

Almacenamiento y Transmisión de Imágenes Digitales: cómo reducir la cantidad de datos



Cuaderno del Estudiante



Verónica Valdenebro Villar

ÍNDICE

1. CONTEXTO DE LA ASIGNATURA (datos generales)	1
1.1. Nombre de la asignatura	1
1.2. Titulación	1
1.3. Curso y cuatrimestre.....	1
1.4. Nº de créditos ECTS	1
1.5. Modalidades docentes y horas.....	1
1.6. Competencias específicas de la asignatura.	2
1.7. Resultados de aprendizaje.....	4
1.8. Temario de la asignatura	6
1.9. Sistema de evaluación	8
1.10. Objetivo general de la asignatura.....	8
2. PROBLEMA ESTRUCTURANTE	9
2.1. PREGUNTA	9
2.2. ESCENARIO.....	9
2.3. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	11
2.4. RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS Y OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA.....	11
2.4.1. Competencias.....	11
2.4.2. Resultados de aprendizaje	12
2.5. HILO CONDUCTOR (relación del problema con el temario de la asignatura).....	13
3. METODOLOGÍA	15
3.1. Introducción.....	15
3.2. Comentarios sobre la descripción de las actividades	16
3.3. Tareas no presenciales	17
3.4. ¿Por qué no se realiza un test de conocimientos previos?	17
3.5. Grupos: criterios para formarlos y roles.....	17
3.6. Incorporación de los componentes del aprendizaje cooperativo	18
4. DESARROLLO DEL PROBLEMA: SECUENCIA DE ACTIVIDADES	21
4.1. Introducción.....	21
Actividad A.1. Análisis del problema presentado en el escenario.....	21

4.2.	Valores y vectores propios. Definición, cálculo y propiedades	23
	Actividad A.2. Concepto de valor y vector propio	23
	Actividad A.3. Cálculo de valores y vectores propios	25
	Actividad A.4. Propiedades de los valores y vectores propios	28
	Actividad A.5. Cálculo de valores y vectores propios con <i>Mathematica</i>	32
4.3.	Diagonalización de matrices	36
	Actividad A.6. Diagonalización de matrices.....	36
4.4.	Caso especial de las matrices simétricas reales	39
	Actividad A.7. Matrices simétricas reales: valores y vectores propios. Diagonalización por semejanza ortogonal.....	39
4.5.	Normas	42
	Actividad A.8. Concepto de norma.....	42
4.6.	Producto escalar	50
	Actividad A.9. Concepto de producto escalar. Vectores ortogonales.....	50
	Actividad A.10. Obtención de vectores ortogonales: método de <i>Gram-Schmidt</i> ..	54
	Actividad A.11. Expresión matricial del producto escalar	56
4.7.	Descomposición en valores singulares	58
	Actividad A.12. Resolución del problema estructurante.....	58
	Actividad A.13. Informe, exposición oral final y cuaderno del grupo	60
5.	PLANIFICACIÓN TEMPORAL DE LAS ACTIVIDADES.....	63
6.	SEGUIMIENTO Y EVALUACIÓN	69
	6.1. Introducción.....	69
	6.2. Resumen de la evaluación (instrumentos, porcentajes, evaluadores y temporalización).....	70
	6.3. Requisitos para aprobar la asignatura.....	73
7.	FUENTES DE INFORMACIÓN	75
8.	ANEXOS (RÚBRICAS, ACTAS, etc)	77
	CONTROL DEL TIEMPO	79
	NORMAS DE FUNCIONAMIENTO DEL GRUPO.....	81
	ACTA DE LA REUNIÓN Nº	83
	EVALUACIÓN DE UN EJERCICIO NUMÉRICO (RÚBRICA).....	85
	EVALUACIÓN DE CUADERNOS (RÚBRICA).....	87
	EVALUACIÓN TRABAJO EN EQUIPO (RÚBRICA)	89
	DESCRIPCIÓN GENERAL DEL TRABAJO EN EQUIPO FINAL.....	91
	INFORME ESCRITO (RÚBRICA).....	93



PRESENTACIÓN ORAL (RÚBRICA) 95

1. CONTEXTO DE LA ASIGNATURA (datos generales)

En este apartado se muestra el contexto general en el que se imparte la asignatura de Álgebra y en el que desarrollará el proyecto de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Dicho contexto viene determinado por el documento del Grado en Ingeniería Técnica de Telecomunicación aprobado por la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA), el cual condiciona el temario a impartir y las competencias a adquirir por los estudiantes, así como la evaluación a emplear. Es importante que el alumno comprenda que las competencias y resultados de aprendizaje a adquirir no son establecidas de manera aislada, sino que forman parte de un todo con el que se persigue formar al graduado en Ingeniería Técnica de Telecomunicación.

1.1. Nombre de la asignatura

Álgebra

1.2. Titulación

Grado en Ingeniería Técnica de Telecomunicación.

1.3. Curso y cuatrimestre

Primer curso/ Primer cuatrimestre (pertenece al módulo de formación básica).

1.4. N° de créditos ECTS

6

1.5. Modalidades docentes y horas

En el documento de grado únicamente se establecen las horas totales de cada modalidad docente, las cuales se muestran en la tabla 1.1, en la que también se ha indicado a modo orientativo la distribución semanal existente en la actualidad.

Tabla 1.1. Modalidades docentes

Modalidad docente	Horas presenc./sem	Horas no presenc./sem	Horas presenc. totales	Horas no presenc. totales	Total
Magistral	2	3	30	45	75
Práctica de Aula	1	1.5	15	22,5	37,5
Seminario	1.5 (semanas 3, 8,10 y 14)	2.25	5	7,5	12,5
Práctica de ordenador	1.5 (semanas 2, 5, 9, 12, 13 y 15)	2.25	10	15	25
			60	90	150

1.6. Competencias específicas de la asignatura.

En el documento de grado no se han definido competencias de la asignatura, sino de **módulo y titulación**. Respecto al módulo de formación básica, al que la asignatura de Álgebra pertenece, no se indica qué competencias deben trabajarse en cada una de las 11 asignaturas que componen dicho módulo, sino que simplemente se establece que entre todas ellas queda garantizada la cobertura de las 5 competencias descritas para el módulo, las cuales se listan en la tabla 1.2.

Sin embargo, en dicho documento consta, respecto a la asignatura de Álgebra, que “La consecución de las competencias de la asignatura capacitará al alumno en la resolución de problemas matemáticos que se planteen en el campo de la ingeniería”, lo que la relaciona directamente con la competencia específica CM01 que aparece en la mencionada tabla. En concreto, se adquiriría “capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería (repetido). Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal, métodos numéricos y optimización”.

En la tabla 1.2 se indica también la correspondencia de la competencia del módulo con las competencias a adquirir en la titulación, las cuales se muestran a su vez en la tabla 1.3, junto con su relación con las competencias básicas del MEC. En todas las tablas se han indicado en color rojo las competencias directamente relacionadas con la asignatura de Álgebra. Puede observarse que la competencia CM01 específica del módulo ayuda a conseguir las competencias G003, G004, G005 y G009 de la titulación, de las que G003, G004, G009 (la primera

específica, las otras dos transversales) pueden trabajarse en la asignatura de álgebra.

Tabla 1.2. Competencias del módulo de formación básica. Se han señalado en color rojo las competencias directamente relacionadas con la asignatura Álgebra.

Código	Tipo Transv/Espec		Compet. Titulación
CM01	Específica	Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal; geometría; geometría diferencial; cálculo diferencial e integral; ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales; métodos numéricos; algorítmica numérica; estadística y optimización.	G003 G004 G005 G009
CM02	Específica	Conocimientos básicos sobre el uso y programación de los ordenadores, sistemas operativos, bases de datos y programas informáticos con aplicación en ingeniería.	G003 G004 G005 G006 G009
CM03	Específica	Comprensión y dominio de los conceptos básicos sobre las leyes generales de la mecánica, termodinámica, campos y ondas y electromagnetismo y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería.	G003 G004 G005
CM04	Específica	Comprensión y dominio de los conceptos básicos de sistemas lineales y las funciones y transformadas relacionadas, teoría de circuitos eléctricos, circuitos electrónicos, principio físico de los semiconductores y familias lógicas, dispositivos electrónicos y fotónicos, tecnología de materiales y su aplicación para la resolución de problemas propios de la ingeniería	G001 G003 G004 G005 G006 G007 G009
CM05	Transversal	Conocimiento adecuado del concepto de empresa, marco institucional y jurídico de la empresa. Organización y gestión de empresas.	G004 G008 G009

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto los profesores que impartimos esta asignatura de forma coordinada trabajamos las siguientes competencias del módulo y la titulación:

- **CA1.** Capacidad para la resolución de los problemas matemáticos que puedan plantearse en la ingeniería. Aptitud para aplicar los conocimientos sobre: álgebra lineal.
- **CA2.** Conocimiento de materias básicas y tecnologías, que le capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y tecnologías, así como que le dote de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
- **CA3.** Capacidad de resolver problemas con iniciativa, toma de decisiones, creatividad, y de comunicar y transmitir conocimientos, habilidades y destrezas, comprendiendo la responsabilidad ética y profesional de la actividad del Ingeniero Técnico de Telecomunicación.
- **CA4.** Capacidad de trabajar en un grupo multidisciplinar y en un entorno multilingüe y de

comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas relacionadas con las Telecomunicaciones y la electrónica.

Tabla 1.3. Competencias de la titulación

Código	Tipo Transv/Espec		Compet. MEC
G001	Específica	Capacidad para redactar, desarrollar y firmar proyectos en el ámbito de la ingeniería de telecomunicación que tengan por objeto, de acuerdo con los conocimientos adquiridos según lo establecido en el apartado 5 de esta orden, la concepción y el desarrollo o la explotación de redes, servicios y aplicaciones de telecomunicación y electrónica.	MEC2 MEC4
G002	Específica	Conocimiento, comprensión y capacidad para aplicar la legislación necesaria durante el desarrollo de la profesión de Ingeniero Técnico de Telecomunicación y facilidad para el manejo de especificaciones, reglamentos y normas de obligado cumplimiento.	MEC2 MEC3
G003	Específica	Conocimiento de materias básicas y tecnologías, que le capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y tecnologías, así como que le dote de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.	MEC1 MEC5
G004	Transversal	Capacidad de resolver problemas con iniciativa, toma de decisiones, creatividad, y de comunicar y transmitir conocimientos, habilidades y destrezas, comprendiendo la responsabilidad ética y profesional de la actividad del Ingeniero Técnico de Telecomunicación.	MEC2 MEC4
G005	Específica	Conocimientos para la realización de mediciones, cálculos, valoraciones, tasaciones, peritaciones, estudios, informes, planificación de tareas y otros trabajos análogos en su ámbito específico de la telecomunicación.	MEC1 MEC3
G006	Específica	Facilidad para el manejo de especificaciones, reglamentos y normas de obligado cumplimiento	MEC3 MEC5
G007	Transversal	Capacidad de analizar y valorar el impacto social y medioambiental de las soluciones técnicas	MEC3
G008	Específica	Conocer y aplicar elementos básicos de economía y de gestión de recursos humanos, organización y planificación de proyectos, así como de legislación, regulación y normalización en las telecomunicaciones.	MEC1 MEC3 MEC4
G009	Transversal	Capacidad de trabajar en un grupo multidisciplinar y en un entorno multilingüe y de comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas relacionadas con las Telecomunicaciones y la electrónica	MEC4 MEC5

1.7. Resultados de aprendizaje

Al igual que en el caso de las competencias, en el documento de grado **no se han descrito resultados de aprendizaje previstos en la asignatura, sino en los módulos**. De entre los 15 resultados de aprendizaje listados para el módulo de formación básica el primero, descrito a continuación, está relacionado, entre otras, con la asignatura de Álgebra:

Resolución de problemas matemáticos de algebra lineal, geometría, geometría diferencial, calculo diferencial, e integral, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, métodos

numéricos, algorítmica numérica, estadística y optimización.

En la actualidad, tras cursar esta asignatura los alumnos son capaces de:

- **RAA1** (concreciones de la competencia CA1 y CA2)
 - **RAA1-1.** Comprender la diferencia entre el cálculo numérico y el cálculo simbólico. Realizar cálculos simbólicos (para realizar demostraciones o para ahorrar tiempo en los cálculos numéricos).
 - **RAA1-2.** Aplicar transformaciones elementales para calcular el rango y la inversa de una matriz, así como para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
 - **RAA1-3.** Comprender y realizar operaciones con matrices particionadas.
 - **RAA1-4.** Generalizar el concepto de espacio vectorial (más allá del ya conocido espacio vectorial de los vectores geométricos). El alumno será capaz de comprobar la independencia lineal de vectores de cualquier tipo (matrices, funciones, etc.), así como de encontrar diferentes bases de un espacio vectorial y las coordenadas de un vector respecto a distintas bases, así como de establecer la relación entre ellas.
 - **RAA1-5.** Generalizar los conceptos de longitud de un vector, distancia, ángulo y ortogonalidad (perpendicularidad). Encontrar bases ortogonales de un espacio vectorial. Será también capaz de llevar a cabo las tareas indicadas anteriormente trabajando directamente con los vectores o con sus coordenadas respecto a cualquier base.
 - **RAA1-6.** Comprender el concepto de transformación lineal y trabajar con transformaciones lineales directamente o con su representación matricial: encontrar el núcleo y la imagen de una transformación lineal, así como la imagen de un vector o de un subespacio completo.
 - **RAA1-7.** Conocer y entender los conceptos de valor y vector propio, así como ser capaz de calcularlos. Conocer el problema de diagonalizar una matriz por semejanza y ser capaz de diagonalizarla siempre que sea posible. También será capaz de diagonalizar una matriz simétrica por semejanza ortogonal.
 - **RAA1-8.** Conocer y comprender aplicaciones de los conceptos aprendidos a problemas de la vida real y de la ingeniería.
- **RAA2** (concreción de la competencia CA2). Utilizar software matemático adecuado para

resolver problemas matemáticos relacionados con el álgebra lineal.

- **RAA3** (concreción de la competencia CA3). Trabajar de manera autónoma: organizar el propio trabajo, buscar información, autoevaluar el trabajo realizado.
- **RAA4** (concreciones de la competencia CA4).
 - **RAA4-1.** Participar de forma constructiva y comprometida en la dinámica de los trabajos en equipo.
 - **RAA4-2.** Transmitir oralmente información, ideas, problemas y soluciones a un público de manera comprensible y bien organizada.
 - **RAA4-3.** Transmitir por escrito información, ideas, problemas y soluciones a un público de manera comprensible y bien organizada.

1.8. Temario de la asignatura

En el documento de grado no se describe en detalle el temario de la asignatura.

Únicamente se indican los temas a tratar, que se muestran a continuación:

1. Álgebra matricial y sistemas de ecuaciones lineales.
2. Espacios vectoriales.
3. Espacios euclídeos.
4. Ajuste mínimo cuadrático
5. Aplicaciones lineales
6. Diagonalización por transformaciones de semejanza.

El temario detallado que se imparte en la actualidad, consensado entre los profesores de la asignatura, es el siguiente:

1. Álgebra matricial y sistemas de ecuaciones lineales.

