

eman ta zabal zazu



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

DOKTORETZA-TESIA

Zurruntasun-Indar metodoaren analisisa eta
bere aplikazioa laminatu konpositetan

Itziar Adarraga Usabiaga

Donostia - San Sebastián, 2015eko apirila



ESKER ANITZ

Faustino Mujika Doktoreari, doktoretza-tesi hau Ingeniaritza Mekanikako Sailean burutzeko aukera eskaintzeagatik.

Aitari eta Amari, beren iritzia esaten, askotan arrazoia ez ematen, beti ondoan izateagatik.

Jon Mikel, Ainara eta Aneri, urte hauetan izandako pazientziagatik.

Ainhoa Arrese-ri bere laguntzagatik eta orohar, Ingeniaritza Mekanikoa Saileko lankide guztiei.

Modu batean edo bestean lagundu didaten guztiei.



LABURPENA

Ikerkuntza lan honetan, tentsio eta desplazamenduetan oinarritutako elementu finituen metodoak aztertu dira eta laminatu konpositeen analisisian aplikatu dira.

Elementu finitu metodoak desplazamenduetan oinarrituta daude eta honen arrazoia Elementu Finituen historian aurkitzen da. Egitura diskretuen analisisian bi kalkulu metodo sortu ziren: Desplazamendu eta indar metodoak. Indar metodoan ezezagun nagusiak indarrak dira eta oreka estatikoan mantentzeko indar erredundanteen aukeraketan oinarritzen da. Desplazamendu metodoan, ezezagun nagusiak desplazamenduak dira. Desplazamendu metodoaren formulazioa programatzeko errazagoa zenez, konputagailuak sortu zirenean indar metodoa desagertu zen.

Solido elastikoaren analisisian ere oreka eta bateragarritasunaren ekuazioak tentsioetan eta desplazamenduetan ezar daitezke, sistemaren ezezagunak desplazamendu edo tentsioak direnaren arabera. Bestalde, Lan Birtualaren Printzipiotik (PVW) solidoaren oreka ekuazioak deduzitu dira, eta Lan Birtual Osagarriaren Printzipiotik (PCVW) bateragarritasun ekuazioak.

Elementu finituen metodoetan, Zurruntasun metodoa (SM) aztertu da. Metodo hau gehien erabiltzen dena da eta PVW oinarritzen da. Bestalde, Patnaik-ek garatutako Indar Metodo Integratua (IFM) eta Indar Metodo Integratu Duala (IFMD) aztertu dira. Bi metodo hauek PVW eta PCVW printzipioetan oinarritzen dira. Bi metodo hauen formulazioak deformazio orokortuen kontzeptuan oinarrituta daude eta elementu finituetan, kontzeptu hori ez da argi ikusten. Lan honetan, IFMD

metodoaren ekuazio nagusiak kalkulatzeko bide zuzen bat aurkeztu da, PVW eta PCVW printzipioen aplikaziotik, eta deformazio orokortuak erabili gabe.

Bestalde, Pianek garatutako metodo hibridoak (HM) aztertu dira. Hasieran, energia osagarri minimoaren printzipioan oinarrituta zeunden, eta gero, elementu hauen formulazioa Hellinger-Reissnerren printzipioa aplikatuz garatu zuen, tentsio eta desplazamendu eremuak independenteak suposatuz. IFMD metodoa eta Pian-en HM metodoak baliokideak direla frogatu da.

HM eta IFMD metodoetan, elementuaren malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzek konputazio kostua handia du. Arazo hori saihesteko, Zhang et al.-ek HM metodoetan proposatutako ortonormalizazio metodoa IFMD metodoan aplikatu da mintz-elementu anisotropoaren malgutasun matrizea diagonalizatzeko. Bi metodo hauetan PVW eta PCVW printzipioak inposatuta daudela adierazteko, Zurruntasun Indar metodoa (SFM) deituko zaio, honen formulazioa tentsioetan eta desplazamenduetan oinarrituta baitago.

Azkenik, SFM metodoaren aplikazioa norabide bakarreko laminatuak aztertu da, eta horretarako, mintz eta plaka elementuak formulatu dira laminatu ortotropoak eta anisotropoak suposatuz:

1. **SFM metodoaren aplikazioa Mintz-elementuetan.** Mintz-elementuaren oreka eta malgutasun matrizeak kalkulatu ondoren, norabide bakarreko konpositeekin bi adibide analizatu dira eta SM metodoarekin eta hurbilketa analitikoekin konparatu dira: Hegal-habe ortotropoa makurduran eta trakzio zeharraren saiakuntza.
2. **SFM metodoaren aplikazioa plaka elementu laukizuzenean.** Plaka elementu laukizuzenaren oreka eta malgutasun matrizeak kalkulatu dira. Ondoren, norabide bakarreko hiru puntuko makurdura zeharraren analisi elastiko eta lineala aztertu da. Saiakuntza hau aukeratu da honen emaitza esperimentalak, analitikoak eta numerikoak aurretik ezagutzen direlako. SFM metodoaren bitartez plaka elementua formulatu ondoren, SFM eta SM metodoekin lortutako emaitzak konparatu dira.

AURKIBIDEA

1 SARRERA	1
1.1 ELEMENTU FINITUEN HISTORIA	1
1.2 DESPLAZAMENDU ETA INDAR METODOAK	4
1.3 MATERIAL KONPOSITEAK	6
1.3.1 AZALPEN OROKORRA	6
1.3.2 LAMINATU KONPOSITEAK	8
1.3.3 LAMINATU KONPOSITEEN TEORIAK	9
1.4 TESIAREN HELBURUAK	10
1.5 ERREFERENTZIAK	11
2 SOLIDO ELASTIKOAREN ANALISIA	15
2.1 SARRERA	15
2.2 TENTSIO EGOERA	15
2.2.1 OREKA EKUAZIOAK	15
2.2.2 TENTSIO BEKTOREAREN OSAGAIK. MUGALDEKO BALDINTZAK	17
2.3 DEFORMAZIOAK	20
2.3.1 ELEMENTU DIFERENTZIALAREN ALDAKETAK	20
2.3.2 BATERAGARRITASUNAREN EKUAZIOAK	25
2.4 TENTSIO-DEFORMAZIOEN ARTEKO ERLAZIOAK	27
2.4.1 ORTOTROPIA	29

2.4.2	KONSTANTE MATEMATIKO ETA INGENIARITZAKOEN ARTEKO ERLAZIOAK	30
2.4.3	MATERIAL ORTOTROPOA TENTSIO EGOERA LAUEAN	34
2.5	PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDU OROKORRA	35
2.5.1	DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO FORMULAZIOA.	35
2.5.2	TENTSIOETAN OINARRITUTAKO FORMULAZIOA	37
2.6	LAN BIRTUALEEN PRINTZIPIOAK	38
2.6.1	SARRERA	38
2.6.2	LAN BIRTUALAREN PRINTZIPIOA	38
2.6.3	LAN BIRTUAL OSAGARRIAREN PRINTZIPIOA	39
2.7	ERREFERENTZIAK	41
3	LAMINATU KONPOSITEEN ANALISIA	43
3.1	SARRERA	43
3.2	NORABIDE BAKARREKO LAMINAREN PORTAERA MEKANIKOA	44
3.2.1	TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN TRANSFORMAZIOAK	44
3.2.2	TENTSIO LAU OROKORTUA	49
3.3	PLAKA LAMINATUEN TEORIA KLASIKOA	52
3.3.1	SARRERA	52
3.3.2	LAMINA BATEN TENTSIO-DEFORMAZIO ERLAZIOAK	55
3.3.3	INDAR ETA MOMENTU ERRESULTANTEAK	56
3.3.4	LAMINATUAREN ZURRUNTASUN ETA MALGUTASUN KOEFIZIENTEAK	57
3.4	ERREFERENTZIAK	60
4	DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO ELEMENTU FINITUAK	61
4.1	SARRERA	61
4.2	SISTEMA DISKRETUEN KALKULU MATRIZIALA	62
4.2.1	BARRAZ OSATUTAKO EGITUREN ANALISIA	62
4.2.2	BARRA BATEN ZURRUNTASUN MATRIZEA KOORDENATU GLOBALETAN, $[K^{ij}]_G$	65
4.2.3	EGITURAREN ZURRUNTASUN MATRIZEA. MATRIZEEN MUNTAKETA PROZEDURA	66
4.3	ZURRUNTASUN METODOAREN (SM) FORMULAZIO OROKORRA	69
4.4	DESPLAZAMENDUEN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK	71

4.4.1	BARRA ELEMENTUAK: LAGRANGE INTERPOLAZIO FUNTZIOAK	71
4.4.2	HABE ELEMENTUAK: HERMITE INTERPOLAZIO FUNTZIOAK	76
4.4.3	LAU NODOKO ELEMENTU LAUKIZUZENAREN INTERPOLAZIO FUNTZIO LINEALAK	78
4.4.4	PLAKA LAUKIZUZENAREN INTERPOLAZIO FUNTZIO LINEALAK	80
4.5	KONBERGENTZIA IRIZPIDEAK	81
4.6	ERREFERENTZIAK	83
5	TENTSIOETAN ETA DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO ELEMENTU FINITUAK	85
5.1	SARRERA	85
5.2	INDARREN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK	86
5.3	INDAR METODO INTEGRATUA (IFM)	88
5.3.1	OREKA EKUAZIOAK	88
5.3.2	DESPLAZAMENDU-DEFORMAZIO OROKORTUEN ERLAZIOA	90
5.3.3	BATERAGARRITASUN BALDINTZAK	92
5.3.4	INDAR - DEFORMAZIO OROKORTUEN ERLAZIOA	92
5.3.5	IFM METODOAREN APLIKAZIOA EGITURA DISKRETOETAN	94
5.4	INDAR METODO INTEGRATU DUALA (IFMD)	98
5.4.1	METODOAREN FORMULAZIOA	98
5.4.2	IFMD METODOAREN APLIKAZIOA EGITURA DISKRETOETAN	100
5.5	IFMD METODOAREN EKUAZIO NAGUSIAK LORTZEKO BIDE ZUZENA	102
5.6	METODO HIBRIDOAK	105
5.6.1	SARRERA	105
5.6.2	FUNTZIONALAREN FORMULAZIOA	106
5.7	IFMD ETA HM METODOEN ARTEKO BALIOKIDETASUNA	108
5.8	MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIO – METODOA	110
5.8.1	TENTSIO MODU BALIOKIDEAK	110
5.8.2	DIADONALIZAZIO METODOA	112
5.9	ZURRUNTASUN-INDAR METODOA (SFM)	114
5.10	ONDORIOAK	114
5.11	ERREFERENTZIAK	115
6	SFM METODOAREN APLIKAZIOA MINTZ ELEMENTU LAUKIZUZENEAN	119

6.1	SARRERA	119
6.2	OREKA MATRIZEA [E^e]	120
6.3	MALGUTASUN MATRIZEA [G^e]	122
6.4	ZURRUNTASUN MATRIZEA	123
6.5	MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIO-METODOA	124
6.5.1	OREKA MATRIZEAREN KALKULUA TENTSIO MODU ORTONORMALEAN	124
6.5.2	DIAGONALIZAZIO METODOAREN APLIKAZIOA MINTZ-ELEMENTU ANISOTROPOAN	126
6.5.3	KONPUTAZIO KOSTUA	129
6.6	HEGAL-HABE BATEN ANALISIA MATERIAL ORTOTROPOAN	130
6.7	TRAKZIO ZEIHARRAREN SAIKUNTZA. MATERIAL ANISOTROPOA	135
6.8	LABURPENA ETA ONDORIOAK	139
6.9	ERREFERENTZIAK	140
7	SFM METODOAREN APLIKAZIOA PLAKA ELEMENTU LAUKIZUZENEAN	143
7.1	SARRERA	143
7.2	OREKA MATRIZEA	145
7.3	MALGUTASUN MATRIZEA, [G^e].	148
7.4	ZURRUNTASUN MATRIZEA, [K].	149
7.5	EREDU ANALITIKOA	151
7.6	NORABIDE BAKARREKO KONPOSITEA HIRU PUNTUKO MAKURDURA ZEIHARREAN	153
7.6.1	GEOMETRIA ETA PROPIETATEAK	153
7.6.2	KONPARAKETA AURREKO EMAITZA ANALITIKO ETA NUMERIKOEKIN	154
7.7	ONDORIOAK	160
7.8	ERREFERENTZIAK	161
8	ONDORIO OROKORRAK	163
9	AURRERA BEGIRA	165

LABURDURA ETA SINBOLOAK

ESLT	Geruza Bakarra Baliokideen Teoriak
LWT	Geruzaz Geruzako Teoriak
CLPT	Plaka laminatuen teoria klasikoak
FSDT	Lehen Mailako Deformazio Teoria
HOT	Goi Mailako Teoriak
V	Gorputz deformagarriaren bolumena
S	Gorputz deformagarriaren mugaldea
S_l	Gorputz deformagarrian, desplazamendu inposatuak dituen mugaldea
S_2	Gorputz deformagarrian, indar inposatuak dituen mugaldea
B_i	Solido elastikoan aplikatutako bolumen indarrak
T_i	Solido elastikoan aplikatutako gainazal indarrak
σ_{ii}	Tentsioen osagaiak normala i norabidean
τ_{ij}	Zeharkako tentsioa i planoan eta j norabidean
ε_{ii}	Deformazio normala i norabidean
γ_{ij}	Deformazio tangenziala ij planoan
E_i	Elastikotasun modulua i norabidean
ν_{ij}	Poisson koefizienteak i eta j norabidetan
G_{ij}	Ebakidura modulua ij planoan
Q_{ij}	Materialaren zurruntasun murriztuaren koefizienteak
u, v, w	Puntu baten desplazamenduaren osagaiak
$\{u\}$	Elementuaren edozein puntutako desplazamenduen bektorea

θ	Zuntzen orientazio angelua;
$[\]_{Oxy}$	Matrizea Oxy erreferentzia sistemarekiko
$\{ \}_{Oxy}$	Bektorea Oxy erreferentzia sistemarekiko
$[\]_{O12}$	Matrizea O12 laminaren erreferentzia sistemarekiko
$\{ \}_{O12}$	Bektorea O12 laminaren erreferentzia sistemarekiko
L'	probetaren luzera
t	Laminatuaren lodiera
$[A], [B]$ eta $[D]$	Laminatuaren zurruntasun matrizeak
$[a],[b],[c]$ eta $[d]$	Laminatuaren malgutasun matrizeak
δ	Bariazio- eragilea, aldaketa birtual batek eragiten duen funtzio baten bariazioa adierazten duena
$\{ \bar{T} \}, \bar{T}$	Tentsio bektorea mugaldeko gainazalean
$\{ n \}, \bar{n}$	Plano batekiko bektore normala
$\{ u \}, \bar{u}$	Norabide baten bektore zuzentzailea
$[R]$	Bektoreen biraketa matrizea
$[T_0],[T_{-0}]$	Tentsioen transformazio matrizea
$\{ N_x, N_y, N_s \}$	Elementuaren edozein puntutako luzera unitateko indarren bektorea
$\{ M_x, M_y, M_s \}$	Elementuaren edozein puntutako luzera unitateko momentuen bektorea
I	Inertzia momentua
M	Momentu makurtzailea
x, y, z	Erreferentzi sistemaren koordenatuak
ξ, η	Elementu finitu plano baten koordenatu naturalak
x_0, y_0	Koordenatu normalizatuak
l	$\cos \theta$
n	$\sin \theta$
τ_s	Laminatuaren plano-barneko tentsio ebakitzzaileak
σ_x, σ_y	Laminatuaren plano-barneko tentsio normalak
τ_{yz}, τ_{zx}	Laminatuaren plano-kanpoko tentsio ebakitzzaileak
ϵ_x, ϵ_y	Laminatuaren plano-barneko deformazio normalak
γ_s	Laminatuaren plano-barneko deformazio tangentialak
γ_{yz}, γ_{zx}	Laminatuaren plano-kanpoko deformazio tangentialak
c	Argia-zabalera erlazioa
g	Argia-luzera erlazioa
K_x, K_y	Makurdurari dagozkion kurbadurak

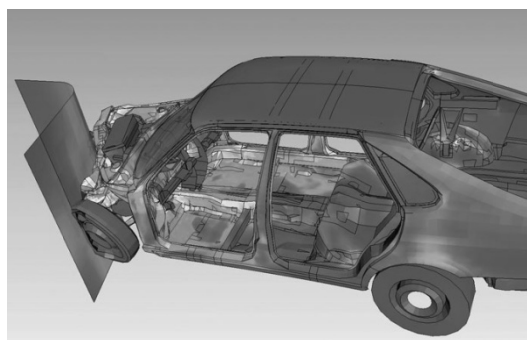
κ_s	Bihurdurari dagokion kurbadura
A, B, C, D	Probetaren simetria planoen araberako zatiak eta beren erpinak
w_{M1}	A eta D zatien desplazamendu eremua deslotzea gertatzen denean
w_{M2}	B eta C zatien desplazamendu eremua deslotzea gertatzen denean
k	Deslotzea gertatzen ez deneko eta gertatzen deneko momentu bihurtzaileen arteko erlazioa
$[K]$	Zurruntasun matrizea
$\{a^i\}$	Nodoetako desplazamenduen bektorea
$\{P^i\}$	Kanpo indarren bektorea
$[K]$	Zurruntasun matrizea
$\{F^j\}$	Tentsio parametroen bektorea edo indar independenteen bektorea
IE	Barne energia
W	Kanpo indarren lana
$\{\beta^j\}$	Deformazio orokortuen bektorea
$[G]$	Malgutasun matrizea
$[E]$	Oreka matrizea
$[^e], \{^e\}$	Elementu baten matrizeak eta bektoreak
FDR	Indar - Deformazio orokortuen erlazioa
DDR	Deformazio orokortu - Desplazamenduen erlazioa
$[Y]$	Indarren interpolazio funtzioen matrizea
$[N]$	Desplazamenduen interpolazio funtzioen matrizea
$[L]$	Eragile diferentzialen matrizea
$[B]$	Desplazamendu – Deformazio matrizea
U_e	Deformazio energia
$[S]$	Materialaren malgutasun koefizienteen matrizea
$[C]$	Materialaren zurruntasun koefizienteen matrizea
$\{\varepsilon\}$	Deformazio eremuaren bektorea
$\{\sigma\}$	Tentsio eremuaren bektorea
$[T]$	Metodo hibridoetan, eragin matrizea



SARRERA

1.1 ELEMENTU FINITUEN HISTORIA

Elementu finituen metodoa (*Finite Element Method*, FEM) oso tresna garrantzitsua da duela zenbait urte ebazterik ez zeuden problema konplexuen analisia egiteko. Simulazioaren arloan, adibidez, zikloien ibilbidea aurreikusteko, ordenagailuz auto-istripu bat simulatzeko edo hegazkin baten fuselajea diseinatzeko, tresna oso garrantzitsua bilakatu da. Ingeniaritzan eta industria diseinuan, FEM hainbat arlotan erabiltzen da: Egituren kalkulan, beroaren transferentzian, jariakinen fluxuan eta potentzial elektromagnetikoan, besteak beste.



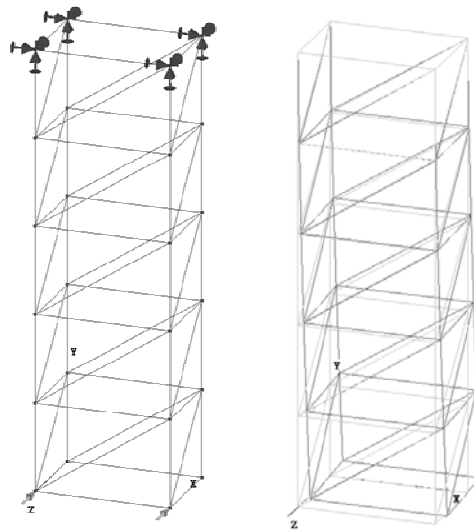
1.1 Irudia. Auto-istripu baten simulazioa

FEM metodoan problema erreala diskretizatu egiten da, hau da, portaera ezagutu daitekeen osagaietan banatzen da. Diskretizazioaren kontzeptua antzinetik ezagutzen

da. Egiptoarrek diskretizazioa erabiltzen zuten piramideen bolumena kalkulatzeko. Arquimedesek (287-212 K.A) metodo bera erabiliz solido ezberdinen bolumena eta azalera kalkulatu zituen.

Sistema diskretuetan, osagai kopuru finitu baten bitartez sistema errealaren modelo egokia lortzen da. Sistema jarraituetan, berriz, sistema errealaren modelo egiteko elementu kopurua infinitua denez, ezin da numerikoki soluzio zehatza lortu. Elementu kopuru finituan diskretizatzean modelo hurbildua lortzen da [1].

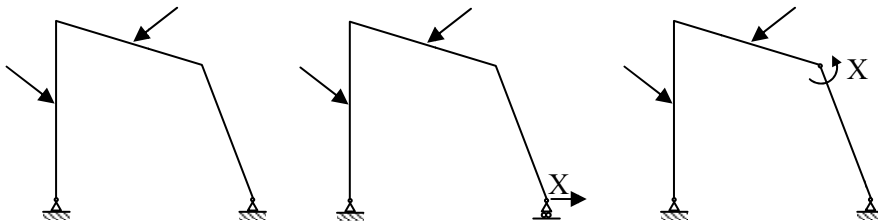
Hasieran, FEM metodoa egituren kalkularen eremuan garatu zen. 1940an McHenry-k [2] eremu jarraituaren zati txikien ordez barra simple elastikoak jarri, problemaren ebazpen oso egokiak lortzen zirela frogatu zuen. 1943an Courant-ek [3], bariazioaren kontzeptua barneratuz tentsioak kalkulatu zituen eta interpolazio funtzioak erabiliz emaitza numeriko hurbilduak lortu zituen.



1.1 Irudia. Egitura diskretuen analisia

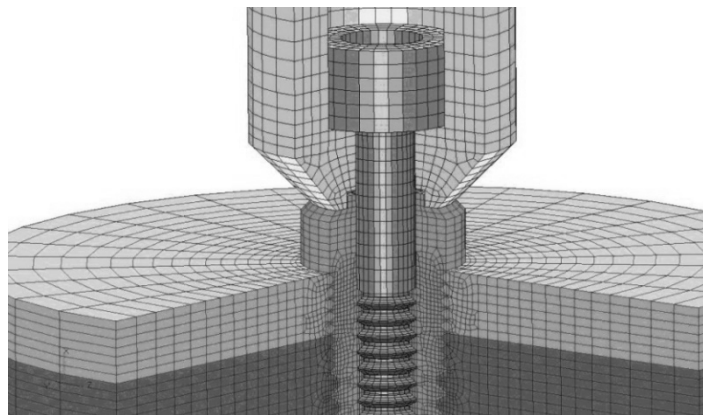
1947an, Levy-k [4] Indar Metodoaren (*Force Method*, FM) formulazio matriziala lehenengo aldiz garatu zuen. FM metodoan indarrak dira ezezagun nagusiak [5-7] eta sistema oreka estatikoan mantentzeko beharrezkoak ez diren indar erredundanteak aukeratu behar dira. Hauek kalkulatzeko, oreka eta bateragarritasun baldintzak inposatu behar dira, hau da, desplazamendu bateragarriak sortzen dituzten indar

erredundanteak aukeratu eta kalkulatu behar dira. FM metodoan indar erredundanteen modelo egokia aukeratzea funtsezkoa da [8].



1.2 Irudia. Indar metodoan, a/ Egitura hiperstatikoa; b/ eta c/Egituraren ezezagun hiperstatikoak aukeratzeko bide desberdinak.

1953an, Levy-k [9] indar erredundanteen analisia saihesteko Zurruntasun Metodoa (*Stiffness Method*, SM) proposatu zuen. Ebazteko prozedura oso neketsua zenez metodo honen baliagarritasuna ez zen ikusi konputagailuak agertu arte. SM metodoan kalkuluak sistematizatzeko prozedura eta konputazio kostua oso egokiak ziren. FM metodoan, berriz, programatzeko eragozpenak hasieratik ikusi ziren, hiperstatikotasun gradu handiko egituretan batez ere. 1956an, Turner et al.-ek [10], SM erabiliz barra-elementuak eta plaka elementu triangeluarrak lehenengo aldiz formulatu zituzten. 1960an, konputagailuen garapenarekin batera FM metodoa desagertzen hasi zen [8]. Clough-ek [11], elementu triangeluarren eta laukizuzenen analisian, FEM gaur egun ezagutzen den moduan formulatu zuen eta elementu finitu hitza lehenengo aldiz erabili zuen. Przemieniecki-k [12] FEM metodoaren aplikazioa egituren analisian aurkeztu zuen eta Zienkiewicz-ek [13] FEM metodoa orokortu zuen, edozein problematan aplikatu ahal izateko.



1.3 Irudia. Eremu jarraituen diskretizazioa

1.2 DESPLAZAMENDU ETA INDAR METODOAK

FEM metodoan bi formulazio desberdin erabil daitezke: Desplazamendu eta Indar metodoak, problemaren ezezagun nagusiak desplazamenduak edo barne indarrak direnaren arabera. Hauek eremu bakarreko formulazioak dira, hauen ekuazio nagusietan desplazamenduak edo indarrak bakarrik agertzen baitira.

FEM metodoaren bitartez egindako analisisietan, SM metodoa solidoen eta egituren mekanikan maiz erabiltzen den kalkuluko prozedura da [14]. Metodo honetan ezezagun nagusiak desplazamenduak dira eta hauek kalkulatzeko, elementu bakoitzaren oreka ekuazioak aplikatzen ditu, nodoetan aplikatutako kanpoko kargak eta nodo hauetan sortutako desplazamenduak erlazionatuz. Formulazio honen deskribapena 4.3 atalean aztertuko da.

FM metodo klasikoa programatzeko SM baino zailagoa denez, ia desagertu egin da. Bestalde, indar erredundanterik erabiltzen ez dituen beste indar metodoa Indar Metodo Integratua (*Integrated Force Method*, IFM) da. 1973an, Patnaik-ek metodo honen aplikazioa egitura diskretuetan argitaratu zuen [15,16]. Lan horretan, oreka ekuazioak ez ezik, bateragarritasunaren baldintzak ere erabiltzeko ideia agertzen da. Metodo honetan ezezagun nagusiak barne indarrak dira. 1986an, Airyren eta Beltrami-Mitchellen formulazioetan oinarritutako FM eta IFM metodoen arteko konparaketa burutu zuen [17]. Urte berean, IFM metodoaren bariazio funtzionala garatu zuen [18], Lan Birtualaren Printzipioa (*Principle of Virtual Work*, PVW) eta Lan Birtual Osagarriaren Printzipioa (*Principle of Complementary Virtual Work*, PCVW) oinarrituta dagoena. Elastikotasunean, Patnaik et al.-ek printzipio hauek aplikatu zituzten Beltrami-Mitchell formulazioa ezartzeko eta azkenik, IFM metodoaren ekuazioak sistema jarraituetan lortu zituzten [19,20].

Patnaik et al.-ek bateragarritasun ekuazioak lortzeko bide sistematiko bat garatu zuten, sistema jarraitu eta diskretuetan aplikatuta [21,22] eta ondoren, IFM metodoaren formulazioa elementu finituen metodoan aplikatu zuten [23]. Bi [24] eta hiru [25] dimentsioko hainbat elementuren gobernu matrizeak sortu zituzten, material isotropoa suposatuz.

Patnaik-ek Indar Metodo Integratu Duala (*Dual Integrated Force Method*, IFMD) garatu zuen [26] IFM metodoaren formulazio berdina erabiliz, baina SM metodoaren

ekuazio nagusiaren egiturarekin, hau da, ezezagun nagusiak desplazamenduak izanik. IFM eta IFMD metodoek formulazio berdina dute eta emaitza berdinak lortzen dira, bai tentsioetan, bai desplazamenduetan.

Bestalde, Fraeijs de Veubeke-k SM eta FM metodoak emaitza errealaren goiko eta beheko limiteak direla ikusi zuen [27]. SM metodoa desplazamendu-eremu bateragarri baten hipotesian oinarrituta dago. PVW printzipioaren aplikazioak oreka baldintzak betetzen direla bermatzen du. Sistemaren desplazamendu onargarri guztiak sartuta ez daudenez, sistemak egoera errealean baino eragozpen gehiago ditu, lortutako emaitza zurrunezia da eta bere energia beheko limitea izango da [28]. Bestalde, Indar Metodoa tentsio eremu orekatu baten hipotesian oinarrituta dago. PCVW printzipioaren aplikazioak bateragarritasunaren ekuazioak betetzen direla bermatzen du. Sistemaren tentsio onargarri guztiak sartuta ez daudenez, sistemak egoera errealean baino eragozpen gutxiago ditu, sistema malguagoa da eta bere energia goiko limitea izango da. Ondorioz, Fraeijs de Veubeke-k analisi dual bat proposatu zuen, desplazamendu eta oreka moduen txandakako erabilpenean oinarrituta, lortutako goiko eta beheko limiteekin konparatuz emaitza errealarekin konbergentziaren estimazio kuantitatiboa lortzeko.

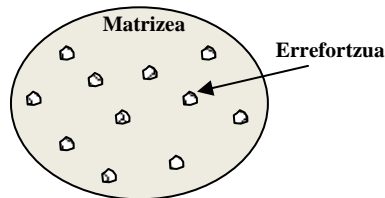
1964. urtean, eremu anitzeko elementuak sortu ziren: Elementu Misto (*Mixed Finite Element Method*, MFEM) eta hibridoak (*Hybrid Finite element method*, HFEM). Urte horretan, Pian-ek tentsio elementu hibridoak lehenengo aldiz formulatu zituen [29]. Hasieran, elementu hibridoaren formulazioa Energia Osagarri Egonkorraren Printzipioan oinarrituta zegoen [30], eta gero, Hellinger- Reissner-en Printzipioan oinarritu zen [31], tentsio eta desplazamendu eremu independenteak suposatuz. Elementu mistoa eremu anitzeko funtzionalen bitartez formulatuta dagoen elementua da eta hauen ekuazio nagusietan aldagai bat baino gehiago agertzen da. Elementu hibridoa, berriz, eremu anitzeko funtzionalen bitartez formulatuta dagoen elementua da, baina lortutako ekuazio nagusian ezezagun bakarrak nodoetako desplazamenduak dira [29].

Azken urteotan, Elementu Finituen analisisian IFM metodoaren aplikazio berriak argitaratu dira [32-37]. Lan hauetan IFM metodoaren bitartez plaka mehe - elementu berriak formulatu dira material isotropoetan, oreka eta malgutasun matrizeak kalkulatu ondoren.

1.3 MATERIAL KONPOSITEAK

1.3.1 AZALPEN OROKORRA

Material konposita honela defini daiteke: eskala makroskopikoan 2 fasez edo gehiagoz osatutako materiala, bere ezaugarri mekaniko espezifikoak osagaiak banaka dituztenak baino hobek izanik [38,39]. Faseetako bat oro har ez jarraitua, zurrunagoa eta erresistenteagoa izaten da eta errefortzua deitzen zaio. Bestea malguagoa da eta matrizea deitzen zaio (1.4 Irudia).



1.4 Irudia. Konpositen faseak

Zuntz errefortzuak zurruntasuna eta erresistentzia handiak igortzen ditu zuntzen norabidean. Matrizeak zuntzei kanpoko karga igortzeaz gain babesa eta sostengua ematen die eta zuntzen arteko tentsio igortze lokala ahalbideratzen du.

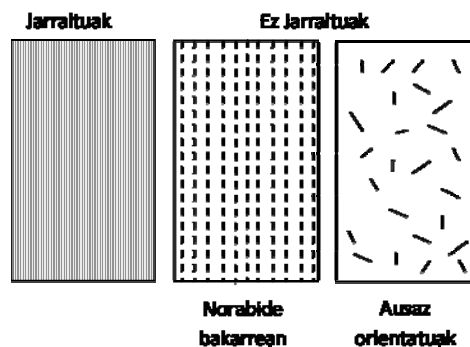
Material konpositeak heterogeneoak dira, matrizearen eta zuntzen propietateak desberdinak baitira. Hala ere, makro-mekanikak materiala homogeneoa suposatzen du, hau da, zuntzen eta matrizearen arteko desberdintasuna kontutan hartu gabe, materialak bere osotasunean duen portaera mekanikoa analizatzen du [40].

Material konpositen propietateak faktore hauen menpe daude: Matrize eta errefortzuaren propietateak, errefortzuaren kantitatea, errefortzuaren orientazioa eta konpositaren ekoizpen metodoa. Errefortzuaren arabera, konpositeak honela sailka daitezke [41]:

1. Zuntzez osatutako konpositeak.

Material hauek ezagunenak dira propietate mekaniko oso altuak ematen dituztelako. Zuntzak, luzera-diametro erlazioa oso handia duten materialak dira eta bere egitura

anisotropoa da. Orokorrean matrizeak poliester edo epoxi erretxinak izaten dira. Material hauen propietate mekanikoak oso anisotropoak izaten dira eta zuntzen matrizean kokatzeko moduaren arabera asko aldatzen dira. Zuntzak jarraituak edo ez jarraituak izan daitezke. Zuntzak ez jarraituak norabide bakarrean edo ausaz jar daitezke (1.5 Irudia).



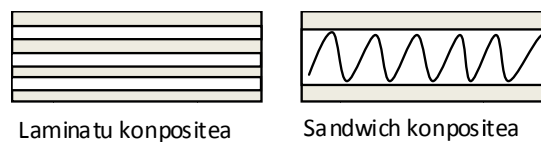
1.5 Irudia. Konpositeak zuntzen kokapenaren arabera

2. Partikulaz osatutakoak

Partikulak norabide guztietan dimentsio berdintsuak dituzten errefortzuak dira. Partikulaz osatutako materialik ezagunena hormigoia da. Material honetan partikulak elkorak dira eta matrize zeramikoa zementua da. Material polimeriko batzuk ere, betetzeko gehigarriak sartzean partikulaz osatutako konpositeen portaera dute. Errefortzuaren eragina handiagoa izaten da partikulak txikiak direnean eta matrizean ondo banatzen direnean. Propietate mekanikoak ere partikula kopuruarekin hobetzen dira. Edozein material erabil daiteke partikulaz osatutako konpositeak ekoizteko: metalak, polimeroak eta zeramikoak .

3. Egitura - konpositeak

Konposite hauek material konposite eta material homogeneoen konbinaketatik lortzen dira. Hauen artean laminatuak eta sandwich panelak daude (1.6 Irudia).



1.6 Irudia. Laminatu eta sandwich konpositeak

Laminatuak norabide jakin batean erresistentzia eta zurruntasun handiko laminen pilaketak dira. Laminak pilatzean, lamina bakoitzaren zuntzaren norabidea aldatzeko denez laminatuaren ezaugarri mekanikoak lamina pilaketaren baitakoak dira.

Sandwich konpositeen egitura honela osatuta dago:

1. Hegalak: Kanpoaldean bi lamina mehe zurruntasun eta erresistentzia altukoak.
2. Nukleoa: Materiala oso arina da, hegalak banatzeko eta indar ebakitzailerik behar gabe transmititzeko jartzen da.
3. Hegalak eta nukleoaren arteko fase-artea: Honen helburua nukleo eta hegala lotuta mantentzea eta kargak transmititzea da.

1.3.2 LAMINATU KONPOSITEAK

Laminatu konpositeak zuntzen orientazio desberdineko laminak bata bestearen gainean pilaturik dituzten materialak dira, bere lodiera laminatuen planoko dimentsioak baino askoz ere txikiagoa izanik.

Zuntz eta matrizearen materialaren arabera eta laminen kokapenaren arabera laminatu desberdin anitz egin daitezke. Hau da, erabiltzen den zuntz-luzera, zuntz kantitatea eta matrizean barneratze moduaren arabera, laminatuen portaera mekanikoa desberdina izango da.

Zuntz luzez osatutako material konpositetan, zuntzaren norabidean eta zuntzarekiko zeharka propietateak desberdinak dira, eta beraz, material anisotropoak dira. Lamina egiteko zuntz luzez osatutako konpositea erabiltzen bada, orduan laminaren portaera ortotropoa izango da. Materialaren puntu bakoitzean 3 simetria-plano aurki daitezke beraien artean elkarzut direnak: ortotropia plano nagusiak dira [38,42].

Norabide bakarreko zuntzen kasuetan, laminak zuntzaren norabidean erresistentzia eta modulu altuak izaten ditu eta zuntzarekiko elkarzuta den norabidean, berriz, baxuagoak. Laminatuaren propietateak lamina bakoitzaren zuntz-orientazioa eta pilaketa-sekuentziaren funtzioan aldatzen dira.

1.3.3 LAMINATU KONPOSITEEN TEORIAK

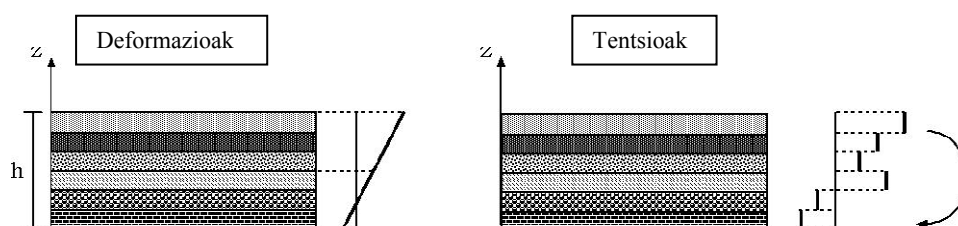
Laminatu konpositeak aztertzeko, desplazamendu eremuaren sinplifikazioak onartzen dituzten teoriak erabiltzen dira. Teoria hauek bi talde nagusietan sailka daitezke [43]:

1. Geruza Bakar Baliokideen Teoria (*Equivalent Single Layer Theories, ESLT*)

ESLT teoriak erabiliz plaka laminatu laukizuzenak makurduran aztertzen dituzten hurbilpen analitikoak aurki daitezke [43]. Bi dimentsiotako teoriak direnez sinpleenak dira. Ezberdintasuna laminaren planotik kanpoko ebakiduraren eragina kontutan hartzea hala ez hartzean datza. ESLT teoriak honakoak dira:

- (i) Plaka Laminatuaren Teoria Klasikoa (*Classical Laminated Plate Theory, CLPT*)
- (ii) Lehen Mailako Deformazio Teoria (*First-order Shear Deformation Theory, FSDT*)
- (iii) Goi Mailako Teoriak (*Higher-Order Theories, HOT*)

CLPT teoriak tentsioak planoan bakarrik kalkulatzeko ditu. FSDT teoria CLPT teoriaren lehenengo optimizazioa da, indar ebakitzailaren eragina kontuan hartzen duelako eta planotik kanpoko tentsio ebakitzailak lortzeko aukera ematen duelako. Bi teoria hauek ESLT teoria sinpleenak dira eta laminatuen portaera mekanikoa modu egokian laminatu mehetan bakarrik aurreikusten dute, hauetan ebakiduraren eragina arbuia garria baita.



1.7 Irudia. Laminatu ez simetriko baten tentsioen eta deformazioen banaketa makurduran

Limite hori gainditzeko HOT teoria sortu zen. HOT teoria aurreko hipotesi berdinetan oinarrituta dago, baina desplazamendu eremua hurbiltzeko erabiltzen den polinomioak goi mailakoak dira. Teoria honek laminatuaren portaera zehatzago

deskribatzen du, eta tentsioak laminatuaren lodieran zehar hobeto banatzen ditu. Edozein ordenako polinomio bat erabil daiteke, baina gehien erabiltzen den teoria Reddy-k garatutako 3. Mailako Deformazioaren Teoria da (*Third Order Shear Deformation Theory*, TSDT) [44].

2. Geruzaz Geruzako Teoriak (*Layer Wise Theories*, LWT)

Bestalde, Geruzaz Geruzako Teoriak, LWT, laminen arteko σ_{zz} , τ_{xz} eta τ_{yz} tentsioen jarraitasuna kontsideratzen du, eta emaitzak zehatzagoak ematen ditu, σ_{zz} zeharkako tentsio normalean batez ere. LWT teorietan, ESLT teorien limiteak gainditzeko eta Paganoren emaitza “zehatzak” lortzeko ahalegin handiak egin dira [45,46]. Savoia eta Reddy-ren hurbilketa analitikoak [47] Paganoren emaitzak laminatu angeluarretara hedatzen ditu, eta horregatik, beste hurbilketak egiaztatzeko erreferentzia bihurtu dira.

Soluzio analitikoa lortzen duten metodoek geometria simple eta portaera elastiko lineala den kasuetan bakarrik aplika daitezke. Beraz, metodo numerikoak ezinbestekoak izaten dira material konposite baten portaera aztertzeko. Konpositeen analisisian FEM da gaur egun gehien erabiltzen den metodo numerikoa. Material hauen portaera simulatzeko FEM metodo gehienak desplazamendu metodoan oinarrituta daude. Alde batetik, formulazioa oso sinplea da, eta bestetik, programa komertzialek erabiltzen duten formulazioa da.

1.4 TESIAREN HELBURUAK

Patnaik-ek proposatutako IFM eta IFMD metodoetan ekuazio nagusiak lortzeko ez da Lan Birtualen Printzipioa bakarrik inposatzen, Lan Birtual Osagarriaren Printzipioa ere inposatzen da. Horregatik emaitzak onak ematen dituzte, bai desplazamenduetan, bai tentsioetan. Beraz hasierako helburuak honakoak dira:

- IFM eta IFMD metodoak analizatzea eta ulertzea, bai metodo hauen aplikazioa eta bai deformazio orokortuen esanahia sistema jarraituetan ere.
- IFMD metodoa aplikatuz norabide bakarreko laminatuak aztertzea, eta mintz eta plaka elementuen formulazioan inplementatzea, laminatu ortotropo eta anisotropoen kasuetan.

- IFMD eta SM metodoak aplikatuz, elementu finituen analisia egitea eta lortutako emaitzak hurbilketa analitiko eta esperimentalarekin konparatzea.

