaciones que definen las coordenadas generalizadas no dependen de t , entonces la energía cinética T es cuadrática en las velocidades generalizadas y $\dot{q}_\alpha p_\alpha = 2T$ y el principio de mínima acción se escribe como:

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} T dt = 0. \quad (2.151)$$

Si no actúa ninguna fuerza exterior sobre el sistema T se conserva y lo anterior se convierte en:

$$\Delta(t_2 - t_1) = 0. \quad (2.152)$$

Esta ecuación nos dice que de todas las trayectorias que el sistema puede recorrer, todas ellas con el mismo valor de la energía, la que sigue el sistema es la que el tiempo que invierte en ir de un punto a otro es el menor.

Capítulo 3

ECUACION DE HAMILTON-JACOBI

3.1 Introducción

En el Capítulo anterior hemos visto como la evolución de un sistema con el tiempo en el espacio de fases constituye una transformación canónica. Es decir, que la relación que hay entre las condiciones iniciales en el espacio de fases en un tiempo t_0 y los valores que toman las coordenadas en un tiempo arbitrario t es una transformación canónica cuyo generador infinitesimal es el propio hamiltoniano. Si esta transformación la contemplamos a la inversa, es decir, la transformación que nos proyecta las coordenadas en un tiempo arbitrario con las condiciones iniciales encontramos una transformación para la cual las nuevas coordenadas son constantes: las condiciones iniciales del movimiento. Al ser constantes las nuevas “coordenadas” significa que el hamiltoniano asociado es también constante. Si conseguimos realizar esta transformación canónica hemos simplificado totalmente el problema ya que en las nuevas coordenadas el movimiento está completamente resuelto: las trayectorias son constantes. La dificultad estriba en conocer cual es la función generatriz F que realiza dicha transformación. Existen varios métodos para encontrar dicha función, todos ellos dan lugar a la misma ecuación diferencial que ha de satisfacer la función generatriz: la *ecuación de Hamilton-Jacobi*.

3.2 Función principal

Consideremos el movimiento del sistema en el espacio de configuración, y supongamos que realizamos pequeñas variaciones o desplazamientos de las coordenadas que sigue el sistema, similar a lo que hicimos en la Sección 1.4.

La variación que obtenemos del Lagrangiano es:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha = \dot{p}_\alpha \delta q_\alpha + p_\alpha \delta \dot{q}_\alpha = \frac{d}{dt} (p_\alpha \delta q_\alpha). \quad (3.1)$$

Si integramos esta ecuación entre dos puntos, inicial y final, de la trayectoria que sigue el sistema obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = p_\alpha^1 \delta q_\alpha^1 - p_\alpha^0 \delta q_\alpha^0. \quad (3.2)$$

Como la variación que estamos considerando es a tiempo constante esta expresión la podemos escribir también como:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = p_\alpha^1 \delta q_\alpha^1 - p_\alpha^0 \delta q_\alpha^0. \quad (3.3)$$

Cuando las variaciones son cero en los extremos recuperamos el principio de Hamilton.

Introducimos ahora la *función principal* S como la integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (3.4)$$

tomada a lo largo de una trayectoria y expresada en términos de las coordenadas inicial y final y de los tiempos inicial y final:

$$S = S(q^1, q^0, t_1, t_0). \quad (3.5)$$

Para construir esta función realizamos lo siguiente: supongamos que conocemos la trayectoria que sigue el sistema:

$$q_\alpha = q_\alpha(q^0, \dot{q}^0, t_0, t) \quad (3.6)$$

que nos describen la trayectoria en términos de las condiciones iniciales. Cuando las sustituimos en la integral anterior obtenemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} L dt = \Xi(q^0, \dot{q}^0, t_0, t_1). \quad (3.7)$$

Por otra parte las expresiones para las coordenadas finales son:

$$q_\alpha^1 = q_\alpha^1(q^0, \dot{q}^0, t_0, t_1). \quad (3.8)$$

Estas expresiones las podemos invertir para expresar \dot{q}^0 en términos de q^0, q^1, t_0 y t_1 , que al sustituirlo en Ξ nos da, finalmente la función S .

Vamos a considerar ahora cómo la función S varía respecto de sus $2n + 2$ variables. Para ello primero tomaremos variaciones que dejen t_0 y t_1 fijos. En este caso, de (3.3):

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = p_\alpha^1 \delta q_\alpha^1 - p_\alpha^0 \delta q_\alpha^0. \quad (3.9)$$

Consideremos ahora variaciones respecto t_1 . De (3.7) obtenemos:

$$L_1 \equiv L(t_1) = \frac{\partial \Xi}{\partial t_1} = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1} \frac{\partial q_\alpha^1}{\partial t_1} + \frac{\partial S}{\partial t_1}, \quad (3.10)$$

y de esta expresión:

$$\frac{\partial S}{\partial t_1} = L_1 - p_\alpha^1 \dot{q}_\alpha^1 = -H(t_1) \equiv -H_1. \quad (3.11)$$

Haciendo lo mismo con t_0 obtenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t_0} = H_0. \quad (3.12)$$

Finalmente obtenemos que

$$dS = p_\alpha^1 dq_\alpha^1 - p_\alpha^0 dq_\alpha^0 - H_1 dt_1 + H_0 dt_0. \quad (3.13)$$

Esta expresión demuestra que el estado final del sistema no es una función arbitraria del estado inicial: sólo son posibles aquellos movimientos para los cuales la expresión anterior es una diferencial exacta.

El conocimiento de la función S puede ser muy valioso ya que nos proporciona directamente la solución al problema dinámico del sistema. Consideremos, por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0. \quad (3.14)$$

Estas n ecuaciones podemos invertirlas y obtener q_α^1 como función de $q_\alpha^0, p_\alpha^0, t_0$ y t_1 . Como t_1 es totalmente arbitrario, lo anterior constituye la integral de las ecuaciones de Lagrange. De la misma forma las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1} = p_\alpha^1. \quad (3.15)$$

junto con las anteriores constituyen la solución general de las ecuaciones de Hamilton.

Veamos ahora algunos ejemplos. El primero que consideraremos es una partícula de masa m sometida al campo gravitatorio g . El movimiento viene determinado por:

$$x = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \quad y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \quad (3.16)$$

En este caso podemos calcular directamente la función S :

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \right] dt. \quad (3.17)$$

Sustituyendo (3.16) en la integral obtenemos:

$$S = m \left\{ \frac{1}{2}(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)(t_1 - t_0) + \frac{1}{3}g^2(t_1 - t_0)^3 - v_{0y}g(t_1 - t_0)^2 - gy_0(t_1 - t_0) \right\}. \quad (3.18)$$

Finalmente sustituimos los valores de las condiciones iniciales:

$$v_{0x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \quad v_{0y} = \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0} + \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)$$

y obtenemos el valor de la función S :

$$S = m \left\{ \frac{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}{2(t_1 - t_0)} - \frac{1}{2}g(t_1 - t_0)(y_1 + y_0) - \frac{1}{24}g^2(t_1 - t_0)^3 \right\}. \quad (3.19)$$

El otro ejemplo que vamos a considerar es el del oscilador armónico. En este caso la ecuación de movimiento es:

$$x = x_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0). \quad (3.20)$$

Siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior obtenemos:

$$S = \frac{1}{2}m\omega(x_1 + x_0)^2 \cot \omega(t_1 - t_0) - \frac{m\omega x_0 x_1}{\sin \omega(t_1 - t_0)}. \quad (3.21)$$

3.3 Propiedades de la función principal

Veamos ahora algunas propiedades generales de la función principal S . Si L no depende explícitamente del tiempo, entonces H es una constante del movimiento y de la ecuación (3.13) obtenemos:

$$dS = p_\alpha^1 dq_\alpha^1 - p_\alpha^0 dq_\alpha^0 - H_1 d(t_1 - t_0). \quad (3.22)$$

Por tanto la función S , en este caso, depende de $(t_1 - t_0)$.

La solución de las ecuaciones de Hamilton dada mediante las ecuaciones (3.14) y (3.15) expresan q^1 y p^1 en términos de los $2n$ parámetros q^0 y p^0 . Supongamos que introducimos un nuevo conjunto de $2n$ parámetros u_α, v_α , función de los anteriores y que verifican la siguiente condición:

$$v_\alpha du_\alpha = p_\alpha^0 dq_\alpha^0. \quad (3.23)$$

(Esta condición es verificada cuando los nuevos parámetros se obtienen mediante una transformación de coordenadas: $u_\alpha = u_\alpha(q^0)$, siendo las v los momentos correspondientes). Expresemos ahora la función S en términos de los nuevos parámetros:

$$S'(u, q^1, t_0, t_1) = S(q^0, q^1, t_0, t_1). \quad (3.24)$$

De las ecuaciones

$$u_\alpha = u_\alpha(q^0, p^0), \quad p_\alpha^0 = -\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^0} = p_\alpha^0(q^0, q^1, t_0, t_1), \quad (3.25)$$

podemos expresar q^0 y p^0 en términos de u, q^1, t_0 y t_1 . Por otra parte es evidente que p^1 obtenido a partir de (3.15) ha de ser lo mismo si usamos S o S' . Efectivamente, usando (3.14) y (3.23) obtenemos

$$\begin{aligned} dS' &= dS = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha^0} dq_\alpha^0 + \frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1} dq_\alpha^1 + \frac{\partial S}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial S}{\partial t_1} dt_1 = \\ &= -v_\alpha du_\alpha + \frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1} dq_\alpha^1 + \frac{\partial S}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial S}{\partial t_1} dt_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De aquí obtenemos que $\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^1}$ y $\frac{\partial S'}{\partial q_\alpha^1}$ son iguales.

Consideremos ahora un sistema que admite trayectorias periódicas. Si la órbita es cerrada, como los puntos inicial y final coinciden, entonces la forma (3.5) se reduce a:

$$S = S(q^0, \tau) \quad (3.27)$$

donde τ es el período de la órbita. Ahora bien la forma de S no puede depender de q^0 ya que podríamos haber tomado cualquier otro punto en la misma trayectoria cerrada. Esto significa que $S = S(\tau)$. De (3.13) obtenemos:

$$dS = -E d\tau \quad (3.28)$$

donde E es el valor constante de la energía para dicha órbita. Por tanto:

$$E = -\frac{dS}{d\tau}. \quad (3.29)$$

Es decir, para las órbitas periódicas, la energía es una función sólo del período.

3.4 Ecuación de Hamilton-Jacobi

Hemos visto cómo la función principal S nos lleva al conocimiento de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. Veremos en esta sección como obtener dicha función. Primero, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t_0 = 0$. Además supondremos que las órbitas del sistema vienen parametrizadas, en lugar de por las condiciones iniciales (q^0, p^0) por los parámetros (u, v) relacionados con los anteriores por la condición (3.23). Es decir la función S dependerá de $2n + 1$ parámetros. En lugar de considerar t_1 lo sustituiremos por t en general. Es decir:

$$S = S(q, u, t) \quad (3.30)$$

y por tanto:

$$dS = p_\alpha dq_\alpha - v_\alpha du_\alpha - H dt, \quad (3.31)$$

y:

$$\frac{\partial S}{\partial u_\alpha} = -v_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (3.32)$$

habíamos visto que la primera ecuación da la solución a las ecuaciones de Lagrange que junto con la segunda da la solución a las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Usando la segunda ecuación en la tercera obtenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t \right) = 0. \quad (3.33)$$

Esta es la *ecuación de Hamilton-Jacobi*, que es una ecuación diferencial en derivadas parciales para la función S y constituye la base de una forma general para encontrar las ecuaciones del movimiento.

Es sabido que la solución general de una ecuación diferencial en derivadas parciales, como la ecuación (3.33) depende de una función completamente arbitraria. Para encontrar las ecuaciones de movimiento no necesitamos conocer la solución general sino que nos basta con lo que se denomina *integral completa* de la ecuación que es aquella que depende de $n + 1$ constantes arbitrarias de integración. Debido a la forma de la ecuación, una de estas constantes es aditiva y la podemos tomar siempre como cero. Las otras n constantes son los parámetros u de los que depende la función S que son constantes ya que dependen de las condiciones iniciales. La ecuación anterior tiene una gran variedad de soluciones completas diferentes. Demostraremos que todas ellas conducen a la solución de las ecuaciones canónicas de Hamilton: Supongamos una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi dada por $S(q, u, t)$

de clase C_2 y tal que el determinante

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial q_\beta} \right| \quad (3.34)$$

es diferente de cero . Consideremos las ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial u_\alpha} = -v_\alpha, \quad \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad (3.35)$$

donde v_α son constantes arbitrarias. Estas ecuaciones nos determinan

$$q_\alpha = q_\alpha(u, v, t), \quad p_\alpha = p_\alpha(u, v, t), \quad (3.36)$$

que demostraremos que es la solución de las ecuaciones de movimiento en el espacio de fases. Derivando parcialmente la ecuación de Hamilton-Jacobi con respecto a u_α obtenemos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial q_\beta} = 0. \quad (3.37)$$

Derivamos ahora la primera ecuación de (3.35) con respecto a t :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta = 0. \quad (3.38)$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial u_\alpha \partial q_\beta} \left(\dot{q}_\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \right) = 0. \quad (3.39)$$

Ahora hacemos lo mismo pero derivando con respecto a q_α :

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} = 0, \quad (3.40)$$

y derivando la segunda ecuación de (3.35) con respecto a t :

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \dot{q}_\beta = 0. \quad (3.41)$$

Restando de nuevo ambas ecuaciones obtenemos:

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial^2 S}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \left(\dot{q}_\beta - \frac{\partial H}{\partial p_\beta} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \quad (3.42)$$

De las ecuaciones (3.39) y (3.42) vemos que las funciones definidas en (3.36) verifican las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Es decir el conocimiento de una integral completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi nos proporciona la solución general de las ecuaciones del movimiento del sistema.

Para comprender mejor el significado de la función principal y de la ecuación de Hamilton-Jacobi interpretemos la función S como la función generatriz de una transformación canónica. Teniendo en cuenta las variables de las que depende la función S , la transformación canónica a la que da lugar sería del tipo I (ver Sección 2.7). Las ecuaciones de este tipo de transformaciones vienen dadas por (2.94) y (2.95). Estas ecuaciones coinciden con (3.35). Es decir u_α jugarían el papel de las nuevas coordenadas y las v_α serían los nuevos momentos. El nuevo hamiltoniano viene dado por (2.96):

$$K = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (3.43)$$

ya que S verifica la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.33). Es decir, la función principal genera una transformación canónica de tal forma que el nuevo hamiltoniano es cero. Por tanto las ecuaciones canónicas de las nuevas coordenadas y momentos son $\dot{u}_\alpha = 0$, $\dot{v}_\alpha = 0$, de donde resulta que son constantes, como habíamos supuesto desde el principio (constantes relacionadas con las condiciones iniciales mediante (3.23)).