Se comienza con un repaso de las operaciones con matrices (suma, producto por un escalar, producto y potencias de matrices). Se pasa a continuación a revisar los conceptos de transpuesta, determinante e inversa de una matriz, junto con sus principales propiedades y métodos de cálculo. Se presentan los conceptos de operación y matriz elemental, así como la

relación entre ambos y el concepto de matrices equivalentes. Posteriormente, se repasa el método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Por último, se tratan las operaciones con matrices por bloques.

2. Espacios vectoriales.

Se comienza definiendo los conceptos de espacio y subespacio vectorial, así como sus principales propiedades. Posteriormente se definen los conceptos de dependencia e independencia lineal, que permiten posteriormente definir los conceptos de base, dimensión y coordenadas de un vector respecto de una base. Finalmente, se trata el cambio de base en un espacio vectorial y se analizan la dimensión y ecuaciones de un subespacio.

3. Espacios euclídeos.

En primer lugar se define el concepto de norma de un vector y se presentan distintos ejemplos de normas. Se pasa a continuación a definir el concepto de producto escalar, así como a presentar sus principales propiedades y la norma inducida por un producto escalar. Posteriormente se estudia la representación matricial de un producto escalar con respecto a una base de dicho espacio, así como el cambio de base. Finalmente, se definen los conceptos de vectores ortogonales y ortonormados y se presenta el método de Gram-Schmidt para crear conjuntos de vectores ortogonales. Se introduce el ajuste mínimo cuadrático.

4. Aplicaciones lineales

Se comienza definiendo el concepto de aplicación lineal, presentándose sus principales propiedades. Se pasa a continuación a definir los subespacios núcleo e imagen de una aplicación lineal, y se presenta el teorema fundamental de las aplicaciones lineales, así como la clasificación de éstas. Por último, se estudia la representación matricial de una aplicación lineal, así como la relación entre las matrices que caracterizan a una aplicación lineal en bases distintas (cambio de base).

5. Valores y vectores propios. Diagonalización de matrices por semejanza.

Se comienza presentando el concepto de valor y vector propio, así como su cálculo y propiedades. Se pasa a continuación a analizar el problema de la diagonalización de una matriz cualquiera por semejanza, así como el caso particular de la diagonalización de matrices simétricas reales.

1.9. Sistema de evaluación

En el documento de grado no se describe sistema de evaluación de la asignatura. El sistema de evaluación descrito para el módulo indica lo siguiente:

“Las herramientas empleadas para la evaluación y su ponderación en la nota final se han definido para cada asignatura; esta ponderación podrá ser modificada de año en año, en función de la experiencia adquirida en su aplicación. En todas ellas se tendrán en cuenta la labor realizada por el alumno. Se emplearán:

- Exámenes escritos, parciales y finales, para comprobar los conocimientos básicos adquiridos y la capacidad para resolver problemas prácticos de la ingeniería de telecomunicación.
- Evaluación de las prácticas de laboratorio y ordenador mediante su seguimiento y elaboración de informes. En dichos informes se valorará la aplicación de los conocimientos a aplicaciones prácticas así como el cálculo de errores y su interpretación.
- Evaluación de trabajos realizados por estudiantes en los que se valorará su capacidad para manejar distintos tipos de información, exponer los resultados obtenidos.

La calificación se ajustará a lo exigido en el Real Decreto 1125/2003, publicado en el B.O.E. de 18 de Septiembre de” (sic).

A pesar de lo indicado en el primer párrafo, en la asignatura de Álgebra no se ha descrito la evaluación en el documento de grado. En el apartado 6 se muestra un resumen del sistema que se empleará para evaluar la adquisición de los resultados de aprendizaje por parte del alumno, y que ha sido consensuado entre los profesores de la asignatura.

1.10. Objetivo general de la asignatura

El objetivo de la asignatura es comprender y usar las matrices, así como sus aplicaciones en la ingeniería. Los alumnos adquirirán conocimientos y desarrollarán habilidades y destrezas necesarias para una comprensión adecuada de otras asignaturas tanto de matemáticas como de otras disciplinas donde una gran cantidad de modelos tienen una naturaleza lineal y donde el lenguaje matricial es ampliamente utilizado.

2. PROBLEMA ESTRUCTURANTE

Los temas 3 y 5 de la asignatura se van a desarrollar mediante la metodología llamada Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Partiendo de un problema o situación “real”, el alumno deduce qué necesita aprender para resolverlo y va buscando la información necesaria para adquirir los conocimientos necesarios para llegar a resolver el problema (para más detalles ver el apartado 3). Esta metodología sigue por tanto un proceso similar al que el alumno deberá seguir en su vida profesional al enfrentarse a los problemas/situaciones a los que tendrá que dar solución. Se presenta a continuación el problema que se va a emplear, mostrando tanto la pregunta resumen de la situación como el escenario detallado del problema. Se muestran asimismo los objetivos de aprendizaje que se persiguen con dicho problema, así como su relación con las competencias y resultados de aprendizaje de la asignatura y el hilo conductor (relación con el temario de la asignatura); esta última información no estará sin embargo disponible a los alumnos hasta que ellos mismos hayan identificado los objetivos de aprendizaje del problema planteado (es decir, qué necesitan aprender para resolverlo).

2.1. PREGUNTA

¿Qué podríamos hacer si fallan las comunicaciones y necesitamos enviar muchas imágenes como ésta?



Fotografía de Roberto Rosal (<http://www2.uah.es/rosal/News/N002.htm>).

2.2. ESCENARIO

Ander Martínez se encuentra en África en su primer trabajo como ingeniero. Su empresa se dedica a la construcción de infraestructuras de agua y saneamiento y está buscando oportunidades de negocio en el exterior. Ander debe observar las instalaciones existentes y valorar las oportunidades de mercado. En un principio simplemente debería elaborar un informe a su regreso, pero ahora ha surgido un posible socio colaborador en el negocio, el cual desea saber cuanto antes cuál es exactamente la situación; por ello, el jefe de Ander quiere que éste le envíe urgentemente, entre otras cosas, cuantas fotos haya tomado.

Ander pensó que esto iba a ser lo más sencillo de todo: simplemente enviar las fotos por Internet. Para su disgusto esto no ha sido así: las comunicaciones en el lugar en el que se encuentra son muy malas por lo que, aunque puede enviar archivos poco pesados, cada vez que va a enviar una foto, debido a lo que ésta ocupa el sistema se queda colgado. Por otra parte, se encuentran en la época de lluvias y debido a las últimas inundaciones la comunicación por vía terrestre está cortada; incluso si no hubiera sido así, no habría ninguna garantía de que un correo postal pudiera llegar a su destino en un tiempo prudencial. Ander sabe que su renovación en la empresa podría depender de cómo resuelva esta situación, pero no sabe qué hacer.

En la misma zona en la que se encuentra Ander están dos ingenieros de telecomunicaciones, Amaia y Alberto, a los que Ander ha contado su problema confiando en que éstos puedan ayudarle. Ellos tampoco ven una solución directa, pero recuerdan que al final del primer curso de la carrera un profesor les habló de la problemática de enviar imágenes de satélite (muchas y con mucha información) a la Tierra, y les comentó algunos procedimientos matemáticos que se pueden emplear para enviar menos información asociada a cada imagen, de manera que éstas ocupen menos. En concreto recuerdan que les habló de algo llamado descomposición en valores singulares, que empleaba varios conceptos junto con sus propiedades fundamentales que se habían visto durante el año, como valores y vectores propios de una cierta matriz, vectores ortogonales y vectores normalizados. ¡Cómo disfrutaron aquella clase! Por fin se dieron cuenta de que lo que habían estudiado servía para algo, lo que por otra parte era el objetivo del profesor. Alberto estuvo tan interesado en ello que, según comenta, aunque la descomposición en valores singulares en sí misma no era un objetivo del curso, posteriormente buscó información sobre el tema en los libros recomendados por el profesor y no le pareció algo tan complicado para la importancia que tenía. También recuerda que le sirvió para darse cuenta de que la insistencia del profesor en que tenían que tener una actitud más activa en las prácticas con ordenador tenía su sentido, ya que por ejemplo calcular valores y vectores propios manualmente era en general imposible, salvo que la matriz fuera de orden pequeño o muy sencilla.

Todos han decidido que merece la pena intentar refrescar sus conocimientos y ver si los pueden emplear para dar solución al problema. Las únicas herramientas de las que disponen son sus portátiles personales, en el que alguno de ellos todavía tiene instalado el software matemático que empleó durante la carrera, y sus teléfonos móviles; también existe una biblioteca en el pueblo.

Ander ha decidido que si la cosa sale bien va a explicar a su jefe, tanto en persona como por escrito, cómo ha dado solución al problema, de manera que pueda valorar el mérito que tiene su solución y no dude en renovar su contrato. Además, Ander sabe que en la actualidad su empresa está contratando ingenieros, por lo que pondrá énfasis en el hecho de que ha resuelto el problema trabajando en equipo con otras dos personas, que si bien están especializadas en una disciplina distinta, han aportado conocimientos fundamentales para dar solución a un problema de la empresa.

2.3. OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- **OA1.** Valores y vectores propios: qué son, cómo se calculan, propiedades, aplicaciones.
- **OA2.** Vectores normalizados: qué son, cómo se calculan, aplicaciones.
- **OA3.** Vectores ortogonales: qué son, cómo se obtienen, aplicaciones.
- **OA4.** Resolver problemas relacionados con los conceptos implicados utilizando software matemático.
- **OA5.** Trabajar en equipo.
- **OA6.** Realizar informes orales utilizando terminología adecuada.
- **OA7.** Realizar informes escritos utilizando terminología adecuada.

2.4. RELACIÓN CON LAS COMPETENCIAS Y OBJETIVOS DE APRENDIZAJE DE LA ASIGNATURA

2.4.1. Competencias

Con este problema se trabajarán todas las competencias establecidas por los profesores para esta asignatura (ver apartado 1.6) y que concuerdan con las indicadas del grado y del módulo (competencia 1 del grado, así como las 3 competencias del módulo identificadas como correspondientes a la asignatura de Álgebra):

Competencia del grado (CA1): “La consecución de las competencias de la asignatura capacitará al alumno en la resolución de problemas matemáticos que se planteen en el campo de la ingeniería”

Competencias del módulo:

- **G003 (CA2)**. Conocimiento de materias básicas y tecnologías, que le capacite para el aprendizaje de nuevos métodos y tecnologías, así como que le dote de una gran versatilidad para adaptarse a nuevas situaciones.
- **G004 (CA3)**. Capacidad de resolver problemas con iniciativa, toma de decisiones, creatividad, y de comunicar y transmitir conocimientos, habilidades y destrezas, comprendiendo la responsabilidad ética y profesional de la actividad del Ingeniero Técnico de Telecomunicación
- **G009 (CA4)**. Capacidad de trabajar en un grupo multidisciplinar y en un entorno multilingüe y de comunicar, tanto por escrito como de forma oral, conocimientos, procedimientos, resultados e ideas relacionadas con las Telecomunicaciones y la electrónica

2.4.2. Resultados de aprendizaje

De entre los resultados de aprendizaje descritos para la asignatura en el apartado 1.7, con este problema se pretende obtener los que se indican a continuación. El alumno será capaz de:

- **RAA1-5**. Generalizar los conceptos de longitud de un vector, distancia, ángulo y ortogonalidad (perpendicularidad). Encontrar bases ortogonales de un espacio vectorial. Será también capaz de llevar a cabo las tareas indicadas anteriormente trabajando directamente con los vectores o con sus coordenadas respecto a cualquier base.
- **RAA1-7**. Conocer y entender los conceptos de valor y vector propio, así como ser capaz de calcularlos. Conocer el problema de diagonalizar una matriz por semejanza y ser capaz de diagonalizarla siempre que sea posible. También será capaz de diagonalizar una matriz simétrica por semejanza ortogonal.
- **RAA1-8**. Conocer y comprender aplicaciones de los conceptos aprendidos a problemas de la vida real y de la ingeniería.
- **RAA2**. Utilizar software matemático adecuado para resolver problemas matemáticos relacionados con el álgebra lineal.
- **RAA3**. Trabajar de manera autónoma: organizar el propio trabajo, buscar información,

autoevaluar el trabajo realizado.

- **RAA4-1.** Participar de forma constructiva y comprometida en la dinámica de los trabajos en equipo.
- **RAA4-2.** Transmitir oralmente información, ideas, problemas y soluciones a un público de manera comprensible y bien organizada.
- **RAA4-3** Transmitir por escrito información, ideas, problemas y soluciones a un público de manera comprensible y bien organizada.

2.5. HILO CONDUCTOR (relación del problema con el temario de la asignatura)

Para resolver el problema propuesto se propone la descomposición en valores singulares de la matriz que contiene la información de la imagen dada. Una imagen está formada por un número determinado de pixels, cada uno con un color definido. Esta información se almacena en una matriz, de manera que para enviar la imagen en principio tendríamos que enviar todos los elementos de esa matriz; por ejemplo, para una imagen con 1000x1000 pixels tendríamos que enviar 10^6 datos. La descomposición en valores singulares es una técnica que permite enviar un menor número de datos, de manera que en destino podamos recomponer una aproximación a la imagen original suficientemente buena. Normalmente, es posible tener una imagen aceptable enviando sólo un 20% de los datos.

Para hallar la descomposición en valores singulares de una matriz A , necesitamos encontrar los valores singulares de ésta, que son las raíces cuadradas de los valores propios de la matriz $A^t A$. Además, asociados a estos autovalores necesitamos encontrar un conjunto de vectores propios ortonormados. De esta manera, por una parte necesitamos saber qué son los valores y vectores propios de una matriz (TEMA 5) y, por otra parte, qué son vectores ortonormados y cómo encontrarlos (TEMA 3).

Nota: se cambiaría el orden del temario, de manera que estos dos temas pudieran trabajarse consecutivamente.

3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

Como se ha indicado en el apartado 2, para resolver el problema presentado se empleará la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas. Con esta metodología el alumno ha de seguir un proceso similar al que utilizará en su vida profesional al enfrentarse a los problemas/situaciones a los deberá dar solución. Es el alumno quien ha de descubrir qué necesita aprender para resolver el problema, identificando así los objetivos de aprendizaje involucrados, y quien busca la información necesaria para adquirir dichos conocimientos hasta llegar a resolverlo.

El ABP es un tipo de metodología activa. Dichas metodologías desarrollan una enseñanza centrada en el estudiante y se basan en el hecho de que el aprendizaje es mejor y mayor si:

- es constructivo (el estudiante desarrolla un proceso en el que va adquiriendo conocimientos estableciendo conexiones con otros ya adquiridos),
- autodirigido (el estudiante desarrolla habilidades que le permiten juzgar la dificultad de los problemas, detectar si ha comprendido un texto y evaluar su progresión en la adquisición de conocimientos)
- y contextualizado, es decir enmarcado en problemas del mundo real o de la práctica profesional.

Por otra parte, se sabe que este tipo de metodologías son más exitosas cuando el aprendizaje es cooperativo.