1.5 ERREFERENTZIAK

1. Zienkiewicz, OC; Taylor, RL. (1999). El método de los elementos finitos. Formulación básica y problemas lineales. Vol. I. *CIMNI*. Barcelona.
2. McHenry, D. (1943) . A lattice analogy for the solution of plane stress problems, *J. Inst. Civil Eng.:* **21**, 59–82,
3. Courant, R. (1943). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society:* **49** 1–23.
4. Levy, S. (1947). Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback. *J. Aero. Sci.*, **14**: 547–560.
5. McGuire, W; and Gallagher, RH. (1979). Matrix Structural Analysis. Wiley, New York.
6. Gallagher, RH; Rattinger, L; and Archer, JS. (1964). A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis. *The MacMillan Co.*, New York.
7. Arnaboldi, EA. (1951). Cálculo de estructuras hiperestáticas por el método de las fuerzas. *La Plata: CEI*.
8. Felippa, CA. (2001). A historical outline of matrix structural analysis: A play in three acts. *Computers & Structures*, **79**:1313-1324.
9. Levy, S. (1953). Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings. *Journal of the Aeronautical Sciences;* **20** (7): 449-454.
10. Turner, MJ; Clough, RW; Martin, HC; et ál. (1956). Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences;* **23** (9): 805-824.
11. Clought, RW. (1960). The finite element method in plane stress analysis of complex structures. Proceedings, American society of civil engineers, 2nd conference on electronic computation. Pittsburg, PA. 345-378.
12. Przemieniecki, JS. (1968). Theory of Matrix Structural Analysis. Mc Graw-Hill, New York.

13. Zienkiewicz, OC and Taylor, RL. (1994). El método de los elementos finitos. CIMNE-Mc Graw Hill. Barcelona.
14. Oñate, E. (1995). Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*.
15. Patnaik, SN. (1973) An integrated method for discrete analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*; **6**: 237-251.
16. Patnaik, SN. (1982). Frequency analysis of structures by Integrated Force Method. *Journal of Sound and Vibration*; **83**(1): 93-109.
17. Patnaik, SN. (1986). Integrated force method versus the standard force method. *International Journal of Computers and Structures*; **22**: 151-163.
18. Patnaik, SN. (1986). The Variational Energy Formulation for the Integrated Force Method. *AIAA Journal*; **24** (1): 129-136.
19. Patnaik, SN; Satish, HG. (1990). Analysis of continuum using the boundary compatibility conditions of integrated force method. *Computers and Structures*; **34**:287-295
20. Patnaik, SN; Nagraj, MS. (1987). Analysis of continuum by the integrated force method. *Computers and Structures*, **26**: 899-905.
21. Patnaik, SN; Coroneos, RM; Hopkins, DA. (2000). Compatibility conditions of structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; **47**: 685-704.
22. Hopkins, DA; Kaljevic, I; and Patnaik, SN. (1997). Constructing Finite Elements for the Integrated Force Method. *NASA Tech Briefs*, **21**(7): 70– 72.
23. Patnaik, SN; Berke, L; Gallagher, RH. (1991) Compatibility conditions of structural mechanics for Finite element analysis. *A.I.A.A. Journal*; **29**: 820-829.
24. Kaljevic, I; Patnaik, SN; Hopkins, DA. (1996). Development of Finite elements for two-dimensional structural analysis using the integrated force method. *Computers and Structures*; **59**:691-706.
25. Kaljevic, I; Patnaik, SN; Hopkins, DA. (1996). Three dimensional structural analysis by the integrated force method. *Computers and Structures*; **58**:869-886.
26. Patnaik, SN; Coroneos, M; Hopkins, A. (1998). Recent advances in the method of forces: Integrated force method of structural analysis. *Advances in Engineering Software*, **29**, 3-6.

27. Fraeijns de Veubeke. (1965). Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress Analysis*, **9**: 145-197. Wiley & Sons.
28. Shames, H; Dym, CL. (1985). Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisfere Publishing Corporation.
29. Hoa, SV; Feng, W. (1998). Hybrid finite element method for stress analysis of laminate composites. Kluwer Academic Publishers, Boston.
30. Pian THH. (1964) Derivation of Element Stiffness Matrices by assumed Stress distribution. *M.I.T.- Technical notes*.
31. Pian, THH. (1995). State of the art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, **21**: 5-20
32. Dhananjaya ,HR; Nagabhushanam, J; Pandey, PC. (2007). Bilinear plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method. *Struct. Eng. Mech*, **26**: 43-68.
33. Dhananjaya, HR; Nagabhushanam, J; Pandey, PC. (2008). Automatic generation of equilibrium and flexibility matrices for plate bending elements using Integrated Force Method. *Struct.Eng.Mech*, **30**:387-402.
34. Dhananjaya, HR; Pandey, PC; Nagabhushanam, J. (2009). New eight node serendipity quadrilateral plate bending element for thin and moderately thick plates using Integrated Force Method. *Struct. Eng. Mech*; **33**: 485-502.
35. Dhananjaya, HR; Nagabhushanam, J; Pandey, PC; Jumaat, MZ. (2010). New twelve node serendipity quadrilateral plate bending element based on Mindlin-Reissner theory using Integrated Force Method. *Struct. Eng. Mech*, **36**: 625-642.
36. Dhananjaya, HR; Pandey, PC; Nagabhushanam, J. (2011). Closed form solutions for element equilibrium and flexibility matrices of eight node rectangular plate bending element using integrated force method. *Structural Engineering and Mechanics*; **40**: 121-148
37. Dhananjaya, HR; Pandey, PC; Nagabhushanam, J. (2012); New nine-node Lagrangian quadrilateral plate element based on Mindlin-Reissner theory using IFM. *Structural Engineering and Mechanics*; **41**: 205-229
38. Berthelot, JM. (2012). Matériaux composites. 5th Edition, Tec & Doc Lavoisier.
39. Mujika, F. (2011). Mecánica de laminados composites, Servicio de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Bilbao.

40. Pagano, NJ and Yuan, FG. (2000). The Significance of Effective Modulus Theory (Homogenization) in Composite Laminate Mechanics, *Composites Science and Technology*, **60**: 2471-2488.
41. Daniel, IM e Ishai, O. (2006). Engineering Mechanics of Composite Materials. Second Edition, Oxford University Press, New York.
42. Gay D. (1989). Matériaux Composites, Hermes, Paris.
43. Reddy, JN. (2004). Mechanics of laminated composite plates and Shells. Theory and analysis, Second edition, *CRC Press*, Florida.
44. Reddy, JN (1984). A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*.**51**: 745-752.
45. Pagano, NJ. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, **4**:20-34.
46. Pagano, NJ and Hatfield, SJ. (1972). Elastic behavior of multilayered bidirectional composites, *AIAA Journal*. **10**(7):931-933.
47. Savoia, M and Reddy, JN. (1992). A Variational Approach to Three-Dimensional Elasticity Solutions of Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*, **59**: 166-175.

SOLIDO ELASTIKOAREN ANALISIA

2.1 SARRERA

Elastikotasunaren teoriaren helburua kanpoko indarren eraginez gorputz elastikoen portaera ezagutzea da. Gorputzean ari diren kanpo indarren ondorioz eta mugaldeko baldintzak kontuan hartuz sortzen diren desplazamendu, deformazio eta tentsio eremuak kalkulatzeko dira. Orohar, tentsio egoera definitzeko tentsioen oreka baldintzak eta deformazioen bateragarritasunaren ekuazioak planteatu behar dira [1,2].

Elastikotasunaren gorputzeko ekuazio orokorrak eta hauekin lotuta dauden mugaldeko baldintzak lan birtualen printzipio bariationalen bitartez ere lor daitezke. Lan birtualaren printzipioa aplikatuz tentsioen oreka ekuazioak lortzen dira eta lan birtual osagarriaren printzipioa aplikatuz deformazioen bateragarritasun ekuazioak.

2.2 TENTSIO EGOERA

2.2.1 OREKA EKUAZIOAK

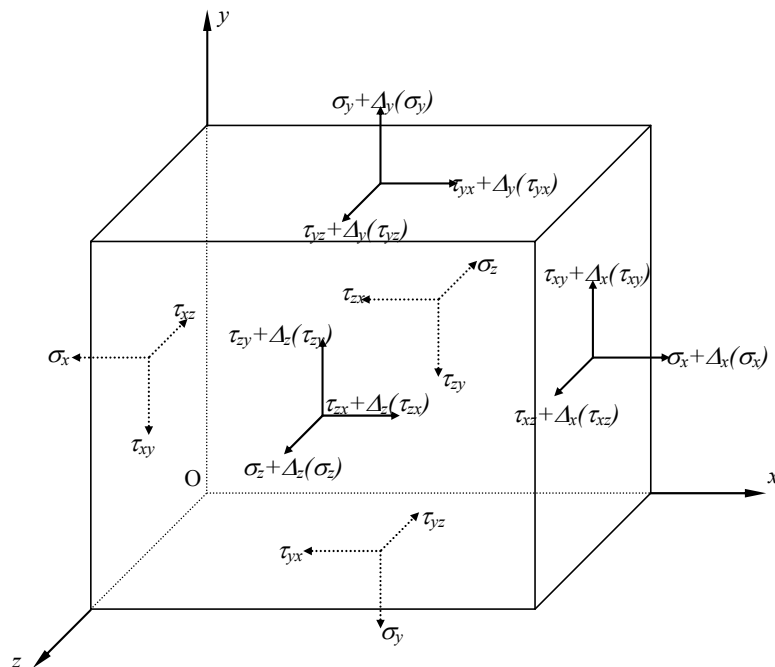
Solido baten barrualdeko O puntuaren inguruko elementu diferentzial baten oreka aztertuko da [3-5]. Erreferentzia sistemaren jatorria O puntu bera da. Tentsioen

osagaiak elementuaren aurpegi batetik bestera aldatzen direla suposatzen da. 2.1 irudian ikusten den bezala, ertzak infinitesimalak direnez:

$$\Delta_i f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = f_{,i} dx_i \quad (2.1)$$

Non $f(x, y, z)$ tentsioaren edozein osagai den. x_1, x_2, x_3 x, y, z adierazten dute, $i=1,2,3$ izanik. Tentsioak aurpegietan berdin banatuta daudela suposatzen da eta beraz, tentsioen erresultanteak hauen aurpegiaren grabitate zentroetan aplikatuta daude. Honen ondorioz, tentsioen aldaketak ari diren planoarekiko elkarzuta diren norabidetan bakarrik kontsideratzen dira. Bestalde, gorputza erresultantea elementuaren grabitate zentrotik pasatzen den B_x, B_y eta B_z bolumen indarren eraginpean dagoela suposatzen. Indar hauek grabitatorioak, elektromagnetikoak edo inertzia indarrak izan daitezke. x ardatzean oreka ekuazioak aplikatuz honako hau lortzen da:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (\sigma_x + \Delta_x \sigma_x) dydz - \sigma_x dydz + (\tau_{yx} + \Delta_y \tau_{yx}) dx dz - \tau_{yx} dx dz + (\tau_{zx} + \Delta_z \tau_{zx}) dx dy - B_x dx dy dz = 0 \quad (2.2)$$



2.1 Irudia. Puntu bateko tentsio egoera.

(2.1) ekuazioan emandako aldaketen esanahia kontuan hartuz, oreka ekuazioa y eta z ardatzetan aplikatuz eta eragiketak egin ondoren, oreka ekuazioak honako hauek dira:

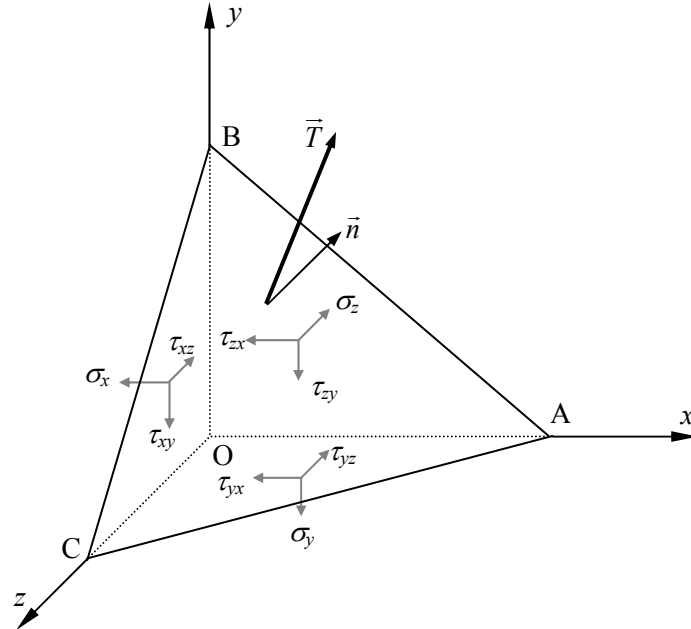
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + B_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + B_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z &= 0\end{aligned}\tag{2.3}$$

Oreka ekuazioak indize - notazioan honela adierazten dira:

$$\sigma_{ij,i} + B_j = 0\tag{2.4}$$

2.2.2 TENSIO BEKTOREAREN OSAGAIK. MUGALDEKO BALDINTZAK

Edozein puntutako tentsio bektorearen osagaiak ezagututa, puntu horretatik pasatzen den edozein planoarekiko tentsio bektorearen osagaiak lortu nahi dira. Horretarako, 2.2 irudian ertz diferentzialak dituen tetraedro formako elementua isolatzen da eta ABC planoak puntutik pasatzen dela suposatzen da.

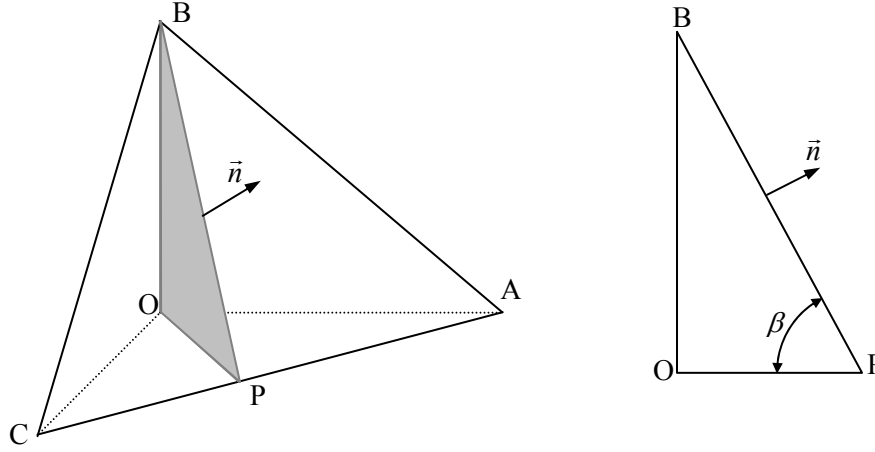


2.2 Irudia. Tentsio bektorearen osagaiak.

Indarrak lortzeko tentsioak eta azalerak biderkatu behar direnez, tetraedroaren aurpegien azalerak honela erlazionatu daitezke [3]:

$$\begin{aligned}
 OBC &= ABC \, l \\
 OAC &= ABC \, m \\
 OAB &= ABC \, n
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

$\vec{n} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$ izanik, non l , m eta n \vec{n} bektore normal unitarioaren norabidearen kosinu zuzentzaileak diren. (2.5) erlazioak frogatzeko, 2.2 irudiko \overline{AC} aldearekiko elkarzuta den OBP triangelua kontsideratzen da. Beraz, \overline{OP} eta \overline{BP} segmentuak \overline{AC} aldearekiko elkarzuta dira. Bestalde, \overline{BP} \vec{n} bektore normalarekiko elkarzuta dela kontuan hartuz, \vec{n} -k y norabide bertikalarekin β angelua osatzen badu, orduan \overline{BP} -k x norabide horizontalarekin angelu berdina osatuko du, 2.3 irudiaren eskuinean ikusten den bezala, $m = \cos \beta$ izanik.



2.3 Irudia. \overline{AC} aldearekiko elkarzuta den OBP triangelua.

OAC eta ABC triangeluen azalerek ondoko erlazioa betetzen dute:

$$\frac{OAC}{ABC} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{AC})(\overline{OP})}{\frac{1}{2}(\overline{AC})(\overline{BP})} = \cos \beta = m \quad (2.6)$$

Horrela, (2.5) ekuazioaren bigarren erlazioa frogatzen da. Beste bi erlazioak arrazonamendu berdina jarraituz lortzen dira. Indarren oreka ekuazioak aplikatuz eta (2.5) erlazioak kontutan hartuz ondoko erlazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow T_x + B_x \frac{dV}{ABC} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow T_y + B_y \frac{dV}{ABC} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ \sum F_z = 0 &\Rightarrow T_z + B_z \frac{dV}{ABC} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (2.7)$$

dV tetraedroaren bolumena izanik, $\frac{dV}{ABC}$ erlazioa gai diferentziala da, beraz, bolumeneko indarren eragina oreka ekuazioetan arbuigarria da tentsioekin konparatuz. Matrize moduan, (2.7) ekuaziotik lortzen diren oreka ekuazioak honela adieraz daitezke:

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

Tentsio matrizeak bektore normala tentsio bektorean transformatzen du suposatutako erreferentzia sisteman. Modu laburbilduan (2.8) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\{T\} = [\sigma]\{v\} \quad (2.9)$$

Eta indize notazioan, (2.9) ekuazioa honela adierazten da:

$$T_i = \sigma_{ij} v_j \quad (2.10)$$

Gainazala gorputzaren kanpo gainazala denean (2.8)-(2.10) ekuazioak mugaldeko baldintzak dira.

$$\bar{T}_i = \sigma_{ij} v_j \quad (2.11)$$

\bar{T}_i mugaldean ari den gainazal indarra izanik.

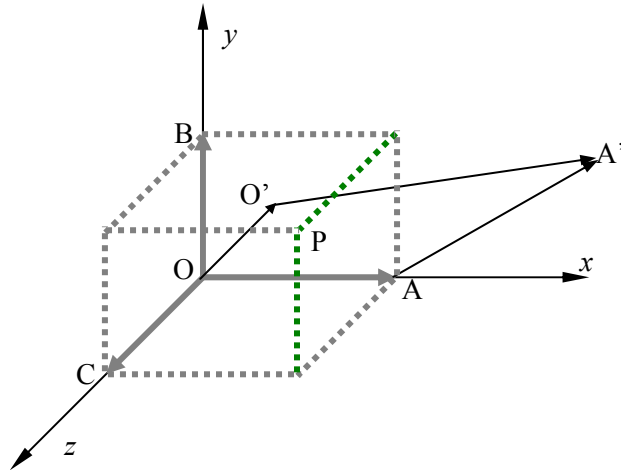
2.3 DEFORMAZIOAK

2.3.1 ELEMENTU DIFERENTZIALAREN ALDAKETAK

Gorputzaren O edozein puntutan erreferentzia sistema baten jatorria kokatuta dago. Sistema honekin lotutako elementu diferentzial baten analisia egingo da. Puntu honek u , v , w osagaiak dituen desplazamendua jasaten du x , y , z ardatzetan. Desplazamenduen osagaiak infinitesimoak direla eta hauen deribatuak gutxienez hirugarren deribatura arte jarraituak direla suposatzen da. Gainera, lehenengo deribatuak lehen mailako infinitesimoak direla suposatzen da. Beraz, bigarren ordenako edo gehiagoko gaiak arbuigarriak dira. Hipotesi hauek kontuan hartuz erreferentzia sistema kokatzeko garaian gorputzaren egoera deformatua eta hasierakoa baliokideak kontsidera daitezke.

2.4 irudian O eta A puntuen desplazamenduak ikusten dira. A puntuaren desplazamenduen osagaiak x ardatzarekiko gehikuntzaren arabera adierazita daude. Ondoko erlazio bektorialak betetzen dira:

$$\begin{aligned}\overline{OO'} &= u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \\ \overline{OA} &= dx\vec{i} \\ \overline{AA'} &= \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)\vec{i} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx\right)\vec{j} + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right)\vec{k} \\ \overline{O'A'} &= \overline{OA} + \overline{AA'} - \overline{OO'} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial x}dx\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial x}dx\vec{k}\end{aligned}\quad (2.12)$$



2.4 Irudia. O eta A puntuen desplazamenduak.

OA ertzaren bariazio erlatiboari *deformazio unitario normala* deitzen zaio eta honela adierazten da:

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{O'A'} - \overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx - dx}{dx}\quad (2.13)$$

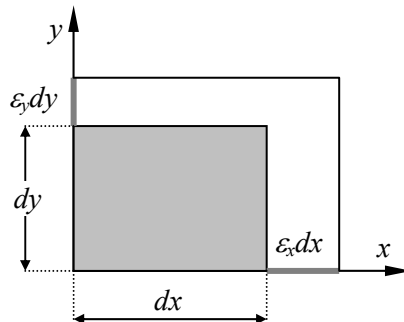
Desplazamenduak eta hauen deribatuak infinitesimalak direla kontuan hartuz, dx zatitzean (2.13) ekuazioa honela idatz daiteke*:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.14)$$

y, z norabideetan antzeko analisia egitean norabide hauetako deformazio normalak lortzen dira:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.15)$$

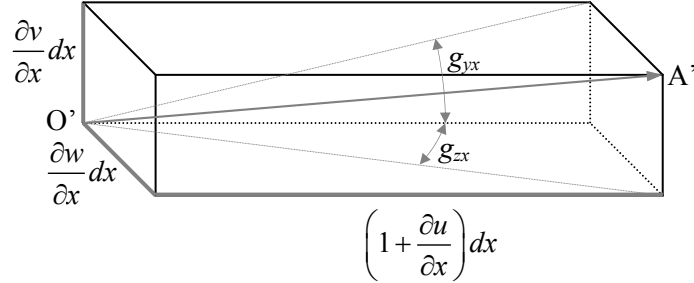
Deformazio normalek hasierako elementuaren ertzen luzeraren aldaketa erlatiboa adierazten dute, 2.5 irudian ikusten den bezala elementuaren bolumenaren aldaketa eragiten dute.



2.5 Irudia: Deformazio normalen eraginez ertzen luzera aldaketa erlatiboak

Aldaketa angeluarrek ardatzen angeluaren bariazioak adierazten dute. g_{ij} j norabideak Oij planoan jasaten duen angeluaren bariazioa izango da. Adibidez, g_{yx} x norabideak xy planoan jasaten duen angeluaren aldaketa da eta g_{zx} x norabideak zx planoan jasaten duen angeluaren aldaketa

* $x \rightarrow 0$ denean $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$



2.6 Irudia: $\overline{O'A'}$ bektorearen osagaiak

Tangentea eta angelua baliokideak kontsidera daitezkeela kontuan hartuz, angelu aldaketak 2.6 irudiaren arabera honela adieraz daitezke:

$$g_{yx} = \tan g_{yx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \quad g_{zx} = \tan g_{zx} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} \quad (2.16)$$

Deribatuak infinitesimoak direla kontuan hartuz, g_{yx} balioan ondoko hurbilketa egin daiteke[†]

$$\tan g_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \left[1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dots \right] \quad (2.17)$$

1 ordena baino gehiagoko gaiak arbuatuz, (2.16) ekuazioa honela adieraz daiteke:

$$g_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.18)$$

y, z ardatzei dagozkien bariazio angeluarrek ondokoak dira:

[†] Hurbilketa hemendik dator: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} & g_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} \\ g_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} & g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Deformazio normalek deformazio angeluarren nomenklaturan honela barnera daitezke, $g_{ii} = \varepsilon_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i}$. Orokorrean, g_{ij} osagaiak honela idatz daitezke:

$g_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = u_{i,j}$. Gainera, osagai simetrikoa eta antisimetrikoan deskonposa daitezke:

$$g_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (2.20)$$

Non:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) \\ \omega_{ij} &= \frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

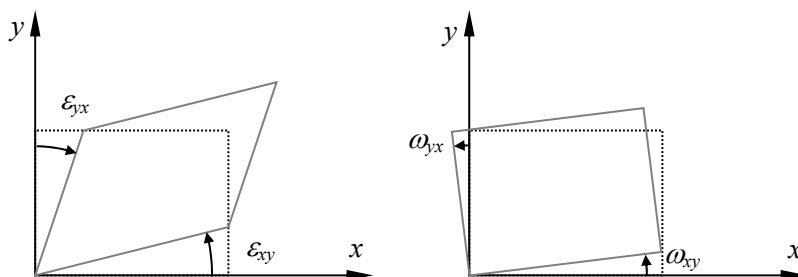
Indizeak berdinak direnean, hau da, deformazio normalen kasuan $\omega_{ii} = 0$. Indizeak desberdinak direnean, ε_{ij} osagaiak deformazio tangenzialak adierazten dituzte eta ω_{ij} osagaiak biraketa hutsa adierazten dute. ε_{ij} osagaiak simetrikoak dira eta ω_{ij} osagaiak antisimetrikoak, hau da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} \\ \omega_{ij} &= -\omega_{ji} \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.7 irudian deskonposaketa hori xy planoaren kasuan aurkezten da. Biraketa-noranzkoak desplazamenduen deribatuen balioekin erlazionatuta daude. $g_{yx} > g_{xy}$

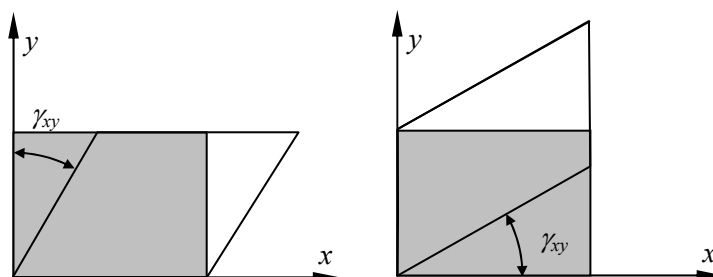
suposatu da, hau da, $\frac{\partial v}{\partial x} > \frac{\partial u}{\partial y}$. ε_{ij} osagaiak angelu zuzenaren aldaketarekin

erlazionatuta daude eta ω_{ij} osagaiak solido zurrunaren errotazioarekin. Biraketak infinitesimalak direnez, ertzen luzera ez da aldatzen, 2.7 irudian ikusten den bezala.



2.7 Irudia: ε_{ij} deformazioaren deskonposaketa xy planoan

ε_i deformazio normalak elementuaren bolumen aldaketarekin lotuta daude, ertzen luzeraren aldaketak adierazten dutelako. ε_{ij} deformazio tangenzialek ertzen arteko angeluak aldatzen dituzte luzera aldatu gabe, beraz, elementuaren distortsioa eragiten dute bolumena aldatu gabe. Ingeniaritzako deformazio tangenziala γ_{ij} angelu zuzenaren aldaketa da, $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ izanik. Angelu zuzena gutxitu egiten denean deformazio tangenzialak positiboak dira, 2.7 irudiaren arabera.



2.8 Irudia. Deformazio tangenzialaren baliokidetasuna.

Solido zurrunaren biraketek deformazio tangenzialetan eraginik ez dutenez, 2.8 irudiko deformazio tangenzialak elkarren baliokideak dira eta baita 2.7 irudiko ezkerreko aldearekin ere, hauen arteko ezberdintasunak solido zurrunaren biraketekin lotuta daudelako.

2.3.2 BATERAGARRITASUNAREN EKUAZIOAK

Deformazio-desplazamenduen arteko erlazioa honela adierazten da:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.23)$$

(2.23) ekuazioaren bitartez deformazio tentsorearen 6 osagaiak desplazamenduaren 3 osagaiekin erlazionatuta daude. Desplazamendu eremua balio bakar eta jarraitua izateko, deformazio eremua ezin da arbitrarioa izan, hau da, deformazio eremuaren osagaiek gorputzeko puntuetan zehar ezin dezakete edozein balio eduki, baldintza batzuk bete behar dituzte. Baldintza hauek bateragarritasunaren ekuazioak dira [2,6].

Ekuazio hauek lortzeko (2.23) ekuazioetatik desplazamenduak ezabatuko dira. Horretarako ε_{ij} deformazioen bigarren deribatu partzialak eginez, eta deribatu gurutzatuen berdinketa aplikatuz, honako erlazioak lortzen dira.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2}(u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) \\ \varepsilon_{kl,ij} &= \frac{1}{2}(u_{k,l ij} + u_{j,kl ij}) \\ \varepsilon_{lj,ki} &= \frac{1}{2}(u_{l,jki} + u_{j,lki}) \\ \varepsilon_{ki,lj} &= \frac{1}{2}(u_{k,ilj} + u_{i,klj}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Lehenengo bi ekuazioak batuz, eta azken biak kenduz, u_i osagaiak ezabatzen dira eta deformazioen arteko erlazioa gelditzen da:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{lj,ki} - \varepsilon_{ki,lj} = 0 \quad (2.25)$$

(2.25) ekuazioen deribatu gurutzatuen berdinketa inposatu da. Ekuazio hauek gorputz baten deformazioek bete behar dituzten baldintzak dira, desplazamendu eremua balio bakar eta jarraitua izateko. (2.25) ekuazioak 81 baldintza adierazten ditu. Horietatik, 6 dira bakarrik errepikatzen ez direnak. Bateragarritasun ekuazioak deitzen dira, honakoak izanik:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} \right)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4 TENTSIO-DEFORMAZIOEN ARTEKO ERLAZIOAK

Tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa materialaren propietateen menpe dago. Atal honetan material homogeen eta anisotropoak aztertuko dira. Homogeenok direnez, propietateak berdinak izango dira gorputzaren puntu guztietan. Anisotropoak direnez, puntu bakoitzaren propietateak kontsideratutako norabidearen menpe daude. Hooke-ren lege orokortuaren bitartez, puntu bakoitzaren deformazioak eta tentsioak erlazonaturik daude. Tentsioen eta deformazioen arteko erlazioa lineala dela suposatuz eta hasierako tentsioak eta deformazioak kontuan hartu gabe erlazio honen adierazpena honakoa da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \tag{2.27}$$

(2.27) ekuazioa modu laburbilduan honela idatz daiteke:

$$\{\sigma\}_{0123} = [C]_{0123} \{\varepsilon\}_{0123} \tag{2.28}$$

$[C]_{0123}$ zurruntasun koefizienteak izanik. (2.28) ekuazioaren bi aldeetan $[C]_{0123}^{-1}$ biderkatzen baditugu, ondorengo ekuazioan alderantzizko erlazioa azaltzen da:

$$\{\varepsilon\}_{0123} = [S]_{0123} \{\sigma\}_{0123} \tag{2.29}$$

$[S]_{0123} = [C]_{0123}^{-1}$ materialaren malgutasun koefizienteak izanik. (2.29) ekuazioa modu zabalduan idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

(2.27) eta (2.30) ekuazioak orokorrak dira, hau da, edozein material homogeneo, elastiko eta linealarentzat balio dute. Hala ere, simetria materialeko planoak daudenean koefiziente batzuk zero egiten dira. Simetria materialeko plano batekiko, puntu batek eta bere simetrikoak propietate berdinak dituzte.

Benetan, tentsioak eta deformazioak bigarren maila tentsoreak dira eta materialaren zurruntasun edo malgutasun matrizeak laugarren mailako tentsoreak dira. Tentsio-deformazio erlazioak indize-notazioan honela adierazten dira:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.31)$$

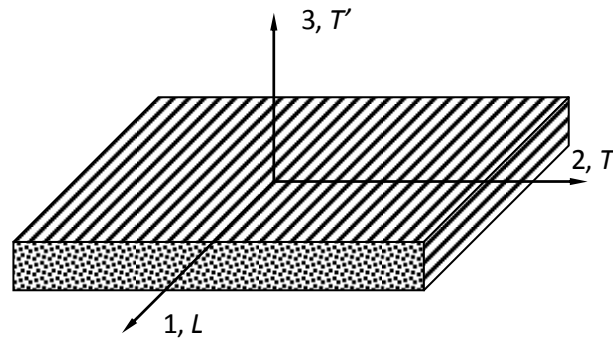
$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.32)$$

Voight-en notazioa erabiliz, indize pareen kontrakzioa egiten da [7]:

$$\begin{array}{ll} 11 \rightarrow 1 & 23(32) \rightarrow 4 \\ 22 \rightarrow 2 & 31(13) \rightarrow 5 \\ 33 \rightarrow 3 & 12(21) \rightarrow 6 \end{array} \quad (2.33)$$

2.4.1 ORTOTROPIA

Aztertuko diren laminatu konpositetan lamina bakoitzaren errefortzua edozein norabidetako zuntz luzea da. Lamina bakoitzaren materialak hiru simetria-plano ditu: 13, 12 eta 23 planoak, beraz material ortotropoa da.



2.9 Irudia. Laminaren ortotropiako norabide nagusiak.

2.9 irudian lamina ortotropoaren erreferentzia sistema aurkezten da. 1, 2 eta 3 norabideak ortotropiako norabide nagusiak dira eta norabide hauekiko elkarzuta diren planoak ortotropiako plano nagusiak dira.

Lamina ortotropo batean, tentsio eta deformazioen arteko erlazioak honako hauek dira, zurruntasun edo malgutasun koefizienteen menpe adierazita:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Material ortotropoen tentsio-deformazio erlazioei buruz hiru puntu azpimarratu behar dira [3], (2.34) eta (2.35) ekuazioetatik ondorioztatzen direnak:

Tentsio normal σ_1 , σ_2 eta σ_3 eta γ_4 , γ_5 eta γ_6 deformazio angeluarren arteko interakziorik ez dago, hau da, materialaren norabide nagusietan zehar ari diren tentsio normalek deformazio normalak bakarrik eragiten dituzte.

Tentsio ebakitzaille τ_4 , τ_5 eta τ_6 eta ε_1 , ε_2 eta ε_3 deformazio normalen arteko interakziorik ez dago, hau da, materialaren norabide nagusietan ari diren tentsio ebakitzailleek deformazio angeluarrak bakarrik eragiten dituzte.

Plano desberdinetan tentsio eta deformazio tangenzialen arteko interakziorik ez dago, hau da, materialaren ortotropiako plano nagusi batean ari diren tentsio ebakitzailleek plano horretan bakarrik eragiten dituzte deformazio tangenzialak.

2.4.2 KONSTANTE MATEMATIKO ETA INGENIARITZAKOEN ARTEKO ERLAZIOAK

Laminen propietate elastikoak ingeniariatzako moduan idatz daitezke, hau da, zurruntasun eta ebakidura moduluak eta Poisson-en koefizienteen funtzioan. Zuntz luzeko konposita suposatzen da, non 1 norabidea zuntzaren norabidea den, 2.9 irudian ikusten den bezala. Material hau ortotropoa da.

E_i zurruntasun moduluak dira, eta horrela definitzen dira:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.36)$$

ν_{ij} Poisson-en koefizienteak dira, eta honela adierazten dira:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\sigma_i} E_i \quad i, j = 1, 2, 3 \text{ eta } j \neq i \quad (2.37)$$

G_{ij} ebakidura moduluak dira, honela definitzen direnak:

$$G_{12} = \frac{\tau_6}{\gamma_6} \quad G_{23} = \frac{\tau_4}{\gamma_4} \quad G_{13} = \frac{\tau_5}{\gamma_5} \quad (2.38)$$

Materiala 1 norabidean karga axial baten menpe badago, (2.35) ekuazioaren arabera erlazio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 & \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma_1 & \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma_1 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Bestalde, ingeniartzako ohizko nomenklatura erabiliz:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} & \varepsilon_2 &= -\nu_{12}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 & \varepsilon_3 &= -\nu_{13}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Poisson-en lehenengo eta bigarren koefizienteek tentsioaren eta deformazioaren norabideak adierazten dituzte, hurrenez hurren. (2.39) eta (2.40) ekuazioak konparatuz, honako hau lortzen da:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}$$

Materialaren elementu bat 2 norabidean karga axial baten menpe badago, (2.35) ekuaziotik lortutako deformazioak eta ingeniartzako notazioa konparatuz, honako hau lortzen da:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{12}\sigma_2 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 & \varepsilon_2 &= S_{22}\sigma_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} & \varepsilon_3 &= S_{23}\sigma_2 = -\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

(2.41) ekuaziotik ondoko erlazioak lortzen dira:

$$S_{12} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, S_{22} = \frac{1}{E_2}, S_{13} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}$$

Orain karga 3 norabidean aplikatzean, erlazio hauek lortzen dira:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = S_{13}\sigma_3 = -\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 \quad \varepsilon_2 = S_{23}\sigma_3 = -\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 \quad \varepsilon_3 = S_{33}\sigma_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} \\ \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

eta (2.42) ekuaziotik:

$$S_{13} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, S_{23} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, S_{33} = \frac{1}{E_3}$$

1-2 planoko tentsioa τ_6 kontsideratzen bada, (2.35) ekuazioaren arabera eta ingeniartzeko notazioa:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0 \quad \gamma_6 = S_{66}\tau_6 = \frac{\tau_6}{G_{12}} \quad (2.43)$$

(2.43) ekuaziotik:

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

2-3 planoko tentsio ebakitzaila τ_4 kontsideratzen bada:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 0 \quad \gamma_4 = S_{44}\tau_4 = \frac{\tau_4}{G_{23}} \quad (2.44)$$

(2.44) ekuaziotik erlazio hau lortzen da:

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}}$$

Azkenik, 1-3 planoko tentsio ebakitzaila τ_5 kontsideratzen bada:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_4 = \gamma_6 = 0 \quad \gamma_5 = S_{55}\tau_5 = \frac{\tau_5}{G_{13}} \quad (2.45)$$

Hemendik ondoko erlazioa lortzen da:

$$S_{55} = \frac{1}{G_{13}}$$

(2.35) ekuazioa eta atal honetan lortutako emaitzak kontuan hartuz, tentsio - deformazio erlazioak ingeniaritzako konstanteak erabiliz honela adieraz daitezke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Malgutasun matrizearen simetria kontuan hartuz:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$$

Eta orokorrean:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

2.4.3 MATERIAL ORTOTROPOA TENTSIO EGOERA LAUEAN

Normalean, laminatu konpositean tentsio egoera lauan dagoela kontsidera daiteke, hau da, planoarekiko elkarzuta diren tentsio-osagaiak zero dira:

$$\sigma_3 = \tau_4 = \tau_5 = 0 \quad (2.47)$$

Tentsio-deformazio erlazioa honela gelditzen da:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tau_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

eta (2.48) ekuazioak sortzen duen ekuazio sistema:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 \\ \sigma_2 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{23}\varepsilon_3 \\ 0 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3 \\ \gamma_4 &= \gamma_5 = 0 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (2.49)$$

(2.49)₃ ekuaziotik ε_3 bakanduz eta (2.49)₁ ekuazioan (2.49)₂ ordezkatur:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \left(C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{11}\varepsilon_1 + Q_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= \left(C_{12} - \frac{C_{23}C_{13}}{C_{33}} \right) \varepsilon_1 + \left(C_{22} - \frac{C_{23}C_{23}}{C_{33}} \right) \varepsilon_2 = Q_{12}\varepsilon_1 + Q_{22}\varepsilon_2 \\ \tau_6 &= C_{66}\gamma_6 = Q_{66}\gamma_6 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Q_{ij} materialaren zurruntasun murriztuaren koefizienteak izanik:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} - C_{j3}}{C_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2.51)$$

(2.50) ekuazioa matrize moduan honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

(2.52) ekuazioaren alderantzizkoa kalkulatu:

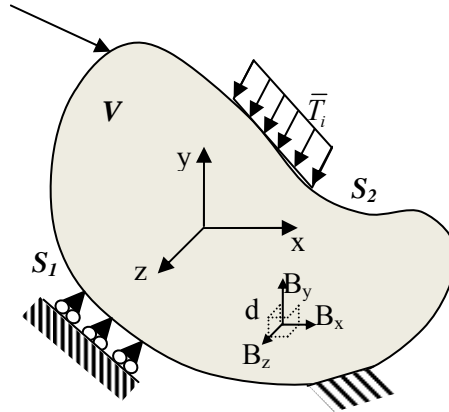
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

Non S_{ij} materialaren malgutasun murriztuaren koefizienteak diren.

2.5 PROBLEMA ELASTIKOAREN PLANTEAMENDU OROKORRA

2.5.1 DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO FORMULAZIOA.

2.10 irudiko gorputzean S gainazala bi zatitan bananduko da: S_1 mugalde indeterminatua da, \bar{u}_i desplazamenduak inposatuta daude eta tentsioak ezezagunak dira. S_2 mugalde determinatua da, tentsioak inposatuta daude eta desplazamenduak ezezagunak dira.



2.10 Irudia. Solido elastikoa.

Problema elastikoaren ezezagun orokorrak 15 dira [2,5,6,9]: σ_{ij} tentsio eremuaren 6 osagaiak, ε_{ij} deformazio eremuaren 6 osagaiak, eta u_i desplazamendu eremuaren 3 osagaiak. Ekuazioak ere 15 dira: 3 oreka ekuazioak, desplazamendu - deformazio erlazioaren 6 ekuazioak eta materialaren portaeraren 6 ekuazioak, hau da:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (2.4)\text{bis}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.23)\text{bis}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.31)\text{bis}$$

Gainera, gorputz-zurrunaren higidurarekin lotutako indeterminazioa saihesteko gorputzaren desplazamenduen eragozpenak nahikoa direla suposatzen da. Horregatik, ondoko mugalde-baldintzak ere bete beharko ditu:

$$S_1 \text{ mugaldean} \quad u_i = \bar{u}_i \quad (2.54)$$

$$S_2 \text{ mugaldean} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (2.11)\text{bis}$$

Metodo honetan, ezezagun nagusiak desplazamenduak dira, eta desplazamendu eta hauen deribatuen jarraitasun baldintzak inposatzean bateragarritasunaren ekuazioak automatikoki betetzen direla suposatzen da [1,10]. (2.23) eta (2.28) ekuazioak (2.4) oreka ekuazioetan ordezkaturik, Navier-en 3 ekuazioak lortzen dira. Ekuazio hauen bitartez problema elastikoa desplazamenduen menpe gelditzen da eta, formulazio

honek oreka baldintzak betetzen direla bermatzen du desplazamendu eremua jarraitua bada.

2.5.2 TENTSIOETAN OINARRITUTAKO FORMULAZIOA

Batzuetan, desplazamenduak kalkulatu gabe tentsioak kalkula daitezke. Lortutako tentsio eremuak oreka baldintzak bete behar ditu eta desplazamendu eremu bateragarri batekin lotuta egon behar du. Horretarako bateragarritasunaren ekuazioak inposatu behar dira [2,6-9]. Love-k, deformazioen bateragarritasunaren ekuazioen bitartez, tentsioak zuzenean lortzeko formulazioa deskribatu zuen [10].

