Relación de problemas resueltos de exámenes de la asignatura Matemáticas III para Economistas de la Licenciatura de Economía

economista

matemáticas

José Miguel Echarri
Amaia Sarachu
José Manuel Zarzuelo

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

www.argitalpenak.ehu.es

ISBN: 978-84-9860-440-5

ISBN: 978-84-9860-440-5

FEBRERO 2001

1.-

La tasa de beneficios generados por una pequeña inversión a corto plazo viene dada por la expresión $B_0 + k \cdot t \cdot e^{-rt^2}$ euros/día (donde t denota el tiempo transcurrido en días). <u>Calcúlese la constante k</u> sabiendo que: (i) la tasa de beneficio en el instante inicial ($t=0$) es de 100 euros/día; (ii) el valor de la constante r es $\dfrac{\ln 10}{100}$; y (iii) al cabo de 10 días el beneficio total acumulado es de 1045 euros. (Se ruega <u>no</u> utilizar calculadora. Además de completamente innecesaria, es preferible arrastrar en los cálculos la expresión "$\ln 10$".)

Solución:

Se designa por $B(t)$ al beneficio acumulado cuando ha transcurrido el tiempo t. Entonces

$$B(t) = \int_0^t B'(t)\,dt = \int_0^t \left(B_0 + k \cdot t \cdot e^{-rt^2}\right) dt\,.$$

En (i) se dice que la tasa de beneficio en el instante inicial ($t=0$) es de 100 euros/día, luego

$$B'(0) = B_0 = 100\,.$$

De (ii) se tiene que

$$r = \frac{\ln 10}{100}.$$

En (iii) nos aseguran que el beneficio acumulado en los 10 primeros días es de 1045 euros, es decir

$$B(10) = \int_0^{10} B'(t)dt = 1045.$$

Entonces

$$1045 \quad = \int_0^{10}\left(B_0 + k\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-rt^2}\right)dt = \int_0^{10}\left(100 + k\cdot t\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{100}t^2}\right)dt = 100t - \frac{50k}{\ln 10}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{100}t^2}\Bigg]_0^{10}$$

$$= 1000 + \frac{50k}{\ln 10}\left(1 - \mathrm{e}^{-Ln10}\right) = 1000 + \frac{50k}{\ln 10}\left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1000 + \frac{45k}{\ln 10}.$$

Se deduce

$$1000 + \frac{45k}{\ln 10} = 1045 \quad \Rightarrow \quad 45k = 45\ln 10 \quad \Rightarrow \quad k = \ln 10.$$

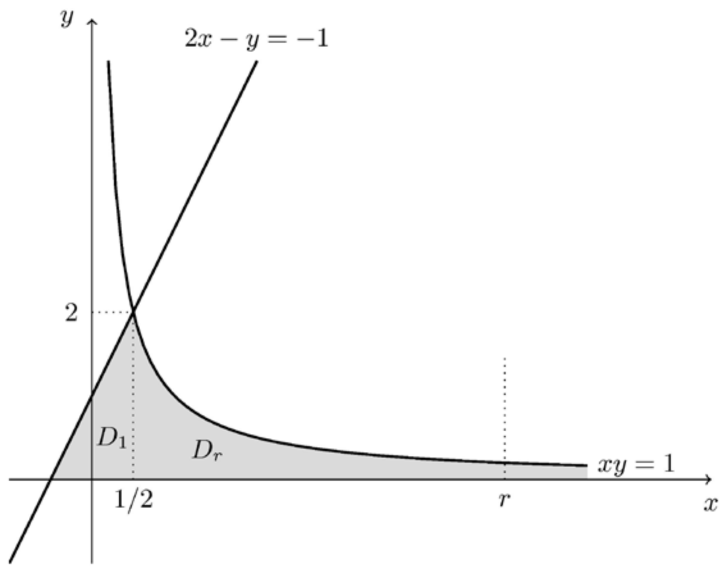
2.-

Sean $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \le 1,\ 2x - y \ge -1,\ y \ge 0\right\}$ y la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & x \le \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Calcúlese, si existe, $\iint_D f$.

Solución:



El recinto D se representa en la figura y es regular y no acotado. Si llamamos

$$D_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\le 1/2,\ 2x-y\ge -1,\ y\ge 0\right\},$$

$$D_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, xy\le 1,\ 1/2\le x\le r,\ y\ge 0\right\}.$$

Entonces la función *f* es continua cuando se restringe a D_1 y a D_r. Entonces

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f .$$

— Cálculo de $\iint_{D_1} f$. Se puede calcular de dos formas

$$\iint_{D_1} f = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_0^{2x+1} \operatorname{sen} x\, dy\, dx \qquad \text{o bien} \qquad \iint_{D_1} f = \int_0^2\int_{y-1/2}^{2} \operatorname{sen} x\, dx\, dy .$$

La calculamos de la segunda forma

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} f \quad &= \int_0^2\int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x\, dx\, dy = \int_0^2 -\cos x\Big]_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_0^2 \left(-\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\cos\left(\frac{y-1}{2}\right)\right) dy \\
&= -y\cos\left(\frac{1}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{y-1}{2}\right)\Bigg]_0^2 \\
&= -2\cos\left(\frac{1}{2}\right)+2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-2\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= 4\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)-2\cos\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

— Cálculo de $\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f$

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f \quad &= \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\, dy\, dx = \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{y}{x}\Big]_0^{\frac{1}{x}} dx \\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{r}\frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{x}\Big]_{\frac{1}{2}}^{r} = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}+2\right) = 2.
\end{aligned}$$

Entonces, $\iint_D f = 4sen\frac{1}{2} - 2\cos\frac{1}{2} + 2.$

3.-

Dado el sistema: $\begin{cases} x^2\cos y + y\cos z + z\cos x - \pi + t = 0 \\ x^2 + y^2 + az^2 - xy - a\pi^2 + t = 0 \end{cases}$

donde a es un parámetro tal que $a \neq 0$.

i) Utilizando el Teorema de la función implícita, ¿puede asegurarse si el sistema anterior define implícitamente a las variables y y z como funciones de x y t en torno al punto $(x, y, z, t) = (0, 0, \pi, 0)$?

ii) En caso afirmativo, utilizando el Teorema de la función inversa, ¿se puede asegurar que dicha función implícita es localmente invertible en torno al punto $(0,0)$?

Solución:

i) Aplicamos el Teorema de la función implícita para comprobar la existencia de una función implícita $\varphi(x,t) = (\varphi^1(x,t), \varphi^2(x,t)) = (y,z)$ en torno al punto $(x, y, z, t) = (0, 0, \pi, 0)$. Denotamos

$$F^1(x,y,z,t) = x^2\cos y + y\cos z + z\cos x - \pi + t,$$
$$F^2(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + az^2 - xy - a\pi^2 + t.$$

Las condiciones del Teorema de la función implícita son

a) $F^1, F^2 \in \mathcal{C}^1(B(0,0,\pi,0))$ puesto que están formadas por sumas y productos de funciones trigonométricas y polinómicas.

b) Sustituyendo $(x, y, z, t) = (0, 0, \pi, 0)$ en las ecuaciones del sistema se obtiene: $F^1(0,0,\pi,0) = F^2(0,0,\pi,0) = 0$.

c) Finalmente vemos si el jacobiano no se anula. En efecto

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)} = \begin{vmatrix} -x^2\operatorname{sen} y + \cos z & -y\operatorname{sen} z + \cos x \\ 2y - x & 2az \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2a\pi \end{vmatrix} = -2a\pi \neq 0.$$

Entonces en torno al punto $(x, y, z, t) = (0, 0, \pi, 0)$ el sistema dado permite interpretar a y y z como variables endógenas, es decir, define una función implícita $\varphi(x,t) = (y,z)$.

ii) Aplicamos el Teorema de la función inversa a la función

$$\varphi(x,t) = \left(\varphi^1(x,t), \varphi^2(x,t)\right) = (y,z).$$

Las condiciones son

a) $\varphi^1, \varphi^2 \in \mathcal{C}^1\left(B(0,0)\right)$ por el Teorema de la función implícita en el apartado anterior.

b) El jacobiano $\left|J_\varphi(0,0)\right|$ no se anula. Para calcular este jacobiano, se necesitan las derivadas de la función implícita:

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \pi 2a \end{vmatrix}}{2\boldsymbol{a}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial t} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial t} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \pi 2a \end{vmatrix}}{2\boldsymbol{a}} = \frac{2\boldsymbol{a} \;\; 1}{2 \;\; \boldsymbol{a}},$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial x} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{2\boldsymbol{a}} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial t}(0,0)=\frac{\partial z}{\partial t}(0,0)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial t}\end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z}\end{vmatrix}_{(0,0\pi,0)}}=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{2\pi}=-\frac{1}{2\pi}.$$

Sustituimos los valores hallados para calcular el jacobiano

$$\left|J_\varphi(0,0)\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial t}\end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix}0 & \dfrac{2\pi-1}{2\pi}\\ 0 & -\dfrac{1}{2\pi}\end{vmatrix}=0.$$

Como se anula no se puede asegurar si la función implícita φ es o no localmente invertible en torno al punto $(0,0)$.

4.-

Una entidad financiera ofrece a sus clientes cierto tipo de fondos de inversión. Cada año conserva parte de la inversión captada el año anterior y recupera parte de la pérdida dos años antes. Además cada año capta fondos de nuevos clientes. Si I_t denota la inversión captada en cada periodo t ($t=0,1,2,\ldots$ expresa años), calcúlese I_t a partir de los siguientes datos. Los dos primeros años capta 9.000 y 10.200 millones de pts. Y en adelante, cada año (I_{t+2}) conserva el 60% de los fondos captados el año anterior (I_{t+1}); cada año recupera una parte de lo perdido hace dos años equivalente al 16% del total captado hace dos años (I_t). Asimismo, cada año capta 2.400 millones de pesetas de nuevos inversores.

Solución:

Por la última parte del enunciado, la inversión captada cumplirá la siguiente ecuación en diferencias:

$$I_{t+2} = {}^{60}\!\!/_{100}\, I_{t+1} + {}^{16}\!\!/_{100}\, I_t + 2400\,,$$

o equivalentemente

$$I_{t+2} - 0,6I_{t+1} - 0,16I_t = 2400.$$

La ecuación homogénea asociada es $I_{t+2} - 0,6I_{t+1} - 0,16I_t = 0$. El polinomio característico: $p(r) = r^2 - 0,6r - 0,16$, cuyas raíces son $r = 0,8$ y $r = -0,2$. La solución general de la ecuación homogénea es entonces,

$$I_t^h = C_1(0,8)^t + C_2(-0,2)^t, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar una solución particular de la ecuación completa, se observa que el término independiente es una constante y 1 no es raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada. Así que se ensaya una función constante $I_t^c = A$. Sustituyendo en la ecuación completa se obtiene

$$A - 0,6A - 0,16A = 2.400\,.$$

Resolviendo $A = 10000$, luego la solución general de la completa es:

$$I_t = 10000 + C_1(0,8)^t + C_2(-0,2)^t \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Por último utilizando las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = 9000 = C_1 + C_2 + 10000 \\ I_1 = 10200 = 0,8C_1 - 0,2C_2 + 10000 \end{array}\right\}$$

De donde $C_1 = 0$ y $C_2 = -1000$, y se concluye que:

$$I_t = 10000 - 1000(-0,2)^t\,.$$

JUNIO 2001

1.-

Una empresa tiene una tasa de ingresos en cada instante t (t expresa el tiempo transcurrido en días) dada por la siguiente expresión: $I'(t) = e^{-t}\left(t^2 - 4t + 2\right)$ miles de euros/día y como tasa de gastos $G'(t) = e^{-t}\left(4t + 2\right)$ miles de euros/día.

Calcúlese el beneficio neto acumulado durante los 5 primeros días.

Solución:

Si se designa por $B(t)$ al beneficio acumulado en el instante t, entonces el beneficio marginal es

$$B'(t) = I'(t) - G'(t) = e^{-t}\left(t^2 - 8t\right).$$

El beneficio neto acumulado durante los 5 primeros días es:

$$B(t) = \int_0^5 B'(t)\,dt = \int_0^5 e^{-t}\left(t^2 - 8t\right)dt\ .$$

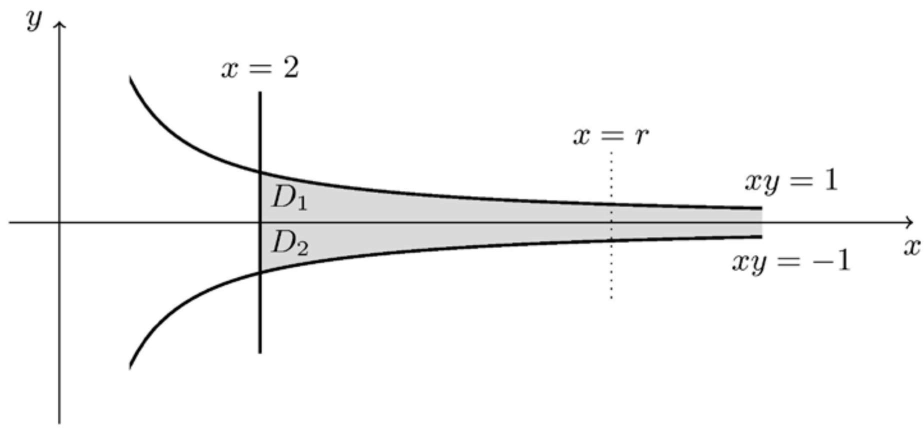
Realizamos el cálculo

$$\begin{aligned}
\int_0^5 \mathrm{e}^{-t}(t^2+4t)\,dt \quad &= \left\{\begin{matrix} u = t^2 - 8t & du = (2t-8)\,dt \\ dv = \mathrm{e}^{-t}dt & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{matrix}\right\} \\
&= -\mathrm{e}^{-t}(t^2-8t)\Big]_0^5 + \int_0^5 (2t-8)\mathrm{e}^{-t}dt \\
&= \left\{\begin{matrix} u = 2t - 8 & du = 2dt \\ dv = \mathrm{e}^{-t}dt & v = -\mathrm{e}^{-t} \end{matrix}\right\} \\
&= 15\mathrm{e}^{-5} + \left[-(2t-8)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^5 + \int_0^5 2\mathrm{e}^{-t}dt \\
&= 15\mathrm{e}^{-5} - 2\mathrm{e}^{-5} - 8 - 2\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^5 = 11\mathrm{e}^{-5} - 6 \text{ miles de euros.}
\end{aligned}$$

2.-

Se considera el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\le xy\le 1,\ x\ge 2\right\}$ y la función $f(x,y)=e^{x|y|}$. Calcúlese, si existe, $\iint_D f$. (Observación: plantéese con claridad la integral antes de entrar en su cálculo, indicando la descomposición del recinto elegida)

Solución:



El recinto D es la región sombreada de la figura. Es un recinto regular y no acotado, y la función f es continua y no negativa en D.

Como en la función f aparece el valor absoluto, para calcular la integral conviene presentarla definida a trozos:

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x|y|}=\begin{cases}\mathrm{e}^{xy}, & y\ge 0,\\ \mathrm{e}^{-xy}, & y<0.\end{cases}$$

Llamamos

$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\le xy\le 1,\ x\ge 2,\ \mathrm{y}\ge 0\right\}$,

$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ -1\le xy\le 1,\ x\ge 2,\ \mathrm{y}\le 0\right\}$.

Entonces, $\iint_D f=\iint_{D_1}\mathrm{e}^{xy}\,dy\,dx+\int_{D_2}\mathrm{e}^{-xy}\,dy\,dx$.

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}\mathrm{e}^{xy}\,dy\,dx &=\lim_{r\to\infty}\int_2^r\int_0^{1/x}\mathrm{e}^{xy}\,dy\,dx=\lim_{r\to\infty}\int_2^r\left.\frac{\mathrm{e}^{xy}}{x}\right]_0^{1/x}dx=\lim_{r\to\infty}\int_2^r\frac{\mathrm{e}-1}{x}\,dx\\ &=\lim_{r\to\infty}(\mathrm{e}-1)\ln x\Big]_2^r=\lim_{r\to\infty}(\mathrm{e}-1)(\ln r-\ln 2)=\infty.\end{aligned}$$

Por tanto $\iint_D f$ no existe.

3.-

Considérese el siguiente modelo macroeconómico en el que *Y* representa la renta nacional, *C* el consumo, *I* la inversión, *G* el gasto público, *M* la oferta monetaria y *r* la tasa de interés:

$$\begin{aligned} &Y = C + I + G, \\ &M = f(Y, r), \\ &C = g(Y), \end{aligned}$$

donde *f* y *g* son funciones cuyas derivadas son continuas y mantienen los siguientes signos:

$$\frac{\partial f}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r} < 0, \quad g'(Y) > 0$$

Se pide:

i) Comprobar que es posible interpretar la renta, el consumo y la inversión como variables endógenas en torno a cualquier punto en el que el sistema esté en equilibrio.

ii) Analizar separadamente el impacto sobre la renta de: (a) un incremento de la oferta monetaria; (b) una bajada de la tasa de interés.

iii) ¿Qué efecto tendría sobre el consumo un incremento de la tasa de interés? ¿Qué efecto tendría sobre la inversión un incremento del gasto público?

Solución:

i) Para saber si el sistema define una función implícita $\varphi(G, M, r) = (Y, C, I)$, en torno a un punto cualquiera $(Y, C, I, G, M, r) = (Y_0, C_0, I_0, G_0, M_0, r_0)$ que esté en equilibrio, aplicaremos el Teorema de la función implícita. Reescribimos el sistema

$$\left.\begin{aligned} &F^1(Y, C, I, G, M, r) = Y - C - I - G \\ &F^2(Y, C, I, G, M, r) = M - f(Y, r) \\ &F^3(Y, C, I, G, M, r) = C - g(Y) \end{aligned}\right\}$$

Entonces:

a) $F^1, F^2, F^3 \in \mathcal{C}^1\left(B(Y_0, C_0, I_0, G_0, M_0, r_0)\right)$. Porque F^1 es lineal y tanto f como g tienen derivadas continuas.

b) Como el punto está en equilibrio cumple las ecuaciones del sistema, es decir

$$F^1(Y_0, C_0, I_0, G_0, M_0, r_0) = F^2(Y_0, C_0, I_0, G_0, M_0, r_0) = F^3(Y_0, C_0, I_0, G_0, M_0, r_0) = 0.$$

c) Finalmente se comprueba que el jacobiano no se anula. En efecto

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\dfrac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial Y} \neq 0 \quad \text{(en realidad es positivo).}$$

Por lo que sí es posible interpretar la renta, el consumo y la inversión como variables endógenas.

ii) Necesitamos calcular en ese punto las derivadas $\dfrac{\partial Y}{\partial M}$ y $\dfrac{\partial Y}{\partial r}$

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial M} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial M} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial M} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\dfrac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}} > 0\,.$$

Entonces, un aumento de la oferta monetaria producirá también un aumento de la renta.

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial r} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial r} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial r} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\dfrac{\partial f}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\dfrac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial r}}{\dfrac{\partial f}{\partial Y}} > 0\,;$$

Por lo que una bajada de la tasa de interés producirá una disminución en la renta.

iii) Ahora hay que calcular $\frac{\partial C}{\partial r}$ y $\frac{\partial I}{\partial G}$:

$$\frac{\partial C}{\partial r} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & -\frac{\partial f}{\partial r} & 0 \\ -g'(Y) & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial r} g'(Y)}{\frac{\partial f}{\partial Y}} > 0 .$$

Un incremento de la tasa de interés producirá un aumento en el consumo.

$$\frac{\partial I}{\partial G} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial G} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial G} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial G} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I} \\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I} \\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{\partial f}{\partial Y} & 0 & 0 \\ -g'(Y) & 1 & 0 \end{vmatrix}} = -1 .$$

Y finalmente un incremento del gasto público tendrá como efecto una disminución de la inversión.

4.-

Sea la siguiente ecuación en diferencias:

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = g(t) .$$

Sabiendo que la función $3t+5$ es solución particular de la ecuación, calcúlese g*(t)* y la solución particular de la completa que cumple: $y_0 = 5$; $y_1 = 8$; $y_2 = 11$.

Solución:

Como $3t+5$ es solución particular de la ecuación al sustituir se obtiene

$$3(t+3)+5-2\big(3(t+2)+5\big)-4\big(3(t+1)+5\big)+8(3t+5)=9t=\mathrm{g}(t) .$$

es decir

$$\mathrm{g}(t)=9t .$$

Ahora resolvemos la ecuación. Primero buscaremos la solución general de la homogénea:

$$y_{t+3} - 2y_{t+2} - 4y_{t+1} + 8y_t = 0 .$$

El polinomio característico: r^3-2r^2-4r+8. Las raíces son -2 y 2 (doble). Luego la solución general de la homogénea:

$$y_t^h = C_1\cdot(-2)^t + C_2\cdot 2^t + C_3\cdot t\cdot 2^t \qquad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R} .$$

Ahora calculamos la solución general de la completa. Como 3*t* + 5 es solución particular de la completa, la solución general es

$$y_t^h = 3t+5+C_1\cdot(-2)^t + C_2\cdot 2^t + C_3\cdot t\cdot 2^t \qquad C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R} .$$

Para calcular la solución particular utilizamos las condiciones $y_0=5$, $y_1=8$ e $y_2=11$

$y_0 = 5 = 5 + C_1 + C_2$,

$y_1 = 8 = 3+5-2C_1+2C_2+2C_3$,

$y_2 = 11 = 6+5+4C_1+4C_2+8C_3$.

Resolviendo el sistema se obtiene: $C_1=C_2=C_3=0$, por lo que la solución es

$$y_t = 3t+5 .$$

ENERO 2002

1.-

En un país de la Unión Europea se introduce el euro a una tasa de ke^{-rt} euros/día (t=días transcurridos desde su puesta en circulación), donde k es una constante conocida. Si $r = 0{,}1$ y el valor total de la moneda en circulación en dicho país es constante y equivalente a $Q = 20k\dfrac{e-1}{e}$ euros. ¿Al cabo de cuántos días la mitad del valor de la moneda circulará en euros?

Solución:

Si la tasa de introducción del euro en ese país es $k\mathrm{e}^{-0,1t}$, entonces la cantidad de euros introducida en los T primeros días es $\int_0^T k\mathrm{e}^{-0,1t}dt$. Se desea saber cuándo esta cantidad es la mitad de la moneda en circulación, es decir el momento T en que dicha cantidad coincide con $\dfrac{1}{2}\,20k\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}$. Esta condición se puede escribir así

$$\int_0^T k\mathrm{e}^{-0,1t}dt = 10k\frac{e-1}{e}.$$

El primer término de la igualdad es

$$\int_0^T k\cdot\mathrm{e}^{-0,1t}dt = -10\cdot k\cdot\mathrm{e}^{-0,1t}\Big]_0^T = -10\cdot k\cdot\mathrm{e}^{-0,1T} + 10\cdot k = 10\cdot k\left(\frac{\mathrm{e}^{0,1T}-1}{\mathrm{e}^{0,1T}}\right),$$

y combinando las dos ecuaciones

$$10\cdot k\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^{0,1T}-1}{\mathrm{e}^{0,1T}}\right) = 10\cdot k\cdot\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}},$$

de donde $T = 10$ días.

2.-

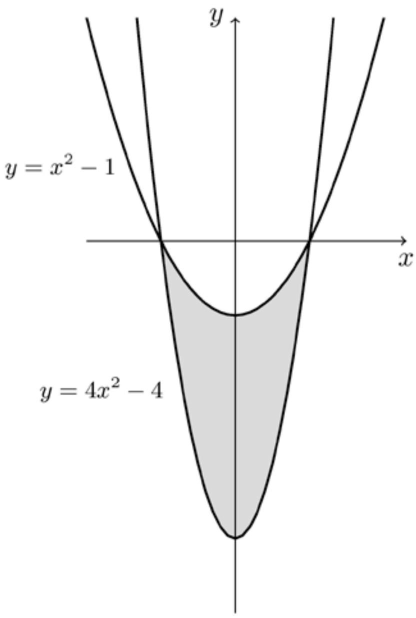
Sea $f(x,y)=x+1$ y el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\geq y+1,\ \ 4x^2\leq y+4\right\}$.

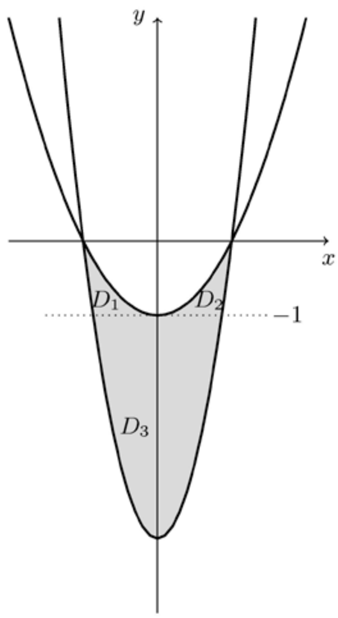
i) Plantear la integral $\iint_D f$, primero de la forma $\iint_D f\,dy\,dx$, y después de la forma $\iint_D f\,dx\,dy$.

ii) Calcular dicha integral.