Habíamos visto en la Sección 2.7 que a partir de la función generatriz de una transformación canónica de tipo I podíamos definir mediante una transformación de Legendre una transformación de tipo II. Si hacemos esto mismo con la función S , de (2.103) obtenemos:

$$\tilde{S}(q, v, t) = S(q, u, t) + u_\alpha v_\alpha. \quad (3.44)$$

La función \tilde{S} depende de los nuevos momentos y las ecuaciones que nos dan las ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial v_\alpha} = u_\alpha, \quad \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_\alpha} = p_\alpha. \quad (3.45)$$

Como la función \tilde{S} es S más una constante, verifica la misma ecuación de Hamilton-Jacobi (3.33) que la función S . Luego para resolver el movimiento del sistema a partir de la ecuación de Hamilton-Jacobi es indistinto considerar la función S o \tilde{S} y a partir de ahora las designaremos genéricamente como función S . Una vez que encontramos una solución completa que depende de $2n$ constantes, el considerar estas constantes como los nuevos momentos o las nuevas coordenadas de la transformación canónica que genera es totalmente

irrelevante ya que en ambos casos dichas constantes estarán relacionadas con las condiciones iniciales.

Consideremos un ejemplo: sea una partícula bajo la acción de la gravedad; el Hamiltoniano es: $H = \frac{p^2}{2m} + mgy$. La ecuación de Hamilton-Jacobi en este caso se escribe:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + mgy = 0. \quad (3.46)$$

Una solución completa la obtenemos suponiendo $S = -vt + W(y)$, donde v es una constante que identificamos con el parámetro del que depende la función S . Sustituyéndolo en la ecuación anterior obtenemos:

$$W = \sqrt{2m} \int \sqrt{v - mgy} dy, \quad (3.47)$$

cuya integración nos da la función S :

$$S = -\frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (v - mgy)^{3/2} - vt. \quad (3.48)$$

Es interesante señalar que para la obtención de la expresión anterior hemos supuesto el signo positivo para la función W o lo que es lo mismo para el momento p . Ahora podemos obtener el movimiento usando o bien las ecuaciones (3.35) o las (3.45). Usaremos las ecuaciones (3.45):

$$p = \frac{\partial S}{\partial y} = \sqrt{2m} \sqrt{v - mgy}. \quad (3.49)$$

La derivada de S con respecto a la constante v nos da otra constante: u

$$u = \frac{\partial S}{\partial v} = -\sqrt{\frac{2}{mg^2}} \sqrt{v - mgy} - t \Rightarrow u + t = -\sqrt{\frac{2}{mg^2}} \sqrt{v - mgy}. \quad (3.50)$$

De esta última expresión podemos obtener y como una función de t :

$$y(t) = \frac{v}{mg} - \frac{1}{2}g(u + t)^2, \quad (3.51)$$

y substituyendolo en (3.49) obtenemos p (hay que tener en cuenta que hemos supuesto p positivo, lo que significa que al extraer la raíz cuadrada nos tenemos que quedar con el signo positivo y que $u + t$ es negativo):

$$p(t) = -mg(u + t). \quad (3.52)$$

Al imponer condiciones iniciales en $t = 0$ obtenemos $p_0 = -mgu$ y $y_0 = v/mg - \frac{1}{2}gu^2$, que al substituirlos en las expresiones anteriores nos da el movimiento del sistema: $y = y_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{1}{2}gt^2$. Es fácil ver que si hubieramos usado las ecuaciones (3.35) el resultado final sería el mismo.

3.5 Función característica de Hamilton

En la mayor parte de los problemas el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, y en este caso la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser simplificada. Suponemos que la función S tiene la siguiente forma:

$$S(q, v, t) = W(q, v) - v_1 t \quad (3.53)$$

donde la función W no depende de t y la denominaremos *función característica de Hamilton*. Con esta suposición la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a:

$$H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = v_1 \equiv E. \quad (3.54)$$

La primera de las constantes v de las que depende la función S es el propio hamiltoniano, que es constante ya que no depende explícitamente de t , y que puede coincidir con la energía E .

Antes hemos considerado S como la función generadora de una transformación canónica y habíamos visto que el hamiltoniano transformado K era cero. Ahora podemos considerar la función W como generadora de otra transformación canónica, que como en el caso anterior, será de tipo II. En este caso las ecuaciones de la transformación son:

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, \quad u_\alpha = \frac{\partial W}{\partial v_\alpha}. \quad (3.55)$$

Es decir, como antes, las coordenadas (q, p) son transformadas en las coordenadas (u, v) . Como la transformación es independiente de t los hamiltonianos son funcionalmente iguales:

$$K(u, v) = H(q(u, v), p(u, v)) = v_1 \quad (3.56)$$

El hamiltoniano transformado no es cero en este caso, sino que es igual al primer momento. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{v}_\alpha = -\frac{\partial K}{\partial u_\alpha} = 0, \quad \dot{u}_\alpha = \frac{\partial K}{\partial v_\alpha} = \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (3.57)$$

De estas ecuaciones obtenemos que todas las v_α son constantes, como habíamos supuesto desde el principio, y todas las u_α son constantes excepto $u_1 = t - t_0$. Es decir identificamos el tiempo t con una coordenada cuyo momento es el propio hamiltoniano.

La función S fué definida como la función cuya derivada total con respecto al tiempo era el lagrangiano. Veamos cual es la derivada de la función W :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha = p_\alpha \dot{q}_\alpha \quad (3.58)$$

Las variables q_α , en la ecuación de Hamilton-Jacobi son separables si una solución de la forma

$$W = \sum_\alpha W_\alpha(q_\alpha, v_1, \dots, v_n) \quad (3.59)$$

desacopla la ecuación en n ecuaciones:

$$H_\alpha \left(q_\alpha, \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}, v_1, \dots, v_n \right) = v_\alpha. \quad (3.60)$$

Es evidente que la separabilidad depende de las coordenadas elegidas. Por ejemplo el caso de una partícula en presencia de un potencial central, la ecuación de Hamilton-Jacobi es separable cuando usamos coordenadas esféricas pero no lo es cuando se usan coordenadas cartesianas.

Un caso particular se da cuando una o varias de las coordenadas son cíclicas. Supongamos que la coordenada q_1 es cíclica, esto significa que

$$p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1} \quad (3.61)$$

es constante. Es decir podemos tomar la función W en la forma:

$$W = q_1 p_1 + W'(q_2, \dots, q_n, v). \quad (3.62)$$

Si hubiera más coordenadas cíclicas podríamos “separar” la función W en sumas correspondiente a dichas coordenadas.

3.6 Variables angulares de acción

El método de Hamilton-Jacobi es especialmente útil cuando tratamos sistemas periódicos ya que, como veremos en esta sección, permite calcular fácilmente las cantidades más características del sistema sin necesidad de resolver las ecuaciones de movimiento. En un sistema con un grado de libertad podemos distinguir dos tipos de movimiento periódicos. Primero aquellos cuyas trayectorias en el espacio de fases son curvas cerradas, generalmente simétricas respecto del momento lo que refleja la dependencia cuadrática del Hamiltoniano. Este caso, en el que las curvas pueden ser contraídas a un punto, se llama *movimiento de libración*. Segundo, puede darse el caso de

movimientos cuyas trayectorias en el espacio de fases son curvas abiertas en las que p es una función periódica de q . Este segundo supuesto es denominado *movimiento de rotación*. Conviene señalar que ambos tipos de trayectorias pueden aparecer en un mismo sistema. El ejemplo más evidente es el del péndulo.

En un sistema con más de un grado de libertad podemos extender la definición de movimiento periódico explicada anteriormente de la siguiente forma. Si el sistema es totalmente separable, en el sentido explicado en la sección anterior, entonces cada p_α es una función sólo de la coordenada q_α y podemos ver las trayectorias de todas las parejas (q_α, p_α) en cada uno de los planos α . Estas trayectorias constituyen la proyección del movimiento en el espacio de fases sobre cada uno de los planos α . Si las trayectorias en todos los planos son periódicas, como las descritas para un grado de libertad, entonces diremos que el movimiento es periódico y podemos definir para cada plano una frecuencia correspondiente a su movimiento. Lo que haremos será introducir, mediante una transformación canónica, una nuevas coordenadas (ϕ_α, J_α) tales que los nuevos momentos J_α distinguirán cada una de las trayectorias periódicas en el plano α y las nuevas coordenadas ϕ_α serán variables angulares cuya variación será la misma en todas las trayectorias. Estas nuevas coordenadas se llaman *variables angulares de acción*.

Supongamos un sistema descrito por un hamiltoniano H independiente de t y tal que la ecuación para la función W (3.54) es separable

$$W = \sum_{\alpha} W_{\alpha}(q_{\alpha}, v). \quad (3.63)$$

Definimos las siguientes cantidades

$$J_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \oint p_{\alpha} dq_{\alpha}. \quad (3.64)$$

(En esta expresión no usamos el convenio de la suma). La integral la hacemos a lo largo de una trayectoria cerrada o, si el movimiento es de rotación, a un período de la trayectoria. Es evidente que J_{α} es una constante que toma diferentes valores para cada trayectoria particular que consideremos. De (3.55) y (3.63) obtenemos

$$J_{\alpha} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial q_{\alpha}} dq_{\alpha} = J_{\alpha}(v). \quad (3.65)$$

Esto nos da J_{α} como función de las cantidades v . La ecuación de Hamilton-Jacobi daba la función S que generaba una transformación canónica de (q, p) a las variables (u, v) . A partir de (3.45) (o (3.35)) obtenemos $u(q, p)$ y $v(q, p)$.

Sustituyendo estas cantidades en la expresión anterior encontramos $J_\alpha(q, p)$. Usaremos como función generatriz de la transformación canónica de (q, p) a (ϕ, J) la función $W(q, v(J))$, siendo $v(J)$ la inversa de (3.65). Las ecuaciones de la transformación son:

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha}, \quad \phi_\alpha = \frac{\partial W}{\partial J_\alpha}. \quad (3.66)$$

Como la transformación es independiente de t el nuevo hamiltoniano será igual al de partida (usando (3.54)):

$$H = H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = v_1(J_1, \dots, J_n) \equiv E(J_1, \dots, J_n). \quad (3.67)$$

Es decir el nuevo hamiltoniano es solo función de los momentos J . Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{J}_\alpha = -\frac{\partial E}{\partial \phi_\alpha} = 0, \quad \dot{\phi}_\alpha = \frac{\partial E}{\partial J_\alpha} \equiv \omega_\alpha(J_1, \dots, J_n). \quad (3.68)$$

La primera ecuación nos dice que los momentos J son constantes, como habíamos supuesto, y las coordenadas son:

$$\phi_\alpha = \omega_\alpha t + \phi_\alpha^0, \quad (3.69)$$

donde ϕ_α^0 son constantes de integración. Veamos ahora cuanto se incrementa la variable ϕ_α cuando completamos una trayectoria cerrada en el plano α (en el caso de trayectorias de rotación nos referimos al incremento cuando la trayectoria realiza un período). Como a lo largo de una trayectoria particular la J_α es constante obtenemos:

$$\begin{aligned} \oint d\phi_\alpha &= \oint d\left(\frac{\partial W}{\partial J_\alpha}\right) = \oint \frac{\partial^2 W_\alpha}{\partial q_\alpha \partial J_\alpha} dq_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint \frac{\partial W_\alpha}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = \frac{\partial}{\partial J_\alpha} \oint p_\alpha dq_\alpha = 2\pi \frac{\partial J_\alpha}{\partial J_\alpha} = 2\pi \end{aligned} \quad (3.70)$$

(en toda la expresión anterior el convenio de la suma no se aplica).

Si el período que tarda el sistema en completar la trayectoria en el plano α es T_α , de (3.69) vemos que ϕ_α se incrementa en $\omega_\alpha T_\alpha$. Ahora bien, acabamos de ver que ese incremento era 2π , por tanto:

$$\omega_\alpha T_\alpha = 2\pi, \quad \Rightarrow \quad T_\alpha = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}. \quad (3.71)$$

Es decir ω_α es la frecuencia del movimiento en el plano α :

$$\omega_\alpha = \frac{\partial E}{\partial J_\alpha} \quad (3.72)$$

Como ejemplo consideremos un oscilador armónico. El hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 \quad (3.73)$$

La ecuación para la función característica es:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial W}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = E \quad (3.74)$$

cuya solución es

$$\begin{aligned} W(q, E) &= \int \sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2} dq \\ &= \frac{E}{\omega_0} \left[\arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}} q \right) + q \sqrt{\frac{m\omega_0^2}{2E}} \sqrt{1 - \frac{m\omega_0^2}{2E} q^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Calculamos ahora la variable J :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint p dq = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2} dq = \\ &= 4 \frac{1}{2\pi} \int_{q_0}^0 \sqrt{2mE - m^2\omega_0^2 q^2} dq, \end{aligned} \quad (3.76)$$

donde q_0 es el punto de retroceso de la trayectoria que vale

$$q_0 = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}. \quad (3.77)$$

Resolviendo la integral anterior obtenemos

$$J = \frac{E}{\omega_0}. \quad (3.78)$$

De (3.72) vemos que la frecuencia del sistema es ω_0 . Calcularemos ahora cual es la transformación canónica entre (q, p) y (ϕ, J) . La variable ϕ la obtenemos de (3.66) sustituyendo E como función de J en W :

$$\phi = \frac{\partial W}{\partial J} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{2J}} q \right). \quad (3.79)$$

Por otro lado

$$J = \frac{E}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \right). \quad (3.80)$$

Sustituyendo la expresión anterior en ϕ obtenemos esta variable como función de q y p :

$$\phi = \arctan \frac{m\omega_0 q}{p}. \quad (3.81)$$

Invirtiendo las expresiones anteriores obtenemos:

$$p = \sqrt{2m\omega_0 J} \cos \phi, \quad q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega_0}} \sin \phi. \quad (3.82)$$

3.7 Sistemas Integrables

En un sistema como los descritos en la Sección anterior, es decir tal que es completamente separable y periódico, cada p_α depende solo de su coordenada conjugada q_α y las trayectorias en el plano (q_α, p_α) del espacio de fases son curvas cerradas que pueden ser deformadas continuamente hasta un círculo S^1 (existe una *homotopía* entre la trayectoria y el círculo). Si tuviéramos un espacio de fases con dos grados de libertad, es decir de cuatro dimensiones, las trayectorias vendrían dadas por dos círculos cada una correspondientes a cada uno de los dos planos (q_1, p_1) y (q_2, p_2) . La trayectoria pertenecería a un toro de dos dimensiones: $T^2 = S^1 \times S^1$. Si el sistema tuviera n grados de libertad la trayectoria en el espacio de fases estaría en un toro de n dimensiones T^n . Un sistema con estas características se denomina *completamente integrable*.