Tentsioetan oinarritutako formulazioan ezezagun orokorrak σ_{ij} tentsio eremuaren 6 osagaiak eta ε_{ij} deformazio eremuaren 6 osagaiak [11,12]. Problema elastiko tentsioetan planteatzeko gorputzeko ekuazioak ondokoak dira:

$$\sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (2.4)\text{bis}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (2.32)\text{bis}$$

$$\varepsilon_{(i)(j),kl} + \varepsilon_{kl,(i)(j)} - \varepsilon_{l(i),k(j)} - \varepsilon_{k(i),l(j)} = 0^\ddagger \quad (2.26)\text{bis}$$

Formulazio honetan, (2.32) ekuazioa (2.26) ekuazioan ordezkatzuz, problema elastikoa desplazamendurik gabe ezar daiteke, eta lortzen diren ekuazioak bateragarritasun edo Beltrami-Mitchell-en ekuazioak dira.

Gainera, tentsioen mugalde-baldintzak ere bete beharko ditu:

$$S_2 \text{ mugaldean} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (2.11)\text{bis}$$

[‡] Bi indize aske dira. Ez da i indizearen batuketa.

2.6 LAN BIRTUALEN PRINTZIPIOAK

2.6.1 SARRERA

Elastikotasunaren gorputzeko ekuazio orokorrak eta hauekin lotuta dauden mugaldeko baldintzak lan birtualen printzipio bariatzionalen bitartez ere lor daitezke. Lan birtualaren printzipioan desplazamenduen bariatzioak aplikatuz tentsioen oreka ekuazioak lortzen dira. Lan birtual osagarriaren printzipioan tentsioen bariatzioak aplikatuz deformazioen bateragarritasun ekuazioak lortzen dira.

2.6.2 LAN BIRTUALAREN PRINTZIPIOA

PVW printzipioan gorputzaren deformazio energia eta kanpoko kargen lana berdina dira, hau da [1]:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V B_i \delta u_i dV + \int_S \bar{T}_i \delta u_i dS \quad (2.55)$$

Non $\delta \varepsilon_{ij}$ eta δu_i deformazio eta desplazamendu eremuen bariatzioak diren. σ_{ij} simetrikoa denez, (2.55) ekuazioaren lehenengo gaian ondoko aldaketa egin daiteke:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \delta \left[\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right] dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_i)_{,j} dV + \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_j)_{,i} dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV \end{aligned} \quad (2.56)$$

(2.56) ekuazioaren azken gaia honela idatz daiteke:

$$\int_V \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (2.57)$$

Dibergentzia teorema aplikatuz [1,2]:

$$\int_V \sigma_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV = \int_S \sigma_{ij} \delta u_i \nu_j dS - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (2.58)$$

Non v_j gainazalarekiko bektore elkarzutaren kosinu zuzentzaileak diren. Horrela, δu_i duten gai guztiak taldekatuz, (2.55) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\int_V \delta u_i (\sigma_{ij,j} + B_i) dV + \int_S \delta u_i (\sigma_{ij} v_j - \bar{T}_i) dS = 0 \quad (2.59)$$

δu_i balio arbitrarioak direnez, (2.59) ekuaziotik gorputzaren oreka ekuazioak eta mugalde baldintzak lortzen dira.

$$\text{Gorputzean } (V) \quad \sigma_{ij,j} + B_i = 0 \quad (2.4)\text{bis}$$

$$\text{Gainazalean } (S) \quad \sigma_{ij} v_j - \bar{T}_i = 0 \quad (2.11)\text{bis}$$

Beraz, Lan Birtualaren Printzipioa betetzea gorputzean eta gainazalean oreka baldintzak betetzeko baldintza beharrezko eta nahikoa dela frogatu da.

2.6.3 LAN BIRTUAL OSAGARRIAREN PRINTZIBIOA

PCVW deformazio energia osagarrian tentsio eremuaren bariaziotik lortzen da. Printzipio honek deformazioen bateragarritasuna bermatzen du eta deformazio eta tentsio eremu bateragarrien arteko erlazioa erakusten du [1,13].

B_i bolumen indarririk ez badago, bariazioa honakoa izango da [2]:

$$\int_V \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_S u_i \delta \bar{T}_i dS = 0 \quad (2.60)$$

PCVW printzipioa betetzeko, $\delta \sigma_{ij}$ tentsioen bariazioak oreka baldintzak bete behar ditu [2,14]:

$$\begin{aligned} (\delta \sigma_{ij})_{,j} &= 0 & V & \text{gorputzean} \\ (\delta \sigma_{ij}) v_j &= 0 & S_2 & \text{mugaldean} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Honako tentsio bariazioak hartuz, oreka baldintzak automatikoki betetzen dira:

$$\begin{aligned}
 \delta\sigma_{11} &= \phi_{22,33} + \phi_{33,22} - 2\phi_{23,33} \\
 \delta\sigma_{22} &= \phi_{33,11} + \phi_{11,33} - 2\phi_{31,31} \\
 \delta\sigma_{33} &= \phi_{11,22} + \phi_{22,11} - 2\phi_{12,12} \\
 \delta\sigma_{23} &= \phi_{31,12} + \phi_{12,13} - \phi_{11,23} - \phi_{23,11} \\
 \delta\sigma_{31} &= \phi_{12,23} + \phi_{23,21} - \phi_{22,31} - \phi_{31,22} \\
 \delta\sigma_{12} &= \phi_{23,31} + \phi_{31,32} - \phi_{33,12} - \phi_{12,33}
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Edo modu laburbilduan:

$$\delta\sigma_{ij} = e_{imr} e_{jns} \phi_{rs,mn} \tag{2.63}$$

Non $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ tentsio funtzio arbitrarioak diren eta e_{imr} permutazio tentsorea den. Tentsio funtzioak oreka baldintzak betetzen dituzten tentsio sistema orokorra da, eta, mugalde- baldintzen bitartez, problema jakin baten ebazpena ematen du [2,15]. (2.62) ekuazioan $i \neq j$ denean $\phi_{ij} = 0$ baldintza aplikatuz, Maxwellen tentsio funtzioak lortzen dira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \phi_{33,22} + \phi_{22,33} & \tau_{12} &= -\phi_{33,12} \\
 \sigma_{22} &= \phi_{11,33} + \phi_{33,11} & \tau_{23} &= -\phi_{11,23} \\
 \sigma_{33} &= \phi_{22,11} + \phi_{11,22} & \tau_{31} &= -\phi_{22,31}
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Moreraren tentsio funtzioak, berriz, $i=j$ denean $\phi_{ij} = 0$ eginez lortzen dira:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -2\phi_{23,23} & \tau_{12} &= \phi_{23,31} + \phi_{31,32} - \phi_{12,33} \\
 \sigma_{22} &= -2\phi_{31,31} & \tau_{23} &= \phi_{31,12} + \phi_{12,13} - \phi_{23,11} \\
 \sigma_{33} &= -2\phi_{12,12} & \tau_{31} &= \phi_{12,23} + \phi_{23,21} - \phi_{31,22}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

(2.64) Maxwellen tentsio funtzioak erabiliz, PCVW (2.60) honela idatz daiteke:

$$\int_V \left[\varepsilon_{(i)(i)} \left(\delta\phi_{(k)(k),(j)(j)} + \delta\phi_{(j)(j),(k)(k)} \right) - 2\varepsilon_{jk} \delta\phi_{(i)(i),jk} \right] dV = 0 \quad (2.66)$$

Green teorema aplikatuz eta $\delta\phi_{ii}$ duten gai guztiak taldekatuz:

$$\int_V \delta\phi_{(i)(i)} \left(\varepsilon_{(j)(j),(k)(k)} + \varepsilon_{(k)(k),(j)(j)} - 2\varepsilon_{(j)(k),(j)(k)} \right) dV + \text{Azalera integralak} = 0 \quad (2.67)$$

$\delta\phi_{(i)(i)}$ gaia gorputzean zehar arbitrarioa denez, (2.67) ekuaziotik, Saint-Venant-en bateragarritasunaren lehenengo blokeko 3 ekuazioak lortzen dira:

$$\varepsilon_{(j)(j),(k)(k)} + \varepsilon_{(k)(k),(j)(j)} - 2\varepsilon_{(j)(k),(j)(k)} = 0 \quad (2.68)$$

Prozedura berdina jarraituz baina orain (2.65) Morera-ren tentsio funtzioak ordezkatzuz, (2.60) ekuazioko PCVW honela idatz daiteke:

$$\int_V \left[\varepsilon_{(i)(i)} \left(-2\delta\phi_{(j)(k),(j)(k)} \right) + 2\varepsilon_{jk} \left(\delta\phi_{k(i),(i)j} + \delta\phi_{(i)j,(i)k} - \delta\phi_{jk,(i)(i)} \right) \right] dV = 0 \quad (2.69)$$

Green teorema aplikatuz,

$$\int_V \left[\delta\phi_{jk} \left(\varepsilon_{(i)(i),jk} + \varepsilon_{jk,(i)(i)} - \varepsilon_{k(i),j(i)} - \varepsilon_{j(i),k(i)} \right) \right] dV + \text{Azalera integralak} = 0 \quad (2.70)$$

$\delta\phi_{jk}$ gorputzean zehar arbitrarioa denez, gorputzaren bateragarritasunaren bigarren blokearen beste 3 ekuazioak lortzen dira.

$$\varepsilon_{(i)(i),jk} + \varepsilon_{jk,(i)(i)} - \varepsilon_{k(i),j(i)} - \varepsilon_{j(i),k(i)} = 0 \quad (2.71)$$

Lortutako (2.68) eta (2.71) ekuazioak Saint - Venant-en gorputzeko 6 ekuazioak dira. Beraz, Maxwell edo Morera-ren tentsio funtzioak erabiltzean 3 bateragarritasun ekuazio independente lortzen dira.

2.7 ERREFERENTZIAK

1. Shames H, Dym CL. (1985) Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisfere Publishing Corporation.
2. Fung, YC; Tong, P. (2008). Classical and computational solid mechanics. World scientific.
3. Mujika, F. (2011). Mecánica de laminados composites, Escuela Politécnica de Donostia-San Sebastián, Donostia-San Sebastián.
4. Alcaraz JL, Ansola R, Canales J, Tárrago JA, Veguería E, (2012) Elasticidad y Resistencia de Materiales. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Bilbao.
5. Ortiz Berrocal, I. ((1985) Elasticidad. Universidad Politécnica de Madrid., Madrid.
6. Shames, IH; Cozzareli, FA. (1997) Elastic and inelastic Stress analysis. Taylor & Francis. Washington.
7. Daniel, I.M. e Ishai, O. (2006). Engineering Mechanics of Composite Materials. Second Edition, Oxford University Press, New York.
8. Chou, PC; Pagano, J (1992). Elasticity, Tensor, Duadic and engineering approaches. Dover publications, new York.
9. Paris, F (2000). Teoría de la elasticidad. Grupo de elasticidad y Resistencia de materials, Sevilla.
10. Love, A. (1994). A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover.
11. Washizu, K. (1975). Variational methods in elasticity and plasticity Pergamon Press.
12. Robinson, J. (1973). Integrated Theory of finite element methods. Wiley & Sons.
13. Patnaik, SN; Sattish, HG. (1990). Analysis of continuum using boundary compatibility conditions of integrated force method. *Computers & structures*, **34-2**, 287-295.
14. Southwell, RV. (1946). Relaxation methods in theoretical physics, Clarendon Press.
15. Chou, CP; Pagano, NJ. (1992). Elasticity, Tensor, Dyadic and Engineering approaches, Dover.

LAMINATU KONPOSITEEN ANALISIA

3.1 SARRERA

Laminatu konpositeak norabide bakarreko laminak orientazio desberdinetan pilaturik dituzten materialak dira. Mikro-mekanikan zuntza eta matrizearen arteko lotura aztertzen da, erresistentzian eta beste propietate batzuetan eragina dutenak. Mikro - mekanikak konpositearen osagaien propietateak portaera mekaniko globalarekin erlazionatzen du [1].

Makro-mekanikak lamina bakoitza material homogeen kontsideratzen du, zuntza eta matrizearen arteko ezberdintasunak kontuan hartu gabe. Zuntz luzera, kantitatea eta kokapenaren arabera, laminaren portaera mekanikoa desberdina izango da. Luzera desberdineko zuntzak matrizean aleatorioki kokatuak erabiltzen badira, laminaren portaera kuasi-isotropoa izango da [2]. Zuntz luzeak erabiltzen badira, zuntzaren norabidean eta zeharkako norabidean laminaren portaera anisotropoa izango da. Laminatu batetik bestera pasatzean zuntzaren angeluaren arabera materialaren propietateak aldatzen dira.

2.4 atalean ikusi denez, material anisotropo baten portaera mekanikoa definitzeko 21 konstante elastiko independente behar dira. Simetria materialeko baldintzak betetzen direnean behar diren konstante kopurua murrizten da. Norabide bakarreko konpositeen kasuan, adibidez, 9 konstante behar dira. Laminen pilaketaren ordenak eta orientazioak laminatuaren propietate mekanikoetan eragina dute. Laminatuen

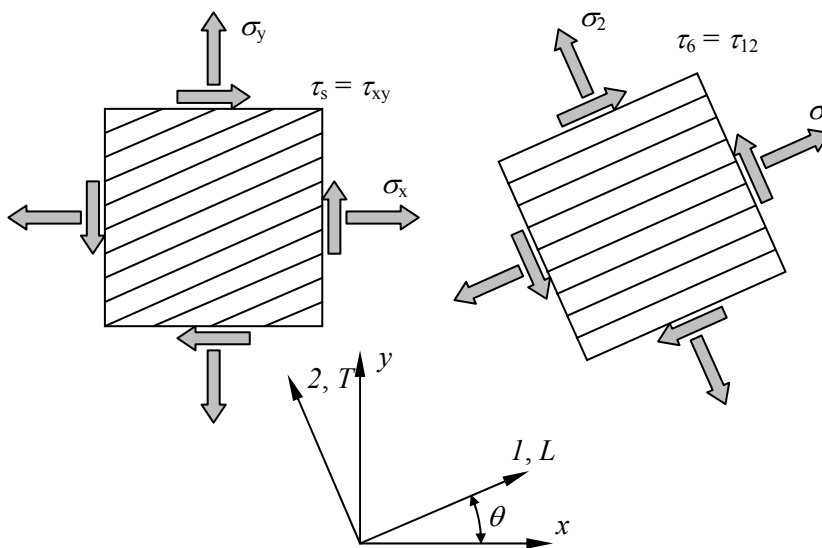
teoria aplikatuz, lamina bakoitzaren propietateak ezagututa laminatuaren portaera zehaztu daiteke. Materialaren puntu bakoitzean hiru simetria-plano aurki daitezke eta hauek ortotropia plano nagusiak dira [3].

3.2 NORABIDE BAKARREKO LAMINAREN PORTAERA MEKANIKOA

3.2.1 TENTSIO ETA DEFORMAZIOEN TRANSFORMAZIOAK

Laminatu bat zuntz orientazio desberdinak izan ditzakeen lamina sekuentziaren bitartez osatuta dago, beraz, laminaren zuntz orientazioaren arabera konstante elastikoak aldatu egiten dira. Atal honetan z ardatzarekiko laminaren planoaren biraketa sortzen denean konstante elastikoak jasaten dituzten transformazioak aurkezten dira.

3.1 irudiko norabide bakarreko lamina ortotropo batean 012 erreferentziatik $0xy$ planora pasatzeko, 3 edo z ardatzarekiko erlojuen aldeko biraketa suposatzen da.



3.1 Irudia. Laminaren tentsio-osagaiak ardatz sistema global eta lokaletan.

$Oxyz$ erreferentzia sistema laminatuaren sistema globala da eta $O123$ sistema laminaren sistema lokala da, 3.1 irudian ikusten den bezala. Beraz, laminatuaren erreferentzia sistema globalean adierazitako tentsioak eta deformazioak laminaren sistema lokalean adierazteko transformazio bat lortu behar da. θ angeluaren biraketa z ardatzarekiko eginez erreferentzia sistema globaletik lokalera pasatzen da.

Laminaren tentsioak definitzeko honako notazioa erabiliko da [1]: $(\sigma_{ij})_{Oxyz}$ sistema globaleko tentsioak dira eta $(\sigma_{kq})_{O123}$ ortotropia norabide nagusietan. Sistema globaleko tentsioak laminako sistema lokalean adierazteko transformazioa 2. mailako tentsore baten transformazio ortogonal da:

$$(\sigma_{kq})_{O123} = r_{ki} r_{ql} (\sigma_{ij})_{Oxyz} \quad (3.1)$$

(3.1) ekuazio sistematik kosinu zuzentzaile matrizean zero diren gaiak ezabatuz:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= r_{1x} r_{1x} \sigma_{xx} + r_{1x} r_{1y} \sigma_{xy} + r_{1y} r_{1x} \sigma_{yx} + r_{1y} r_{1y} \sigma_{yy} \\ \sigma_{22} &= r_{2x} r_{2x} \sigma_{xx} + r_{2x} r_{2y} \sigma_{xy} + r_{2y} r_{2x} \sigma_{yx} + r_{2y} r_{2y} \sigma_{yy} \\ \sigma_{33} &= r_{3z} r_{3z} \sigma_{zz} \\ \sigma_{23} &= r_{2x} r_{3z} \sigma_{xz} + r_{2y} r_{3z} \sigma_{yz} \\ \sigma_{31} &= r_{3z} r_{1x} \sigma_{zx} + r_{3z} r_{1y} \sigma_{zy} \\ \sigma_{12} &= r_{1x} r_{2x} \sigma_{xx} + r_{1x} r_{2y} \sigma_{xy} + r_{1y} r_{2x} \sigma_{yx} + r_{1y} r_{2y} \sigma_{yy} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Non r_{ki} , k sistema lokalak i sistema globalarekin eratzen duen angeluaren kosinua den. r_{ki} matrize moduan adieraz daiteke:

$$\begin{bmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Non $l = \cos \theta$, $m = \sin \theta$ diren. Beraz, (3.3) ekuazioa kontuan hartuz eta (2.33) ekuazioaren Voight-en notazioan, (3.2) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ -lm & lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Eta $q = yz, r = zx, s = xy$ notazioa erabiliz [2], (3.4) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & l & 0 \\ -lm & lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_q \\ \tau_r \\ \tau_s \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

Eta modu laburbilduan,

$$\{\sigma\}_{0123} = [T_\theta] \{\sigma\}_{0xyz} \quad (3.6)$$

Non $[T_\theta]$ transformazio matrizea den. Laminaren sistema lokaletik laminatuaren sistema globalera pasatzeko behar den transformazioa, aurreko kasuaren kontrako biraketa da, beraz:

$$\{\sigma\}_{0xyz} = [T_{-\theta}] \{\sigma\}_{0123} \quad (3.7)$$

non $[T_{-\theta}]$ alderantzizko transformazio matrizea den:

$$[T_{-\theta}] = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ lm & -lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Deformazioen kasuan, transformazioa (3.7) ekuazio bera erabiltzen da.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_q \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & 2lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ lm & -lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Tentsio-deformazio erlazioak γ_{ij} deformazio angeluarren menpe agertzen dira.

$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}$ dela kontuan hartuz, (3.9) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_q \\ \gamma_r \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -lm \\ m^2 & l^2 & 0 & 0 & 0 & lm \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 2lm & -2lm & 0 & 0 & 0 & l^2 - m^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Beraz, (3.5) ekuazioko transformazio matrizea jarraituz, (3.10) ekuazioa honela laburbildu daiteke:

$$\{\varepsilon\}_{Oxyz} = [T_\theta]^T \{\varepsilon\}_{O123} \quad (3.11)$$

θ angeluaren ordez $-\theta$ jarritz, (3.11) ekuazioko alderantzizko transformazioa lortzen da:

$$\{\varepsilon\}_{O123} = [T_{-\theta}]^T \{\varepsilon\}_{Oxyz} \quad (3.12)$$

Material ortotropo batean, tentsio eta deformazioen arteko erlazioa zurruntasun koefizienteen funtzioan (2.48) ekuazioan agertzen da eta modu laburbilduan honela idatz daiteke:

$$\{\sigma\}_{O123} = [C]_{O123} \{\varepsilon\}_{O123} \quad (3.13)$$

Sistema globalean, (3.13) erlazioa honela adierazten da:

$$\{\sigma\}_{Oxyz} = [C]_{Oxyz} \{\varepsilon\}_{Oxyz} \quad (3.14)$$

(3.13) ekuazioa $[T_{-\theta}]$ ez aurre biderkatuz eta (3.7) eta (3.12) ekuazioak kontuan hartuz:

$$\{\sigma\}_{Oxyz} = [T_{-\theta}][C]_{O123}[T_{-\theta}]^T \{\varepsilon\}_{Oxyz} \quad (3.15)$$

(3.14) eta (3.15) ekuazioak konparatuz honako erlazioa lortzen da:

$$[C]_{Oxyz} = [T_{-\theta}][C]_{O123}[T_{-\theta}]^T \quad (3.16)$$

(2.48) ekuazioko zurruntasun matrizean (3.16) ekuazioko biderketa matrizialak aplikatuz:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_q \\ \tau_r \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{zx} & 0 & 0 & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yz} & 0 & 0 & C_{ys} \\ C_{zx} & C_{yz} & C_{zz} & 0 & 0 & C_{zs} \\ 0 & 0 & 0 & C_{qq} & C_{qr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{qr} & C_{rr} & 0 \\ C_{xs} & C_{ys} & C_{zs} & 0 & 0 & C_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_q \\ \gamma_r \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

eta (3.17) ekuazioko matrizearen koefizienteak honakoak dira:

$$\begin{aligned}
C_{xx} &= C_{11}l^4 + 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}m^4 + 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{xy} &= C_{11}l^2m^2 + C_{12}(l^4 + m^4) + C_{22}l^2m^2 - 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{xx} &= C_{13}l^2 + C_{23}m^2 \\
C_{xs} &= C_{11}l^3m + C_{12}(lm^3 - l^3m) - C_{22}lm^3 + 2C_{66}(lm^3 - l^3m) \\
C_{yy} &= C_{11}m^4 + 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}l^4 + 4C_{66}l^2m^2 \\
C_{yz} &= C_{13}m^2 + C_{23}l^2 \\
C_{ys} &= C_{11}lm^3 + C_{12}(l^3m - lm^3) - C_{22}l^3m + 2C_{66}(l^3m - lm^3) \\
C_{zz} &= C_{33} \\
C_{zs} &= (C_{13} - C_{23})lm \\
C_{qq} &= C_{44}l^2 + C_{55}m^2 \\
C_{qr} &= (C_{55} - C_{44})lm \\
C_{rr} &= C_{44}m^2 + C_{55}l^2 \\
C_{ss} &= C_{11}l^2m^2 - 2C_{12}l^2m^2 + C_{22}l^2m^2 + C_{66}(l^2 - m^2)^2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

3.2.2 TENTSIO LAU OROKORTUA

Laminatu konpositeen teoria klasikoan tentsio normala lodieran zero dela suposatzen da, hau da, $\sigma_z = 0$. Kasu horretan, laminaren zurruntasun matrizea honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \tag{3.19}$$

Tentsioak eta deformazioak planoan eta planotik kanpo erlazionatuta ez daudenez, tentsio lauaren (2.52) ekuazioko analisia onartu daiteke. Orduan, (3.19) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

malgutasun koefizienteen kasuan ez da aldatzen:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Bestalde, tentsioen transformazioan, σ_3 edo σ_z tentsioei dagozkien ilara eta zutabea ezabatu behar dira, baina honek ez dauka eraginik (3.16) ekuazioko transformazioan. Tentsio laua orokortuan $\sigma_z = 0$ denez, (3.20) ekuazioko transformazioa laminaren zurruntasun matrizean aplikatuz, honela gelditzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \\ \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} & 0 & 0 \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} & 0 & 0 \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{qq} & C_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & C_{qr} & C_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \\ \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Q_{ij} zurruntasun murriztuaren koefizienteak, C_{ij} koefizienteak lortzeko erabilitako transformazio-prozedurak jarraituz lortzen dira:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= Q_{11}l^4 + 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}m^4 + 4Q_{66}l^2m^2 \\
 Q_{xy} &= Q_{11}l^2m^2 + Q_{12}(l^4 + m^4) + Q_{22}l^2m^2 - 4Q_{66}l^2m^2 \\
 Q_{xs} &= Q_{11}l^3m + Q_{12}(lm^3 - l^3m) - Q_{22}lm^3 + 2Q_{66}(lm^3 - l^3m) \\
 Q_{yy} &= Q_{11}m^4 + 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}l^4 + 4Q_{66}l^2m^2 \\
 Q_{ys} &= Q_{11}lm^3 + Q_{12}(l^3m - lm^3) - Q_{22}l^3m + 2Q_{66}(l^3m - lm^3) \\
 Q_{ss} &= Q_{11}l^2m^2 - 2Q_{12}l^2m^2 + Q_{22}l^2m^2 + Q_{66}(l^2 - m^2)^2
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.22) ekuazioaren alderantzizko erlazioa honako hau da:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \\ \gamma_q \\ \gamma_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} & 0 & 0 \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{ys} & 0 & 0 \\ S_{xs} & S_{ys} & S_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{qq} & S_{qr} \\ 0 & 0 & 0 & S_{qr} & S_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \\ \tau_q \\ \tau_r \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

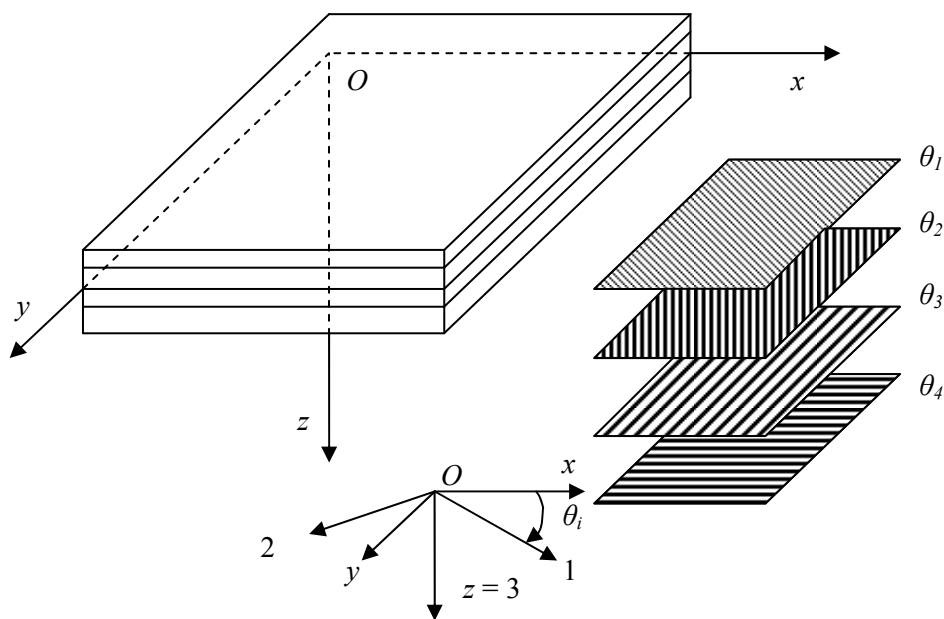
Eta malgutasun koefizienteak honako hauek dira:

$$\begin{aligned}
 S_{xx} &= S_{11}l^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}m^4 + S_{66}l^2m^2 \\
 S_{xy} &= S_{11}l^2m^2 + S_{12}(l^4 + m^4) + S_{22}l^2m^2 - S_{66}l^2m^2 \\
 S_{xs} &= 2S_{11}l^3m + 2S_{12}(lm^3 - l^3m) - 2S_{22}lm^3 + S_{66}(lm^3 - l^3m) \\
 S_{yy} &= S_{11}m^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}l^4 + S_{66}l^2m^2 \\
 S_{ys} &= 2S_{11}lm^3 + 2S_{12}(l^3m - lm^3) - 2S_{22}l^3m + S_{66}(l^3m - lm^3) \\
 S_{qq} &= S_{44}l^2 + S_{55}m^2 \\
 S_{qr} &= (S_{55} - S_{44})lm \\
 S_{rr} &= S_{44}m^2 + S_{55}l^2 \\
 S_{ss} &= 4S_{11}l^2m^2 - 8S_{12}l^2m^2 + 4S_{22}l^2m^2 + S_{66}(l^2 - m^2)^2
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.3 PLAKA LAMINATUEN TEORIA KLASIKOA

3.3.1 SARRERA

Laminatu anisotropoen teoria orokorrean, orientazio desberdineko laminak bata bestearen gainean pilaturik kontsideratzen dira. Laminen kokapenaren eta beren orientazioen arabera, laminatuaren ezaugarri mekanikoak aldatu egiten dira. Material arinagoak izateaz gain, badago aipatutako konpositeen beste abantaila bat: material isotropo tradizioaletan materialaren propietateak finkoak dira, baina konpositeen kasuan, erabilitako lamina guztiak berdinak izanik ere, materialaren ezaugarriak diseinatu egin daitezke, laminaren orientazioa eta kokapena plakak jasango duen kargaren arabera definituz [4].



3.2 Irudia. Lau laminaz osatutako laminatua.

Laminatuen analisisian desplazamendu eremuaren sinplifikazioak egiten dira. Eredu teoriko sinpleena Geruza Bakarria Baliokidearen Teoria (*Equivalent Single Layer Theories*, ESLT) da. Teoria hauetan laminatuaren edozein punturen desplazamendua erreferentzia plano batekiko ezartzen da. Teoria honen abantaila sinpletasuna da,

baina laminatuaren portaera globala auresaten badu ere, eragin lokalak ez ditu kontutan hartzen.

ESLT teoria hauen artean sinpleena Plaka Laminatuen Teoria Klasikoa (*Classical Laminated Plate Theory*, CLPT) da [5] eta ondoko hipotesietan oinarritzen da [1]:

1. Laminak kuasi-homogeneoak eta ortotropoak dira.
2. Laminatua mehea da, zabalera eta luzera bere lodiera baino askoz ere handiagoak izanik, eta laminatu eta lamina guztiak tentsio egoera lauan daude ($\sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$).
3. Desplazamenduen deribatuak lehen mailako infinitesimoak dira.
4. Desplazamenduak funtzio jarraituak dira laminatuaren eremuan.
5. xy planoko desplazamenduak linealki aldatzen dira laminatuaren lodieran zehar, hau da, u , v desplazamenduaren osagaiak z -ren menpeko funtzio linealak dira.
6. γ_{zx} eta γ_{yz} deformazio tanjenzialak arbuigarriak dira.
7. Tentsio-deformazio erlazioak linealak dira.
8. ε_z luzetarako deformazioa arbuigarria da xy plano barneko ε_x , ε_y eta γ_{xy} deformazioekin alderatuz.

5. eta 6. hipotesiek Kirchhoff-en deformazio hipotesia betetzen dela bermatzen dute, hau da, laminatuaren deformazioan, erdiko gainazalarekiko elkarzuta diren zuzenak, zuzen eta gainazalarekiko elkarzut mantentzen dira [3,4]. 5. eta 8. hipotesien ondorioz, desplazamendu eremua honela adieraz daiteke:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + zF_1(x, y) \\v(x, y, z) &= v_0(x, y) + zF_2(x, y) \\w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}\tag{3.26}$$

non u_0 , v_0 y w_0 erdiko planoaren puntuen desplazamenduak diren hiru ardatz cartesianarren funtzioetan. Erdiko plano hau erreferentzia planotzat hartuko da.

6. hipotesiaren ondorioz:

$$\begin{aligned}\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + F_1(x, y) = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + F_2(x, y) = 0\end{aligned}\quad (3.27)$$

Beraz, F_1 eta F_2 funtzio ezezagunak (3.27) ekuazioetatik lor daitezke:

$$\begin{aligned}F_1(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ F_2(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (3.28)$$

Deformazioak (3.26) ekuazioan emandako desplazamenduen eremua deribatuz lortzen dira. (3.28) ekuazioa kontuan hartuz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \gamma_s &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\end{aligned}\quad (3.29)$$

(3.29) ekuazioetan, erdiko planoaren deformazioekin eta kurbadurarekin erlazionatuta dauden gaiak agertzen dira. Erdiko plano barneko deformazioak honako hauek dira:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\quad (3.30)$$

Erdiko planoko kurbadurak honakoak dira:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad \kappa_{xy} = \kappa_s = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\quad (3.31)$$

Beraz, laminatuaren edozein puntuko deformazioak, erreferentzia planoko deformazioekin eta kurbadurarekin honako ekuazioaren bitartez erlaziona daitezke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

3.3.2 LAMINA BATEN TENTSIO-DEFORMAZIO ERLAZIOAK

Tentsioak k lamina bakoitzaren deformazioetatik lortzen dira. k lamina bakoitzeko, laminatuaren erreferentzia sisteman adierazitako tentsio-deformazio erlazioak erabiltzen dira. Erlazio hau (3.22) ekuaziotik lortzen da:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

(3.32) ekuazioa (3.33) ekuazioan ordezkatur:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Edo modu laburbilduan:

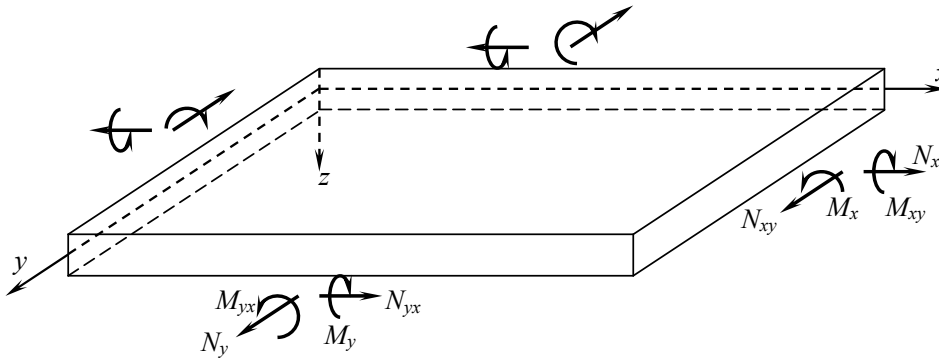
$$\{\sigma\}_k = [Q]_k (\{\varepsilon^0\} + z \{\kappa\}) \quad (3.35)$$

(3.32) ekuazioan ikusten denez, deformazioak laminatuaren lodieran zehar linealki aldatzen badira ere, (3.34) ekuazioa jarraituz tentsioak laminaz lamina modu etenean alda daitezke, lamina batetik bestera zurruntasun murriztuaren koefizienteen aldaketa etena delako.

3.3.3 INDAR ETA MOMENTU ERRESULTANTEAK

Lamina batetik bestera tentsioak jarraituak ez direnez, egokiagoa da tentsioen eragin globala kontsideratzea laminatuaren lodiera osoan. Gainera, datu ezaguna eragin globala izaten da. Horretarako, h lodieran zehar ari diren indar eta momentu erresultanteak definitzen dira.

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz & N_{xy} &= N_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_s dz \\ M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz & M_{xy} &= M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_s z dz \end{aligned} \quad (3.36)$$

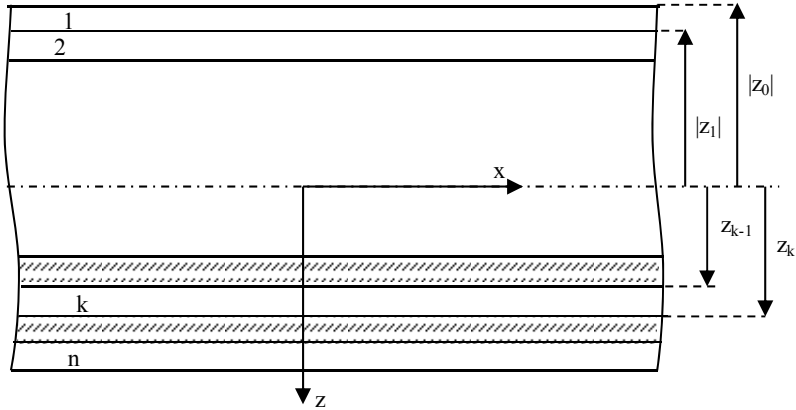


3.3 Irudia. Laminatuaren indar eta momentu erresultanteak.

3.3 irudiko indar eta momentu erresultanteak luzera unitateko indarrak eta momentuak dira, hurrenez hurren. Integral bakoitza lamina bakoitzari dagokion integralen batukarian deskonposatzen bada, (3.36) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k dz \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k z dz \end{aligned} \quad (3.37)$$

Laminak zenbatzeko irizpidea eta k lamina bakoitzaren z_k eta z_{k-1} koordenatuak 3.4 irudian ikusten dira.



3.4 Irudia. Laminatuaren koordenatuak eta laminak zenbatzeko irizpidea

3.3.4 LAMINATUAREN ZURRUNTASUN ETA MALGUTASUN KOEFIZIENTEAK

(3.34) ekuazioa (3.37) ekuazioan ordezkatzuz:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \quad (3.38)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \gamma_s^1 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\} \quad (3.39)$$

Modu laburbilduan (3.38) eta (3.39) ekuazioak honela gelditzen dira:

$$\{N\}_{Oxy} = \sum_{k=1}^n \left\{ [Q]_{Oxy}^k \{\varepsilon^0\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + [Q]_{Oxy}^k \{\kappa\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\} \quad (3.40)$$

$$\{M\}_{Oxy} = \sum_{k=1}^n \left\{ [Q]_{Oxy}^k \{\varepsilon^0\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + [Q]_{Oxy}^k \{\kappa\}_{Oxy} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\} \quad (3.41)$$

(3.40) ekuazioko integralak ebatziz honakoa lortzen da:

$$\{N\}_{Oxy} = \left[\sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k - z_{k-1}) \right] \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \{\kappa\}_{Oxy} \quad (3.42)$$

(3.42) ekuazioa matrize moduan adieraz daiteke:

$$\{N\}_{Oxy} = [A]_{Oxy} \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + [B]_{Oxy} \{\kappa\}_{Oxy} \quad (3.43)$$

(3.41) ekuazioarekin gauza bera eginez honakoa lortzen da:

$$\{M\}_{Oxy} = [B]_{Oxy} \{\varepsilon^0\}_{Oxy} + [D]_{Oxy} \{\kappa\}_{Oxy} \quad (3.44)$$

(3.43) eta (3.44) ekuazioetako matrizeak honakoak dira:

$$\begin{aligned} [A]_{Oxy} &= \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k - z_{k-1}) \\ [B]_{Oxy} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ [D]_{Oxy} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{Oxy}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Beraz, indar eta momentu erresultanteak eta erdiko planoaren deformazio eta kurbaduraren arteko erlazioak honakoak dira, modu hedatu eta laburbilduan, hurrenez hurren.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} & B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} & B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} & B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \\ \hline B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} & D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} & D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} & D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

$\begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix}$ matrizea laminatuaren zurruntasun matrizea da.

A_{ij} mintz moduko zurruntasun koefizienteak dira laminatuaren planoan, planoan sortutako kargak eta deformazioak erlazionatzen dituztenak.

B_{ij} laminatuaren mintz-plaka akoplamenduaren zurruntasun koefizienteak dira, mintz kargak kurbadurekin eta momentuak mintz deformazioekin erlazionatzen dituztenak.

D_{ij} laminatuaren plaka moduko zurruntasun koefizienteak dira, momentuak eta kurbadurak erlazionatzen dituztenak.

Laminen arteko tentsioen ez jarraitasunagatik, deformazioetan lan egitea egokiagoa da, deformazioak lodieran zehar jarraituak direlako deformazioak eta kurbadurak aplikatutako kargak eta momentuen menpe jartzen dira. (3.46) ekuazioa honela adieraz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xs} & b_{xx} & b_{xy} & b_{xs} \\ a_{xy} & a_{yy} & a_{ys} & b_{xy} & b_{yy} & b_{ys} \\ a_{xs} & a_{ys} & a_{ss} & b_{xs} & b_{ys} & b_{ss} \\ \hline c_{xx} & c_{xy} & c_{xs} & d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ c_{xy} & c_{yy} & c_{ys} & d_{xy} & d_{yy} & d_{ys} \\ c_{xs} & c_{ys} & c_{ss} & d_{xs} & d_{ys} & d_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \\ M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [a] & [b] \\ [c] & [d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

(3.47) ekuazioaren matrizea laminatuaren malgutasun matrizea izanik. Malgutasun matrizea zurruntasun matrizearen alderantzizkoa da. Beraz, $[a]$ eta $[d]$ matrizeak simetrikoak dira eta $[b]$ eta $[c]$ matrizeak berriz ez dira simetrikoak, $[c]=[b]^t$ izanik.

Lan honetan norabide bakarreko zuntzez osatutako laminatuak aztertuko dira; beraz, lamina bakoitzaren materiala ortotropoa da. Kasu guztietan lodiera oso txikia izango da laminatuaren tamainarekin konparatuta, beraz CLPT teoria onartuko da.

3.4 ERREFERENTZIAK

- 1 Mujika, F. (2011). Mecánica de laminados composites, Escuela Politécnica de Donostia-San Sebastián, Donostia-San Sebastián.
- 2 Daniel, I.M. e Ishai, O. (2006). *Engineering Mechanics of Composite Materials*. Second Edition, Oxford University Press, New York.
- 3 Berthelot, J.M. (2012) *Matériaux composites*. 5th Edition, Tec & Doc Lavoisier.
- 4 Gibson, R.F. (2007). *Principles of composite material mechanics*, Second Edition, CRC Press, Nueva York.
- 5 Reddy, J.N. (1997). *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, CRC Press.

DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO ELEMENTU FINITUAK

4.1 SARRERA

Barraz osatutako egituretan izan ezik, ingeniari-tza mekanikoan, zibilean eta aeronautikan egitura gehienak jarraituak dira: plakak, deposituak, estalkiak, zubiak eta hegazkinen fuselajeak, besteak beste. Egitura hauen portaera ezin da zehazki adierazi aldagai diskretu kopuru txikiaren bitartez, analisia zehatza egiteko oreka ekuazio diferentzialen integrazioa beharrezkoa da.