El trabajo que el alumno va a realizar con este proyecto trata por tanto de ayudarle a aprender más y mejor. En él, un problema real es el punto de partida (problema estructurante). En ese contexto integraremos los conocimientos, siendo el papel fundamental del docente el de guía, mientras que el estudiante se convierte en la figura central del proceso de aprendizaje. Para ello se han diseñado una serie de actividades que secuencialmente irán guiando al alumno en el proceso de búsqueda de información y resolución del problema, muchas de las cuales habrán de realizarse en equipo. El apartado 4 contiene una descripción detallada de la secuencia de actividades a realizar; sin embargo, la secuencia completa no será proporcionada al alumno desde un principio, sino según se vaya avanzando en el proceso. De la misma manera, en el apartado 5 se muestra una temporalización de las actividades; éstas se han identificado únicamente con su número, con el fin de que el estudiante no conozca de antemano el título de

la actividad y pueda así ser él mismo quien identifique el siguiente paso a dar en cada momento. En el apartado 6 se presenta la evaluación que se empleará para este proyecto ABP, enmarcándolo en la evaluación global de la asignatura, y el apartado 7 contiene algunas fuentes de información que el alumno puede consultar para realizar este trabajo. Finalmente, en la sección 8 el alumno dispone de material que le ayudará a organizar su trabajo, trabajar en equipo y realizar evaluaciones de las actividades, así como una descripción del trabajo en equipo a entregar en la semana 14 del curso (informe y presentación oral).

Se presentan a continuación algunos comentarios sobre las actividades a realizar, tales como un resumen de su descripción o cómo se han integrado en ellas los cinco ingredientes básicos del aprendizaje cooperativo: interdependencia positiva, exigibilidad individual, interacción cara a cara, habilidades interpersonales y reflexión sobre el trabajo realizado.

3.2. Comentarios sobre la descripción de las actividades

Cada actividad se ha descrito de la siguiente manera:

- En primer lugar se presenta una pregunta que da lugar a dicha actividad. Esta pregunta debería ser planteada por los propios alumnos al terminar la actividad anterior (es decir, la necesidad de la actividad debería ser planteada por los propios alumnos) y es la que establece la continuidad entre una actividad y la siguiente. En la mayoría de las ocasiones estas preguntas deberían surgir de manera natural, pero en aquéllos casos en que sea necesario el profesor podrá guiar a los alumnos hacia el planteamiento de la pregunta “adecuada”.
- Posteriormente se presenta un párrafo que resume qué tipo de tareas se van a realizar.
- A continuación una tabla que describe la secuencia de sub-actividades a seguir, indicando para cada sub-actividad si ésta es presencial o no, individual o grupal, el tiempo estimado para su realización así como una descripción de en qué consiste la tarea a realizar. De esta manera, la cabecera que correspondería a cada una de las tablas sería la siguiente:

Nº sub-actividad	Presencial (P)/ No Presencial (NP)	Individual/Grupo/ Toda la clase	Tiempo estimado	Descripción general de la actividad
------------------	---------------------------------------	------------------------------------	--------------------	--

- Posteriormente, para aquellas sub-actividades que precisen que se proporcione algún dato, por ejemplo aquéllas consistentes en realizar unos determinados ejercicios o rellenar una tabla determinada, se suministran dichos datos de manera secuencial (es decir, siguiendo el orden de sub-actividades) y con un número al comienzo que indica a qué sub-actividad pertenecen dichos datos.

- Finalmente se presentan algunos comentarios sobre la actividad, tales como su interés, fuentes de información y recursos a emplear.

3.3. Tareas no presenciales

Las tareas no presenciales no siempre se asignan para la clase siguiente. Se ha tratado de dar al alumno el suficiente tiempo para realizarlas. En su planificación se ha tenido en cuenta además la realización de un examen de nuestra asignatura en la semana 9 y de dos exámenes de otras dos asignaturas programados para las semanas 10 y 11 este curso.

3.4. ¿Por qué no se realiza un test de conocimientos previos?

Las actividades se han seleccionado teniendo en cuenta no sólo el tema a tratar, sino el momento del curso en el que nos encontramos, los exámenes de otras asignaturas, etc. De esta manera no se realizará un test de conocimientos previos, que de otra manera sería interesante, porque para la semana 10 del curso ya hemos realizado dos exámenes (además de tests en los laboratorios), que son parte de la nota final: uno en la semana 5 y otro en la 9, por lo que el profesor conoce el nivel de los alumnos.

3.5. Grupos: criterios para formarlos y roles

Formación de grupos

En principio se formarán grupos de tres alumnos. Mi experiencia previa durante tres años indica que este es el mejor número para ayudar al éxito del trabajo en equipo. Por otra parte, la bibliografía consultada así lo indica también.

Los grupos los formará el profesor. La experiencia previa también me indica que es esto lo que los alumnos prefieren en general. Sin embargo, si los alumnos tienen alguna sugerencia al respecto se tratará de tenerla en cuenta. Los criterios a seguir serán:

- En primer lugar el grupo/subgrupo de origen de los alumnos. Dado que el proyecto va a implementarse en un grupo de inglés, al que acuden alumnos de diversos grupos de euskera y castellano, se considera éste un criterio importante para que puedan tener horas libres comunes para reunirse.
- A continuación se tratará de que el grupo sea heterogéneo. Atendiendo a los resultados de los exámenes previos, se tratará de que en cada grupo haya alumnos con diverso nivel de conocimiento.

- Si algún alumno tuviera una causa para querer cambiarse de grupo se le permitirá hacerlo si fuera posible.

Para algunas tareas presenciales el profesor puede decidir trabajar con grupos informales (el alumno trabaja con quien tiene al lado) o hacer intercambio de personas en los grupos.

Roles

Como parte de la familiarización con el trabajo en equipo, se hablará a los alumnos de los roles de Belbin. Dada la escala de este trabajo y el número de personas por grupo no se asignarán formalmente roles a los alumnos. Sin embargo sí debe haber una persona asignada a cada uno de los siguientes roles:

- **Coordinador:** se encargará de velar por el buen funcionamiento del equipo y el cumplimiento de los objetivos. Establecerá las fechas de las reuniones tras oír a los componentes del grupo, llevará un registro de las decisiones tomadas y del trabajo a realizar para la siguiente reunión.
- **Finalizador:** revisará los documentos completos con el fin de asegurar la homogeneidad y coherencia del conjunto, así como de que se cumplen los requisitos establecidos. En caso de no ser así, podrá indicar a la persona correspondiente que revise el trabajo que ha realizado.
- **Planificador; portavoz:** establecerá el plan de trabajo definitivo, tras oír a los componentes del grupo. Se encargará del envío de documentos y, en caso de ser necesario, hará de interlocutor con el profesor.

Estos roles afectarán fundamentalmente a la realización del informe y la presentación oral de la semana 14, cuya preparación es no presencial, y para cualquier otra tarea grupal que requiera entregas.

En las clases presenciales el profesor tratará de que todos los alumnos participen y de que unos alumnos no dominen sobre otros.

3.6. Incorporación de los componentes del aprendizaje cooperativo

Interdependencia positiva

La interdependencia positiva significa que la contribución de todos los miembros es necesaria para el éxito de la actividad y viene garantizada por la carga de trabajo, además de por el propio diseño de algunas actividades. En concreto, en varias de las actividades presenciales los ejercicios tienen 3 apartados: a), b), c), y están diseñados para ser realizados empleando la

técnica del puzzle, de manera que en el tiempo dado cada alumno deba hacer sólo uno de ellos (en principio); pasado un tiempo debe exponer su ejercicio a los demás componentes del grupo, tanto si lo ha realizado con éxito como si ha tenido dudas; en ese caso sus compañeros deben ayudarlo a terminarlo, de manera que al final de la actividad todos los grupos deben tener el ejercicio completo terminado. Si no fuera así, en la puesta en común y discusión en la clase se resolverían el resto de las dudas; previamente a esto, dependiendo de cómo se desarrolle el ejercicio concreto en la clase y del tiempo disponible, el profesor puede decidir hacer “reunión de expertos”. Cada apartado a), b),c) está diseñado de manera que surja una duda, caso, situación, etc diferente.

Exigibilidad individual

Cada alumno responderá individualmente de su aprendizaje de dos maneras:

- En la realización de pruebas de evaluación individuales (examen, cuaderno individual).
- En las exposiciones orales y entrega de informe, en las que todos los alumnos han de exponer y ser capaces de responder a las preguntas del profesor.

Además de lo anterior, los alumnos realizarán en varios momentos del proceso y al final del curso una evaluación del trabajo en equipo, en la que evaluarán a los diferentes miembros del grupo. La nota del trabajo del grupo se ponderará con la nota media que cada alumno haya recibido, de manera que, suponiendo el caso en que un trabajo sea evaluado con un 10, pero uno de los alumnos reciba un 0 por parte de sus compañeros, su nota final sería $0 \times 10 = 0$. Es decir, no podrá aprobar gracias al trabajo de los demás. Si un caso como éste sucediera, el profesor llamará a todos los alumnos (por separado), para que puedan explicar qué ha ocurrido y decidir si realmente el 0 es justo.

Interacción cara a cara

La interacción cara a cara viene garantizada de tres maneras:

- La mayoría de las actividades diseñadas se realizan en grupo en las clases presenciales, por lo que dicha interacción está garantizada.
- En las actividades que han de realizarse en grupo en las tareas no presenciales la interacción será necesaria por el propio diseño y volumen de trabajo asociado a la actividad.
- La elaboración de un trabajo del que han de presentar un informe y hacer una exposición oral. Dicho trabajo, por su volumen, diseño, etc., necesariamente necesita de reuniones y discusiones (al menos así lo indica la experiencia previa de 3 años realizando un trabajo

similar).

Habilidades interpersonales y de trabajo en grupo

Los alumnos deben ser conscientes de la importancia de saber trabajar en equipo y de lo que esto significa. Como se ha indicado en el apartado 3.5, se familiarizará a los alumnos con el trabajo en equipo y su importancia, siendo una habilidad que hoy en día todas las empresas demandan. Se les hará analizar la rúbrica de evaluación del trabajo en equipo en la que aparecen items como “Actitud ante la crítica” o “Siempre hace la tarea que le corresponde”. También se les entregará material que facilite el trabajo en equipo, como una plantilla para las actas de reuniones o ayuda para planificar el trabajo.

A estas alturas del curso, los alumnos ya están acostumbrados a realizar actividades en grupos de 3 en las clases presenciales, por lo que simplemente se trata de concienciarles de que un verdadero trabajo en equipo es mucho más que eso: se trata de que todos luchen por una causa común, aportando lo mejor de sí mismos, y no dejando que los gustos o beneficios individuales dirijan la tarea. Se trata también de que comprendan que todo tipo de tarea y aportación es importante.

Reflexión sobre el trabajo realizado

Con objeto de que los alumnos reflexionen a tiempo sobre la marcha del grupo se les pedirá que hagan una evaluación empleando la rúbrica del trabajo en equipo (ver apartado 8) no sólo al final del proceso (momento en que esta evaluación será sumativa), sino también en dos momentos intermedios; en estos casos, la evaluación será formativa. Dicha evaluación será entregada al profesor.

4. DESARROLLO DEL PROBLEMA: SECUENCIA DE ACTIVIDADES

Se describen a continuación las actividades que se realizarán para trabajar y llegar a resolver el problema estructurante.

4.1. Introducción

En este apartado se realizará un análisis del problema del escenario y se identificarán los objetivos de aprendizaje.

Actividad A.1. Análisis del problema presentado en el escenario

¿Cómo puedo comprimir una imagen?

Lectura y análisis del escenario. Definición de los objetivos de aprendizaje. Puesta en común.

A.1.1	NP	Ind	30'	Lee atentamente el problema del escenario. Supón que eres uno de los tres ingenieros mencionados en el problema; identifica qué necesitarías conocer para intentar resolverlo y apúntalo en una lista.
COMIENZO SESIÓN 1				
A.1.2	P	Grupo (3 als)	25'	Discutid y consensuad los objetivos de aprendizaje que habéis identificado. Puesta en común en la clase.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.1 el alumno se familiarizará con el problema a resolver, e identificará qué necesita aprender para resolverlo, lo que es el primer paso para resolver cualquier problema real.

Conocimientos previos del alumno. Concepto de vector.

Recursos: Ninguno adicional (únicamente el enunciado del problema y a partir de él discusión entre alumnos y con el profesor).

4.2. Valores y vectores propios. Definición, cálculo y propiedades

En este apartado el alumno descubrirá el concepto de valor y vector propio y aprenderá a calcular valores y vectores propios de una matriz cuadrada, tanto manualmente como con ayuda de software (*Mathematica*). También conocerá y aprenderá a emplear algunas de sus principales propiedades.

Actividad A.2. Concepto de valor y vector propio

¿Qué son los vectores propios de una matriz?

Actividades cooperativas: método puzzle para búsqueda y lectura de información y resolución de ejercicios numéricos. Breve exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase.

A.2.1	P	Grupo (3 als) Puzzle.	35'	<p>Indicad si los escalares λ y los vectores \mathbf{v} proporcionados más adelante son un valor propio y un vector propio de las matrices dadas. Justificad la respuesta.</p> <p>Si necesitáis conocer algún concepto previamente identificadlo y buscad la información necesaria para poder resolver los ejercicios.</p> <p>Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).</p>
-------	---	-----------------------------	-----	--

Datos sub-actividades

A.2.1. Indica si los escalares λ y los vectores \mathbf{v} proporcionados son un valor propio y un vector propio de la matriz dada. Justifica tu respuesta.

$$1- A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a) \lambda = 4, & \mathbf{v} = (0 \ 1)^t \\ b) \lambda = 4, & \mathbf{v} = (-1 \ 1)^t \\ c) \lambda = 1, & \mathbf{v} = (-1 \ 1)^t \end{cases}$$

$$2- A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a) \lambda = 0, & \mathbf{v} = (2 \ 1)^t \\ b) \lambda = -6 \\ c) \lambda = 5 \end{cases}$$

$$3- A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a) \mathbf{v} = (1 \ -1 \ 1)^t \\ b) \mathbf{v} = (1 \ 1 \ 1)^t \\ c) \mathbf{v} = (1 \ 1 \ 0)^t \end{cases}$$

$$4- A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a) \mathbf{v} = (1 \ 0)^t \\ b) \mathbf{v} = (0 \ 1)^t \\ c) \mathbf{v} = (2 \ 3)^t \end{cases}$$

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.2 el alumno se enfrenta por primera vez al concepto de valor y vector propio. Entenderá que es una idea sencilla, pero su cálculo no es siempre inmediato. Llegará a la conclusión de que deberemos pensar cómo reescribir la expresión que los define con el fin de encontrar un método para calcularlos.

Conocimientos previos del alumno. Sistemas algebraicos de ecuaciones lineales.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Actividad A.3. Cálculo de valores y vectores propios

¿Cómo puedo calcular los valores y vectores propios de una matriz?

Actividades cooperativas: método puzzle para búsqueda y lectura de información y resolución de ejercicios numéricos. Análisis. Breve exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase.

A.3.1	P	Grupo (3 als) Puzzle	25'	Hallad los valores y vectores propios de las matrices proporcionadas. Si necesitáis conocer algo previamente identificadlo y buscad la información necesaria para poder resolver los ejercicios.
A.3.2	NP	Grupo	1h30'	Finalizad los ejercicios. (Para la próxima clase). Después rellenad las tablas 4.1 y 4.2 proporcionadas más adelante.
COMIENZO SESIÓN 2				
A.3.3	P	Clase	45'	Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).