Hay otra definición de sistema integrable, relacionada estrechamente con la anterior, que es la de *sistema integrable en el sentido de Liouville*, que se da cuando se verifican las dos propiedades siguientes:

i) Existen n constantes de movimiento f_α en *involución*, es decir que verifican:

$$[f_\alpha, f_\beta] = 0. \quad (3.83)$$

ii) Estas constantes de movimiento son independientes entre sí, es decir que la intersección de las superficies $f_\alpha = \text{constante}$ forman una superficie Σ , en el espacio de fases, de dimensión n .

Es evidente que una de las constantes del movimiento en involución puede ser el propio hamiltoniano H . Vimos que una constante del movimiento es el generador de una transformación infinitesimal y que cualquier función en el espacio de fases se transforma según (2.120). Esto significa que la primera propiedad implica que cada una de las constantes del movimiento es invariante frente a las transformaciones infinitesimales generadas por el resto. Otra

consecuencia evidente de lo anterior es que la superficie Σ es una superficie invariante, es decir que una trayectoria del movimiento cuya condición inicial esté en dicha superficie, permanece en ella.

Enunciaremos ahora el *Teorema de Liouville para sistemas integrales*:

Si la superficie Σ es compacta entonces i) existe un difeomorfismo entre Σ y un toro de n dimensiones $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, y ii) existen coordenadas canónicas (ϕ, J) tales que las coordenadas J “etiquetan” la superficie Σ (o el toro T^n) en la que se desarrolla el movimiento y $d\phi_\alpha/dt = \omega_\alpha$ son constantes en cada uno de los toros.

Este teorema conduce al mismo resultado que hemos visto en la sección anterior con la diferencia que es más general ya que no supone separabilidad.

Capítulo 4

TEORIA DE PERTURBACIONES

4.1 Introducción

Los problemas que se pueden resolver exactamente hasta el final, usando los métodos vistos en los capítulos precedentes, son muy escasos. En muchos de los casos en los que no se puede encontrar el movimiento del sistema, es posible, sin embargo, proceder a un análisis perturbativo a partir de soluciones ya conocidas. Este es el caso cuando consideramos sistemas que constituyen una perturbación de otros cuya solución conocemos. Es en estos casos en los que la teoría de perturbaciones puede ayudarnos a conseguir resultados aproximados. Hay que tener en cuenta que, en muchos casos, los términos debido a las perturbaciones que aparecen en la trayectoria que sigue el sistema crecen con el tiempo haciendo que no se puedan considerar dichos términos como perturbaciones. Esto hace que haya que ser muy cuidadoso con el tratamiento perturbativo.

4.2 Términos seculares

Si sabemos que las trayectorias de un sistema van a ser periódicas, puede ocurrir que al hacer un tratamiento perturbativo del mismo los primeros términos del desarrollo crezcan indefinidamente con el tiempo haciendo que la solución sea divergente. Estos términos que crecen indefinidamente se denominan *términos seculares*. Para ver como aparecen estos términos veamos un ejemplo: consideremos un oscilador armónico perturbado con un término

cuártico, es decir un sistema cuyo hamiltoniano es:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{4}\epsilon mx^4, \quad (4.1)$$

donde estamos considerando ϵ un parámetro muy pequeño y positivo. Si representamos el potencial al cual está sometido la partícula veremos que es una curva cercana a la parábola correspondiente al potencial del oscilador armónico y las trayectorias serán periódicas.

Las ecuaciones de movimiento del hamiltoniano anterior son:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m(\omega_0^2x + \epsilon x^3). \quad (4.2)$$

Derivando la primera ecuación y usando la segunda obtenemos la ecuación diferencial para x :

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + \epsilon x^3 = 0 \quad (4.3)$$

Podemos suponer como solución un desarrollo en serie en el parámetro ϵ :

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (4.4)$$

Sustituyendo este desarrollo en la ecuación anterior obtenemos:

$$\ddot{x}_0 + \epsilon \ddot{x}_1 + \epsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots + \omega_0^2(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \dots) + \epsilon(x_0^3 + 3\epsilon x_0^2 x_1 + \dots) = 0. \quad (4.5)$$

Orden a orden obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -x_0^3 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 &= -3x_0^2 x_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.6)$$

La primera ecuación es la correspondiente al oscilador armónico que es el orden "cero" de nuestro sistema. Una vez conocida la solución a orden cero podemos resolver la ecuación a primer orden y así sucesivamente. Para simplificar el cálculo imponemos como condiciones iniciales $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$. Estas condiciones han de ser verificadas por la solución (4.4) y como son independientes del parámetro ϵ significa que

$$x_0(0) = a, \quad \dot{x}_0(0) = 0, \quad x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0 \quad \forall i > 0 \quad (4.7)$$

Con estas condiciones iniciales la solución de orden cero es

$$x_0(t) = a \cos \omega_0 t \quad (4.8)$$

La ecuación diferencial para el primer orden se escribe (usando la relación $\cos^3 x = 1/4 \cos 3x + 3/4 \cos x$):

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -a^3 \cos^3 \omega_0 t = -\frac{1}{4}a^3 \cos 3\omega_0 t - \frac{3}{4}a^3 \cos \omega_0 t. \quad (4.9)$$

La solución de esta ecuación se escribe

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) + x_p \quad (4.10)$$

donde x_p es una solución particular. Sabemos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que una solución particular tiene la forma $x_p = \alpha t \sin \omega_0 t + \beta \cos 3\omega_0 t$. Sustituyéndolo en la ecuación obtenemos el valor de las constantes α y β :

$$x_1(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) - \frac{3t}{8\omega_0} a^3 \sin \omega_0 t + \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos \omega_0 t. \quad (4.11)$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales que determinan $\delta = 0$ y el valor de A . Finalmente la solución hasta el primer orden es:

$$x(t) \simeq a \cos \omega_0 t - \epsilon \left[\frac{3t}{8\omega_0} a^3 \sin \omega_0 t + \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \right]. \quad (4.12)$$

El segundo término de la solución anterior es un término secular ya que su amplitud crece indefinidamente al ser proporcional a t . Esto hace que al cabo del tiempo este término pase a ser más importante que el término de orden cero de la aproximación. Por otra parte habíamos visto que, de la forma del potencial, el movimiento es periódico y limitado; por lo que la solución anterior no tiene mucho sentido. El término secular aparece porque la ecuación diferencial a primer orden (4.9) es la ecuación de un oscilador armónico forzado. La frecuencia de uno de los términos de la “fuerza” coincide con la frecuencia natural del sistema ω_0 lo que da lugar términos de resonancia que divergen con el tiempo. Esto mismo va a pasar a todos los órdenes, por lo que a cualquier orden nos encontraremos con términos seculares. La aparición de los términos seculares no implica que la suma de (4.4) sea divergente. Es posible que si tomamos un número suficiente de términos seculares su suma de lugar a un término periódico. Esto es lo que ocurre si consideramos, por ejemplo, el desarrollo de una función periódica y limitada:

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 + \epsilon)t &= \sin \omega_0 t \cos \epsilon t + \cos \omega_0 t \sin \epsilon t = \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 + \dots\right) \sin \omega_0 t + \\ &+ \left(\epsilon t - \frac{1}{6}\epsilon^3 t^3 + \dots\right) \cos \omega_0 t. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si nos quedamos sólo con los primeros términos de este desarrollo vemos que dan lugar a una solución divergente aunque la solución inicial era periódica y limitada.

Pare resolver este problema supondremos un desarrollo en serie no sólo en la amplitud, como en la ecuación (4.4), sino también en la frecuencia. Es decir además de (4.4) supondremos

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots \quad (4.14)$$

Supondremos que la solución total y las soluciones a cada orden son periódicas. Es decir suponemos que $x(t) = x(\omega t)$. Por tanto es conveniente introducir una nueva variable $\tau = \omega t$. Usando esta nueva variable la ecuación diferencial (4.3) se escribe

$$\omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0 \quad (4.15)$$

donde ' significa derivada con respecto a τ . Sustituyendo (4.4) y (4.14) en la ecuación anterior obtenemos:

$$(\omega_0^2 + 2\epsilon\omega_0\omega_1 + \dots)(x_0'' + \epsilon x_1'' + \dots) + \omega_0^2(x_0 + \epsilon x_1 + \dots) + \epsilon(x_0^3 + \dots) = 0. \quad (4.16)$$

De aquí obtenemos las ecuaciones a cada orden:

$$\begin{aligned} x_0'' + x_0 &= 0 \\ x_1'' + x_1 &= -\frac{1}{\omega_0^2}(x_0^3 + 2\omega_0\omega_1 x_0'') \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.17)$$

La primera ecuación, como antes, es la correspondiente al oscilador armónico cuya solución, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es

$$x_0(t) = a \cos \tau = a \cos \omega t \quad (4.18)$$

Si sólo nos quedáramos con este término entonces habría que sustituir ω por ω_0 . La ecuación diferencial a primer orden es:

$$\begin{aligned} x_1'' + x_1 &= -\frac{1}{\omega_0^2}(a^3 \cos^3 \tau - 2\omega_0\omega_1 a \cos \tau) \\ &= \left(\frac{2\omega_1}{\omega_0} - \frac{3a^2}{4\omega_0^2}\right) a \cos \tau - \frac{a^3}{4\omega_0^2} \cos 3\tau \end{aligned} \quad (4.19)$$

La solución general de esta ecuación es

$$x_1(t) = A \cos(\tau + \delta) + x_p \quad (4.20)$$

donde x_p es una solución particular. Es evidente que el primer término de la parte derecha de la ecuación (4.19), que es proporcional a $\cos \tau$ dará lugar, otra vez, a términos seculares. Para eliminar dichos términos hacemos que su coeficiente sea cero. Es decir

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0} \quad (4.21)$$

De esta forma, la exigencia de que no aparezcan términos seculares en la solución a cada orden nos permite obtener cada uno de los términos del desarrollo de ω . Es decir hasta el primer orden la frecuencia del movimiento es:

$$\omega \simeq \omega_0 + \epsilon \frac{3a^2}{8\omega_0}. \quad (4.22)$$

Con la elección anterior la solución particular será de la forma $x_p = \alpha \cos 3\tau$, donde α es una constante que determinamos al sustituir x_p en la ecuación. Finalmente obtenemos que la solución es

$$x_1 = A \cos(\tau + \delta) + \frac{a^3}{32\omega^2} \cos 3\tau. \quad (4.23)$$

Imponiendo las condiciones iniciales determinamos los valores de δ y A . Con esto valores podemos escribir la solución hasta el primer orden:

$$\begin{aligned} x(t) &\simeq a \cos \omega t - \epsilon \frac{a^3}{32\omega_0^2} (\cos \omega t - \cos 3\omega t) \\ &\simeq a \cos \left[\left(\omega_0 + \epsilon \frac{3a^2}{8\omega_0} \right) t \right] - \epsilon \frac{a^3}{32\omega_0^2} (\cos \omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \end{aligned} \quad (4.24)$$

La solución anterior verifica todas las condiciones que habíamos impuesto y ya no aparecen los términos seculares.

4.3 Teoría de perturbaciones canónicas con un grado de libertad

En el caso visto anteriormente el procedimiento seguido para encontrar una solución aproximada estaba basado en la ecuación diferencial que nos daba el movimiento. Existen diversas técnicas, dependiendo del tipo de ecuación diferencial: si la ecuación es no lineal o no autónoma o ambas. Veremos en esta sección cómo encontrar soluciones aproximadas directamente a partir de las ecuaciones canónicas del movimiento, es decir a partir del hamiltoniano del sistema.

Supongamos un sistema cuyo hamiltoniano viene dado por

$$H(\xi, t) = H_0(\xi, t) + \epsilon H_1(\xi, t), \quad (4.25)$$

donde ϵ es un parámetro pequeño, y donde suponemos que conocemos el movimiento generado por el hamiltoniano H_0 . Sabemos que un procedimiento para resolver el movimiento es encontrar una transformación canónica que nos pase de las coordenadas (q, p) a (Q, P) de tal forma que en estas nuevas coordenadas el sistema sea más tratable. Vamos a ver cómo cambia el hamiltoniano H cuando realizamos una transformación canónica y tomamos un desarrollo en serie en el parámetro ϵ . Es evidente que si $\epsilon = 0$ la transformación ha de ser la identidad ya que H coincide con H_0 . Es por esto que tomaremos una transformación canónica de tipo II tal que a orden cero coincida con la identidad. Sea $F(q, P, t; \epsilon)$ la función que genera dicha transformación. El nuevo hamiltoniano se escribe como:

$$K(Q, P, t) = H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.26)$$

y las ecuaciones que nos dan la transformación son:

$$Q = \frac{\partial F}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q}. \quad (4.27)$$

Suponemos un desarrollo en serie de la función F tal que a orden cero de lugar a la transformación identidad:

$$F = qP + \epsilon F_1 + \epsilon^2 F_2 + \dots \quad (4.28)$$

Las ecuaciones de la transformación canónica también se expresarán como un desarrollo en serie:

$$\begin{aligned} q &= Q + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2 + \dots \\ p &= P + \epsilon p_1 + \epsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.29)$$

Teniendo en cuenta (4.27) obtenemos:

$$p_1 = \frac{\partial F_1}{\partial q}, \quad q_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial P}. \quad (4.30)$$

Para poder calcular K necesitamos conocer primero la forma de H en términos de las nuevas variables. A primer orden obtenemos:

$$H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) =$$

$$\begin{aligned}
 &= H_0(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) + \epsilon H_1(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t) \simeq \\
 &\simeq H_0(Q, P, t) + \epsilon \left(\frac{\partial H_0}{\partial q} q_1 + \frac{\partial H_0}{\partial p} p_1 \right) + \epsilon H_1(Q, P, t) = \\
 &= H_0 + \epsilon \left(-\frac{\partial H_0}{\partial q} \frac{\partial F_1}{\partial P} + \frac{\partial H_0}{\partial p} \frac{\partial F_1}{\partial q} + H_1 \right). \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

En todos los términos que aparecen en la expresión anterior hay que sustituir (q, p) por (Q, P) . Si suponemos un desarrollo en serie del nuevo hamiltoniano

$$K \simeq K_0 + \epsilon K_1 + \dots \quad (4.32)$$

obtenemos:

$$\begin{aligned}
 K_0 &= H_0 \\
 K_1 &= H_1 + [F_1, H_0] + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

A órdenes superiores encontraríamos expresiones similares a las anteriores: el conocimiento de la función F a cada orden permite calcular el nuevo hamiltoniano al orden correspondiente. Sin embargo, no sabemos cómo ha de ser la transformación canónica y mucho menos la forma del nuevo hamiltoniano.