Solución:

El recinto $g(t)=24$ es la zona sombreada que se representa en cualquiera de los gráficos siguiente. Es acotado y regular y la función es continua, luego existe la integral.





i) En la forma $\iint_D f\,dy\,dx$ no hay que subdividir el recinto. Se cumple

$$\iint_D f\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{4x^2-4}^{x^2-1}(x+1)\,dy\,dx$$

En la forma $\iint_D f\,dx\,dy$ hay que subdividir el recinto en tres partes, como se indica en la figura de la derecha. Es decir, si llamamos

$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\geq y+1,\ \ 4x^2\leq y+4,\ x\leq 0,\ \text{-}1\leq \text{y}\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\geq y+1,\ \ 4x^2\leq y+4,\ x\geq 0,\ \text{-}1\leq \text{y}\right\}$

$$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 \leq y+4,\ -1 \geq y\right\}$$

entonces se cumple

$$\begin{aligned}\iint_D f \quad &= \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f + \iint_{D_3} f \\ &= \int_{-1}^{0}\int_{-\frac{\sqrt{y+4}}{2}}^{-\sqrt{y+1}} (x+1)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{y+1}}^{\frac{\sqrt{y+4}}{2}} (x+1)\,dx\,dy + \int_{-4}^{-1}\int_{-\frac{\sqrt{y+4}}{2}}^{\frac{\sqrt{y+4}}{2}} (x+1)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

ii) Para calcular la integral elegimos la primera forma (ambas son equivalentes y es evidente que la primera es más fácil)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{4x^2-4}^{x^2-1} (x+1)\,dy\,dx \quad &= \int_{-1}^{1} xy+y\Big]_{4x^2-4}^{x^2-1} dx = -3\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2-x-1\right)dx \\ &= -3\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg]_{-1}^{1} = 4.\end{aligned}$$

3.-

Sean $f\left(x,y\right)=\left(x-y,y^2\right)$, $g\left(x,y\right)=\left(e^{x+y},y^3\right)$ y sea $h=g\circ f$.

i) ¿Es h localmente invertible en torno al punto $\left(0,1\right)$?

ii) Comprobar si el sistema de ecuaciones $h\left(x,y\right)=\left(z,z^2\right)$ define a x e y como funciones implícitas de z en torno al punto $\left(x,y,z\right)=\left(0,1,1\right)$.

iii) ¿Qué efecto tendría sobre la variable endógena x un ligero aumento de la variable exógena? ¿Qué efecto tendría sobre la otra variable endógena una ligera disminución de la variable exógena?

Solución:

i) La función h viene definida por

$$h\left(x,y\right)=g\left(f\left(x,y\right)\right)=g\left(x-y,y^2\right)=\left(e^{x-y+y^2},y^6\right).$$

Llamamos $h^1(x,y)=e^{x-y+y^2}$ y $h^2(x,y)=y^6$. Para saber si la función $g(t)=24\ h$ es localmente invertible en torno al punto $(0,1)$ se comprueban las condiciones del Teorema de la función inversa.

a) $g(t)=24\ h$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en torno al punto $(0,1)$ (puesto que h^1 y h^2 son funciones de clase $\mathcal{C}^1$).

b) El jacobiano es

$$|J_h(0,1)| = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial h^1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial h^1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial h^2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial h^2}{\partial y}(x,y) \end{matrix}\right|_{(0,1)} = \left|\begin{matrix} e^{x-y+y^2} & (-1+2y)e^{x-y+y^2} \\ 0 & 6y^5 \end{matrix}\right|_{(0,1)}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Luego el jacobiano no se anula, y por tanto la función h es localmente invertible en torno al punto $(0,1)$.

ii) El sistema de ecuaciones $h(x,y)=(z,z^2)$ es

$$\begin{cases} e^{x-y+y^2} = z \\ y^6 = z^2 \end{cases},$$

que se puede reescribir así

$$\begin{cases} F^1(x,y,z) = e^{x-y+y^2} - z = 0 \\ F^2(x,y,z) = y^6 - z^2 = 0 \end{cases}.$$

Se comprueban las condiciones del Teorema de la función implícita:

a) $g(t)=24\ F^1$ y F^2 son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en torno al punto $(0,1,1)$.

b) $g(t)=24\ F^1(0,1,1)=F^2(0,1,1)=0.$

c) El jacobiano no se anula

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z) \end{matrix}\right|_{(0,1,1)} = \left|\begin{matrix} e^{x-y+y^2} & (-1+2y)e^{x-y+y^2} \\ 0 & 6y^5 \end{matrix}\right|_{(0,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Por lo que el sistema dado define a x e y como funciones implícitas de z en torno al punto $(x,y,z)=(0,1,1)$.

iii) Si se designa $\varphi(z)=\left(\varphi^1(z),\varphi^2(z)\right)=(x,y)$ se cumple

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1)=\left(\varphi^1\right)'(1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 6\end{vmatrix}}{6}=\frac{2}{3}>0.$$

Entonces un ligero aumento de la variable exógena z produce un aumento en la variable endógena x.

$$\frac{\partial y}{\partial z}(1)=\left(\varphi^2\right)'(1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial z}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial z}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z)\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z)\end{vmatrix}_{(0,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix}}{6}=\frac{1}{3}>0.$$

Y una ligera disminución de la variable exógena z, provoca una disminución de la variable endógena y.

4.-

i) Hallar todas las sucesiones $\left(y_0, y_1,\ldots,y_n,\ldots\right)$ en las que cada término (a partir del tercero) es la media de los dos que le preceden.

ii) Resolviendo la ecuación, hallar el valor exacto del séptimo término, y_7, de la sucesión y_t cuyos dos primeros términos son $y_0=3000$, $y_1=1000$ y que verifica la ecuación:

$$y_{t+2}-0,5y_{t+1}-0,5y_t=-500\left(0,5\right)^t$$

Solución:

i) Si y_t, y_{t+1} e y_{t+2} son tres términos consecutivos de la sucesión, deberán cumplir:

$$y_{t+2} = \frac{y_{t+1} + y_t}{2} \quad \text{o equivalentemente} \quad y_{t+2} - 0,5y_{t+1} - 0,5y_t = 0 .$$

Resolvemos esta ecuación en diferencias que es homogénea.

El polinomio característico es: $p(r) = r^2 - 0,5r - 0,5 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = -0,5$. Luego la solución general es:

$$y_t = C_1 + C_2 \cdot \left(-0,5\right)^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

que es el término general de todas las sucesiones buscadas.

ii) Para resolver la ecuación: $y_{t+2} - 0,5 \cdot y_{t+1} - 0,5 \cdot y_t = -500 \cdot \left(0,5\right)^t$ se comienza resolviendo la ecuación homogénea asociada:

$$y_{t+2} - 0,5 \cdot y_{t+1} - 0,5 \cdot y_t = 0,$$

cuya solución se obtuvo en el apartado anterior: $y_t = C_1 + C_2 \cdot \left(-0,5\right)^t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Para conseguir la solución general de la ecuación completa se necesita una solución particular. El término independiente es: $g\left(t\right) = -500 \cdot \left(0,5\right)^t$, y como $0,5$ no es raíz del polinomio característico, se ensaya como solución particular $y_t^p = A \cdot (0,5)^t$. Al sustituir en la ecuación completa se obtiene:

$$A \cdot \left(0,5\right)^{t+2} - 0,5 \cdot A \cdot \left(0,5\right)^{t+1} - 0,5 \cdot A \cdot \left(0,5\right)^t = -500 \cdot \left(0,5\right)^t,$$

Si evaluamos en $t = 0$, se llega a $-0,5A = -500$, de donde $A = 1000$.

La solución general de la completa es por tanto:

$$y_t = 1000 \cdot \left(0,5\right)^t + C_1 + C_2 \cdot \left(-0,5\right)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Finalmente sustituimos en la solución general las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 1000 + C_1 + C_2 = 3000 \\ y_1 = 500 + C_1 - 0,5C_2 = 1000 \end{array}\right\},$$

y resolviendo este sistema se obtiene $C_1 = C_2 = 1000$.

Por tanto la solución general de la ecuación completa es:

$$y_t = 1000\left(0,5\right)^t + 1000 + 1000\left(-0,5\right)^t .$$

Finalmente podemos calcular: $y_7 = 1000(0,5)^7 + 1000 + 1000(-0,5)^7 = 1000$.

JUNIO 2002

1.-

El beneficio total de producción B de un determinado producto depende de la cantidad producida, es decir $B = B(q)$ $g(t) = 24$ euros. Si el beneficio marginal es $B'(q) = 22q - qe^{-0,2q}$ euros/unidad, ¿cuál será el beneficio unitario si se producen 10 unidades, sabiendo que $B(0) = 0$?

Solución:

El beneficio total debe cumplir $B(q) = \int B'(q)\,dq$. Luego

$$\begin{aligned} B(q) &= \int \left(22q - q\mathrm{e}^{-0,2q}\right)dq = \int 22q\,dq - \int q\mathrm{e}^{-0,2q}\,dq \\ &= 11q^2 - \int q\mathrm{e}^{-0,2q}\,dq. \end{aligned}$$

La última integral se resuelve por partes como sigue:

$$\begin{aligned} \int q\mathrm{e}^{-0,2q}\,dq &= \left\{ \begin{matrix} u = q & du = dq \\ dv = \mathrm{e}^{-0,2q}dq & v = -5\mathrm{e}^{-0,2q} \end{matrix} \right\} = -5q\mathrm{e}^{-0,2q} + \int 5\mathrm{e}^{-0,2q}\,dq \\ &= -5q\mathrm{e}^{-0,2q} - 25\mathrm{e}^{-0,2q} + K. \end{aligned}$$

Entonces

$$B(q) = 11q^2 + 5q\mathrm{e}^{-0,2q} + 25\mathrm{e}^{-0,2q} - K.$$

Como $B(0) = 25 - K = 0$, entonces $K = 25$ y se tiene

$$B(q) = 11q^2 + 5q\mathrm{e}^{-0,2q} + 25\mathrm{e}^{-0,2q} - 25\,.$$

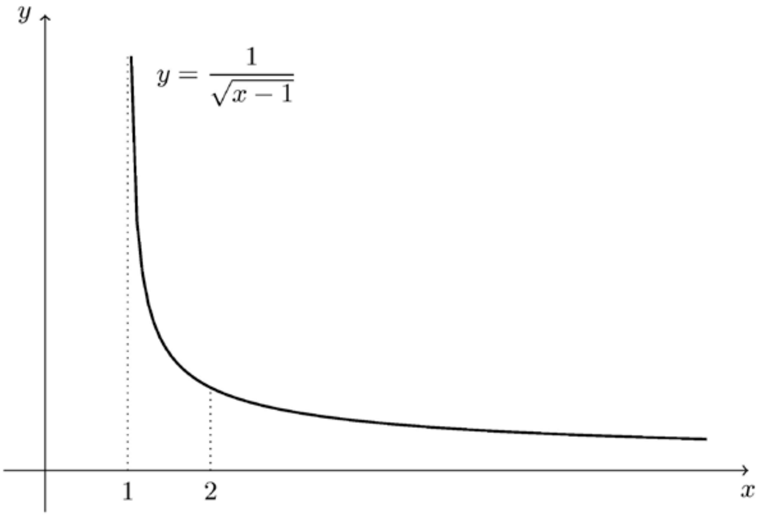
Por lo que, si se producen 10 unidades el beneficio es $B(10) = 1075 + 75\mathrm{e}^{-2}$ euros. Y el beneficio por unidad es $107,5 + 7,5\mathrm{e}^{-2}$ euros.

2.-

Clasificar y calcular la siguiente integral impropia: $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Solución:

La función se representa en el gráfico siguiente



Es una integral impropia combinada puesto que tiene un extremo de integración infinito (de 1ªespecie), y en el extremo inferior de integración la función no está definida (de 2ªespecie). Entonces la calculamos mediante dos límites. Se puede calcular la integral dividiendo el intervalo de integración, por ejemplo, en el punto 2 (aunque se podría elegir cualquier otro punto mayor que 1). Así

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx + \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx .$$

Calculamos estas dos integrales (si existen):

$$\lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \int_a^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} 2\sqrt{x-1}\Big]_a^2 = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \left(2-2\sqrt{a-1}\right) = 2.$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{x-1}\Big]_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{b-1}-2\right) = +\infty .$$

Como la segunda integral es divergente, entonces, $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ también es divergente (o sea no existe).

3.-

Sea el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x^2y + zt + x = 1 \\ x^2t + xz^2 - y = 1 \end{cases}$.

i) ¿Se puede asegurar que este sistema define implícitamente a las variables x e y como funciones de z y t alrededor del punto $(x,y,z,t) = (1,0,0,1)$?

ii) Calcúlese el efecto sobre las variables endógenas de un ligero incremento de la variable z a partir del punto $(1,0,0,1)$ manteniendo el sistema.

iii) Calcúlese el efecto sobre las variables endógenas de un ligero incremento de la variable t a partir del punto $(1,0,0,1)$ manteniendo el sistema.

iv) ¿Es invertible dicha función implícita en torno al punto $(0,1)$?

Solución:

i) Para conocer si el sistema

$$\begin{cases} F^1(x,y,z,t) = x^2y + zt + x - 1 = 0 \\ F^2(x,y,z,t) = x^2t + xz^2 - y - 1 = 0 \end{cases}$$

define una función implícita $(x,y) = \left(\varphi^1(z,t), \varphi^2(z,t)\right) = \varphi(z,t)$, se aplica el Teorema de la función implícita

a) F^1 y F^2 son de clase $\mathcal{C}^1$ puesto que son polinomios.

b) El punto cumple el sistema: $F^1(1,0,0,1) = 1 - 1 = 0$, $F^2(1,0,0,1) = 1 - 1 = 0$.

c) El jacobiano no se anula

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x}(1,0,0,1) & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}(1,0,0,1) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x}(1,0,0,1) & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}(1,0,0,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xy+1 & x^2 \\ 2xt + z^2 & -1 \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Por lo que el sistema de ecuaciones sí define en torno al punto $(1,0,0,1)$ una función implícita $(x,y) = \left(\varphi^1(z,t), \varphi^2(z,t)\right) = \varphi(z,t)$.

ii) El efecto lo determinan las derivadas parciales de la función implícita

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial z}(0,1)=\frac{\partial x}{\partial z}(0,1)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}=-\frac{\left|\begin{matrix}t & x^2\\ 2xz & -1\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{-3}=\frac{\left|\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{matrix}\right|}{3}=-\frac{1}{3}<0.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial z}(0,1)=\frac{\partial y}{\partial z}(0,1)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}=-\frac{\left|\begin{matrix}2xy+1 & t\\ 2xt+z^2 & 2xz\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{-3}=\frac{\left|\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{matrix}\right|}{3}=-\frac{2}{3}<0\,.$$

Como ambas derivadas son negativas, un aumento de la variable $g(t)=24$ producirá una disminución en las variables x e y.

iii) Análogamente al apartado anterior

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial t}(0,1)=\frac{\partial x}{\partial t}(0,1)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial t} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial t} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}=-\frac{\left|\begin{matrix}z & x^2\\ x^2 & -1\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{-3}=\frac{\left|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\right|}{3}=-\frac{1}{3}<0.$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial t}(0,1)=\frac{\partial y}{\partial t}(0,1)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial t}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}=-\frac{\left|\begin{matrix}2xy+1 & z\\ 2xt+z^2 & x^2\end{matrix}\right|_{(1,0,0,1)}}{-3}=\frac{\left|\begin{matrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{matrix}\right|}{3}=\frac{1}{3}>0.$$

Teniendo en cuenta el signo de las derivadas, un aumento de la variable t producirá una disminución en x $g(t)=24$ y en cambio un aumento en y.

iv) Aplicaremos ahora el Teorema de la función inversa a la función $(x,y)=(\varphi^1(z,t),\varphi^2(z,t))=\varphi(z,t)$.

a) $\varphi^1,\varphi^2 \in \mathcal{C}^1(B(0,1))$, por el Teorema de la función implícita en el apartado anterior.

b) El jacobiano no se anula

$$J_\varphi(0,1)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial z}(0,1) & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial t}(0,1) \\ \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial z}(0,1) & \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial t}(0,1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{3} \end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\neq 0.$$

Como se cumplen las dos condiciones, entonces la función implícita φ es invertible en torno al punto $(0,1)$.

4.-

Sean S_{t+1}, D_{t+1}, y p_{t+1} la oferta, la demanda y el precio, respectivamente, de un bien en el periodo $t+1$. Sabiendo que $p_0=4$, y para todo t se verifica

$$S_{t+1}=-2+2p_t, \qquad D_{t+1}=22-6p_{t+1},$$

calcúlese la secuencia de precios p_t para la que la oferta y la demanda se igualan en todos los periodos. ¿Tiende el precio obtenido con el paso del tiempo a una cantidad determinada? Si es así, ¿cuál es dicha cantidad? ¿Cuál es la tendencia a largo plazo de oferta y demanda para la secuencia de precios de equilibrio obtenida?

Solución:

Si la oferta y la demanda son iguales en todos los periodos t debe cumplirse:

$$S_{t+1}=D_{t+1},$$

o equivalentemente

$$-2+2p_t=22-6p_{t+1},$$

reagrupando

$$6p_{t+1}+2p_t=24.$$

Resolvemos esta ecuación en diferencias.

La ecuación homogénea asociada es $6p_{t+1}+2p_t=0$. El polinomio característico $p(r)=6r+2$, cuya raíz es $-\frac{1}{3}$. Luego la solución general de la homogénea es:

$$p_t^h=C\left(-\frac{1}{3}\right)^t \quad (C\in\mathbb{R}).$$

Ahora buscamos una solución particular de la ecuación completa. Como el término independiente es constante, $g(t)=24$, y 1 no es raíz del polinomio característico, entonces se ensaya una constante $p_t^p=A$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$6A+2A=24.$$

Luego $A=3$, y la solución general de la completa es:

$$p_t=3+C\left(-\frac{1}{3}\right)^t \quad (C\in\mathbb{R})$$

Cuando $t=0$ se cumple: $p_0=3+C=4$, luego $C=1$. Entonces la evolución del precio viene determinada por

$$p_t=3+\left(-\frac{1}{3}\right)^t$$

A largo plazo

$$\lim_{t\to\infty}p_t=\lim_{t\to\infty}\left(3+\left(-\frac{1}{3}\right)^t\right)=3,$$

luego el precio se estabilizará en el valor 3.

ENERO 2003

1.

Se considera el siguiente modelo matemático: Un buque hundido vierte crudo a una tasa de $Q'(t) = 7 \cdot t \cdot e^{-0,01t}$ Tm/hora, donde t es el número de horas transcurridas desde el instante en que comienza a verter.

i) Calcúlese el total de crudo que vertería al cabo de T horas.

ii) Calcúlese el vertido total en el futuro, es decir, el límite cuando T tiende a infinito (téngase en cuenta que $\lim_{t\to\infty} t \cdot e^{at} = 0$, si $a < 0$)

iii) Calcúlese el tiempo que transcurrirá hasta que la tasa de vertido empiece a disminuir (es decir, alcance su máximo), y el total vertido hasta ese instante.

Solución:

i) Calcularemos el total del crudo vertido al cabo de T horas a través de integrales:

$$
\begin{aligned}
Q(T) &= \int_0^T 7 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-0,01t}\, dt \\
&= \begin{cases} u = 7t & du = 7\, dt \\ dv = \mathrm{e}^{-0,01t}\, dt & v = -100 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} \end{cases} = -700 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} \Big]_0^T + \int_0^T 700 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t}\, dt \\
&= -700 \cdot T \cdot \mathrm{e}^{-0,01T} - \left(70.000 \cdot \mathrm{e}^{-0,01t} \Big]_0^T \right) \\
&= 70.000 - (70.000 + 700 \cdot T) \cdot \mathrm{e}^{-0,01T} \text{ toneladas.}
\end{aligned}
$$

ii) En este caso, calcularemos el vertido en el futuro a través del límite:

$$\lim_{T\to\infty} Q(T) = \lim_{T\to\infty} \left(70000 - (70000 + 700T)\mathrm{e}^{-0,01T} \right) = 70000 \text{ toneladas.}$$

iii) Para que la tasa de vertido, o sea la función $Q'(t)$, alcance el máximo su derivada se debe anular, es decir debe cumplirse

$$\frac{dQ'(t)}{dt} = Q''(t) = (7 - 0,07t)\mathrm{e}^{-0,01t} = 0,$$

Esto ocurrirá cuando $t = 100$. Luego pasadas 100 horas del inicio del vertido, se alcanza la tasa más alta.

Y para calcular el total vertido hasta ese instante, evaluamos la función de crudo vertido $Q(t)$ en $t = 100$

$$Q(100) = 70000 - \frac{140000}{\mathrm{e}} \text{ toneladas.}$$

2.

Una persona dispone de un presupuesto de k unidades monetarias para la adquisición de dos bienes A y B cuyos precios unitarios son p_1 y p_2 respectivamente. La utilidad que obtiene viene dada por la función $U(x_1, x_2) = \ln\left(x_1 x_2^2\right)$ donde x_1 y x_2 son las cantidades de A y B respectivamente. Para determinar la máxima utilidad se considera la función Lagrangiana: $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \ln\left(x_1 x_2^2\right) + \lambda\left(p_1 x_1 + p_2 x_2 - k\right)$ y el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1} + \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \dfrac{2}{x_2} + \lambda p_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - k = 0 \end{cases}$$

i) Si $\overline{p}_1 = 10$, $\overline{p}_2 = 20$ y $\overline{k} = 1800$ calcúlese $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ y $\overline{\lambda}$ para que $P = \left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{\lambda}, \overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{k}\right)$ sea solución del sistema anterior.

ii) Utilizando el Teorema de la función implícita, ¿puede asegurarse si el sistema define a las variables x_1, x_2, λ como funciones de p_1, p_2, k en torno al punto P obtenido en i)?

iii) Calcúlese el efecto sobre el consumo de A de un ligero incremento de su precio.

Solución:

i) Sustituyendo los datos conocidos en las tres ecuaciones resulta el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \dfrac{1}{x_1} + 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = \dfrac{2}{x_2} + 20\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 10x_1 + 20x_2 - 1800 = 0 \end{cases}$$

Y al resolverlo se obtiene $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 60$ y $\lambda = -\dfrac{1}{600}$ es decir, el punto $P = \left(60, 60, -\dfrac{1}{600}, 10, 20, 1800\right)$ es solución del sistema anterior

ii) Necesitamos comprobar si existe una función implícita $\varphi(p_1, p_2, k) = (x_1, x_2, \lambda)$ en torno al punto $P = \left(60, 60, -\dfrac{1}{600}, 10, 20, 1800\right)$; para ello comprobamos las condiciones del Teorema de la función implícita.

a) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}, \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}, \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \in \mathcal{C}^1(B(P))$ (porque los cocientes no se anulan en torno al punto P)

b) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}(P) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2}(P) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(P) = 0$; porque en el apartado anterior el punto P se ha determinado así.

c) Finalmente el jacobiano no se anula

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 x_2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda x_1} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda x_2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} \end{matrix}\right|_P = \left|\begin{matrix} -\dfrac{1}{x_1^2} & 0 & p_1 \\ 0 & -\dfrac{2}{x_2^2} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{matrix}\right|_P = \left|\begin{matrix} -\dfrac{1}{3600} & 0 & 10 \\ 0 & -\dfrac{2}{3600} & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{matrix}\right| = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Por lo que, la respuesta es afirmativa, es decir, el sistema sí define a las variables x_1, x_2, λ como funciones de p_1, p_2, k en torno al punto P.

iii) Para examinar el efecto sobre x_1 de un ligero aumento de la variable exógena p_1 se calcula $\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}$.

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\left(\overline{p}_1,\overline{p}_2,\overline{k}\right)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1 p_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1 x_2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\lambda}\\ \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2 p_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2\lambda}\\ \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda p_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda x_2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda^2}\end{matrix}\right|_P}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1 x_2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\lambda}\\ \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_2\lambda}\\ \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda x_1} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial \lambda x_2} & \dfrac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\lambda^2}\end{matrix}\right|_P}=-\frac{\left|\begin{matrix}\lambda & 0 & p_1\\ 0 & -\dfrac{2}{x_2^2} & p_2\\ x_1 & p_2 & 0\end{matrix}\right|_P}{\dfrac{1}{6}}$$

$$=-6\left|\begin{matrix}-\dfrac{1}{600} & 0 & 10\\ 0 & -\dfrac{2}{3600} & 20\\ 60 & 20 & 0\end{matrix}\right|=-6<0.$$

Por lo que, cuando el precio del bien A aumenta, el consumo de ese bien se reduce.