Datos sub-actividades

A.3.1 Hallad los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$1- a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2- a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

A.3.2 Rellena las siguientes tablas. Discute la respuesta.

Tabla 4.1

	Notación	Definición
Polinomio característico		
Ecuación característica		
Valor propio		
Vector propio		
Multiplicidad algebraica de un autovalor		
Multiplicidad geométrica de un autovalor		
Subespacio propio asociado a un autovalor		

Tabla 4.2

$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots =$	
$\lambda_1 \lambda_2 \dots =$	

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.3 el alumno aprenderá a calcular valores y vectores propios y comenzará a entender la problemática asociada a ellos. Comprobará que podemos tener valores propios repetidos, así como que asociado a cada autovalor no hay un sólo vector propio, sino todo un subespacio vectorial. También conocerá la relación que existe entre la dimensión de dicho subespacio con el número de veces que el autovalor aparece como raíz de la ecuación característica. No sólo los conceptos de valor y vector propio, sino también un dominio en su cálculo y análisis de las distintas casuísticas que pueden presentarse se darán

por supuestos en otras asignaturas de cursos posteriores y son necesarios para una correcta comprensión de las mismas.

Conocimientos previos del alumno. Cálculo de determinantes y de raíces de polinomios. Resolución de sistemas algebraicos de ecuaciones lineales; espacios y subespacios vectoriales (dimensión, ecuaciones, base, independencia lineal).

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Actividad A.4. Propiedades de los valores y vectores propios

¿Qué propiedades importantes tienen los valores y vectores propios de una matriz?

Actividades cooperativas: método puzzle para búsqueda, lectura y análisis de información y resolución de ejercicios. Breve exposición por parte de un grupo.

A.4.1	P	Grupo (3 als). Puzzle	45'	<p>Tratad de demostrar la siguiente afirmación: “cada autovector está asociado a un único autovalor”. (<i>Pista:</i> ved qué ocurriría si suponéis que un autovector puede estar asociado a dos autovalores).</p> <p>Después, consultad la información necesaria para completar la tabla resumen de las propiedades de los valores y vectores propios (tabla 4.3) y resolved los ejercicios indicados.</p> <p>Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).</p>
A.4.2	NP	Ind	1h30'	<p>Repaso: resuelve los ejercicios indicados. Realiza una autocorrección de los mismos empleando las soluciones proporcionadas. (Para lunes próxima semana)</p>

Datos sub-actividades

A.4.1. Tabla 4.3. Propiedades de los valores y vectores propios

Cada autovector está asociado a	
Vectores propios asociados a valores propios distintos son	
Los autovalores de una matriz diagonal son	
Los autovalores de una matriz triangular son	
La relación entre la multiplicidad algebraica y la geométrica es:	

Ejercicios.

1- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a) Se sabe que $A \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 9 \\ -36 \end{pmatrix}$. Entonces, también es posible que $A \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Los autovalores de A son 2 doble y 0.

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Los autovalores de A son 2, 1 y 3 todos ellos simples.

2-Responde a la siguiente cuestión empleando únicamente los datos suministrados (es decir, no realizar cálculos adicionales): ¿Cuántos vectores propios linealmente independientes tienen las siguientes matrices?:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1=3, m_1=1; \lambda_2=2, m_2=1$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda=0, m_2=3$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \lambda_1=1, m_1=2; \lambda_2=4, m_2=2.$$

A.4.2. 1- Encontrar los valores y vectores propios de las siguientes matrices, e indica cuántos vectores propios linealmente independientes podemos encontrar para cada matriz.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2- Considera la matriz $M = \begin{pmatrix} \alpha & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde α y $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. Encontrar los valores y vectores propios de M .

3- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} a & -1 & d \\ b & 0 & e \\ c & 1 & f \end{pmatrix}$ encontrar a, b, c, d, e, f , si se sabe que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ son vectores propios de } B.$$

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.4 el alumno conocerá algunas de las propiedades importantes de los valores y vectores propios, las cuales son necesarias para resolver los problemas que aparecen en la vida real relacionados con dichos conceptos.

Conocimientos previos del alumno. Resolución de sistemas algebraicos de ecuaciones lineales; espacios y subespacios vectoriales (dimensión, ecuaciones, base, independencia lineal).

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Actividad A.5. Cálculo de valores y vectores propios con *Mathematica*

¿Cómo puedo obtener los valores y vectores propios de una matriz con ayuda de software?

Aplicación de lo aprendido hasta ahora a un problema abierto (análisis cualitativo, planteamiento de hipótesis, estrategias para resolver y análisis de resultados). Cálculo de autovalores y autovectores con Mathematica. Discusión.

COMIENZO SESIÓN 3				
A.5.1	P	Grupo (3 als)	1h 30'	Lee atentamente el problema expuesto más adelante. En tu opinión ¿qué equipos deberían clasificarse? Contrasta tu respuesta con la de tus compañeros de grupo. Tratad de llegar a un consenso sobre un sistema de clasificación que consideréis justo. Después, dad la clasificación de acuerdo a dicho sistema. Podéis ayudaros del ejemplo numérico proporcionado para esta actividad.
A.5.2	NP	Grupo (3 als). Puzzle.	1h	Empleando <i>Mathematica</i> resuelve los ejercicios indicados.

Datos sub-actividades

A.5.1.

ENUNCIADO DEL PROBLEMA

¿Es justo el sistema de clasificación de la NBA?

En la NBA, los 29 equipos están divididos en dos conferencias, cada una de las cuales está a su vez formada por dos divisiones:

Conferencia Este:

- División Atlántico;
- División Central;

Conferencia Oeste:

- División Medio Oeste;
- División Pacífico,

siguiendo (más o menos) criterios geográficos. Todos los equipos juegan el mismo número de partidos, 82, pero no disputan el mismo número contra cada equipo; lo habitual es que se jueguen más partidos contra los de la propia conferencia.

Acabada la temporada regular 16 equipos se clasifican para las eliminatorias. ¿Cuáles crees que deben ser estos equipos? **Extraído de Fernández (2004)**

Un ejemplo numérico con el que trabajar, basado en 6 equipos y 21 partidos.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	Total victorias
E1	-	3/21	0/21	0/21	1/21	2/21	→ 6/21
E2	3/21	-	2/21	2/21	2/21	1/21	→ 10/21
E3	6/21	4/21	-	2/21	1/21	1/21	→ 14/21
E4	3/21	1/21	1/21	-	2/21	2/21	→ 9/21
E5	2/21	1/21	2/21	4/21	-	2/21	→

						11/21
E6	1/21	2/21	2/21	4/21	4/21	-

→
13/21

Extraído de Fernández (2004)

A.5.2. Empleando *Mathematica* calculad los valores y vectores propios de las matrices de la sub-actividad A.3.1-apartado 2:

$$a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Interpretad los resultados obtenidos.

¿Qué habiáis hecho si *Mathematica* no dispusiera de comandos diseñados para este objetivo específico? Hacedlo con una matriz. Obtened la “forma” de los vectores así como una base de cada subespacio propio.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.5 el alumno resolverá un problema abierto empleando los conceptos aprendidos hasta el momento, lo que contribuirá a desarrollar habilidades relacionadas con el método científico. Aprenderá una nueva aplicación de los valores y vectores propios. Por otra parte, al hacerlo surgirá la necesidad de emplear software para hallar los valores y vectores propios de una matriz, dado que el orden de la matriz con el que trabajarán hace inviable calcularlos manualmente. Son los alumnos quienes buscarán si el programa *Mathematica* (o cualquier otro que decidan emplear) dispone de comandos adecuados para ello o han de “programar” ellos mismos el método, empleando los conocimientos adquiridos, práctica ésta que les será de utilidad para otros problemas y programas en general.

Conocimientos previos del alumno. Cálculo de determinantes y resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones con *Mathematica*.

Recursos: *Mathematica*. Artículos recomendados en la bibliografía.



Problema adicional. Tras terminar esta actividad debéis diseñar un problema de ordenamiento cuya solución venga dada a través del cálculo de valores y vectores propios de una matriz. Después entregadlo a otro grupo para que lo resuelva; este grupo, tras encontrar la solución, nuevamente entregará el problema al grupo que lo diseñó para que lo evalúe. Finalmente este trabajo formará parte de las presentaciones que deberéis realizar en la semana 14 del curso (ver actividad A.13-2).

4.3. Diagonalización de matrices

En este apartado el alumno comprenderá la importancia de que una matriz de orden n tenga asociados n vectores propios linealmente independientes.

Actividad A.6. Diagonalización de matrices.

¿Qué significa diagonalizar una matriz cuadrada? ¿Podemos diagonalizar siempre una matriz?

Búsqueda de información. Resolución de ejercicios. Discusión. Breve exposición del profesor.

COMIENZO SESIÓN 4				
A.6.1	P	Ind.	15'	<p>Toma las anotaciones suficientes para responder las siguientes cuestiones:</p> <ul style="list-style-type: none"> – ¿A qué nos referimos cuando hablamos de diagonalizar una matriz? – ¿Son todas las matrices diagonalizables? – Si no lo son ¿de qué depende que una matriz sea diagonalizable? <p>Después rellena la tabla 4.4 proporcionada más adelante.</p>
A.6.2	P	Ind	30'	<p>Indica si las matrices de la sub-actividad A.3.1 son diagonalizables. En caso de serlo, obtén las matrices D y P tales que $D=P^{-1}A P$. Entrega tus resultados a un compañero de tu grupo para que corrija tus respuestas.</p> <p>Al terminar, responde a las siguientes cuestiones: para una matriz dada ¿es P única? ¿es D única?. Puesta en común.</p>
A.6.3	NP	Ind.	1h30'	<p>Resuelve los ejercicios indicados. Realiza una autocorrección de los mismos empleando las soluciones proporcionadas.</p>

Datos sub-actividades

A.6.1. Tabla 4.4. Condiciones para que una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ sea diagonalizable

Condición	Enunciado
Una condición necesaria para que A sea diagonalizable es	
La condición necesaria y suficiente para que A sea diagonalizable es	
Una condición suficiente para que A sea diagonalizable es	

A.6.2. Matrices de la sub-actividad A.3.1:

1- a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2- a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

A.6.3. 1- Analiza si las siguientes matrices son diagonalizables y encontrar, en caso de ser posible, dos matrices D y P tales que $D = P^{-1} A P$.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

2- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$ discutir las condiciones que deben cumplir

a, b, c, d, e y f para que la matriz A sea diagonalizable.

3- Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donde α y $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$. ¿En qué casos

es A diagonalizable?

4- a) Como has comprobado, la matriz del ejercicio 1c) es diagonalizable. Halla A^{100} .

b) Como has comprobado en la actividad A.6.2 la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -6 \\ 6 & 3 & 10 & 3 \\ -6 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

es diagonalizable. Calcula $|A^{10}|$.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad los alumnos aprenderán a diagonalizar matrices por semejanza. Asimismo aprenderán a identificar cuándo es imposible diagonalizar una matriz por no poder encontrar el número suficiente de vectores propios linealmente independientes. También comprenderán algunas de las ventajas de poder diagonalizar una matriz.

Conocimientos previos del alumno. Valores y vectores propios de una matriz: definición, cálculo y propiedades.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

4.4. Caso especial de las matrices simétricas reales

En este apartado el alumno comprenderá algunas de las ventajas que supone el que la matriz que define un cierto problema sea simétrica. En concreto, se trabajarán estas ventajas desde el punto de vista de los valores y vectores propios y el problema de la diagonalización. Precisamente son estas propiedades que se van a ver las que nos permitirán resolver el problema estructurante.

Actividad A.7. Matrices simétricas reales: valores y vectores propios. Diagonalización por semejanza ortogonal.

¿Qué ventajas tiene una matriz simétrica en lo que se refiere a los valores y vectores propios? ¿Qué implicaciones tienen las propiedades anteriores en cuanto a la posibilidad de diagonalizar una matriz simétrica real, o de hacerlo de “manera especial”?

Búsqueda de información. Discusión.

A.7.1	P	Grupo (3 als)	10'	Tomad las anotaciones necesarias para completar la tabla 4.5. ¿Podemos enunciar las dos primeras propiedades con otras palabras?. ¿Qué consecuencias tiene cada propiedad desde el punto de vista de poder diagonalizar una matriz simétrica real?
A.7.2	P	Grupo (3 als) Puzzle	35'	Resolved los ejercicios indicados más adelante. Identificad qué necesitaríais saber para terminar el ejercicio. Puesta en común en la clase.

Datos sub-actividades

A.7.1.

Tabla 4.5. Propiedades de los valores y vectores propios de una matriz simétrica real A

El polinomio característico de A tiene n raíces	
La multiplicidad geométrica de cada autovalor es igual a	
Autovectores asociados a autovalores distintos son	

A.7.2. ¿Son las siguientes matrices diagonalizables? En caso de serlo,

1- encontrar una matriz P tal que $D = P^{-1} A P$

2- encontrar una matriz P ortogonal tal que $D = P^{-1} A P$

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad c) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad el alumno conocerá cómo quedan enunciadas algunas propiedades de los valores y vectores propios en el caso de una matriz simétrica real, así como las consecuencias que esto tiene desde el punto de vista de la diagonalización. Son estas propiedades las que se emplearán para resolver el problema estructurante.

Conocimientos previos del alumno. Valores y vectores propios de una matriz: definición, cálculo y propiedades. Matrices simétricas. En principio debería conocerse también el

concepto de ortogonalidad, pero precisamente aquí se trata de dar paso a ese nuevo concepto y así al siguiente tema: producto escalar.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

4.5. Normas

En este apartado el alumno generalizará el concepto de longitud de un vector y aprenderá a calcular la longitud de vectores que no son geométricos. Comprenderá además que hay diferentes “maneras de medir la longitud o tamaño” de un vector y que en ocasiones medirlo con una norma diferente a la euclídea tiene más sentido. Conocerá algunas aplicaciones de estas normas.

Actividad A.8. Concepto de norma

¿Qué se entiende por norma de un vector? ¿Qué se entiende por vectores normalizados?

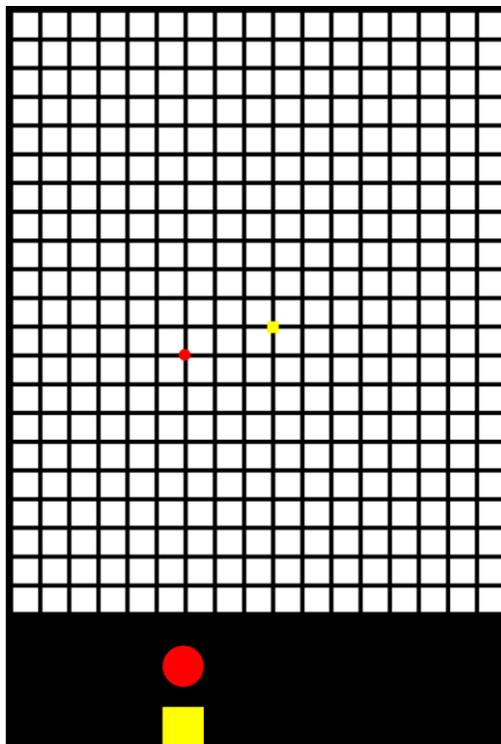
Actividades cooperativas: trabajo en grupo, método puzzle para resolución de problemas. Breve exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase. Búsqueda de información y solución de ejercicios numéricos.