Una manera de resolver este problema es pasar a una nuevas coordenadas conocidas. Este es el caso cuando el hamiltoniano sin perturbar H_0 corresponde a un sistema periódico y el hamiltoniano H es independiente de t . Podemos usar como nuevas coordenadas las variables angulares de acción (ϕ_0, J_0) correspondientes a H_0 . Si hacemos esta transformación obtenemos:

$$H(\phi_0, J_0) = H_0(J_0) + \epsilon H_1(\phi_0, J_0). \quad (4.34)$$

Supondremos, además, que H_1 es una función periódica en ϕ_0 . Las ecuaciones de movimiento con estas nuevas coordenadas se escriben:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_0 &= \frac{\partial H}{\partial J_0} = \omega_0(J_0) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial J_0}, \\
 \dot{J}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial \phi_0} = -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_0} \equiv -\epsilon G(\phi_0, J_0). \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Es evidente que ahora el momento J_0 no es una constante. G es una variable dinámica definida en el espacio de fases (ϕ_0, J_0) . Si en este espacio de fases consideramos las trayectorias periódicas correspondientes al hamiltoniano H_0 (que se suponen conocidas), podemos calcular el valor medio que toma G al completar una de estas trayectorias:

$$\langle G(J_0) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\phi_0, J_0) d\phi_0 \quad (4.36)$$

Es razonable suponer que G es una función “suave” a lo largo de un período y por tanto podemos sustituir la función por su valor medio con lo que la ecuación de movimiento para el momento se escribe:

$$\dot{J}_0 = -\epsilon \langle G(J_0) \rangle. \quad (4.37)$$

Esta ecuación puede ser integrada ya que sólo depende de J_0 . Una vez obtenida la solución podemos integrar la ecuación para ϕ_0 . Deshaciendo el cambio de coordenadas encontramos las trayectorias. Esta aproximación al movimiento del sistema será más o menos “buena” dependiendo del comportamiento de la función G .

Con los resultados anteriores, desarrollemos la *teoría de perturbaciones canónicas*. Supondremos un hamiltoniano H con un grado de libertad, independiente de t , dado por la expresión (4.25) que sabemos que da lugar a trayectorias periódicas, igual que el hamiltoniano H_0 . Como habíamos visto anteriormente podemos introducir unas nuevas coordenadas (ϕ_0, J_0) con respecto a las cuales H_0 sólo depende de J_0 . Ahora bien, podemos definir también las variables angulares de acción (ϕ, J) correspondientes al hamiltoniano H . Es evidente que existe una transformación canónica que relaciona ambos conjuntos de coordenadas y que dicha transformación es de tipo II. El nuevo hamiltoniano se escribirá como:

$$E(J) \equiv H(J) = H_0(J_0(\phi, J)) + \epsilon H_1(\phi_0(\phi, J), J_0(\phi, J)). \quad (4.38)$$

Sea $S(\phi_0, J)$ el generador de esta transformación, su desarrollo en serie es:

$$S(\phi_0, J) = \phi_0 J + \epsilon S_1(\phi_0, J) + \dots \quad (4.39)$$

donde hemos supuesto que a orden cero la transformación es la identidad ya que cuando $\epsilon = 0$ ambos conjuntos de variables angulares de acción coinciden. La transformación de coordenadas viene dada por:

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{\partial S}{\partial \phi_0} = J + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \dots \\ \phi &= \frac{\partial S}{\partial J} = \phi_0 + \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial J} + \dots \end{aligned} \quad (4.40)$$

Teniendo en cuenta que nuestras variables independientes son (ϕ_0, J) desarrollamos en serie de potencias el hamiltoniano $H(J)$:

$$\begin{aligned} E(J) &\equiv H(J) = H_0(J_0(\phi, J)) + \epsilon H_1(\phi_0(\phi, J), J_0(\phi, J)) \simeq \\ &\simeq H_0(J) + \frac{\partial H_0}{\partial J_0}(J_0 - J) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2}(J_0 - J)^2 + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\epsilon H_1(\phi_0, J) + \epsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial J_0}(J_0 - J) + \dots \simeq \\
 \simeq & H_0(J) + \epsilon H_1(\phi_0, J) + \frac{\partial H_0}{\partial J_0} \epsilon \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} + \frac{\partial H_0}{\partial J_0} \epsilon^2 \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \right)^2 + \epsilon^2 \frac{\partial H_1}{\partial J_0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

En todos los términos de la ecuación anterior hay que sustituir J_0 por J . Si suponemos un desarrollo en serie del hamiltoniano

$$E(J) = E_0(J) + \epsilon E_1(J) + \epsilon^2 E_2(J) + \dots \tag{4.42}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 E_0(J) &= H_0(J) \\
 E_1(J) &= H_1(\phi_0, J) + \frac{\partial H_0}{\partial J_0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \\
 E_2(J) &= \frac{\partial H_0}{\partial J_0} \frac{\partial S_2}{\partial \phi_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2} \left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \right)^2 + \frac{\partial H_1}{\partial J_0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Como en el caso anterior para poder conocer el hamiltoniano a cualquier orden necesitamos saber cómo es la función S . Aunque esta función es desconocida, sin embargo, podemos conocer ciertas propiedades de la misma que nos ayudarán a resolver el problema. Si consideramos una trayectoria cerrada particular de H_0 en el espacio de fases (ϕ_0, J_0) , ϕ_0 cambia de 0 a 2π mientras que J_0 permanece constante. Como (ϕ_0, J) son variables independientes, J ha de tomar los mismos valores al principio y al final de la trayectoria. Esto significa que la función S ha de ser periódica en la variable ϕ_0 y por tanto a cada orden la función es periódica y la podemos desarrollar como una serie de Fourier:

$$S_k(\phi_0, J) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{S}_k(J, m) e^{im\phi_0}. \tag{4.44}$$

Esto significa que el valor medio de las derivadas es cero:

$$\left\langle \frac{\partial S_k}{\partial \phi_0} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial S_k}{\partial \phi_0} d\phi_0 = \sum_m \bar{S}_k i m \int_0^{2\pi} e^{im\phi_0} d\phi_0 = 0. \tag{4.45}$$

Tomando medias en la segunda ecuación de (4.43), teniendo en cuenta que E_1 y H_0 solo dependen de J :

$$E_1(J) = \langle H_1 \rangle. \tag{4.46}$$

Sustituyendo este resultado en la propia ecuación podemos obtener S_1 :

$$\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = \frac{\langle H_1 \rangle - H_1}{\omega_0}, \quad (4.47)$$

donde

$$\omega_0(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J_0}. \quad (4.48)$$

Al integrar la ecuación anterior nos aparecerá una función arbitraria de J que podemos tomar como cero ya que sólo añade una constante en el valor de ϕ (ecuación (4.40)) que lo único que cambia es dónde empezamos a contar la variable ϕ . Podemos hacer lo mismo a orden dos y obtendríamos al tomar promedios:

$$\begin{aligned} E_2(J) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2} \left\langle \left(\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial J_0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2\omega_0^2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_0^2} \left(\langle H_1^2 \rangle - \langle H_1 \rangle^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_0} \left(\left\langle \frac{\partial H_1}{\partial J_0} \right\rangle \langle H_1 \rangle - \left\langle \frac{\partial H_1}{\partial J_0} H_1 \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Al sustituir el resultado anterior obtendríamos S_2 .

Como ejemplo de lo anterior consideremos el hamiltoniano dado por (4.1). En este caso H_0 corresponde al oscilador armónico cuyas variables angulares de acción fueron calculadas al final del Capítulo 3. Usando (3.82) obtenemos que

$$H(\phi_0, J_0) = \omega_0 J_0 + \epsilon \frac{J_0^2}{m\omega_0^2} \sin^4 \phi_0. \quad (4.50)$$

El primer orden es:

$$E_1(J) = \langle H_1 \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{J^2}{m\omega_0^2} \int_0^{2\pi} \sin^4 \phi_0 d\phi_0 = \frac{3J^2}{8m\omega_0^2}. \quad (4.51)$$

Luego el hamiltoniano hasta el primer orden es:

$$E(J) = \omega_0 J + \epsilon \frac{3J^2}{8m\omega_0^2}, \quad (4.52)$$

y la frecuencia del movimiento es:

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial J} = \omega_0 + \epsilon \frac{3J}{4m\omega_0^2} \simeq \omega_0 + \epsilon \frac{3J_0}{4m\omega_0^2}. \quad (4.53)$$

Tomando como condiciones iniciales $q(0) = a, p(0) = 0$ obtenemos:

$$J_0 = \frac{E}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 q^2 \right) = \frac{1}{2} m \omega_0 a^2. \quad (4.54)$$

Finalmente obtenemos

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \frac{3a^2}{8\omega_0} \quad (4.55)$$

que coincide con (4.22). Por último podemos obtener la función que genera la transformación canónica a primer orden:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = \frac{\langle H_1 \rangle - H_1}{\nu_0} = \frac{J^2}{m\omega_0^3} \left(\frac{3}{8} - \sin^4 \phi_0 \right). \quad (4.56)$$

Integrando lo anterior obtenemos:

$$S_1(\phi_0, J) = \frac{J^2}{16m\omega_0^3} \sin 2\phi_0 (2 \sin^2 \phi_0 + 3). \quad (4.57)$$

Sustituyendo lo anterior en (4.39) y en (4.40) obtenemos la transformación canónica:

$$\begin{aligned} J &\simeq J_0 - \epsilon \frac{J_0^2}{8m\omega_0^3} (4 \cos 2\phi_0 - \cos 4\phi_0) \\ \phi &\simeq \phi_0 + \epsilon \frac{J_0^2}{8m\omega_0^3} \sin 2\phi_0 (2 \sin^2 \phi_0 + 3). \end{aligned} \quad (4.58)$$

De aquí podríamos obtener $J(q, p)$ y $\phi(q, p)$.

4.4 Teoría de perturbaciones en varias dimensiones

En el caso de que el sistema tenga n grados de libertad las ecuaciones anteriores pueden ser generalizadas fácilmente. Suponemos un hamiltoniano dado por (4.25) donde ahora ξ representa un punto en el espacio de fases de $2n$ dimensiones. Como antes suponemos conocidas las variables angulares de acción del hamiltoniano H_0 : $(\phi_\alpha^0, J_\alpha^0)$. Haciendo lo mismo que en la sección anterior llegamos a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} E_0(J) &= H_0(J) \\ E_1(J) &= H_1(\phi^0, J) + \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha^0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_\alpha^0} \\ E_2(J) &= \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha^0} \frac{\partial S_2}{\partial \phi_\alpha^0} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_\alpha^0 \partial J_\beta^0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_\alpha^0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_\beta^0} + \frac{\partial H_1}{\partial J_\alpha^0} \frac{\partial S_1}{\partial \phi_\alpha^0}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

donde, como en (4.43), hay que sustituir J_0 por J .

El promedio de una función $f(\phi^0, J)$ viene dado por:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\phi_1^0 \int_0^{2\pi} d\phi_2^0 \cdots \int_0^{2\pi} d\phi_n^0 f(\phi^0, J). \quad (4.60)$$

Como antes, suponemos que S_1 es una función periódica en las variables ϕ^0 :

$$S_1 = \sum_m \bar{S}_1(J, m) e^{im_\alpha \phi_\alpha^0}. \quad (4.61)$$

Tomando promedios en la ecuación (4.59) obtenemos:

$$E_1(J) = \langle H_1(J) \rangle, \quad \omega_\alpha^0 \frac{\partial S_1}{\partial \phi_\alpha^0} = \langle H_1 \rangle - H_1, \quad (4.62)$$

donde

$$\omega_\alpha^0 = \frac{\partial H_0}{\partial J_\alpha^0}. \quad (4.63)$$

El término de la derecha de la última expresión puede ser escrita como una serie de Fourier:

$$\langle H_1 \rangle - H_1 = \sum_m \bar{K}(J, m) e^{im_\alpha \phi_\alpha^0}. \quad (4.64)$$

De (4.61), (4.62) y (4.64) obtenemos:

$$\bar{S}_1(J, m) = \frac{\bar{K}(J, m)}{i\omega_\alpha^0 m_\alpha}. \quad (4.65)$$

La ecuación anterior nos da la solución a primer orden, suponiendo que el denominador no se hace cero para ningún valor de m . Si esto fuera así, el coeficiente de Fourier correspondiente a ese valor de m sería infinito haciendo que todo el procedimiento perturbativo falle. Esto significa que no podríamos describir el movimiento en términos de variables angulares de acción relacionadas por una transformación canónica con las variables angulares de acción del hamiltoniano no perturbado. Si las frecuencias ω_α^0 son conmensurables, es decir, que la razón entre dos cualesquiera da un número racional, entonces siempre encontraremos un conjunto de números enteros m_α que haga cero el denominador de la ecuación anterior. Incluso en el caso en que esto no suceda puede ocurrir que el denominador sea muy pequeño y por tanto S_1 muy grande invalidando de nuevo la aproximación. Sistemas con frecuencias conmensurables, o *resonancias*, se denominan *degenerados*.

4.5 Teorema adiabático

Supongamos un sistema con un grado de libertad que depende de un parámetro constante $H(q, p, \lambda)$. Las variables angulares de acción dependerán de dicho parámetro. Si ahora hacemos que el parámetro dependa del tiempo entonces las variables angulares dependerán del tiempo y ya no serán constantes. Lo que dice el teorema adiabático es que si λ varía lentamente sobre un período determinado de tiempo, entonces J es prácticamente constante.

Si el parámetro λ es constante el movimiento del sistema viene descrito por las variables (ϕ_0, J_0) . Vimos en la Sección 3.6 que la función que generaba la transformación canónica de las variables (q, p) a las variables (ϕ_0, J_0) era la función $W(q, J_0) \equiv W(q, v(J_0))$. Esta función genera una transformación de tipo II. Podemos obtener una función generatriz de tipo I haciendo una transformación de Legendre dada por (2.103):

$$F(q, \phi_0) = W(q, J_0) - J_0 \phi_0, \quad (4.66)$$

donde J_0 lo escribimos como función de q y de ϕ_0 . La función F es una función de tipo I que genera la misma transformación canónica que W . En nuestro caso tanto W como F dependen del parámetro λ . Como este parámetro depende de t el nuevo hamiltoniano, al hacer la transformación canónica, viene dado por:

$$K(\phi_0, J_0, \lambda) = H(J_0, \lambda) + \frac{\partial F}{\partial t} = H(J_0, \lambda) + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \lambda}. \quad (4.67)$$

Como era de esperar J_0 ya no es constante:

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial \phi_0} = -\dot{\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi_0 \partial \lambda}. \quad (4.68)$$

Supongamos que en el intervalo de tiempo ΔT , λ varía muy poco de tal forma que la podemos considerar como constante. Esto significa que $\dot{\lambda}$ es una cantidad infinitesimal en ese período. Si tomamos el promedio:

$$\langle \dot{J}_0 \rangle = -\frac{1}{\Delta T} \int_{\Delta T} \dot{\lambda} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi_0 \partial \lambda} dt \simeq -\frac{\dot{\lambda}}{\Delta T} \int_{\Delta T} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi_0 \partial \lambda} dt + O(\epsilon^2), \quad (4.69)$$

donde $O(\epsilon^2)$ se refiere a términos que dependen al menos de $\dot{\lambda}^2$ o de $\ddot{\lambda}$.