Egitura jarraituak hiru dimentsiokoak badira ere, kasu batzuetan hauen portaera dimentsio bakar edo bi dimentsioko modelo matematikoen bitartez zehaztu daitezke. Hau, elastikotasunean bat edo bi dimentsioko hipotesiak erabilgarriak diren kasuetan gertatzen da. Plaken makurduran, adibidez, plakaren erdiko planoaren deformazioaren analisia egiten da.

Elementu finituen metodoa (*Finite Element Method*, FEM), egiturak eta solidoak aztertzeko maiz erabiltzen den kalkulu prozedura da [1,2]. Metodo honetan problema jarraitua elementu finitutan diskretizatu egiten da. Elementu finituen portaera parametro kopuru finitu batzuen bitartez zehaztuta dago, eta sistema osoaren ebazpenak problema jarraituaren ebazpen hurbildua ematen du.

FEM formulatzeko gehien erabiltzen den metodoa Zurruntasun metodoa (*Stiffness Method*, SM) da. Metodo honetan ezezagun nagusiak desplazamenduak dira eta elementu bakoitzaren oreka ekuazioak aplikatzen ditu, nodoetan ari diren indarrak eta nodo horietan sortutako desplazamenduak erlazionatuz.

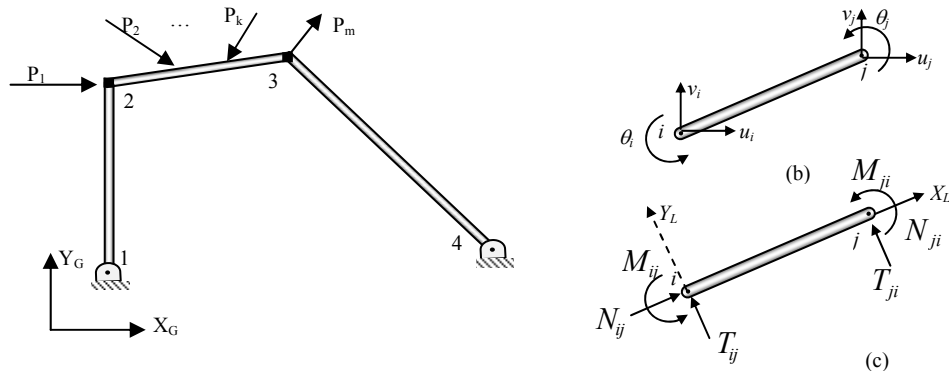
Barraz osatutako egituretan, barra bakoitzaren indar eta desplazamenduen arteko erlazioak kalkulatzeko dira eta gero, korapiloen oreka baldintzak aplikatuz barra bakoitzaren eragina, muntaketa prozedura jarraituz, egituraren ekuazioan ezartzen da. Ekuazio hauetatik korapiloen desplazamenduak lortzen dira. Elementu finituen metodoa sistema jarraituen diskretizazio prozedura orokorra da, eta sistema diskretuetan jarraitu den prozedura aplikatzen da [3]. Diskretizazio prozedurak ondoko baldintzak bete behar ditu:

- a) Eremu jarraitua elementu kopuru finituan zatitzen da, eta elementua hauen portaera parametro kopuru finituen bitartez definitzen da.
- b) Elementu guztien muntaketa sistema diskretuen muntaketa prozedura jarraituz lortzen da.

4.2 SISTEMA DISKRETUEN KALKULU MATRIZIALA

4.2.1 BARRAZ OSATUTAKO EGITUREN ANALISIA

Hasieran, barraz osatutako egiturak metodo matrizialen bitartez kalkulatzeko ziren. Gero, FEM metodoa metodo matrizialean oinarritu zen beste elementu batzuk formulatzeko. Kalkulu matrizialaren prozedura ezagutzeak, beraz, asko laguntzen du elementu finituen metodoa ulertzeko. Horretarako, 4.1 irudiko egitura diskretuan, kalkulu matrizialaren oinarritzko kontzeptuak berrikusiko dira [1,4].



4.1 Irudia. a/ Barraz osatutako egitura; ij barraren desplazamendu ezezagunak b/, koordinatu globaletan; c/Muturreko indar orokortuak, koordinatu lokaletan.

Edozein barra egituratik isolatzean, muturreko indar orokortuak ikus daitezke. Barren arteko loturak zurrinak direnez, egitura lauean korapilo bakoitzeko 3 desplazamendu daude: δ_x eta δ_y desplazamenduak eta θ biraketa. Barra bakoitzean δ_j desplazamenduak eta S_i indar orokortuak erlazionatuta daudela kontuan hartuz,

$$S_i = k_{ij} \delta_j \quad (4.1)$$

k_{ij} zurruntasun koefizientea izanik. Zurruntasun koefizientea, i norabidean ari den indar orokortua da, δ_j norabidean desplazamendu unitarioa sortzen bada. Barra batean 6 desplazamendu daudela kontuan hartuz, barraren zurruntasun matrizea koordinatu lokaletan honakoa da:

$$[K^{ij}]_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Non E elastikotasun modulua, A sekzioaren azalera, I inertzia momentua eta L luzera diren. Zurruntasun matrizea simetrikoa da eta geometria eta materialen propietateen menpe dago. Barra baten muturreko indar orokortuak eta desplazamenduak koordinatu lokaletan zurruntasun matrizearen bitartez erlazionatzen dira:

$$\begin{bmatrix} \{S_{ij}\} \\ \{S_{ji}\} \end{bmatrix}_L = \begin{bmatrix} [k_{ii}]_L & [k_{ij}]_L \\ [k_{ji}]_L & [k_{jj}]_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \end{bmatrix}_L \quad (4.3)$$

$\{S_{ij}\}_L$, $\{S_{ji}\}_L$ barraren muturreko indar orokortuak, eta $\{d_i\}$, $\{d_j\}$, i eta j korapiloen desplazamenduak izanik:

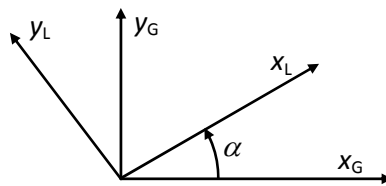
$$\{S_{ij}\}_L = \begin{bmatrix} N_{ij} \\ T_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} \quad \{S_{ji}\}_L = \begin{bmatrix} N_{ji} \\ T_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\{d_i\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad \{d_j\}_L = \begin{Bmatrix} \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

4.1 b irudiaren arabera, korapiloen desplazamenduak koordinatu globaletan kalkulatu behar dira, baina (4.3) ekuazioan koordinatu lokaletan daude. Beraz, (4.3) ekuazioa koordinatu sistema lokaletik globalera pasa behar da.

4.2.2 BARRA BATEN ZURRUNTASUN MATRIZEA KOORDENATU GLOBALETAN, $[K^{ij}]_G$

Koordenatu sistema lokalen eta globalen arteko α angelua, ardatz globaletik lokaletara erlojuaren kontrako biraketa eginez neurtu da, 4.2. irudian ikusten den bezala.



4.2 Irudia. Ardatz lokalak eta globalen arteko angelua, α .

Edozein \vec{V} bektore honela transformatzen da:

$$\begin{aligned} \{\vec{V}\}_G &= [R]\{\vec{V}\}_L \\ \{\vec{V}\}_L &= [R]^T \{\vec{V}\}_G \end{aligned} \quad (4.6)$$

Barrak zuzenak badira, $[R]$ biraketa matrizea honela definitzen da:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$[R]$ aurre biderkatuz (4.3) ekuazioan honako aldaketa egin daiteke:

$$\begin{aligned} [R]\{S_{ij}\}_L &= [R][k_{ii}]_L \{d_i\}_L + [R][k_{ij}]_L \{d_j\}_L \\ [R]\{S_{ji}\}_L &= [R][k_{ji}]_L \{d_i\}_L + [R][k_{jj}]_L \{d_j\}_L \end{aligned} \quad (4.8)$$

Eta indar orokortuak koordenatu globaletan,

$$\begin{aligned} \{S_{ij}\}_G &= [R][k_{ii}]_L [R]^T \{d_i\}_G + [R][k_{ij}]_L [R]^T \{d_j\}_G \\ \{S_{ji}\}_G &= [R][k_{ji}]_L [R]^T \{d_i\}_G + [R][k_{jj}]_L [R]^T \{d_j\}_G \end{aligned} \quad (4.9)$$

Barraren muturreko indar orokortuak eta desplazamenduak koordinatu globaletan erlazionatzen dituen matrizeari $[K^{ij}]_G$ zurruntasun matrizea deitzen zaio. Zurruntasun matrizearen ondoko 4 azpi-matrizetan banatzen da:

$$\begin{aligned} [K_{ii}]_G &= [R][K_{ii}]_L [R]^T, & [K_{ij}]_G &= [R][K_{ij}]_L [R]^T \\ [K_{ji}]_G &= [R][K_{ji}]_L [R]^T, & [K_{jj}]_G &= [R][K_{jj}]_L [R]^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

Beraz, (4.3) ekuazioa koordinatu globaletan honela gelditzen da:

$$\begin{bmatrix} \{S_{ij}\} \\ \{S_{ji}\} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \end{bmatrix}_G \quad (4.11)$$

Eta modu laburbilduan:

$$[S_{ij}]_G = [K^{ij}]_G [d_{ij}]_G \quad (4.12)$$

4.2.3 EGITURAREN ZURRUNTASUN MATRIZEA. MATRIZEEN MUNTAKETA PROZEDURA

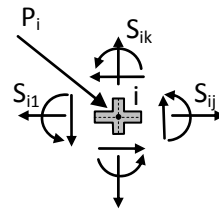
(4.11) ekuazioa aplikatuz, barra guztien ekuazioak egituraren ekuazio nagusian sartzeko muntaketa prozedura orokorra honakoa da: i eta j korapiloak lotzen dituen edozein barra baten zurruntasun koefizienteak, egituraren zurruntasun matrizearen i eta j kokapenetan jarriko dira, (4.13) ekuazioan ikusten den bezala.

$$\begin{bmatrix} \{S_{ij}\} \\ \{S_{ji}\} \\ \dots \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & [k_{ii}]_G & [k_{ij}]_G & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [k_{ji}]_G & [k_{jj}]_G & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \{d_i\} \\ \{d_j\} \\ \dots \end{bmatrix}_G \quad (4.13)$$

Egituraren barra guztiekin muntaketa prozedura jarraituz, $[K_0]$ egituraren zurruntasun matrize osoa lortzen da:

$$\begin{bmatrix} \Sigma\{S_1\} \\ \Sigma\{S_2\} \\ \dots \\ \Sigma\{S_i\} \\ \dots \\ \Sigma\{S_j\} \\ \dots \\ \Sigma\{S_n\} \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} \Sigma[k_{11}]_G & \dots & [k_{1i}]_G & \dots & \dots & [k_{1n}]_G \\ & \Sigma[k_{22}]_G & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [k_{i1}]_G & \dots & \dots & \Sigma[k_{ii}]_G & [k_{ij}]_G & \dots & [k_{in}]_G \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & [k_{ji}]_G & \dots & \Sigma[k_{jj}]_G & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [k_{n1}]_G & \dots & [k_{ni}]_G & \dots & \dots & \Sigma[k_{nn}]_G & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \dots \\ \{d_i\} \\ \dots \\ \{d_j\} \\ \dots \\ \{d_n\} \end{bmatrix}_G \quad (4.14)$$

n korapilo kopurua izanik. Bestalde, korapiloetan oreka baldintzak aplikatuz, muturreko indar orokortuen erresultantea eta kanpo indarrak berdinak dira:



4.3 Irudia. i korapiloaren oreka baldintza

$$\Sigma\{S_i\} = \{P_i\} \quad (4.15)$$

Horregatik, (4.14) ekuazioan muturreko indar orokortuen bektorearen ordez kanpo indarren bektorea jar daiteke. Problemaren karga egoera ezaguna denez, korapiloen desplazamendu ezezagunak kalkula daitezke.

$$\begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \\ \dots \\ \{P_i\} \\ \dots \\ \{P_j\} \\ \dots \\ \{P_n\} \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} [k_{11}]_G & [k_{12}]_G & \dots & \dots & \dots & [k_{1n}]_G \\ [k_{12}]_G & [k_{22}]_G & \dots & \dots & \dots & [k_{2n}]_G \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & [k_{ii}]_G & \dots & [k_{ij}]_G \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [k_{ji}]_G & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [k_{1n}]_G & \dots & \dots & \dots & \dots & [k_{nn}]_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \\ \dots \\ \{d_i\} \\ \dots \\ \{d_j\} \\ \dots \\ \{d_n\} \end{Bmatrix}_G \quad (4.16)$$

(4.16) ekuazioan $3n$ desplazamendu daude eta egituraren zurruntasun matrize osoa $[K_0]$ singularra da. Sistema ebazteko, desplazamendu batzuk zero direla kontuan hartu behar da. Desplazamenduak ezezagunak edo ezagunak direnaren arabera ordenatzen bada, egituraren ekuazio sistema honela idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \{P_a\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}_G = \begin{bmatrix} [K] & [K'] \\ [K''] & [K'''] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G \quad (4.17)$$

Non $\{P_a\}_G$ eta $\{R\}_G$ desplazamendu ezezagunen norabidetan ari diren kanpo indarren eta kanpo erreakzioen bektoreak diren. Desplazamenduak (4.17) ekuazio sistemaren goiko ekuaziotik kalkulatzen dira:

$$\{P\}_G = [K]\{d\}_G \quad (4.18)$$

Korapiloen desplazamenduak ezagututa, kanpo erreakzioak ere kalkula daitezke:

$$\{R\}_G = [K']\{d\}_G \quad (4.19)$$

Atal honetan lortutako emaitzak erabilgarriak izango dira lan honetan zehar. Izan ere, elementu finituen formulazio desberdinetan (4.16) ekuazioaren parekoa lortuko da kasu guztietan.

4.3 ZURRUNTASUN METODOAREN (SM) FORMULAZIO OROKORRA

SM eta kalkulu matrizialaren arteko antzekotasunak ikusteko, SM metodoan oinarritutako FEM metodoaren prozedura honako urratsetan laburbil daiteke:

1. Egituraren portaera deskribatzen duen modelo matematikoa aukeratzen da.
2. Oreka baldintzak aplikatzeko, Lan Birtualen Printzipioa (*Principle of Virtual Work*, PVW) aplikatzen da.
3. Egituraren modelo matematikoa aukerata, *Elementu Finitu* izeneko hainbat elementutan zatitzen da. Elementu finituak hauen mugaldean dauden nodoen bitartez lotzen dira eta, elementuen barrualdeko desplazamenduak, nodoetako balioen menpe interpolatzen dira.
4. PVW printzipiotik elementu bakoitzaren indar bektorea eta zurruntasun matrizeak kalkulatu dira.
5. Elementu guztien indar bektorea eta zurruntasun matrizeen muntaketa. Ekuazio sistematik nodoetako desplazamenduak lortzen dira.
6. Desplazamenduak ezagututa, deformazioak eta tentsioak kalkulatu daitezke.

Suposa dezagun eremu jarraitu bat elementu finituetan diskretizatuta dagoela. Desplazamenduen askatasun gradu kopurua n dela suposatuz, PVW printzipioen arabera [5,6]:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (4.20)$$

Non $i = 1 \dots n$; $\{\delta a^i\}$ nodoetako desplazamendu birtualen bektorea; $\{P^i\}$ nodoetako kanpo indarren bektorea; $\{\delta\varepsilon\}$ deformazio birtualen bektorea; eta $\{\sigma\}$ tentsio osagaien bektorea.

Interpolazio funtzioak erabiliz, elementuaren edozein puntutako desplazamenduak nodoetako desplazamendu bitartez lortzen dira. Matrize moduan erlazio hau honela adierazten da:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (4.21)$$

Non $\{u\}$ elementuaren edozein puntuaren desplazamenduaren bektorea eta $[N]$ desplazamenduen interpolazio funtzioen matrizea den. Elementuaren desplazamenduak, $\{u\}$, $[L]$ eragile diferentzialaren bitartez $\{\varepsilon\}$ deformazioekin erlazionatzen dira:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (4.22)$$

(4.20) eta (4.21) ekuazioak konbinatuz eta nodoetako desplazamenduak ezagututa, elementuaren edozein puntutako deformazioak lortzen dira:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a^i\} = [B]\{a^i\} \quad (4.23)$$

$[B]$ desplazamendu-deformazio matrizea izanik. Materialaren $[D]$ zurruntasun matrizearen bitartez $\{\sigma\}$ tentsioak eta $\{\varepsilon\}$ deformazioak erlazionatzen dira:

$$[\sigma] = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.24)$$

(4.24) eta (4.23) ekuazioak ordezkatzuz (4.20) ekuazioa honela gelditzen da:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \{a^i\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (4.25)$$

$\{\delta a^i\}$ arbitrarioa denez, Zurruntasun Metodoaren ekuazio nagusia lortzen da:

$$[K^e] \{a^i\} = \{P^i\} \quad (4.26)$$

$[K^e]$ elementuaren zurruntasun matrizea izanik:

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (4.27)$$

Sistemaren zurruntasun matrizea elementu guztien zurruntasun matrizeen muntaketa eginez lortzen da, 4.2.3 atalean ikusi den bezala. (4.26) ekuaziotik egituraren nodoetako desplazamenduak lortzen dira. Deformazioak, lortutako desplazamenduak

(4.23) ekuazioan deribatuz lortzen dira. Eta azkenik deformazioak (4.24) ekuazioan ordezkatur tentsioak lortzen dira.

4.4 DESPLAZAMENDUEN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK

4.4.1 BARRA ELEMENTUAK: LAGRANGE INTERPOLAZIO FUNTZIOAK

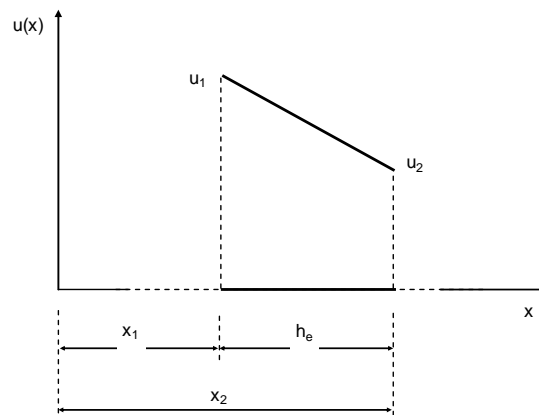
Sistema jarraituen diskretizazioan, desplazamendu eremua interpolazio funtzioen bitartez hurbiltzen da. Interpolazio funtzioak, (4.21) ekuazioaren arabera, nodoetako desplazamenduen menpe adierazten dira:

$$\{u\} = [N] \{a^i\} \quad (4.21)\text{bis}$$

Elementuen desplazamendu eremua hurbiltzeko interpolazio funtzio polinomikoak erabiltzen dira.

Indar axialen menpe ari diren barretan desplazamendu eremua elementu bakoitzeko funtzio polinomikoak erabiliz hurbilduko da [1,3]. 4.4 irudian bi nodoko elementu lineala ikusten da. Elementu horretan desplazamendu eremuaren hurbilketa ondokoa izango da:

$$\begin{cases} u(x) = a_1 + a_2x, & x_1 < x < x_2 \text{ bada} \\ 0 & \text{beste toki guztietan} \end{cases} \quad (4.28)$$



4.4 Irudia: Elementu lineala eta erreferentzia ardatz globalak

Elementuan zehar interpolazio funtzioa lineala da; elementutik kanpo, berriz, zero. Nodotako interpolazio funtzioaren ebaluaketak, honako ekuazioetara eramaten du:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2 x_1 \\ u_2 &= a_1 + a_2 x_2 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Non u_1 eta u_2 1 eta 2 nodoetako $u(x)$ funtzioaren balioak diren. (4.29) ekuazio sistematik,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \\ a_2 &= \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

(4.30) ekuazioa (4.29) ekuazioan ordezkaturaz eta gai guztiak taldekatzean desplazamenduaren eremuaren interpolazio funtzioa $u(x)$ honela gelditzen da:

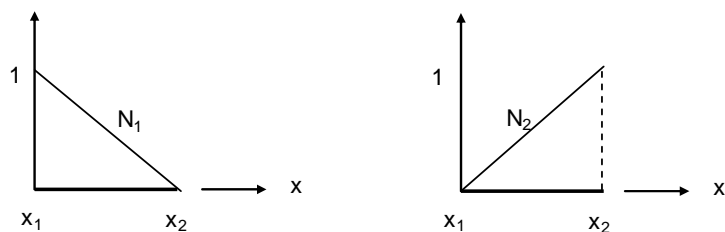
$$u(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} u_2 \quad \forall x_1 < x < x_2 \quad (4.31)$$

Interpolazio funtzioa nodoetako koordinatuak, elementuaren luzera eta interpolazio funtzioaren nodoetako balioen menpe dago eta (4.21) ekuazioaren arabera honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned} u(x) &= N_i u_i & i &= 1, 2 \\ N_1 &= \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} & N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x_1 < x < x_2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

(4.31) ekuazioak elementuaren mugalde baldintzak betetzen ditu. N_i interpolazio funtzioak jarraituak eta linealki independenteak dira eta ondoko propietate dituzte: N_i funtzioak linealki aldatzen dira elementuan zehar eta i nodo baliotzean 1 balioa hartzen dute eta zero bestean.

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \text{ bada} \\ 0 & i \neq j \text{ bada} \end{cases} \quad (4.33)$$



4.5 Irudia: Barra elementuen interpolazio funtzio linealak

Elementu hauetan interpolazio funtzioak linealak direnez, elementuan zehar eta elementuen artean desplazamendu axialak jarraituak direla bermatzen da. Baldintza hauek betetzen dituzten elementuak C^0 elementuak dira. Desplazamendu axialaren lehenengo deribatua jarraitua badu orduan C^1 elementua litzateke. Orokorrean elementu bat C^m da, desplazamendu eremuaren lehenengo m deribatuek jarraituak badira.

C^0 elementuak baina n graduko polinomioak erabiliz lortzeko Lagrange polinomioak erabil daitezke. Horrela, n nodo dituen barra elementu batean, i nodoaren N_i interpolazio funtzioaren ekuazioa honela adierazten da:

$$N_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad (4.34)$$

Edo modu laburbilduan,

$$N_i(x) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) \quad (4.35)$$

Barra elementu lineal batean edozein puntutako desplazamendu axiala koordenatu naturaletan honela adieraz daiteke:

$$u(\xi) = N_1(\xi)u_1 + N_2(\xi)u_2 \quad (4.36)$$

ξ koordenatu naturala honela definitzen da:

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{L} \quad (4.37)$$

Non L elementuaren luzera eta x_c barraren erdiko koordinatua diren. Horrela, $\xi = -1$ barraren mutur batean, $\xi = 0$ elementuaren erdian eta $\xi = 1$ beste muturrean. (4.17) ekuazioaren analogiatik N_i funtzioak honela idatz daitezke:

$$N_i(\xi) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (4.38)$$

Beraz, $\xi = -1$ eta $\xi = 1$ bi nodoko elementu batetik honako interpolazio funtzioak lortzen dira:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{\xi - \xi_1}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad (4.39)$$

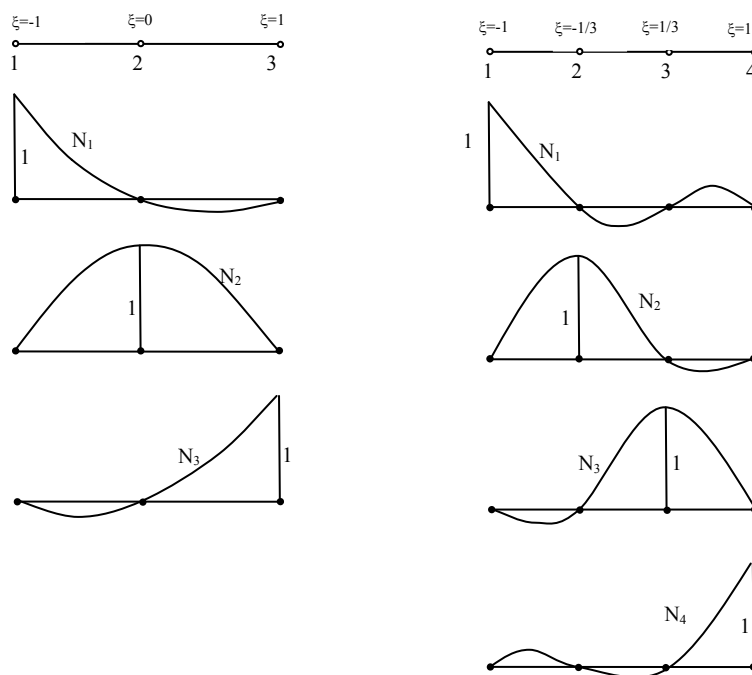
(4.39) ekuazioan (4.37) ekuazioko balioak ordezkatzuz (4.32) ekuazioa lortzen da. Hiru nodoko elementu koadratikoan, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 0$ eta $\xi_3 = 1$ badira, N_i interpolazio funtzioak honela idazten dira:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\ N_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)} = (\xi + 1)(\xi - 1) \\ N_3(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Eta lau nodoko elementu kubiko batean, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = -1/3$, $\xi_3 = 1/3$ eta $\xi_4 = 1$ badira, N_i funtzioak honela idazten dira:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3)(\xi_1 - \xi_4)} = -\frac{9}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_2(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_3)(\xi - \xi_4)}{(\xi_2 - \xi_1)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_4)} = \frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_3(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_4)}{(\xi_3 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_4)} = -\frac{27}{16}(\xi + 1)(\xi - \frac{1}{3})(\xi - 1) \\
 N_4(\xi) &= \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)(\xi - \xi_3)}{(\xi_4 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_3)} = \frac{9}{16}(\xi + 1)(\xi + \frac{1}{3})(\xi - \frac{1}{3})
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

4.6 irudian barra elementu koadratiko eta kubiko baten interpolazio funtzioak ikusten dira.

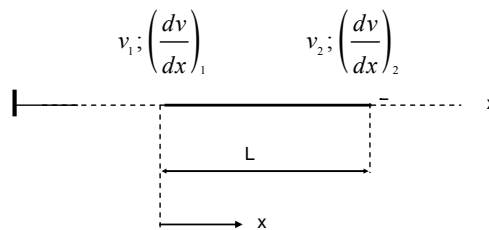


4.6 Irudia: Barra elementuen interpolazio funtzio kubiko eta koadratikoak

4.4.2 HABE ELEMENTUAK: HERMITE INTERPOLAZIO FUNTZIOAK

Elementu hauek Euler-Bernouilli-ren habe lardenen makurduraren teorian oinarritzen dira [7], hau da, indar ebakitzailaren eragina ez dute kontuan hartzen habearen deformazioan.

Ezezagun nagusia v desplazamendua da, baina aldagai honen deribatua $\frac{dv}{dx}$ ere jarraitua izan behar du integralak kalkulatu ahal izateko. Deribatu hori habearen deformatuaren malda da. Beraz, habe elementuetan nodo bakoitzeko bi aldagai behar dira: desplazamendua eta honen deribatua ($v_i, \frac{dv_i}{dx}$). Nodoetako desplazamenduak eta hauen deribatuak ezagutzen direnean, desplazamenduen interpolazio funtzioak Hermite polinomioen bitartez lor daitezke [1,3].



4.7 Irudia: Habe baten muturreko desplazamendu eta biraketa ezezagunak

Elementu honek 4 askatasun gradu dituenetz, v edozein puntutako desplazamenduaren hurbilketa honela idazten da:

$$v = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (4.42)$$

Non x koordenatu lokala den. α_i parametroak kalkulatzeko, nodoetako desplazamenduak eta hauen deribatuak ebaluatu behar dira, (4.42) ekuazioan nodoetako v_i eta $\frac{dv_i}{dx}$ balioak ordezkatzuz honako ekuazioak lortzen dira:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 \\
 \left(\frac{dv}{dx}\right)_1 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 x_1 + 3\alpha_3 x_1^2 \\
 v_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 \\
 \left(\frac{dv}{dx}\right)_2 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 x_2 + 3\alpha_3 x_2^2
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

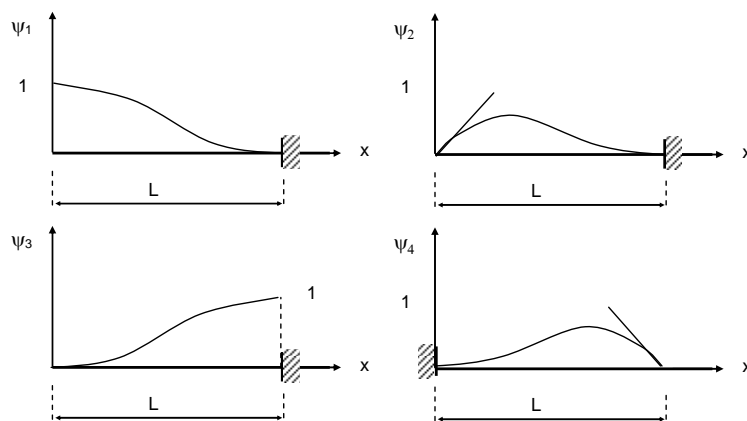
Sistema askatu ondoren eta α_i konstanteen balioak ordezkatzean, (4.42) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$u = N_1 u_1 + \bar{N}_1 \frac{L}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)_1 + N_2 u_2 + \bar{N}_2 \frac{L}{2} \left(\frac{du}{dx}\right)_2
 \tag{4.44}$$

N_j Hermite polinomio kubikoak dira, eta (4.37) ekuazioko koordenatuak:

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\
 \bar{N}_1(\xi) &= \frac{\alpha}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\
 N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\
 \bar{N}_2(\xi) &= \frac{\alpha}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Funtzio hauek 4.8 Irudian ikusten dira.



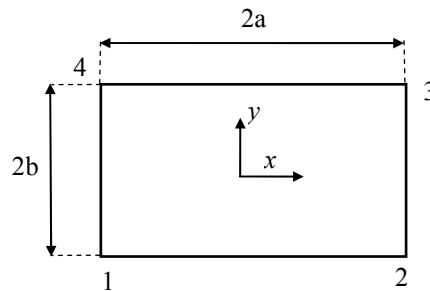
4.8 Irudia: Hermite interpolazio funtzioak

Beraz, interpolazio funtzioak erabiliz habearen desplazamendu eremua honela adieraz daiteke:

$$\{u\} = [N]\{a^i\} \quad (4.46)$$

Prozedura berdina jarraituz beste ordenatuko Hermite polinomioak lor daitezke.

4.4.3 LAU NODOKO ELEMENTU LAUKIZUZENAREN INTERPOLAZIO FUNTZIO LINEALAK



4.9 Irudia: Elementu laukizuzena eta erreferentzia sistema

Elementu hau elementu laukizuzenen artean sinpleena da eta bi dimentsioko elastikotasunean erabiltzen da. 4.9 irudiko 4 nodoko elementuan norabide bakoitzeko 4 desplazamendu ezezagun daude. Beraz, interpolazio funtzio sinpleenak honakoak dira:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v(x, y) &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned} \quad (4.47)$$

4.9 irudiko elementu laukizuzenean eta interpolazio funtzioak kalkulatzeko hartu den erreferentzia sistema ikusten dira. (4.47) ekuazioa nodoetan ebaluatzean honako balioak lortzen dira:

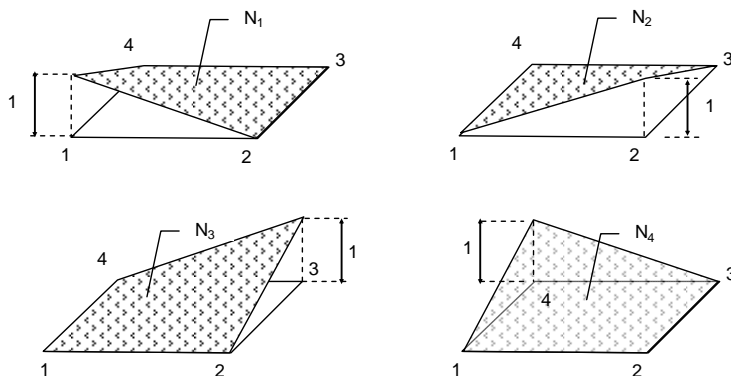
$$\begin{aligned}
 u(x_1, y_1) &= u(-a, -b) = u_1 & v(x_1, y_1) &= v(-a, -b) = v_1 \\
 u(x_2, y_2) &= u(a, -b) = u_2 & v(x_2, y_2) &= v(a, -b) = v_2 \\
 u(x_3, y_3) &= u(a, b) = u_3 & v(x_3, y_3) &= v(a, b) = v_3 \\
 u(x_4, y_4) &= u(-a, b) = u_4 & v(x_4, y_4) &= v(-a, b) = v_4
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

(4.48) ekuazioko konstanteak kalkulatu eta (4.47) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i u_i \\
 v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 N_i v_i
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Eta N_i 4.10 irudiko interpolazio funtzioak dira eta honela adierazten dira:

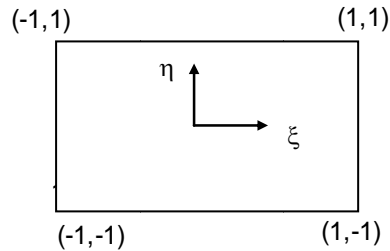
$$\begin{aligned}
 N_1(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) & N_2(x, y) &= \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\
 N_3(x, y) &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{y}{b} & N_4(x, y) &= \frac{x}{a} \frac{y}{b}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$



4.10 Irudia: Elementu laukizuzenaren interpolazio funtzio linealak

Elementu laukizuzenaren interpolazio funtzioak (ξ, η) koordenatu naturaletan jartzeko erlazioak honakoak dira:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \eta = \frac{y}{b} \tag{4.51}$$



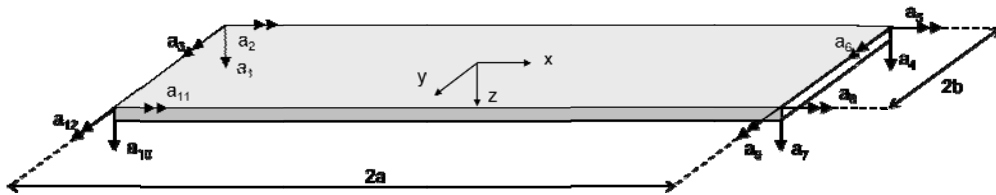
4.11 Irudia: Elementu laukizuzena eta erreferentzia sistema naturala

(4.50) ekuazioko interpolazio funtzio linealak koordinatu naturaletan honela adierazten dira:

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= (1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= (1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= (1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Antzeko prozedura jarraituz interpolazio funtzio koadratikoak eta beste ordenakoak ere lor daitezke.

4.4.4 PLAKA LAUKIZUZENAREN INTERPOLAZIO FUNTZIO LINEALAK



4.12 Irudia: Lau nodoko plaka elementu laukizuzena.

Melosh-ek [8] lau nodoko plaka laukizuzen bat proposatu zuen, nodo bakoitzean $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$ desplazamendu eta bi biraketa dituen. Elementu honen interpolazio funtzioak bi nodoko habe-elementuaren 3. mailako Hermite polinomioak konbinatuz lortzen dira, (4.45) ekuazioaren arabera [1,9].

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\
\bar{N}_1(\xi) &= \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\
N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\
\bar{N}_2(\xi) &= \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Non $\xi = x/a$ eta $\eta = y/b$ koordenatu naturalak diren eta N_i eta \bar{N}_i bi nodoko Hermite elementuaren funtzioak diren. Desplazamenduen interpolazio polinomioa honako hau da:

$$\begin{aligned}
w &= N_1(\xi)N_1(\eta)w_1 + \bar{N}_1(\xi)N_1(\eta)\theta_{x1} + N_1(\xi)\bar{N}_1(\eta)\theta_{y1} + N_2(\xi)N_1(\eta)w_2 + \\
&+ \bar{N}_2(\xi)N_1(\eta)\theta_{x2} + N_2(\xi)\bar{N}_1(\eta)\theta_{y2} + N_2(\xi)N_2(\eta)w_3 + \bar{N}_2(\xi)N_2(\eta)\theta_{x3} + \\
&+ N_2(\xi)\bar{N}_2(\eta)\theta_{y3} + N_1(\xi)N_2(\eta)w_4 + \bar{N}_1(\xi)N_2(\eta)\theta_{x4} + N_1(\xi)\bar{N}_2(\eta)\theta_{y4}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Non w_i , θ_{xi} , θ_{yi} , elementuaren 12 desplazamendu ezezagunak diren: desplazamendu bat eta bi biraketa korapilo bakoitzeko. (4.54) ekuazioko polinomioa, 4. mailako polinomio osoan bihurturaren gaiak kenduz lortu da [8].

4.5 KONBERGENTZIA IRIZPIDEAK

Aukeratutako interpolazio funtzioek baldintza batzuk bete behar dituzte FEM analisia konbergentea izateko. Konbergentzia irizpideak betetzen badira, elementuen tamaina jaistean lortutako balioak soluzio errealerara hurbilduko dira. Konbergentzia baldintzak honakoak dira [1,3]:

1. **Jarraitasuna:** Desplazamendu eremuak elementu bakoitzean zehar jarraitua izan behar du. Desplazamenduak interpolatzeko polinomioak erabiltzen baditugu, baldintza hau automatikoki betetzen da.

2. **Deribagarritasuna:** Aukeratutako polinomioak deribagarria izan behar du gutxienez PVW printzipioan agertzen diren deribatuen ordena arte. Horrela, barren kasuan adibidez, lan birtualen ekuazioan 1. mailako deribatuak agertzen direnez, aukeratutako interpolazio funtzioek gutxienez linealak izan behar dute.

3. **Integragarritasuna:** Funtzio baten m ordenako deribatua integragarria izango da, funtzio honen $m-1$ ordenako deribatuak jarraituak badira. Beraz, PVW printzipioan desplazamenduen m ordenako deribatuak agertzen badira, desplazamenduek eta hurbiltzeko aukeratu diren polinomioek jarraituak izan behar dute $m-1$ ordenako deribatuak arte.

4. **Partzela-irizpidea:** Elementu baten konbergentzia aztertzeko elementu-multzo edo partzela bat aukeratzen da. Elementu-multzo horren mugaldeko korapiloetan desplazamendu ezagunak inposatzen dira. Partzelaren barrualdean lortutako desplazamendu eta deformazioak eta analitikoki lortuko lirakekeenak berdinak badira, elementuak partzela-irizpidea betetzen duela esaten da, eta beraz, konbergentea da.

Partzela-irizpidea edo konbergentzia egiaztatzeko bi baldintza bete behar dira:

4.1 **Deformazio konstantearen baldintza:** Diskretizazio maila handiagoa den neurrian, elementu bakoitzaren egoera deformazio konstantera gero eta gehiago hurbilduko da. Elementu batek deformazio egoera konstantea lortzeko gai izan behar du konbergente izateko.

4.2 **Solido zurrunaren baldintza:** Elementu edo partzela baten mugaldean solido zurrunaren desplazamendu eremua inposatzen badugu, elementu edo partzelaren barrualdean deformazio egoerak zero izan behar du.

Ondoren azalduko diren bi baldintzak komenigarriak dira, baina ez derrigorrezkoak. Baldintza hauek betetzen ez dituzten elementuak konbergenteak izan daitezke.

5. **Bateragarritasun baldintza:** Elementuek bateragarriak izan behar dute. Honek desplazamenduak elementuen artean jarraituak izan behar direla esan nahi du, hau da, elementuen arteko desplazamenduen balioetan ez dira jauziak sortu behar. Baldintza hau betetzen duten elementuak elementu bateragarriak edo konformeak dira.

Desplazamendu eremuaren jarraitasun baldintza betetzen bada bateragarritasuna zuzen betetzen da. Hau betetzen ez bada elementua bateraezina izango da. Hala ere,

elementu hauek onargarriak izan daitezke eta elementuen tamaina jaistean soluzio errealekin konbergentzia gerta daiteke.

6. Polinomio osoaren baldintza Interpolazio funtzioaren parametroek polinomio osoa osatzen badute hurbilketa optimoa izango da. Parametro gehiago badu, parametro hauekin osatutako interpolazio funtzioek ez dute elementuaren hurbilketa hobea lortuko. Hala ere, polinomio osoa ez izateak ez du esan nahi konbergentziarik ez dagoenik.

4.6 ERREFERENTZIAK

1. Oñate, E. (1995). Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
2. Vazquez, M. (2001). El método de los elementos finitos. Ed. Noela. Madrid.
3. Zienkiewicz, OC; Taylor ,RL. (1994). El Método de los elementos finitos. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.
4. Vazquez, M. (1990). Calculo matricial de estructuras. Ed. Noela. Madrid.
5. Shames, H; Dym, CL. (1985). Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisfere Publishing Corporation.
6. Fung, YC. (1965). Foundations of solid mechanics *Prentice-Hall International*.
7. Timoshenko, SP. (1970). Resistencia de materiales, Partes I y II. Espasa-Calpe.
8. Melosh, RJ. (1961). A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. *Journal of Aerospace Science*. **28**(1) 34-42.
9. Rao, S. (2005). The finite element method in engineering. Elsevier ,4th ed. Elsevier.



TENTSIOETAN ETA DESPLAZAMENDUETAN OINARRITUTAKO ELEMENTU FINITUAK

5.1 SARRERA

Tentsioak aztertzeko erabiltzen diren elementu finitu metodo gehienak desplazamenduetan oinarrituta daude. Zurruntasun metodoan (*Stiffness method*, SM) ezezagun nagusiak nodoetako desplazamenduak dira.

SM metodoak emaitza oso eraginkorrak ematen ditu material homogeneotan. Laminatu konpositetan, berriz, tentsio gradiente handiak sortzen dira zeharkako norabidean eta, zurruntasun metodoa erabiltzen bada, elementu kopuru handiko analisiak behar dira [1]. Laminatu konpositeetan, laminen arteko limiteetan materialen propietateak aldatu egiten dira, eta limite hauek tentsio gradiente handiko lekuak dira. Tentsioak eta deformazioak desplazamendu hurbilduetatik kalkulatzeko dira deribazio numerikoa erabiliz eta horregatik tentsio gradiente handiko kasuetan konbergentzia motela izan daiteke.