COMIENZO SESIÓN 5				
A.8.1	P	Grupo (3 als).	30'	<p>Discutid las siguientes cuestiones:</p> <ul style="list-style-type: none"> - ¿qué entendéis por longitud de un vector? - ¿qué propiedades debe cumplir una “longitud”? <p>Después resolved el problema presentado más adelante y discutid la respuesta.</p> <p>Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).</p>
A.8.2	P	Grupo (3 als). Puzzle	1h	<p>Resolved los problemas indicados.</p> <p>Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).</p>
A.8.3	NP	Ind	1h30'	<p>Resolved los ejercicios indicados. Después realizad una autocorrección de los mismos empleando las soluciones proporcionadas.</p>

Datos sub-actividades

A.8.1. Para mejorar la atención a sus clientes y ampliar su cuota de mercado una compañía informática ha decidido ofrecer servicio a domicilio, de manera que aquellos clientes que tengan problemas tanto de hardware como de software puedan disponer de ayuda en cualquier momento. Con el fin de que el servicio sea rentable la empresa ha decidido que sus empleados no deberían recorrer una distancia mayor a 500 m. El director de la empresa ha decidido que hay que tomar un plano de la zona y señalar sobre él el área a la que se dará servicio, de manera que éste esté a disposición tanto de empleados como de clientes. Como se puede observar en el plano suministrado más abajo, en el que las líneas representan las calles y los cuadrados blancos manzanas de casas, las calles forman una perfecta retícula. Cada manzana tiene 100 x100 metros cuadrados.

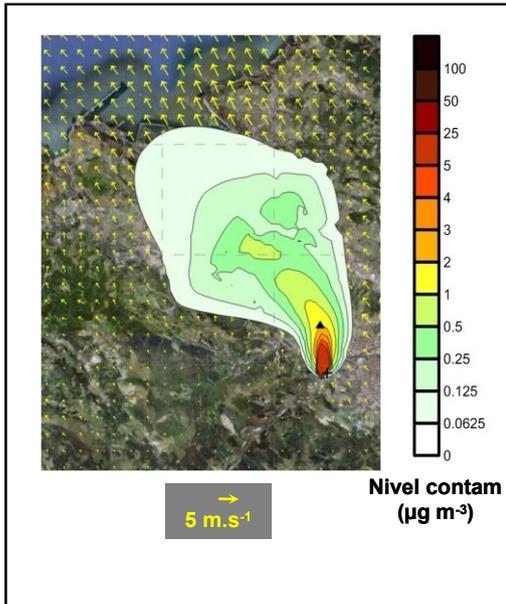
- a) Señalad sobre el plano el área a la que se dará servicio.
- b) Asimismo la dirección ha decidido que cuando haya que dar servicio a un cliente el técnico habrá de ir por el camino más corto. Indicad el camino más corto para ir desde la central hasta el cliente señalado en el mapa.



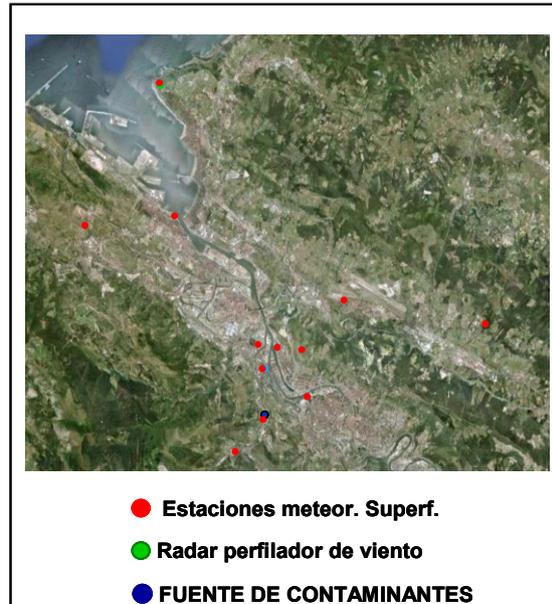
A.8.2.

PROBLEMA 1

La zona del Bajo Cadagua ha venido sufriendo episodios de contaminación durante años. Con el fin de evaluar la calidad del aire en la zona las autoridades han encargado un estudio a una consultoría en el que, entre otras tareas, los ingenieros encargados del mismo deberán emplear un modelo de última generación para simular los posibles impactos de las emisiones de empresas situadas en la zona.



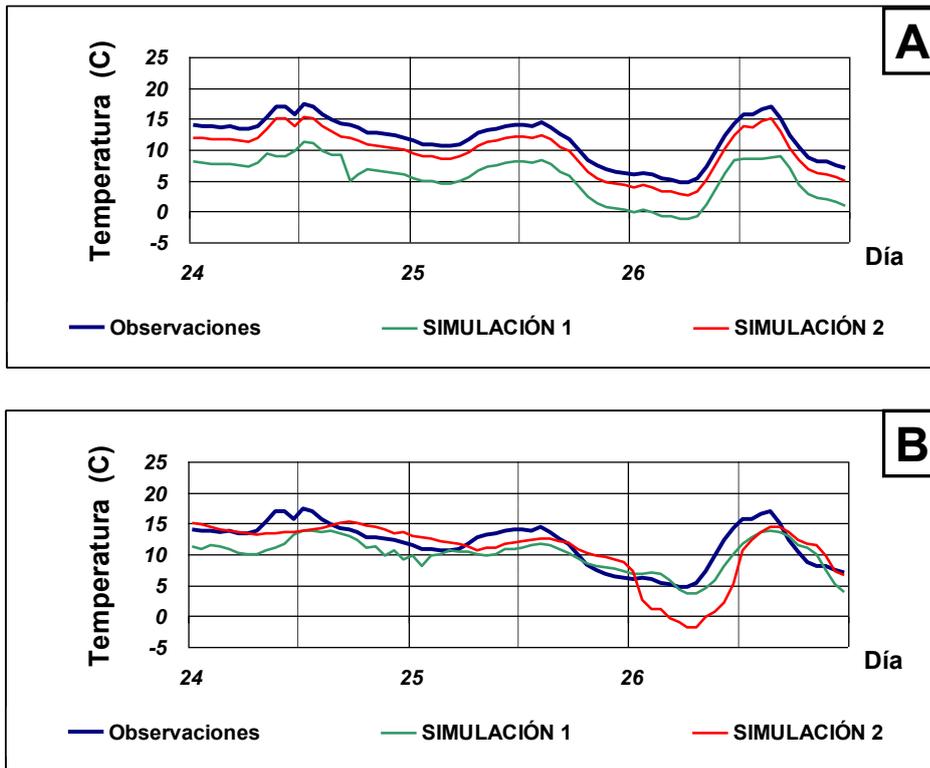
a) Simulación del impacto de una fuente de contaminantes en la zona del Bajo Cadagua.



b) Situación de una selección de estaciones meteorológicas y de calidad del aire en la zona.

Las autoridades han recordado a la empresa que debe seguir las reconocidas como “buenas prácticas” en el uso de modelos de calidad del aire. De este modo, para saber cómo de fiables son los resultados de las simulaciones, deben comparar éstos con datos reales registrados en las estaciones meteorológicas y de calidad del aire de la zona; es decir deben validar dichos resultados, tanto para las simulaciones meteorológicas como para las de dispersión de contaminantes.

La gráficas que se muestran a continuación presentan los datos de temperatura, tanto simulados como observados, en dos estaciones (A y B). En ambas gráficas se presentan los resultados de dos simulaciones distintas. Estas simulaciones corresponden a dos configuraciones distintas del modelo, realizadas dando valores distintos a determinados parámetros que tienen que ser definidos para ejecutar el modelo.

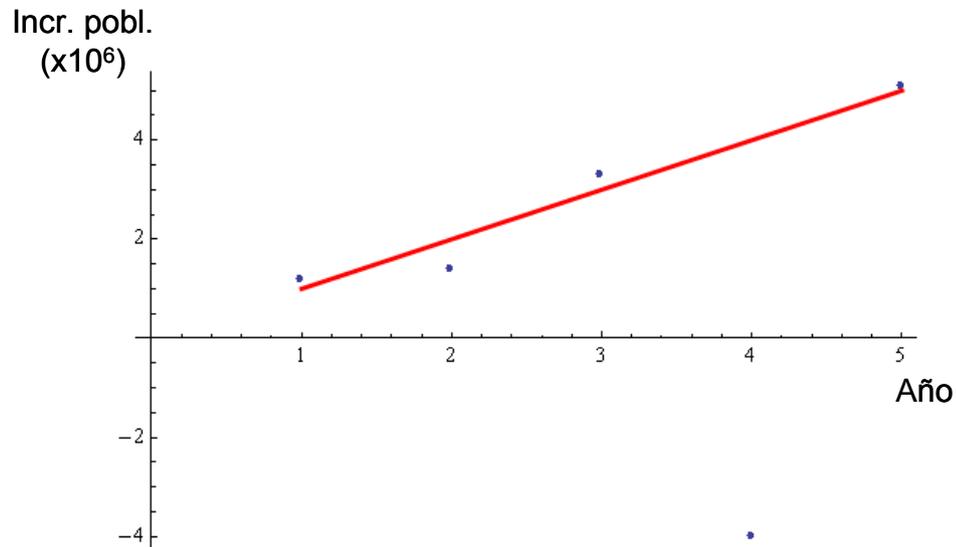


Si tuvieras que basar tu decisión sólo en los datos de la estación A ¿qué simulación crees que es mejor? ¿Y si tuvieras que basarte en la B? ¿Qué crees que se hace en realidad?.

NOTA: en Egela disponéis de una hoja Excel con los datos y las gráficas.

PROBLEMA 2

La siguiente figura representa la evolución de la población de un determinado país en los últimos 5 años. Los puntos azules representan los datos disponibles.

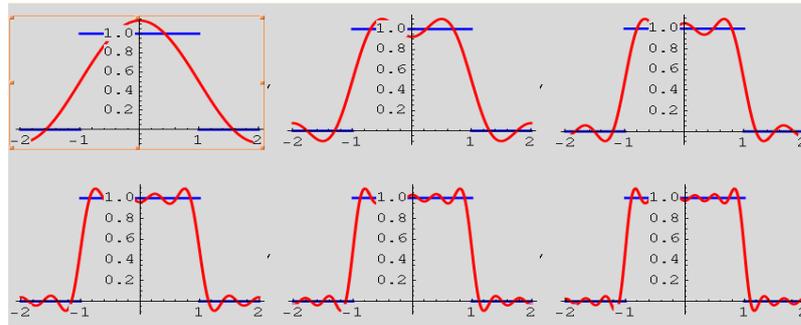


Una empresa desea emplear dichos datos para tener una idea del posible mercado en los próximos 10 años de un producto que desea introducir en el país. Observando los datos, los técnicos de la empresa han deducido que la variación de la población sigue una tendencia lineal, según la recta $y=1.2x$ (línea roja en la figura, donde x representa el año e y el incremento de población), y han deducido que podría estimarse la población futura empleando dicha hipótesis. ¿Crees que es una buena aproximación a la realidad?

NOTA: en Egea disponéis de una hoja Excel con los datos.

PROBLEMA 3

El comportamiento de la corriente en un determinado circuito eléctrico viene dado por la función que se representa en azul en la figura. Las curvas rojas representan distintas aproximaciones a dicha función mediante una serie de Fourier truncada (tomando de 1 a 6 términos). Extrae conclusiones de la figura y obtén y representa aquella aproximación con la que el error cometido sea menor o igual que 0.01.



NOTA: en EgeLa disponéis de una archivo de *Mathematica* con los datos y los correspondientes desarrollos en serie de Fourier.

A.8.3. 1- Indicar qué tres normas se usan habitualmente en \mathbb{R}^n . Calcular la longitud del vector $\mathbf{x} = (-5 \ 3 \ -2)^T$ según cada una de ellas.

En los ejercicios 2 a 4 comprueba si las funciones dadas definen una norma en el espacio vectorial indicado. En caso negativo, indicar todas las propiedades que fallan.

$$2- \text{ a) } \begin{aligned} \|\cdot\|_1: E_{n \times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \|A\| = \det(A) \end{aligned}$$

$$\text{ b) } \begin{aligned} \|\cdot\|_2: E_{n \times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \|A\| = n \cdot \max |a_{ij}| \end{aligned}$$

3- $C[0,1] = \{f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{P} / f \text{ continua}\}$.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: C[0,1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \|f\| = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \end{aligned}$$

4- $C[a,b] = \{f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{P} / f \text{ continua}\}$.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: C[a,b] &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\rightarrow \|f\| = |f(x_1)| + |f(x_2)| + \dots + |f(x_m)| \end{aligned}$$

donde x_1, x_2, \dots, x_m son m puntos de $[a,b]$.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.8 el alumno comprenderá el interés de poder asignar un “tamaño” a todo tipo de vectores, no sólo a los vectores geométricos. También comprenderá que en cada espacio vectorial tenemos diferentes maneras de medir, y qué requisitos debe cumplir una aplicación para que sea una buena manera de medir, así como que la norma a emplear depende de cada aplicación concreta.

El concepto de norma es necesario en muchas aplicaciones en las que se necesitarán vectores normalizados (“longitud unidad”), como en nuestro problema estructurante. Por otra parte, es también necesario al resolver problemas de manera aproximada (lo que ocurre en la mayoría de las ocasiones en problemas reales), en los que buscaremos que la norma de un determinado vector (el vector error) sea mínima o menor que una determinada cantidad. Es también necesario en problemas de optimización y en muchas otras aplicaciones. Por otra parte, el interés de disponer de sistemas de referencia (bases) formados por vectores normalizados no es ajeno al alumno.

Conocimientos previos del alumno. Espacios vectoriales, longitud de vectores geométricos.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

4.6. Producto escalar

En este apartado el alumno generalizará los muy conocidos conceptos de ángulo y ortogonalidad entre vectores geométricos a vectores en general, a través de la generalización del concepto de producto escalar. Asimismo comprenderá la importancia de dicha generalización a través de algunas aplicaciones y aprenderá a obtener bases ortogonales de un espacio vectorial. También aprenderá a representar matricialmente el producto escalar de dos vectores y a emplear dicha expresión matricial.

Actividad A.9. Concepto de producto escalar. Vectores ortogonales

¿Qué se entiende por vectores ortogonales?

Actividades cooperativas: método puzzle para búsqueda y lectura de información y resolución de problemas. Breve exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase. Breve exposición del profesor.

COMIENZO SESIÓN 6				
A.9.1	P	Grupo (3 als).	1h30'	Discutid las siguientes cuestiones: - ¿qué entendéis por vectores ortogonales? - ¿tienen alguna ventaja o propiedad importante? - ¿qué habéis necesitado para definirlos? Después resolved los ejercicios propuestos. Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).
COMIENZO SESIÓN 7				
A.9.2	NP P	Grupo (3 als). Puzzle	2h15' 1h30'	Resolved los problemas indicados. Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).