De la ecuación (3.58) sabemos que la función W se escribe como

$$W = \int p dq. \quad (4.70)$$

Por tanto entre $t = 0$ y $t = T$ siendo T el período de una trayectoria cerrada, W incrementa en $2\pi J_0$, y de (4.66) obtenemos que el incremento de F es cero. Es decir F es una función periódica en ϕ_0 y también su derivada con respecto a λ :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_m \mathcal{F}_m e^{im\phi_0}. \quad (4.71)$$

Sustituyéndolo en la expresión anterior obtenemos:

$$\langle \dot{J}_0 \rangle = -\frac{\dot{\lambda}}{\Delta T} \int_{\Delta T} \sum_m \mathcal{F}_m i m e^{im\phi_0} dt + O(\epsilon^2). \quad (4.72)$$

Si consideramos la integral extendida a un período de la trayectoria correspondiente al sistema no perturbado la integral anterior es cero. Si consideramos un intervalo de tiempo que no coincide con el período de la trayectoria, la expresión anterior puede ser tan pequeña como queramos tomando ΔT suficientemente grande. En cualquier caso vemos que $\langle \dot{J}_0 \rangle \simeq 0$.

Como ejemplo consideremos un oscilador armónico cuya frecuencia ω es variable. De las ecuaciones (3.79)-(3.82) encontramos J_0 como función de q y de ϕ_0 :

$$J_0 = \frac{1}{2} m \omega \frac{q^2}{\sin^2 \phi_0}. \quad (4.73)$$

Usando (3.75) y la expresión anterior encontramos la función F :

$$F = \frac{1}{2} m \omega q^2 \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0}. \quad (4.74)$$

Si consideramos ahora que ω_0 es una función de t , al hacer la transformación el nuevo hamiltoniano se escribe:

$$K(\phi_0, J_0) = \omega J_0 + \frac{1}{2} m \dot{\omega} q^2 \frac{\cos \phi_0}{\sin \phi_0} = \omega J_0 + \frac{1}{2} \frac{\dot{\omega}}{\omega} J_0 \sin 2\phi_0. \quad (4.75)$$

Supondremos que

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{\omega}}{\omega} \quad (4.76)$$

es una cantidad infinitesimal, lo que significa que

$$\omega \simeq \omega_0(1 + \epsilon t), \quad (4.77)$$

donde ω_0 es la frecuencia inicial del oscilador. Del hamiltoniano anterior obtenemos las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{\phi}_0 = \frac{\partial K}{\partial J_0} = \omega + \frac{1}{2} \epsilon \sin 2\phi_0 \simeq \omega_0 + \epsilon \left(\omega_0 t + \frac{1}{2} \sin 2\phi_0 \right). \quad (4.78)$$

Imponiendo como condición inicial $\phi_0(0) = 0$ obtenemos hasta primer orden:

$$\phi_0 = \omega_0 t + \epsilon \left[\frac{1}{2} \omega_0 t^2 + \frac{1}{4\omega_0} (1 - \cos 2\omega_0 t) \right]. \quad (4.79)$$

La otra ecuación de movimiento es:

$$\dot{J}_0 = -\frac{\partial K}{\partial \phi_0} = -\epsilon J_0 \cos 2\phi_0 \simeq -\epsilon J_0 \cos 2\omega_0 t. \quad (4.80)$$

La solución de esta ecuación es de la forma

$$J_0 = A \exp\left(-\epsilon \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t\right) \simeq A \left(1 - \epsilon \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t\right). \quad (4.81)$$

donde A es una constante de integración.

Teniendo en cuenta la forma del hamiltoniano dada por (4.75) podemos usar también los resultados obtenidos en la Sección 4.3. En particular, si comparamos (4.75) con (4.34) obtenemos que:

$$H_1(\phi_0, J_0) = \frac{1}{2} J_0 \sin 2\phi_0. \quad (4.82)$$

De la ecuación (4.47) podemos obtener la función que nos genera la transformación a las variables angulares de acción del hamiltoniano perturbado:

$$\frac{\partial S_1}{\partial \phi_0} = -\frac{H_1}{\nu_0} = -\frac{1}{2\omega} J \sin 2\phi_0, \quad \Rightarrow \quad S_1 = \frac{1}{4\omega} J \cos 2\phi_0. \quad (4.83)$$

La transformación canónica viene dada por (4.40):

$$J_0 = J - \epsilon \frac{1}{2\omega} J \sin 2\phi_0 \simeq J - \epsilon \frac{1}{2\omega_0} J \sin 2\phi_0. \quad (4.84)$$

Comparando esta expresión con (4.81) vemos que la constante de integración A es la variable angular de acción J del hamiltoniano perturbado, que por definición es constante.

Capítulo 5

SISTEMAS CONTINUOS

5.1 Introducción

Lo que hemos visto en los capítulos precedentes ha consistido en el formalismo para tratar sistemas discretos. Este formalismo puede ser extendido a sistemas continuos con infinitos grados de libertad tal como una cuerda vibrando o el movimiento de un fluido. En el primer caso el movimiento viene descrito por el desplazamiento de la cuerda en todos sus puntos, es decir por una función $\phi(\vec{r}, t)$ que llamaremos *campo*.

5.2 Transición al continuo

Para ver como podemos pasar de un sistema discreto a uno continuo vamos a considerar dos ejemplos.

Ejemplo 1 En este caso consideraremos las vibraciones longitudinales de una varilla elástica infinitamente larga. Aproximamos este sistema mediante un sistema discreto de infinitas partículas de masa m separadas una distancia a y unidas por muelles de constante recuperadora k . Solo tendremos en cuenta los desplazamientos longitudinales. El desplazamiento longitudinal de la partícula i viene dado por $\xi_i(t)$.

La energía cinética total de la varilla es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m \dot{\xi}_i^2, \quad (5.1)$$

y la energía potencial es la suma de las energías potenciales de todos los muelles:

$$V = \frac{1}{2} \sum_i k (\xi_{i+1} - \xi_i)^2. \quad (5.2)$$

Por tanto el lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_i [m \dot{\xi}_i^2 - k(\xi_{i+1} - \xi_i)^2]. \quad (5.3)$$

Para poder efectuar el paso al continuo multiplicamos y dividimos por la longitud a :

$$L = \frac{1}{2} a \sum_i \left[\frac{m}{a} \dot{\xi}_i^2 - ka \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a} \right)^2 \right] \equiv a \sum_i \mathcal{L}_i. \quad (5.4)$$

Las ecuaciones que se derivan de este lagrangiano son:

$$\frac{m}{a} \ddot{\xi}_i + ka \left(\frac{\xi_i - \xi_{i-1}}{a^2} \right) - ka \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a^2} \right) = 0. \quad (5.5)$$

El paso al continuo lo realizamos haciendo tender a a cero, definiendo al mismo tiempo el límite de algunas cantidades. Por ejemplo, es lógico suponer que en el límite $m/a \rightarrow \lambda$, siendo λ la densidad lineal de masa de la varilla. Suponemos, además, que la varilla sigue la ley de Hooke, es decir: el alargamiento de la varilla por unidad de longitud es proporcional a la tensión: $F = Y\eta$, donde Y es el módulo de Young y η es el alargamiento por unidad de longitud. En nuestro caso la fuerza necesaria para estirar el muelle es:

$$F = k(\xi_{i+1} - \xi_i) = ka \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a} \right). \quad (5.6)$$

Es decir $ka \rightarrow Y$. Por último el índice i que identificaba cada una de las masas, al pasar al continuo, describirá la posición x : $\xi_i \rightarrow \xi(x)$, y obtenemos

$$\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{a} \rightarrow \frac{\xi(x+a) - \xi(x)}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (5.7)$$

En la expresión del lagrangiano (5.4) la sumatoria se transforma en una integral en x al pasar al límite del continuo:

$$L = \frac{1}{2} \int \left[\lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (5.8)$$

y la ecuación de movimiento se escribe como:

$$\lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0. \quad (5.9)$$

Esta ecuación es la ecuación de ondas longitudinales propagándose con velocidad $\sqrt{Y/\lambda}$. Finalmente de (5.4) y de (5.8) definimos la densidad lagrangiana como:

$$L = \int \mathcal{L} dx, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (5.10)$$

Ejemplo 2 El siguiente ejemplo consiste en un conjunto de péndulos de masa m y longitud l cuyos puntos de suspensión pueden moverse a lo largo de un alambre helicoidal de paso b . Los péndulos están obligados a oscilar en un plano perpendicular al eje del helicoide de tal forma que cuando un péndulo i oscila un ángulo φ_i se desplaza una distancia $x_i = b\varphi_i$. Suponemos, además, que los puntos de suspensión están unidos entre sí por muelles de constante de recuperación k y tal que en sus posiciones de equilibrio la distancia entre los péndulos es a . La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m(l^2 \dot{\varphi}_i^2 + \dot{x}_i^2) = \frac{1}{2} \sum_i m(l^2 + b^2) \dot{\varphi}_i^2 \equiv \frac{1}{2} m h^2 \sum_i \dot{\varphi}_i^2. \quad (5.11)$$

La energía potencial constará de dos términos, uno debido a la fuerza gravitatoria y el otro a la energía potencial de cada uno de los muelles. El lagrangiano del sistema se escribe por tanto como:

$$L = \sum_i \left[\frac{1}{2} m h^2 \dot{\varphi}_i^2 - m g l (1 - \cos \varphi_i) - \frac{1}{2} k b^2 (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 \right]. \quad (5.12)$$

Las ecuaciones de movimiento que se derivan de este lagrangiano para el péndulo i son:

$$m h^2 \ddot{\varphi}_i - k b^2 [(\varphi_{i+1} - \varphi_i) - (\varphi_i - \varphi_{i-1})] + m g l \sin \varphi_i = 0. \quad (5.13)$$

Ahora hacemos lo mismo que en el ejemplo anterior: multiplicamos y dividimos el lagrangiano y la ecuación de movimiento por a y hacemos tender a a cero definiendo al mismo tiempo la densidad de energía $\lambda = m/a$ constante. El ángulo φ_i del péndulo i se transforma en una función $\varphi(x, t)$. Las ecuaciones de movimiento se transforman en:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Omega^2 \sin \varphi = 0, \quad (5.14)$$

donde hemos definido

$$v^2 = \frac{k a b^2}{\lambda h^2}, \quad \Omega^2 = \frac{g l}{h^2}. \quad (5.15)$$

Esta ecuación se denomina *ecuación sine-Gordon*. El lagrangiano se escribe como una integral:

$$L = \int \lambda h^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} v^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 - \Omega^2 (1 - \cos \varphi) \right] dx \equiv \int \mathcal{L} dx. \quad (5.16)$$

Si eliminamos la fuerza externa, es decir si consideramos $g = 0$, recuperamos las ecuaciones del ejemplo anterior sin más que definir $\xi = h\varphi$.

De estos dos ejemplos vemos cómo el paso al continuo implica que lo que en la formulación lagrangiana “etiquetaba” cada una de las coordenadas generalizadas, el índice i , ahora en el continuo pasa a ser la dependencia del campo respecto de la coordenada x , que es totalmente independiente de t . Además el lagrangiano se escribe como una integral de x . Lo que haremos en la siguiente sección será desarrollar una formulación lagrangiana sin necesidad de hacer alusión al sistema discreto de partida.

5.3 Formulación Lagrangiana

En los ejemplos que hemos visto en la sección anterior las ecuaciones de movimiento podían haber sido deducidas de la densidad lagrangiana a través de la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi / \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi / \partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (5.17)$$

donde $\phi(t, x)$ representan indistintamente cada uno de los campos. Esta forma de escribir las ecuaciones de movimiento recuerda las ecuaciones de Euler-Lagrange en donde el término $d/dt(\partial L/\partial \dot{q})$ ha sido reemplazado por la suma de las derivadas con respecto a t y a x . En el primer ejemplo, en el que no había fuerza externa, el último término se hace cero.

Vamos a deducir las ecuaciones anteriores a partir de un principio variacional, como hicimos en la formulación lagrangiana. Suponemos una densidad lagrangiana \mathcal{L} que depende de los campos ϕ_A y de sus derivadas. Estamos considerando el caso en el que hay varios campos, el índice A describe cada uno de ellos. Para simplificar la notación la derivada de un campo

$$\frac{\partial \phi_A}{\partial x^\alpha} \quad (5.18)$$

la representaremos por $\phi_{A,\alpha}$, donde el índice α va desde 0 a 3, siendo $x^0 \equiv t$ y las demás coordenadas son las coordenadas cartesianas. La lagrangiana se escribe como:

$$L = \int \mathcal{L}(\phi_{A,\alpha}, \phi_A, x) d^3x \quad (5.19)$$

donde d^3x representa el elemento de volumen $dx^1 dx^2 dx^3$.

El principio variacional de Hamilton dice que los campos físicos ϕ_A son aquellos que hacen que la integral

$$I = \int_R L dt = \int_R \mathcal{L}(\phi_{A,\alpha}, \phi_A, x) d^4x \quad (5.20)$$

es un extremo. La integral anterior se calcula en la región R en el espacio de 4 dimensiones donde queremos encontrar las ecuaciones que verifican los campos. El contorno de este volumen es una superficie cerrada B . Suponemos ahora todas las posibles configuraciones para los campos y cada una de ellas la “etiquetamos” con el parámetro ϵ tal que para $\epsilon = 0$ el campo corresponde al campo físico. Así los campos vienen descritos como $\phi_A(x, \epsilon)$. Como hicimos en la formulación lagrangiana suponemos que todas las configuraciones de los campos toman el mismo valor en el contorno del volumen:

$$\phi_A(x, \epsilon) = \phi_A(x, 0) \equiv \phi_A^0(x), \quad \forall x \in B. \quad (5.21)$$

Lo anterior equivale a que

$$\left(\frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} \right)_{x \in B} = 0. \quad (5.22)$$

El principio variacional se escribe como:

$$0 = \left(\frac{dI}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \left(\int_R \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} d^4x \right)_{\epsilon=0}. \quad (5.23)$$

La derivada anterior se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial \phi_{A,\alpha}}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} = \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \right) \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Sustituyendo esto en (5.23) obtenemos:

$$0 = \int_R \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \right) \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} d^4x + \int_R \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} \right) d^4x, \quad (5.25)$$

donde las integrales anteriores han de ser calculadas para $\epsilon = 0$. La última integral se transforma en una integral de superficie mediante el teorema de la divergencia:

$$\int_R \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} \right) d^4x = \oint_B \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \frac{\partial \phi_A}{\partial \epsilon} dB_\alpha, \quad (5.26)$$

donde dB_α es el vector normal a la superficie cerrada B y orientado hacia afuera del volumen encerrado por dicha superficie. Claramente esta integral se anula debido a las condiciones (5.22). La ecuación que siguen los campos es:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} = 0.} \quad (5.27)$$

5.4 Cantidades conservadas. Corriente

En el formalismo lagrangiano habíamos demostrado que las cantidades conservadas están asociadas a transformaciones que dejan L invariante: es decir, a cada transformación $q'_\alpha = q'_\alpha(q, t)$ respecto de la que L es simétrico existe una cantidad $F(q, \dot{q}, t)$ tal que $dF/dt = 0$. En los sistemas continuos encontramos el mismo resultado. El equivalente a una transformación de las coordenadas es una transformación de los campos ϕ_A y la cantidad conservada no involucrará sólo a la derivada con respecto a t sino todas las derivadas con respecto a x^α .