Tentsioetan oinarrituta baina indar erredundanteak erabiltzen ez dituen formulazioa Patnaik et al.-ek garatutako Indar Metodo Integratua (*Integrated Force Method*, IFM) da. Metodo honetan barne indarrak dira ezezagun nagusiak eta Lan Birtualaren Printzipioan (*Principle of Virtual Work*, PVW) eta Lan Birtual Osagarriaren

Printzipioan (*Principle of Complementary Virtual Work*, PCVW) oinarrituta dago. Patnaik-ek garatutako Indar Metodo integratu Dualak (*Dual Integrated Force Method*, IFMD) [2] IFM metodoaren formulazio berdina du, baina formulazio honetan ezezagun nagusiak desplazamenduak dira.

IFM eta IFMD metodoek interpolazio funtzio desberdinak erabiltzen dituzte tentsioak eta desplazamenduak interpolatzeko. Desplazamenduak interpolatzeko SM metodoan erabiltzen diren interpolazio funtzioak erabiltzen dira. Tentsioen interpolazio funtzio egokiak aukeratzeko garrantzi handia du emaitzen zehaztasunean eta konputazio kostuan [3]. Metodo hibridoen ikerketan, tentsio eremuaren interpolazio funtzio egokiak aurkitzeko metodoak aztertu dira [4-8]. Desplazamenduen kasuan interpolazio funtzioak aukeratzeko metodoak oso garatuta badaude ere, tentsioen interpolazio funtzioak aukeratzeko metodo sistematikorik ez dago.

5.2 INDARREN INTERPOLAZIO FUNTZIOAK

Tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritutako metodoetan indarrak eta desplazamenduak hurbiltzeko interpolazio funtzio ezberdinak erabiltzen dira. Elementuen matrizeak osatzeko desplazamendu eta tentsio eremuaren hurbilketak definitu behar dira. Elementuaren edozein puntutako desplazamendua, nodoetako desplazamenduen funtzioan hurbiltzen da, eta tentsioaren osagaiak barne indar parametro independente batzuen menpe.

Edozein elementutan oso erraz planteatzen dira nodoetako desplazamenduak, baina indar parametro independenteen kopurua eta esanahi fisikoa ez da zuzen ikusten.

Indarren interpolazio funtzioak elementu baten indarren askatasun gradu kopurua m bada, elementuaren edozein puntutako tentsioa honela adieraz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = [Y] \{F^j\} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_3 & \dots & \sigma_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_m \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Non $j = 1 \dots m$; indarren interpolazio funtzio matrizea den [9] eta $\{F^j\}$ barne indar independenteen bektorea den. $[Y]$ matrizearen zutabe bakoitza $\{\sigma_i\}$ tentsio moduak dira.

Pian et al.-ek [7] tentsio eremu hurbilduan honako baldintzak bete behar direla ikusi zuten [3]:

1. Oreka baldintzak bete behar dira.
2. Tentsio osagaiak simetrikoak izan behar dira.
3. Sortutako matrizeak transformazio matrizeekiko independenteak izatea.
4. Deformazio energia nulua ez izatea.

Polinomio osoak erabiliz oreka baldintzak betetzen dira, baina indar independente kopuru altuko interpolazio funtzioak lortzen dira. Spilker-ek eta Singh-ek [8], metodo hibridoan ikerketan gradu altuko tentsioen interpolazio funtzioak erabiltzeak elementu zurruneziak ematen dituela ikusi zuten. Horregatik, tentsioen interpolazio funtzioen kalkuluan, beharrezkoa da indar independente kopurua murriztea, elementuaren matrizeak behar dituen propietateak mantenduz.

Bestalde, indar independente kopurua ezin da arbitrarioki kalkulatu, n elementuaren desplazamendu kopurua kontuan hartu gabe [10]. m indar independente kopuruak $m \geq n - r$ erlazioa bete behar du, r oreka ekuazio kopurua izanik.

4 nodoko mintz-elementu laukizuzenaren kasuan, adibidez, 8 desplazamendu eta 3 oreka ekuazio daudenez, aurreko baldintzak betetzen dituzten tentsioen interpolazio funtzio linealak honakoak dira:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= F_1 + F_2 \eta \\ \sigma_y &= F_3 + F_4 \xi \\ \tau_s &= F_5\end{aligned}\tag{5.2}$$

$[Y]$ indarren interpolazio funtzioen matrizea honakoa izanik:

$$[Y] = \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$[Y]$ matrizea (5.1) ekuazioan ordezkatur tentsio eremua lortzen da. Lortutako tentsio eremua, eta Pianek [6], Wu et al.-ek [11] eta Huang-ek [12] proposatutakoak berdinak dira.

Plakaren kasuan, deformazio energia osagarria luzera unitateko momentuen menpe adierazten denez, momentuak interpolatzen dira:

$$\{M\} = [Y]\{F^j\} \quad (5.4)$$

4 nodoko plaka-elementu laukizuzen batean desplazamendu ezezagunak korapilo bakoitzeko desplazamendu bertikala eta bi biraketa suposatzen badira, oreka ekuazioak 3 direnez, $n - r = 9$ lehen aipatutako baldintzak betetzen dituzten tentsioen interpolazio funtzioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} M_x &= F_1 + F_2\xi + F_3\eta + F_4\xi\eta \\ M_y &= F_5 + F_6\xi + F_7\eta + F_8\xi\eta \\ M_s &= -F_9 \end{aligned} \quad (5.5)$$

6 eta 7 ataletan, (5.2) eta (5.5) ekuazioetako interpolazio funtzioak erabili dira mintz eta plaka-elementuak formulatzeko, hurrenez hurren.

5.3 INDAR METODO INTEGRATUA (IFM)

5.3.1 OREKA EKUAZIOAK

Indar Metodo klasikoa (*Force Method*, FM) oreka mantentzeko indar erredundanteen aukeraketan oinarrituta dago [13-15]. Indar erredundanteen modelo egokia aukeratzeko funtsezkoa da emaitza onargarriak lortzeko [16]. Horregatik, metodo honen prozedura programatzeko SM baino zailagoa denez, ia desagertu da. Atal honetan Patnaik-ek garatutako Indar Metodo Integratua (*Integrated Force Method*, IFM) azaltzen da

[17,18]. IFM metodoak ez du indar erredunderik erabiltzen eta barne indarrak kalkulatzeko, oreka eta bateragarritasunaren ekuazioak erabiltzen ditu.

Tentsio eremua orden egokiko polinomioak erabiliz interpolatzen da [4,8], polinomio hauen koefizienteak indar independenteak $\{F^j\}$ izanik. Elementu finitu batean barne indar independenteak oreka ekuazioak betetzen dituzten indar independente sorta bat da, indarren interpolazio funtzioen bitartez elementuaren tentsio eremua hurbiltzen duena. 5.2 atalean ikusienez, elementu baten indarren askatasun gradu kopurua m bada, elementuaren edozein puntutako tentsioa honela adieraz daiteke:

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (5.6)$$

Beraz, (4.23) eta (5.6) ekuazioak Lan Birtualen Printzipioan (*Principle of Virtual Work*, PVW) (4.20) ordezkaturik, honela gelditzen da:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (5.7)$$

$\{\delta a^i\}^T$ arbitrarioa denez, oreka ekuazioa honela gelditzen da:

$$[E^e] \{F^j\} = \{P^i\} \quad (5.8)$$

Eta oreka matrizea honela definitzen da:

$$[E^e] = \int_V [B]^T [Y] dV \quad (5.9)$$

Egituraren oreka ekuazioa, $[E^e]$ elementu guztien oreka matrizeen 4.2.3 atalean azaldutako muntaketa prozedura jarraituz lortzen da. Matrize honek $(N \times M)$ dimentsioak ditu, N eta M egituraren desplazamendu eta indarren askatasun maila izanik, hurrenez hurren.

Azkenik, egituraren oreka matrizea honakoa da:

$$[E] \{F^k\} = \{P^l\} \quad (5.10)$$

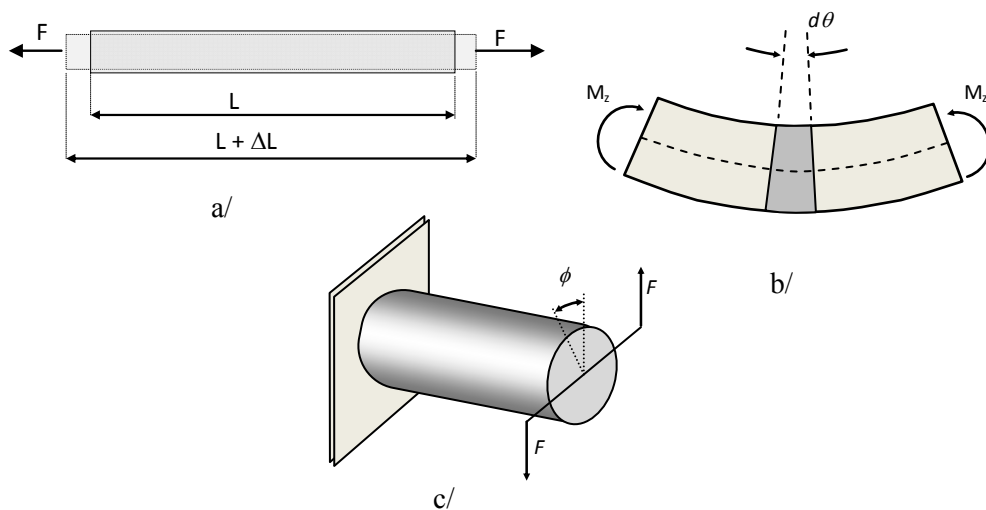
Non $l = 1 \dots N$; eta $k = 1 \dots M$;

5.3.2 DESPLAZAMENDU-DEFORMAZIO OROKORTUEN ERLAZIOA

Erlazio hau egituren metatzen den barne energiaren (*Internal Energy, IE*) eta kanpo indarrek egiten duten lanaren (*W*) berdinketatik sortzen da [19]. Portaera elastiko linealean, egituren metatutako barne energia (*IE*), barne indarretatik eta hauei dagokien deformazioen eraginez sortzen da:

$$IE = \frac{1}{2} \{F^j\}^T \{\beta^j\} \quad (5.11)$$

Non $\{\beta^j\}$ barne indarrekin lotutako deformazio orokortuaren bektorea den. Patnaik-en garapenean deformazio orokortuen kontzeptua oso garrantzitsua da. Egitura diskretuetan deformazio orokortuen kontzeptua argi ikusten da, baina eremu jarraituen diskretizazioan honen esanahia ez dago argi. Habe baten kasuan, indar axialekin lotutako deformazio orokortua habearen luzapena da; momentu makurtzailearekin lotuta dagoena makurdura-angelua da; eta momentu bihurtzailearen deformazio orokortua bihurtura-angelua da. Ideia hori ezin da zabaldu mintz edo plaka elementuak bezalako elementu jarraituetara.



5.1 Irudia: Habe baten deformazio orokortuak. a/ Trakzioa; b/ Makurdura; c/ Bihurdura.

Kanpo indarrek egiten duten lana (W) kanpo indarrek eta hauek sortzen dituzten desplazamenduen eraginez sortzen dira. Portaera elastiko-linealaren kasuan:

$$W = \frac{1}{2} \{P^i\}^T \{a^i\} \quad (5.12)$$

Non $\{a^i\}$ kanpoko kargei dagokien desplazamendu bektorea den eta $i = 1 \dots n$, Desplazamenduen askatasun gradua n izanik. (5.11) eta (5.12) ekuazioak berdinduz, honakoa ematen du:

$$\{F^j\}^T \{\beta^j\} = \{P^i\}^T \{a^i\} \quad (5.13)$$

(5.8) ekuazioa (5.13) ekuazioan ordezkatur:

$$\{F^j\}^T \{\beta^j\} = \{F^j\}^T [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.14)$$

(5.14) ekuazioa honela idatz daiteke:

$$\{F^j\}^T \left([E^e]^T \{a^i\} - \{\beta^j\} \right) = 0 \quad (5.15)$$

$\{F^j\}$ independenteak direnez, elementuaren Desplazamendu- Deformazio orokortuaren erlazioa (*Displacement Deformation Relation*, DDR) honela gelditzen da:

$$\{\beta^j\} = [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.16)$$

Egituraren desplazamendu ezezagun kopurua N eta Indar ezezagun kopurua M direla suposatuz, egituraren oreka matrizea $[E]$ elementu guztien oreka matrizeak muntatuz lortzen da, eta ondoren, egituraren DDR erlazioa lortzen da

$$\{\beta^k\} = [E]^T \{a^l\} \quad (5.17)$$

Non $l = 1 \dots N$; eta $k = 1 \dots M$;

5.3.3 BATERAGARRITASUN BALDINTZAK

Bateragarritasunaren baldintzak eremu jarraitu baten diskretizazioan Elastikotasunaren Saint - Venant prozedura jarraituz lortzen dira [20]. Antzera, eremu jarraitu baten diskretizazioan, DDR erlazioan desplazamenduak kenduz bateragarritasun baldintzak lor daitezke. (5.17) ekuazioan, M deformazio orokortuak N desplazamenduen funtzioan adierazten dira. Hasierako deformaziorik ez badago, $(N-M)$ bateragarritasun baldintzak honela adieraz daitezke:

$$[C]\{\beta^k\} = \{0\} \quad (5.18)$$

(5.17) ekuaziotik, (5.18) ekuazioa honela gelditzen da:

$$[C][E]^T \{a^i\} = \{0\} \quad (5.19)$$

Desplazamenduak zero ez direnez, bateragarritasun matrizearen koefiziente ezezagunak osatzen den sistema homogeneotik lortzen dira:

$$\left[\begin{array}{cc} \{C\}_{(M-N)1} & \cdots & \{C\}_{(M-N)M} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \{E\}_{M1} & \cdots & \{E\}_{MN} \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{cc} \{0\}_{N1} & \cdots & \{0\}_{N(M-N)} \end{array} \right] \quad (5.20)$$

(5.10) ekuazioko $[N \times M]$ Oreka ekuazioak M barne indarren menpe adierazten dira, baina $[(M-N) \times M]$ Bateragarritasun Baldintzak (5.18) M deformazio orokortuen menpe idazten dira. Nagabushanam-ek, 1988. urtean, $[C]$ Bateragarritasun matrizea kalkulatzeko programa aurkeztu zuen [21].

5.3.4 INDAR - DEFORMAZIO OROKORTUEN ERLAZIOA

IFM ekuazio nagusietan jarri ahal izateko, bateragarritasun baldintzak barne indarren funtzioan jarri behar dira, eta horretarako, barne indarrak eta deformazio orokortuen erlazio bat behar da. Lan Birtual Osagarriaren Printzipioak (*Principle of Complementary Virtual Work*, PCVW) [22,23] honakoa ezartzen du:

$$\int_V \{\delta\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (5.20)$$

Non $\{\delta\sigma\}$ tentsio birtualen bektorea den eta $\{\delta P^i\}$ nodoetan ari diren kanpo indar birtualen bektorea den.

(5.6) ekuazioa PCVW Printzipioan ordezkatzuz, erlazio hau lortzen da [22],

$$\int_V \{\delta F^j\}^T [Y] \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (5.21)$$

Gainera, tentsioak eta deformazioak $[S]$ materialaren malgutasun matrizearen bidez erlazionatzen dira, hau da:

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (5.22)$$

(5.6), (5.8) eta (5.22) ekuazioak (5.21) ekuazioan ordezkatzuz

$$\{\delta F^j\}^T [G^e] \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T [E]^T \{a^i\} \quad (5.23)$$

Non $[G^e]$ malgutasun matrizea den [9,24], eta ondoko balioa du

$$[G^e] = \int_V [Y]^T [S] [Y] dV \quad (5.24)$$

Eta (5.17) ekuaziotik,

$$\{\delta F^j\}^T [G^e] \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T \{\beta^j\} \quad (5.25)$$

$\{\delta F^j\}$ arbitrarioa denez, (5.25) ekuazioak Indar - Deformazio orokortuen erlazioa (*Force-Deformation relation*, FDR) ematen du:

$$[G^e] \{F^j\} = \{\beta^j\} \quad (5.26)$$

Orain, egituraren FDR erlazioa lortzen da:

$$[G] \{F^k\} = \{\beta^k\} \quad (5.27)$$

$[G]$ egituraren malgutasun matrizea da eta elementu guztien malgutasun matrizeen muntaketa prozedura estandarra jarraituz lortzen da:

$$[G] = \begin{bmatrix} [G^1] & & \\ & \dots & \\ & & [G^e] \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$e = 1 \dots E$; egituraren elementu kopurua izanik.

Orain, (5.27) erlazioa (5.18) ekuazioan ordezkaturik, bateragarritasun baldintzak barne indarren menpe lortzen dira:

$$[C][G]\{F^k\} = \{0\} \quad (5.29)$$

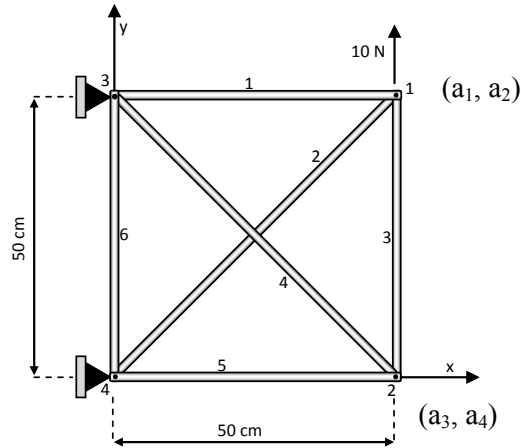
Horrela, Oreka ekuazioak (5.10) eta Bateragarritasunaren ekuazioak (5.29) erabiliz, IFM metodoaren ekuazio nagusia lortzen da:

$$\begin{bmatrix} [E] \\ [C][G] \end{bmatrix} \{F^k\} = \begin{Bmatrix} \{P^l\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

Barne indar independenteak ezagutu ondoren, (5.6) ekuazioaren bitartez tentsioak lortzen dira. Bestalde, $\{F^j\}$ (5.26) erlazioan ordezkaturik $\{\beta^j\}$ deformazio orokortuak lortzen dira, eta hauek (5.16) erlazioan ordezkaturik nodoetako desplazamenduak kalkula daitezke [3].

5.3.5 IFM METODOAREN APLIKAZIOA EGITURA DISKRETOETAN

Atal honetan, IFM metodoa 5.2 irudiko egitura giltzatuan aplikatu da. 1, 2, 3 eta 6 barren sekzioko azalera 645 mm^2 da eta 2, 4 barrarenak, berriz, 456 mm^2 . Material isotropoaren elastikotasun modulua $6,9 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ dela kontuan hartuz, barren indar ezezagunak eta korapiloen desplazamenduak kalkulatu dira.



5.2 Irudia: Egitura giltzatua

Egituraren ezezagun nagusiak barren indar axialak F_1, \dots, F_6 izango dira edo indarren askatasun gradua $n = 6$. 1 eta 2 nodoak libre direnez hauen desplazamenduak a_1, a_2, a_3, a_4 ezezagunak dira, hau da, desplazamenduen askatasun gradua $m=4$.

1 eta 2 korapiloetan (5.10) ekuazioko oreka baldintzak aplikatuz, ondoko erlazioa lortzen da:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Seigarren zutabean balio guztiak zero dira. Seigarren barra bi giltzadura finkoen artean kokatua dagoenez ezin da deformatu eta bere barne indarra zero izango da ($F_6 = 0$).

Orain, DDR erlazioa, (5.17) ekuaziotik, $[E]$ oreka matrizeen irauliarekin lortzen da:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= a_1 & \beta_4 &= \frac{a_3 - a_4}{\sqrt{2}} \\ \beta_2 &= \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} & \beta_5 &= a_3 \\ \beta_3 &= a_2 - a_4 & \beta_6 &= 0\end{aligned}$$

$c = n - m$ enez, 2 bateragarritasun ekuazio behar dira ekuazio nagusian inplementatzeko. Ekuazio hauek (5.16) ekuaziotik a_1, \dots, a_4 desplazamenduak ezabatuz lortzen dira. (5.18) ekuazioko bateragarritasun baldintzak honakoak dira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Lehenengo ekuazioak $\beta_6 = 0$ dela adierazten du. Lehen aipatu den bezala, barra horren desplazamendu axiala eragotzita dagoenez $\beta_6 = F_6 = 0$. Aurrera jarraitu baino lehen, $[E][C]^T = [0]$ egiaztatu behar da, hau da:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Materiala homogeneoa eta barren sekzioak konstanteak dituzten egitura giltzatuetan, FDR erlazioa honela adierazten da:

$$\beta_i = \frac{L_i}{A_i E_i} F_i$$

Eta 5.2 irudiko egituran,

$$\begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,25 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

(5.29) ekuazioa jarraituz, bateragarritasun ekuazioak indarren funtzioetan honela adierazten dira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2\sqrt{2} & 1 & -2\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Azkenik, oreka eta bateragarritasun ekuazioak elkartu behar dira IFM metodoaren ekuazioak lortzeko:

$$\begin{bmatrix} [E] \\ [C][G] \end{bmatrix} \{F^k\} = \begin{Bmatrix} \{P^i\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eta hemendik barren indar axialak lortzen dira:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -545,4 \\ 771,4 \\ 454,5 \\ -642,8 \\ 454,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (N)$$

Eta bukatzeko, korapiloen desplazamenduak DDR erlaziotik ateratzen dira:

$$\begin{aligned} a_1 = \beta_1 &= \frac{L_1 F_1}{A_1 E_1} = -6,13 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ a_2 &= -a_1 + \sqrt{2} \beta_1 = 3,06 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \\ a_3 = \beta_5 &= \frac{L_1 F_1}{A_1 E_1} = 5,11 \cdot 10^{-3} \text{ mm} \\ a_4 &= a_2 - \beta_3 = 2,55 \cdot 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

5.4 INDAR METODO INTEGRATU DUALA (IFMD)

5.4.1 METODOAREN FORMULAZIOA

Atal honetan Patnaik-ek garatutako Indar Metodo Integratu Duala (*Integrated Force Method*, IFMD) azaltzen da. IFM metodoan, ekuazio nagusia osatzen duten oreka eta malgutasun matrizeak DDR eta FDR erlazioetatik ateratzen dira. IFMD metodoak ere, IFM metodoaren matrize elementalak erabiltzen ditu, baina, ezezagun nagusiak barne indarrak izan ordez desplazamenduak dira, SM metodoan bezala. IFM eta IFMD bi formula sorta dituzte: bata desplazamenduak kalkulatzeko eta bestea tentsioak kalkulatzeko.

IFMD metodoan, 5.3.2 atalean IFM metodoan ikusi den bezala, elementu bakoitzaren DDR erlazioa ondokoa da:

$$\{\beta^j\} = [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.16)\text{bis}$$

Eta 5.3.4 ataleko FDR erlazioa:

$$[G^e]\{F^j\} = \{\beta^j\} \quad (5.27)\text{bis}$$

DDR eta FDR erlazioetatik $\{\beta^j\}$ ezabatuz ondoko erlazioa lortzen da,

$$[G^e]\{F^j\} = [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.31)$$

Hemendik, elementuaren indar independenteen bektorea $\{F^j\}$ kalkulatzen da:

$$\{F^j\} = [G^e]^{-1} [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.32)$$

$[E^e]$ oreka matrizea (5.32) ekuazioaren bi aldeetan aurre biderkatuz:

$$[E^e]\{F^j\} = [E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \{a^i\} \quad (5.33)$$

eta (5.8) oreka ekuazioa aplikatuz, elementuaren ekuazio nagusia lortzen da:

$$\{P^i\} = [E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \{a^i\} \quad (5.34)$$

$[K^e]$ elementuaren zurruntasun matrizea izanik:

$$[K^e] = [E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \quad (5.35)$$

SM metodoan 4.2.3 atalean ikusi den bezala, egituraren zurruntasun matrizea (5.36), elementu guztiekin muntaketa prozedura jarraituz lortzen da. Beraz, IFMD metodoaren ekuazio nagusia modu laburbilduan honako hau da:

$$[K]\{a^i\} = \{P^i\} \quad (5.36)$$

$l = 1 \dots N$; eta N egituraren desplazamenduen askatasun gradua izanik. Egituraren N desplazamenduak ezagututa, (5.32) ekuaziotik elementu bakoitzaren indar independenteak kalkulatzen dira. Indar independenteak ezagututa eta (5.6) ekuazioa erabiliz, elementu bakoitzaren tentsio eremua kalkulatzen da.

5.4.2 IFMD METODOAREN APLIKAZIOA EGITURA DISKRETOETAN

Atal honetan, 5.3.5 ataleko egitura IFMD metodoa erabiliz, barren indar ezezagunak eta korapiloen desplazamenduak kalkulatu dira.

IFMD metodoan, egituraren ezezagun nagusiak desplazamenduak a_1, a_2, a_3, a_4 dira. Barne indar independenteak barren indar axialak F_1, \dots, F_6 izango dira.

IFM metodoan bezala, (5.9) ekuaziotik $[E]$ oreka matrizea lortzen da:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Materiala homogeneoa eta barren sekzioak konstanteak dituzten egitura giltzatueta, elementuen FDR erlazioa honela adierazten da:

$$\beta_i = \frac{L_i}{A_i E_i} F_i$$

Beraz, egituraren malgutasun matrizea honakoa da:

$$[G] = \begin{bmatrix} 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,25 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,25 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,12 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Azkenik, (5.35) ekuazioa erabiliz, oreka eta malgutasun matrizeak egituraren zurruntasun matrizean inplementatzen dira:

$$[K] = [E][G]^{-1}[E] = \begin{bmatrix} 111262,5 & 22252,5 & 0 & 0 \\ 22252,5 & 111262,5 & 0 & -89010 \\ 0 & 0 & 111262-5 & -22252-5 \\ 0 & -89010 & -22252-5 & 111262-5 \end{bmatrix}$$

Zurruntasun matrizea eta karga egoera ezagutuz, (5.36) ekuaziotik desplazamenduak lortzen ditugu:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 111262,5 & 22252,5 & 0 & 0 \\ 22252,5 & 111262,5 & 0 & -89010 \\ 0 & 0 & 111262-5 & -22252-5 \\ 0 & -89010 & -22252-5 & 111262-5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix}$$

Eta korapiloen desplazamendu berdinak IFM metodoa ateratzen dira:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6,13 \cdot 10^{-3} \\ 3,06 \cdot 10^{-2} \\ 5,11 \cdot 10^{-3} \\ 2,55 \cdot 10^{-2} \end{Bmatrix} \quad (mm)$$

Eta bukatzeko, (5.32) ekuazioa aplikatuz, lortutako indar independenteak ere berdinak dira:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = [G^e]^{-1} [E^e]^T \{a^i\} = \begin{Bmatrix} -545,4 \\ 771,4 \\ 454,5 \\ -642,8 \\ 454,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (N)$$

5.5 IFMD METODOAREN EKUAZIO NAGUSIAK LORTZEKO BIDE ZUZENA

Patnaik et al.-en formulazio teorikoan deformazio orokortuaren kontzeptuan oinarrituta dago. Azpimarratu behar da hasiera batean metodoa egitura diskretuetan garatu zutela. Sistema hauetan, Patnaik-ek azaldutako deformazio orokortua eta barne indarraren esanahia argi ikusten da: Habe baten kasuan indar axialarekin lotutako deformazio orokortua luzapena da; momentu makurtzailearekin lotutako deformazio orokortua makurdura angelua da eta momentu bihurtzailearekin bihurtura-angelua da.

Nahiz eta deformazio kontzeptuak eremu jarraituetan esanahi fisiko argirik ez izan, Patnaik et al.-ek sistema diskretuetan erabilitako bide paralelo bat jarraitu zuten IFMD sistema jarraituetara zabaltzeko: alde batetik deformazio orokortuak eta desplazamenduak oreka matrizearen bitartez erlazionatu zituen, eta bestetik, barne indarrak eta deformazio orokortuak malgutasun matrizearen bitartez erlazionatu zituen. Horrela, bi erlazio nagusietatik deformazio orokortuak ezabatuz IFMD ekuazio nagusiak lortu zituzten [19].

Lan honetan, deformazio orokortuak erabili gabe IFMD metodoko ekuazio nagusiak lortzeko bide zuzen bat garatu da. Formulazio honen ondoko azalpenean, aurreko metodoetako pauso batzuk errepikatuko dira.

PVW printzipioa [22,25] honakoa da:

$$\int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (4.20)\text{bis}$$

(4.23) ekuazioan deformazioak eta nodoetako desplazamenduak erlazionatzen dira:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{a^i\} = [B]\{a^i\} \quad (4.23)\text{bis}$$

Bestalde, (5.6) ekuazioa aplikatuz, tentsioak barne indar independenteen funtzioan kalkula daitezke:

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (5.6)\text{bis}$$

(4.20) eta (4.23) ekuazioak PVW printzipioan ordezkaturaz, honako erlazioa gelditzen da:

$$\{\delta a^i\}^T \left(\int_V [B]^T [Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (5.37)$$

Eta hemendik, elementuaren oreka ekuazioa lortzen da:

$$[E^e] \{F^j\} = \{P^i\} \quad (5.8)\text{bis}$$

Bestalde, PCVW Printzipioak [22,26] honako hau ezartzen du:

$$\int_V \{\delta \sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (5.37)$$

(5.22) ekuazioan, tentsioak eta deformazioak $[S]$ materialaren malgutasun matrizearen bidez erlazionatzen dira:

$$\{\varepsilon\} = [S] \{\sigma\} \quad (5.22)\text{bis}$$

(5.6) ekuazioa, (5.8) oreka ekuazioa eta (5.22) PCVW Printzipioan ordezkaturaz [22], ondoko erlazioa gelditzen da:

$$\{\delta F^j\}^T \left(\int_V [Y]^T [S] [Y] dV \right) \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T [E^e] \{a^i\} \quad (5.38)$$

$\{\delta F^j\}$ kantitate arbitrarioa denez eta $[G^e]$ (5.24) ekuazioko malgutasun matrizea izanik, (5.31) ekuazioa lortzen da:

$$[G^e] \{F^j\} = [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.31)\text{bis}$$

(5.31) ekuaziotik, barne indarrak $\{F^j\}$ eta desplazamenduak $\{a^i\}$ honako ekuazioaren bidez erlazionatzen dira:

$$\{F^j\} = [G^e]^{-1} [E^e]^T \{a^i\} \quad (5.32)\text{bis}$$

Orain, $[E^e]$ ekuazioko bi aldeetan aurre biderkatuz eta (5.8) ekuazioa ordezkatzuz,

$$[E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T\{a^i\}=\{P^i\} \quad (5.39)$$

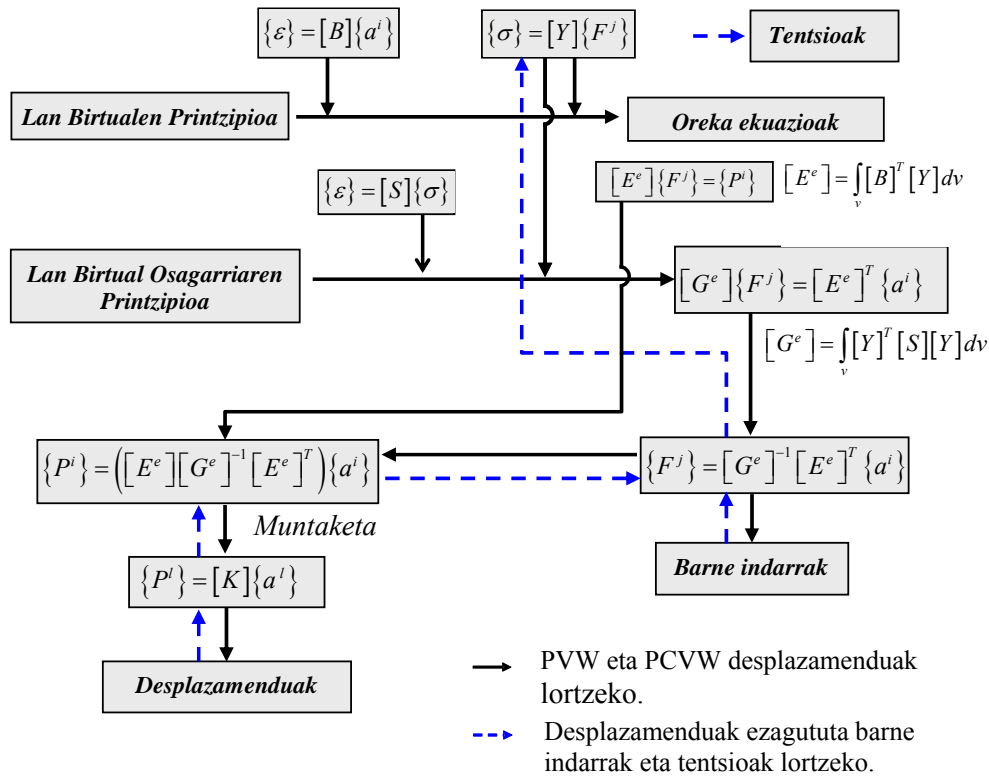
Non $[K^e]$ IFMD metodoari dagokion elementu baten zurruntasun matrizea den:

$$[K^e]=[E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \quad (5.35)\text{bis}$$

Egituraren zurruntasun matrizea muntaketa prozedura jarraituz lortzen da eta horrela, IFMD metodoaren ekuazio nagusia lortzen da.

$$[K]\{a^i\}=\{P^i\} \quad (5.36)\text{bis}$$

Lortutako ekuazio nagusia eta IFMD metodoarenak baliokideak direla ikus daiteke. IFMD metodoaren prozeduran, (5.13) ekuazioa deformazio orokortua erabiliz DDR eta FDR erlazioetatik lortzen da. Proposatutako prozedurarekin, berriz, PVW eta PCVW printzipioetatik lortzen dira eta deformazio orokortuak ez dira beharrezkoak. 5.3 irudian prozedura zuzenaren laburbiltzen da.



5.3 Irudia. IFMD metodoaren ekuazio nagusiak zuzenean lortzeko prozedura.

5.6 METODO HIBRIDOAK

5.6.1 SARRERA

1960. hamarkadaren hasieran, elementu finituen metodoa elementuen propietateen eremu bakarren formulazioetan oinarrituta zegoen [27, 28]. Garai hartan, bi formulazio garatu ziren: Desplazamendu eta tentsioetan oinarritutako formulazioak Indar metodoa, bere prozedura programatzeko zaila denez, ez zen ia erabili [29]. Desplazamendu metodoaren bitartez, lehenengo desplazamenduak kalkulatu dira, eta tentsioak, desplazamenduen deribazio numerikotik lortzen da.

Eremu bakarren formulazioen arazoak saihesteko eremu anitzeko formulazioak sortu ziren. 1964an Pianek, metodo hibridoak (*Hybrid methods*, HM) garatu zituen [30,31]. Formulazio hau, hasieran, energia osagarri egonkorraren printzipioan oinarrituta

zegoen, eta eragozpen baldintzak betearazteko Lagrange biderkatzaileak erabili zituen. Gero, elementu hauen formulazioa Hellinger-Reissnerren printzipioa aplikatuz garatu zuen, tentsio eta desplazamendu eremuak independenteak suposatuz.

Handik aurrera, eremu anitzeko elementu finitu asko garatu dira, eta elementu hibrido eta mistoen modeloak proposatu dira [32]. Elementu mistoa eremu anitzeko funtzionalaren bitartez formulatuta dagoen elementua da eta hauen ekuazio nagusietan aldagai bat baino gehiago agertzen da. Elementu hibridoa, berriz, eremu anitzeko funtzionalaren bitartez formulatuta dagoen elementua da, baina lortutako ekuazio nagusian ezezagun bakarrak nodoetako desplazamenduak dira [33].

5.6.2 FUNTZIONALAREN FORMULAZIOA

Egituren eta solidoen mekanikan bi bariazio-printzipio oinarritzkoak daude: PVW eta PCVW [34]. Desplazamenduetan oinarritutako elementuak PVW printzipiotik lortzen dira, eta tentsioetan oinarritutako elementuak PCVW printzipiotik.

Bariazio-metodoetan ez dira eremu zehatzak erabiltzen. Hauen ordez, bariazioak jasan daitzaketen eremu independente batzuk, eta eremu independenteen menpeko beste eremu batzuk, bariaziorik ez dutenak. Hurbilketa eremu independenterekiko bariazioak suposatuz lortzen da [35].

Gorputz elastiko lineal batean, $\{\sigma\}$ tentsio, $\{\varepsilon\}$ deformazio eta $\{u\}$ desplazamendu eremuen artean, honako erlazioak bete behar dira:

1. Deformazio- desplazamendu erlazioak:

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [B]\{a^i\} \quad (4.23)\text{bis}$$

2. Tentsio- deformazio ekuazioak:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad \text{edo} \quad \{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (4.24)\text{bis}$$

3. Tentsio eremuaren hurbilketa:

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (5.1)\text{bis}$$

4. Oreka ekuazioak:

$$\{B_i\} = [L]^T \{\sigma\} \quad (2.4)\text{bis}$$

$$\{T\} = \{\sigma\} \{v\} \quad (2.9)\text{bis}$$

Elastikotasun linealaren bariazio-printzipio guztiak, ondoko funtzioaletan oinarritzen dira:

$$\Pi = U - W \quad (5.40)$$

Non U gorputzeko deformazio energia orokortua eta W kanpo indarren lana diren.

Deformazio energia orokortuak honela adierazten da [35]:

$$\begin{aligned} U = & \frac{1}{2} j_{11} \int_V \{\tilde{\sigma}\} \{\varepsilon^\sigma\} dV + j_{12} \int_V \{\tilde{\sigma}\} \{\tilde{\varepsilon}\} dV + j_{13} \int_V \{\tilde{\sigma}\} \{\varepsilon^u\} dV + \\ & + j_{22} \int_V \{\sigma^\varepsilon\} \{\tilde{\varepsilon}\} dV + j_{23} \int_V \{\sigma^\varepsilon\} \{\varepsilon^u\} dV + \frac{1}{2} j_{33} \int_V \{\sigma^u\} \{\varepsilon^u\} dV \end{aligned} \quad (5.41)$$

Non j_{11}, \dots, j_{33} , koefiziente numeriko batzuk diren. Koefiziente hauen arabera bariazio-printzipio guztiak atera daitezke. Bestalde, \sim notazioak bariazioa jasan dezakeen eremu independentea adierazi nahi du, eta $\{\ }^\sigma, \{\ }^u, \{\ }^\varepsilon$ aldagaia tentsio, desplazamendua edo deformazioen menpe adierazten direla esan nahi du.

Bestalde, W kanpo indarren lana honela adierazten da:

$$W(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) = \int_V \{B\} \{\tilde{u}\} dV + \int_{S_2} \{\tilde{T}\} \{\tilde{u}\} dS \quad (5.42)$$

Beraz, $j_{11} = -1, j_{13} = 1, j_{31} = 1$ eta beste guztiak zero eginez, Hellinger-Reissner printzipioa lortzen da:

$$\Pi_{HR} = -\frac{1}{2} \int_V \{\tilde{\sigma}\} \{\varepsilon^\sigma\} dV + \int_V \{\tilde{\sigma}\} \{\varepsilon^u\} dV - \int_V \{B\} \{\tilde{u}\} dV - \int_{S_2} \{\tilde{T}\} \{\tilde{u}\} dS \quad (5.43)$$

5.7 IFMD ETA HM METODOEN ARTEKO BALIOKIDETASUNA

Atal honetan Pian-ek Hellinger-Reissner printzipioan oinarritutako formulazio hibridoa laburtuko da. Suposa dezagun gorputz elastiko bat elementu finituetan diskretizatuta dagoela. Bolumen indarrak eta gainazalekoak aplikatuta baditu eta inposatutako desplazamendurik ez badu, gorputz horren tentsio-banaketa elementuan zehar Hellinger-Reissner printzipioaren bitartez lor daiteke [36].

(4.22) eta (4.24) ekuazioak Hellinger-Reissner printzipioan ordezkaturaz, (5.43) funtzionala honela gelditzen da:

$$\pi_{HR} = \int_V \left[-\frac{1}{2} \{\tilde{\sigma}\}^T [S] \{\sigma\} + \{\tilde{\sigma}\}^T ([L]\{u\}) - \{\tilde{u}\}^T \{B^i\} \right] dV - \int_{s_2} \{\tilde{u}\}^T \{T^i\} dS \quad (5.44)$$

Funtzional honetan, bariazioa jasaten duten aldagai independenteak $\{\tilde{\sigma}\}$ eta $\{\tilde{u}\}$ dira. (5.6) ekuazioa (5.44) ekuazioan ordezkaturaz:

$$\begin{aligned} \pi_{HR} = & -\frac{1}{2} \{\tilde{F}^j\}^T \left(\int_V [Y]^T [S] [Y] dV \right) \{F^j\} + \{\tilde{F}^j\}^T \left(\int_V [Y]^T [L] [N] dV \right) \{\tilde{a}^i\} - \\ & - \{\tilde{a}^i\}^T \left(\int_V [N]^T \{B^i\} dV + \int_{s_2} [N]^T \{T^i\} dS \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

Ondoren,

$$\pi_{HR} = -\frac{1}{2} \{\tilde{F}^j\}^T [G^e] \{F^j\} + \{\tilde{F}^j\}^T [T^e] \{\tilde{a}^i\} - \{\tilde{a}^i\}^T \{P^i\} \quad (5.46)$$

Non $[G^e]$ (5.24) ekuazioaren malgutasun matrizea den, $[T^e]$ (*leverage*) eragin matrizea da eta $\{P^i\}$ kanpo indarren bektorea.