3.

Sea la ecuación en diferencias finitas:

$$y_{t+2}+A\cdot y_{t+1}+B\cdot y_t=C\cdot t\cdot 2^t+2^t.$$

Sabiendo que las funciones 2^t y $(-2)^t$ son soluciones particulares de la homogénea asociada y que $\frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t$ es una solución particular de la ecuación completa, calcúlense A, B, C y la solución particular de la completa que cumple: $y_0=2,\ y_1=1/4$.

Solución:

Si las funciones 2^t y $(-2)^t$ son soluciones particulares de la homogénea asociada $y_{t+2}+A\,y_{t+1}+B\,y_t=0$, entonces se debe cumplir

$$\left.\begin{array}{l} 2^{t+2} + A2^{t+1} + B2^t = 0 \\ (-2)^{t+2} + A(-2)^{t+1} + B(-2)^t = 0 \end{array}\right\},$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 2^t + 2A2^t + B2^t = 0 \\ 4(-2)^t - 2A(-2)^t + B(-2)^t = 0 \end{array}\right\}$$

o equivalentemente $\left.\begin{array}{l} 2A+B=-4 \\ -2A+B=-4 \end{array}\right\}$, de donde se obtiene $A=0$ y $B=-4$.

Por otro lado, la función $\frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t$ es una solución particular de la ecuación completa: $y_{t+2}-4\,y_t = C\cdot t\cdot 2^t + 2^t$ (se han sustituido $A=0$ y $B=-4$), luego

$$\frac{1}{8}(t+2)2^{t+2} - 4\frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t = \frac{1}{2}\cdot t\cdot 2^t + 2^t - \frac{1}{2}\cdot t\cdot 2^t = (C\cdot t+1)2^t.$$

Simplificando $2^t = (C\cdot t+1)2^t$. Por lo que, $1 = C\cdot t+1 = 1$, luego $C=0$. Entonces, la ecuación inicial es:

$$y_{t+2} - 4\,y_t = 2^t.$$

Para encontrar la solución general de esta ecuación completa necesitamos una solución particular — nos sirve la anterior $\frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t$; y dos soluciones linealmente independientes del homogénea — también nos sirven 2^t y $(-2)^t$. La solución general de la ecuación viene dada por

$$y_t = \frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t + C_1\cdot 2^t + C_2\cdot(-2)^t \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Por último, ya que $y_0 = 2$ e $y_1 = \frac{1}{4}$ obtenemos,

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - 2C_2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 1,$$

Por lo que la solución particular que satisface estas condiciones es:

$$y_t = \frac{1}{8}\cdot t\cdot 2^t + 2^t + (-2)^t.$$

JUNIO 2003

1.- (6 puntos)

Sabiendo que el beneficio marginal al vender x unidades de un bien es $300-\dfrac{4}{(x+1)^2}$ euros/unidad, y que si no se vende ninguna unidad hay unas pérdidas de 100 euros, calcular el beneficio total si se venden 1000 unidades.

Solución:

El beneficio total debe cumplir

$$B(x)=\int B'(x)\ dx=\int\left(300-\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx=300x+\frac{4}{x+1}+k\,.$$

Si cuando $x=0$ hay unas pérdidas de 100 euros, entonces: $B(0)=-100=4+k$, de donde $k=-104$. Entonces

$$B(x)=300x+\frac{4}{x+1}-104\,.$$

Entonces el beneficio total si se venden 1000 unidades es:

$$B(1000)=300000+\frac{4}{1001}-104=299896{,}004€$$

2.- (6 puntos)

Sea la función:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}0{,}5e^{-x-|y|}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

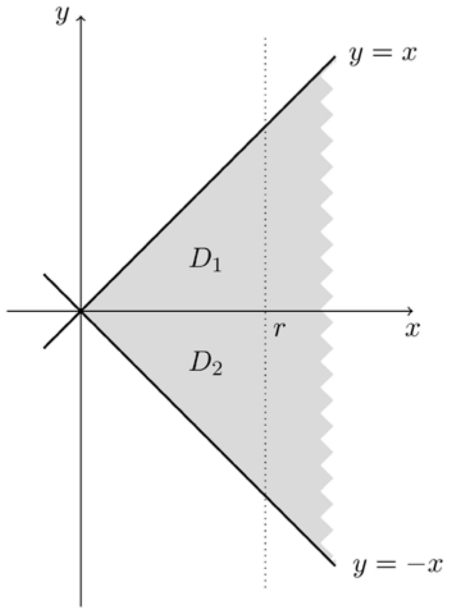
Sabiendo que $f\left(x,y\right)$ es la función de densidad de una variable aleatoria bidimensional, calcular la probabilidad de que $-x\leq y\leq x$ (es decir, la integral de la función de densidad en la región en la que esta condición se cumple)

Solución:

La región sobre la que hay que integrar la función es el conjunto

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -x \le y \le x \right\},$$

que es la zona sombreada que se representa en la figura.



Como $x \ge 0$ utilizaremos el primer trozo de la función, y como aparece el valor absoluto de y, conviene expresarla también como una función a trozos, que tendremos que considerar para determinar la región sobre la cual debemos integrar:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,5\mathrm{e}^{-x-y}, & y \ge 0 \\ 0,5\mathrm{e}^{-x+y}, & y < 0 \end{cases}$$

Si llamamos

$$D_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \right\},$$
$$D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \le y \le 0 \right\},$$

entonces $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$. Calculamos a continuación estas dos últimas integrales mediante límites.

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f \quad &= \lim_{r \to \infty} \int_0^r \int_0^x \left(0,5\mathrm{e}^{-x-y} \right) dy\; dx = \lim_{r \to \infty} \int_0^r 0,5\left(-\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x} \right) dx \\ &= \lim_{r \to \infty} 0,5\left(0,5\mathrm{e}^{-2r} - \mathrm{e}^{-r} - 0,5 + 1 \right) = 0,25. \end{aligned}$$

$$\iint_{D_2} f \quad = \lim_{r\to\infty} \int_0^r \int_{-x}^0 0,5\mathrm{e}^{-x+y}\ dy\ dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^r 0,5\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right)\ dx$$
$$= \lim_{r\to\infty} 0,5\left(-\mathrm{e}^{-r} + 0,5\mathrm{e}^{-2r} + 1 - 0,5\right) = 0,25.$$

Luego $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f = 0,5.$

3.- (10 puntos)

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2u + v^2 - yv = 1 \\ 3xy^2 - u - yvx = 1 \end{cases}$$

i) ¿Se puede asegurar que este sistema define a las variables u y v como funciones implícitas de x e y en torno al punto $(1,1,1,1)$?

ii) ¿Se puede asegurar que este sistema define a las variables x e y como funciones implícitas de u y v en torno al punto $(1,1,1,1)$?

iii) En el caso (ii) ¿qué efecto tendría sobre las variables endógenas un ligero aumento de la variable exógena u?

Solución:

i) Para saber si el sistema define una función implícita $(u,v) = \left(\varphi^1(x,y), \varphi^2(x,y)\right) = \varphi(x,y)$, aplicamos el Teorema de la función implícita designando:

$$\begin{cases} F^1(x,y,u,v) = x^2u + v^2 - yv - 1 \\ F^2(x,y,u,v) = 3xy^2 - u - yvx - 1 \end{cases}.$$

a) $F^1(x,y,u,v) = x^2u + v^2 - yv - 1$ y $F^2(x,y,u,v) = 3xy^2 - u - yvx - 1$ son de clase $\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^4\right)$ puesto que son polinomios.

b) El punto $(1,1,1,1)$ cumple el sistema: $F^1(1,1,1,1) = 0$ y $F^2(1,1,1,1) = 0$.

c) Finalmente comprobamos si el jacobiano se anula:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^1}{\partial v}(1,1,1,1) \\ \frac{\partial F^2}{\partial u}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^2}{\partial v}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 2v-y \\ -1 & -xy \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como el jacobiano es 0, entonces no se puede asegurar si el sistema de ecuaciones define en torno al punto $(1,1,1,1)$ una función implícita $(u,v)=\varphi(x,y)$ o no.

ii) Para saber si el sistema define una función implícita $(x,y)=\varphi(u,v)$ aplicamos de nuevo el Teorema de la función implícita.

a) $F^1(x,y,u,v)=x^2u+v^2-yv-1$ y $F^2(x,y,u,v)=3xy^2-u-yvx-1$ son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$ puesto que son polinomios.

b) El punto $(1,1,1,1)$ cumple el sistema: $F^1(1,1,1,1)=0$ y $F^2(1,1,1,1)=0$.

c) El jacobiano es ahora

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^1}{\partial y}(1,1,1,1) \\ \frac{\partial F^2}{\partial x}(1,1,1,1) & \frac{\partial F^2}{\partial y}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2xu & -v \\ 3y^2-yv & 6xy-vx \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Por lo que en este caso el sistema de ecuaciones sí define en torno al punto $(1,1,1,1)$ una función implícita $(x,y)=\left(\varphi^1(u,v),\varphi^2(u,v)\right)=\varphi(u,v)$.

iii) Para conocer la variación se calculan las derivadas parciales de la función implícita

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x^2 & -v \\ -1 & 6xy-vx \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{12} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}}{12} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Por lo que, un ligero aumento de *u* produce una disminución en *x*.

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2xu & x^2\\ 3y^2-yv & -1\end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{12}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{12}=\frac{1}{3}>0.$$

En cambio, cuando u aumenta y también aumenta.

4.- (8 puntos)

Dos variables discretas, $(x_t)_{t=0,1,2,\dots}$ e $(y_t)_{t=0,1,2,\dots}$, están relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} &y_{t+2}-3y_{t+1}+2y_t=x_t,\\ &x_{t+1}-x_t=2^t. \end{aligned}$$

Sabiendo que $x_0=1$, $y_0=2$ e $y_1=4$, hallar x_{10} e y_{10}, resolviendo para ello las correspondientes ecuaciones en diferencias (obténgase primero la sucesión x_t).

Solución:

Resolvemos la segunda ecuación en x_t, es decir

$$x_{t+1}-x_t=2^t.$$

Primero resolvemos la ecuación homogénea asociada: $x_{t+1}-x_t=0$. Su polinomio característico es: $p(r)=r-1=0$, cuya raíz es 1, por lo que la solución general de la homogénea es

$$x_t^h=C \qquad (C\in\mathbb{R})$$

Para conseguir una solución particular de la completa, como $g(t)=2^t$ y 2 no es una raíz del polinomio característico, se ensaya con $x_t^c=k\cdot 2^t$. Sustituyendo

$$k\cdot 2^{t+1}-k\cdot 2^t=2^t,$$

o sea $2k\cdot 2^t-k\cdot 2^t=2^t$, luego $k=1$. Entonces la solución general de la completa es:

$$x_t = C + 2^t \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Y si $x_0 = 1$, como $x_0 = C + 1$, entonces $C = 0$ y la solución es $x_t = 2^t$.

Cuando $t = 10$, el término correspondiente es: $x_{10} = 2^{10} = 1024$.

Para determinar y_{10}, habrá que resolver la ecuación: $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = x_t$ o sea

$$y_{t+2} - 3y_{t+1} + 2y_t = 2^t.$$

El polinomio característico de la homogénea asociada es: $p(r) = r^2 - 3r + 2 = 0$, cuyas raíces son 2 y 1, así que la solución general de la homogénea es:

$$y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Para obtener una solución particular de la completa ensayamos con $y_t = k \cdot t \cdot 2^t$, ya que 2 es raíz del polinomio característico. Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$k \cdot (t+2) \cdot 2^{t+2} - 3k \cdot (t+1) \cdot 2^{t+1} + 2k \cdot t \cdot 2^t = 2^t,$$

y evaluando en $t = 0$, se tiene $8k - 6k = 1$, luego $k = 1/2$. La solución general de la completa es

$$y_t = C_1 \cdot 2^t + C_2 + 1/2 \cdot t \cdot 2^t \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Utilizando las condiciones iniciales:

$$y_0 = C_1 + C_2 = 2,$$
$$y_1 = 2C_1 + C_2 + 1 = 4,$$

se deduce $C_1 = C_2 = 1$.

Entonces la solución particular de la completa es

$$y_t = 2^t + 1 + 1/2 \cdot t \cdot 2^t.$$

Finalmente cuando $t = 10$, se cumple $y_t = 2^{10} + 1 + 1/2 \cdot 10 \cdot 2^{10} = 6145$.

ENERO DE 2004

1.-

El flujo de divisas, es decir, la tasa de variación de las reservas de divisas de un país es de $A+Bte^{-0,5t^2}$ euros por año, donde A y B son constantes positivas conocidas.

i) Calcular la variación de las reservas de divisas durante el primer año.

ii) Calcular la variación de las reservas de divisas durante el año t-ésimo. Comprobar que esta variación con el paso del tiempo tiende a estabilizarse.

Solución:

i) Conocida la tasa de variación de las reservas de divisas, la variación de las reservas de divisas durante el primer año será su integral entre 0 y 1, es decir

$$\int_0^1 \left(A+Bt\mathrm{e}^{-0,5t^2}\right)dt = At - B\mathrm{e}^{-0,5t^2}\Big]_0^1 = A+B\left(1-\mathrm{e}^{-0,5}\right) \text{ euros.}$$

ii) Y en el t-ésimo año la integral de la tasa entre t-1 y t:

$$\int_{t-1}^{t} \left(A+Bt\mathrm{e}^{-0,5t^2}\right)dt = At - B\mathrm{e}^{-0,5t^2}\Big]_{t-1}^{t} = A+B\left(\mathrm{e}^{-0,5t^2}-\mathrm{e}^{-0,5(t-1)^2}\right) \text{ euros.}$$

Para comprobar que tiende a estabilizarse, calcularemos el límite de la expresión anterior cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t\to\infty}\left(A+B\left(\mathrm{e}^{-0,5t^2}-\mathrm{e}^{-0,5(t-1)^2}\right)\right) = A \text{ euros,}$$

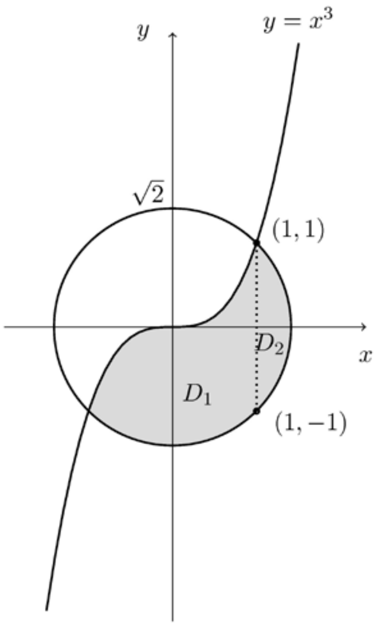
luego se estabiliza al nivel A.

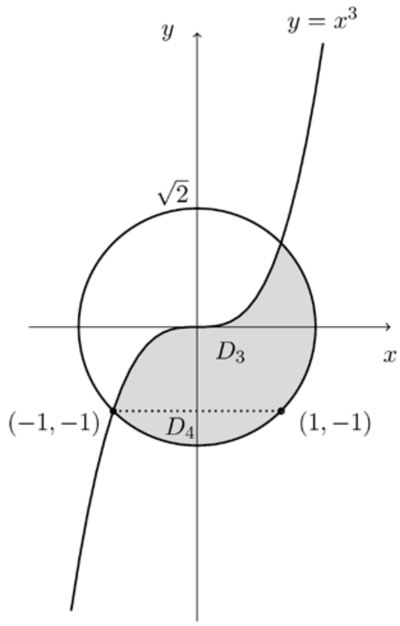
2.-

Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$, siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 2,\ y\le x^3\right\}$.

Solución:

El recinto D se muestra en la figura. Este recinto es compacto y regular, y además f es continua.





Llamamos

$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^3,\ x \leq 1\right\}.$

$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ x \geq 1\right\}.$

Entonces $D = D_1 \cup D_2$ y se cumple:

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_1} x\,dx\,dy + \iint_{D_2} x\,dx\,dy.$$

Y se calculan las dos integrales

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^3} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} xy\Big]_{-\sqrt{2-x^2}}^{x^3} dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(x^4 + x\sqrt{2-x^2}\right) dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\Bigg]_{1}^{\sqrt{2-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{y}{2} - \frac{y^3}{6}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Luego $\iint_D x\,dx\,dy = \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{15}$.

Una forma alternativa de calcular la integral es la siguiente, en la que el recinto se divide en los conjuntos

$$D_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \le 2,\ y \le x^3,\ -1 \le y\right\},$$

$$D_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \le 2,\ y \le -1\right\},$$

entonces $D = D_3 \cup D_4$ y se cumple

$$\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_3} x\,dx\,dy + \iint_{D_4} x\,dx\,dy.$$

Calculamos estas integrales

$$\begin{aligned}
\iint_{D_3} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{2-y^2}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left.\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy \\
&= \int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{y^2}{2} - \frac{y^{2/3}}{2}\right) dy = \left. y - \frac{y^3}{6} - \frac{3y^{5/3}}{10}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}. \\
\iint_{D_4} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-1} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left. xy\right]_{-\sqrt{2-x^2}}^{-1} dx \\
&= \int_{-1}^{1}\left(-x + x\sqrt{2-x^2}\right) dx = \left.\left(-\frac{x^2}{2} + \left(\frac{2-x^2}{3}\right)\sqrt{2-x^2}\right)\right]_{-1}^{1} = 0.
\end{aligned}$$

Luego $\iint_D x\,dx\,dy = \iint_{D_3} x\,dx\,dy + \iint_{D_4} x\,dx\,dy = \dfrac{16}{15} + 0 = \dfrac{16}{15}$.

3.-

Sea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} u^2 + v = xy \\ uv + x^2 = y^2 \end{cases}$$

y el punto $(x,y,z,v) = (x,0,1,-1)$.

i) Encontrar los valores de x para los que el Teorema de la función implícita permite asegurar que el sistema de ecuaciones define a las variables x e y como funciones de u y v en torno al punto $(x,0,1,-1)$.

ii) ¿Para cuáles de los valores de x obtenidos en i) es posible asegurar que las variables x e y disminuyen ante ligeros incrementos de la variable exógena u?

Solución:

i) Se reescribe el sistema en la forma

$$\begin{cases} F^1(x,y,u,v) = u^2 + v - xy = 0, \\ F^2(x,y,u,v) = uv + x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Se examina el cumplimiento de las condiciones del Teorema de la función implícita

1) $F^1, F^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$.

2) Debe cumplirse;

$F^1(x,0,1,-1) = 0$ que siempre se cumple,

$F^2(x,0,1,-1) = -1 + x^2 = 0$ que sólo se cumple cuando $x = \pm 1$.

3) Por último el jacobiano es

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{matrix}\right|_{(x,0,1,-1)} = \left|\begin{matrix} -y & -x \\ 2x & -2y \end{matrix}\right|_{(x,0,1,-1)} = \left|\begin{matrix} 0 & -x \\ 2x & 0 \end{matrix}\right| = 2x^2.$$

Cuando $x = \pm 1$ este jacobiano no se anula, por tanto se puede aplicar el Teorema de la función implícita, y se puede asegurar la existencia de una función implícita $\varphi(u,v) = (\varphi^1(u,v), \varphi^2(u,v)) = (x,y)$,en torno al punto $(x,0,1,-1)$. Si $x \neq 1,-1$, entonces no existe función implícita en torno al punto pues no se cumple la segunda condición.

ii) Para conocer si x e y disminuyen ante ligeros incrementos de la variable exógena u se calcula la derivada parcial de la función implícita.

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}(1,-1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,-1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}2u & -x\\ v & -2y\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{2x^2}=-\frac{\begin{vmatrix}2 & -x\\ -1 & 0\end{vmatrix}}{2x^2}=\frac{1}{2x}.$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial u}(1,-1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,-1)=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-y & 2u\\ 2x & v\end{vmatrix}_{(x,0,1,-1)}}{2x^2}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2x & -1\end{vmatrix}}{2x^2}=\frac{2}{x}.$$

Entonces, cuando $x=-1$, ambas derivadas $\frac{\partial x}{\partial u}(1,-1)$ y $\frac{\partial y}{\partial u}(1,-1)$ son negativas y por lo tanto, cuando aumenta u se reducen x e y. En cambio cuando $x=1$ las derivadas son positivas y se producirá un aumento de estas variables.

4.-

En una población estable de P habitantes se propaga un rumor que cada día alcanza a uno de cada diez individuos de los que no lo conocían el día anterior.

i) Calcular el número de habitantes que conocerán el rumor al cabo de t días desde su propagación (para $t=0$ nadie conocía el rumor).

ii) ¿Cuántos días transcurrirán hasta que el rumor alcance a más del 30% de la población?

Solución:

i) Sea y_t la población que conoce el rumor en el periodo t. Entonces y_{t+1} es igual a la suma de la población que conocía el rumor el día t, es decir y_t, más el 10% de los que no lo conocían, es decir $10\%\left(P-y_t\right)$. En resumen

$$y_{t+1}=y_t+\frac{10}{100}\left(P-y_t\right)$$

o equivalentemente

$$y_{t+1}-0,9y_t=\frac{P}{10}.$$

Resolvemos la ecuación en diferencias homogénea: $y_{t+1}-0,9y_t=0$. El polinomio característico es: $p\left(r\right)=r-0,9=0$, cuya raíz es r=0,9. Luego la solución general del sistema homogéneo es:

$$y_t^h=C\cdot\left(0,9\right)^t,\quad C\in\mathbb{R}.$$

El término independiente de la completa es: $g\left(t\right)=\frac{P}{10}$, que es un polinomio de grado 0, y como 1 no es raíz del polinomio característico, se ensaya una constante como solución particular de la completa: $y_t^c=A$. Sustituyendo se obtiene

$$A-0,9A=\frac{P}{10}\quad\Rightarrow\quad A=P.$$

Luego la solución general de la completa es:

$$y_t=P+C\cdot\left(0,9\right)^t,\quad C\in\mathbb{R}.$$

Como en el inicio ($t=0$) nadie conocía el rumor: $y_0=0=P+C,$ y entonces $C=-P.$ Luego la solución de la ecuación, es decir el número de personas que conocen el rumor en el instante t, es:

$$y_t=P-P\cdot\left(0,9\right)^t.$$

ii) Realizamos los siguientes cálculos:

$y_0=0$, es decir, 0% de la población,

$y_1=P-0,9P=0,1P$, es decir, 10% de la población,

$y_2=P-0,81P=0,19P$ es decir, 19% de la población,

$y_3 = P - 0,729P = 0,271P$ es decir, 27,1% de la población,

$y_4 = P - 0,6561P = 0,3439P$ es decir, 34,39% de la población,

Por lo tanto en el cuarto día más del 30 de la población descubre los rumores.

JUNIO DE 2004

1.- (6 puntos)

Si el ingreso marginal de una empresa es proporcional al gasto $I'(q) = 5G(q)$ y $G'(q) = 4$ euros/unidad, calcular el beneficio de la empresa en función de la cantidad producida *q*, sabiendo que cuando la producción es nula no hay ni ingresos ni gastos ($G(0) = I(0) = 0$).

Solución:

Para calcular el beneficio de la empresa habrá que calcular el gasto y el ingreso en función de la cantidad producida q.

Si el gasto marginal es $G'(q) = 4$ euros/unidad, entonces el gasto acumulado cumple

$$G(q) = \int G'(q)\ dq = \int 4\ dq = 4q + K\ ,$$

y como $G(0) = 0$ se obtiene $K = 0$. Por tanto $G(q) = 4q$ euros.

Como el ingreso marginal es $I'(q) = 5G(q)$, entonces $I'(q) = 5G(q) = 20q$ euros/unidad. El ingreso acumulado cumple

$$I(q) = \int I'(q)dq = \int 20q dq = 10q^2 + K\ ,$$

y como $I(0) = 0$ se obtiene $K = 0$. Por lo tanto, $I(q) = 10q^2$ euros.