Consideremos una familia de transformaciones de los campos dada por $\phi_A(x, \epsilon)$, tal que cuando $\epsilon = 0$ la transformación es la identidad, es decir las funciones $\phi_A(x, 0)$ verifican las ecuaciones (5.27). Usando los resultados de la sección anterior obtenemos que la variación de la densidad lagrangiana alrededor de $\epsilon = 0$ viene dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \right) \delta \phi_A + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \delta \phi_A \right), \quad (5.28)$$

donde todos los términos de la derecha han de ser calculados para $\epsilon = 0$. Como el primer término se anula obtenemos que:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \delta \phi_A \right)_{\epsilon=0}. \quad (5.29)$$

Si al hacer la transformación la densidad lagrangiana varía como:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial G^\alpha}{\partial x^\alpha}, \quad (5.30)$$

donde $G^\alpha \equiv G^\alpha(\phi_A, x)$, entonces (5.29) se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \delta \phi_A - G^\alpha \right)_{\epsilon=0} = 0. \quad (5.31)$$

Este es el *Teorema de Noether*, que dice que si bajo una transformación de los campos la densidad lagrangiana se transforma como (5.30) entonces existe una *corriente conservada*.

Se define corriente conservada cualquier cantidad S^α función de las variables del campo que satisface la ecuación:

$$\frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (5.32)$$

Demostraremos a continuación que la integral de S^0 extendida a todo el espacio tridimensional es una cantidad conservada, es decir que no varía con el tiempo. Para ello consideremos una región R del espacio en 4 dimensiones como la de la figura. Los espacios tridimensionales para $x^0 = \text{constante}$, V , los tomaremos como esferas.

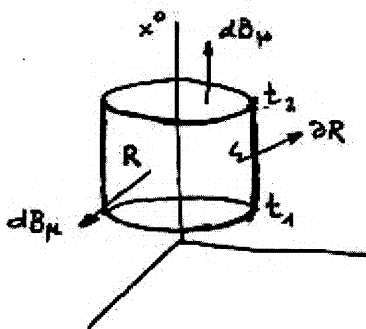


Figura 5.1: Región R en cuatro dimensiones

Integrando la ecuación (5.32) en la región R y aplicando el teorema de la divergencia obtenemos:

$$0 = \int_R \frac{\partial S^\alpha}{\partial x^\alpha} d^4x = \oint_{\partial R} S^\alpha dB_\alpha, \quad (5.33)$$

donde dB_α es el vector normal a la superficie cerrada ∂R . En la superficie superior, con $x^0 = t_2$, $dB_\alpha = (d^3x, 0, 0, 0)$ y en la inferior $dB_\alpha = (-d^3x, 0, 0, 0)$. En la superficie lateral $dB_\alpha = (0, dx^0 d\vec{\Sigma})$, donde $d\vec{\Sigma}$ es el elemento de superficie de la esfera V . Obtenemos por tanto:

$$0 = \int_V S^0(t_2) d^3x - \int_V S^0(t_1) d^3x + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{\Sigma}. \quad (5.34)$$

Si consideramos ahora que la región R comprende todo el espacio tridimensional entre los tiempos t_1 y t_2 , $d\bar{\Sigma}$ crece como r^2 , si \bar{S} decrece a su vez más rápido que r^{-2} entonces la última integral de la ecuación anterior se hace cero y obtenemos:

$$\int_V S^0(t_2)d^3x = \int_V S^0(t_1)d^3x. \quad (5.35)$$

Como los tiempos t_1 y t_2 son arbitrarios lo anterior significa que:

$$\frac{d}{dt} \int_V S^0 d^3x = 0. \quad (5.36)$$

Volviendo al teorema de Noether (5.31), vemos que la cantidad

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \delta \phi_A - G^\alpha \quad (5.37)$$

es una corriente conservada siendo la integral de la componente 0 la cantidad conservada.

Un caso particular aparece cuando la densidad lagrangiana no depende de la función ϕ_A . De la ecuación (5.27) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} = 0 \quad (5.38)$$

es decir $\partial \mathcal{L} / \partial \phi_{A,\alpha}$ es una corriente conservada.

5.5 Energía y momento del campo

La invariancia del lagrangiano frente a traslaciones del tiempo o del espacio está asociada con la conservación de la energía o del momento lineal, respectivamente. En este caso obtendremos un resultado similar. Por ello vamos a suponer traslaciones en cuatro dimensiones tal que el campo se transforma como:

$$\phi_A(x) \rightarrow \phi_A(x + \epsilon h), \quad (5.39)$$

donde h^α representa el vector de desplazamiento.

Si \mathcal{L} no depende explícitamente de x , lo que suele suceder cuando tenemos campos libres, sin fuentes, la dependencia de \mathcal{L} en x viene a través de ϕ_A y sus derivadas. La transformación anterior induce un cambio en la densidad lagrangiana dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \frac{\partial \phi_A}{\partial x^\alpha} h^\alpha d\epsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\mu}} \frac{\partial \phi_{A,\mu}}{\partial x^\alpha} h^\alpha d\epsilon =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \frac{\partial \phi_A}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\mu}} \frac{\partial \phi_{A,\mu}}{\partial x^\alpha} \right) h^\alpha d\epsilon = \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} h^\alpha d\epsilon = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathcal{L} h^\alpha) d\epsilon.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Es decir la función G^α en este caso viene dada por $\mathcal{L} h^\alpha$. Por otra parte, de (5.39) obtenemos:

$$\delta \phi_A = \phi_{A,\alpha} h^\alpha. \tag{5.41}$$

Con estos resultados la ecuación (5.31) se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \phi_{A,\mu} h^\mu - \mathcal{L} h^\alpha \right) \equiv h^\mu \frac{\partial T_\mu^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{5.42}$$

donde hemos definido

$$T_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} \phi_{A,\mu} - \delta_\mu^\alpha \mathcal{L}. \tag{5.43}$$

Hemos obtenido cuatro corrientes conservadas, una para cada valor del índice μ , que dan lugar a las siguientes cantidades conservadas:

$$P_\mu = \int T_\mu^0 d^3x. \tag{5.44}$$

Cada índice μ nos indica una translación h^μ . Para $\mu = 0$ los desplazamientos son temporales y por tanto P_0 será la energía contenida en el campo, mientras que P_i será el momento. De estas definiciones es evidente que T_0^0 representa la densidad de energía y T_i^0 la densidad de momento.

5.6 Formalismo Hamiltoniano

Definimos el momento conjugado de la función campo ϕ_A como:

$$\pi^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,0}}. \tag{5.45}$$

Invirtiendo estas ecuaciones obtenemos $\phi_{A,0}$ como función de los momentos π^A y de las derivadas $\phi_{A,i}$. Definimos el Hamiltoniano del campo como:

$$\begin{aligned}
H(\phi_A, \pi^A, \phi_{A,i}, x) &= \int \pi^A \phi_{A,0} d^3x - L = \\
&= \int (\pi^A \phi_{A,0} - \mathcal{L}) d^3x \equiv \int \mathcal{H} d^3x.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

La última igualdad define la densidad hamiltoniana \mathcal{H} , que coincide, como era de esperar, con la densidad de energía: $\mathcal{H} = T_0^0$

Las ecuaciones canónicas se obtienen a partir de las derivadas de la densidad hamiltoniana:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^A} = \phi_{A,0} + \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \pi^A} \pi^B - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{B,0}} \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \pi^A} = \phi_{A,0}. \quad (5.47)$$

El otro conjunto de ecuaciones canónicas se obtiene a partir de las derivadas con respecto a los campos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_A} &= \pi^B \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{B,0}} \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\alpha}} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,0}} = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} - \frac{\partial \pi^A}{\partial x^0}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Las ecuaciones de campo (5.27) han sido usadas en la anterior cadena de igualdades. De la definición de la densidad hamiltoniana (5.46) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{A,i}} = \pi^B \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \phi_{A,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{B,0}} \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \phi_{A,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}}. \quad (5.49)$$

Sustituimos ésto en (5.48):

$$\pi_{,0}^A = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_A} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{A,i}}. \quad (5.50)$$

Mientras que las ecuaciones (5.47) se parecen a las ecuaciones canónicas $\dot{q}_\alpha = \partial H / \partial p_\alpha$, el segundo conjunto de ecuaciones (5.50) no se parece a las ecuaciones $\dot{p}_\alpha = -\partial H / \partial q_\alpha$, sino que aparece un término extra. Para escribir las ecuaciones anteriores en una forma análoga a las ecuaciones canónicas (2.6) usaremos la derivada funcional que fué definida en la sección 1.4. Teniendo en cuenta que:

$$H = \int \mathcal{H}(\phi_A, \pi^A, \phi_{A,i}, x) d^3x, \quad (5.51)$$

según la definición (1.60) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi^A} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \mathcal{H}(\phi_A, \pi^A + \epsilon \delta^3(x-y), \phi_{A,i}, y) d^3y - \right. \\ &\quad \left. - \int \mathcal{H}(\phi_A, \pi^A, \phi_{A,i}, y) d^3y \right\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \left[\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^A} \epsilon \delta^3(x-y) - \mathcal{H} \right] d^3y \right\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^A}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

De la misma forma hallamos la otra derivada funcional:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta H}{\delta \phi_A} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \mathcal{H}(\phi_A + \epsilon \delta^3(x-y), \pi^A, \phi_{A,i} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y), y) d^3y - \right. \\
 &\quad \left. - \int \mathcal{H} d^3y \right\} = \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int \left[\mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_A} \epsilon \delta^3(x-y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{A,i}} \epsilon \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(x-y) - \mathcal{H} \right] d^3y \right\} = \\
 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_{A,i}}. \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas derivadas en (5.47) y (5.50) encontramos

$$\phi_{A,0} = \frac{\delta H}{\delta \pi^A}, \quad \pi_{,0}^A = -\frac{\delta H}{\delta \phi_A}, \tag{5.54}$$

que son completamente análogas a las ecuaciones canónicas. Sin embargo, a pesar de esto, la analogía entre este formalismo y el formalismo hamiltoniano para sistemas discretos no es completa ya que la densidad lagrangiana depende de las derivadas del campo, pero no de los momentos π^A , lo que hace que las variables ϕ_A, π^A ya no sean similares entre sí.

5.7 Desarrollo en funciones ortonormales

Un formalismo alternativo a lo expuesto hasta ahora consiste en el desarrollo de la función campo en término de funciones ortonormales. En este caso la analogía con el formalismo hamiltoniano es más directa. Los sistemas que han sido considerados al principio de este Capítulo, y que han servido como introducción a los sistemas continuos, consistían en N partículas en interacción con $N \rightarrow \infty$. El movimiento de tales sistemas puede ser descrito en términos de los modos normales. Es esta descripción en la que se basa el desarrollo del campo en funciones ortonormales.

Un conjunto de funciones $\varphi_n(\vec{r})$, donde n es entero, es un conjunto ortonormal y completo de funciones si cualquier función “suficientemente” suave que tiende a cero cuando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ puede ser escrita como un desarrollo en serie de dichas funciones:

$$\phi(x^0, \vec{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x^0) \varphi_n(\vec{r}). \tag{5.55}$$

La ortonormalidad del conjunto completo significa que las funciones verifican:

$$(\varphi_n, \varphi_m) \equiv \int \varphi_n^*(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r}) d^3x = \delta_{nm}. \tag{5.56}$$

Esto define un producto interno en el espacio de las funciones:

$$(f, g) = \int f^*(\vec{r})g(\vec{r}) d^3x. \quad (5.57)$$

Podemos obtener así los coeficientes del desarrollo de (5.55):

$$(\varphi_m, \phi) = \sum_n a_n (\varphi_m, \varphi_n) = a_m \quad \Rightarrow \quad a_m = \int \varphi_m^* \phi d^3x. \quad (5.58)$$

El conocimiento de los infinitos coeficientes del desarrollo nos permite calcular el campo usando (5.55). Es por tanto interesante calcular las ecuaciones diferenciales que verifican los coeficientes del campo ϕ_A . Es evidente que si desarrollamos los campos según (5.55) el lagrangiano L dependerá de los coeficientes de cada campo a_{An} . Calcularemos las derivadas del lagrangiano respecto de cada uno de los coeficientes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_{An}} &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_B} \frac{\partial \phi_B}{\partial a_{An}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{B,i}} \frac{\partial \phi_{B,i}}{\partial a_{An}} \right) d^3x = \\ &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \varphi_n + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \varphi_{n,i} \right) d^3x. \end{aligned} \quad (5.59)$$

En la derivada anterior hemos tenido en cuenta el hecho que $\phi_{A,0}$ no depende de los coeficientes a_{An} sino de \dot{a}_{An} . El último término se puede integrar por partes dando lugar a una integral de superficie que se anula al imponer que tanto los campos como la densidad lagrangiana tienden a cero suficientemente rápido cuando $|\vec{r}| \rightarrow \infty$. La derivada anterior se escribe, por tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial a_{An}} = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} \right) \varphi_n d^3x. \quad (5.60)$$

De forma análoga obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{An}} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{B,0}} \frac{\partial \phi_{B,0}}{\partial \dot{a}_{An}} d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,0}} \varphi_n d^3x. \quad (5.61)$$

Combinando ambos resultados escribimos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{An}} - \frac{\partial L}{\partial a_{An}} &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,0}} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,i}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \right) \varphi_n d^3x = \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{A,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_A} \right) \varphi_n d^3x = 0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Vemos que las ecuaciones del campo equivalen a las ecuaciones de Euler-Lagrange considerando que los coeficientes del desarrollo de los campos son

las coordenadas generalizadas y el número de grados de libertad del sistema, infinito. Los momentos conjugados de estas coordenadas son:

$$b_{An} = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_{An}} = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{A,0}} \varphi_n d^3x = \int \pi^A \varphi_n d^3x. \quad (5.63)$$

Tomando los complejos conjugados de la expresión anterior, y teniendo en cuenta (5.58), se comprueba que las cantidades b_{An}^* constituyen los coeficientes del desarrollo de π^{A*} :

$$\pi^{A*} = \sum_n b_{An}^* \varphi_n. \quad (5.64)$$

El hamiltoniano se escribe como:

$$H = \sum_n b_{An} \dot{a}_{An} - L \quad (5.65)$$

Veamos cual es la relación entre este hamiltoniano y el definido en (5.46):

$$\begin{aligned} H &= \int \mathcal{H} d^3x = \int (\pi^A \dot{\phi}_{A,0} - \mathcal{L}) d^3x = \int \sum_n b_{An} \dot{\phi}_n^* \sum_m \dot{a}_{Am} \varphi_m d^3x - L = \\ &= \sum_{nm} b_{An} a_{Am} \int \varphi_n^* \varphi_m d^3x - L = \sum_n b_{An} \dot{a}_{An} - L. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Vemos, por tanto, que el hamiltoniano definido en la sección anterior coincide con el definido a partir de los coeficientes del desarrollo del campo en funciones ortonormales.