Datos sub-actividades

A.9.1. Resolved los siguientes ejercicios.

1- En el espacio vectorial P^3 se define la aplicación:

$$f: P^3 \times P^3 \rightarrow P$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

donde $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$, $\mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ y_3)^t$.

a) Estudiar si f define un producto escalar.

b) Dados los vectores $\mathbf{a} = (1 \ -1 \ 1)^t$ y $\mathbf{b} = (2 \ 0 \ 1)^t$ hallar el ángulo que forman.

2- Demostrar que en el espacio vectorial de las funciones reales $x(t)$ continuas en el intervalo $-1 \leq t \leq 1$, la expresión $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-1}^1 t^2 x(t)y(t)dt$ define un producto escalar.

a) Hallar el ángulo formado por los vectores $x(t)=1$ e $y(t)=t$

b) ¿Para qué valor de a serán ortogonales los vectores $x(t)=t+a$ e $y(t)=t-a$?

A.9.2.

PROBLEMA 1

Una ingeniería ha ganado el concurso para el proyecto llave en mano de una nueva incineradora de residuos sólidos urbanos (RSU), de los que se aprovechará su capacidad energética para generar energía eléctrica. Inicialmente la planta se va a dimensionar para poder recibir no sólo los residuos generados en la actualidad en una determinada ciudad, sino también los generados en un plazo de 10 años. Se sabe que en los últimos años la evolución de la población ha sido la siguiente:

Año	1970	1980	1990	2000	2010
Población (millones)	1.8	2.7	3.4	3.8	3.9

Emplea un ajuste mínimo cuadrático para estimar a cuánta población servirá la planta en 2010. Evalúa el error cometido con dicha aproximación.

PROBLEMA 2

La función $f^*(x)$ representa una determinada señal. Para poder hacer un tratamiento más sencillo de dicha señal se desea hallar el polinomio cuadrático que mejor la ajuste en el intervalo $[-1,1]$, siendo

$$f^*(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in [-1,0] \\ 1 & \forall x \in (0,1] \end{cases}$$

Emplea el método de los mínimos cuadrados para encontrar dicho polinomio, y evalúa el error cometido con dicha aproximación.

PROBLEMA 3

La función $f^*(x)$ representa una tensión periódica. Se desea expresarla como una suma de componentes sinusoidales $\{f_j(x) = \sin(j\pi x) \ (j=1, \dots, 5)\}$, para posteriormente calcular la salida del circuito empleando el principio de superposición.

Encuentra la mejor aproximación mínimo cuadrática $f(x)$ en el intervalo $[0,1]$ a la función dada, siendo:

$$f^*(x) = \begin{cases} x & \forall x \in [0,0.5] \\ 1-x & \forall x \in [0.5,1] \end{cases}$$

Evalúa el error cometido con dicha aproximación.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.9 el alumno comprenderá la importancia de la generalización de los conceptos de ángulo y ortogonalidad de vectores a vectores que no son geométricos, a través de la generalización del concepto de producto escalar. Los polinomios ortogonales y funciones ortogonales en general aparecen en muchas aplicaciones prácticas (a través del desarrollo en serie de Fourier, por ejemplo, que los alumnos ya conocen). Por otra parte, el concepto de ortogonalidad nos permite llegar a deducir las ecuaciones normales de la aproximación mínimo cuadrática, la cual aparece en múltiples aplicaciones, como se verá en esta actividad.

Conocimientos previos del alumno. Espacios vectoriales (combinación lineal, subespacio generado por unos vectores, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, normas).

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Problema adicional. Tras terminar esta actividad debéis diseñar un problema de la ingeniería o de la vida real en general cuya solución venga dada a través de un ajuste mínimo cuadrático. Después deberéis entregarlo a otro grupo para que lo resuelva; este grupo, tras encontrar la solución, nuevamente entregará el problema al grupo que lo diseñó para que lo evalúe. Finalmente este trabajo formará parte de las presentaciones que los alumnos deben realizar en la semana 14 del curso (ver actividad A.13-2).

Actividad A.10. Obtención de vectores ortogonales: método de Gram-Schmidt

¿Cómo puedo obtener vectores ortogonales?

Búsqueda y lectura de información y resolución de ejercicios numéricos. Breve exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase.

COMIENZO SESIÓN 8				
A.10.1	NP	Ind	2h15'	Resuelve los ejercicios indicados.
	p		1h30'	Puesta en común en la clase (exposición por parte de los alumnos y discusión y análisis con el profesor).

Datos sub-actividades

A.10.1. Resolved los siguientes ejercicios.

1- En \mathbb{R}^3 se considera el producto de la actividad A.9.1-1:

$$f: P^3 \times P^3 \rightarrow P$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

Halla una base ortonormada respecto de dicho producto.

2- Resuelve el ajuste del problema 2 de la actividad A.9.2 empleando una base ortogonal de los polinomios. Extrae conclusiones.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.10 los alumnos aprenderán a hallar de manera sistemática vectores ortogonales (que posteriormente normalizarán si fuera necesario).

Conocimientos previos del alumno. Producto escalar, ortogonalidad, normas, espacios vectoriales (combinación lineal, bases)



Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Actividad A.11. Expresión matricial del producto escalar

¿Podemos representar de una manera común todos los productos escalares?

Trabajo en grupo para búsqueda y lectura de información y resolución de ejercicios. Exposición de un tema por parte de un grupo al resto de la clase.

COMIENZO SESIÓN 9				
A.11.1	NP P	Grupo (3 als).	2h 1h'	Resolvid los ejercicios indicados. Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor).
A.11.2	P NP	Grupo (3 als). Ind	30' 1h30'	Resolvid los ejercicios indicados. Puesta en común en la clase (exposición por parte de un grupo y discusión y análisis con el profesor). Finaliza los ejercicios.

Datos sub-actividades

A.11.1. Resolvid los siguientes ejercicios:

- 1- Tomando el producto escalar definido en el ejercicio 1 de la actividad A.9.1, hallad su expresión matricial y empleadla para resolver el apartado b) de dicho ejercicio. Emplead dos bases distintas (es decir, realizad el ejercicio dos veces empleando una base diferente en cada caso).
- 2- Tomando el producto escalar definido en el ejercicio 2 de la actividad A.9.1, hallad su expresión matricial y empleadla para resolver los apartados a) y b) de dicho ejercicio. Emplead dos bases distintas (es decir, realizad el ejercicio dos veces empleando una base diferente en cada caso).

A.11.2. Resolvid los siguientes ejercicios:

- 1- Hallad la expresión que relaciona las dos matrices obtenidas en el ejercicio 1 de la actividad A.11.1 y emplearla para obtener una de ellas una vez obtenida la primera.
- 2- Hallad la expresión que relaciona las dos matrices obtenidas en el ejercicio 2 de la actividad A.11.1 y emplearla para obtener una de ellas una vez obtenida la primera.

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad A.11 el alumno comprenderá que cualquier producto escalar puede representarse mediante un producto de matrices y entenderá las ventajas de emplear dicha expresión, relativa a cualquier base del espacio vectorial considerado.

Conocimientos previos del alumno. Espacios vectoriales (bases), producto escalar.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

4.7. Descomposición en valores singulares

Con esta actividad el alumno comprenderá que la información contenida en una matriz (en sus elementos) puede “descomponerse” en piezas de información más pequeñas, las primeras de las cuales son las más relevantes para reconstruir la información global. La descomposición en valores singulares hace uso de los principales conceptos aprendidos en el desarrollo del proyecto (valores propios, ortogonalidad, normas) y les permitirá resolver el problema estructurante.

Actividad A.12. Resolución del problema estructurante

¿Qué podemos hacer si fallan las comunicaciones y necesitamos enviar muchas imágenes como ésta?



Fotografía de Roberto Rosal (<http://www2.uah.es/rosal/News/N002.htm>).

Actividades cooperativas: resolución de un problema en grupo.

COMIENZO SESIÓN 10				
A.12.1	NP	Grupo (3 als).	3h	Resolved el problema estructurante
	p		3h	

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad el alumno aplicará conjuntamente todos los conceptos aprendidos. Comprenderá que cada uno de ellos no es un compartimento “estanco”, sino que en muchas aplicaciones toda la teoría tratada, no sólo durante el proyecto sino durante todo el curso es necesaria. Los problemas actuales son complejos y su solución requiere un conocimiento profundo de distintos conceptos y técnicas, así como un enfoque interdisciplinar de los mismos.

Por otra parte, el alumno conocerá una técnica, la descomposición en valores singulares, que aunque no constituye parte del temario actual está incluida en temarios de otras universidades por su indudable interés en la actualidad. Sus aplicaciones no se reducen sólo al tratamiento de imágenes, y su comprensión deja la puerta abierta al llamado análisis de componentes principales, también empleado en muchas disciplinas en la actualidad.

Conocimientos previos del alumno. Matrices (rango, traspuesta de una matriz), espacios vectoriales, producto escalar (ortogonalidad), normas, valores y vectores propios.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.

Actividad A.13. Informe, exposición oral final y cuaderno del grupo

¿Qué has aprendido con este proyecto?

Presentación escrita y oral del trabajo de grupo.

COMIENZO SESIÓN 12				
A.13.1	NP p	Grupo (3 als).	1h 5'	Entrega de cuadernos (ver descripción abajo).
A.13.2	NP p	Grupo (3 als).	7h 1h30'	Entrega de informe y presentación oral (ver descripción abajo).

Descripción sub-actividades

A.13.1. Organizad un cuaderno/carpeta en la que quede recogido todo el trabajo que habéis realizado, adjuntando las valoraciones (adjuntar rúbricas) de las actividades que hayan sido evaluadas.

A.13.2. Preparad una presentación oral así como el correspondiente informe escrito sobre una aplicación a la vida real o en la ingeniería de los conceptos aprendidos (ver detalles en el apartado 8).

Comentarios sobre la actividad

Interés. Con esta actividad el alumno mostrará por una parte su evolución en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otro lado, mostrará que es capaz de transmitir tanto oralmente como por escrito información, ideas, problemas y soluciones a un público de manera comprensible y bien organizada.

Conocimientos previos del alumno. Espacios vectoriales, producto escalar, valores y vectores propios.

Recursos: apuntes de clase, bibliografía recomendada, Internet.



5. PLANIFICACIÓN TEMPORAL DE LAS ACTIVIDADES

La tabla 5.1 muestra el porcentaje que el proyecto ABP supone respecto del total de la asignatura en cuanto a temario y horas, así como las fechas previstas para su implementación. El ratio horas no presenciales/horas presenciales es de 1.26, inferior al oficialmente establecido de 1.5; se ha dejado este margen en previsión de posibles subestimaciones en la planificación temporal de las actividades.

Tabla 5.1. Porcentaje ABP respecto del total de la asignatura

% del temario	% de las horas presenciales asignatura	Horas del estudiante (P+NP)	Fecha aproximada de implantación
25%	35%	21+26.5	Semanas 10 a 13 del curso

Puede observarse que el proyecto ABP tendrá lugar durante las semanas 10 a 13 del curso. El motivo de esto es doble:

- por una parte se ha tratado de diseñar el proyecto ABP de manera que se trabajen aquéllos temas que en principio parecían más adecuados, los cuales ya se están trabajando en dichas semanas aproximadamente (y no pueden adelantarse, puesto que la asignatura es “secuencial”).
- por otra parte, es en estas semanas del curso cuando tenemos asignados la mayoría de seminarios y laboratorios en los horarios, por lo que pueden emplearse en el proyecto ABP tal y como se pretendía.

Además de esto:

- en la semana 8 del curso tenemos asignado un seminario de hora y media de duración, que podrá emplearse para formar los grupos, familiarizar a los alumnos con el trabajo en equipo, etc.
- en la semana 14 del curso tenemos asignado otro seminario, que se empleará para las exposiciones orales de los resultados de algunas tareas (incluida la solución del problema estructurante).

En la tabla 5.2 se muestra la distribución semanal y por sesión de las actividades a realizar,

junto con las horas presenciales y no presenciales de dedicación del estudiante previstas y la modalidad de las mismas: individual (Ind), grupal (Gr), grupal_puzzle (Gr_P). En las actividades grupales el número entre paréntesis indica el número de alumnos en el grupo. Al comienzo de dicha tabla se ha añadido una actividad que no consta en la descripción detallada de la secuencia de actividades (apartado 4) por estar separada de ellas. Se la ha llamado A0, es presencial y se refiere a la anteriormente comentada clase de la semana 8 en la que se formarán los grupos, etc.

La tabla 5.3 muestra la relación de cada actividad programada con los objetivos de aprendizaje, competencias de la asignatura y resultados de aprendizaje previstos.

Como se ha indicado en el apartado 3.1 en ambas tablas las actividades se han identificado únicamente con su número (salvo las dos primeras y la última), con el fin de que el alumno no conozca de antemano el título de la actividad y pueda así ser él mismo quien identifique el siguiente paso a dar en cada momento. Se ha dejado espacio, sin embargo, para que el alumno pueda ir completando dichas tablas con el título de las actividades realizadas, con objeto de que finalmente disponga de un cronograma completo.

Tabla 5.2. Distribución horaria del ABP por semanas y sesiones (horas de dedicación del estudiante).

SEMANA del curso	SESIÓN	ACTIVIDAD	Tipo (P/NP)	Tiempo	Modalidad
S8	Ss0	A.0 Familiarización con el proyecto, trabajo en grupo, etc	P	1h30'	
S10	Ss1	A.1 Análisis del problema estructurante	NP P	30' 25'	Ind. Gr.(3)
		A.2	P	35'	Gr. (3)-P
		A.3.1, A.3.2	P NP	25' 1h30'	Gr. (3)-P Gr. (3)
	Ss2	A.3.3	P	45'	Clase
		A.4	P NP	45' 1h30'	Gr. (3)-P Ind
	Ss3	A.5	P NP	1h30' 1h	Gr. (3) Gr. (3)-P

(continúa)

Tabla 5.2. (cont.)

SEMANA del curso	SESIÓN	ACTIVIDAD	Tipo (P/NP)	Tiempo	Modalidad
S11	Ss4	A.6	P NP	45' 1h30'	Ind Ind
		A.7	P	45'	Gr.(3) Gr.(3)-P
	Ss5	A.8	P NP	1h30' 1h30'	Gr.(3)-P Ind
S12	Ss6	A.9.1	P	1h30'	Gr.(3)
	Ss7	A.9.2	NP P	2h15' 1h30'	Gr.(3)_P Gr.(3)_P
	Ss8	A.10	NP P	2h15' 1h30'	Ind Ind
S13	Ss9	A.11	NP P	3h30' 1h30'	Gr (3) Gr (3)
	Ss10 Ss11	A.12	NP P	3h 3h	Gr.(3) Gr.(3)
S14	Ss12	A.13 Entrega de informe, exposición oral y cuadernos	NP P	8h 1h35'	Gr.(3) Gr.(3)

Tabla 5.3. Relación de las actividades con los objetivos de aprendizaje (OA), competencias de la asignatura (G) y resultados de aprendizaje previstos (RAA).