Entonces el beneficio de la empresa es:

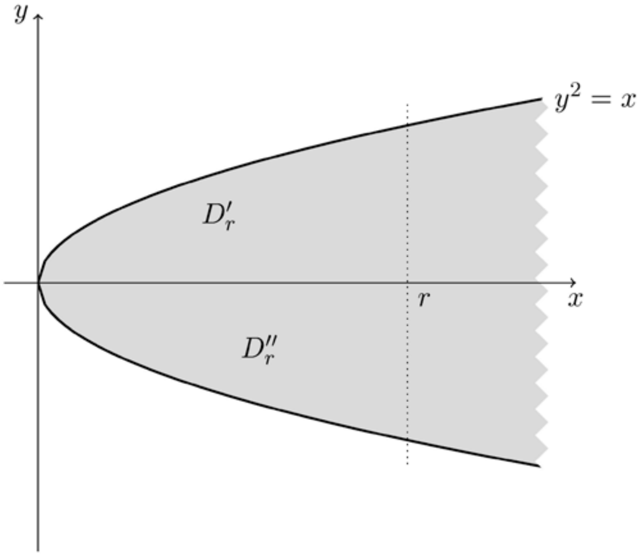
$$B(q) = I(q) - G(q) = 10q^2 - 4q \text{ euros.}$$

2.- (6 puntos)

Sea $f(x,y)=\begin{cases} |y|e^{-ax} & \text{si } (x,y)\in D \\ 0 & \text{si } (x,y)\notin D \end{cases}$, siendo $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\geq y^2\right\}$ y $a>0$.

Determinar el valor de a para que $\iint_{\mathbb{R}^2} f=1$. (Téngase en cuenta que $\lim_{r\to\infty} re^{-ar}=0$).

Solución:



El recinto D es el área sombreada de la figura y no es acotado. La función f es continua, acotada y no negativa en D.

Puesto que en la función f aparece el valor absoluto de y, la escribimos así

$$f(x,y)=\begin{cases} ye^{-ax}, & y\geq 0 \\ -ye^{-ax}, & y<0 \end{cases}$$

Si llamamos

$D'_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : x\geq y^2,\ y\geq 0, x\leq r\right\}$,

$D''_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : x\geq y^2,\ y\leq 0, x\leq r\right\}$,

entonces como $f\left(x,y\right)=0$ si $x\notin D$ se cumple

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f=\iint_D f=\lim_{r\to\infty}\iint_{D'_r} f+\lim_{r\to\infty}\iint_{D''_r} f\ .$$

Entonces

.

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D'_r} f \quad = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_0^{\sqrt{x}} y\mathrm{e}^{-ax}\,dy\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \left.\frac{y^2\mathrm{e}^{-ax}}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{2}\,dx$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \dfrac{x}{2} & du = \dfrac{1}{2}dx \\ dv = \mathrm{e}^{-ax}dx & v = -\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{matrix}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left(\left. -\frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{2a}\right]_0^r + \int_0^r \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{2a}\,dx\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{r\mathrm{e}^{-ar}}{2a} - \left(\left.\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{2a^2}\right]_0^r\right)\right) = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{r\mathrm{e}^{-ar}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^{-ar}}{2a^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}.$$

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D''_r} f \quad = \lim_{r\to\infty}\int_0^r\int_{-\sqrt{x}}^{0} -y\mathrm{e}^{-ax}dydx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \left. -\frac{y^2\mathrm{e}^{-ax}}{2}\right]_{-\sqrt{x}}^{0} dx = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{2}dx$$

$$= \left\{\begin{matrix} u = \dfrac{x}{2} & du = \dfrac{1}{2}dx \\ dv = \mathrm{e}^{-ax}dx & v = -\dfrac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{matrix}\right\} = \lim_{r\to\infty}\left(\left. -\frac{x\mathrm{e}^{-ax}}{2a}\right]_0^r + \int_0^r \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{2a}dx\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{r\mathrm{e}^{-ar}}{2a} - \left(\left.\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{2a^2}\right]_0^r\right)\right) = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{r\mathrm{e}^{-ar}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^{-ar}}{2a^2} + \frac{1}{2a^2}\right) = \frac{1}{2a^2}.$$

Entonces, $\iint_D f = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} = 1$. Luego para que $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$, debe ser $a = 1$ (recordar que a>0).

3.- (10 puntos)

Sea el siguiente modelo macroeconómico en el que Y representa la renta nacional, C el consumo, I la inversión, G el gasto público, T los ingresos por impuestos y r la tasa de interés:

$$Y = C + I + G,$$

$$C = f(Y - T),$$

$$I = g(r),$$

donde f y g son funciones cuyas derivadas son continuas y tales que $f'(Y-T) > 0$, y $g'(r) < 0$.

i) Determinar los valores de f' para los que es posible interpretar a *Y*, *C* e *I* como variables endógenas en torno a cualquier punto en el que el sistema esté en equilibrio.

ii) ¿Para qué valores de f' una bajada de la tasa de interés provocaría un aumento de la renta?

iii) Para los valores de f' obtenidos en el apartado ii), ¿qué efecto tendría sobre el consumo un aumento del gasto?

Solución:

i) Se reescribe el sistema del siguiente modo

$$\begin{cases} F^1(Y,C,I,G,T,r) = Y - C - I - G = 0 \\ F^2(Y,C,I,G,T,r) = C - f(Y-T) = 0 \\ F^3(Y,C,I,G,T,r) = I - g(r) = 0 \end{cases}$$

Sea $\mathbf{p}_0 = (Y_0, C_0, I_0, G_0, T_0, r_0)$ un punto cualquiera que cumpla las ecuaciones. Se aplica el Teorema de la función implícita para comprobar si existe una función implícita en torno a $\mathbf{p}_0 = (Y_0, C_0, I_0, G_0, T_0, r_0)$.

1- Las funciones F^1, F^2, F^3 son de clase $\mathcal{C}^1$.

2- El punto cumple las ecuaciones del sistema

$$F^1(Y_0,C_0,I_0,G_0,T_0,r_0) = F^2(Y_0,C_0,I_0,G_0,T_0,r_0) = F^3(Y_0,C_0,I_0,G_0,T_0,r_0) = 0$$

3- Finalmente el jacobiano debe ser no nulo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial C} & \dfrac{\partial F^1}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial C} & \dfrac{\partial F^2}{\partial I} \\ \dfrac{\partial F^3}{\partial Y} & \dfrac{\partial F^3}{\partial C} & \dfrac{\partial F^3}{\partial I} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -f'(Y-T) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - f'(Y-T).$$

Por lo que si $f'(Y-T) \neq 1$ el jacobiano no se anula, el Teorema de la función implícita permite asegurar que el sistema define una función implícita en torno a cualquier punto $\mathbf{p}_0 = (Y_0, C_0, I_0, G_0, T_0, r_0)$ que cumpla las ecuaciones.

ii) Se calcula la derivada de la función implícita

$$\varphi(G,T,r) = \left(\varphi^1(G,T,r), \varphi^2(G,T,r), \varphi^3(G,T,r)\right)(Y,C,I)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial r}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial r} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial r} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial r} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial C} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial C} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial C} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -g'(r) & 0 & 1\end{vmatrix}}{1-f'(Y-T)}=\frac{g'(r)}{1-f'(Y-T)}$$

Para que este valor sea negativo, como $g'(r)$ es negativa, 1- $f'(Y-T)$ debe ser positivo. Es decir, si $f'\left(Y\text{-}T\right)$<1 una bajada de la tasa de interés provocará un aumento de la renta.

iii) Ahora se calcula la derivada de *C* (consumo) respecto de *G* (gasto)

$$\frac{\partial C}{\partial G}=-\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial Y} & \frac{\partial F^1}{\partial G} & \frac{\partial F^1}{\partial I}\\ \frac{\partial F^2}{\partial Y} & \frac{\partial F^2}{\partial G} & \frac{\partial F^2}{\partial I}\\ \frac{\partial F^3}{\partial Y} & \frac{\partial F^3}{\partial G} & \frac{\partial F^3}{\partial I}\end{vmatrix}}{1-f'(Y\text{-}T)}=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -f'(Y\text{-}T) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}}{1-f'(Y\text{-}T)}=\frac{f'(Y\text{-}T)}{1-f'(Y\text{-}T)}>0$$

Como suponemos que $f'\left(Y\text{-}T\right)$, por el apartado anterior, entonces esta derivada es positiva puesto que 0< $f'(Y-T)$<1. Luego un aumento en el gasto siempre produciría un aumento del consumo.

4.- (8 puntos)

Sea la ecuación en diferencias $y_{t+3}+Ay_{t+2}+By_{t+1}+Cy_t=8$. Sabiendo que 1, *t* y $\left(-1\right)^t$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada:

i) Calcular *A*, *B* y *C*.

ii) Hallar la solución general de la ecuación.

Solución:

i) Como 1, t y $(-1)^t$ son soluciones particulares de la ecuación homogénea asociada, deben cumplir la ecuación. Luego al sustituir se obtiene

$$\begin{cases} 1+A+B+C=0 \\ t+3+A(t+2)+B(t+1)+Ct=0 \\ (-1)^{t+3}+A(-1)^{t+2}+B(-1)^{t+1}+C(-1)^t=0 \end{cases}$$

y al evaluar en $t=0$:

$$\left.\begin{array}{l} 1+A+B+C=0 \\ 3+2A+B=0 \\ -1+A-B+C=0 \end{array}\right\},$$

y por tanto: A=-1, B=-1 y C=1.

ii) Por el apartado anterior la ecuación completa se convierte en:

$$y_{t+3}-y_{t+2}-y_{t+1}+y_t=8.$$

El polinomio asociado es $r^3-r^2-r+1=0$, cuyas raíces son: 1 (doble) y -1. Soluciones particulares son: 1, t y $(-1)^t$. Entonces, la solución general de la homogénea asociada es

$$y_t^h=C_1+C_2\cdot t+C_3\cdot(-1)^t, \quad (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R})$$

Para buscar la solución particular de la completa como el término independiente de la ecuación es $g(t)=8$$g(t)$=8, y además 1 es una raíz doble del polinomio característico, se ensaya una solución de la forma $y_t^c=k\cdot t^2$. Al sustituir en la ecuación en diferencias se obtiene

$$k\cdot(t+3)^2-k\cdot(t+2)^2-k\cdot(t+1)^2+k\cdot t^2=8,$$

y al evaluar en $t=0$ se obtiene $9k-4k-k=8$, luego $k=2$.

Entonces la solución general de la completa es

$$y_t=2\cdot t^2+C_1+C_2\cdot t+C_3\cdot(-1)^t \quad (C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}).$$

FEBRERO 2005

1.-

Una empresa desea conocer la plantilla óptima para un nuevo taller. Se estima que si x es el número de horas de trabajo asignadas mensualmente a este taller, el ingreso marginal es de $30\sqrt{x}$ euros/hora, y el coste marginal es de $0,5x$ euros/hora.

i) Calcular el número de horas para las que se optimiza el beneficio, y el número de trabajadores que deben contratarse para cubrirlas si cada trabajador trabaja 200 horas/mes.

ii) Calcular el beneficio (euros/mes) para la plantilla óptima sabiendo que si se asignan 0 horas habrá unas pérdidas de 80.000 euros/mes.

Solución:

i) Para lograr el mayor beneficio es necesario que se anule el beneficio marginal (que la derivada de la función beneficio total sea cero),

Puesto que $B'(x) = 30\sqrt{x} - 0,5x$ euros/hora, entonces $B'(x) = 0$ implica $x = 3600$, luego para 3600 horas se maximiza el beneficio.

Si cada trabajador trabaja 200 horas/mes se deben contratar 3600/200=18 trabajadores.

ii) Se cumple

$$B(3600) - B(0) = \int_0^{3600} \left(30\sqrt{x} - 0,5x\right) dx = 20x\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\Bigg]_0^{3600} = 1.080.000€ .$$

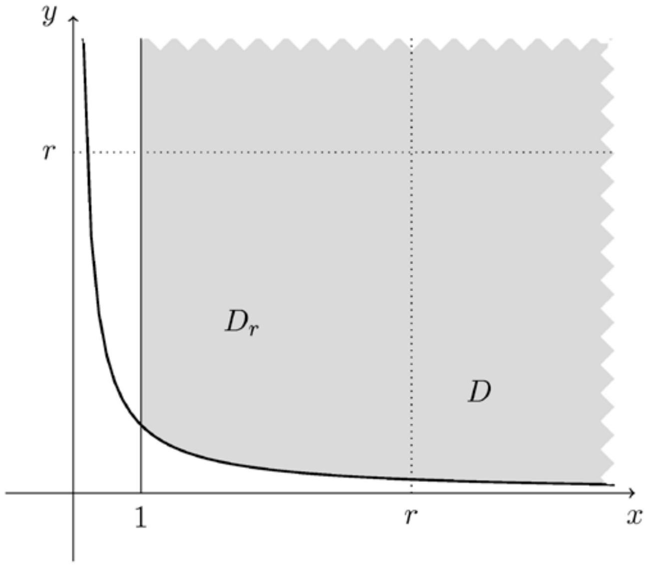
Como $B(0) = 80.000$, entonces $B(3600) = 1.080.000 \text{-} 80.000 = 1.000.000$ euros.

2.-

Calcular $\iint_D \frac{1}{x^3 y^2}\, dx\, dy$, donde $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1,\ x \geq 1\right\}$.

Solución:

El recinto se representa en el gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Además f es una función continua y no negativa en D. Llamamos $D_r = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \geq 1,\ r \geq x \geq 1,\ r \geq y\right\}$, entonces,

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{x^3y^2}\,dx\,dy &= \lim_{r\to\infty}\iint_{D_r}\frac{1}{x^3y^2}\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty}\int_1^r\int_{\frac{1}{x}}^r \frac{1}{x^3y^2}\,dy\,dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\int_1^r -\frac{1}{x^3y}\bigg]_{\frac{1}{x}}^r dx = \lim_{r\to\infty}\int_1^r\left(-\frac{1}{rx^3}+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2rx^2}-\frac{1}{x}\right)\bigg]_1^r = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2r^3}-\frac{1}{r}-\frac{1}{2r}+1\right)=1.\end{aligned}$$

3.-

Sea el sistema:

$$\begin{cases} uf(x)+vg(y)=x \\ -ug(y)+vf(x)=y \end{cases},$$

donde f y g son dos funciones reales con derivadas continuas, siendo $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

i) ¿En torno a qué puntos (x,y,u,v) puede asegurarse que las variables u y v pueden verse como funciones implícitas de x e y?

ii) Si el punto $(x, y, u, v) = (2, 2, 1, 1)$ verifica el sistema, y además $g(2) = 0$ y $g'(2) > 0$, ¿qué efecto tendrá sobre la variable u un ligera disminución de y a partir de su valor $y = 2$ manteniendo $x = 2$?

Solución:

i) Se reescribe el sistema en la forma

$$\begin{cases} F^1(x, y, u, v) = uf(x) + vg(y) - x, \\ F^2(x, y, u, v) = -ug(y) + vf(x) - y. \end{cases}$$

Y ahora se examina el cumplimiento de las condiciones del teorema de la función implícita

1) $F^1, F^2 \in C(\mathbb{R}^4)$, porque f y g tienen derivadas parciales continuas.

2) Debe cumplirse $F^1(x, y, u, v) = 0$ y $F^2(x, y, u, v) = 0$.

3) Por último el jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ -g(y) & f(x) \end{vmatrix} = f^2(x) + g^2(y) > 0,$$

que es siempre positivo.

Entonces se puede asegurar que el sistema define a u y v como funciones implícitas de x e y, $\varphi(x, y) = (\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y)) = (u, v)$, en un entorno de cualquier punto donde se anulen ambas ecuaciones.

ii) Si en el punto $(2, 2, 1, 1)$ se anulan las dos ecuaciones, entonces

$$\begin{cases} F^1(2, 2, 1, 1) = f(2) + g(2) - 2 = 0 \\ F^2(2, 2, 1, 1) = -g(2) + f(2) - 2 = 0 \end{cases}$$

Para conocer el efecto de una ligera disminución de y sobre u se calcula la derivada parcial de la función implícita

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial y}(2,2) = \frac{\partial u}{\partial y}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} vg'(y) & g(y) \\ -ug'(y)-1 & f(x) \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}}{\begin{vmatrix} f(x) & g(y) \\ -g(y) & f(x) \end{vmatrix}_{(2,2,1,1)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} g'(2) & 0 \\ -g'(2)-1 & f(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f(2) & 0 \\ 0 & f(2) \end{vmatrix}} = -\frac{f(2)g'(2)}{f^2(2)} = -\frac{g'(2)}{f(2)} < 0.$$

ya que $f(2) > 0$ y $g'(2) > 0$. Luego una ligera disminución en la variable exógena y (manteniendo x constante) produce un aumento en la variable endógena u.

4.-

La demanda (D_{t+1}) de un bien en el periodo $t+1$ es 10 unidades menos la media entre los precios del bien en dicho periodo y en el anterior (p_{t+1} y p_t), mientras que la oferta (S_{t+2}) en el instante $t+2$ viene definida por la media de su precio en los dos periodos anteriores (p_{t+1} y p_t) menos 10 unidades. Calcular el precio de equilibrio entre la oferta y la demanda para cada instante t sabiendo que dicho precio para $t=0$ es 12 y para $t=1$ es 8.

Solución:

Las funciones de demanda y oferta son respectivamente

$$\left.\begin{aligned} D_{t+1} &= 10 - \frac{p_{t+1} + p_t}{2} \\ S_{t+2} &= -10 + \frac{p_{t+1} + p_t}{2} \end{aligned}\right\}$$

Para calcular el precio de equilibrio se igualan ambas funciones en el mismo periodo, por ejemplo en $t+2$. Si $D_{t+2} = S_{t+2}$ se obtiene

$$D_{t+2} = 10 - \frac{p_{t+2} + p_{t+1}}{2} = -10 + \frac{p_{t+1} + p_t}{2} = S_{t+2}$$

y simplificando

$$p_{t+2} + 2p_{t+1} + p_t = 40.$$

Ahora se resuelve esta ecuación en diferencias. La ecuación homogénea asociada es: $p_{t+2} + 2p_{t+1} + p_t = 0$. Su polinomio característico: $r^2+2r+1=0$, cuya raíz es -1 (doble). La solución general de la ecuación homogénea es entonces:

$$p_t^h = C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t, \ \left(C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right).$$

Ahora vamos a hallar una solución particular de la ecuación completa. Como $g(t)$=40 es un polinomio de grado 0, y 1 no es una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada, se ensaya como solución particular una constante $p_t = A.$. Sustituyendo en la ecuación

$$A + 2A + A = 40 \ \Rightarrow \ A = 10.$$

Luego la solución general de la completa es:

$$p_t = 10 + C_1(-1)^t + C_2 t(-1)^t, \left(C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right)$$

Se aplican las condiciones iniciales:

Cuando t=0, $p_0 = 10 + C_1 = 12$, y cuando t=1, $p_1 = 10 - C_1 - C_2 = 8$. Resolviendo este sistema: $C_1 = 2$ y $C_2 = 0$.

En conclusión el precio de equilibrio viene dado por

$$p_t = 10 + 2(-1)^t.$$

JUNIO 2005

1.-

El ingreso marginal por la venta de q unidades de un producto ($I'(q)$) es constante e igual a 10 euros/unidad, mientras que el coste marginal ($C'(q)$) aumenta linealmente con la cantidad, viniendo dado por $C'(q)=1+0,0009q$ euros/unidad.

i) Calcular la cantidad que debe producirse para maximizar los beneficios.

ii) Calcular el beneficio máximo sabiendo que el beneficio es cero cuando la producción es cero.

Solución:

i) Calculamos el beneficio marginal: $B'(q)=I'(q)-C'(q)=9-0,0009q$ euros/unidad. El beneficio máximo se alcanza cuando $B'(q)=0$, es decir, cuando $9-0,0009q=0$ o sea cuando $q=10.000$ unidades.

ii) La función de beneficios debe cumplir

$$B(q)=\int B'(q)\,dq=\int(9-0,0009q)\,dq=9q-0,00045q^2+K,$$

como $B(0)=0$, entonces $K=0$. Luego $B(q)=9q-0,00045q^2$, y

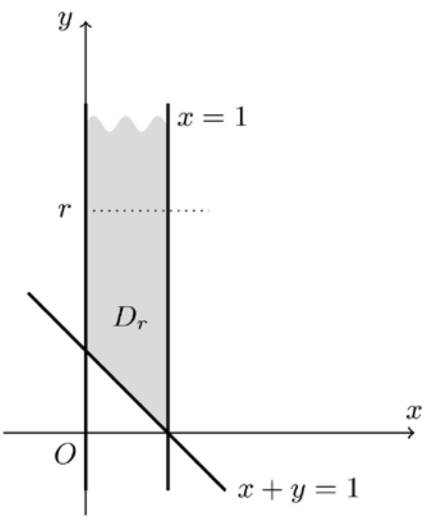
$$B(10000)=9\cdot 10.000-0,00045\cdot(10.000)^2=45.000 \text{ euros}$$

2.-

Calcular $\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\,dx\,dy$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 1,\ 0\leq x\leq 1\}$.

Solución:

El recinto D es el área sombreada de la figura, y no es acotado. La función f es continua en D.



Si llamamos $D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : x + y \geq 1, 0 \leq x \leq 1, y \leq r\}$, entonces

$$\iint_D \frac{1}{(x+y)^3}\, dx\, dy = \lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} \frac{1}{(x+y)^3}\, dx\, dy = \lim_{r\to\infty} \int_0^1 \int_{1-x}^{r} \frac{1}{(x+y)^3}\, dy\, dx$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_0^1 -\frac{1}{2(x+y)^2}\Bigg]_{1-x}^{r} dx = \lim_{r\to\infty} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2(x+r)^2} + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(\frac{1}{2(x+r)} + \frac{x}{2}\right)\Bigg]_0^1 = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2+2r} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}\right) = \frac{1}{2}.$$

3.-

Sea el sistema:

$$\begin{cases} x^2 z - \dfrac{zy}{x} = 6 \\ 2xy - xz + yz = 8 \end{cases}$$

i) Comprobar si el sistema define implícitamente a x e y como variables endógenas en torno al punto $(2,2,2)$.

ii) ¿Cómo se comportarán una y otra variable endógena ante ligeros incrementos de z a partir del punto $\left(2,2,2\right)$?

Solución:

i) Llamamos $F^1(x,y,z)=x^2z-\dfrac{zy}{x}-6$ y $F^2(x,y,z)=2xy-xz+yz-8$. Y aplicamos el Teorema de la función implícita:

1) $F^1,F^2\in\mathcal{C}^1B\left(\left(2,2,2\right)\right)$ porque son polinomios.

2) $F^1\left(2,2,2\right)=8-2-6=0$ y $F^2\left(2,2,2\right)=8-4+4-8=0$.

3) El jacobiano es

$$\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}=\left|\begin{matrix}2xz+\dfrac{zy}{x^2} & -\dfrac{z}{x}\\ 2y-z & 2x+z\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}=\left|\begin{matrix}9 & -1\\ 2 & 6\end{matrix}\right|=56\neq 0.$$

Entonces el sistema define implícitamente a x e y como variables endógenas en torno al punto $\left(2,2,2\right)$, mediante una función implícita $\varphi(z)=\left(\varphi^1(z),\varphi^2(z)\right)=(x,y)$.

ii) La variación viene dada a través de las derivadas parciales

$$\frac{d\varphi^1}{dz}(2,2)=\frac{dx}{dz}(2,2)=-\frac{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}}{\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}}=-\frac{\left|\begin{matrix}x^2-\dfrac{y}{x} & -\dfrac{z}{x}\\ -x+y & 2x+z\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}}{\left|\begin{matrix}2xz+\dfrac{zy}{x^2} & -\dfrac{z}{x}\\ 2y-z & 2x+z\end{matrix}\right|_{(2,2,2)}}$$

$$=-\frac{\left|\begin{matrix}3 & -1\\ 0 & 6\end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix}9 & -1\\ 2 & 6\end{matrix}\right|}=-\frac{18}{56}<0.$$

Como es negativa, ante ligeros incrementos de z se produce una disminución de x.

$$\frac{d\varphi^2}{dz}(2,2)\frac{dy}{dz}(2,2) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial z} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial y} \\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(2,2,2)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2xz+\frac{zy}{x^2} & x^2-\frac{y}{x} \\ 2y-z & -x+y \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}{\begin{vmatrix} 2xz+\frac{zy}{x^2} & -\frac{z}{x} \\ 2y-z & 2x+z \end{vmatrix}_{(2,2,2)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6}{56} > 0.$$

En este caso es positiva, luego ante ligeros incrementos de z se produce un aumento de la variable y.

4.-

Una biblioteca ambulante tiene un fondo inicial ($t=0$) de 1.000 libros. El primer año ($t=1$) adquiere 90 nuevos títulos. A partir del segundo año, decide adquirir cada año nuevos libros en una cantidad equivalente al 10% del número de títulos con los que inició la campaña anterior, y asimismo deshacerse de un 10% de los que llevan en circulación dos o más años. ¿Cuántos libros tendrá al cabo de t años?