Capítulo 6

MECANICA Y GEOMETRIA DIFERENCIAL

Hemos visto como el espacio de configuración \mathcal{Q} está formado por los puntos con coordenadas q_α y es un espacio de dimensión n . En el caso de que el sistema dinámico esté formado por una partícula sin ninguna ligadura, entonces el espacio es el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 y el vector velocidad \vec{v} pertenece al mismo espacio. En el caso de dos partículas la diferencia de sus velocidades también pertenece al mismo espacio \mathbb{E}^3 . Sin embargo si consideramos una partícula obligada a moverse sobre la superficie de una esfera, entonces el espacio de configuración es la esfera S^2 y el vector velocidad es tangente a la esfera y por tanto no “pertenece” a dicho espacio sino que está en el espacio \mathbb{E}^3 al cual pertenece la superficie S^2 . Todos los posibles vectores velocidad en un punto de la esfera son tangentes a la misma en ese punto y forman un espacio vectorial de dimensión 2. En el caso de la velocidad relativa de dos puntos en la esfera, aunque es un vector en el espacio \mathbb{E}^3 , no representa nada que pueda ser descrito en términos de S^2 .

En el ejemplo anterior no es importante la descripción del movimiento enteramente en términos de la esfera S^2 ya que éste puede venir descrito en el espacio \mathbb{E}^3 . El problema se complica cuando consideramos espacios de configuración más complicados, por ejemplo el del péndulo doble cuyo espacio de configuración es $S^2 \times S^2$ que es una hipersuperficie en algún \mathbb{E}^n que no tiene ningún significado físico particular.

Para tratar con estos espacios definimos una *variedad* usando la analogía con la construcción de mapas. Para hacer un mapa de la tierra se pueden realizar diversos tipos de proyecciones. Ninguna de estas proyecciones cubre enteramente la superficie de la tierra sin hacer cortes, perder algunos puntos o repetir otros más de una vez. Un mapa es una representación plana razonablemente fiel de una superficie curva. Un atlas es una colección de mapas que

cubre toda la tierra. Un punto de la superficie puede aparecer en un mapa o en varios. Una variedad es una construcción similar.

Una *variedad n -dimensional* puede ser vista como una hipersuperficie de dimensión n en un espacio real euclidiano \mathbb{E}^m siendo m mayor que n . En particular, una variedad M de dimensión n es un espacio que localmente lo “identificamos” con \mathbb{R}^n : es un espacio de Hausdorff (es decir que para cualquier recubrimiento y $\forall a, b \in M, \exists U_a, U_b$ abiertos tales que $a \in U_a, b \in U_b, U_a \cap U_b = \emptyset$) en el que cualquier punto $a \in M$ tiene un abierto homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n (Fig. 1).

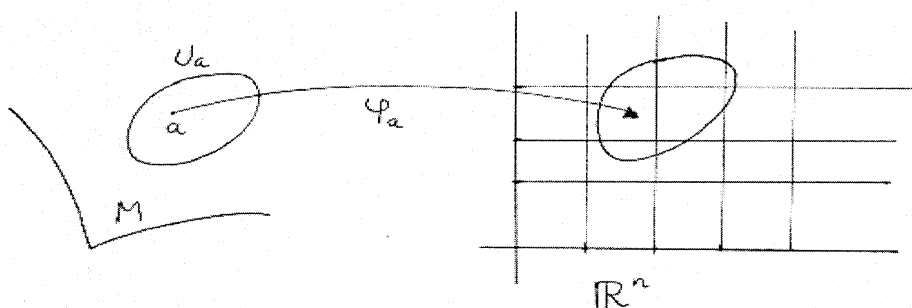


Figura 6.1: Carta local en una variedad M

Es decir a cualquier punto de la variedad le hacemos corresponder un punto de \mathbb{R}^n : si $u \in U_a, \varphi_a^\alpha(u) \in \mathbb{R}^n$ y serán las coordenadas del punto u . La aplicación φ_a la llamaremos *carta local*. Al conjunto de todas las cartas locales del recubrimiento de M ($M = \cup U_a$) se le denomina *atlas*. Evidentemente un punto en la variedad puede pertenecer a dos distintos abiertos U_a y U_b ; en este caso existirán dos diferentes coordenadas para el mismo punto: $\varphi_a^\alpha(u)$ y $\varphi_b^\alpha(u)$ (Fig. 2).

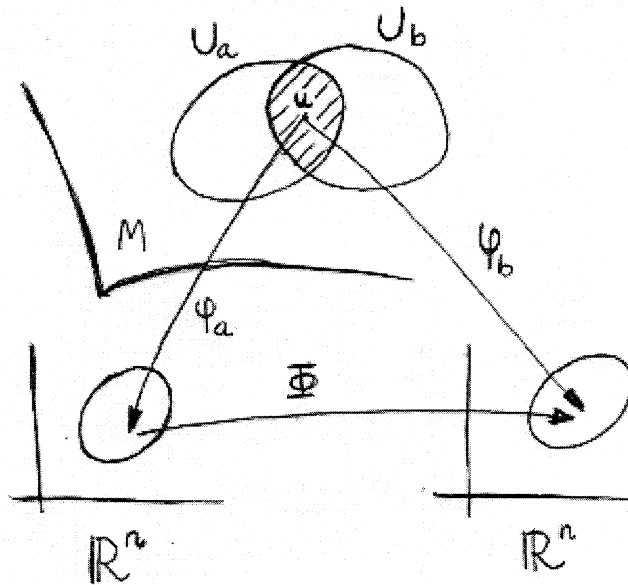


Figura 6.2: Cambio de coordenadas en una variedad M

La aplicación Φ es biyectiva y relaciona ambos conjuntos de coordenadas:

$$\Phi^\alpha(x^1, \dots, x^n) = y^\alpha = \varphi_b^\alpha(u) = \varphi_b(\varphi_a^{-1}(x)) \quad (6.1)$$

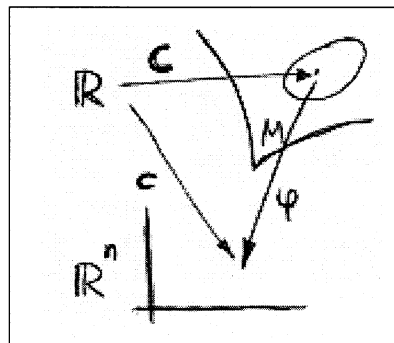
Si Φ es diferenciable se dice que la variedad es diferenciable.

Veamos ahora como definir vectores en la variedad sin necesidad de recurrir a un espacio \mathbb{E}^m de dimensión mayor. Para ello definimos primero una curva $C(t)$ en la variedad como una aplicación de un abierto de \mathbb{R} en M . Mediante la carta local, las coordenadas de un punto de la curva $C(t)$ vienen dadas por $x^\alpha = \varphi^\alpha(C(t)) \equiv c^\alpha(t)$. La curva C es diferenciable si las funciones $c^\alpha(t)$ lo son.

El *vector tangente* a la curva C en la carta local tiene componentes definidas por

$$v^\alpha = \frac{dc^\alpha}{dt}. \quad (6.2)$$

Sea una curva C que pertenece a dos cartas locales φ_a y φ_b , y sea $c^\alpha(t) =$



$\varphi_b^\alpha(C(t))$, $d^\alpha(t) = \varphi_a(C(t))$ y $c^\alpha(t) = \Phi^\alpha(d(t))$ entonces los vectores tangentes verifican:

$$v^\alpha = \frac{dc^\alpha}{dt} = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial d^\beta} \frac{dd^\beta}{dt} = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial d^\beta} u^\beta. \quad (6.3)$$

El vector \vec{v} lo identificamos con las componentes v^α y la carta local donde han sido calculadas. \vec{v} es un objeto independiente de la carta local usada para el cálculo de sus componentes.

En un punto m de M un conjunto de números v^α define un vector \vec{v} en el punto m . Si tenemos otro vector \vec{u} en el mismo punto m , entonces $w^\alpha = \lambda v^\alpha + \mu u^\alpha$ definen otro vector \vec{w} en m . Es decir el conjunto de vectores en m forman un espacio vectorial de dimensión n llamado $T_m M$. El conjunto formado por la variedad M y todos los espacios $T_m M$ constituyen el *espacio tangente* o *fibrado tangente* de la variedad TM . Los puntos de este espacio tangente están formados por los pares (m, \vec{v}) donde \vec{v} es un vector tangente en el punto m . Cada uno de los espacios vectoriales $T_m M$ se denominan *fibras*. Por ejemplo: si $M=S^1$ el espacio vectorial tangente en cada punto es una línea recta (los vectores tangentes en cada punto puede tomar todos los valores). Así aparece el espacio tangente TS^1 como un cilindro. Sin embargo, para que esto sea así hay que “pegar” los espacios tangentes. Esto lo hacemos comprobando que, a su vez, el espacio tangente TM es una variedad. Una carta local en M (U, φ) , define una carta local en TM : $(TU, T\varphi)$ donde TU está formado por los puntos $(m \in M, \vec{v})$ con $\vec{v} \in T_m U$ y $T\varphi$ es una función de TU a \mathbb{R}^{2n} .

El espacio de configuración \mathcal{Q} es una variedad de dimensión n (siendo n los grados de libertad del sistema) cuyos puntos en una carta local tienen coordenadas q^α . Los vectores tangentes en un punto tienen coordenadas \dot{q}^α . El lagrangiano es, por tanto, una función $L: T\mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones de primer orden en $T\mathcal{Q}$:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = f^\alpha(\xi) \quad (6.4)$$

donde ξ^α es la pareja de puntos $(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$. De la ecuación anterior vemos que f^α son las componentes de un vector tangente definido en cada punto $\xi \in T\mathcal{Q}$, es decir $\vec{f} \in T(T\mathcal{Q}) \equiv T^2 \mathcal{Q}$.

Sea $F(q, \dot{q})$ una variable dinámica, su variación a lo largo de una trayectoria es

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\alpha} \ddot{q}^\alpha. \quad (6.5)$$

Estas ecuaciones son locales, es decir válidas en una carta local. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange dan \ddot{q}^α como funciones en $T\mathcal{Q}$. La parte derecha de la ecuación anterior es, por tanto, una función de $T\mathcal{Q}$.

Llamaremos Δ a las curvas integrales, solución de las ecuaciones de movimiento. Las componentes del vector tangente a Δ son $(\dot{q}^\alpha, \ddot{q}^\alpha(q, \dot{q}))$. Definimos la siguiente operación:

$$\frac{dF}{dt} = \dot{F} \equiv \vec{\Delta}(F) \quad (6.6)$$

donde

$$\vec{\Delta} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \ddot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}. \quad (6.7)$$

$\vec{\Delta}$ actúa sobre una función de $T\mathcal{Q}$ y la convierte en otra función de $T\mathcal{Q}$. Se define un *campo vectorial* \vec{X} en $T\mathcal{Q}$ como una aplicación $\vec{X} : \mathcal{F}(T\mathcal{Q}) \rightarrow \mathcal{F}(T\mathcal{Q})$:

$$\vec{X} = X_1^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_2^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha} \equiv \mathcal{X}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}. \quad (6.8)$$

Según esta definición $\vec{\Delta}$ es un campo vectorial cuyas componentes son: $(\dot{q}^\alpha, \ddot{q}^\alpha)$.

En general, un campo vectorial \vec{X} en una variedad M se define como

$$\vec{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (6.9)$$

siendo u^α las coordenadas de un punto de M en una carta local determinada. \vec{X} transforma una función de M en otra función. Hay que tener en cuenta que al aplicar el campo vectorial la función que se deriva es $f(\varphi^{-1}(u^\alpha))$, que es una función de \mathbb{R}^n a \mathbb{R} .

Consideremos ahora las aplicaciones lineales ω que transforman campos vectoriales en una función en la variedad, es decir que verifican:

$$\omega(f\vec{X} + g\vec{Y}) = f\omega(\vec{X}) + g\omega(\vec{Y}). \quad (6.10)$$

A estas aplicaciones se las denominan *1-formas* y constituyen el espacio vectorial dual del espacio de campos de vectores, y por tanto su dimensión es n . En $T\mathcal{Q}$ la base de los campos vectoriales son los vectores $\partial/\partial q^\alpha, \partial/\partial \dot{q}^\alpha$. Las 1-formas duales de estos vectores son:

$$\begin{aligned} dq^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial q^\beta} \right) &= \delta_\beta^\alpha & d\dot{q}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta} \right) &= \delta_\beta^\alpha, \\ dq^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^\beta} \right) &= d\dot{q}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial q^\beta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Se demuestra fácilmente que estas 1-formas forman una base:

$$\omega = \eta_\alpha dq^\alpha + \zeta_\alpha d\dot{q}^\alpha. \quad (6.12)$$

Si $\omega = \eta_\alpha dq^\alpha + \zeta_\alpha d\dot{q}^\alpha$ y $\vec{X} = X_1^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + X_2^\alpha \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\alpha}$ encontramos que, debido a la linealidad de la aplicación:

$$\omega(\vec{X}) = \eta_\alpha X_1^\alpha + \zeta_\alpha X_2^\alpha \equiv \langle \omega, \vec{X} \rangle. \quad (6.13)$$

La diferencial de una variable dinámica $F(q, \dot{q})$ es una 1-forma:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha, \quad (6.14)$$

y se verifica que

$$\frac{dF}{dt} = \dot{F} = \vec{\Delta}(F) = dF(\vec{\Delta}) = \langle dF, \vec{\Delta} \rangle. \quad (6.15)$$

Definimos *derivada de Lie* de una función a lo largo de un campo vectorial \vec{X} como:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}(f) = \vec{X}(f) \in \mathcal{F}(M). \quad (6.16)$$

En nuestro caso:

$$\dot{F} = \mathcal{L}_{\vec{\Delta}}(F) \quad (6.17)$$

Se define la derivada de Lie de una 1-forma obtenida mediante la diferencial de una función como:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}(df) \equiv d(\mathcal{L}_{\vec{X}}(f)) \quad (6.18)$$

que es una 1-forma. Si ω es una 1-forma cualquiera, usando la regla de Leibniz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega) &= \mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega_\alpha d\xi^\alpha) = (\mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega_\alpha)) d\xi^\alpha + \omega_\alpha (\mathcal{L}_{\vec{X}}(d\xi^\alpha)) = \\ &= \vec{X}(\omega_\alpha) d\xi^\alpha + \omega_\alpha d\left(X^\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) = \vec{X}(\omega_\alpha) d\xi^\alpha + \omega_\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha = \\ &= \left(X^\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \xi^\beta} + \omega_\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^\alpha}\right) d\xi^\alpha \end{aligned} \quad (6.19)$$