Funtzional honetan, bariazioa jasaten duten aldagai independenteak $\{\tilde{F}^j\}$ eta $\{\tilde{a}^i\}$ dira. $\{F^j\}$ bektorearekiko baldintza partzial egonkorra aplikaturaz, $\{\tilde{F}^j\}$ eta $\{\tilde{a}^i\}$ elementu bakoitzaren barne indarren bektorea eta nodoetako desplazamenduen arteko erlazioa lortzen da:

$$[G^e]\{F^j\}=[T^e]\{a^i\} \quad (5.47)$$

Hemendik $\{F^j\}$ lortzen da,

$$\{F^j\}=[G^e]^{-1}[T^e]\{a^i\} \quad (5.48)$$

Orain, (5.48) ekuazioa (5.46) ekuazioan ordezkatzuz,

$$\pi_{HR} = \frac{1}{2}\{\tilde{a}^i\}^T [T^e]^T [G^e]^{-1} [T^e]\{a^i\} - \{\tilde{a}^i\}^T \{P^i\} \quad (5.49)$$

Eta $\{a^i\}$ bektorearekiko baldintza partzial egonkorra aplikatuz, elementuaren ekuazio nagusia lortzen da.

$$[T^e][G^e]^{-1}[T^e]^T\{a^i\}-\{P^i\}=0 \quad (5.50)$$

Eta ondoren,

$$[K^e]_{HM}\{a^i\}=\{P^i\} \quad (5.51)$$

(5.47) ekuazioko eragin matrizearen iraulia [1,36] eta IFMD metodoen oreka matrizea berdinak direla ikus dezakegu, $[T^e]=[E^e]^T$. Beraz, bi metodoek espresio analitiko bera dute eta oreka ekuazioa (5.10) honela idatz daiteke:

$$[E^e]\{F^j\}=\{P^i\} \quad (5.8)\text{bis}$$

Pianek eta Sumihararak analisia sakonagoa egin zuten elementu laukizuzen orokorretan metodoaren baliozkotasuna egiaztatzeke [6], baina lan honetan laukizuzenak bakarrik erabiliko dira.

IFM eta IFMD metodoetan, oreka matrizea $[E^e]$ oreka ekuaziotik zuzenean lortzen da. HM metodoetan, berriz, eragin matrizea $[T^e]$ (*leverage matrix*) Hellinger–Reissnerren printzipiotik ateratzen da. Horregatik, metodo hibridoetan eragin matrizea oreka matrize bera dela ez da zuzen ikusten.

5.8 MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIO – METODOA

5.8.1 TENTSIO MODU BALIOKIDEAK

IFMD eta HM metodoetan elementuaren zurruntasun matrizearen kalkuluan malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatu behar da, eta eragiketa honen konputazio kostua handia da. Zhang et al.-ek [1,37,38,39] elementu hibridoetan eragiketa honen konputazio kostuaren arazoa malgutasun matrizearen diagonalizazioaren bitartez ebatzi zuten.

Teorema 1: Suposatutako $\{\sigma_i\}$ ($i=1\dots M$) tentsio moduak linealki independenteak badira, elementuaren $[G^e]$ malgutasun matrizea ez da singularra izango.

Frogapena:

1) Baldintza beharrezkoa: Elementu baten malgutasun matrize ez-singularra suposa dezagun. Orduan $k_j \in \mathbf{R}$ parametroen bitartez, erlazio hau ezar daiteke:

$$k_1 \{\sigma_1\} + \dots + k_M \{\sigma_M\} = \sum_{j=1}^M k_j \{\sigma_j\} = \{0\} \quad (5.52)$$

$\{\sigma_i\}$ tentsio moduak $[Y]$ matrizearen zutabeak direnez,

$$\begin{aligned} \int_V \{\sigma_i\}^T [S] \left(\sum_{j=1}^M k_j \{\sigma_j\} \right) dV &= \sum_{j=1}^M k_j \left(\int_V \{\sigma_i\}^T [S] \{\sigma_j\} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^M G_{ij} k_j = 0 \quad (i=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (5.53)$$

$[G^e]$ malgutasun matrizea singularra ez denez,

$$k_1 = \dots = k_M = 0 \quad (5.54)$$

Beraz, tentsio moduak linealki independenteak dira.

2) Baldintza nahikoa: Tentsio modu independenteak suposa ditzagun. Absurdo bidezko froga egiteko, malgutasun matrizea singularra dela suposatuko da. Singularra bada, honako ekuazioan zero ez diren emaitzak lor daitezke:

$$\sum_{j=1}^M G_{ij} k_j = \sum_{j=1}^M \left(\int_V \{\sigma_i\}^T [S] \{\sigma_j\} dV \right) k_j = 0 \quad (i=1, \dots, M) \quad (5.55)$$

Eta beraz, ba daude zero ez diren k_j parametroak (5.55) ekuazioa betetzen dutenak:

$$\sum_{i=1}^M k_i \left(\sum_{j=1}^M \left(\int_V \{\sigma_i\}^T [S] \{\sigma_j\} dV \right) k_j \right) = \int_V \left(\sum_{i=1}^M k_i \{\sigma_i\} \right)^T [S] \left(\sum_{j=1}^M k_j \{\sigma_j\} \right) dV = 0 \quad (5.56)$$

Materialaren malgutasun koefizienteen matrizea definitu positiboa denez:

$$\sum_{j=1}^M k_i \{\sigma_i\} = \sum_{j=1}^M k_j \{\sigma_j\} = 0 \quad (5.57)$$

Eta kontraesana dago tentsio moduak linealki independenteen suposaketarekin, beraz $[G^e]$ ez-singularra da.

Teorema 2: Suposatutako tentsio moduak independenteak badira, hauek erabiliz elementu baliokidea lortzen da.

Frogapena:

$\{\sigma_i\}$ eta $\{\bar{\sigma}_i\}$ tentsio modu baliokideak direla suposa dezagun, non $i=1, \dots, M$ den. Orduan, badago $[T]$ matrize ez singularra, honako erlazioa betetzen duena:

$$[Y] = [\bar{Y}][T] \quad (5.58)$$

Non, $[Y]$ eta $[\bar{Y}]$ matrizeak $\{\sigma_i\}$ eta $\{\bar{\sigma}_i\}$ tentsio moduak osatuta dauden. Suposatutako tentsio modu hurbildua erabiliz, $\{\bar{\sigma}_i\}$, (5.35) ekuazioaren arabera, elementuaren zurruntasun matrizea honela adieraz daiteke:

$$[\bar{K}^e] = [\bar{E}^e][\bar{G}^e]^{-1}[\bar{E}^e]^T \quad (5.59)$$

Non $[\bar{E}^e]$ eta $[\bar{G}^e]$ (5.9) eta (5.24) ekuazioetako oreka eta malgutasun matrizeak diren, hurrenez hurren. Ekuazio hauetan (5.58) ekuazioa ordezkatur, honako ekuazioak lortzen dira:

$$[E^e] = \left(\int_V [B]^T [\bar{Y}] dV \right) [T] = [\bar{E}^e][T] \quad (5.60)$$

$$[G^e] = [T]^T \left(\int_V [\bar{Y}]^T [S][Y] dV \right) [T] = [T]^T [\bar{G}^e][T] \quad (5.61)$$

(5.60) eta (5.61) ekuazioak (5.35) elementuaren zurruntasun matrizean ordezkatur, eta $[T]$ matrizea ez-singularra bada, honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} [K^e] &= ([\bar{E}^e][T])([T][\bar{G}^e][T]^T)^{-1}([T]^T[\bar{E}^e])^T = \\ &= [\bar{E}^e][\bar{G}^e]^{-1}[\bar{E}^e]^T = [\bar{K}^e] \end{aligned} \quad (5.62)$$

5.8.2 DIADONALIZAZIO METODOA

$\{\sigma_i\}$ tentsio moduak $[Y]$ matrizearen zutabeak dira. Suposatutako tentsio moduak $\{\sigma_i\}$ independenteak badira, Gram-Schmidt metodoa erabiliz, tentsio modu hauen baliokide ortogonalak kalkula daitezke. Barne- biderketa honela definitzen da:

$$\langle \{\sigma_i\}, [S]\{\sigma_j\} \rangle = \int_V \{\sigma_i\}^T [S]\sigma_j dV \quad (5.63)$$

Tentsio moduen ortogonal baliokideak Gram-Schmidt metodoaren bitartez lor daitezke. Hau da:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 \\ \bar{\sigma}_i = \sigma_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \{\sigma_i\}, [S]\{\sigma_j\} \rangle}{\langle \{\sigma_j\}, [S]\{\sigma_j\} \rangle} \bar{\sigma}_j \quad \text{non } i = 2, \dots, M \end{cases} \quad (5.64)$$

Suposatutako tentsio modu ortogonalean, $[\bar{Y}]$ indarren interpolazio-funtzioen matrizea da eta $\{\bar{\sigma}_i\}$ matrize honen tentsio modu ortogonalak dira. Tentsio modu ortogonalak honela normalizatu daitezke:

$$\{\bar{\sigma}_i^*\} = \frac{\{\bar{\sigma}_i\}}{\|\{\bar{\sigma}_i\}\|} \quad (i=1, \dots, M) \quad (5.65)$$

non

$$\|\{\bar{\sigma}_i\}\| = \sqrt{\langle \{\bar{\sigma}_i\}, [S]\{\bar{\sigma}_i\} \rangle} = \sqrt{\int_V \{\bar{\sigma}_i\}^T [S] \{\bar{\sigma}_i\} dV} \quad (5.66)$$

$\{\bar{\sigma}_i^*\}$ tentsio modu ortonormalak dira. Horrela, tentsio modu ortonormalen arabera, elementu baten malgutasun matrize berria diagonalak eta unitarioa izango da.

$$[\bar{G}^{e*}] = \int_V [\bar{Y}^*]^T [S] [\bar{Y}^*] dV = [I] \quad (5.67)$$

$[\bar{Y}^*]$ indarren interpolazio-funtzioen matrizea da, suposatutako tentsio modu ortonormalean. Oreka matrizearen ekuazioan ordezkatzuz:

$$[\bar{E}^{e*}] = \int_V [B]^T [\bar{Y}^*] dV \quad (5.68)$$

Beraz, (5.35) ekuazioaren arabera, elementu baten zurruntasun matrizea eraiki daiteke malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatu gabe:

$$[K^e] = [\bar{E}^{e*}] [\bar{E}^{e*}]^T \quad (5.69)$$

Tentsio modu ortonormaletik lortutako (5.69) ekuazioko zurruntasun matrizea, eta tentsio modua ez ortonormaletik lortutakoak berdinak dira (5.68) ekuazioko oreka matrize berria (5.48) ekuazioan ordezkatzuz elementu bakoitzaren indar independenteak lortzen dira:

$$\{\bar{F}^{j*}\} = [\bar{E}^{e*}]^T \{d^i\} \quad (5.70)$$

Azkenean, elementuaren edozein puntutako tentsio osagaiak ondokoak dira:

$$\{\sigma\} = [\bar{Y}^*] \{\bar{F}^{j*}\} = [\bar{Y}^*] [\bar{E}^{e*}]^T \{a^i\} \quad (5.71)$$

Tentsio modu baliokide honetatik lortutako zurruntasun matrizeak elementu berdin batera eramaten du, $[\bar{E}^{e*}]$, tentsio modu ortonormalean lortutako oreka matrizea izanik.

5.9 ZURRUNTASUN-INDAR METODOA (SFM)

5.4 atalean ikusi denez, IFMD metodoa PVW eta PCVW printzipioetatik dator. Bestalde, 5.7 atalean HM eta IFMD metodoak baliokideak direla frogatu da, beraz, HM metodoa ere printzipio hauetan ere oinarrituta dago.

IFMD eta HM metodoetan PVW eta PCVW printzipioak oinarrituta daudenez, tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritutako formulazioak direla esan daiteke, eta hori adierazteko, Zurruntasun Indar Metodoa (*Stiffness Force Method*, SFM) deituko zaie, bai IFMD eta bai HM-ri ere.

5.10 ONDORIOAK

Patnaik et al.-ek garatutako IFM eta IFMD metodoetan ekuazio nagusiak DDR eta FDR erlazioen bitartez lortzen dira. Erlazio hauetan, $\{\beta^j\}$ deformazio orokortuaren kontzeptua oso garrantzitsua da, deformazio orokortuak eta barne indarrak erlazio hauen bidez lotzen direlako. Eremu diskretuetan deformazio orokortuaren esanahia argi dago, baina eremu jarraitu baten diskretizazioan honen esanahia ez dago argi. IFMD metodoan ekuazio nagusia PVW eta PCVW printzipioen aplikazio zuzenetik lortu da, deformazio orokortuaren kontzeptua erabili gabe.

IFMD metodoa eta Hellinger - Reissner printzipio egonkorrean oinarritzen diren Pian-en HM metodoak baliokideak direla frogatu da.

Malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko konputazio kostua handia du. Zhang et al.-ek Elementu hibridoetan proposatutako diagonalizazio metodoa IFMD metodoan ere aplikatu daiteke.

IFMD eta HM metodoetan PVW eta PCVW printzipioak inposatuta daudenez, tentsioetan eta desplazamenduetan oinarritutako formulazioak direla esan daiteke, eta hori adierazteko, Zurruntasun Indar Metodoa (*Stiffness Force Method*, SFM) deituko zaie.

5.11 ERREFERENTZIAK

- 1 Hoa, SV; Feng, W. (1998). Hybrid finite element method for stress analysis of laminate composites. *Kluwer Academic Publishers*.
- 2 Patnaik, SN; Coroneos, M; Hopkins, A. (1998). Recent advances in the method of forces: integrated force method of structural analysis. *Advances in Engineering Software*, **29**: 3-6.
- 3 Kaljevic, I; Patnaik, SN and Hopkins, DA. (1996). Development of finite elements for two-dimensional structural analysis using the integrated force method. NASA TM.
- 4 Spilker, RL; Maskeri, SM and Kania, E. (1981). Plane isoparametric hybrid-stress elements: invariance and optimal sampling. *Int. J. numer. Meth. Engng*, **17**:1469-1476.
- 5 Pian THH and Chen DP. (1982). Alternative ways for formulation of hybrid stress elements. *Inf. J. numer. Meth. Engng* **18**, 1679-1684.
- 6 Pian, THH and Sumihara, K. (1982). Rational approach for assumed stress elements. *Int. J. numer. Meth. Engng*, **20**:1685-1695.
- 7 Pian, THH; Chen, DP and Kang, D. (1983). A new formulation of hybrid/mixed finite element. *Compur.Struct*, **16**: 81-87.
- 8 Spilker, RL and Singh, SP. (1982). Three-dimensional hybrid-stress isoparametric quadratic displacement elements. *Int. J. numer. Meth. Engng*:**18**, 445-465.
- 9 Robinson, J. (1973). *Integrated Theory of finite element methods*. Wiley & Sons.
- 10 Zhang, CH; Hoa, SV. (2014). A systematic and quantitative method to determine the optimal assumed stress fields for hybrid stress finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*: **80**: 41–62.
- 11 Wu, CC; Cheung, YK. (1995). On optimization approaches of hybrid stress elements. *Finite. Elem. Anal. Des*:**21**: 111–128.

12. Huang, Q. (1991). Modal analysis of deformable bodies with finite degree of deformation freedom—an approach to determination of natural stress modes in hybrid finite elements, in:W.Z.Chien, Z.Z.Fu (Eds.), *Advances in Applied Mathematics & Mechanics in China*: **3**:283–303.
13. McGuire, W; and Gallagher, RH. (1979). Matrix Structural Analysis. Wiley, New York.
14. Gallagher, RH; Rattinger, L; and Archer, JS. (1964). A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis. *The MacMillan Co.*, New York.
15. Arnaboldi, EA. (1951). Cálculo de estructuras hiperestáticas por el método de las fuerzas. *La Plata*: CEI.
16. Felippa, CA. (2001). A historical outline of matrix structural analysis: A play in three acts. *Computers & Structures*, **79**:1313-1324.
17. Patnaik, SN. (1973). An integrated method for discrete analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*; **6**: 237-251.
18. Patnaik, SN. (1982)..Frequency analysis of structures by Integrated Force Method. *Journal of Sound and Vibration*; **83**(1): 93-109.
19. Patnaik, SN; Pai, SS; Hopkins, DA. (2007). Compatibility condition in theory of solid mechanics (elasticity, structures, and design optimization), *Arch Comput Method E*. **14** 431-457.
20. Patnaik, SN; Joseph, KT. (1985). Compatibility Conditions from Deformation Displacement Relationship. *American institute of aeronautics and Astronautics*, Technical Notes.
21. Nagabushanam, J. (1988). General purpose program to generate compatibility matrix for the Integrated Force Method. *AIAA Journal*, **28** (10): 1838-1842.
22. Shames, H; Dym ,CL. (1985). Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisfere Publishing Corporation.
23. Love, A. (1994). A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover.
24. Prezemieniecki, JS. (1968). Theory of matrix structural analysis. Dover publications.
25. Fung, YC. (1965). Foundations of solid mechanics. *Prentice-Hall International*.
26. Love, A. (1994). A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover.

- 27 Turner, MJ; Clough, RW; Martin, HC et ál. (1956). Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*; **23** (9): 805-824.
- 28 Clough, RW. (1960). The finite element method in plane stress analysis of complex structures. Proceedings, American society of civil engineers, 2nd conference on electronic computation, Pittsburg, PA. 345-378.
- 29 Levy, S. (1953). Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings, *Journal of the Aeronautical Sciences*; **20** (7): 449-454.
30. Pian, THH. (1964). Derivation of Element Stiffness Matrices by assumed Stress distribution. *M.I.T., Technical notes*.
31. Pian, THH. (1995). State of the art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*. **21**: 5-20.
- 32 Atluti, SN; Gallaguer, RH; Zienkiewics, OC.(1983). Hybrid and Mixed Finite Element Methods. Wiley and Sons, Chichester.
- 33 Hoa, SV; Feng, W. (1998). Hybrid finite element method for stress analysis of laminate composites. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- 34 Washizu, K. (1975). Variational methods in elasticity and plasticity Pergamon Press.
- 35 Felippa, CA; Militello, C. (1990). Principios variacionales parametrizados en la elasticidad lineal. *Revista internacional de métodos numéricos para el cálculo y diseño en ingeniería*, **6**(2): 333-342.
36. Pian, THH. Rationalization in deriving element stiffness matrix by assumed stress approach. AFFDL-TR-68-150
37. Zhang, CH; Feng, W; Huang, Q. (2002). The stress subspace of hybrid stress element and the diagonalization method for flexibility matrix. *Applied mathematics and mechanics*, **23**: 11.
38. Zhang, CH; Wang, D; Zhang, J; Feng, W; Huang, Q. (2007). On the equivalence of various hybrid finite elements and a new orthogonalization method for explicit element stiffness formulation. *Finite elements in analysis and design*: **34**; 312-332.
- 39 Pian, THH. (1995). State of the art development of hybrid/mixed finite element method. *Finite elements in analysis and design*; **21**: 5-20.



SFM METODOAREN APLIKAZIOA MINTZ ELEMENTU LAUKIZUZENEAN

6.1 SARRERA

Laminatu konpositeen tentsio egoera aldagai askoren menpe dago: laminen pilaketa-sekuentzia, lamina bakoitzaren zuntz-angelua eta zuntza eta matrizearen propietateak, besteak beste. Geometria, materiala edo mugalde baldintzak konplexuak direnean Elementu Finituen metodoa bezalako metodo numerikoak erabiltzen dira material hauen tentsio eta desplazamendu eremuak ezagutzeko.

Material konpositeen analisi numerikoan gehien erabiltzen den metodoa Zurruntasun Metodoa (SM) da. Hoa-k 1998. urtean laminatu konpositeetan aplikatutako Metodo Hibridoai (HM) buruzko liburu bat argitaratu zuen [1], baina konpositeen analisisian metodo hauek oso gutxi erabili izan dira azken urte hauetan. Bestalde, 5.6 atalean IFMD eta Pian-ek garatutako HM metodoak baliokideak direla frogatu da eta, hauen formulazioak bai tentsioetan bai desplazamenduetan oinarrituta daudenez, SFM deitu zaie.

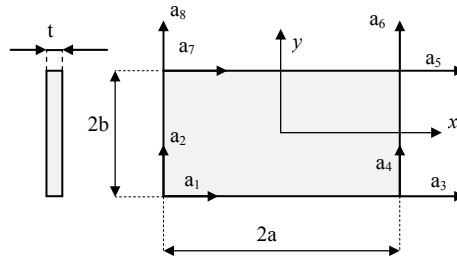
Atal honetan SFM metodoa aplikatu da lau nodoko mintz elementu laukizuzenean. Bai SFM, bai SM metodoetan, desplazamenduak hurbiltzeko erabili diren interpolazio-funtzioak 4.3 atalean aurkeztutako Lagrange polinomioak dira, eta indar interpolazio funtzioak 5.2 atalean azaldutakoak dira.

Lehenengo pausoa SFM aplikatuz mintz-elementu baten oreka eta malgutasun matrizeak kalkulatu dira.

Zhang et al. [2] malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko konputazio kostuaren arazoa konpontzeko, ortonormalizazio metodoa garatu zuten eta elementu laukizuzenetan eta lauki orokorretan aplikatu zuten. Hala ere, lan honetan ortonormalizazio -metodoa mintz-elementu laukizuzenetan aplikatu da.

6.2 OREKA MATRIZEA $[E^e]$

SFM metodoa aplikatzeko 6.1 irudiko lau nodoko mintz-elementu laukizuzena erabili da [3]:



6.1 Irudia. Lau nodoko mintz-elementu laukizuzena.

IFMD metodoan aukeratuko diren elementuen desplazamendu interpolazio funtzioak SM metodoan erabili diren 4.4.3 ataleko Lagrange polinomio linealak [4] dira:

$$u(x, y) = \frac{1}{4} \{ (1-\xi)(1-\eta)a_1 + (1+\xi)(1-\eta)a_3 + (1+\xi)(1+\eta)a_5 + (1-\xi)(1+\eta)a_7 \} \quad (6.1)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \{ (1-\xi)(1-\eta)a_2 + (1+\xi)(1-\eta)a_4 + (1+\xi)(1+\eta)a_6 + (1-\xi)(1+\eta)a_8 \} \quad (6.2)$$

$\xi = x/a$ eta $\eta = y/b$; eta a_1, a_2, \dots, a_8 nodoetako desplazamenduak izanik. Atalean ikusi denez, indarren interpolazio funtzioak [5,6] honakoak dira:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= F_1 + F_2 \eta \\ \sigma_y &= F_3 + F_4 \xi \\ \tau_{xy} &= F_5 \end{aligned} \quad (5.2)\text{bis}$$

(5.3) ekuazioko $[Y]$ indarren interpolazio funtzioen matrizea erabiliz, elementuaren tentsio eremua indar independenteen funtzioan idatz daiteke:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Non N_x , N_y , N_{xy} luzera-unitateko indarrak; t mintz-elementuaren lodiera; eta F_1 , F_2 ... F_5 luzera-unitateko indar independenteak. Ondoren, desplazamenduen interpolazio-funtzioak deribatuz, (4.23) ekuazioko $[B]$ desplazamendu-deformazio matrizea lortzen da:

$$[B] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{-1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{a}(1+\eta) & 0 & \frac{-1}{a}(1+\eta) & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b}(1-\xi) & 0 & \frac{-1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{b}(1+\xi) & 0 & \frac{-1}{b}(1-\xi) \\ \frac{-1}{b}(1-\xi) & \frac{-1}{a}(1-\eta) & \frac{-1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}(1+\xi) & \frac{1}{a}(1-\eta) & \frac{1}{b}(1-\xi) & \frac{-1}{a}(1+\eta) \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Kasu honetan, elementuaren lodiera konstantea denez, oreka matrizea elementuaren gainazalean hedatzen da:

$$[E^e] = \int_S [B]^T [Y] dS \quad (6.5)$$

(6.5) ekuazioa aplikatuz, $[E^e]$ lau nodoko mintz-elementuaren oreka matrizea honakoa da:

$$[E^e] = \begin{bmatrix} -b & \frac{1}{3}b & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a & \frac{1}{3}a & -b \\ b & -\frac{1}{3}b & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a & -\frac{1}{3}a & b \\ b & \frac{1}{3}b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & \frac{1}{3}a & b \\ -b & -\frac{1}{3}b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & -\frac{1}{3}a & -b \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

6.3 MALGUTASUN MATRIZEA $[G^e]$

Norabide bakarreko konposite zeihar baten malgutasun koefizienteen matrizea, 3.2.1 atala jarraituz, honakoa da [7,8]:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xs} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{ys} \\ S_{sx} & S_{sy} & S_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Eta (3.25) ekuazioko materialaren malgutasun koefizienteak honakoak dira:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= S_{11}l^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}m^4 + S_{66}l^2m^2 \\ S_{xy} &= S_{11}l^2m^2 + S_{12}(l^4 + m^4) + S_{22}l^2m^2 - S_{66}l^2m^2 \\ S_{xs} &= 2S_{11}l^3m + 2S_{12}(lm^3 - l^3m) - 2S_{22}lm^3 + S_{66}(lm^3 - l^3m) \\ S_{yy} &= S_{11}m^4 + 2S_{12}l^2m^2 + S_{22}l^4 + S_{66}l^2m^2 \\ S_{ys} &= 2S_{11}lm^3 + 2S_{12}(l^3m - lm^3) - 2S_{22}l^3m + S_{66}(l^3m - lm^3) \\ S_{ss} &= 4S_{11}l^2m^2 - 8S_{12}l^2m^2 + 4S_{22}l^2m^2 + S_{66}(l^2 - m^2)^2 \end{aligned} \quad (3.25)\text{bis}$$

$l = \cos \alpha$ eta $m = \sin \alpha$ eta α zuntzaren angeluaren orientazioa izanik. l eta 2 ortotropiako norabide nagusietan malgutasun koefizienteak honakoak dira:

$$S_{11} = 1/E_1, \quad S_{12} = -\nu_{12}/E_1, \quad S_{22} = 1/E_2, \quad S_{66} = 1/G_{12}$$

Elementuaren oreka ekuazioan bezala, (5.24) ekuazioaren malgutasun matrizea elementuaren gainazalean hedatzen da:

$$[G^e] = \frac{1}{t} \int_S [Y]^T [S][Y] dS \quad (5.24)\text{bis}$$

Ondoren, (5.3) eta (6.7) ekuazioak (5.24) ekuazioan ordezkaturik, elementuaren malgutasun matrizea lortzen da:

$$[G^e] = \frac{4ab}{t} \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & S_{xy} & 0 & S_{xs} \\ 0 & \frac{1}{3}S_{xx} & 0 & 0 & 0 \\ S_{xy} & 0 & S_{yy} & 0 & S_{ys} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}S_{yy} & 0 \\ S_{xs} & 0 & S_{ys} & 0 & S_{ss} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

6.4 ZURRUNTASUN MATRIZEA

(6.6) oreka matrizea eta (6.8) malgutasun matrizea (5.35) ekuazioan ordezkaturik, elementu baten zurruntasun matrizea lortzen da.

$$[K^e] = [E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \quad (5.35)\text{bis}$$

Egituraren zurruntasun matrizea, 4.2.3 atalean azaldutako elementu guztien zurruntasun matrizeen muntaketa prozedura jarraituz lortzen da. Beraz, ekuazio nagusia modu laburbilduan honako hau da:

$$[K]\{a^l\} = \{P^l\} \quad (5.36)\text{bis}$$

$l = 1 \dots N$; eta N egituraren desplazamenduen askatasun gradua izanik. $\{a^l\}$ nodoetako desplazamenduak, (6.8) eta (6.6) ekuazioko malgutasun eta oreka matrizeak ezagututa, (5.32) ekuazioa erabiliz elementu bakoitzeko indar independenteak kalkulatzen dira:

$$\{F^l\} = [G^e]^{-1}[E^e]^T \{a^l\} \quad (5.32)\text{bis}$$

Indar independenteak ezagututa eta (5.6) ekuazioa erabiliz, elementu bakoitzaren tentsio eremua kalkulatzen da.

$$\{\sigma\} = [Y]\{F^j\} \quad (5.6)\text{bis}$$

Azpimarratu behar da, oreka $[E^e]$ eta malgutasun $[G^e]$ matrizeak PVW eta PCVW printzipioen aplikaziotik eratorri direla.

Sistema zurruntzen duten desplazamendu parametroak eta sistema malguagoa egiten duten tentsio parametroak SFM formulazioan parte hartzen dutenez, lortutako emaitza Zurruntasun eta Indar metodoak erabiliz lortutako goiko eta beheko limiteen artean egongo da [9].

6.5 MALGUTASUN MATRIZEAREN DIAGONALIZAZIO- METODOA

6.5.1 OREKA MATRIZEAREN KALKULUA TENTSIO MODU ORTONORMALEAN

SFM metodoen desabantaila nagusia honakoa da: Suposatutako tentsio eremuan beharrezko tentsio parametro-kopurua handia denean, malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzearen konputazio kostua oso handia da. Desabantaila hori Zhang et al.-ek [2,10] malgutasun matrizea diagonalizatuz saihestu zuten. Metodo honetan suposatutako tentsio moduak linealki independenteak badira, haien baliokide ortonormalak lor daitezke.

Indar-interpolazio funtzioetan (5.3) tentsio-moduak, hau da, $[Y]$ matrizearen zutabeak linealki independenteak direnez, haien ortonormal baliokideak 5.8 atalean azaldutako prozedura jarraituz lortuko dira. Tentsio-modu ortonormalean lortutako indar-interpolazio funtzioen matrizea honakoa da:

$$[\bar{Y}^*] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{abS_{11}}} - \frac{S_{12}}{2S_{11}\alpha} & 0 & \frac{\sqrt{3}aS_{11}y}{2(abS_{11})^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\alpha} & 0 & \frac{\sqrt{3}bS_{22}x}{2(abS_{22})^{3/2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{abS_{66}}} & 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

Non:

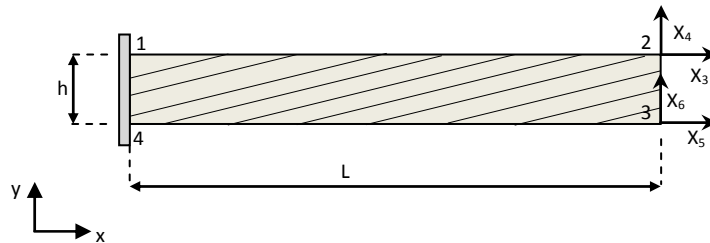
$$\alpha = \sqrt{ab \left(-\frac{S_{12}^2}{S_{11}} + S_{22} \right)} \quad (6.10)$$

(6.9) ekuazioko indar-interpolazio funtzioen matrizea (6.5) ekuazioan ordezkatzuz, lau nodoko mintz-elementu laukizuzen baten oreka matrizea honela gelditzen da:

$$[\bar{E}^{e*}] = \begin{pmatrix} \frac{-b}{2\sqrt{abS_{11}}} & \frac{-S_{12}\alpha}{2a(S_{12}^2 - S_{11}S_{22})} & \frac{-a}{2\sqrt{abS_{66}}} & \frac{b}{2\sqrt{3abS_{11}}} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2\alpha} & \frac{-b}{2\sqrt{abS_{66}}} & 0 & \frac{a}{2\sqrt{3abS_{22}}} \\ \frac{b}{2\sqrt{abS_{11}}} & \frac{S_{12}\alpha}{2a(S_{12}^2 - S_{11}S_{22})} & \frac{-a}{2\sqrt{abS_{66}}} & \frac{-b}{2\sqrt{3abS_{11}}} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2\alpha} & \frac{b}{2\sqrt{abS_{66}}} & 0 & \frac{-a}{2\sqrt{3abS_{22}}} \\ \frac{b}{2\sqrt{abS_{11}}} & \frac{S_{12}\alpha}{2a(S_{12}^2 - S_{11}S_{22})} & \frac{a}{2\sqrt{abS_{66}}} & \frac{b}{2\sqrt{3abS_{11}}} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2\alpha} & \frac{b}{2\sqrt{abS_{66}}} & 0 & \frac{a}{2\sqrt{3abS_{22}}} \\ \frac{-b}{2\sqrt{abS_{11}}} & \frac{-S_{12}\alpha}{2a(S_{12}^2 - S_{11}S_{22})} & \frac{a}{2\sqrt{abS_{66}}} & \frac{-b}{2\sqrt{3abS_{11}}} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2\alpha} & \frac{-b}{2\sqrt{abS_{66}}} & 0 & \frac{-a}{2\sqrt{3abS_{22}}} \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

6.5.2 DIAGONALIZAZIO METODOAREN APLIKAZIOA MINTZ-ELEMENTU ANISOTROPOAN

Atal honetan ortonormalizazio metodoaren aplikazioa 6.2 irudiko mintz-elementu anisotropoan aurkezten da. Aztertutako materiala IM7-8552 norabide bakarreko karbono/epoxi konposita da, zuntzaren angelua x ardatzarekiko 20° suposatu da eta elementuaren dimentsioak eta propietate elastikoak honako hauek dira [11]: $L = 100$ mm ; $h = 10$ mm, $t = 2$ mm $E_1=142$ GPa; $E_2=8.9$ GPa; $\nu_{12}=0.28$; $G_{12}=4.8$ GPa.



6.2 Irudia. Lau nodoko mintz-elementu anisotropoa.

Adibide honen helburua, oinarri ortonormalean zurruntasun matrize berdina lortzen dela erakustea da. Horregatik, metodoa aplikatzeko 4 nodoko elementu bakar bat suposatu da. Kasu honetan, 1 eta 4 nodoak eragotzita daude eta ezezagunak 2 eta 3 korapiloarenak dira.

Ortonormalizazio metodoa aplikatu gabe, oreka matrizea (6.6) ekuazioa aplikatuz lortzen da:

$$[E^e] = \begin{bmatrix} -5 & 1,67 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & -50 & 16,7 & -5 \\ 5 & -1,67 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & -50 & -16,7 & 5 \\ -5 & 1,67 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 16,7 & 5 \\ 5 & -1,67 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & -16,7 & -5 \end{bmatrix}$$

Eta malgutasun matrizea (6.8) ekuazioa aplikatuz lortzen da:

$$[G^e] = \begin{bmatrix} 0,0089 & 0 & -0,0037 & 0 & -0,0149 \\ 0 & 0,0029 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0037 & 0 & 0,0264 & 0 & -0,0045 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0088 & 0 \\ -0,0149 & 0 & -0,0045 & 0 & 0,0399 \end{bmatrix}$$

(5.35) ekuazioa aplikatuz, egituraren zurruntasun matrizea, modu ez ortonormalean, honela gelditzen da:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} 337420 & 153668 & 225988 & 97327 & -335567 & -153668 & -227541 & -97327 \\ & 199149 & 98828 & 110791 & -153668 & -136041 & -98828 & -173899 \\ & & 162299 & 59999 & -227841 & -98828 & -160446 & -59999 \\ & & & 158167 & -97327 & -173900 & -59999 & -95058 \\ & & & & 337420 & 153668 & 225988 & 97327 \\ & sim & & & & 199149 & 98828 & 110791 \\ & & & & & & 162299 & 59999 \\ & & & & & & & 158167 \end{bmatrix}$$

Orain, ortonormalizazio metodoa aplikatzean, (6.11) ekuazioa aplikatuz, elementuaren oreka matrizea honela gelditzen da:

$$[\bar{E}^{e*}] = \begin{bmatrix} -37,27 & -9,34 & -408,38 & 21,52 & 0 \\ 0 & -224,28 & -183,02 & 0 & 125,61 \\ 37,27 & 9,34 & -281,44 & -21,52 & 0 \\ 0 & -224,28 & -114,37 & 0 & -125,61 \\ 37,27 & 9,34 & 408,38 & 21,52 & 0 \\ 0 & 224,28 & 183,02 & 0 & 125,61 \\ -37,27 & -9,34 & 281,44 & -21,52 & 0 \\ 0 & 224,28 & 114,37 & 0 & -125,61 \end{bmatrix}$$

Beraz, oinarri ortonormalean elementuaren zurruntasun matrizea (5.69) ekuazioa aplikatuz kalkula daiteke:

$$[K^e] = [\bar{E}^{e*}] [\bar{E}^{e*}]^T \quad (5.69)\text{bis}$$

(5.69) ekuazioko emaitza, (5.35) ekuazioko oinarri ez ortonormalean lortutako zurruntasun matrizea da. Desplazamendu ezezagunak kalkulatzeko, karga egoera honakoa da: $P_{x2} = 20\text{N}$; $P_{y2} = -5\text{N}$; $P_{x3} = -10\text{N}$; $P_{y3} = -5\text{N}$.

(5.36) ekuazioko zurruntasun matrizea erabiliz, eta karga kasu honetan, korapiloen desplazamenduak mm-tan honakoak dira:

6.1Taula: Korapiloen desplazamenduak mm-tan

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
0	0	-0,0165	-0,1944	0,0213	-0,1944	0	0

Orain elementuaren indar independenteak eta nodoetako tentsioak kalkulatu dira. Tentsio modu ez ortonormalean, indar independenteak (5.48) ekuazioa aplikatuz kalkulatu dira:

$$\{F^j\} = [G^e]^{-1} [E^e]^T \{a^i\} = \begin{bmatrix} -1668,6 \\ 68,8 \\ -390,5 \\ 0 \\ -906,8 \end{bmatrix} \quad (N)$$

Eta indar independenteak ezagututa, (6.3) ekuazioa erabiliz tentsio eremua lortzen da. Elementuaren nodoetako balioak honakoak dira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

6.2 Taula: Korapiloen tentsioak MPa-etan

<i>Nodoak</i>	σ_x	σ_y	σ_s
1	-868,7	-195,2	-453,4
2	-868,7	-195,2	-453,4
3	-799,9	-195,2	-453,4
4	-799,9	-195,2	-453,4

Tentsio modu ortonormalean indar independenteak honakoan dira:

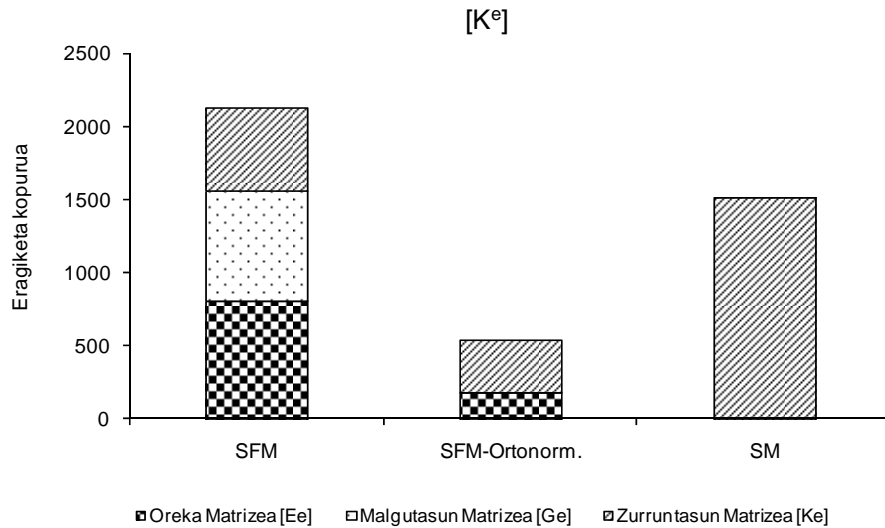
$$\{\bar{F}^{j*}\} = [\bar{E}^{e*}]^T \{a^i\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -65,73 \\ 2,66 \\ 0 \end{bmatrix} (N)$$

Azkenik, (5.71) ekuazioa aplikatzean oinarri ortonormalean eta oinarri ez ortonormalean lortutako tentsioak berdinak dira.

6.5.3 KONPUTAZIO KOSTUA

Metodo honen bitartez, Zhang et al.-ek [10] lauki-elementu isotropo orokorraren oreka matrizea modu esplizituan lortu zuten, hau da, integrazio numerikorik gabe. Gainera, metodo ezberdinen arteko konparaketa bat egin ondoren zera ondorioztatu zuten: elementu kopuru berdineko analisietan diagonalizazio metodo esplizituaren konputazio kontua, SM metodoan baino % 37 gutxiago dela, eta HM metodoan tentsio-modu ez ortonormalean baino % 83 gutxiago dela.

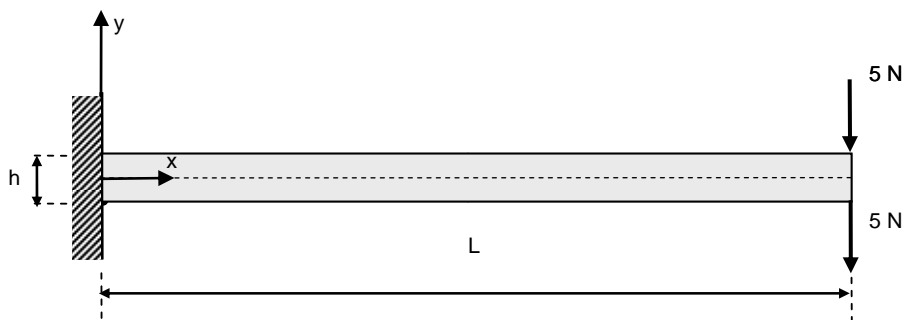
Atal honetan, Mintz-elementu baten zurruntasun matrizea kalkulatzeko eragiketa-kopurua (*Floating point operations per second*, FLOP) kalkulatu da [12]. 6.3 irudian eragiketa-kopuruaren konparaketa ikusten da SM eta SFM artean, diagonalizazio metodoa aplikatuta eta aplikatu gabe. Diagonalizazio metodo esplizituaren kasuan eragiketa-kopurua SM baino % 64 txikiagoa da, eta tentsio modu ez ortogonalean baino % 74 txikiagoa.



6.3 Irudia. Eragiketa-kopuruaren konparaketa: SFM eta SM

6.6 HEGAL-HABE BATEN ANALISIA MATERIAL ORTOTROPOAN

SFM metodoa erabiliz 6.4 irudiko hegal-habearen analisia aurkezten da atal honetan. Zuntzak luzetarako norabidean kokatuta daude. Aztertutako materiala IM7-8552 norabide bakarreko karbono/epoxi konpositea da, eta bere propietate elastikoak honakoak dira [11]: $E_1=142\text{GPa}$; $E_2=8.9\text{GPa}$; $\nu_{12}=0.28$; $G_{12}=4.8\text{GPa}$.