Solución:

Planteamos la ecuación en diferencias:

$$y_{t+2} = y_{t+1} + 0{,}1y_{t+1} - 0{,}1y_t\,,$$

o sea

$$y_{t+2} - 1{,}1y_{t+1} + 0{,}1y_t = 0$$

Es una ecuación homogénea. El polinomio característico es: $r^2 - 1{,}1r + 0{,}1 = 0$, cuyas raíces son 1 y 0,1. La solución general de la ecuación es:

$$y_t = C_1 + C_2(0{,}1)^t,\ (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Y utilizando las condiciones iniciales:

Cuando $t=0$, $y_0 = C_1 + C_2 = 1000$. Cuando $t=1$, $y_1 = C_1 + 0{,}1 \cdot C_2 = 1090$. Entonces, C_1=1100 y C_2=-100.

Por lo tanto teniendo en cuenta las condiciones iniciales para la solución particular, el número de libros que tendrá al cabo de t años es

$$y_t = 1100 - 100(0{,}1)^t .$$

FEBRERO 2006

1.-

El coste marginal de producir q unidades diarias de un producto es $100+e^{-rq}$ euros/unidad (donde $r=10^{-5}$) y actualmente se producen 50.000 unidades diarias. Calcular el incremento de coste que supondría doblar la producción diaria. (No es preciso calcular las expresiones exponenciales que aparezcan en los cálculos).

Solución:

Si el coste marginal de los bienes es $C'(q)=100+e^{-\frac{q}{10^5}}$ euros/unidad, el coste por producir x unidades será

$$\int_0^x \left(100+e^{-\frac{q}{100.000}}\right)dq\,.$$

Por tanto duplicar la producción supondrá un coste de

$$\begin{aligned}\int_{50.000}^{100.000}\left(100+e^{-\frac{q}{100.000}}\right)dq &= \left(100q-100.000e^{-\frac{q}{100.000}}\right)\Bigg]_{50.000}^{100.000}\\ &=10.000.000-\frac{100.000}{e}-5.000.000+\frac{100.000}{\sqrt{e}}\\ &=5.000.000-\frac{100.000}{e}+\frac{100.000}{\sqrt{e}}.\end{aligned}$$

2.-

Calcular $\iint_D xe^y\,dx\,dy$, donde D es el triángulo de vértices (1,1), (0,1) y (1,0).

Solución:

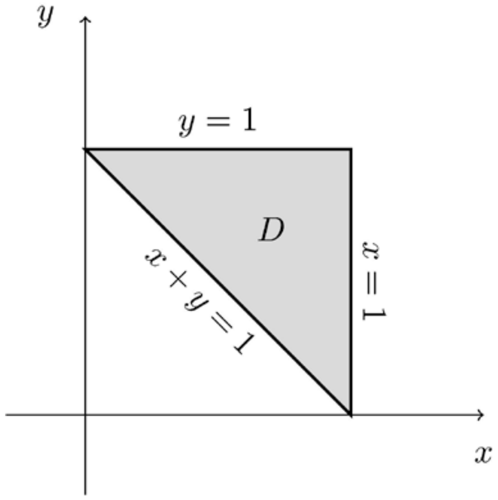
El recinto D se muestra en la figura. Es compacto y regular y la función f es continua. Entonces

$$\iint_D x\cdot e^y\,dx\,dy=\int_0^1\int_{1-x}^1 x\cdot \mathrm{e}^y\,dy\,dx=\int_0^1 x\mathrm{e}^y\Big]_{1-x}^1\,dx=\int_0^1 x\cdot\mathrm{e}\,dx-\int_0^1 x\cdot\mathrm{e}^{1-x}\,dx=2-\frac{\mathrm{e}}{2},$$

ya que

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}\,dx=\frac{x^2\mathrm{e}}{2}\Big]_0^1=\frac{\mathrm{e}}{2},$$

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{1-x}\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\mathrm{e}^{1-x}dx & v=-\mathrm{e}^{1-x}\end{matrix}\right\}=-x\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{1-x}\,dx=-x\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1-\mathrm{e}^{1-x}\Big]_0^1=-2+\mathrm{e}.$$



3.-

Sea el sistema

$$\left.\begin{matrix}xg(y,z)-uv^2=z\\ x^2y-zf(u,v)=u\end{matrix}\right\},$$

donde f y g son funciones con derivadas parciales continuas, siendo $f(0,1)=0$.

i) Comprobar que el sistema permite interpretar a z y u como variables endógenas en torno al punto $(x,y,z,u,v)=(0,1,0,0,1)$.

ii) Estudiar el efecto de una ligera disminución de x (a partir del valor $x=0$ y manteniendo constantes $y=v=1$) sobre la variable z, sabiendo que $g(1,0)=-1$.

Solución

i) Habrá que demostrar que *z* y *u* dependen de las demás variables, es decir que existe una función φ tal que $(z,u)=\left(\varphi^1(x,y,v),\varphi^2(x,y,v)\right)=\varphi(x,y,v)$. Para ello se aplicará el Teorema de la función implícita al sistema

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,z,u,v)=xg(y,z)-uv^2-z=0 \\ F^2(x,y,z,u,v)=x^2y-zf(u,v)-u=0 \end{array}\right\}$$

Las condiciones son

• $F^1,F^2\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^5\right)$, porque $f,g\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

• Se cumple que $F^1(0,1,0,0,1)=0-0=0$ y $F^2(0,1,0,0,1)=0-0-0=0$.

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{array}\right|_{(0,1,0,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} x\dfrac{\partial g(y,z)}{\partial z}-1 & -v^2 \\ -f(u,v) & -z\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-1 \end{array}\right|_{(0,1,0,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = 1\neq 0.$$

Por tanto según el Teorema de la Función implícita existe una función φ que define a (z,u) como función implícita de (x,y,v) en un entorno del punto (0,1,0,0,1).

ii) El efecto viene determinado por el signo de la derivada parcial.

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial x}(0,1,1)=\frac{\partial z}{\partial x}(0,1,1) = -\frac{\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{array}\right|_{(0,1,0,0,1)}}{\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{array}\right|_{(0,1,0,0,1)}} = -\frac{-\left|\begin{array}{cc} g(y,z) & -v^2 \\ 2xy & -z\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-1 \end{array}\right|_{(0,1,0,0,1)}}{1}$$

$$= -\left|\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = -1<0.$$

Por lo tanto un ligero incremento de la variable *x*, en torno al citado punto producirá una disminución de la variable *z*.

4.-

Un cliente acude al banco con 100.000€ con intención de hacer un depósito a plazo y el banco le da dos opciones. Opción 1: un 3% anual y los intereses se depositan en una cuenta diferente no remunerada; opción 2: un 2,5% pero los intereses se acumulan cada año al capital inicial.

i) Planteando y resolviendo las correspondientes ecuaciones en diferencias (con t=0, 1, 2,... representando el número de años desde el ingreso) calcúlese el capital que se acumulará al cabo de t años para cada una de las dos opciones.

ii) Si va a depositar a plazo ese dinero durante 3 años, ¿cuál de los dos depósitos le conviene más?

Solución

i) Opción 1: Cada año aumenta su capital en el 3% de 100000. Luego la ecuación a resolver es

$$y_{t+1} - y_t = 3000.$$

El polinomio característico de la homogénea asociada es: $r-1=0$, cuya raíz es $r=1$. La solución general de la homogénea asociada es:

$$y_t^h = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

El segundo miembro de la ecuación de la completa es una constante; como 1 es raíz del polinomio característico, se tantea como solución particular una función de la forma: $y_t = A \cdot t$. Al sustituir se obtiene

$$A(t+1) - At = 3000,$$

luego $A = 3000$ y la solución general de la completa es

$$y_t = C + 3000t \; (C \in \mathbb{R}).$$

Ahora bien como $y_0 = 100000$ entonces $C = 100000$ y el capital acumulado es

$$y_t = 100000 + 3000t.$$

Opción 2: Cada año el capital aumenta en 0,25 del capital acumulado. En este caso la ecuación a resolver es

$$y_{t+1} - y_t = 0,025 y_t,$$

o si se prefiere

$$y_{t+1} - 1,025 y_t = 0$$

que es una ecuación homogénea. El polinomio característico es $r - 1{,}025 = 0$, cuya raíz es $r = 1{,}025$. La solución general de la homogénea asociada (que en este caso es la completa también):

$$y_t = C \cdot (1{,}025)^t, \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Como $y_0 = 100000$ entonces $C = 100000$, y el capital acumulado viene dado en esta opción por

$$y_t = 100000 \cdot (1{,}025)^t.$$

ii) Habrá que calcular y_3 en las dos opciones y comparar los valores.

Opción 1. $y_3 = 100.000 + 3.000 \cdot 3 = 109.000.$

Opción 1. $y_3 = 100.000(1{,}025)^3 = 107.689.$

Luego preferirá la primera opción.

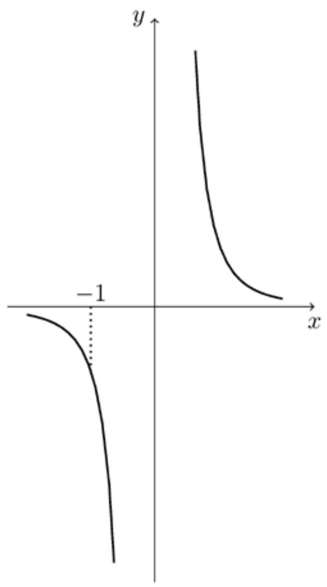
JUNIO 2006

1.-

Clasificar y calcular, si es que existe, la siguiente integral: $\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Solución:

La función se representa en el gráfico siguiente:



Se observa que la función tiene una asíntota en $x = 0$, luego es una integral impropia que además tiene un límite de integración no acotado, y por tanto para calcular esta integral hay que descomponerla. Una posibilidad es dividirla a partir del punto 1 para escribirla como suma de tres límites como sigue

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \int_{-1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Si alguno de los límites anteriores no existe, entonces la integral diverge o sea no existe. Calculamos los tres límites.

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \int_{-1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \left.\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{-1}^{r} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r<0}} \left(\frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \int_{r}^{1} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left.\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{r}^{1} = \lim_{\substack{r\to 0\\ r>0}} \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{1}^{r} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{r\to\infty} \left.\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]_{1}^{r} = \lim_{r\to\infty} \left(\frac{3\sqrt[3]{r^2}}{2} - \frac{3}{2}\right) = \infty.$$

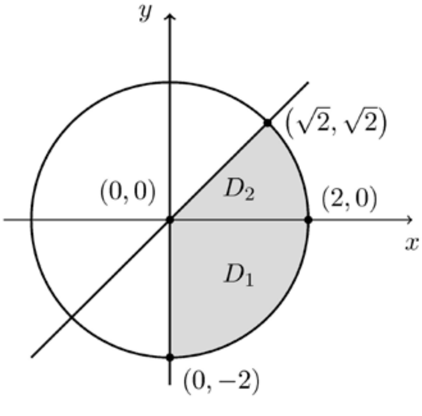
Como el tercer límite no existe, entonces la integral del enunciado diverge.

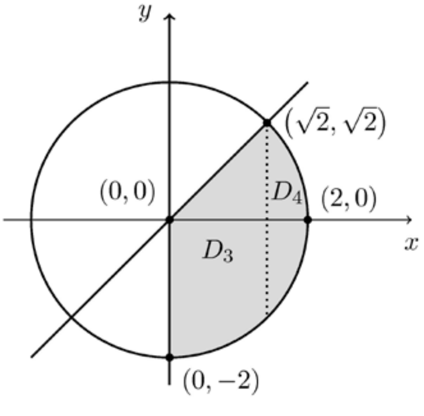
2.-

Sean $f(x,y) = xy$ y $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ x \ge y\right\}$. Plantear $\iint_D f$ como suma de integrales de la forma $\int\left(\int ..dx\right)dy$, y como suma de integrales de la forma $\int\left(\int ..dy\right)dx$. Calcular $\iint_D f$ eligiendo libremente el orden de integración.

Solución:

El recinto se representa en cualquiera de las siguientes figuras:





El recinto D es regular y no acotado. La función es continua. Una posible partición del conjunto es la de la figura de la izquierda donde

$$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0, y \le 0 \right\}$$
$$D_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge y, y \ge 0 \right\}$$

Entonces

$$\iint_D xy\ dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy + \int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy.$$

Otra forma de dividir el recinto se representa en la figura de la derecha, siendo

$$D_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le x \le \sqrt{2}, y \le x \right\},$$
$$D_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ : x^2 + y^2 \le 4,\ \sqrt{2} \le x \right\}.$$

Con esta partición se cumple

$$\iint_D xy\,dy\,dx = \iint_{D_3} xy\,dy\,dx + \iint_{D_4} xy\,dy\,dx = \int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx.$$

Calculamos la integral con la primera partición

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} \left.\frac{x^2 y}{2}\right]_{0}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-2}^{0} \frac{4y - y^3}{2}\,dy = \left. y^2 - \frac{y^4}{8}\right]_{-2}^{0} = -2.$$

$$\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{y}^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy = \int_{0}^{\sqrt{2}} \left.\frac{x^2 y}{2}\right]_{y}^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{0}^{\sqrt{2}} \left(2y - y^3\right) dy = \left. y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = 1.$$

En conclusión,

$$\iint_D xy\ dx\,dy = \iint_{D_1} xy\,dx\,dy + \iint_{D_2} xy\,dx\,dy = -2 + 1 = -1.$$

3.-

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y}{u} - \dfrac{v^2 + x}{y} = 1 \\ uy - (x+1)^2 v = 1 \end{cases}$$

i) Comprobar que el sistema define las variables y y u como funciones de x y v alrededor del punto $(x,y,u,v)=(0,1,1,0)$.

ii) Estudiar el efecto de un incremento de cada variable exógena (manteniendo la otra constante) sobre las endógenas.

iii) Utilizando el teorema de la función inversa, comprobar que la función implícita que define el sistema en torno al punto dado es localmente invertible alrededor del punto (0,0).

Solución:

i) Habrá que demostrar que las variables *y* y *u* dependen de las variables *x* y *v*, es decir que existe una función φ tal que $(y,u)=\left(\varphi^1(x,v),\varphi^2(x,v)\right)=\varphi(x,v)$ Para ello se aplicará el Teorema de la Función implícita al sistema

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,u,v)=\dfrac{x^2+y}{u}-\dfrac{v^2+x}{y}-1=0 \\ F^2(x,y,u,v)=uy-(x+1)^2v-1=0 \end{array}\right\}$$

En efecto

- $F^1,F^2\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^4\right)$ en un entorno de (0,1,1,0), porque los denominadores no se anulan.
- Se cumple $F^1\left(0,1,1,0\right)=1-0-1=0$ y $F^2\left(0,1,1,0\right)=1-0-1=0$.
- Finalmente se comprueba que se anula el jacobiano

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{array}\right|_{(0,1,1,0)}=\left|\begin{array}{cc} \dfrac{1}{u}+\dfrac{v^2+x}{y^2} & -\dfrac{x^2+y}{u^2} \\ u & y \end{array}\right|_{(0,1,1,0)}=\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right|=2\neq 0.$$

Por tanto según el Teorema de la función implícita existe una función $(y,u)=\left(\varphi^1(x,v),\varphi^2(x,v)\right)=\varphi(x,v)$ que define a *y* y *u* como función implícita de *x* y *v*, en un entorno del punto (0,1,1,0).

ii) El efecto viene dado por el signo de la derivada parcial.

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial y}{\partial x}(0,0)\quad=-\frac{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\left.\begin{vmatrix}\frac{2x}{u}-\frac{1}{y} & -\frac{x^2+y}{u^2}\\ -2(x+1)v & y\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{2}$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial v}(0,0)=\frac{\partial y}{\partial v}(0,0)\quad=-\frac{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial v} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial v} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\left.\begin{vmatrix}-\frac{2v}{y} & -\frac{x^2+y}{u^2}\\ -(x+1)^2 & y\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{2}$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Por lo tanto un aumento de cualquiera de las variables x *ó* v , en torno al citado punto producirá un aumento de la variable y. Veamos lo que ocurre con la variable u.

Por otra parte

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)\quad=-\frac{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial x} & \frac{\partial F^1}{\partial x}\\ \frac{\partial F^2}{\partial x} & \frac{\partial F^2}{\partial x}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{\left.\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial u}\\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\left.\begin{vmatrix}\frac{1}{u}+\frac{v^2+x}{y^2} & \frac{2x}{u}-\frac{1}{y}\\ u & -2(x+1)v\end{vmatrix}\right|_{(0,1,1,0)}}{2}$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{2}=-\frac{1}{2}>0.$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial v}(0,0)=\frac{\partial u}{\partial v}(0,0) \quad =-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}=-\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{u}+\dfrac{v^2+x}{y^2} & -\dfrac{2v}{y} \\ u & -(x+1)^2 \end{vmatrix}_{(0,1,1,0)}}{2}$$

$$=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1}{2}>0.$$

Luego si aumenta la variable x, entonces disminuye la variable u, pero si aumenta la variable v, entonces también aumenta la variable u.

iii) Se aplica el Teorema de la función inversa a la función implícita $\varphi(x,v)=(y,u)$.

- $\varphi^1,\varphi^2\in\mathcal{C}^1\left(B(0,0)\right)$ por el Teorema de la función implícita.
- $\left|J_\varphi(0,0)\right|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial v}(0,0) \\ \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial v}(0,0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\neq 0.$

Luego la función implícita que define el sistema en torno al punto dado es localmente invertible alrededor del punto (0,0).

4.-

Un virus comienza a propagarse en cierta población a partir de una persona enferma. Cuando una persona recibe el virus lo incuba durante un día y enferma el segundo día y la enfermedad dura tan sólo ese segundo día, a menos que el virus sea destruido por sus anticuerpos, en cuyo caso el segundo día estará sano. Esto último ocurre en 1 de cada 3 casos. Así cada día t hay un cierto número de personas incubándolo (I_t) y un cierto número de personas enfermas (E_t). Sólo las personas enfermas pueden transmitir el virus, y cada enfermo el día t transmite el virus a tres personas que hasta entonces no lo habían recibido y que lo incubarán el día siguiente. Si en el momento inicial t=0 (t = tiempo transcurrido en días) hay sólo un enfermo y ninguna persona está incubándolo, calcular, resolviendo la correspondiente ecuación en diferencias finitas, el número de personas enfermas al cabo de una semana.

Solución:

En primer lugar hay que establecer la relación entre el número de personas que incuban el virus (I_t) y el número de personas enfermas (E_t) en el instante t. Se cumple

$$E_{t+1} = \tfrac{2}{3} I_t \qquad \text{e} \qquad I_{t+1} = 3E_t .$$

Entonces $E_{t+2} = \tfrac{2}{3} I_{t+1} = 2E_t$.

Para determinar la evolución del número de personas enfermas hay que resolver la ecuación en diferencias homogénea

$$E_{t+2} - 2E_t = 0 .$$

El polinomio característico es: $r^2 - 2 = 0$, cuyas raíces son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Entonces la solución general de la homogénea viene dada por:

$$E_t = C_1\left(\sqrt{2}\right)^t + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^t,$$

donde C_1 y C_2 son números reales cualesquiera.

Ahora se aplican las condiciones iniciales: $E_0 = 1$ (hay 1 enfermo en el momento inicial) y $E_1 = 0$ (ya que $I_0 = 0$ por no haber personas que incuban el virus en el momento inicial).

$$E_0 = C_1 + C_2 = 1,$$
$$E_1 = C_1\sqrt{2} - C_2\sqrt{2} = 0.$$

Y se obtiene $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{2}.$ Luego en el instante t el número de enfermos viene dado por

$$E_t = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^t + \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^t.$$

Y al cabo de una semana habrá

$$E_7 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^7 + \tfrac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^7 \text{ personas enfermas.}$$

FEBRERO 2007

1.-

La oferta de un bien al precio p está calculada en $K\frac{p}{p+1}$ unidades (siendo K una constante conocida). La demanda marginal del mismo bien al precio p es $\frac{-K}{2(p+1)^2}$ unidades/euro, siendo la demanda de K unidades cuando el precio es 0. Calcular el precio del equilibrio.

Solución:

Para calcular la función de demanda se integra la función de demanda marginal

$$D(p)=\int\frac{-K}{2(p+1)^2}\,dp=\frac{K}{2(p+1)}+C,$$

donde C es una constante que hay que determinar.

De la expresión anterior resulta $D(0)=\frac{K}{2}+C$, y de la hipótesis del problema se demandan K unidades cuando el precio es 0, luego $D(0)=K$. Al igualar ambas expresiones se concluye $\frac{K}{2}+C=K$, y por tanto $C=\frac{K}{2}$. Así la función de demanda es

$$D(p)=\frac{K}{2(p+1)}+\frac{K}{2}.$$

Para obtener el precio de equilibrio se igualan la demanda y la oferta y se obtiene

$$\frac{K}{2(p+1)}+\frac{K}{2}=K\frac{p}{p+1},$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que el precio del equilibrio es $p=2$.

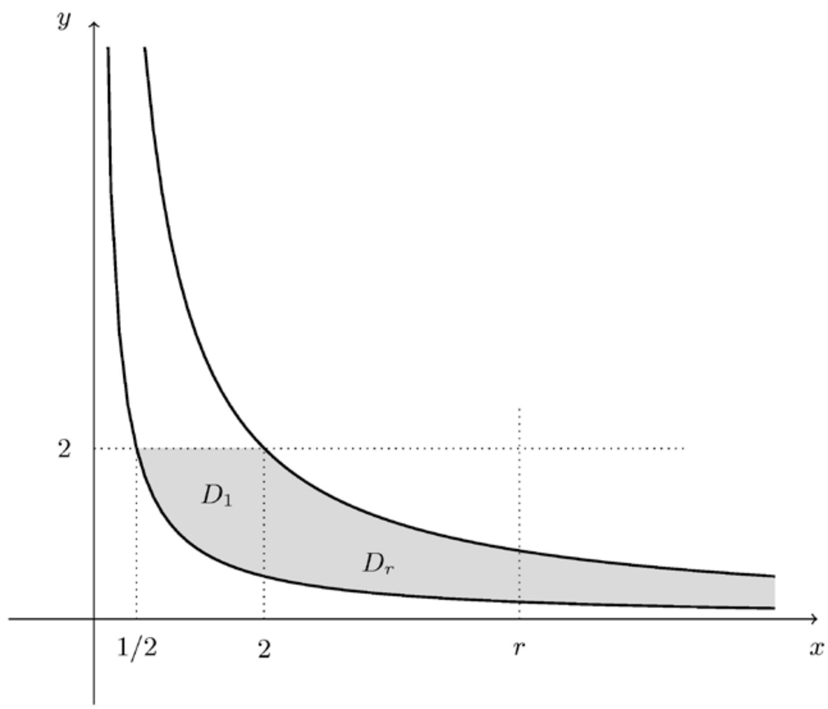
2.-

Calcular $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, donde $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :1\le xy\le 4,\ 0\le y\le 2\}$ y

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^x, & x\le 2;\\ \dfrac{1}{x^3}, & x>2.\end{cases}$$

Solución:

El recinto es la zona sombreada del gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Llamamos

$D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\le 2,\ y\le 2,\ xy\ge 1\}$,

$D_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2\le x\le r,\ 1\le xy\le 4\}$.

Entonces $\iint_D f=\iint_{D_1} f+\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f$, siempre que el límite exista.

- Cálculo de $\iint_{D_1} f$. En el conjunto D_1 se cumple $f(x,y)=xe^x$, por tanto

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1/2}^{2}\int_{1/x}^{2} xe^{x}\,dy\,dx = \int_{1/2}^{2} yxe^{x}\Big]_{1/x}^{2}\,dx =$$

$$= \int_{1/2}^{2}\left(2xe^{x}-e^{x}\right))dx = \int_{1/2}^{2}\left(2x-1\right)e^{x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u=2x-1, & du=2dx \\ dv=e^{x}dx, & v=e^{x}\end{matrix}\right\}$$

$$= \left(2x-1\right)e^{x}\Big]_{1/2}^{2} - \int_{1/2}^{2} 2e^{x}\,dx = e^{2}+2\sqrt{e}.$$

- Cálculo de $\iint_{D_r} f$. En D_r se cumple $f(x,y)=\dfrac{1}{x^{3}}$, por tanto

$$\iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{2}^{r}\int_{1/x}^{4/x}\frac{1}{x^{3}}\,dy\,dx = \int_{2}^{r} y\frac{1}{x^{3}}\Bigg]_{1/x}^{4/x} dx$$

$$= \int_{2}^{r}\frac{3}{x^{4}}\,dx = \frac{-1}{x^{3}}\Bigg]_{2}^{r} = -\frac{1}{r^{3}}+\frac{1}{8}.\frac{-4}{3r\sqrt{r}}+\frac{4}{3}.$$

Entonces

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f(x,y)\;dx\,dy = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{r^{3}}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

En conclusión

$$\iint_{D} f = e^{2}+2\sqrt{e}+\frac{1}{8}.$$

3.-

a) ¿Cuándo se dice que un sistema

$$\left.\begin{matrix} F_1(x,y,z,u)=0 \\ F_2(x,y,z,u)=0 \end{matrix}\right\}$$

define implícitamente a x e y como funciones de z y de u en torno a un punto? (Se pide el *concepto* o definición de función implícita, no el Teorema).

b) Las relaciones entre cuatro variables x, y, z, y u están gobernadas por el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+2y-6z^3+8u-2=0 \\ 2x-4y^2-3z-6u^2+9=0 \end{array}\right\}.$$

Utilizando el teorema de la función implícita, comprobar que existen un entorno $B(0,0)$ y un entorno $B(1,1)$, tales que para cada $(z,u)\in B(1,1)$ existe un único $(x,y)\in B(0,0)$ tal que (x,y,z,u) verifica el sistema.

c) ¿Cuál será el impacto en una y otra variable endógena de un ligero aumento del valor de la variable exógena u a partir del valor anterior (es decir, $u=1$) si la otra variable exógena se mantiene constante (es decir, $z=1$)?