ACTIVIDAD	Objetivos de aprendizaje	Competencias de la asignatura	Resultados de aprendizaje
A.0 Familiarización con el proyecto, trabajo en grupo, etc			
A.1 Análisis del problema estructurante	OA1	CA1 CA4	RAA3 RAA4-1
A.2	OA1	CA1 CA2 CA4	RAA1-7 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.3	OA1	CA1 CA2 CA4	RAA1-7 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.4	OA1	CA1 CA2 CA4	RAA1-7 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.5	OA1	CA1 CA2 CA3 CA4	RAA1-7 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.6	OA1	CA1 CA2	RAA1-7 RAA3 RAA4-2 RAA4-3
A.7	OA1	CA1 CA2 CA4	RAA1-7 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.8	OA2	CA1 CA2 CA4	RAA1-5 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3

(continúa)

Tabla 5.3. (cont.)

ACTIVIDAD	Objetivos de aprendizaje	Competencias de la asignatura	Resultados de aprendizaje
A.9	OA3	CA1 CA2 CA4	RAA1-5 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.10	OA3	CA1 CA2	RAA1-5 RAA3 RAA4-2 RAA4-3
A.11	OA3	CA1 CA2 CA4	RAA1-5 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.12	OA1 OA2 OA3 OA4 OA5	CA1 CA2 CA3 CA4	RAA1-5 RAA1-7 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3
A.13 Entrega de informe, exposición oral y cuadernos	Todos	CA1 CA2 CA3 CA4	RAA1-5 RAA1-7 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3

6. SEGUIMIENTO Y EVALUACIÓN

6.1. Introducción

En los siguientes apartados se describe la evaluación que se empleará para el proyecto ABP, enmarcada en la evaluación global de la asignatura. Previamente a ello es conveniente presentar unas reflexiones en cuanto al papel del profesor, del alumno y de la evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, las cuales es importante que el alumno comprenda.

Especialmente en un mundo cambiante como el actual, los conocimientos adquiridos ahora pueden no ser suficientes para resolver los problemas que se presentarán en un futuro. Para afrontar estos últimos necesitaremos tener profesionales que sean capaces de identificar sus propias necesidades de aprendizaje para resolver dichos problemas, de desarrollar las tareas necesarias para adquirir los conocimientos necesarios y de autoevaluar si los han obtenido, para finalmente dar solución al problema. Es por tanto fundamental que el alumno comprenda que el principal protagonista del proceso de enseñanza-aprendizaje es él mismo, siendo el papel del profesor el de guía que le ayudará en el camino, para llegar a formar finalmente personas autodidactas. Se trata así de mostrar no cuánto sabe el profesor, sino de conducir el talento del alumno, dando a éste la oportunidad de desarrollar todo su potencial. Debemos formar alumnos que sean capaces de dirigir su propio proceso de aprendizaje, adecuado a cada circunstancia, estableciendo sus objetivos y evaluando en todo momento si han adquirido los conocimientos necesarios (es decir, si han alcanzado estos objetivos).

En este contexto, es fundamental que en nuestras asignaturas dispongamos de una evaluación que sea no sólo sumativa (asignación de puntos) sino también formativa, haciendo que el alumno comprenda la importancia de esta última. La evaluación formativa es continua, fundamentalmente cualitativa y debe estar orientada a fomentar el crecimiento personal del alumno, proporcionándole de manera continua información acerca del progreso alcanzado. La evaluación formativa sirve también para suministrar tanto al alumno como al profesor la información necesaria sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera que éste pueda ser redirigido por cualquiera de las dos partes en caso necesario. Esta evaluación debe correr a cargo no sólo del profesor, sino también del propio alumno (autoevaluación) o de otros alumnos (co-evaluación), de manera que éstos vayan aprendiendo a evaluar los objetivos alcanzados. Para ello deberán en todo momento plantearse y dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué necesito aprender? (Objetivos de aprendizaje).
- ¿Lo he aprendido?

Es necesario que en esta evaluación los instrumentos empleados sean no sólo uno o varios exámenes, sino también otro tipo de elementos como el debate, portafolios (cuaderno) de los alumnos, resolución de problemas o elaboración de mapas conceptuales, teniéndose en cuenta la progresión en el aprendizaje y no sólo una evaluación final.

Por último, es importante señalar que la evaluación debe ser diseñada de manera que, cumpliendo las premisas anteriormente señaladas en la medida de lo posible, ésta sea sostenible tanto para el profesor como para los alumnos.

6.2. Resumen de la evaluación (instrumentos, porcentajes, evaluadores y temporalización)

En este proyecto gran parte de las tareas están diseñadas para ser realizadas en grupo en las clases presenciales. El profesor hará un seguimiento tanto de los grupos como de cada alumno mientras trabajan en clase, además de en las puestas en común, al realizar preguntas, resolver dudas, etc.

Tabla 6.1. Instrumentos de evaluación

Instrumento	Temas ABP	Temas No ABP		Total
Exámenes	12% (1 examen temas 3 y 5)	48% (3 exámenes)	Tema 1: 15% Tema 2: 20% Tema 4: 13%	60%
Tests laboratorios		10% (media de 3 ó 4 tests)		10%
Trabajo en equipo (informe y exposición oral)	10%			10%
Trabajo Individual (carpeta)	5%			5%
Carpeta del grupo	15%			15%
	42%	58%		100%

La tabla 6.1 muestra los porcentajes asignados a los distintos instrumentos de evaluación empleados en la asignatura, señalando por separado los temas que serán tratados en el proyecto ABP y los temas no ABP. Puede observarse que el porcentaje de la nota final que corresponderá al trabajo desarrollado en el proyecto ABP será de un 42%. En la tabla 6.2 se muestra la relación

entre los instrumentos de evaluación empleados y los resultados de aprendizaje del proyecto ABP (ver apartado 2.4.2) que se evalúan con ellos, así como quién realizará dicha evaluación.

Tabla 6.2. Relación entre instrumentos de evaluación, resultados de aprendizaje evaluados y evaluadores de los temas ABP

Instrumento	Porcentaje (respecto total asignatura)	Resultados de aprendizaje	Quién evalúa
Examen (individual)	12%	RAA1-5 RAA1-7 RAA4-3	Profesor
Trabajo en equipo (informe y exposición oral)	10%	RAA1-5 RAA1-7 RAA1-8 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3	Alumnos Profesor
Trabajo Individual	5%	RAA1-5 RAA1-7 RAA2 RAA3 RAA4-2 RAA4-3	Autoevaluación Alumnos Profesor
Carpeta grupo	15%	RAA1-5 RAA1-7 RAA1-8 RAA2 RAA3 RAA4-1 RAA4-2 RAA4-3	Alumnos Profesor

La evaluación será tanto individual como grupal. Se proporcionarán al alumno las rúbricas empleadas (ver apartado 8).

Evaluación individual

La evaluación individual de conocimientos será tanto auto-evaluación (A.4.2, A.6.3, A.8.3) como co-evaluación (A.6.1, A.6.2, A.10) y evaluación por parte del profesor, todas ellas con carácter tanto formativo como sumativo.

La evaluación del profesor se realizará a través de un examen (12% de la nota final) y de la carpeta individual del alumno (5% de la nota final). En esta última quedará recogido todo el trabajo individual del alumno, incluyendo las actividades individuales ya sometidas a autoevaluación y co-evaluación, con el fin de que el profesor pueda comprobar las mismas.

Por otra parte, habrá una nota individual del trabajo de grupo/equipo, asignada por el resto de los alumnos del grupo. Esta nota servirá para ponderar individualmente la nota obtenida por el grupo tanto en su carpeta (la cual recoge todas las actividades grupales), como en el trabajo en equipo final (informe y exposición oral).

En la evaluación de los ejercicios escritos se tendrán en cuenta: planteamiento correcto, conocimiento de la teoría relacionada, eficiencia en la resolución, claridad, razonamiento correcto, coherencia, precisión en los cálculos, respuesta correcta.

En la evaluación de las pruebas de laboratorio se tendrán en cuenta: eficiencia, claridad, respuesta correcta, razonamiento correcto.

Evaluación grupal

En cuanto a la evaluación grupal, ésta se compondrá de co-evaluación (A.2, A.3, A.4.1, A.5.1, A8.1-A.8.2, A.9, A.11, A.12, A.13) y evaluación por parte del profesor. El profesor evaluará:

- la carpeta (portafolios) del grupo. En ésta quedará recogido todo el trabajo del grupo e incluirá las co-evaluaciones de los trabajos escritos y exposiciones orales de los grupos durante las clases presenciales, con el fin de que el profesor pueda revisar dichas evaluaciones, así como el trabajo realizado con *Mathematica* en las actividades A.5.2, A.8.2, A.9.2 y A.12.
- el informe y exposición oral realizados por el grupo en la semana 14 del curso (A.13) como resultado final del trabajo realizado en el proyecto ABP, los cuales también serán evaluados por los alumnos.

El propio trabajo en grupo también será evaluado por los alumnos del grupo correspondiente.

La tabla 6.3 muestra una distribución temporal aproximada de la evaluación.

Tabla 6.3. Distribución temporal aproximada de la evaluación

SEMANA del curso	Temas No ABP	Temas ABP
2	Test 1 Laboratorio (media de todos los tests 10%)	
5	Examen escrito Tema 1 (15%) Test 2 Laboratorio	
9	Examen escrito Tema 2 (20%) Test 3 Laboratorio	
10-13		Desarrollo y evaluación continua de tareas (20%)
14		Entrega de informe y exposición oral (10%)
15	Test 4 Laboratorio	
Enero (día de la convocatoria oficial)	Examen escrito tema 4 (13%)	Examen escrito temas 3 y 5 (12%)

6.3. Requisitos para aprobar la asignatura

Es requisito para aprobar la asignatura que los alumnos obtengan una nota media mayor o igual a 5/10, así como una media de al menos 4/10 en cada tipo de instrumento de evaluación presentado en la tabla 6.1. Además, será necesario un mínimo de 3.5/10 en el examen del tema 4, así como en el examen de los temas ABP.

7. FUENTES DE INFORMACIÓN

Recursos básicos:

- Cursos eGela: <http://egela.ehu.es/>
- Apuntes de clase: Profesores de Álgebra-Departamento de Matemática Aplicada: Álgebra. Notas de clase. Disponibles durante el curso via eGela (versiones en español, euskera e inglés).
- *Mathematica for Students*: <https://www.ehu.es/liz/m4s/> (ver instrucciones de instalación en el curso eGela)

Recursos adicionales (todos los libros están disponibles en la biblioteca de la Escuela):

Libros en inglés:

- Lay, D., 2006: *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley, USA.
- Leon, S. J., 2010: *Linear algebra with applications*, Pearson, New Jersey.
- Noble, B., Daniel, J.W., 1988: *Applied linear algebra*. 3th Edition, Prentice-Hall, New Jersey
- Strang, G., 2009: *Introduction to Linear Algebra*, 4th Edition, Wellesley-Cambridge Press.
- Szabo, F., 2000: *Linear algebra. An introduction using Mathematica*, Harcourt Academic Press, San Diego, USA.

Libros en español:

- Lay, D., 2007: *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, Pearson Education, México.
- Noble, B., Daniel, J.W., 1989: *Álgebra Lineal Aplicada*, Ed. Prentice-Hall, New Jersey.
- Strang, G., 2007: *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*, Thomson, México D.F.

En la biblioteca existen versiones previas de algunos de los libros referenciados, que también pueden servir de ayuda.

Artículos seleccionados

- Fernández, P. (2004). El secreto de Google y el Álgebra Lineal. *Boletín de la Sociedad*

Española de Matemática Aplicada, nº 30, pp. 115-141.

Sitios Web:

http://ocw.ehu.es/enseñanzas-tecnicas/introduccion-al-calculo-numerico-y-simbolico-con-mathematica/Course_listing (UPV OpenCourseWare- Una introducción a Mathematica)

<http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010>
(MIT OpenCourseWare- Linear Algebra)

<http://www.wolfram.com/> (página web de *Mathematica*)

<http://www.mathworks.com/> (página web de Matlab)

8. ANEXOS (RÚBRICAS, ACTAS, etc)

Se muestran a continuación las rúbricas de evaluación que se tiene previsto emplear, así como diverso material que ayudará a velar por el correcto funcionamiento del grupo y a controlar el tiempo empleado en las actividades.

CONTROL DEL TIEMPO

La siguiente tabla tiene un carácter meramente informativo y tiene como objetivo que el profesor pueda ir ajustando el diseño de las tareas. Te agradecería que lleves en ella un registro del tiempo dedicado a cada una de las actividades/sub-actividades. El registro de estos tiempos te servirá también para aprender a estimar el tiempo dedicado a tus tareas y por tanto, para aprender a organizar tu trabajo en un futuro.

ACTIVIDAD	TIEMPO NO PRESENCIAL	
	Previsto	Real
A.1.1	30'	
A.3.2	1h 30'	
A.4.2	1h 30'	
A.5.2	1h	
A.6.3	1h 30'	
A.8.3	1h 30'	
A.9.2	2h 15'	
A.10.1	2h 15'	
A.11	3h 30'	
A.12.1	3h	
A.13.1	1h	
A.13.2	7h	

NORMAS DE FUNCIONAMIENTO DEL GRUPO

- 1- Nos comprometemos a asistir a todas las reuniones y a participar en las mismas.
- 2- Nos comprometemos a realizar y presentar con puntualidad nuestra parte correspondiente del trabajo.
- 3- Intentaremos solucionar los posibles conflictos que puedan surgir de la mejor manera posible.
- 4- Nos comprometemos a aceptar y debatir las ideas de nuestros compañeros.
- 5- En caso de que algún miembro del grupo no asista o no traiga su parte hecha más de dos veces será expulsado.
- 6- Mantener un comportamiento inadecuado llevará a la expulsión.
- 7- Nos comprometemos a aceptar y corregir todos nuestros errores.
- 8-
- 9-
- 10-

GRUPO Nº

Nombre y firma de los componentes del grupo (por orden alfabético)

C1: Nombre Firma
C2: Nombre Firma
C3: Nombre Firma

ACTA DE LA REUNIÓN N°

Fecha:	Hora:	Lugar:	Duración:
Número del Grupo:			
Personas ausentes:		Personas Asistentes:	
ASUNTOS TRATADOS :			
PRINCIPALES ACUERDOS ALCANZADOS:			
ASUNTOS PENDIENTES /COMPROMISOS ADQUIRIDOS:			
Fecha de la próxima reunión:	Lugar:	Hora:	

EVALUACIÓN DE UN EJERCICIO NUMÉRICO (RÚBRICA)

EVALUACIÓN DE LA ACTIVIDAD N°

Evaluador:

Alumno evaluado:

EL ALUMNO	SI	NO	NOTAS
Propone diferentes formas de resolución.			
Plantea un método de resolución de manera correcta y argumenta su elección.			
Desarrolla el procedimiento de manera clara y ordenada.			
Justifica razonadamente todo el proceso.			
Presenta soluciones coherentes.			
Obtiene conclusiones lógicas de los resultados.			
Las operaciones son correctas			
Resuelve todas las cuestiones requeridas			
COMENTARIOS			

EVALUACIÓN DE CUADERNOS (RÚBRICA)