6.4 Irudia. Hegal-habea, mutur askean bi karga puntual aplikatuta dituena.

SFM metodoaren bitartez lortutako desplazamenduak eta tentsioak, SM metodoarekin eta hurbilketa analitikoarekin konparatu dira. Hurbilketa analitikoa Timoshenkoren habeen teorian oinarrituta dago eta zeharkako ebakiduraren eragina kontuan hartzen du. Erdiko lerroaren edozein puntutako desplazamendu bertikalaren balioa honako ekuazioa erabiliz kalkulatzen da:

$$v = -\frac{6Px^2}{E_1 t h^3} \left(L - \frac{x}{3} \right) - \frac{3}{5} \frac{Px}{G_{12} ht} \quad (6.12)$$

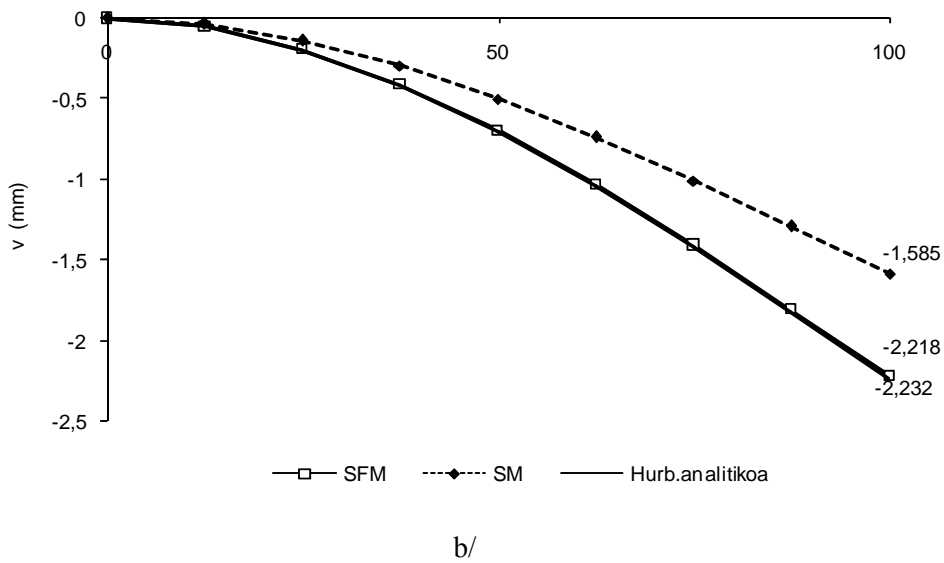
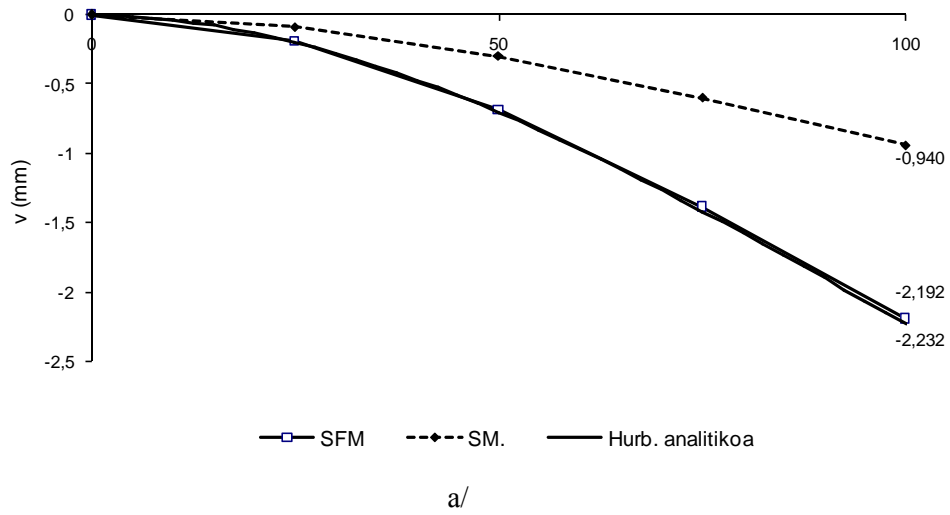
Bestalde, tentsio maximoak honako ekuazioaren bidez lortzen dira:

$$\sigma_x = \frac{6P}{th^2} (-L + x) \quad (6.13)$$

Hegal-habearen dimentsioak eta kargaren balioa hauek dira: $L = 100\text{mm}$; $h = 4\text{mm}$; $t = 2\text{mm}$ eta $P = 10\text{N}$. Horrela, desplazamendu eta tentsio maximoen balioak honakoak dira:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= 2,232 \text{ mm} \\ \sigma_x &= 187,5 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (6.14)$$

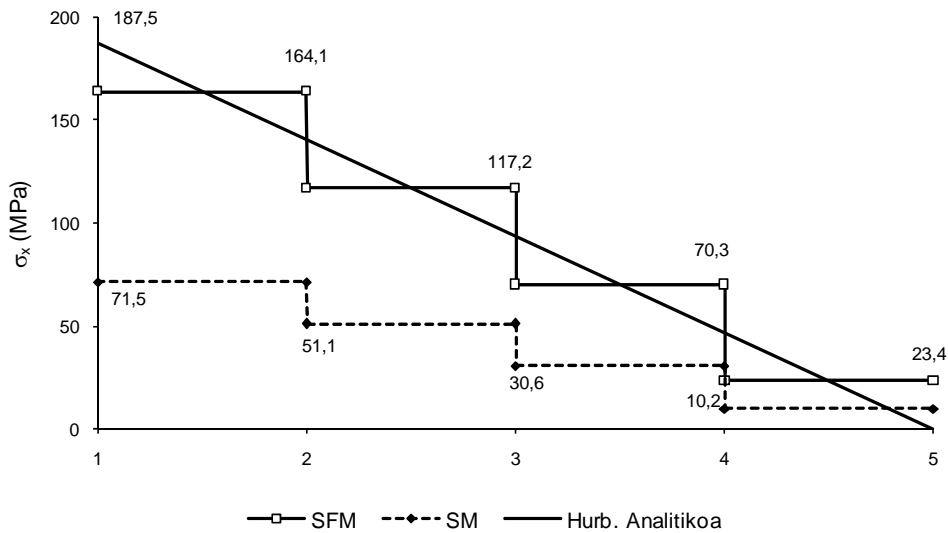
Lortutako desplazamendu banaketak 6.5 irudian erakusten dira: SFM eta SM aplikatuz lortutako desplazamenduak eta (6.12) ekuazioko hurbilketa analitikoa aplikatuz lortutakoak. SFM analisisian, 4 eta 8 elementuekin lortutako emaitzak eta hurbilketa analitikoarekin lortutakoak oso antzekoak dira. SM analisiaren desplazamenduak, berriz, balio analitikoak baino txikiagoak dira.



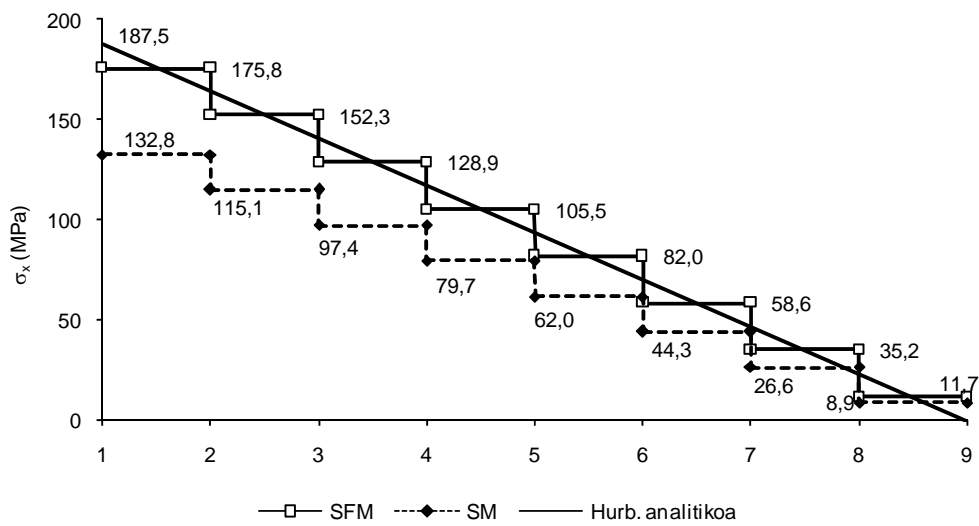
6.5 Irudia. Hegal-habearen desplazamenduak, $a/ 4$ elementu; $b/ 8$ elementu.

6.6 irudian lortutako tentsio banaketa erakusten da: SFM eta SM metodoak aplikatuz lortutakoak eta (6.13) ekuazioko hurbilketa analitikoak aplikatuz lortutakoak. SFM metodoan eta 8 elementuekin sortutako errorea tentsio maximoan %6a da. SFM eta SM erabiliz lortutako tentsioak konstanteak dira elementuan zehar. SFM kasuan,

batez besteko balioak eta (6.13) ekuazioko hurbilketa analitikotik lortutako balioak bat datoz, muturretan izan ezik. SM kasuan, aldea maximoa mutur landatuan gertatzen da.



a/

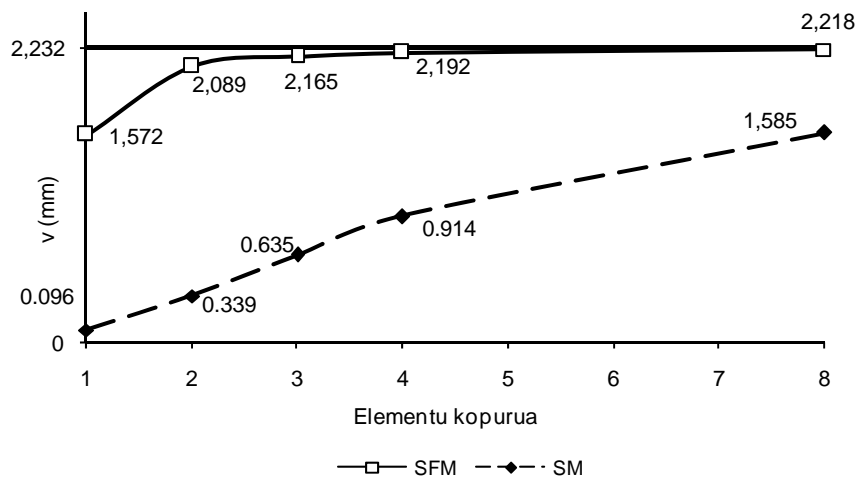


b/

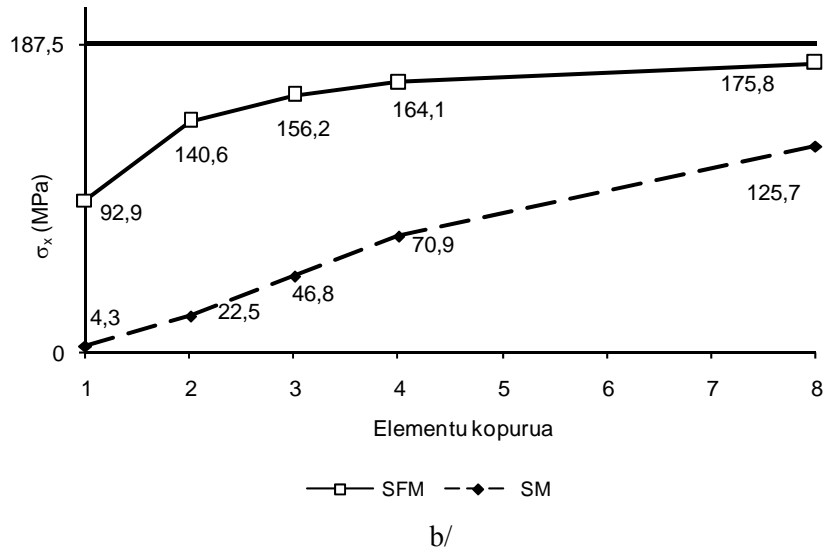
6.6 Irudia. Hegal-habearen tentsio banaketa, a/ 4 elementu; b/ 8 elementu.

SFM metodoko emaitzak hobeak dira SM metodokoak baino, SFM metodoan PVW eta PCVW printzipioak aplikatu dira bai tentsioak bai desplazamenduak kalkulatzeko. SM metodoan berriz, desplazamenduak PVW printzipioa aplikatuz lortu dira, eta gero, tentsioak desplazamenduak deribatuz kalkulatzen dira. Gainera, tentsioentzat lisatu teknikak erabiliko balira [4], korapiloetako batez bestekoak erabiliz eta ertzetan estrapolatuz, SFM kasuko emaitzak hurbilketa analitikoaren gainean geldituko lirateke 4 eta 8 elementuekin.

6.7 irudian tentsio eta desplazamendu maximoen balioak erakusten dira: alde batetik balio teorikoak, eta bestetik, SFM eta SM analisiekin elementu kopurua aldatuz lortutako emaitzak. SFM metodoan konbergentzia SM metodoan baino azkarragoa dela ikusten da.



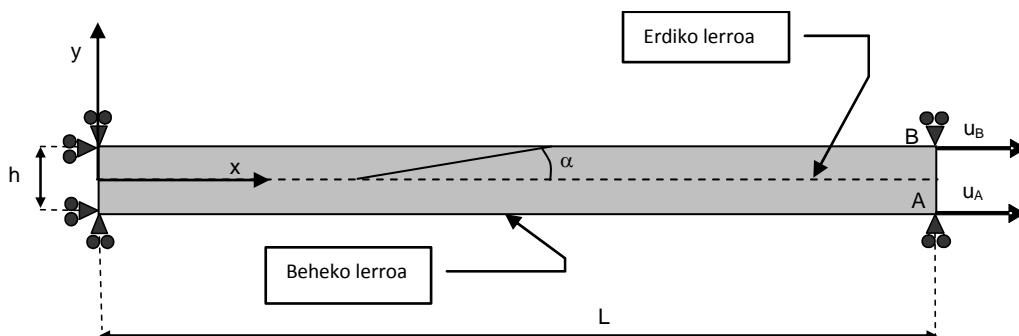
a/



6.7 Irudia. Balio maximoak diskretizazio mailaren arabera: a/ Desplazamenduak; b/ Tentsioak.

6.7 TRAKZIO ZEIHARRAREN SAIKUNTZA. MATERIAL ANISOTROPOA

6.8 irudiko adibidean, aurreko kasuan erabilitako norabide bakarreko konposite bera erakusten da, baina orain trakzio zeharra saiakuntzan. Zuntzaren orientazioa habearen luzetarako norabidearekiko 10° da. Probetaren dimentsioak honakoak dira: $L = 100$; $h = 10$ mm; $t = 2$ mm. A eta B muturretan $0,15$ mm-ko desplazamendua inposatu da. SFM eta SM analisietatik lortutako emaitzak Mujikak [13] proposatutako hurbilketa analitikoarekin konparatu dira.



6.8 Irudia. Trakzio zeharraren saiakuntza.

Habearen beheko lerroan desplazamendu horizontalak eta bertikalak u eta v honakoak dira, hurrenez hurren:

$$u = \frac{Px}{A}(S_{xx} + S_{xs}k_1) \quad (6.15)$$

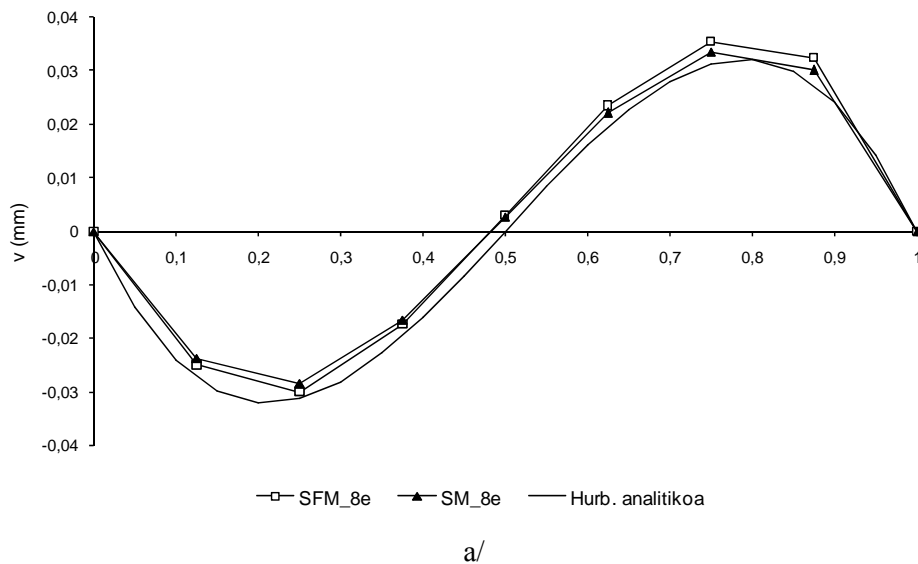
$$v = k_1 P \left[\frac{S_{xx}x^2}{I}(-2x + 3L) + \frac{6}{5} \frac{S_{ss}x}{A} \right] + \frac{S_{xs}Px}{A}$$

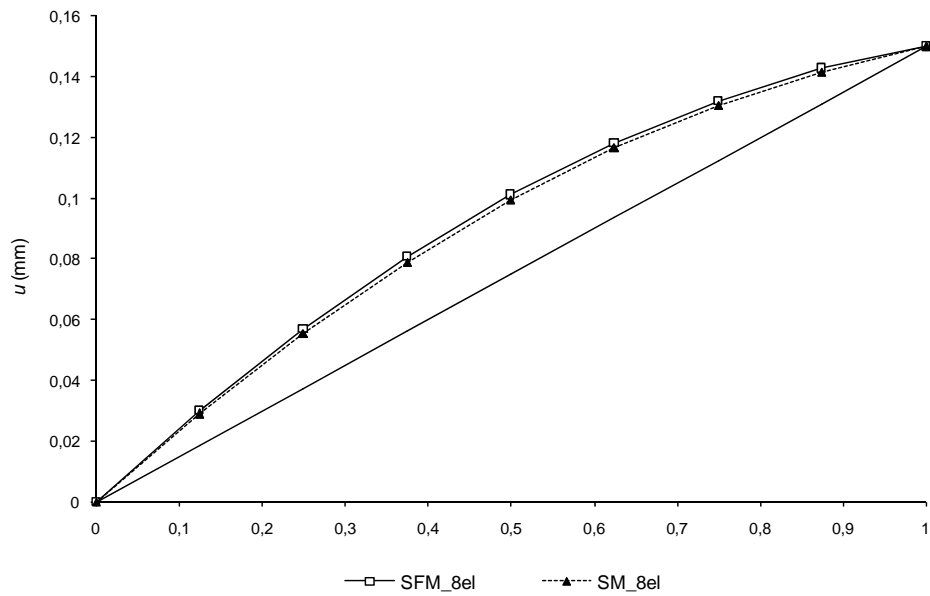
Non $A = ht$ eta $I = \frac{2}{3}th^3$ diren. 6.8 irudiko beheko lerroan tentsioak σ_x eta τ_s ekuazio hauen bitartez lortzen dira:

$$\begin{aligned} (\sigma_x)_{\max} &= \sigma_0(1 + 3k_1 c) \\ \tau_s &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Non $\sigma_0 = P/th$ aplikatutako tentsio nominala den; k_1 parametroa materialaren malgutasun koefizienteen menpe eta c luzera-zabalera eralzioaren menpe dago, hau da:

$$k_1 = \frac{-S_{xs}}{S_{xx}c^2 + 1,2 S_{ss}} \quad c = \frac{L}{h} \quad (6.17)$$

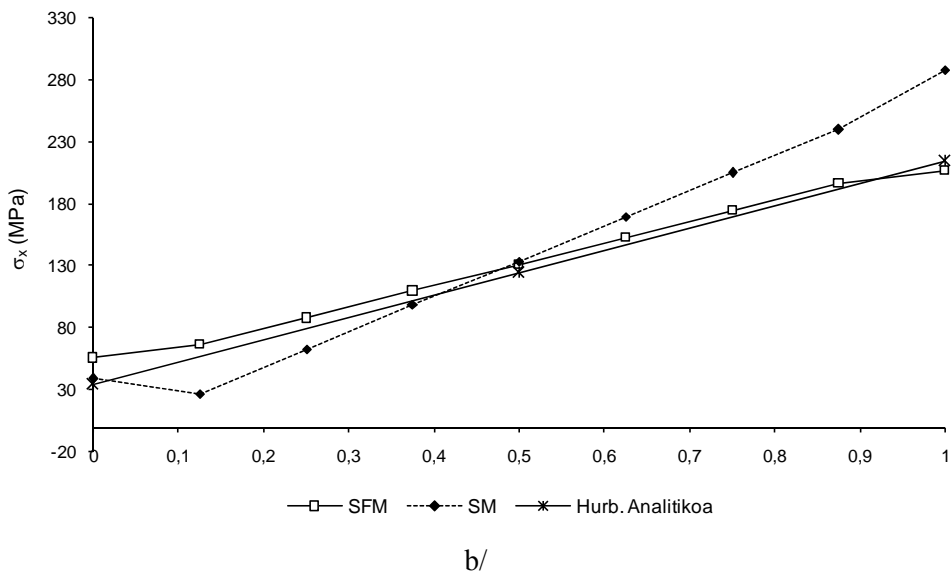
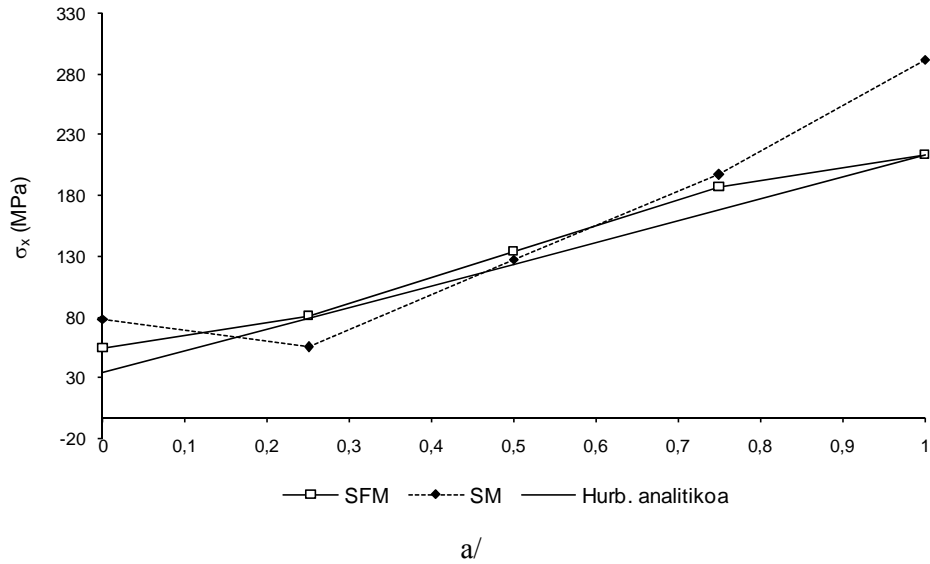




b/

6.9 Irudia. Desplazamenduak. a/ Desplazamendu horizontalak; b/ Desplazamendu bertikalak

6.9 irudian hurbilketa analitikoan (6.15) ekuazioaren bitartez beheko lerroan lortu diren desplazamendu horizontal eta bertikalak erakusten dira. Desplazamendu hauek SM eta SFM analisisian 8 elementuekin lortutako emaitzekin konparatu dira. SM eta SFM metodoen arteko hurbiltasuna aurreko adibidean baino handiagoa da. Hori, trakzio saiakuntzan kanpo-eragozpenen eraginez sistemaren desplazamendu onargarriak murriztuta daudelako gertatzen da. Beraz, SM metodoarekin lortutako emaitzak hobeak dira sistemak kanpo-eragozpenak dituenen.



6.10 Irudia. Tentsio banaketa trakzio zeharraren saiakuntzan. a/ 4 elementu;b/ 8 elementu

6.10 irudian habearen beheko lerroko σ_x tentsio-balioen konparaketa erakusten da. SFM eta SM metodoa aplikatuz, 4 eta 8 elementuekin lortutako balioak, (6.16) ekuazioa aplikatuz lortutako emaitza analitikoarekin konparatu dira. SFM kasuko emaitzak gehiago hurbiltzen dira SM metodoan lortutakoak baino. SM kasuan, 4 eta 8

elementuekin hurbiltasun analitikoarekiko lortutako emaitzen aldeak antzekoak dira, eta maximoak habearen bukaeran daude. Honen zergatia 6.9 irudia aztertuz ondoriozta daiteke: analitikoki eta numerikoki lortutako desplazamenduen maldak ezberdinak dira eta bi kasuetan, maximoak habearen bukaeran dira. SM kasuan deformazioak desplazamenduak deribatuz lortzen direnez, deformazioak eta tentsioak kalkulatzeko errore maximoa asken muturretan izango da. SFM metodoan berriz, tentsioak zuzenean kalkulatu dira, deribatu gabe. Beraz, SM metodoan emaitzen arrazoiak desplazamenduen deribazio prozesuan datza.

6.8 LABURPENA ETA ONDORIOAK

Norabide bakarreko konpositeekin bi adibide analizatu dira eta hurbilketa analitikoekin konparatu dira: Hegal-habe ortotropoa makurduran eta trakzio zeharrezko saiakuntza. SFM metodoa erabiliz lortutako desplazamenduak eta tentsioak gehiago hurbiltzen dira hurbilketa analitikoarekin SM metodoarekin eta elementu kopuru berdinarekin lortutakoak baino. Honen arrazoiak honakoak dira:

- SFM metodoa PVW eta PCVW printzipioetan oinarrituta dagoenez baldintzak SM baino hobeto betetzen ditu, SM PVW printzipioan bakarrik oinarritzen delako.
- SFM metodoan tentsioak desplazamenduetatik zuzenean lortzen dira, eta SM metodoan, berriz, desplazamenduak deribatuz lortzen dira.

Hegal-habeak deformazio-eragozpen gutxiago ditu trakzio-saiakuntzaren probeta baino, azken hau bi muturretan landatuta baitago. Bi adibidetako desplazamenduen emaitzak ikusi ondoren zera ondorioztatzen da: SM metodoan emaitzak hobeak dira sistemaren eragozpen kopurua handitzen bada. Bestalde, SM eta SFM metodoekin lortutako tentsioen arteko aldeak nabarmenak dira bigarren adibidean probetaren muturretan, nahiz eta desplazamenduen kasuan horrela ez izan. Hau, SM metodoan tentsioak lortzeko desplazamenduak deribatu behar direlako gertatzen da.

SFM metodoan eragozpenik handiena zera da: malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko konputazio kostua handia da. Lan honetan, Zhang et al.-ek HM metodoetan proposatutako ortonormalizazio metodoa SFM metodoan erabili da material anisotropoa duten mintz-elementuetan.

Ortogonalizazio metodoaren konputazio kontuaren murrizketa ikusteko, elementu baten zurruntasun matrizea lortzeko eragiketa kopurua edo FLOP kalkulatu dira. SFM metodoan tentsio modu ortogonalean eragiketa kopurua txikiagoa da SFM oinarri ez ortogonalean eta SM metodoetan baino.

6.9 ERREFERENTZIAK

- 1 Hoa, SV; Feng, W (1998). Hybrid finite element method for stress analysis of laminate composites. *Kluwer academic publishers*.
- 2 Zhang, CH; Wang, D; Zhang, J; Feng, W; Huang, Q. (2007). On the equivalence of various hybrid finite elements and a new orthogonization method for explicit element stiffness formulation. *Finite elements in analysis and design*, **34**: 312-332.
- 3 Patnaik, SN; Hopkins, DA; Aiello, RA; Berke, L. (1992). Improved accuracy for finite element structural analysis via a new integrated force method. *NASA technical paper 3204*.
- 4 Oñate, E. (1995). Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. *Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Barcelona.
- 5 Patnaik, SN. (1986). Integrated force method versus the standard force method. *International Journal of Computers and Structures*, **22**: 151-163.
- 6 Spilker, RL; Masker, SM; Kania, E. (1981). Plane isoparametric Hybrid-stress elements: Invariant and optimal sampling. *Int. Journal for numerical methods in engineering*, **17**(10): 1469–1496.
- 7 Gibson, RF.(1994). Principles of composite material mechanics. *McGraw-Hill*.
- 8 Matthews, FL; Davies, GAO; Hitchings, D; Soutis, C. (2000). Finite element modelling of composite materials and structures. CRC.
- 9 Fraeijs de Veubeke (1965). Displacement and equilibrium models in the finite element method. *Stress Analysis*, **9**:145-197. Wiley & Sons.
- 10 Zhang, CH; Feng, W; Huang, Q. (2002). The stress subspace of hybrid stress element and the diagonalization method for flexibility matrix. *Applied mathematics and mechanics*, **23**: 11

- 11 Mujika, F; Berglund, L; Varna, J and Mondragon, I. (2002). 45° Flexure Test for Measurement of In-Plane Shear Modulus. *Journal of Composite Materials*, **36**: 2313-2337.
- 12 Hunger, R. (2007). Hybrid finite Floating point operations in matrix-vector calculus. Technical report. Technische universität münchen. Associate institute for signal processing.
- 13 Mujika, F.(2005). New considerations on the stress field in an off-axis tensile test. *Journal of Composite Materials*, **39** (21): 1909-1929.

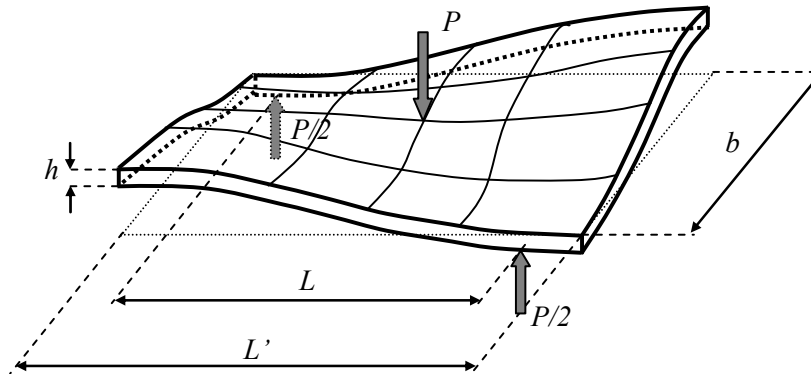


SFM METODOAREN APLIKAZIOA PLAKA ELEMENTU LAUKIZUZENEAN

7.1 SARRERA

Atal honetan norabide bakarreko hiru puntuko makurdura zeharraren analisi elastiko eta lineala aztertuko da. Saiakuntza hau aukeratu da honen emaitza esperimentalak, analitikoak eta numerikoak aurretik ezagutzen direlako. SFM metodoaren bitartez plaka elementua formulatu ondoren, SFM eta SM metodoekin lortutako emaitzak konparatu dira.

Norabide bakarreko konpositeen hiru puntuko makurdura zeharraren saiakuntzan, makurdura-bihurdura akoplamendua sortzen denean probeta berma zilindroetatik deslotu egiten da. Probetaren deslotzea gertatzen denean, probeta eta berma zilindroen arteko kontaktua bi kontrako erpinetan gertatzen da eta momentu bihurtzaileak sortzen dira, 7.1 irudian ikusten den bezala [1].



7.1 Irudia: Ardatz kanpoko makurdura deslotzea gertatzen denean

Norabide bakarreko konpositeetan hiru puntuko makurdura zehar hainbat artikulutan azaltzen da. Mujika et al.-ek [2] hiru puntuko makurdura saiakuntzan, 45°ko zuntz orientazioa duen norabide bakarreko konpositeen plano barneko ebakidura modulua kalkulatzeko metodo bat proposatu zuten. Hurrengo lanetan, deslotzea gertatzeko baldintzak determinatu zituzten eta hiru puntuko makurduran ardatz kanpoko konposite baten desplazamendu eremua determinatu zuten, baita planoan eta planotik kanpoko tentsioak ere [1,3]. Deslotze eta deslotzerik gabeko egoerak kontuan hartuz, desplazamendu eremua edozein zuntz orientazio kasutan kalkulatu zuten. Azkenaldiko lanean, hurbilketa analitikoa norabide anitzeko laminatuetara hedatu da [4].

Hiru puntuko makurdura zeharrean norabide bakarreko konposite baten desplazamendu eta tentsio eremuak elementu finituen metodoa erabiliz aztertu dira [5]. Anlisi lineal eta elastikoa burutu da eta zurruntasun metodoan oinarritutako oskol eta solido elementuak erabili dira.

Atal honetan, 45°ko zuntz orientazioa duten norabide bakarreko konpositeak SFM metodoaren bitartez aztertu dira, hiru puntuko makurdura saiakuntzan eta probetaren deslotzea suposatuz. Metodo honen bidez norabide bakarreko plaka laminatu baten zurruntasun matrizea kalkulatu da. Elementua formulatu ondoren, aztertutako sistemaren desplazamendu eta tentsio eremuak lortu dira.

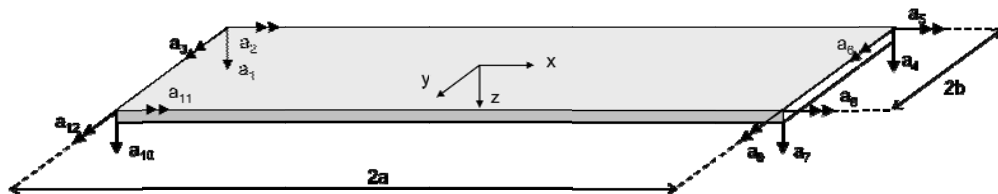
SFM metodoaren bidez lortutako emaitzak bi programa komertzialekin konparatu dira: ABAQUS eta COSMOS/M [5], biak SM formulazioan oinarrituta. Emaitza hauek Mujika et al.-ek [1] garatutako hurbilketa analitikoarekin ere konparatu dira.

Gainera, hurbilketa hori karga aplikazio puntuko emaitza esperimentalekin alderatuta zegoen [3], emaitza onak lortuz.

Plaka elementuaren formulazioa SFM aplikatuz garatuko da, planoz kanpoko ebakiduraren eragina kontuan hartu gabe. Elementu hau laminatu simetrikoetan erabili daiteke, mintz-plakaren akoplamendua gertatzen ez delako. Kasu honetan, SFM norabide bakarreko konposite baten hiru puntuko makurdura saiakuntza aztertzeko erabili da. Lehen aipatu den bezala, problema honi buruz badaude aurretik lortutako emaitza analitikoak, esperimentalak eta numerikoak, eta emaitza hauek, erreferentzia moduan erabili dira. Gainera, SFM metodoarekin lortutako emaitzak, ABAQUS programa eta oskol-elementu kopuru berdinarekin lortutako emaitzekin konparatu dira.

7.2 OREKA MATRIZEA

IFMD metodoa norabide bakarreko plaka batean ezartzeko, propietate elastikoak geruza bakar bat suposatuz kalkulatu dira. Lau nodoko plaka elementu laukizuzena erabili da, 7.2 irudian ikusten dena.



7.2 Irudia: Lau nodoko plaka elementu laukizuzena.

Makurduraren kasuan, deformazio eremuaren osagaiak honakoak dira [6]:

$$\{\varepsilon\} = z\{\kappa\} = z[B_p]\{a^i\} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 [N]}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{a^i\} \quad (7.1)$$

$\{\kappa\}$ makurdura eta bihurturaren kurbadurak izanik. Laminatu simetrikoen kasuan, kurbadurak eta momentu erresultanteak materialaren malgutasun matrizearen bitartez erlazionatzen dira, 3.3.4 atalean ikusi denez:

$$\{\kappa\} = [d]\{M\} \quad (7.2)$$

Non $\{M\}$ momentu erresultanteen bektorea eta $[d]$ materialaren malgutasunaren matrizea diren [7]:

$$[d] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & d_{xs} \\ d_{yx} & d_{yy} & d_{ys} \\ d_{sx} & d_{sy} & d_{ss} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$[B_p]$ deformazio-desplazamenduen matrizea da eta desplazamenduen interpolazio funtzioak deribatuz lortzen da. Plaka elementu honetan (4.53) ekuazioko interpolazio funtzioak aukeratu dira, bi nodoko habe baten 3. mailako Hermite polinomioak konbinatuz lortzen direnak [8,9]:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\ \bar{N}_1(\xi) &= \frac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(2 + 3\xi - \xi^3) \\ \bar{N}_2(\xi) &= \frac{a}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned} \quad (7.3)$$

Non $\xi = x/a$ eta $\eta = y/b$ koordenatu naturalak diren. Desplazamenduen interpolazio polinomioa honako hau da:

$$\begin{aligned} w &= N_1(\xi)N_1(\eta)w_1 + \bar{N}_1(\xi)N_1(\eta)\theta_{x1} + N_1(\xi)\bar{N}_1(\eta)\theta_{y1} + N_2(\xi)N_1(\eta)w_2 + \\ &+ \bar{N}_2(\xi)N_1(\eta)\theta_{x2} + N_2(\xi)\bar{N}_1(\eta)\theta_{y2} + N_2(\xi)N_2(\eta)w_3 + \bar{N}_2(\xi)N_2(\eta)\theta_{x3} + \\ &+ N_2(\xi)\bar{N}_2(\eta)\theta_{y3} + N_1(\xi)N_2(\eta)w_4 + \bar{N}_1(\xi)N_2(\eta)\theta_{x4} + N_1(\xi)\bar{N}_2(\eta)\theta_{y4} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Non $w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}$, elementuaren desplazamenduen askatasun gradua den, hau da, korapilo bakoitzeko desplazamendu bat eta bi biraketa ezezagunak. (7.4) ekuazioko polinomioa 4. mailako polinomio osoan bihurturaren gaiak ezabatuz lortu da [8]. Polinomio honek elementu laukizuzenetan desplazamenduen jarraitasun baldintza

bermatzen du. (7.4) interpolazio polinomioa Patnaik-ek plakaren formulazioak erabili zuena da [10]. (7.1) ekuazioa ordezkatzean PVW Printzipioa honela gelditzen da:

$$\int_V z \{\delta a^i\}^T [B_p]^T \{\sigma\} dV = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (7.5)$$

$\{M\}$ luzera unitateko momentu erresultanteen bektorea da, eta 3.3.3 atalean ikusi denez, ondoko balioa du:

$$\{M\} = \int_t z \{\sigma\} dz \quad (7.6)$$

t plakaren lodiera izanik. Plakaren kasuan PVW printzipioa honela idatz daiteke:

$$\{\delta a^i\}^T \int_S \{M\} [B_p] dS = \{\delta a^i\}^T \{P^i\} \quad (7.7)$$

Non S plakaren azalera den. (5.4) ekuazioaren arabera, plakaren kasuan luzera unitateko momentuak interpolatzen dira:

$$\{M\} = [Y] \{F^j\} \quad (5.4)\text{bis}$$

Ondorioz, (5.4) ekuazioko $\{F^j\}$ parametroak luzera unitateko momentuak dira. (5.4) ekuazioa (7.7) ekuazioan ordezkatzuz eta $\{a^i\}$ independenteak direnez, oreka ekuazioa honakoa da:

$$\begin{aligned} \left(\int_S [B_p^T] [Y] dS \right) \{F^j\} &= \{P^i\} \\ [E^e] \{F^j\} &= \{P^i\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

Non $[E^e]$ plaka elementuaren oreka matrizea den,

$$[E^e] = \int_S [B_p]^T [Y] dS \quad (7.9)$$

Plaka laukizuzen batean, (5.5) ekuazioaren interpolazio funtzioak aukeratu dira [11-13]:

$$\begin{aligned} M_x &= F_1 + F_2\eta + F_3\xi + F_4\eta\xi \\ M_y &= F_5 + F_6\eta + F_7\xi + F_8\eta\xi \\ M_{xy} &= -F_9 \end{aligned} \quad (5.5)\text{bis}$$

Desplazamenduen interpolazio funtzioetan bezala, $\xi = x/a$ eta $\eta = y/b$ koordenatu naturalak erabili dira. Indarren interpolazio funtzioen matrizea honakoa da:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & \eta & \xi & \eta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta & \xi & \eta\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

(7.1) ekuazioko $[B_p]$ eta (7.10) ekuazioko $[Y]$ (7.9) ekuazioan ordezkatzuz, plaka elementu baten oreka matrizea $[E^e]$ honela gelditzen da:

$$[E^e] = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 & \frac{2}{5}b^2 & 0 & 0 & -a & \frac{2}{5}a^2 & -2 \\ 0 & \frac{-1}{3}b^2 & 0 & \frac{1}{15}b^2 & a & \frac{-2}{5}a^2 & ab & \frac{2}{5}a^2b & 0 \\ b & -ab & \frac{-1}{5}b^2 & \frac{2}{5}ab^2 & 0 & 0 & \frac{-1}{3}a^2 & \frac{1}{15}a^2 & 0 \\ 0 & b & 0 & \frac{-2}{5}b^2 & 0 & 0 & -a & \frac{-2}{5}a^2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3}b^2 & 0 & \frac{-1}{15}b^2 & a & \frac{2}{5}a^2 & -ab & \frac{-2}{5}a^2b & 0 \\ -b & -ab & \frac{1}{5}b^2 & \frac{2}{5}ab^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a^2 & \frac{1}{15}a & 0 \\ 0 & b & 0 & \frac{2}{5}b^2 & 0 & 0 & a & \frac{2}{5}a^2 & -2 \\ 0 & \frac{-1}{3}b^2 & 0 & \frac{-1}{15}b^2 & -a & \frac{-2}{5}a^2 & -ab & \frac{-2}{5}a^2b & 0 \\ -b & -ab & \frac{-1}{5}b^2 & \frac{-2}{5}ab^2 & 0 & 0 & \frac{-1}{3}a^2 & \frac{-1}{15}a & 0 \\ 0 & -b & 0 & \frac{-2}{5}b^2 & 0 & 0 & a & \frac{-2}{5}a^2 & 2 \\ 0 & \frac{-1}{3}b^2 & 0 & \frac{1}{15}b^2 & -a & \frac{2}{5}a^2 & ab & \frac{2}{5}a^2b & 0 \\ b & -ab & \frac{1}{5}b^2 & \frac{-2}{5}ab^2 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a^2 & \frac{-1}{15}a & 0 \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

7.3 MALGUTASUN MATRIZEA, $[G^e]$.

(7.1) eta (7.2) ekuazioen arabera, deformazio eremuaren osagaiak honakoak dira:

$$\{\varepsilon\} = z[d]\{M\} \quad (7.12)$$

Ondoren, (7.12) ekuazioa PCVW Printzipioan ordezkatur ,

$$\int_V z \{\delta\sigma\}^T [d] \{M\} dV = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (7.13)$$

(7.6) ekuazioa kontutan hartuz, (7.13) ekuazioa honela adieraz daiteke.

$$\int_S \{\delta M\}^T [d] \{M\} dS = \{\delta P^i\}^T \{a^i\} \quad (7.14)$$

(5.4) eta (7.8) ekuazioak (7.14) ekuazioan ordezkatur ,

$$\{\delta F^j\}^T [G^e] \{F^j\} = \{\delta F^j\}^T [E]^T \{a^i\} \quad (7.15)$$

$[G^e]$ Plaka-elementu baten malgutasun matrizea izanik,

$$[G^e] = \int_S [Y]^T [d] [Y] dS \quad (7.16)$$

Beraz, (7.10) ekuazioko $[Y]$ eta (7.3) ekuazioko $[d]$ (7.16) ekuazioan ordezkatur, plaka-elementu baten malgutasun matrizea honakoa da:

$$[G^e] = 4ab \begin{bmatrix} d_{xx} & 0 & 0 & 0 & d_{xy} & 0 & 0 & 0 & d_{xs} \\ 0 & \frac{1}{3}a^2d_{xx} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a^2d_{xy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}b^2d_{xx} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b^2d_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}a^2b^2d_{xx} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}a^2b^2d_{xy} & 0 \\ d_{xy} & 0 & 0 & 0 & d_{yy} & 0 & 0 & 0 & d_{ys} \\ 0 & \frac{1}{3}a^2d_{xy} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}a^2d_{yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}b^2d_{xy} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b^2d_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}a^2b^2d_{xy} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9}a^2b^2d_{yy} & 0 \\ d_{xs} & 0 & 0 & 0 & d_{ys} & 0 & 0 & 0 & d_{ss} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

7.4 ZURRUNTASUN MATRIZEA, $[K]$.

(7.11) ekuazioko oreka matrizea eta (7.17) ekuazioko malgutasun matrizea (5.35) ekuazioan ordezkatur elementuaren zurruntasun matrizea lortzen da.

$$[K^e] = [E^e][G^e]^{-1}[E^e]^T \quad (5.35)\text{bis}$$

Egituraren zurruntasun matrizea elementu guztien zurruntasun matrizeen muntaketa egiten lortzen da, 4.2.3 atalean SM metodoan ikusi den bezala.