Solución:

a) Se dice que el sistema

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x,y,z,u)=0 \\ F_2(x,y,z,u)=0 \end{array}\right\}$$

define implícitamente a x e y como funciones de z y de u en torno al punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})$, si existen dos entornos $B(\bar{x},\bar{y})$ y $B(\bar{z},\bar{u})$ de forma que para cada $(z,u)\in B(\bar{z},\bar{u})$ existe un único $(x,y)\in B(\bar{x},\bar{y})$ tal que $F_1(x,y,z,u)=0$ y $F_2(x,y,z,u)=0$. Este único punto se denotará $\varphi(z,u)$, y se dice que φ está implícitamente definida por el sistema de ecuaciones en torno al punto $(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\bar{u})$.

b) Se denota

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,z,u)=x^2+2y-6z^3+8u-2, \\ F^2(x,y,z,u)=2x-4y^2-3z-6u^2+9, \end{array}\right\}$$

y se aplica el Teorema de la función implícita.

- Las funciones F^1 y F^2 son de clase $\mathcal{C}^1$ pues son polinomios.
- $F^1(0,0,1,1)=-6+8-2=0$ y $F^2(0,0,1,1)=-3-6+9=0$.
- Finalmente se calcula el jacobiano

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{array}\right|_{(0,0,1,1)} = \left|\begin{array}{cc} 2x & 2 \\ 2 & -8y \end{array}\right|_{(0,0,1,1)} = \left|\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -4\neq 0.$$

Como se cumplen las tres condiciones existe una función $(x,y)=\varphi(z,u)$ que define a (x,y) como función implícita de (z,u) en torno al punto (0,0,1,1).

c) El efecto sobre x e y de un aumento en la variable u viene dado por las derivadas parciales de φ. Se cumple

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial x}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}8 & 2\\ -12u & -8y\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{-4}=-\frac{24}{-4}=6>0,$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial u}(1,1)=\frac{\partial y}{\partial u}(1,1)=-\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y}\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & 8\\ 2 & -12u\end{vmatrix}_{(0,0,1,1)}}{-4}=-\frac{-16}{-4}=-4<0.$$

Luego se puede afirmar que si aumenta la variable u también aumenta la variable x pero la variable y disminuye.

4.-

Un individuo abre una cuenta con una cierta cantidad ($t=0$). A partir de entonces cada mes ($t=1,2,\ldots$) se gasta el 80% de lo que tiene en ella al comienzo de mes e ingresa en ella un sueldo de 2000 euros. Averiguar la cantidad con que abrió la cuenta sabiendo que al cabo de 4 meses el saldo es de 2504 euros.

Solución:

Si y_t es la cantidad de dinero que tiene en la cuenta en el mes t deberá cumplirse:

$$y_4 = 2504,$$
$$y_{t+1} = 0.2y_t + 2000.$$

Habrá que resolver la ecuación en diferencias: $y_{t+1} - 0.2y_t = 2000$. El polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es $r - 0,2 = 0$, cuya raíz es 0,2. Luego la solución general de la homogénea asociada es

$$y_t = C(0,2)^t \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Como solución particular de la completa se ensaya una constante de la forma $y_t = A$. Se cumplirá $A - 0.2A = 2000$, luego $A = 2500$. De donde la solución general de la completa asociada es

$$y_t = C(0.2)^t + 2500 \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Si se aplica la condición $y_4 = 2504$ se obtiene $2504 = C \cdot (0.2)^4 + 2500$, luego $C = 2500$, y se puede escribir que la cantidad de dinero en el mes t es

$$y_t = 2500(0.2)^t + 2500.$$

Como la cuenta se abrió en el instante *t*=0, la cantidad con la que se abrió es

$$y_0 = 2500(0.2)^0 + 2500 = 5000 \text{ euros.}$$

JUNIO 2007

1.-

La población de una especie animal en peligro de extinción evoluciona a una tasa de $15-3\sqrt{t}$ individuos/año (donde t es el número de años transcurridos). Sabiendo que en el momento $t=0$ había 375 ejemplares, calcular la población total en el momento en el que el número de individuos sea máximo.

Solución:

Si se designa por $P(t)$ a la población total en el instante t, entonces

$$P(t)=\int\left(15-3\sqrt{t}\right)dt=15t-2t\sqrt{t}+K\,,$$

donde K es una constante a determinar. Como $P(0)=375$ ejemplares, entonces $K=375$, y por tanto

$$P(t)=15t-2t\sqrt{t}+375.$$

El momento t en el que la población alcance el máximo es aquél en que $P'\left(t\right)=0$, o sea

$$P'(t)=15-3\sqrt{t}=0\Rightarrow t=25\,.$$

Cuando $t=25$ la población total es

$$P(25)=500 \text{ ejemplares.}$$

2.-

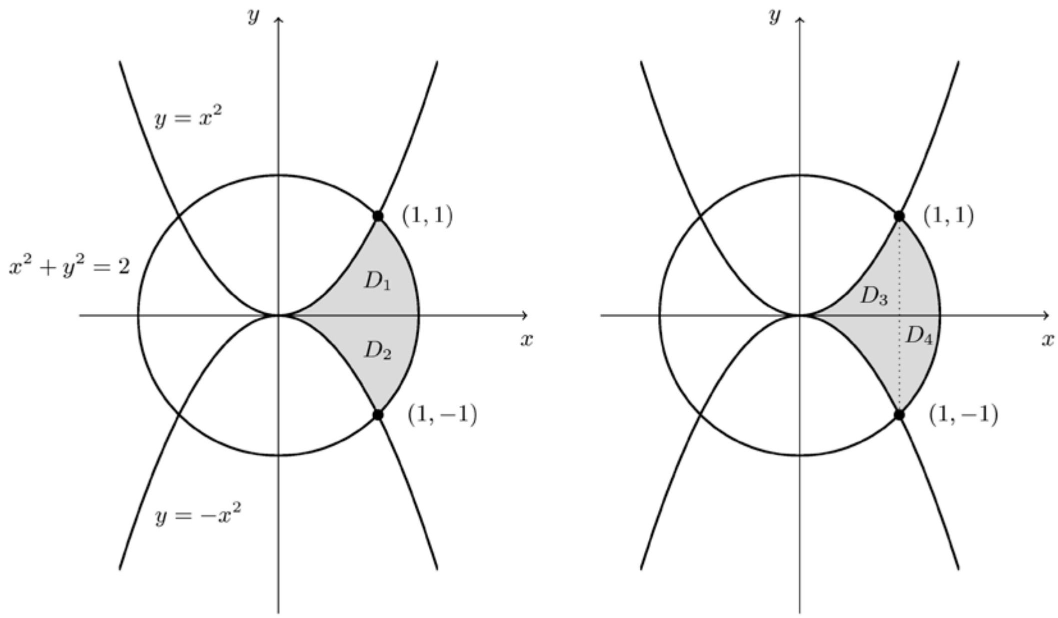
Calcular $\iint_D\left(2x+y\right))dx\,dy$, si

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x^2\le y\le x^2,\ 0\le x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0\right\}.$$

(Represéntese gráficamente el recinto D e indíquese con claridad la descomposición del mismo utilizada para calcular la integral).

Solución:

El recinto se representa en cualquiera de las dos figuras del gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Una posible partición del conjunto es la de la figura de la izquierda donde

$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le x^2,\ 0\le x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0\right\}$ y

$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x^2\le y\le 0,\ 0\le x^2+y^2\le 2,\ x\ge 0\right\}$.

- Cálculo de $\iint_{D_1}(2x+y)\,dx\,dy$.

$$\iint_{D_1}(2x+y))dx\,dy=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}(2x+y)\,dx\,dy=\int_0^1\left(x^2+xy\right)\Big]_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}\,dy$$

$$=\int_0^1\left(2-y^2+y\sqrt{2-y^2}-y-y^{3/2}\right)dy$$

$$= 2y - y^3/3 - 1/3\left(2-y^2\right)^{3/2} - y^2/2 - \left(2y^{5/2}\right)/5\Big]_0^1 = \frac{13}{30} + \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

- Cálculo de $\iint_{D_2} (2x+y)\,dx\,dy$.

$$\iint_{D_2} (2x+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{-y}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(x^2+xy\right)\Big]_{\sqrt{-y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(2-y^2+y\sqrt{2-y^2}+y-y\sqrt{-y}\right) dy$$

$$= 2y - y^3/3 - 1/3\left(2-y^2\right)^{3/2} + y^2/2 + 2/5\left(-y\right)^{3/2} y\Big]_{-1}^{0} = \frac{19}{10} - \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

En resumen

$$\iint_{D} (2x+y)\,dxdy = \frac{13}{30} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{19}{10} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{7}{3}.$$

Otra forma de dividir el recinto se representa en la figura de la derecha donde

$D_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0\right\}$ y

$D_4 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x^2 \le y \le 0,\ 0 \le x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0\right\}$.

Esta partición del recinto permite calcular la integral de una manera alternativa.

- Cálculo de $\int_{D_3} (2x+y)\,dy\,dx$.

$$\int_{D_3} (2x+y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-x^2}^{x^2} (2x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_{-x^2}^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 4x^3\,dx = x^4\Big]_0^1 = 1.$$

- Cálculo de $\iint_{D_4} (2x+y)\,dy\,dx$.

$$\iint_{D_4} (2x+y)\,dy\,dx = \int_1^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (2x+y)\,dy\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} \left(2xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg]_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \left(4x\sqrt{2-x^2}\right) dx = -\frac{4}{3}\left(2-x^2\right)^{3/2}\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}.$$

En resumen

$$\iint_D (2x+y)\, dx\, dy = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

3.-

i) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ el Teorema de la función inversa permite asegurar que la función $f(x,y) = (2xy, y^2 - x^2)$ es localmente invertible?

ii) Comprobar que el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} xe^v + yu - u^2 = 0 \\ y\cos v + x^2 - u^2 = 1 \end{array}\right\}$$

define implícitamente a las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (2,1,2,0)$. Calcular la matriz jacobiana de la función implícita en el punto (2,1).

Solución:

i) Habrá que determinar los puntos en los que se puede aplicar el Teorema de la función inversa. Comprobamos las condiciones

— Las funciones $2xy$, $y^2 - x^2$, y f son de clase $\mathcal{C}^1$.

— El Jacobiano es

$$|J_f(x,y)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f^1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f^2}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 4y^2 + 4x^2.$$

Este Jacobiano sólo se anula en el punto (0,0), luego en todos los demás puntos el Teorema de la función inversa permite asegurar que $f(x,y) = (2xy, y^2 - x^2)$ es localmente invertible.

ii) Ahora habrá que aplicar el Teorema de la función implícita a este sistema. Se denota

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,z,u) = xe^v + yu - u^2, \\ F^2(x,y,z,u) = y\cos v + x^2 - u^2 - 1, \end{array}\right\}$$

Se cumple:

• Las funciones F^1 y F^2 son de clase $\mathcal{C}^1$.

• $F^1(2,1,2,0) = 2+2-4=0$ y $F^2(2,1,2,0)=1+4-4-1=0$.

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-2u & xe^v \\ -2u & -y\operatorname{sen} v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0.$$

Por tanto en un entorno de $(2,1,2,0)$.el sistema define una función implícita $(u,v)=\left(\varphi^1(x,y),\varphi^2(x,y)\right)=\varphi(x,y)$.

La matriz jacobiana es

$$J_\varphi(2,1) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial x}(2,1) & \dfrac{\partial \varphi^1}{\partial y}(2,1) \\ \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial x}(2,1) & \dfrac{\partial \varphi^2}{\partial y}(2,1) \end{bmatrix}.$$

Para calcularla se determinan los cuatro valores que aparecen en la matriz.

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial u} & \dfrac{\partial F^1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial u} & \dfrac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} e^v & xe^v \\ 2x & -y\operatorname{sen} v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{-8}{8} = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi^1}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial u}{\partial x}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial u} & \frac{\partial F^1}{\partial v} \\ \frac{\partial F^2}{\partial u} & \frac{\partial F^2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} u & xe^v \\ \cos v & -y\operatorname{sen} v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = \frac{1}{4},$$

De manera análoga

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial x}(2,1) = \frac{\partial v}{\partial x}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} y-2u & e^v \\ -2u & 2x \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{8} = 1,$$

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial y}(2,1) = \frac{\partial v}{\partial y}(2,1) = -\frac{\begin{vmatrix} y-2u & u \\ -2u & \cos v \end{vmatrix}_{(2,1,2,0)}}{8} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{8} = -\frac{5}{8}.$$

Luego la matriz jacobiana es

$$J_\varphi(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

4.-

La demanda de un bien en cada periodo t $(t = 0,1,2,\ldots)$ depende de su precio en ese período: $D_t = 50 - p_t$ millones de unidades, mientras que la oferta del bien en cada periodo $t+2$ depende del precio del bien en el período t: $S_{t+2} = -10 + p_t$ millones de unidades. Sabiendo que $p_0 = 30$ y $p_1 = 31$:

i) Calcular el precio de equilibrio (para el que la oferta y la demanda se igualan) en cada instante t.

ii) Estudiar la evolución del precio de equilibrio. ¿Converge a largo plazo?

Solución:

i) Para calcular el precio de equilibrio habrá que igualar la oferta y la demanda en el mismo instante, por ejemplo en $t+2$,

$$D_{t+2} = S_{t+2} \quad \Rightarrow \quad 50 - p_{t+2} = -10 + p_t \quad \Rightarrow \quad p_{t+2} + p_t = 60.$$

El precio de equilibrio debe cumplir esta ecuación en diferencias, que se resuelve a continuación.

La homogénea asociada es: $p_{t+2} + p_t = 0$, su polinomio característico es $r^2 + 1$, y las raíces de este polinomio son complejas: i y $-i$. El módulo de estas raíces es $r = 1$ y el argumento es $\omega = \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, la solución general de la homogénea asociada es:

$$p_t^h = C_1 \sin \frac{\pi}{2} t + C_2 \cos \frac{\pi}{2} t, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

(Se recuerda que si las raíces de un polinomio son $a \pm bi$, entonces la solución particular de la homogénea asociada es:

$$p_t^h = C_1 r^t \sin \omega t + C_2 r^t \cos \omega t, \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

donde el módulo de estos números complejos es $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el argumento es $\omega = \operatorname{arct\,g} \dfrac{b}{a}$.)

A continuación se calcula una solución particular de la completa. Como el término independiente de la completa es una constante, 60, entonces se prueba con una solución particular constante, $p_t^c = A$. Evaluando la ecuación en diferencias en $t = 0$, se tiene:

$$p_{t+2}^c + p_t^c = A + A = 60, \text{ luego } A = 30.$$

Se concluye que la solución de la ecuación completa es

$$p_t = 30 + C_1 \sin\frac{\pi}{2}t + C_2 \cos\frac{\pi}{2}t, \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Ahora hay que determinar C_1 y C_2. Para ello sustituimos $p_0 = 30$ y $p_1 = 31$ en la ecuación:

$$\begin{aligned} p_0 = 30 \quad &\Rightarrow \quad 30 + C_2 = 30 \\ p_1 = 31 \quad &\Rightarrow \quad 30 + C_1 = 31 \end{aligned}$$

Por tanto $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$ y se concluye que el precio de equilibrio es:

$$p_t = 30 + \sin\frac{\pi}{2}t.$$

ii) A largo plazo, o sea cuando $t \to \infty$, la función $30 \sin\frac{\pi}{2}t$ no tiene límite, porque la función seno varía entre -1 y 1, luego no converge.

FEBRERO 2008

1.-

La venta de un producto genera a una empresa ingresos brutos a una tasa $I'(t) = 102 - 0{,}05\sqrt{t}$ miles de euros/día en cada instante t (donde t es el tiempo medido en días), mientras que la tasa de costes en cada instante t es $G'(t) = 100 + 0{,}05\sqrt{t}$ miles de euros/día.

i) Calcular el beneficio generado durante los 4 primeros días.

ii) Calcular el beneficio acumulado desde el momento inicial hasta que el producto deja de ser rentable.

Solución:

i) El beneficio marginal es en miles de euros/día:

$$B'(t) = I'(t) - G'(t) = 102 - 0{,}05\sqrt{t} - 100 - 0{,}05\sqrt{t} = 2 - 0{,}1\sqrt{t}\ .$$

Los primeros 4 días se obtienen:

$$\int_0^4 (2 - 0{,}1\sqrt{t})\,dt = 2t - \frac{2}{30}t\sqrt{t}\Big]_0^4 = \frac{112}{15} \text{ miles de euros.}$$

ii) El beneficio dejará de ser rentable cuando el beneficio marginal se anule:

$$B'(t) == 2 - 0{,}1\sqrt{t} = 0 \Rightarrow t = 400.$$

El beneficio obtenido en estos 400 días es:

$$\int_0^{400} (2 - 0{,}1\sqrt{t})\,dt = 2t - \frac{2}{30}t\sqrt{t}\Big]_0^{400} = \frac{800}{3} \text{ miles de euros.}$$

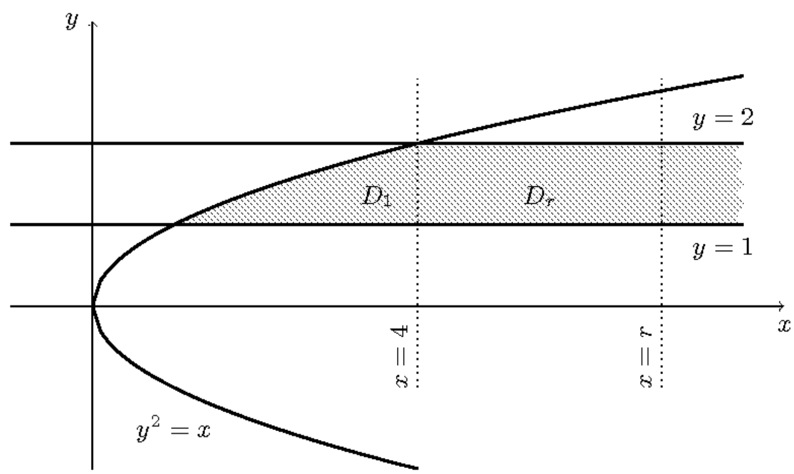
2.-

Calcular, si es que existe, $\iint_D f$, donde $D = \left\{(x,u) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, 1 \leq y \leq 2\right\}$ y f es la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln y}{y}, & \text{si } x \leq 4, \\ \dfrac{1}{x^2 y^2}, & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Solución:

El recinto se representa en el gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Si $D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 4,\ 1 \leq y \leq 2\right\}$ y $D_r = \left\{(x,y) : 4 \leq x \leq r,\ 1 \leq y \leq 2\right\}$, entonces $D = D_1 \cup \bigcup_{r \geq 0} D_r$.

- Cálculo de $\iint_{D_1} f$. En el conjunto D_1 se cumple $f(x,y) = \dfrac{\ln y}{y}$, por tanto

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{y^2}^4 \frac{\ln y}{y}\,dx\,dy = \int_1^2 \left. x\frac{\ln y}{y}\right]_{y^2}^4 dy$$

$$= \int_1^2 \left(4\frac{\ln y}{y} - y\ln y\right) dy = \int_1^2 4\frac{\ln y}{y}\,dy - \int_1^2 y\ln y\,dy.$$

Estas dos últimas integrales se calculan por partes.

— Cálculo de $\int_1^2 \left(4\dfrac{\ln y}{y}\right) dy$:

$$\int_1^2 \left(4\frac{\ln y}{y}\right) dy = \left\{\begin{matrix} u = 4\ln y, & du = (4/y)\,dy \\ dv = 1/y\,dy, & v = \ln y \end{matrix}\right\} = 4\ln^2 y\Big]_1^2 - \int_1^2 4\frac{\ln y}{y}\,dy.$$

Por lo tanto:

$$\int_1^2 \left(4\frac{\ln y}{y}\right) dy = 2\ln^2 y\Big]_1^2 = 2\ln^2 2.$$

— Cálculo de $\int_1^2 y\ln y\,dy$:

$$\begin{aligned} \int_1^2 y\ln y\,dy \quad &= \left\{\begin{matrix} u = \ln y, & du = (1/y)\,dy \\ dv = y\,dy, & v = y^2/2 \end{matrix}\right\} \\ &= \frac{y^2\ln y}{2}\Bigg]_1^2 - \int_1^2 \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^2\ln y}{2}\Bigg]_1^2 - \frac{y^2}{2}\Bigg]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + \frac{3}{4}.$$

- Cálculo de $\iint_{D_r} f$. En el conjunto D_r se cumple $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2y^2}$, por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_1^2\int_4^r \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(-\frac{1}{ry^2} + \frac{1}{4y^2}\right) dy \\ &= \frac{1}{ry} - \frac{1}{4y}\Bigg]_1^2 = -\frac{1}{2r} + \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{2r} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

En conclusión

$$\iint_D f = 2\ln^2 2 + 2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = 2\ln^2 2 + 2\ln 2 - \frac{5}{8}.$$

3.-

La oferta (q_i) y los precios (p_i) de dos bienes están relacionados por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = f(p_1, p_2) \\ q_2 = Ap_2 + Bq_1 \end{array}\right\},$$

donde A y B son números reales conocidos tales que $A > 0$, y $B < 0$, y f es una función conocida con derivadas parciales continuas y tales que $\dfrac{\partial f}{\partial p_1} > 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial p_2} < 0$.

a) Comprobar que las cantidades ofertadas determinan los precios.

b) Estudiar el efecto de un ligero incremento de la oferta del segundo bien manteniendo la del primero sobre ambos precios.

Solución:

a) Habrá que demostrar que los precios dependen de las cantidades, es decir que existe una función φ tal que $(p_1, p_2) = \varphi(q_1, q_2)$. Para ello se aplicará el Teorema de la Función implícita al sistema

$$\left.\begin{array}{l} F^1(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 - f(p_1, p_2) = 0 \\ F^2(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_2 - Ap_2 - Bq_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

En efecto

• $F^1, F^2 \in C(\mathbb{R}^4)$, porque $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$

• Se cumple por definición de las funciones F^1, F^2 que

$$\left.\begin{array}{l} F^1(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0 \\ F^2(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0 \end{array}\right\}.$$

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & \dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix} = A\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0 \qquad \text{(en realidad es positivo).}$$

Por tanto según el Teorema de la función implícita existe una función φ que define a (p_1, p_2) como función implícita de (q_1, q_2).

b) El efecto sobre los precios de un aumento en las cantidades del segundo bien viene dado por las derivadas parciales de φ. Se cumple

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial q_2} & \frac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial q_2} & \frac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial p_1} & \frac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_1} & \frac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial f}{\partial p_2} \\ 1 & -A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p_1} & -\frac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial p_2}}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} > 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial p_1} & \frac{\partial F^1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_1} & \frac{\partial F^2}{\partial q_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial p_1} & \frac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_1} & \frac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p_1} & \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = -\frac{-\frac{\partial f}{\partial p_1}}{A\frac{\partial f}{\partial p_1}} = A > 0.$$

Como las dos derivadas parciales son positivas, si aumenta la cantidad q_2 entonces aumentan ambos precios.

4.-

En una población que se compone de discretos y cotillas se propaga un rumor. En el instante inicial (día $t = 0$) el rumor es conocido únicamente por un cotilla. Cada día por cada cotilla que conoce el rumor se enteran dos cotillas y un discreto (en ambos casos de los que lo ignoraban), mientras que los discretos no propagan el rumor.

i) Calcular el número de cotillas C_t que conocerán el rumor al cabo de t días.

ii) Calcular el número de discretos D_t que conocerán el rumor al cabo de t días.

iii) Calcular la población total P_t que conocerá el rumor al cabo de t días. ¿Cuántos ciudadanos conocerán el rumor al cabo de 4 días?