Grupo N°

		10 puntos	9-8 puntos	7-6 puntos	5-0 puntos	Nota
Aspectos formales	Incluye todos los aspectos requeridos (reglas del grupo, control del tiempo, actividades, etc.)	Se incluye el 100% de los aspectos.	Se incluye del 99% al 80% de los aspectos.	Se incluye del 79% al 60% de los aspectos.	Se incluye el 59% o menos de los aspectos.	
	Se han realizado todas las actividades	Se han realizado el 100% de las actividades.	Se han realizado del 99% al 80% de las actividades.	Se han realizado del 79% al 60% de las actividades.	Se han realizado el 59% o menos de las actividades.	
	Todas las actividades se realizaron a tiempo	El 100% de las actividades se hicieron a tiempo.	Del 99% al 80% de las actividades se hicieron a tiempo.	Del 79% al 60% de las actividades se hicieron a tiempo.	El 59% o menos de las actividades se hicieron a tiempo.	
Calidad del trabajo	Propone diferentes maneras de resolver el ejercicio/problema.	Siempre (cuando fuera aplicable).	Casi siempre (cuando fuera aplicable).	Pocas veces (cuando fuera aplicable).	Muy pocas veces (cuando fuera aplicable).	
	Plantea un método para resolver el ejercicio/problema de una manera correcta y argumenta su selección.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Desarrolla el procedimiento de una manera clara y organizada.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Justifica (o razona) todo el proceso.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Presenta soluciones coherentes.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Extrae conclusiones lógicas de los resultados.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Los cálculos son correctos.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
	Responde todas las cuestiones requeridas.	Siempre.	Casi siempre.	Pocas veces.	Muy pocas veces.	
TOTAL						

EVALUACIÓN TRABAJO EN EQUIPO (RÚBRICA)

Grupo N°

Evaluador:

Alumno evaluado:

	10 puntos	9-8 puntos	7-6 punto	5-0	NOTA
Asistencia	Asistió al 100% de las reuniones y actividades del equipo.	Asistió de un 99% a un 80% de las reuniones o actividades del equipo	Asistió de un 79% a un 60% de las reuniones o actividades del equipo.	Asistió al 59% o menos de las reuniones o actividades del equipo.	
Puntualidad	Llegó a tiempo al 100% de las reuniones y actividades del equipo.	Llegó a tiempo del 99% al 80% de las reuniones y actividades del equipo.	Llegó a tiempo del 79% al 60% de las reuniones y actividades del equipo.	Llegó a tiempo a un 59% o menos de las reuniones y actividades del equipo.	
Trabajo asignado	Siempre entregó a tiempo el trabajo y sin necesidad de supervisión para ello.	Entregó los trabajos, aunque algunos tarde, y requirió seguimiento.	Entregó sólo algunos trabajos y requirió seguimiento.	Entregó muy pocos trabajos o ninguno, y requirió mucho seguimiento .	
Calidad del trabajo	Las fuentes de información que utilizó fueron variadas. Lo que recopiló tenía relación con el tema y contribuyó a su desarrollo.	Las fuentes que utilizó eran variadas, pero incluyó algunos datos sin relación con el tema. La información se utilizó en el trabajo.	Las fuentes eran limitadas. Los datos tenían relación con el tema pero alguno no estaba al día. Algunas fuentes no se utilizaron.	Las fuentes eran escasas o ninguna, y no contribuyen al tema. La información tiene poca o ninguna relación con el tema principal.	
Contribución	Siempre aportó al logro de los objetivos. Buscó y sugirió soluciones a los problemas.	Casi siempre aportó al logro de los objetivos. Casi siempre buscó y sugirió soluciones a los problemas.	Pocas veces aportó al logro de los objetivos. Pocas veces buscó y sugirió soluciones a los problemas.	No aportó al logro de los objetivos. Muy pocas veces buscó soluciones a los problemas.	
Integración al grupo	Siempre trabajó para lograr las metas, cumplió con las normas y se adaptó a los cambios del equipo.	Casi siempre trabajó para lograr las metas, cumplir con las normas y adaptarse a los cambios	Pocas veces trabajó para lograr las metas, cumplir las normas y adaptarse a los cambios y necesitó ser alentado.	Nunca trabajó para lograr las metas, muy pocas veces cumplió las normas y no se adaptó a los cambios del equipo.	
Destrezas sociales	Siempre demostró habilidad para manejar las relaciones entre los miembros del grupo y trató a sus compañeros con respeto.	Casi siempre demostró habilidad para manejar las relaciones en el grupo y casi siempre trató con respeto a sus compañeros.	Pocas veces demostró habilidad para manejar las relaciones en el grupo y pocas veces trató con respeto a los miembros del equipo.	Nunca demostró tener habilidad para manejar las relaciones en el grupo. Muy pocas veces o nunca estableció trató a sus compañeros con respeto.	
Actitud ante la crítica	Siempre estuvo receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo.	Casi siempre estuvo receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo.	Pocas veces estuvo receptivo a aceptar críticas y sugerencias del equipo.	Muy pocas veces o nunca aceptó las críticas y sugerencias del equipo.	
Actitud al comunicar	Siempre estuvo atento a las opiniones de sus compañeros. Escuchó y habló por igual.	En la mayoría de las ocasiones escuchó y en pocas ocasiones habló.	En la mayoría de las ocasiones habló y en muy pocas ocasiones escuchó.	Siempre habló y muy pocas veces o nunca escuchó a otros miembros del equipo.	
Motivación	Promueve la cooperación y participación entre los miembros del equipo.	Casi siempre promueve la cooperación y participación entre los miembros de equipo.	Pocas veces promueve la cooperación y participación entre los miembros de equipo.	Muy pocas veces o nunca promovió la cooperación entre los miembros de equipo.	
				TOTAL	

DESCRIPCIÓN GENERAL DEL TRABAJO EN EQUIPO

FINAL

Breve descripción

El trabajo consistirá en preparar una aplicación del Álgebra Lineal a la ingeniería o a problemas de la vida real. Como resultado de este trabajo tendréis que hacer una presentación oral (10' de duración) y entregar un informe. Para realizar ambas tareas se os darán más detalles en clase y/o via eGela.

Fechas de entrega

El título del trabajo debe ser enviado al profesor via electrónica una semana antes de la presentación.

La presentación oral tendrá lugar en el seminario de la semana 14 del curso. Tanto el informe como el archivo con la presentación (en caso de existir este último) deben ser enviados vía eGela al profesor para el día anterior a dicho seminario.

Temas

Los temas a trabajar deberán estar relacionados con los temas trabajados en el proyecto ABP, y más en concreto con las actividades A.5, A.8, A.9, A.12 (valores y vectores propios, normas, ajuste mínimo cuadrático, descomposición en valores singulares).

Con objeto de familiarizaros con el trabajo, al finalizar las actividades A.5 y A.9 se os pedirá que diseñéis un problema real en el que se apliquen los conceptos aprendidos y que se lo entreguéis a otro grupo para que lo resuelva. La presentación de la semana 14 podría ser el planteamiento de dicho problema junto con su solución y una breve descripción del marco teórico.

Fuentes de información

Podéis emplear cualquier fuente de información que consideréis apropiada, pero un buen punto de partida sería consultar los libros de Álgebra Lineal referenciados en la bibliografía.

Normas básicas para la redacción del informe escrito

La extensión máxima del informe será de 15 páginas.

Para los títulos debe emplearse letra Times New Roman, 16 puntos.

Para el texto debe utilizarse letra Times New Roman, 12 puntos, interlineado múltiple 1.5.

El informe debe contener al menos:

- Portada con: el título del informe, nombre y apellidos de los autores y fecha.
- Índice con páginas.
- El cuerpo del informe, el cual a su vez debe constar de:
 - introducción
 - marco teórico
 - descripción de la aplicación seleccionada (en su caso problema junto con su solución)
 - bibliografía correctamente referenciada
 - anexos con información adicional (en caso de existir éstos).

Grupo n°:

Puntuación total:

INFORME ESCRITO (RÚBRICA)

	10 Puntos (Excelente-Bien)	5 puntos (Suficiente)	0 puntos (Mal)
Contenido	<p>Muestra una muy buena comprensión del tema. Presenta información compleja y relevante acerca de una variedad de aspectos y/o puntos de vista. Hay evidencias del uso de una variedad de fuentes de información apropiadas. Ideas desarrolladas con buen grado de detalle Ideas bien expresadas con palabras propias. Opiniones e interpretaciones justificadas.</p>	<p>Evidencias de una buena comprensión y reflexión acerca del tema. Presenta información relevante acerca de una variedad de aspectos y/o puntos de vista. Hay evidencias del uso de fuentes de información apropiadas. Ideas desarrolladas con algún grado de detalle. Ideas expresadas con palabras propias.</p>	<p>Evidencia limitada de la comprensión y reflexión acerca del tema. En ocasiones contenido no relevante para el tema. Limitada variedad de aspectos tratada y poca elaboración de las ideas. Mínimo o ningún uso de otras fuentes de información.</p>
Estructura y secuencia de ideas	<p>La estructura es clara y apropiada para el tipo de texto, con el tema introducido de manera clara e interesante. Información ordenada de manera lógica. Conexiones entre ideas explicadas claramente. La conclusión es apropiada, clara y con un impacto adecuado en el lector.</p>	<p>La estructura es clara y apropiada para el tipo de texto, con el tema introducido de manera clara. Conexiones entre ideas explicadas claramente. La conclusión es clara y apropiada.</p>	<p>Se ha dado una estructura limitada al contenido. Tema no introducido. Conexiones entre ideas hechas ocasionalmente.</p>
Notación y uso del lenguaje	<p>Se emplea una muy buena variedad de vocabulario y de estructuras gramaticales. El vocabulario y la notación son apropiados para el tema, el tipo de texto y la audiencia.</p>	<p>Se emplea variedad de vocabulario y de estructuras gramaticales. El vocabulario y la notación son normalmente apropiados para el tema, el tipo de texto y la audiencia.</p>	<p>Se emplea una selección de vocabulario y de estructuras gramaticales limitada. El vocabulario, lenguaje y notación empleados no son siempre apropiados para el tema, el tipo de texto, la audiencia y el propósito.</p>
Gramática, ortografía, puntuación	<p>El lenguaje es preciso y apenas hay errores gramaticales, de ortografía y de puntuación.</p>	<p>El lenguaje es preciso y con muy pocos errores gramaticales, de ortografía y de puntuación.</p>	<p>Varios errores gramaticales, de ortografía y de puntuación, que en ocasiones comprometen el significado.</p>
Bibliografía y otros requisitos de la presentación	<p>Fuentes correctamente referenciadas. Cumple con los requisitos de presentación.</p>	<p>Fuentes correctamente referenciadas. Cumple con casi todos los requisitos de presentación.</p>	<p>Fuentes referenciadas, pero no siempre correctamente. Aborda los requisitos de presentación de manera mínima.</p>

Modificada de rúbrica del Departamento de Educación y Formación del Gobierno del Estado de Victoria (<http://www.education.vic.gov.au>)

PRESENTACIÓN ORAL (RÚBRICA)

TRAIT		10 puntos (Excelente-Bien)	5 puntos (Suficiente)	0 puntos (Mal)
MODO DE PRESENTAR				
DESTREZAS NO VERBALES	CONTACTO VISUAL	Mantiene la atención de toda la audiencia con el uso de contacto visual directo, y apenas consulta notas.	Muestra mínimo contacto visual con la audiencia, y fundamentalmente lee notas.	No mantiene contacto visual con la audiencia; lee la presentación completa de sus notas.
	LENGUAJE CORPORAL	Los movimientos parecen fluidos y ayudan a la audiencia a visualizar las explicaciones.	Pocos movimientos o gestos descriptivos.	No realiza movimientos o gestos descriptivos.
	PORTE	El estudiante parece relajado, seguro de sí mismo, sin cometer errores o con errores menores de los que se recupera rápido.	Muestra cierta tensión, pero ello no anula el contenido. Tiene problemas para recuperarse de los errores.	La tensión y el nerviosismo son obvios; tiene problemas para recuperarse de los errores.
DESTREZAS VERBALES	ENTUSIASMO	Muestra gran entusiasmo acerca del tema durante toda la presentación.	Muestra pocos sentimientos acerca del tema que está presentando.	No muestra interés en el tema presentado.
	CONOCIMIENTO POR PARTE DE LA AUDIENCIA	Aumenta en gran manera el conocimiento y comprensión de la audiencia acerca del tema; convence a la audiencia para que reconozca la validez e importancia del mismo.	Aumenta el conocimiento y comprensión de la audiencia acerca de algunos puntos.	No consigue aumentar el conocimiento y comprensión de la audiencia acerca del tema.
	ELOCUCIÓN	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación fácil de oír. • Pronunciación precisa de los términos. • Velocidad del discurso apropiada. 	<ul style="list-style-type: none"> • En líneas generales la audiencia es capaz de oír, pero en ocasiones el volumen no es adecuado. • Pronuncia los términos de manera incorrecta. • Parece que a veces corre y otras exagera las pausas. 	<ul style="list-style-type: none"> • Es difícil oír la presentación. • El estudiante murmura, pronuncia términos de manera incorrecta. • La velocidad de presentación es demasiado lenta o demasiado rápida.
CONTENIDO/ORGANIZACIÓN				
CONTENIDO	CONTENIDO	<ul style="list-style-type: none"> • La información es completa y correcta. Clara evidencia de investigación. • Ejemplos y hechos adecuados. • Apoya las ideas y conclusiones con evidencias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Emplea recursos pero no son suficientes para la tarea o la componente de investigación es menos evidente que en la categoría excelente. • Suministra ejemplos o hechos flojos, que no apoyan el tema suficientemente. • Incluye escasos datos o evidencias. 	<ul style="list-style-type: none"> • No hay detalles y ejemplos o no están bien elegidos para el tema y la audiencia. No hay evidencias de investigación. • No apoya el tema, o lo hace someramente. • Da insuficiente apoyo a las ideas y conclusiones.
ORGANIZACIÓN	ORDEN	<ul style="list-style-type: none"> • La presentación está bien organizada, con un comienzo, desarrollo y fin. • Hay un claro tema organizador, con ideas principales y transiciones claras. 	El orador pierde el hilo del razonamiento, no sigue el índice propuesto, o intenta hacer conexiones pero no las explica a la audiencia.	La presentación muestra poca organización, el objetivo no está claro, y/o no quedan claras las relaciones y transiciones.
	INTRODUCCIÓN	La introducción es clara e interesante.	La introducción es clara, pero no atrae la atención.	La introducción no está clara o no existe.
	LONGITUD	Longitud adecuada.	El tiempo se ha empleado adecuadamente, pero ha superado ligeramente o no ha llegado al tiempo asignado.	El tiempo no se ha empleado adecuadamente y/o ha superado o no llegado por mucho al tiempo asignado.
PROCEDIMIENTO	GRAMÁTICA / ORTOGRAFÍA	La presentación no tiene errores gramaticales o de ortografía.	La presentación no tiene más de dos errores de ortografía y/o gramaticales.	La presentación tiene más de tres errores de ortografía y/o gramaticales.
	AYUDAS VISUALES /	Ayudas visuales bien preparadas y usadas para hacer la presentación más interesante y significativa.	Ayudas visuales adecuadas, pero no promueven implicación con el material.	Muy poco o pobre uso de ayudas visuales. Tampoco suministran notas.