Egituraren N desplazamenduak ezagutu ondoren, SFM eta SM metodoetan gainontzeko ezezagunen kalkulua desberdina da. 7.1 Taulan bi kalkulu prozeduren laburpenak ikusten dira.

(5.32) ekuaziotik elementu bakoitzaren indar independenteak kalkulatzen dira.

$$\{F^j\} = [G^e]^{-1}[E^e]^T \{a^i\} \quad (5.32)\text{bis}$$

Indar independenteak ezagututa eta (5.5) ekuazioa erabiliz, elementu bakoitzaren momentu erresultanteak kalkulatzen dira.

Momentu erresultanteak ezagututa, (7.2) erabiliz, kurbadurak lortzen dira.

$$\{\kappa\} = [d]\{M\} \quad (7.18)$$

Tentsioak kalkulatzeko, (3.33) ekuazioaren arabera, tentsio eremua honakoa da:

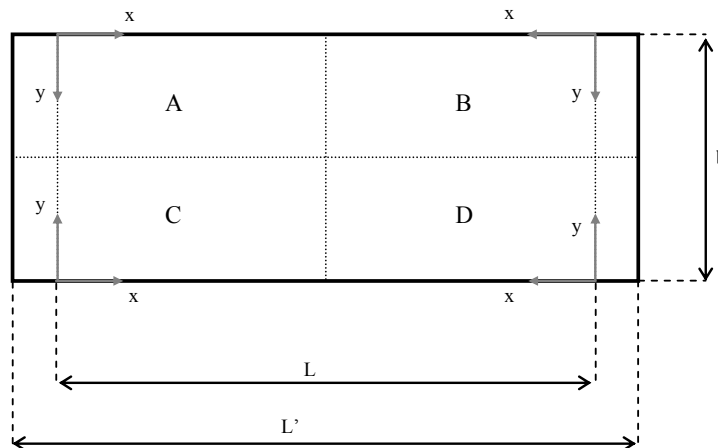
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \quad (7.19)$$

7.1 Taula: Tentsioak lortzeko prozedurak SFM eta SM metodoetan

<i>Formulazio-pausoak</i>	<i>SFM</i>	<i>SM</i>
Zurruntasun matrizea	$[K]_{IFMD} \{a^i\} = \{P^i\}$	$[K]_{SM} \{a^i\} = \{P^i\}$
Desplazamenduak	$\{a^i\}$	$\{a^i\}$
Indar independenteak	$\{F^j\} = [G^e]^{-1} [E^e]^T \{a^i\}$	
Momentu erresultanteak	$\{M\} = [Y] \{F^j\}$	
Plaka-kurbadurak	$\{\kappa\} = [d] \{M\}$	$\{\kappa\} = [B_p] \{a^i\}$
Deformazioak		$\{\varepsilon\} = z \{\kappa\}$
Tentsioak		$\{\sigma\} = [Q] \{\varepsilon\}$

7.5 EREDU ANALITIKOA

Hiru puntuko makurdura zeharreen desplazamendu eremua lortzeko [3], 7.3 Irudiko lau zatitan banatu da. Plakaren erdiko puntuarekiko simetriaren ondorioz, desplazamendu eremua A - D eta B - C zatietan berdina da. Gainera, zati bakoitzak erreferentzia ardatzak ezberdinak ditu, 7.3 Irudian ikusten den bezala.



7.3 Irudia. Hurbilketa analitikoan definitutako plakaren zatia.

Ebakiduraren eragina kontuan hartu gabe, A eta D zatietako desplazamendu eremua honela kalkulatzeko da:

$$w_{M1}(x_0, y_0) = \frac{PL^2}{96c^3} \left\{ \begin{aligned} &2d_{xx}(4x_0^3 + 3x_0)c^4 + 3d_{xs}(2kx_0 + 2x_0^2(1-k) + y_0 - 4x_0^2y_0)c^3 + \\ &+ [3hd_{ss}(x_0 + y_0 - 2x_0y_0) + 6d_{xy}g(-x_0^2 + x_0 - y_0^2 + y_0)]c^2 + \\ &+ 3d_{ys}g(2ky_0 + 2y_0^2(1-k) + x_0 - 4x_0y_0^2)c + 2d_{yy}g(-4y_0^3 + 3y_0) \end{aligned} \right\}$$

$$0 < x_0 < \frac{1}{2} \quad 0 < y_0 < \frac{1}{2} \quad (7.20)$$

Non w_1 , A, D zatietan makurdura-bihurdurako akoplamenduak eragindako desplazamendua den. Bestalde, B, C zatietan edozein puntutako desplazamendua honako hau da:

$$w_{M2}(x_0, y_0) = \frac{PL^2}{96c^3} \left\{ \begin{aligned} &2d_{xx}(3x_0 - 4x_0^3)c^4 + 3d_{xs}[1 + 2kx_0 - y_0 + 2x_0^2(1+k) + 4x_0^2y_0]c^3 + \\ &+ [3kd_{ss}(1 - x_0 - y_0 + 2x_0y_0) + 6d_{xy}g(x_0 + y_0 - x_0^2 - y_0^2)]c^2 + \\ &+ 3d_{ys}g(1 - x_0 + 2ky_0 - 2y_0^2(1+k) + 4x_0y_0^2)c + 2d_{yy}g(3y_0 - 4y_0^3) \end{aligned} \right\}$$

$$0 < x_0 < \frac{1}{2} \quad 0 < y_0 < \frac{1}{2} \quad (7.21)$$

Non w_2 , B, C zatietan makurdura-bihurdura akoplamenduak eragindako desplazamendua den.

(7.20) eta (7.21) ekuazioetan P karga da; x eta y koordenatu Cartesiarrak, A, B, C eta D zatietako koordenatu sisteman; $x_0 = x/L$ eta $y_0 = y/L$ koordenatu normalizatuak; L zilindro euskarrien arteko distantzia (argia); b plakaren zabalera; $c = L/b$ argi-zabalera erlazioa; h lodiera; L' plakaren luzera, $g = L/L'$ argi-luzera erlazioa; θ zuntz orientazioa; d_{ij} laminatuaren malgutun koefizienteak.

k momentu bihurtzaileen arteko erlazioa deslotze eta deslotzerik gabeko egoeretan. Deslotzea gertatzen denean $k = 1$, eta gertatzen ez denean, $k < 1$. Kasu honetan kontaktua lau erpinetan gertatzen dela suposatzen da.

Norabide bakarreko laminatu batean, plano barneko tentsio osagaiak deslotze egoeran hauek dira:

$$\sigma_x = \frac{3P}{h^2} cx_0 \quad (7.22)$$

$$\sigma_y = \frac{3P}{h^2} \frac{g}{c} y_0 \quad (7.23)$$

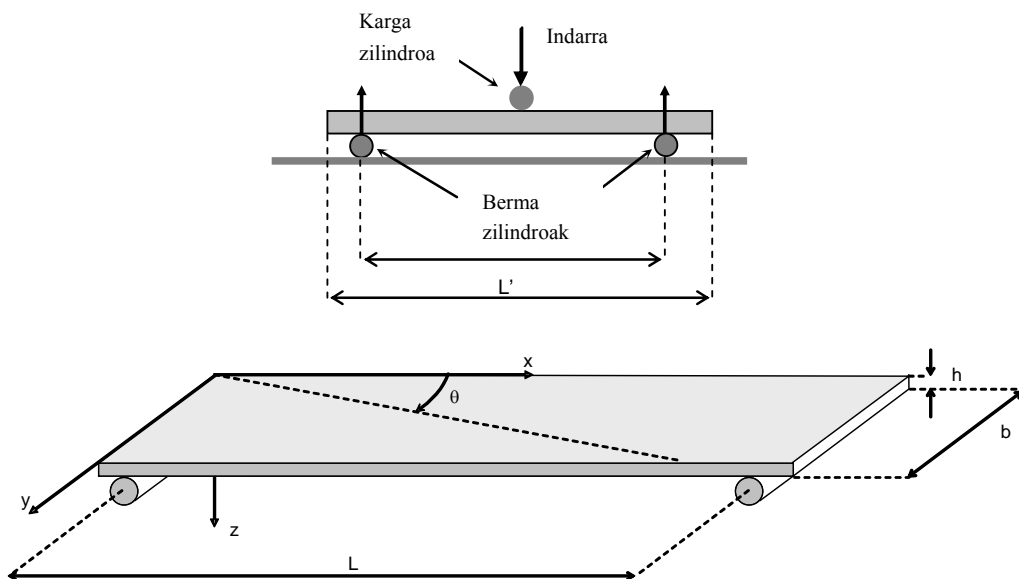
$$\tau_s = \tau_{xy} = \frac{3P}{4h^2} \quad (7.24)$$

7.6 NORABIDE BAKARREKO KONPOSITEA HIRU PUNTUKO MAKURDURA ZEIHARREAN

7.6.1 GEOMETRIA ETA PROPIETATEAK

Lan honetan, norabide bakarreko laminatua suposatu da, kasu honen emaitza analitikoak, esperimentalak eta numerikoak ezagutzen baitira [1-,5].

SFM metodoaren bitartez desplazamendu eta tentsio eremuak lortzeko, 7.4 irudiko norabide bakarreko laminatu baten hiru puntuko makurdura zehharra aztertu da lau, zortzi eta hamasei elementuekin. Erabilitako karbono/epoxi konpositearen propietate elastikoak hauek dira [2]: $E_L=142$ GPa; $E_T=8.9$ G Pa; $\nu_{LT}= 0.27$; $\nu_{TT}= 0.3$; $G_{LT}=4.8$ GPa; $G_{LT'}=4.8$ GPa; $G_{TT'}=3.4$ GPa.



7.4 Irudia. Norabide bakarreko konpositea hiru puntuko makurdura zehharreko saiakuntzan

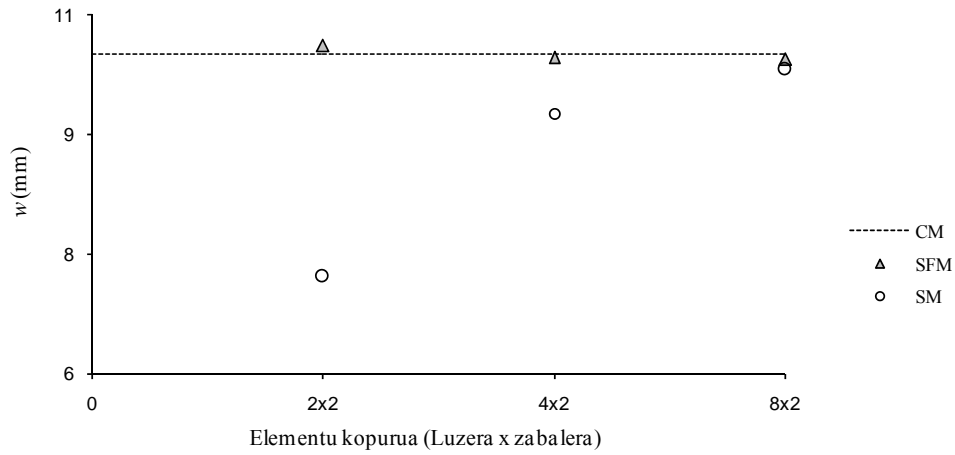
7.6.2 KONPARAKETA AURREKO EMAITZA ANALITIKO ETA NUMERIKOEKIN

SFM analisitik lortutako emaitzak Romera et al-ek [5] egindako analisi numerikotik lortutako emaitzekin konparatu dira. Analisi numeriko hau zurruntasun metodoan oinarritutako COSMOS/M software komertziala erabiliz egin zen. Analisi honetan, Modelo Osoa (*Complete Model*, CM) izeneko, Reissner-Mindlin teorian oinarritutako 1960 oskol-elementu erabili ziren. Karga eta euskarri arrabolak zilindro infinituki zurrunak izango bailiran modelatu ziren. Arrabolak eta plakaren arteko kontaktua nodo-nodo *gap* lineal izeneko elementuen bitartez modelatu dira. Horrela, deslotzea gertatzen denean, plaka eta arrabolen arteko kontaktua bi puntutan gertatzen da. Bi analisia hauek 7.5 atalean garatutako hurbilketa analitikoarekin konparatu dira.

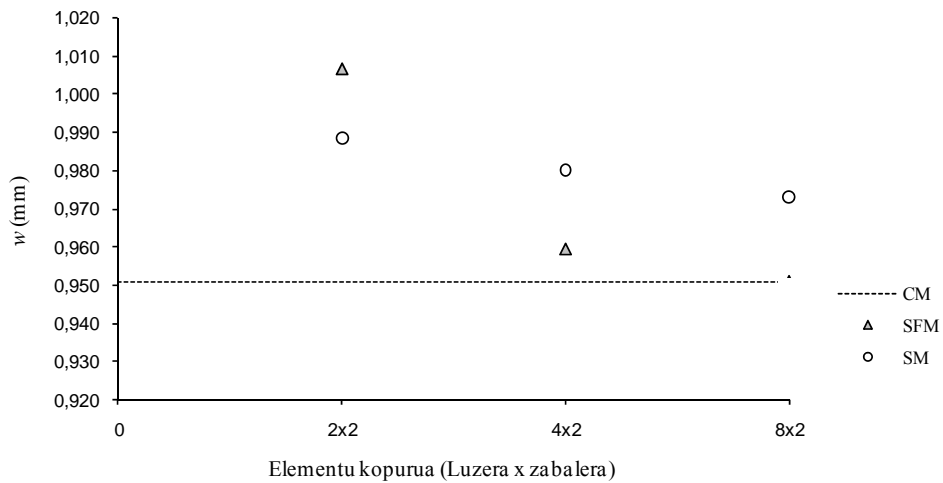
Gainera, 16 elementuekin egindako SFM analisisiko emaitzak ABAQUS software komertzialaren bitartez eta elementu kopuru berdinarekin lortutako emaitzekin konparatu dira. ABAQUS software komertzialarekin egindako analisisian S4R oskol elementuak erabili dira, plaka meheen kasuan ebakitzailaren eragina kontuan hartzen ez dutenak.

Plakaren dimentsioak eta kargak hauek dira: $L = 120$ mm; $b = 15$ mm; $h = 2,114$ mm eta $P = 46$ N. Zuntzaren angelua 45° da. Konfigurazio hau deslotze egoerari dagokiona da. Lortutako emaitzak hurbilketa analitikoarekin konparatzeko, plakaren luzera eta argia berdinak direla suposatu da, $g = 1$.

7.5 irudian desplazamenduaren konbergentzia erakusten da kargaren aplikazio puntuan, eta deslotze puntuan, elementu kopuruaren arabera. Kasu guztietan eta COSMOS/M-ren CM modeloarekin lortutako desplazamenduak oso antzekoak dira, baina SFM kasuan konbergentzia azkarragoa da. Erdiko puntuaren desplazamenduan konbergentzia SFM eta SM analisisetan 16 elementuekin lortzen denez, desplazamenduak eta tentsioak diskretizazio maila honekin aztertuko dira.



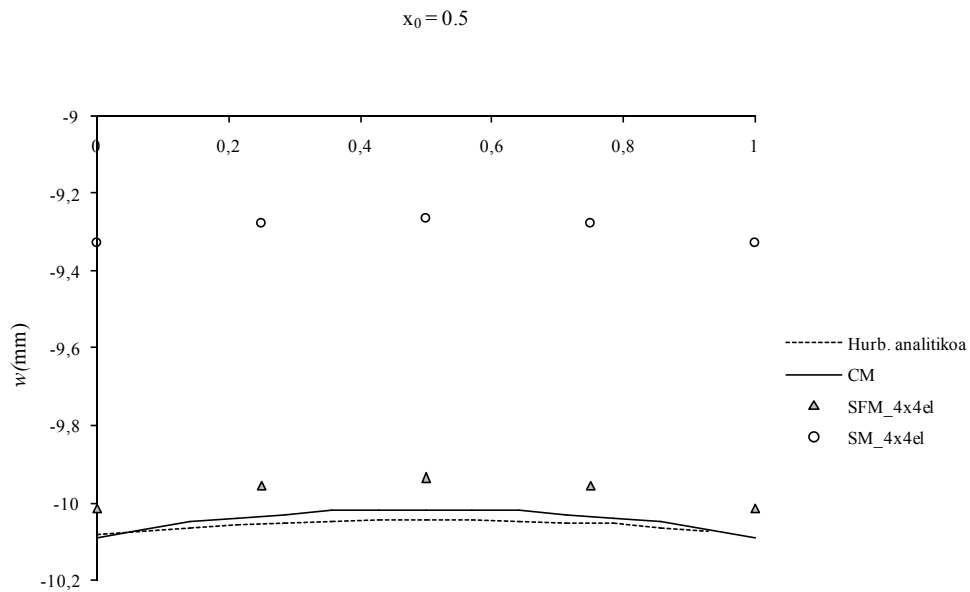
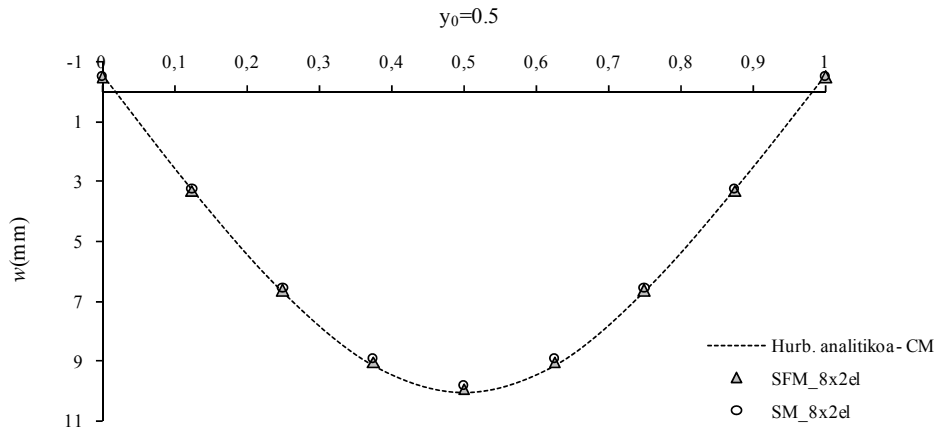
(a)



(b)

7.5 Irudia. Desplazamendu eremua elementu-kopuruaren arabera. (a) Kargaren aplikazio puntuan. (b) Deslotze puntuan.

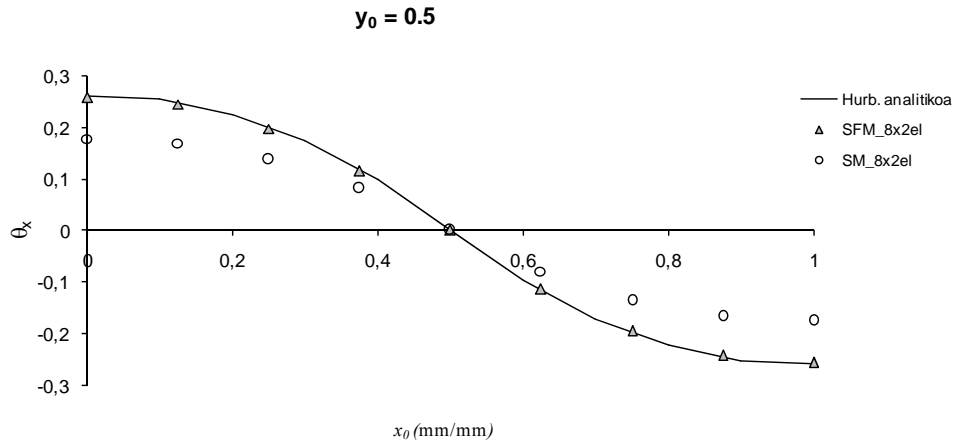
7.6 irudian, SFM eta SM analisiak erabiliz 16 elementuekin lortutako desplazamenduak erakusten dira, erdiko lerroan eta karga lerroan hurbilketa analitikoa eta CM erabiliz lortutako desplazamenduekin konparatuz. Karga lerroan lortutako desplazamenduak SFM analisiarekin gehiago gerturaten dira ABAQUS software komertziala erabiliz eta elementu kopuru berdinarekin lortutakoak baino.



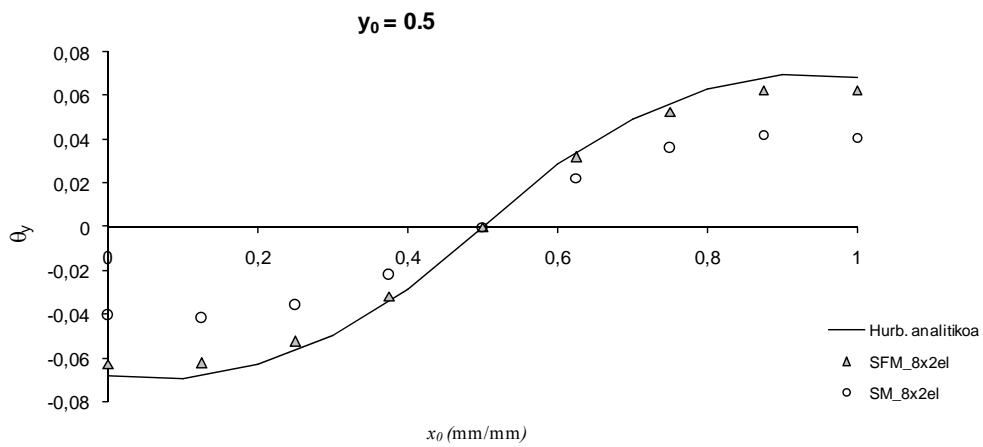
7.6 Irudia. Desplazamenduak erdiko lerroan eta karga lerroan

7.7 irudian SM eta SFM 16 elementuekin lortutako biraketak $y_0 = 0,5$ elementuaren luzeran zehar ikusten dira hurbilketa analitikoarekin konparatuta. Desplazamenduen

kasuan bezala, SFM analisiarekin lortutako θ_x bai θ_y biraketak gehiago gerturaten dira hurbilketa analitikora elementu kopuru berdinarekin egindako SM analisia baino.



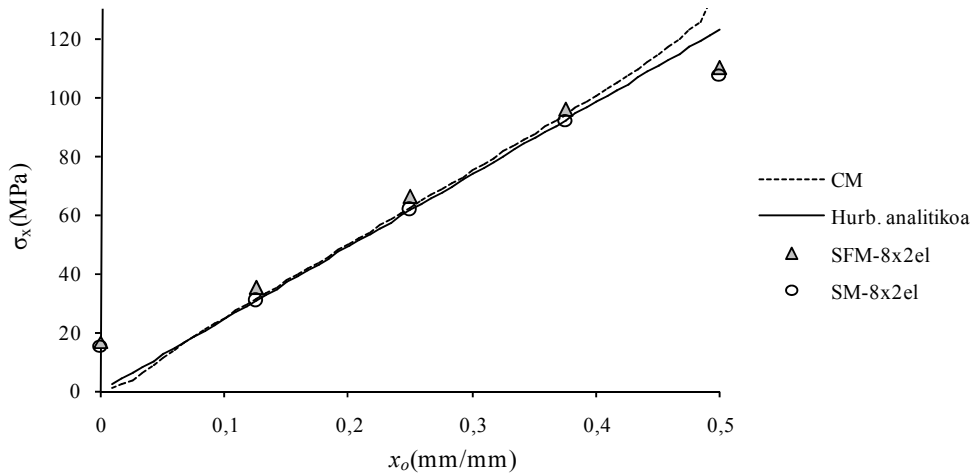
(a)



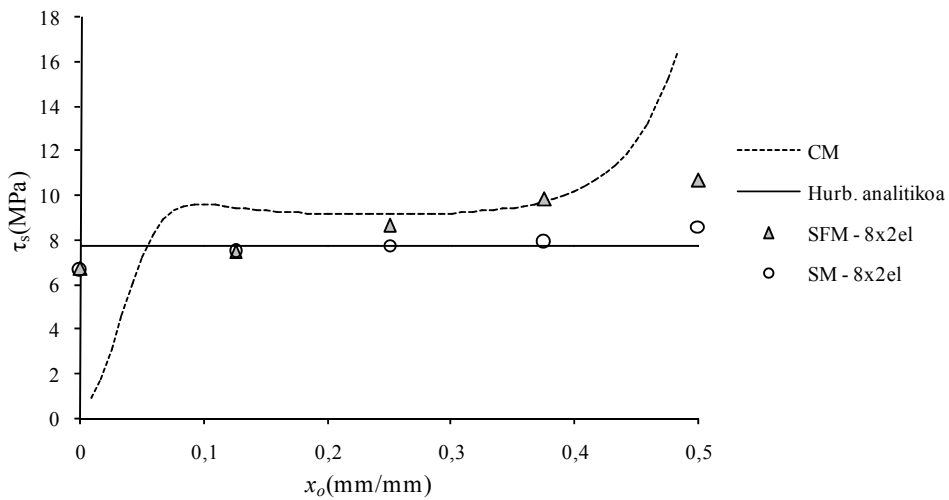
(b)

7.7 Irudia. Biraketak erdiko lerroan, $y_0 = 0,5$. (a) θ_x ; (b) θ_y .

7.8 irudian σ_x eta τ_s tentsioen banaketa erakusten da plakaren luzeran zehar, $y_0 = 0,5$ denean. τ_s kasuan, CM modeloak tentsioen kontzentrazio bat aurreikusten du erdiko puntuan [5], eta emaitza analitikoek banaketa numerikoen batz besteko balioak dira.



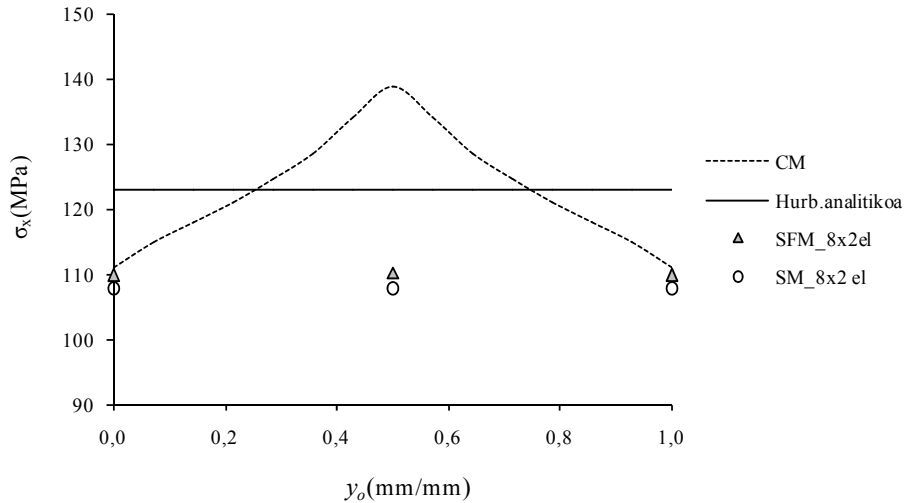
(a)



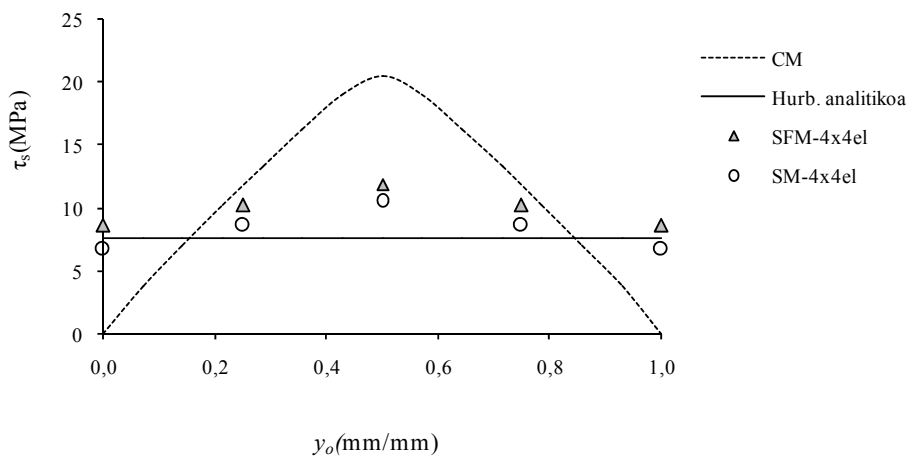
(b)

7.8 Irudia: Tentsioak luzeran zehar, $y_0 = 0.5$. (a) σ_x ; (b) τ_s .

7.9 irudian σ_x eta τ_s , tentsio banaketak plakaren zabalean ikusten dira, $x_0 = 0.5$ denean. Karga lerroan, analitikoki lortutako σ_x eta τ_s emaitzak CM modeloaren batz besteko balioak dira, eta CM modeloak tentsioen kontzentrazio bat aurreikusten du. SFM metodoarekin lortutako σ_x tentsioak gehiago gerturatzen dira hurbilketa analitikora SM metodoarekin lortutakoak baino.



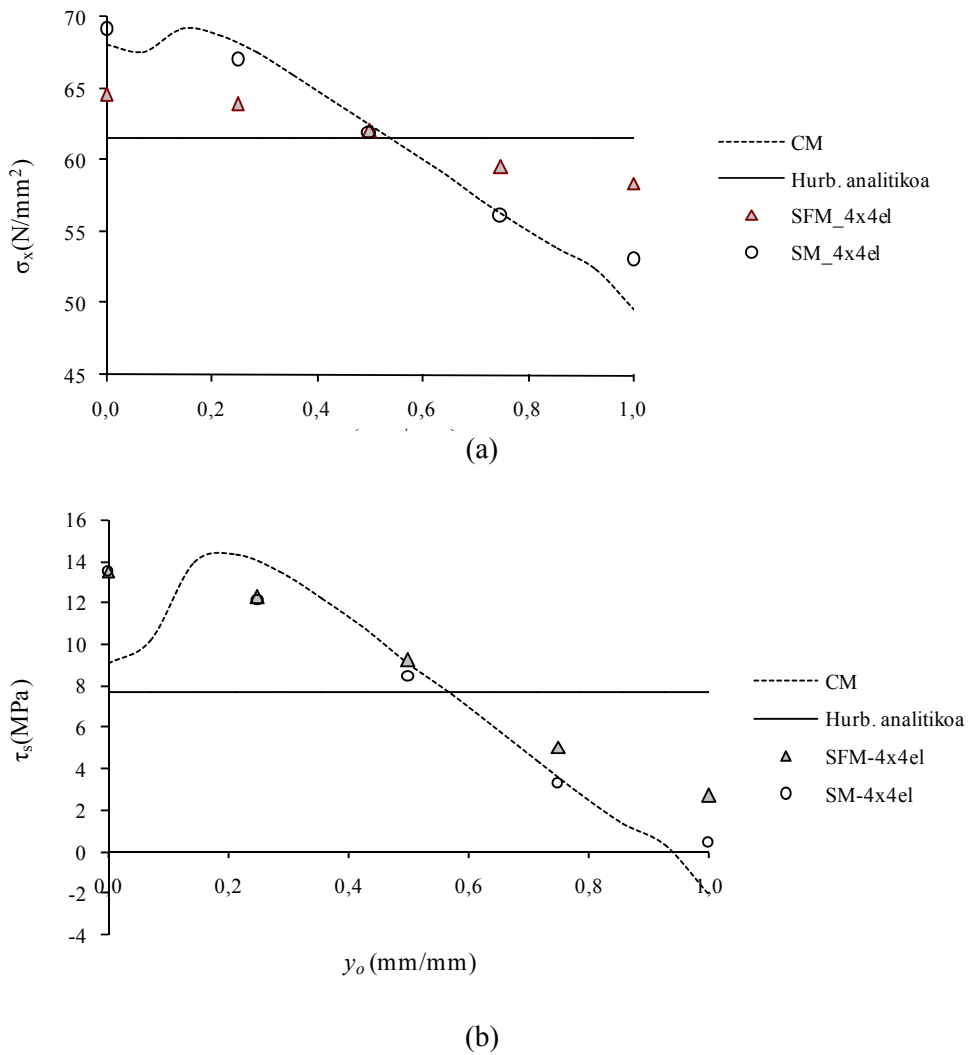
a/



b/

7.9 **Irudia.** Tentsioak plakaren zabalean zehar, beheko aurpegian, $x_0 = 0,5$. (a) σ_x ; (b) τ_s .

7.10 irudian σ_x eta τ_s tentsio banaketak zabalean zehar $x_0 = 0,25$ denean ikusten dira. Karga aplikazio puntutik kanpo, hurbilketa analitikoarekin lortutako σ_x eta τ_s tentsio banaketa, CM modeloarekin lortutako bataz bestea da. Kasu honetan, SM analisiarekin lortutako emaitzak hobekak dira SFM analisiarekin lortutakoak baino.



7.10 **Irudia.** Tentsioak zabalean zehar beheko aurpegian, $x_0=0,25$. (a) σ_x ; (b) τ_s .

7.7 ONDORIOAK

SFM metodoa erabiliz plaka-elementu baten formulazioa garatu da, laminatu simetrikoez onargarria dena. Formulazioa norabide bakarreko konposite baten hiru puntuko makurdura zeharraren saiakuntzan aplikatu da eta SM metodoarekin konparatu da. SFM eta SM metodoak erabiliz 16 elementuekin lortutako emaitzak,

hurbilketa analitikoarekin eta diskretizazio maila altuko analisi numerikoarekin konparatu dira.

SFM metodoa PVW eta PCVW printzipioetan oinarrituta dagoenez, SFM metodoarekin lortutako desplazamenduak eta biraketak hobeak dira SM metodoan lortutakoak baino.

Hala ere, bi metodoekin tentsio emaitzak oso antzekoak dira. Emaitza hauek SFM eta SM metodoetan kurbadurak kalkulatzeko prozedura ezberdinekin erlazionatuta daude. SM metodoan kurbadurak biraketak deribatuz lortzen dira eta SFM metodoan barne momentuetatik lortzen dira, 7.1 Taularen arabera. Kasu honetan, bi metodoekin oso antzeko kurbadurak lortu dira, eta beraz, baita tentsioak ere.

Horregatik, diskretizazio maila jakin batean SFM metodoa erabiliz lortutako emaitzak hobeak dira SM metodokoak baino. Beste moduan esanda, emaitzen doitasun maila jakin batean, SFM metodoan behar den elementu kopurua txikiagoa da SM metodoan baino.

7.8 ERREFERENTZIAK

1. Mujika, F; Mondragon, I. (2003). On the displacement field for unidirectional off-axis composites in 3-point flexure-Part 1: Analytical approach. *Journal of composite materials*, **37**: 1041-1066.
2. Mujika, F; Berglund, L; Varna, J and Mondragon, I. (2002). 45° Flexure Test for Measurement of In-Plane Shear Modulus. *Journal of Composite Materials*, **36**: 2313-2337.
3. Mujika, F; de Benito, A and Mondragon, I. (2003). On the Displacement Field for Unidirectional Off-axis Composites in 3-Point Flexure – Part 2: Numerical and experimental results. *Journal of Composite Materials*, **37**: 1191-1217.
4. Mujika, F. (2012). A novel approach for the three-point flexure test of multidirectional laminates. *Journal of Composite Materials*, **46**: 259-274
5. Romera, J.M., Adarraga, I., Cantera, M.A., Mujika F.(2011). Numerical analysis of displacement and stress fields of off-axis composites in three-point flexure. *Journal of Composite Materials*, **45**: 671-682.

6. Patnaik, S.N; Hopkins, DA; Aiello, RA; Berke, L. (1992). Improved Accuracy for Finite-Element Structural-Analysis via an Integrated Force Method. *Comput.Struct*, **45**:521-542.
7. Daniel, IM and Ishai, O. (2006) .Engineering Mechanics of Composite Materials. Oxford. University Press, Inc., New York
8. Oñate Ibáñez de Navarra, E. (1995). Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 2nd ed, Cimne, Barcelona.
9. Rao, S. (2005). The finite element method in engineering. Elsevier. 4th ed.
- 10 Patnaik, SN; Hopkins, DA; Halford, GR. (2004). Integrated Force Method solution to indeterminate structural mechanics problems. NASA/TM-2004: 207430.
11. Hopkins, DA; Patnaik, SN. (2001). Stress Formulation in Three-Dimensional Elasticity NASA/TM-2001-210515.
12. Kaljevic, I; Patnaik, SN; Hopkins, DA. (1996). Development of finite elements for two-dimensional structural analysis using the integrated force method, *Comput.Struct*; **59**: 691-706.
13. Spilker, RL; Masker, SM; Kania, E. (1981). Plane isoparametric Hybrid-stress elements: Invariant and optimal sampling. *Int. Journal for numerical methods in engineering*; **17**: 1469-1496.

ONDORIO OROKORRAK

Hauek dira ikerkuntza lan honetatik aipa daitezkeen ondorio nagusiak:

1. IFMD metodoaren ekuazio nagusia PVW eta PCVW printzipioen aplikazio zuzenetik lortu da, deformazio orokortuaren kontzeptua erabili gabe.
2. IFMD metodoa eta Pian-en HM baliokideak direla frogatu da. HM metodoa Hellinger–Reissnerren printzipiotik lortzen da. Ondorioz, PVW eta PCVW eta Hellinger–Reissnerren printzipioen aplikazioa baliokideak dira.
3. IFMD eta HM metodoak baliokideak izanik, hauen formulazioak tentsioetan eta desplazamenduetan oinarrituta daude. Horregatik, Zurruntasun-indar metodoa (*Stiffness Force Method*, SFM) deitu zaie.
4. SFM eta HM metodoetan eragozpenik handiena malgutasun matrizearen alderantzizkoa kalkulatzearen konputazio kostua da. Bi metodoak baliokideak direnez, Zhang et al.-ek elementu hibridoetan garatutako ortonormalizazio metodoa SFM metodoan ere aplikatu daiteke. Lan honetan, SFM metodoan ortonormalizazio metodoa aplikatu da mintz-elementu anisotropoen malgutasun matrizea diagonalizatzeko, konputazio kostua nabarmenki gutxituz.

5. SFM metodoa mintz eta plaka elementuetan inplementatu da. Adibide bezala, mintz elementuaren kasuan hegal-habe ortotropoa makurduran eta trakzio zeharraren saiakuntza analizatu dira. Plaka elementuaren kasuan hiru puntuko makurdura zeharraren saiakuntza analizatu da.
6. Aurkeztu diren norabide bakarreko konpositeen adibideetan, SFM metodoan desplazamenduak eta tentsioak gehiago hurbildu dira hurbilketa analitikoarekin SM metodoarekin eta elementu kopuru berdinarekin lortutakoak baino. SFM metodoak problemaren baldintzak SM baino hobeto betetzen dituela ikusi da. SFM metodoan tentsioak desplazamenduetatik zuzenean lortzen dira, eta SM metodoan, berriz, desplazamenduak deribatuz lortzen dira.
7. SFM metodoko elementuak programa komertzialetan inplementatzeko elementu bakoitzaren zurruntasun matrizea bakarrik aldatu behar da eta SM metodoaren prozedura nagusia mantentzen da. Gero, interpolazio funtzioak erabiliz tentsioak kalkulatu dira.

AURRERA BEGIRA

Ikerkuntza lan honetan SFM erabiliz mintz-elementu laukizuzen baten formulazioa garatu da indarren interpolazio funtzio linealak erabiliz. Lan honekin jarraitzeko, SFM metodoaren formulazioa jarraituz baina indar interpolazio funtzio desberdinak erabiliz beste elementu batzuk garatu daitezke.

SM metodoko elementu isoparametrikoetan koordinatuen transformazioak eta aldagaien aldaketak jakobiarraren bitartez garatuta daudela kontuan hartuz, SFM metodoan elementu lauki eta solido orokorrak ere formula daitezke jakobiarra erabiliz. Bestalde, SFM metodoaren bitartez formulatutako elementuen distortsioa eta forma-faktorearen eragina aztertu daitezke.

Laminatu konpositetan, SFM metodoarekin formulatutako elementuak tentsio gradiente handiko problemetan aplika daitezke: laminen arteko tentsioen kasuan edo ertz-efektuaren analisisian, adibidez.

Elementuen zurruntasun matrizea aldatuz eta tentsioak interpolazio funtzioak erabiliz kalkulatz, SFM metodoaren formulazioa programa komertzialean inplementatuko da.