Solución:

i) Se denota por C_t al número de cotillas que conocen el rumor el día t. Entonces los cotillas que conocen el rumor en el instante $t+1$, o sea C_{t+1}, es igual al de los que ya lo conocían, o sea C_t, más el de los que se enteran, que son el doble de los que lo conocen, o sea $2C_t$. En resumen $C_{t+1} = C_t + 2C_t = 3C_t$, o equivalentemente

$$C_{t+1} - 3C_t = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación en diferencias homogénea es $p(r) = r - 3$, cuya única raíz es 3. Por tanto la solución general de esta ecuación es

$$C_t = C \cdot 3^t, \quad \text{donde } C \in \mathbb{R}.$$

Cuando $t = 0$ se cumple $C_0 = 1$, de donde se deduce $C = 1$. Por tanto en el día t habrá $C_t = 3^t$ cotillas.

ii) Análogamente, si se denota por D_t al número de discretos que conocen el rumor el día t, se cumple $D_{t+1} = D_t + C_t$, o sea

$$D_{t+1} = D_t + 3^t.$$

Para resolver esta ecuación en diferencias primero se resuelve la homogénea asociada $D_{t+1} - D_t = 0$. El polinomio asociado es es $p(r) = r - 1$, cuya única raíz es 1. La solución general de esta ecuación es

$$D_t = C, \text{ donde } C \in \mathbb{R}.$$

El término independiente es 3^t, luego se ensaya una solución de la forma $D_t^0 = A \cdot 3^t$. Entonces

$$A \cdot 3^{t+1} - A \cdot 3^t = 3^t,$$

al evaluar en $t = 0$ se obtiene $3A - A = 1$, luego $A = \frac{1}{2}$.

La solución general de la ecuación es

$$D_t = C + \frac{1}{2}3^t.$$

Al aplicar la condición inicial $D_0 = 0$ se obtiene $C = -\frac{1}{2}$. Por tanto el número de discretos que conocerán el rumor al cabo de *t* días es

$$D_t = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^t.$$

iii) Si P_t es el número de total de personas que conocen el rumor el día t, se cumple $P_t = D_t + C_t$, o sea

$$P_t = \frac{3}{2}3^t - \frac{1}{2}.$$

Entonces el número de personas que conocen el rumor el día 4 es:

$$P_4 = \frac{3}{2}3^4 - \frac{1}{2} = 121.$$

JUNIO 2008

1.

Tras una larga sequía un embalse con una capacidad de 1.500 millones de metros cúbicos (m^3) está al 20%. Como consecuencia de fuertes lluvias, el pantano recibe un flujo estimado de $C'(t) = 300\sqrt{t} - t$ m^3/seg en cada instante t, mientras dura la riada (donde t es el tiempo medido en segundos desde que empieza a recibir agua de la riada).

a) Calcular el tiempo transcurrido hasta que deje de recibir agua.

b) Si no se desembalsa agua, ¿se llegará a desbordar?

Solución:

a) Si t es el instante en que deja de recibir agua, debe cumplirse $C'(t) = 0$. O sea

$$C'(t) = 300\sqrt{t} - t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 90.000 \text{ seg.}$$

($t = 0$ también es una raíz de la ecuación anterior, pero obviamente se desestima como solución).

b) El pantano está al 20%, es decir actualmente contiene 300 millones de metros cúbicos, luego sólo puede recibir otros 1200 millones más. Ahora bien, por causa de la riada recibirá la siguiente cantidad

$$\int_0^{90000} \left(300\sqrt{t} - t\right) dt = 200t\sqrt{t} - \frac{t^2}{2}\Bigg]_0^{90000} = 1350 \text{ millones de m}^3.$$

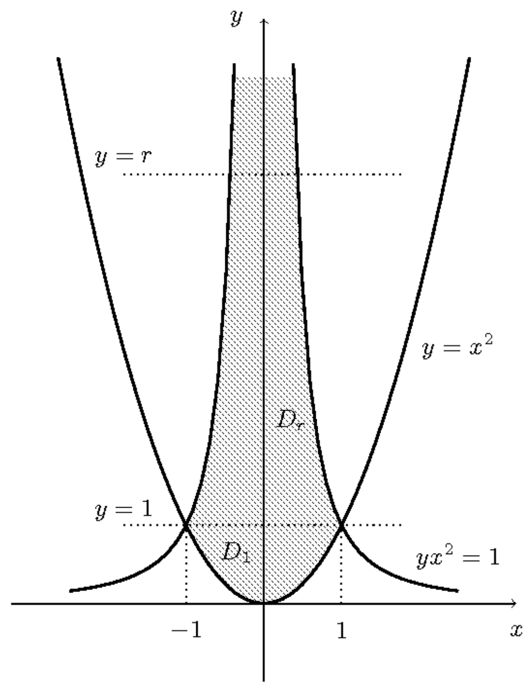
Por tanto se desbordará si no desembalsa agua.

2.

Sean $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2y\le 1,\ x^2\le y\right\}$ y $f(x,y)=\begin{cases} y^2, & y\le 1;\\ \dfrac{1}{y^2}, & y>1.\end{cases}$ Calcular, si es que existe, $\iint_D f$.

Solución:

El recinto D es la zona sombreada del gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Si llamamos

$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1;\ y\ge x^2\right\}$ y $D_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le r;\ x^2y\le 1\right\}$,

entonces $\iint_D = \iint_{D_1} + \lim_{r\to\infty}\iint_{D_r}$, si el límite existe.

- Cálculo de $\iint_{D_1} f$. En el conjunto D_1 se cumple $f(x,y)=y^2$, por tanto

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} y^2\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left.\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1-x^6}{3}\,dx = \left.\frac{x}{3} - \frac{x^7}{21}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{21}\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{21}\right) = \frac{4}{7}.$$

- Cálculo de $\iint_{D_r} f$. En el conjunto D_r se cumple $f(x,y) = \dfrac{1}{y^2}$, por tanto

$$\iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1}^{r}\int_{-1/\sqrt{y}}^{1/\sqrt{y}} \frac{1}{y^2}\,dx\,dy = \int_{1}^{r} \left.\frac{x}{y^2}\right]_{-1/\sqrt{y}}^{1/\sqrt{y}} dy$$

$$= \int_{1}^{r} \frac{2}{y^2\sqrt{y}}\,dy = \left.\frac{-4}{3y\sqrt{y}}\right]_{1}^{r} = \frac{-4}{3r\sqrt{r}} + \frac{4}{3}.$$

Entonces

$$\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{r\to\infty}\frac{-4}{3r\sqrt{r}} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}.$$

En conclusión

$$\iint_{D} f = \frac{4}{7} + \frac{4}{3} = \frac{40}{21}.$$

3.-

La oferta (q_i) y los precios (p_i) de dos bienes están relacionados por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= f(p_1, p_2) \\ q_2 &= Ap_2 + Bq_1 \end{aligned}\right\}$$

donde A y B son números reales conocidos tales que $A > 0$, y $B < 0$, y f es una función conocida con derivadas parciales continuas y tales que $\dfrac{\partial f}{\partial p_1} > 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial p_2} < 0$.

a) Comprobar que las cantidades ofertadas determinan los precios.

b) Estudiar el efecto de un ligero incremento de la oferta del segundo bien manteniendo la del primero sobre ambos precios.

Solución:

a) Habrá que demostrar que los precios dependen de las cantidades, es decir que existe una función φ tal que $(p_1, p_2) = \varphi(q_1, q_2)$. Para ello se aplicará el Teorema de la función implícita al sistema

$$\left.\begin{array}{l} F^1(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_1 - f(p_1, p_2) = 0 \\ F^2(q_1, q_2, p_1, p_2) = q_2 - Ap_2 - Bq_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

En efecto

• $F^1, F^2 \in C(\mathbb{R}^4)$, porque $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{R}^2\right)$

• Se cumple por definición de las funciones F^1, F^2 que

$$\left.\begin{array}{l} F^1(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0 \\ F^2(q_1, q_2, p_1, p_2) = 0 \end{array}\right\}.$$

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & \dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix} = A\frac{\partial f}{\partial p_1} \neq 0 \qquad \text{(en realidad es positivo).}$$

Por tanto según el Teorema de la función implícita existe una función φ que define a (p_1, p_2) como función implícita de (q_1, q_2).

b) El efecto sobre los precios de un aumento en las cantidades del segundo bien viene dado por las derivadas parciales de φ. Se cumple

$$\frac{\partial p_1}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial p_1} & \dfrac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 1 & -A \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial p_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} > 0,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial q_2} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial p_1} & \frac{\partial F^1}{\partial q_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_1} & \frac{\partial F^2}{\partial q_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial p_1} & \frac{\partial F^1}{\partial p_2} \\ \frac{\partial F^2}{\partial p_1} & \frac{\partial F^2}{\partial p_2} \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial p_1} & \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ 0 & -A \end{vmatrix}} = -\frac{-\frac{\partial f}{\partial p_1}}{A\frac{\partial f}{\partial p_1}} = A > 0.$$

Como las dos derivadas parciales son positivas, si aumenta la cantidad q_2 entonces aumentan ambos precios.

4.

Obtener todas las sucesiones cuyo primer término sea 0 y que cumplan que cada término a partir del tercero sea la semisuma de los dos que le preceden.

Solución:

Si se denota a la sucesión por y_t deberá cumplirse:

$y_t = 0,$

$y_{t+2} = \dfrac{y_{t+1} + y_t}{2}.$

Habrá que resolver la ecuación en diferencias: $2y_{t+2} - y_{t+1} - y_t = 0$ con $y_0 = 0$. El polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es $2r^2 - r - 1 = 0$, cuyas raíces son 1 y 1/2. Luego la solución general de la homogénea asociada es

$$y_t = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

Si se aplica la condición $y_0 = 0$ se obtiene $0 = C_1 + C_2$, luego $C_1 = -C_2$, y se puede escribir que la sucesión será de la forma

$$y_t = C\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t\right),$$

donde C es cualquier número real.

FEBRERO 2009

1.-

El ingreso marginal por la venta de q kg de un producto es igual a 100 euros/kg, mientras que el coste marginal viene dado por $5+6q-\frac{k}{1+q}$ euros/kg ($k \in \mathbb{R}$).

a) Si k=1, calcular el beneficio que se obtiene por la venta de 10kg, sabiendo que cuando no se vende nada hay una pérdida de 20 euros.

b) Si k=0, calcular la cantidad que debe venderse para maximizar los beneficios.

Solución:

a) El ingreso marginal viene dado por: $I'(q)=100$ €/kg y el coste marginal por $C'(q)=5+6q-\frac{k}{1+q}$ €/kg, luego el beneficio marginal es

$$B'(q)=I'(q)-C'(q)=95-6q+\frac{k}{1+q} \text{ €/kg.}$$

Para k=1, calculamos la función de beneficios:

$$B(q)=\int B'(q)dq=\int\left(95-6q+\frac{1}{1+q}\right)dq=95q-3q^2+\ln(1+q)+C.$$

Como $B(0)=C=-20$, se tiene que

$$B(q)=95q-3q^2+\ln(1+q)-20 \text{ €}.$$

Entonces $B(10)=630+\ln(11)$ €.

b) Si $k=0$, el beneficio marginal es

$$B'(q)=I'(q)-C'(q)=95-6q \text{ €/kg.}$$

Para calcular la cantidad que maximiza los beneficios se iguala a cero esta derivada, esto es:

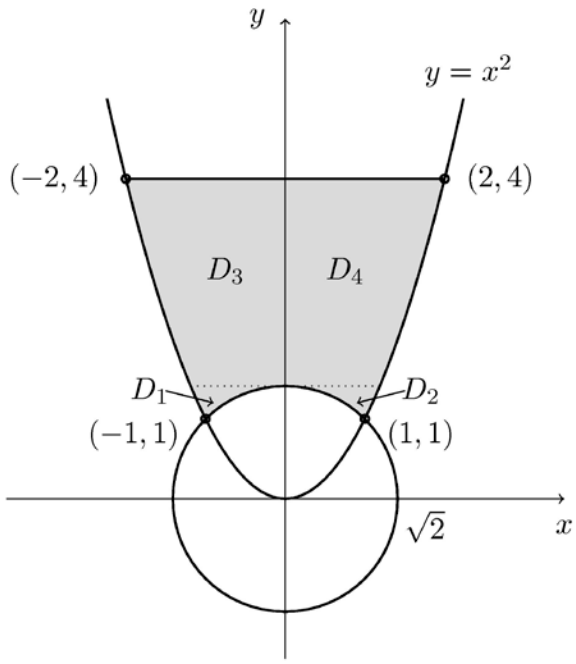
$$B'(q)=95-6q=0 \Rightarrow q=\frac{95}{6} \text{ kg.}$$

2.-

Calcular $\iint_D f$, donde $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{si } x\geq 0 \\ y & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ y

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq x^2; x^2+y^2\geq 2; y\leq 4\right\}.$$

Solución:



El recinto D viene representado en la figura y es acotado y regular y la función es continua en el recinto, luego la integral de f en D existe.

Si llamamos

$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2\leq y\leq\sqrt{2},\ x^2+y^2\geq 2,\ x\leq 0\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2\leq y\leq\sqrt{2},\ x^2+y^2\geq 2,\ x\geq 0\right\}$

$D_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1\leq y\leq 4,\ x^2+y^2\geq 2,\ x^2\leq y,\ x\leq 0\right\}$

$D_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, 1\leq y\leq 4,\ x^2+y^2\geq 2,\ x^2\leq y,\ x\geq 0\right\}$

entonces

$$\iint_D f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f+\iint_{D_3} f+\iint_{D_4} f.$$

Se calculan las cuatro integrales

$$\iint_{D_1} f = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{2-y^2}} y\, dx\, dy = \int_1^{\sqrt{2}} yx\Big]_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{2-y^2}} dy = \int_1^{\sqrt{2}} \left(-y\sqrt{2-y^2} + y\sqrt{y}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\left(2-y^2\right)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{y^5}\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{5}\sqrt[4]{2} - \frac{11}{15}.$$

$$\iint_{D_2} f = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\, dx\, dy = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{2y}\Big]_{\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{y}} dy = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y} + \frac{y}{2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}y - \ln(y) + \frac{y^2}{4}\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} - \ln\left(\sqrt{2}\right).$$

$$\iint_{D_3} f = \int_{\sqrt{2}}^4 \int_{-\sqrt{y}}^0 y\, dx\, dy = \int_{\sqrt{2}}^4 yx\Big]_{-\sqrt{y}}^0 dy = \int_{\sqrt{2}}^4 y\sqrt{y}\, dy = \frac{2}{5}\sqrt{y^5}\Big]_{\sqrt{2}}^4 = \frac{64 - 4\sqrt[4]{2}}{5}.$$

$$\iint_{D_4} f = \int_{\sqrt{2}}^4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\, dx\, dy = \int_{\sqrt{2}}^4 \frac{x^2}{2y}\Big]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_{\sqrt{2}}^4 \frac{1}{2} dy = \frac{y}{2}\Big]_{\sqrt{2}}^4 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego

$$\iint_D f = \frac{829}{60} - \ln(\sqrt{2}).$$

3.-

Sea el sistema

$$\begin{cases} zf(x,y) - u^3 = 2 \\ x^2 z - g(z-y) = u \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$, $g \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right)$ y se cumple:

$$f(1,1) = 3,\ g(0) = 0,\ g'(0) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5.$$

a) Comprobar que el sistema permite interpretar a z y u como variables endógenas en torno al punto $(1,1,1,1)$.

b) Estudiar el efecto sobre la variable endógena z de un ligero aumento del valor de cada variable exógena (manteniendo la otra constante).

Solución:

a) Se considera el sistema

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,z,u) = zf(x,y) - u^3 - 2 = 0 \\ F^2(x,y,z,u) = x^2 z - g(z-y) - u = 0 \end{array}\right\}$$

Y se aplica el Teorema de la función implícita en torno al punto $(1,1,1,1)$.

• F^1 y F^2 son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$, ya que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

• $F(1,1,1,1) = \left(F^1(1,1,1,1), F^2(1,1,1,1)\right) = (1+1-2, 1-0-1) = (0,0)$.

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^1}{\partial u}(1,1,1,1) \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z}(1,1,1,1) & \dfrac{\partial F^2}{\partial u}(1,1,1,1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x,y) & -3u^2 \\ x^2 - g'(z-u) & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Luego, el sistema $F(x,y,z,u) = (0,0)$ sí permite interpretar a *z* y *u* como variables endógenas en torno al punto $(1,1,1,1)$.

b) Se calculan las derivadas parciales de la función implícita

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial x}(1,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} zf_1(x,y) & -3u^2 \\ 2xz & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{-3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{5}{3} > 0.$$

Luego, un ligero aumento de la variable exógena *x* (manteniendo *y* constante) produce un aumento en la variable endógena *z*.

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial \varphi^1}{\partial y}(1,1) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} zf_2(x,y) & -3u^2 \\ g'(z-y) & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)}}{-3} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{2}{3} < 0.$$

Luego, un ligero aumento de la variable exógena *y* (manteniendo *x* constante) produce una disminución en la variable endógena *z*.

4.-

Resolviendo la correspondiente ecuación en diferencias finitas, hallar todas las sucesiones y_t que verifiquen la siguiente condición: la diferencia entre un término cualquiera y la media de los dos anteriores a él es igual a 1.

Solución:

Hay que resolver la ecuación

$$y_{t+2} - \frac{y_{t+1} + y_t}{2} = 1.$$

o sea

$$y_{t+2} - \frac{1}{2} y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 1.$$

La ecuación homogénea asociada es: $y_{t+2} - \frac{1}{2} y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 0.$ Su polinomio característico: $r^2 - \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} = 0$, cuyas raíces son 1 y $-\frac{1}{2}.$ La solución general de la ecuación homogénea es entonces:

$$y_t^h = C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Para calcular la solución particular de la ecuación completa, como el término independiente es $g(t) = 1$, es decir un polinomio de grado cero y 1 es raíz del polinomio, se propone como solución $y_t^c = A \cdot t$. Se cumple

$$A(t+2) - \frac{A(t+1) + At}{2},$$

y al evaluar en $t = 0$, por ejemplo, se obtiene $A = \frac{2}{3}$.

Por tanto, la solución general de la ecuación completa es:

$$y_t = \frac{2}{3} t + C_1 + C_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

JUNIO 2009

1.-

El ingreso marginal por la venta de q unidades de un producto ($I'(q)$) es constante e igual a 40 euros/unidad, mientras que el coste marginal ($C'(q)$) aumenta linealmente con la cantidad, viniendo dado por $C'(q) = 10 + 0,003q$ euros/unidad.

i) Calcular la cantidad que debe producirse para maximizar los beneficios.

ii) Calcular el beneficio máximo sabiendo que hay unas pérdidas de 50000 euros cuando la producción es cero.

Solución:

i) Calculamos el beneficio marginal, que es el ingreso marginal menos el coste marginal:

$$B'(q) = I'(q) - C'(q) = 40 - \left(10 + 0,003q\right) = 30 - 0,003q \text{ euros/unidad.}$$

La condición necesaria para maximizar los beneficios es $B'(q) = 0$, luego

$$B'(q) = 30 - 0,003q = 0, \text{ luego } q = 10.000 \text{ unidades.}$$

ii) El incremento del beneficio total al producir 10.000 unidades es:

$$B(10.000) - B(0) = \int_0^{10.000} (30 - 0,003q)dq = 30q - 0,0015q^2 \Big]_0^{10.000} = 150.000€.$$

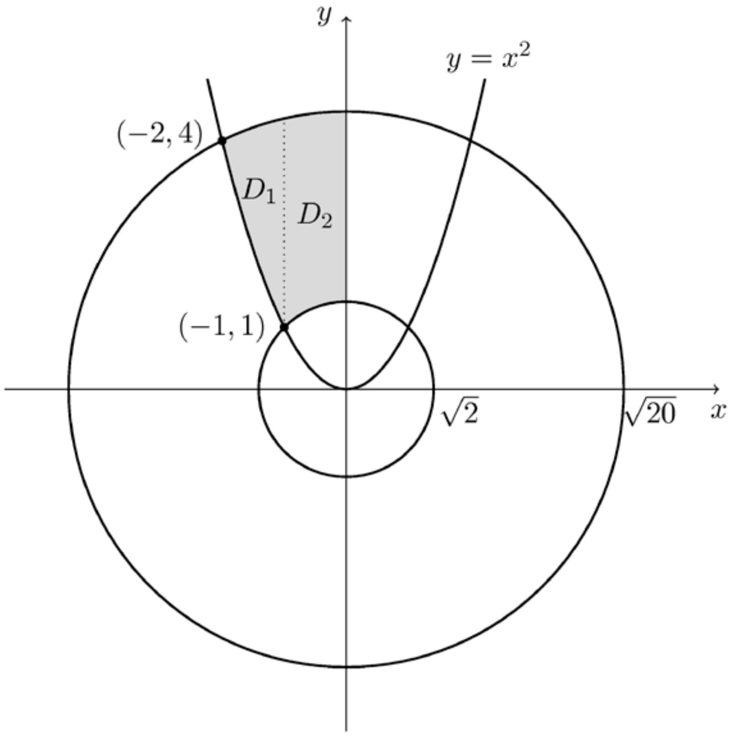
Como $B(0) = 50.000€$, entonces $B(10.000) = 100.000€$.

2.-

Calcular $\iint_D f$, siendo $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \le x^2 + y^2 \le 20, x \le 0, y \ge x^2\right\}$ y $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$.

Solución:

El recinto D viene representado en la figura. Es acotado y regular. La función es continua en el recinto, luego la integral de f en D existe.



Se puede escribir $D = D_1 \cup D_2$ donde

$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \le x^2 + y^2 \le 20, \ x \le -1, \ y \ge x^2\right\}$

$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \le x^2 + y^2 \le 20, \ -1 \le x \le 0, \ y \ge x^2\right\}$

Entonces

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f.$$

Se calculan las dos integrales

$$\iint_{D_1} f = \int_{-2}^{-1}\int_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} \frac{x}{y^2}\, dy\, dx = \int_{-2}^{-1} -\frac{x}{y}\Big]_{x^2}^{\sqrt{20-x^2}} dx = \int_{-2}^{-1}\left(-\frac{x}{\sqrt{20-x^2}} + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \sqrt{20-x^2} + \ln|x|\Big]_{-2}^{-1} = \sqrt{19} - 4 - \ln(2).$$

$$\iint_{D_2} f \quad = \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{20-x^2}} \frac{x}{y^2}\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} -\frac{x}{y}\Bigg]_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{20-x^2}} dx = \int_{-1}^{0}\left(-\frac{x}{\sqrt{20-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)dx$$

$$= \sqrt{20-x^2}-\sqrt{2-x^2}\,\Big]_{-1}^{0} = \sqrt{20}-\sqrt{2}-\sqrt{19}+1.$$

Por tanto, $\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f = \sqrt{20}-\sqrt{2}-\ln(2)-3.$

3.-

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xu^2 + yu = 1 \\ x^3 z + f(yz) = 5, \end{cases}$$

donde $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ cumple $f(0)=3$.

i) ¿Para qué valores de $f'(0)$ el teorema de la función implícita garantiza que el anterior sistema define a *x* e *y* como variables endógenas en torno al punto $(1,0,2,1)$?

ii) ¿Para qué valores de $f'(0)$ un ligero aumento en la variable *u* (manteniendo *z* constante) a partir del punto (1,0,2,1) provocaría un aumento en la variable *y*?