La derivada de un vector la definimos extendiendo la regla de Leibniz:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}}(\langle \omega, \vec{Y} \rangle) = \langle \mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega), \vec{Y} \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_{\vec{X}}(\vec{Y}) \rangle. \quad (6.20)$$

Si tomamos $\omega = \omega_\alpha d\xi^\alpha$, $\vec{X} = X^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$, y $\vec{Y} = Y^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$ la parte izquierda de la ecuación es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{X}}(\langle \omega, \vec{Y} \rangle) &= \mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega_\alpha Y^\alpha) = \vec{X}(\omega_\alpha Y^\alpha) = X^\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} (\omega_\alpha Y^\alpha) = \\ &= X^\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \xi^\beta} Y^\alpha + X^\beta \omega_\alpha \frac{\partial Y^\alpha}{\partial \xi^\beta}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

El primer término de la parte derecha de (6.20) es:

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega), \vec{Y} \rangle = (\mathcal{L}_{\vec{X}}(\omega))_\alpha Y^\alpha = \left(X^\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \xi^\beta} + \omega^\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial \xi^\alpha} \right) Y^\alpha, \quad (6.22)$$

mientras que el segundo término vale:

$$\langle \omega, \mathcal{L}_{\vec{X}}(\vec{Y}) \rangle = \omega_\alpha (\mathcal{L}_{\vec{X}}(\vec{Y}))^\alpha. \quad (6.23)$$

Sustituyendo (6.21), (6.22) y (6.23) en (6.20) obtenemos:

$$(\mathcal{L}_{\vec{X}}(\vec{Y}))^\alpha = X^\beta \frac{\partial Y^\alpha}{\partial \xi^\beta} - Y^\beta \frac{\partial X^\alpha}{\partial \xi^\beta}. \quad (6.24)$$

La derivada de Lie de un campo vectorial da otro campo vectorial cuyas coordenadas vienen dadas por la expresión anterior. A partir de lo anterior se ve fácilmente que:

$$(\mathcal{L}_{\vec{X}}(\vec{Y})) (f) = \mathcal{L}_{\vec{X}}(\mathcal{L}_{\vec{Y}}(f)) - \mathcal{L}_{\vec{Y}}(\mathcal{L}_{\vec{X}}(f)) \equiv [\vec{X}, \vec{Y}] (f). \quad (6.25)$$

La operación entre vectores definida en la expresión anterior es anticonmutativa y verifica la identidad de Jacobi:

$$[\vec{X}, \vec{Y}] = -[\vec{Y}, \vec{X}], \quad [\vec{X}, [\vec{Y}, \vec{Z}]] + [\vec{Y}, [\vec{Z}, \vec{X}]] + [\vec{Z}, [\vec{X}, \vec{Y}]] = 0. \quad (6.26)$$

Veamos ahora como podemos escribir las ecuaciones de Lagrange con cantidades definidas en la variedad. Para ello definimos la 1-forma

$$\omega_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} dq^\alpha \quad (6.27)$$

que está definida en la variedad tangente TQ (las componentes correspondientes a $d\dot{q}$ de la 1-forma ω_L son cero). Las componentes son realmente componentes de una 1-forma ya que bajo cambio de coordenadas se transforman inversamente que las cantidades \dot{q} que son vectores. La derivada de Lie de esta 1-forma a lo largo de las trayectorias es:

$$\mathcal{L}_{\vec{\Delta}}(\omega_L) = \mathcal{L}_{\vec{\Delta}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) dq^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d(\mathcal{L}_{\vec{\Delta}}(q^\alpha)). \quad (6.28)$$

$\mathcal{L}_{\vec{\Delta}}$ actúa sobre las funciones como una derivada temporal:

$$\mathcal{L}_{\vec{\Delta}}(\omega_L) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} \right) dq^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} d\dot{q}^\alpha, \quad (6.29)$$

por tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange se escriben como:

$$\mathcal{L}_{\bar{\Delta}}(\omega_L) - dL = 0. \quad (6.30)$$

Hemos visto que

$$p_\alpha(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}$$

son las componentes de una 1-forma definida en $T\mathcal{Q}$. Como ω_L no tiene componentes $d\dot{q}$ también puede ser considerada como una 1-forma definida en \mathcal{Q} considerando la dependencia en \dot{q} como parámetros. Igual que hicimos al construir la variedad $T\mathcal{Q}$, construimos ahora el *fibrado cotangente* o la *variedad cotangente* $T^*\mathcal{Q}$ como formada por \mathcal{Q} y los espacios cotangentes $T_q^*\mathcal{Q}$, definidos como los espacios vectoriales de las 1-formas definidas en un punto q de la variedad. El espacio $T^*\mathcal{Q}$ es el espacio de fases y H es una función que toma valores en dicho espacio. Las ecuaciones canónicas son ecuaciones diferenciales en $T^*\mathcal{Q}$. Igual que antes definimos un campo vectorial en $T^*\mathcal{Q}$:

$$\vec{\Delta}_H = \dot{\xi}^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} = \dot{q}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} + \dot{p}_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}. \quad (6.31)$$

La transformación de Legendre por la cual calculamos el hamiltoniano es una aplicación de $T\mathcal{Q}$ a $T^*\mathcal{Q}$ que transforma cada vector $\dot{q} \in T_q\mathcal{Q}$ en una 1-forma $p \in T_q^*\mathcal{Q}$. Esta aplicación transforma cualquier objeto definido en $T\mathcal{Q}$ en otro equivalente en $T^*\mathcal{Q}$. En particular transforma ω_L en:

$$\omega_0 = p_\alpha dq^\alpha. \quad (6.32)$$

Se define una *2-forma* como una aplicación bilineal y antisimétrica que transforma pares de campos vectoriales en funciones: $\Omega : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$ y tal que

$$\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = -\Omega(\vec{Y}, \vec{X}) \in \mathcal{F} \quad (6.33)$$

La acción de una 2-forma sobre los vectores de la base nos determina como actúa sobre cualquiera pareja de vectores:

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{X}, \vec{Y}) &= \Omega\left(X^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}, Y^\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}\right) = \\ &= X^\alpha Y^\beta \Omega\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}\right) \equiv X^\alpha Y^\beta \omega_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Es decir una 2-forma viene representada en una carta local por una matriz antisimétrica. Si solo hacemos actuar una 2-forma sobre un campo vectorial

fijo \vec{Y} , obtenemos una 1-forma: $\Omega(\bullet, Y)$, ya que al aplicarla a un campo vectorial nos da una función. Esta operación se llama *contracción* de una 2-forma por un vector y la representamos como:

$$i_{\vec{X}}\Omega \equiv \Omega(\bullet, \vec{X}), \quad (i_{\vec{X}}\Omega)_\alpha = \omega_{\alpha\beta}X^\beta. \quad (6.35)$$

Las ecuaciones canónicas del movimiento se escriben:

$$\gamma_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu = \frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} \quad (6.36)$$

Definimos la matriz Ω como $\Omega = -\Gamma$ y las ecuaciones anteriores se escriben

$$\omega_{\nu\mu}\dot{\xi}^\mu = \frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} \quad (6.37)$$

Las componentes de la matriz simpléctica Ω son las componentes de una 2-forma definida en $T^*\mathcal{Q}$ y las ecuaciones canónicas de Hamilton se escriben:

$$i_{\vec{\Delta}_H}\Omega = dH \quad (6.38)$$

Antes de proseguir es conveniente ver como podemos generar 2-formas y cual es su base. Para ello vamos a definir una nueva operación que es el *producto exterior*. Si tenemos dos 1-formas ω y θ su producto exterior es una 2-forma definida por:

$$(\omega \wedge \theta)(\vec{X}, \vec{Y}) = \omega(\vec{X})\theta(\vec{Y}) - \omega(\vec{Y})\theta(\vec{X}) = \omega_\alpha X^\alpha \theta_\beta Y^\beta - \omega_\alpha Y^\alpha \theta_\beta X^\beta. \quad (6.39)$$

De lo anterior obtenemos que $\omega \wedge \theta = -\theta \wedge \omega$. Para ver la base de las 2-formas extendemos el concepto de diferencial de una función y definimos la *derivada exterior* de una 1-forma $\omega = \omega_\alpha d\xi^\alpha$ como una 2-forma definida por:

$$d\omega = d\omega_\alpha \wedge d\xi^\alpha = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \xi^\beta} d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha. \quad (6.40)$$

De la misma forma podemos definir la derivada exterior de una 2-forma y obtendremos una 3-forma. Debido a la antisimetría del producto exterior es fácil ver que $d(d\omega) = d^2\omega = 0$. De la expresión anterior podemos ver que las cantidades $d\xi^\beta \wedge d\xi^\alpha$ forman una base del espacio de las 2-formas, es decir que cualquier 2-forma la podemos expresar como:

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \quad (6.41)$$

Teniendo en cuenta lo anterior es fácil ver que la 2-forma Ω que aparece en las ecuaciones de Hamilton se escribe:

$$\Omega = dp_\alpha \wedge dq^\alpha \quad (6.42)$$

De lo anterior vemos que $d\Omega = 0$ (Una forma tal que su derivada exterior es cero se denomina *cerrada*). También podemos comprobar que

$$\Omega = d\omega_0. \quad (6.43)$$

Otra propiedad importante de Ω es que es *no-degenerada*, es decir que $i_{\vec{X}}\Omega = 0$ solo se verifica si el vector \vec{X} es nulo (esto equivale a decir que el determinante de la matriz de las componentes de Ω no es cero).

Una 2-forma que es cerrada y no-degenerada se denomina *forma simpléctica*. El espacio de fases $T^*\mathcal{Q}$ está provisto de una manera natural de una estructura simpléctica ya que ésta está determinada por la transformación de Legendre y por la ecuación (6.43).

La ecuación (6.38) la podemos extender usando en lugar de H cualquier otra función f :

$$i_{\vec{X}_f}\Omega = df, \quad \Rightarrow \quad \omega_{\alpha\beta}X_f^\beta = \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}. \quad (6.44)$$

Así asociamos a una función f un campo vectorial X_f . Este campo es único para cada función ya que si hubiera otro que verificara lo anterior $i_{\vec{X}'_f}\Omega = df$ entonces $i_{\vec{X}'_f}\Omega - i_{\vec{X}_f}\Omega = i_{\vec{X}'_f - \vec{X}_f}\Omega = 0$ y como Ω es no-degenerada $\vec{X}'_f - \vec{X}_f = 0$. El inverso no siempre es cierto, es decir, para cualquier campo vectorial no siempre existe una función f que verifique la ecuación anterior. De la ecuación anterior obtenemos facilmente:

$$X_f^\alpha = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta}. \quad (6.45)$$

Podemos usar lo anterior para establecer la relación entre Ω y los corchetes de Poisson:

$$\mathcal{L}_{\vec{X}_f}(g) = \vec{X}_f(g) = X_f^\alpha \frac{\partial g}{\partial \xi^\alpha} = \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial g}{\partial \xi^\alpha} = [g, f]. \quad (6.46)$$

Una expresión similar es:

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{X}_f, \vec{X}_g) &= \omega_{\alpha\beta} X_f^\alpha X_g^\beta = \gamma_{\beta\alpha} \gamma_{\alpha\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi^\rho} \gamma_{\beta\sigma} \frac{\partial g}{\partial \xi^\sigma} = \\ &= -\gamma_{\rho\sigma} \frac{\partial f}{\partial \xi^\rho} \frac{\partial g}{\partial \xi^\sigma} = -[f, g]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Esta ecuación la podemos considerar como la definición de los corchetes de Poisson. Todas las propiedades de estos pueden ser derivadas de lo anterior. En particular la identidad de Jacobi se deduce del hecho que $d\Omega = 0$.

Es interesante ver la interpretación geométrica de una 2-forma. Consideremos primero un espacio con $n = 1$, es decir el espacio de fases tiene dos dimensiones. En este caso la forma simpléctica viene dada por la matriz:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.48)$$

La acción de Ω sobre dos vectores cualesquiera \vec{X} e \vec{Y} es:

$$\Omega(\vec{X}, \vec{Y}) = \omega_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta = -X^1 Y^2 + X^2 Y^1 \quad (6.49)$$

cuyo valor absoluto representa el área que sustentan ambos vectores. En el caso de n dimensiones, podemos hacer lo mismo usando dos vectores $\vec{\xi}$ y $\vec{\zeta}$ del espacio de fases cuyas componentes son (q^α, p_β) y (q'^α, p'_β) respectivamente. Obtenemos

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) &= (dp_\alpha \wedge dq^\alpha)(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) = dp_\alpha(\vec{\xi})dq^\alpha(\vec{\zeta}) - dp^\alpha(\vec{\zeta})dq^\alpha(\vec{\xi}) = \\ &= (p_1 q'^1 - q^1 p'_1) + (p_2 q'^2 - q^2 p'_2) + \dots \end{aligned} \quad (6.50)$$

Cada uno de los paréntesis de esta expresión representa el área sustentada por las proyecciones de los vectores $\vec{\xi}$ y $\vec{\zeta}$ sobre cada uno de los planos (q^α, p_α) .

Habíamos visto que las transformaciones canónicas dejaban invariante la matriz Γ . Lo mismo ocurrirá con la forma simpléctica Ω . Si tenemos inicialmente unas coordenadas (q^α, p_α) , definimos la 1-forma $\omega_0 = p_\alpha dq^\alpha$ y tal que $d\omega_0 = \Omega$. Si tenemos otras coordenadas (Q^α, P_α) , obtenidas mediante una transformación canónica de las anteriores, nos definen otra 1-forma $\omega_1 = P_\alpha dQ^\alpha$ y tal que $d\omega_1 = \Omega$. Es decir:

$$d(\omega_0 - \omega_1) = d(p_\alpha dq^\alpha - P_\alpha dQ^\alpha) = 0. \quad (6.51)$$

Se puede demostrar que si una 1-forma ω es cerrada, localmente existe una función f tal que $\omega = df$. Luego de la ecuación anterior obtenemos

$$p_\alpha dq^\alpha - P_\alpha dQ^\alpha = dF. \quad (6.52)$$

Esta es la ecuación que habíamos obtenido para las transformaciones canónicas, donde F es la función generatriz de la transformación.

Acabamos este breve repaso de la descripción de la Mecánica Analítica usando las técnicas del cálculo en variedades con la enunciación del *Teorema de Darboux*. Este teorema establece que en una variedad simpléctica M , es

decir una variedad provista de una forma simpléctica Ω , de dimensión par $2n$, existe alrededor de cada punto p de la variedad una carta local tal que $\forall p' \in U_p$ con coordenadas (x^1, \dots, x^{2n}) la forma Ω se escribe

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^n dx^\alpha \wedge dx^{\alpha+n}. \quad (6.53)$$

Es decir este teorema dice que localmente podemos definir coordenadas tales que la forma simpléctica de la variedad toma la forma dada por (6.42). Así todas las variedades simplécticas de una cierta dimensión par son localmente isomorfas.