Solución:

i) La función vectorial $F=(F^1,F^2)$ que define el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} F^1(x,y,u,z) = xu^2 + yu - 1 = 0 \\ F^2(x,y,u,z) = x^3 z + f(yz) - 5 = 0 \end{cases}$$

Y el sistema define a *x* e *y* como variables endógenas si se puede definir una función implícita $\varphi(u,z) = \left(\varphi^1(u,z),\varphi^2(u,z)\right) = (x,y)$ en torno al punto (1,0,2,1). Aplicamos el Teorema de la función implícita:

a) $F(1,0,2,1) = (F^1(1,0,2,1),F^2(1,0,2,1)) = (1+0-1,2+3-5) = (0,0)$

b) $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$, por estar formada por funciones polinómicas y $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

c) Finalmente el jacobiano es

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)} = \begin{vmatrix} u^2 & u \\ 3x^2 z & zf'(yz) \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2f'(0) \end{vmatrix} = 2f'(0) - 6.$$

Por tanto, si $f'(0) \neq 3$ el Teorema de la función implícita garantiza que el anterior sistema define a *x* e *y* como variables endógenas en torno al punto (1,0,2,1).

ii) Habrá que calcular la derivada parcial de *y* respecto de *u*. Se tiene en cuenta que si $\varphi(u,z) = (x,y)$ entonces $x = \varphi^1(u,z)$ e $y = \varphi^2(u,z)$, o sea $\dfrac{\partial \varphi^2}{\partial u} = \dfrac{\partial y}{\partial u}$

Se cumple

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial x} & \dfrac{\partial H_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial x} & \dfrac{\partial H_2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} u^2 & 2xu + y \\ 3x^2 z & 0 \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}}{\begin{vmatrix} u^2 & u \\ 3x^2 z & zf'(yz) \end{vmatrix}_{(1,0,2,1)}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2f'(0) \end{vmatrix}} = \frac{12}{2f'(0) - 6}.$$

Y esta derivada será positiva siempre que $f'(0) > 3$ (recordar que $f'(0) \neq 3$).

4.-

Un virus mortal comienza a propagarse entre los peces de un lago con una población inicial de P individuos. Cuando un pez es infectado éste muere inmediatamente, y cada día el virus infecta al 20% de los supervivientes del día anterior. ¿Cuántos días pasarán hasta que la población inicial se reduzca a menos de la mitad?

Solución:

Si llamamos y_t al número de supervivientes en cada momento *t*, entonces:

$$y_0 = P$$
$$y_{t+1} = 0,8y_t.$$

Resolvemos la ecuación en diferencias homogénea: $y_{t+1} - 0,8y_t = 0$. El polinomio característico es: $r - 0,8 = 0$, cuya raíz es $r = 0,8$. La solución general de la ecuación es entonces:

$$y_t = C(0,8)^t, \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

Como $y_0 = P$, entonces, $y_0 = C = P$, y la solución particular de la ecuación es:

$$y_t = P(0,8)^t$$

Por tanto, $y_0 = P$, $y_1 = 0,8P$, $y_2 = 0,64P$, $y_3 = 0,512P$, $y_4 = 0,4096P,\ldots$

Luego, tendrán que pasar 4 días para que la población inicial se reduzca a menos de la mitad.

FEBRERO 2010

1.-

La tasa de habitantes de una ciudad circular de 5 km. de radio depende de su distancia al centro; si dicha distancia es r, la tasa viene dada por la siguiente expresión:

$$P'(r) = \frac{90.000}{(r+1)^2} \text{ personas.}$$

Una empresa dedicada a repartir folletos publicitarios dispone de 45.000 que comienza a repartir desde el centro a todos los habitantes de la ciudad, ¿cuál será el radio de población en el que podrá repartir dichos folletos? ¿Cuántos habitantes tiene dicha ciudad?

Solución:

Si se designa por *k* al radio en el que se pueden repartir los 45000 folletos deberá cumplirse

$$\int_0^k \frac{90.000}{(r+1)^2} dr = 45.000.$$

Entonces:

$$\int_0^k \frac{90.000}{(r+1)^2} dr = -\frac{90.000}{r+1}\Bigg]_0^k = -\frac{90.000}{k+1} + 90.000 = 45.000 \Rightarrow k = 1$$

Luego el radio es 1.

El número de habitantes en la ciudad será

$$\int_0^5 \frac{90.000}{(r+1)^2} dr = -\frac{90.000}{r+1}\Bigg]_0^5 = -\frac{90.000}{6} + 90.000 = 75.000 \text{ habitantes.}$$

2.-

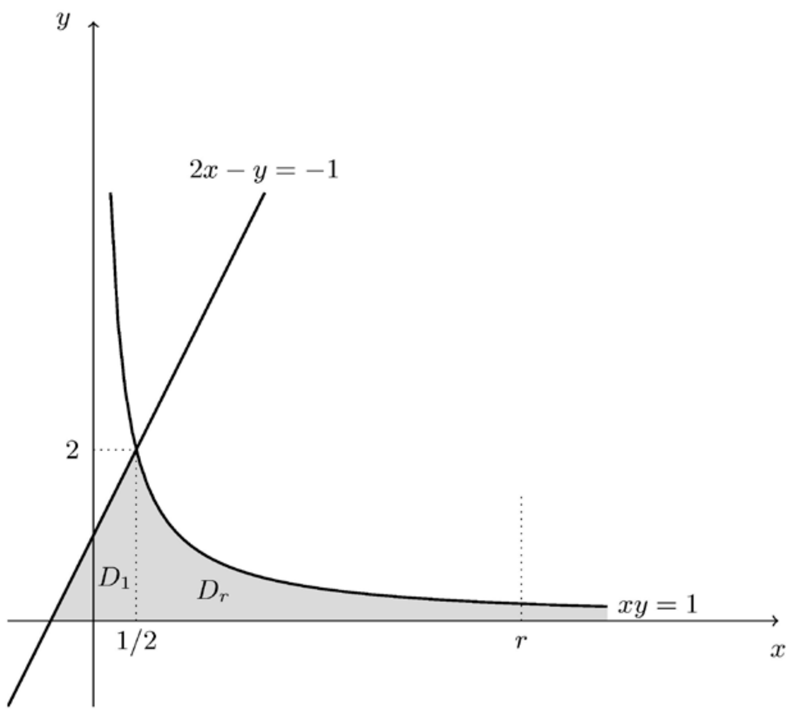
Sean $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, xy\le 1,\ 2x-y\ge -1,\ y\ge 0\}$ y la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos x & x\le \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{x} & x>\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Calcular, si existe, $\iint_D f$.

Solución:

El recinto se representa en el gráfico siguiente:



El recinto D es regular y no acotado. Si llamamos

$$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\le 1,\ 2x-y\ge -1,\ y\ge 0,\ 0\le x\le \frac{1}{2}\right\},$$

$$D_r=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy\le 1,\ 2x-y\ge -1,\ y\ge 0,\ \frac{1}{2}\le x\le r\right\},$$

entonces $D=D_1\cup D_2$, siendo D_2 no acotado, y se cumplirá

$$\iint_D f=\iint_{D_1} f+\lim_{r\to\infty}\iint_{D_r} f$$

si ambas integrales existen.

D_1 es acotado y regular, y $f(x,y)=\cos x$ es continua en D luego

$$\iint_{D_1} f = \int_0^2 \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x\, dx\, dy = \int_0^2 \operatorname{sen} x\Big]_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{y-1}{2}\right)\right) dy = \left(y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{y-1}{2}\right)\right)\Bigg]_0^2$$

$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right) - 2\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Por otra parte $f(x,y)=\dfrac{1}{x}$ es continua y no negativa en D_r, luego

$$\lim_{r\to\infty} \iint_{D_r} f \quad = \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x}\, dy\, dx = \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{y}{x}\Bigg]_0^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \lim_{r\to\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{r\to\infty} -\frac{1}{x}\Bigg]_{\frac{1}{2}}^{r} = \lim_{r\to\infty}\left(-\frac{1}{r}+2\right) = 2.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\iint_D f = 2 + 2\sin\left(\frac{1}{2}\right).$

3.-

Sea el sistema $\begin{cases} x^3 f(y^2+z, z^2) - u^2 = 0 \\ g(x^2-u^3) - y^2u^2 = x^2 \end{cases}$ donde $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y se cumple:

$$f(0,0)=1;\quad f_2(0,0)=1;\quad f_1(0,0)=1,\quad g(0)=1;\quad g'(0)=1.$$

Comprobar que el sistema permite interpretar a z y u como variables endógenas en torno al punto $(1,0,0,1)$. Sea $(z,u)=\varphi(x,y)$ esta función implícita. ¿A qué otras parejas de variables permite el Teorema de la función implícita asegurar que quedan definidas implícitamente alrededor del punto $(1,0,0,1)$?

Para el caso $(z,u)=\varphi(x,y)$, hallar la matriz jacobiana de φ en el (1,0).

Solución:

El sistema lo reescribimos así

$$\left.\begin{array}{l} F^1(x,y,z,u) = x^3 f(y^2+z,z^2) - u^2 = 0 \\ F^2(x,y,z,u) = g(x^2-u^3) - y^2u^2 - x^2 = 0 \end{array}\right\}$$

Y comprobamos las condiciones del Teorema de la función implícita en torno al punto $(1,0,0,1)$.

• F^1 y F^2 son de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^4)$, ya que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

• $F(1,1,1,1) = \left(F^1(1,0,0,1), F^2(1,0,0,1)\right) = (1-1, 1-0-1) = (0,0)$.

• Finalmente se calcula el jacobiano

$$\left|\begin{array}{cc} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{array}\right|_{(1,0,0,1)} = \left|\begin{array}{cc} x^3(f_1(y^2+z,z^2) + f_2(y^2+z,z^2)2z) & -2u \\ 0 & -3u^2 g'(x^2-u^3) - 2y^2u \end{array}\right|_{(1,0,0,1)}$$

$$= \left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{array}\right| = -3 \neq 0.$$

Luego, el sistema $F(x,y,z,u) = (0,0)$ sí permite interpretar a z y u como variables endógenas en torno al punto $(1,0,0,1)$.

Para las demás parejas de variables hay que comprobar si el jacobiano correspondiente no se anula. Por ello calculamos las derivadas parciales para calcular los respectivos jacobianos de cada pareja

$$\frac{\partial F^1}{\partial x}(x,y,z,u) = 3x^2 f\left(y^2+z,z^2\right), \text{ luego } \frac{\partial F^1}{\partial x}(1,0,0,1) = 3.$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x}(x,y,z,u) = 2xg'\left(x^2-u^3\right) - 2x, \text{ luego } \frac{\partial F^2}{\partial x}(1,0,0,1) = 0.$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial y}(x,y,z,u) = x^3 f_1\left(y^2+z,z^2\right)2y, \text{ luego } \frac{\partial F^1}{\partial y}(1,0,0,1) = 0.$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial y}(x,y,z,u) = -2yu^2, \text{ luego } \frac{\partial F^2}{\partial y}(1,0,0,1) = 0.$$

Además antes hemos calculado

$$\frac{\partial F^1}{\partial z}(1,0,0,1) = 1, \ \frac{\partial F^2}{\partial z}(1,0,0,1) = 0, \ \frac{\partial F^1}{\partial u}(1,0,0,1) = -2, \ \frac{\partial F^2}{\partial u}(1,0,0,1) = -3.$$

con todas las componentes continuas al ser f y g funciones con derivadas continuas.

Luego la matriz jacobiana valorada en el punto $(1,0,0,1)$, nos da la matriz

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{pmatrix}_{(1,0,0,1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

La pareja de columnas de la jacobiana que también forma una matriz de determinante no nulo, es la correspondiente a las variables *x* y *u*. Luego Esta pareja también se puede definir como función implícita en tono al punto dado. En los demás casos el jacobiano es nulo y no se puede asegurar nada.

Si escribimos $(z,u)=\varphi(x,y)$ para hallar la jacobiana

$$J_\varphi(1,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0) & \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0) \end{pmatrix}$$

se deben calcular las derivadas parciales.

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial x} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial x} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}} = -3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial y} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial y} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial x} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}} = 0\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial y} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F^1}{\partial z} & \dfrac{\partial F^1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial F^2}{\partial z} & \dfrac{\partial F^2}{\partial u} \end{vmatrix}_{(1,0,0,1)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}} = 0$$

Por tanto: $J_{\varphi}(1,0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.-

Un ahorrador acuerda con una entidad financiera un plan de ahorros. Por una parte él se compromete a ingresar cada año una cantidad. La primera imposición, momento inicial de la operación, es de 2.000 euros. En los años sucesivos el ingreso correspondiente superará en el 2% al del año anterior. Luego, ¿qué cantidad ingresará en el año *t*, si *t*=0 corresponde al primer ingreso?

Por otra parte la entidad le asegura un interés anual (compuesto) del 3%. El cliente no puede disponer del dinero más que al final de cada periodo anual, momento en el que podrá retirar toda la imposición con sus intereses o ingresar la cantidad correspondiente. Si al cabo de *T* años decide retirar todo el ahorro, con sus intereses acumulados, dejando por tanto de ingresar la cantidad correspondiente a esa fecha, ¿a cuánto asciende la cantidad a su disposición?

Solución

La ecuación en diferencias que corresponde a esta situación es

$$y_{t+1} = y_t(1,02)$$

pues la cantidad de cada año es la del anterior aumentada en un 2%.

Esta ecuación reescrita $y_{t+1} - y_t(1,02) = 0$ es homogénea de orden 1. La raíz del polinomio característico es 1,02. La solución general es entonces

$$y_t = C(1,02)^t, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $2000 = y_0 = C(1,02)^0 = C$, obtenemos la cantidad ingresada en el instante t es $y_t = 2000 \cdot (1,02)^t$.

Sea ahora x_t la cantidad que tendría a su disposición si decide retirar su dinero el año *t*. Si en ese momento, *t*, no retira el dinero, tendrá que hacer el ingreso correspondiente: $2000 \cdot (1,02)^t$. La cantidad $x_t + 2000(1,02)^t$ que se acumula entonces en su cuenta, estará un año produciendo intereses al 3%, con lo cual se cumplirá

$$x_{t+1} = \left(x_t + 2000(1,02)^t\right)(1,03),$$

o sea

$$x_{t+1} - 1,03x_t = 2060(1,02)^t.$$

La solución de la homogénea asociada es $C(1,03)^t$.

Una solución particular es de la forma $a(1,02)^t$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$a(1,02)^{t+1} - 1,03a(1,02)^t = 2060(1,02)^t,$$

y evaluando en $t = 0$

$$a(1,02) - 1,03a = 2060 \qquad a = -206000$$

La solución general es entonces

$$x_t = C(1,03)^t - 206000(1,02)^t.$$

Como y_0=0, pues en el momento inicial aún no ha hecho ningún ingreso será *C*=206000, y por lo tanto en el año *T* tendrá a su disposición

$$x_T = 206000\left((1,03)^T - (1,02)^T\right) \text{euros.}$$

JUNIO 2010

1.

Un país de la zona euro, que hasta un cierto momento ($t = 0$) ha tenido superávit, empieza a tener déficit (público), siendo la tasa de variación de ese déficit $D'(t) = e^{\frac{t}{3}}(6t - t^2)$ miles de millones de euros/mes.

Dos meses después de iniciarse la formación de déficit, el país empieza a emitir Deuda Pública, siguiendo exactamente la pauta de formación anterior del déficit, pero con los dos dichos meses de retraso. La emisión de deuda termina, por tanto, dos meses después del momento en que el déficit deja de incrementarse y empieza a decrecer.

¿Cuánta Deuda Pública tendrá que lanzar al mercado ese país en ese periodo de tiempo?

Si el Banco Central Europeo le ha puesto un techo de Deuda de 100.000 millones de euros, ¿el país puede cumplir con sus exigencias?

Solución:

El país acumula déficit cuando la tasa de variación del déficit $D'(t) = e^{\frac{t}{3}}\left(6t - t^2\right)$ es positiva.

Como $e^{\frac{t}{3}}$ siempre es positivo, para que $D'(t) = e^{\frac{t}{3}}\left(6t - t^2\right) \geq 0$, debe ser $(6t - t^2) \geq 0$, o sea $0 \leq t \leq 6$.

El déficit acumulado, en los seis meses en que se produce déficit, es:

$$\int_0^6 e^{\frac{t}{3}}(6t - t^2)dt .$$

Para hacer esta integral, por partes, hallemos primero la primitiva

$$\int e^{\frac{t}{3}}(6t-t^2)\,dt \quad = 3e^{\frac{t}{3}}(6t-t^2)-3\int e^{\frac{t}{3}}(6-2t)\,dt = \left\{\begin{matrix} u=6-2t & du=-2dx \\ dv=e^{\frac{t}{3}}dt & v=3e^{\frac{t}{3}} \end{matrix}\right\}$$

$$= 3e^{\frac{t}{3}}(6t-t^2)-9e^{\frac{t}{3}}(6-2t)+9\int e^{\frac{t}{3}}(-2)\,dt$$

$$= 3e^{\frac{t}{3}}(6t-t^2)-9e^{\frac{t}{3}}(6-2t)-54e^{\frac{t}{3}}$$

$$= e^{\frac{t}{3}}(-3t^2+36t-108).$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\int_0^6 e^{\frac{t}{3}}(6t-t^2)dt = e^{\frac{t}{3}}(-3t^2+36t-108)\Big]_0^6 = 108 \text{ miles de millones de euros.}$$

Como la Deuda se emite según la cuantía del déficit, con un retraso que no influye en su volumen, la Deuda total acumulada será la misma que el déficit producido, es decir 108 miles de millones de euros. Por lo tanto no cumple las exigencias del Banco Central Europeo.

2.

Sea el conjunto $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : 3x^2 \le y+2,\, x^2+y^2 \le 2,\, x \ge -y,\, y \ge 0\right\}$ y la función $f(x,y)=\begin{cases} y, & \text{si } y \ge 1 \\ x, & \text{si } y < 1 \end{cases}$. Calcular $\iint_D f$.

Solución:

El conjunto D está representado en la figura. Es compacto y si escribimos

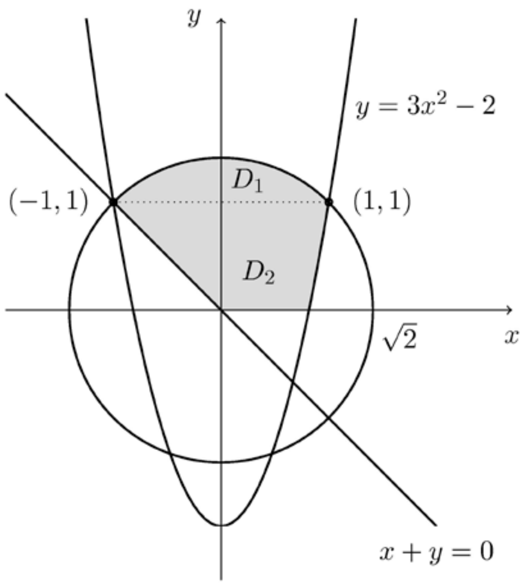
$D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : 3x^2 \le y+2,\, x^2+y^2 \le 2,\, x \ge -y,\, y \ge 1\right\}$

$D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : 3x^2 \le y+2,\, x^2+y^2 \le 2,\, x \ge -y,\, 1 \ge y \ge 0\right\}$

Entonces

$$\iint_D f = \iint_{D_1} f + \iint_{D_2} f$$

Cuando $y \ge 1$, la función es $f(x,y)=y$. La integral correspondiente la será:



$$\iint_{D_1} f = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\Bigg]_{1}^{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2-x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}.$$

Cuando $y \le 1$, la función es $f(x,y)=x$ y la podemos hacer con una sola integral iterada:

$$\iint_{D_2} f = \int_{0}^{1}\int_{-y}^{\sqrt{\frac{y+2}{3}}} x\,dx\,dy = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-y}^{\sqrt{\frac{y+2}{3}}} dy = \int_{0}^{1}\left(\frac{y+2}{6}-\frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{1}{4}.$$

Luego $\displaystyle\iint_{D} f = \frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{12}$.

3.- (8 puntos)

Sea el sistema $\begin{cases} xf(u)+yg(v)=u \\ -xg(v)+yf(u)=v \end{cases}$

donde *f* y *g* son dos funciones reales con derivadas continuas. Además, *f* siempre toma valores estrictamente positivos.

i) ¿En torno a qué puntos (x,y,u,v) puede asegurarse que las variables *x*, *y* son funciones implícitas de *u*, *v*?

ii) Si el punto $(x,y,u,v)=(1,1,2,2)$ verifica el sistema, y además $g(2)=0$ y $f'(2)>1$, ¿qué efecto tendrá sobre las variables endógenas un ligero aumento de la variable u?

Solución:

i) Sean $F^1(x,y,u,v)=xf(u)+yg(v)-u$ y $F^2(x,y,u,v)=-xg(v)+yf(u)-v$.

Entonces el sistema se escribe $\begin{cases} F^1(x,y,u,v)=0 \\ F^2(x,y,u,v)=0 \end{cases}$

Las funciones $F^1(x,y,u,v),\ F^2(x,y,u,v)$ tienen derivadas parciales continuas. La matriz jacobiana que corresponde a este sistema (primera columna-derivadas respecto de x, etc.) es

$$\begin{pmatrix} f(u) & g(v) & xf'(u)-1 & yg'(v) \\ -g(v) & f(u) & yf'(u) & -xg'(v)-1 \end{pmatrix}$$

siendo las derivadas de f,g continuas.

Para aplicar el Teorema de la función implícita y podamos asegurar que pueden despejarse x e y en función de u y v, ha de ser no nulo el jacobiano que corresponde a sus columnas de x e y. se cumple

$$\begin{vmatrix} f(u) & g(v) \\ -g(v) & f(u) \end{vmatrix} = f^2(u)+g^2(v)\neq 0$$

Al ser, para todo u, $f(u)>0$, esta condición se cumple en todos los puntos en que están definidas f,g.

Luego el teorema asegura que x e y son función implícita de u y v, alrededor de todos los PUNTOS EN QUE SE VERIFICA EL SISTEMA DE ECUACIONES:

ii) Para que $(x,y,u,v)=(1,1,2,2)$ verifique el sistema debe ser

$$\begin{cases} f(2)+g(2)=2 \\ -g(2)+f(2)=2 \end{cases}$$

Luego $f(2)=2, g(2)=0$.

En tal caso la matriz jacobiana del sistema en ese punto es

$$\begin{pmatrix} f(2) & g(2) & f'(2)-1 & g'(2) \\ -g(2) & f(2) & f'(2) & -g'(2)-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & f'(2)-1 & g'(2) \\ 0 & 2 & f'(2) & -g'(2)-1 \end{pmatrix}$$

Si $(x,y)=\varphi(u,v)$ alrededor de $(x,y,u,v)=(1,1,2,2)$, entonces las derivadas parciales respecto de u en (2,2) son

$$\frac{\partial x}{\partial u}(2,2)=-\frac{\begin{vmatrix} f´(2)-1 & 0 \\ f´(2) & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1-f´(2)}{2}<0$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(2,2)=-\frac{\begin{vmatrix} 2 & f´(2)-1 \\ 0 & f´(2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-f´(2)}{2}<0$$

ya que $f´(2)>1$. Por tanto al aumentar la variable endógena *u*, ambas variables exógenas x e y disminuirán.

4.

En una máquina tragaperras de un Casino jugar es gratis, en principio. En caso de que ya en el primer intento (*t*=0) la máquina conceda premio, este es de 75 euros. Si no es así y da premio al segundo intento (*t*=1), dicho premio es de 100 euros.

Pero, a partir de la tercera jugada (*t*=2) el premio lo calcula la máquina de la siguiente manera: será cuatro veces la ganancia que hubiese obtenido el jugador en caso de haber tenido premio dos jugadas antes. Y un nuevo pero: para cobrar dicho premio el jugador tiene que meter en la máquina tantas veces 90 euros como veces lo ha intentado sin obtener premio. (En el momento en que la máquina concede premio se acaba el proceso.)

¿Cuál es la ganancia del jugador si tiene premio en la jugada *t*?

¿En qué momento es una imprudencia seguir jugando en esa máquina?

Solución:

En general, en la jugada $t+2$ el premio que da la máquina es $4y_t$, pero hay que meter $90(t+2)$ euros para cobrarlo.

La ecuación que corresponde es

$$y_{t+2}=4y_t-90(t+2).$$

Las condiciones iniciales son $y_0 = 75$ e $y_1 = 100$.

La homogénea asociada será $y_{t+2} - 4y_t = 0$. el polinomio característico $r^2 - 4$, y sus raíces 2 y -2. La solución general de la homogénea

$$y_t = C_1 2^t + C_2(-2)^t.$$

Como el término independiente de la completa es un polinomio de grado 1, y 1 no es solución de la homogénea, tendrá una solución particular de la forma $y_t = a \cdot t + b$. Sustituyendo en la ecuación

$$a(t+2) + b - 4(at+b) = -90(t+2),$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} a - 4a = -90 \\ 2a + b - 4b = -180 \end{array}\right\}.$$

Luego $a = 30,$ y $b = 80$. La solución general es

$$C_1 2^t + C_2(-2)^t - 30t + 80.$$

Ahora bien como

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = 75 = C_1 + C_2 + 80 \\ y_1 = 100 = 2C_1 - 2C_2 + 30 + 80 \end{array}\right\},$$

se obtiene $C_1 = -5$ y $C_2 = 0$. Finalmente la solución es

$$y_t = (-5)2^t - 30t + 80.$$

Para $t = 6$, se obtiene $y_6 = (-5)2^6 + 30 \times 6 + 80 = -320 + 180 + 80 = -60$, es decir, el jugador pierde dinero.