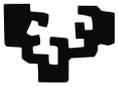
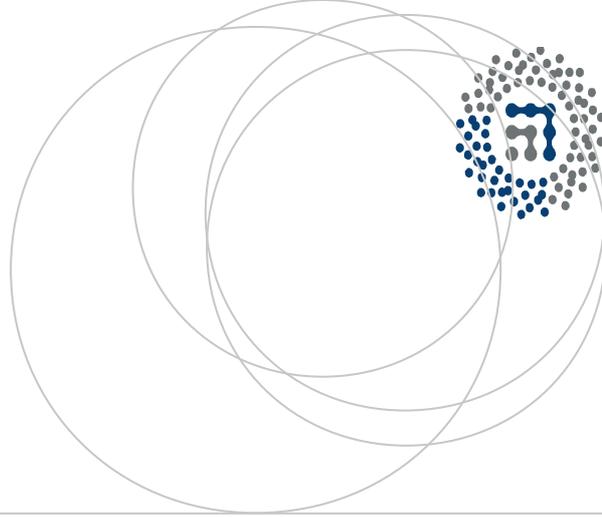


eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



ZTF-FCT

Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología



Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Inestabilidades térmicas: Célula de Bénard

Autor:

Ibon Enbeita Basterrechea

Director/a:

Carlos Santamaría Salazar

Leioa, 22 de junio de 2015

Abstract

En este trabajo se estudia el comportamiento de una lámina de fluido limitada por dos superficies. La temperatura de la superficie inferior es mayor que la de la placa superior. Para pequeños gradientes de temperatura la conducción de calor será suficiente para disipar el calor. Sin embargo, la convección de Bénard, es decir, el movimiento macroscópico de las partículas del fluido, comienza cuando la conducción no es capaz por sí sola de disipar todo el calor debido a un mayor gradiente de temperatura. La consecuencia más notable de la convección es la formación de las llamadas celdas de Bénard. Como se va a demostrar estas solo pueden adoptar determinadas formas geométricas. De hecho, solo pueden ser polígonos regulares y solo serán visibles cuando la diferencia térmica entre las superficies no sea excesivamente grande y el flujo no sea turbulento. Una característica importante de este tipo de sistemas es que las ecuaciones que las rigen no son lineales, y, por tanto, aparece el fenómeno del caos determinista.

Índice general

Abstract	I
1. Introducción y objetivos	1
2. Método de los modos normales	3
3. La célula de Bénard	5
3.1. Historia	5
3.2. El origen de la inestabilidad	5
3.3. Las ecuaciones de movimiento	6
3.4. Aproximación de Boussinesq	8
3.5. El estado básico	8
3.6. La perturbación	9
3.7. Adimensionalización de las ecuaciones	10
3.8. Los modos normales	11
3.9. Resolución del problema para diferentes condiciones de contorno	12
3.9.1. Dos superficies rígidas	12
3.9.2. Dos superficies libres	16
3.9.3. Una superficie libre y otra rígida	17
4. Geometría de los patrones celulares	18
5. Convección de Bénard-Marangoni	26

6. Transición y caos determinista	29
6.1. Comentarios sobre los efectos no lineales	29
6.2. Transición al caos	30
6.3. Modelo de Lorenz para la convección térmica	32
7. Conclusiones	37
A. Demostración de que σ es real para $Ra > 0$	39
Bibliografía	40

Índice de figuras

3.1. Distribución lineal de la temperatura según la ecuación (3.1). T_o corresponde a T_2 en la notación que hemos utilizado en este trabajo. El símbolo Γ representa el gradiente de temperatura. (Extraída del libro <i>Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>)	6
3.2. Celdas formados por la convección de Bénard vistos lateralmente.(Imagen extraída de <i>projectavation.net</i>)	7
3.3. Los primeros modos y su respectivo patrón de flujo.(Extraída del libro <i>Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>)	13
3.4. El número de Rayleigh en función de $K(= kd)$ en el estado marginal.(Extraída del libro <i>Hydrodynamic Instabilities de François Charru cap. 2</i>)	15
3.5. Se representa el número de Nusselt frente al número de Rayleigh medido experimentalmente. La convección empieza a partir del número de Rayleigh predicho por la teoría.(Extraída del libro de Chandrasekhar, <i>Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, cap. 1</i>)	15
4.1. Las líneas de corriente en el plano horizontal para celdas de geometría rectangular.(Extraída del libro de Chandrasekhar, <i>Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, cap. 1</i>)	21
4.2. Las líneas de corriente en el plano horizontal para celdas de geometría cuadrada.(Extraída del libro de Chandrasekhar, <i>Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, cap. 1</i>)	22
4.3. La geometría de la célula.(Extraída del libro de Chandrasekhar, <i>Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, cap. 1</i>)	24
4.4. Las líneas de corriente en el plano horizontal para w constantes. Esta está normalizada en el centro.(Extraída del libro de Chandrasekhar, <i>Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, cap. 1</i>)	24
5.1. Lago de sal secado que ha tomado esta forma debido a la convección de Bénard-Marangoni.(Extraída del libro <i>Fluid Dynamics for Physicists de Faber, cap. 8</i>)	27

6.1. En el espacio de fases de (a) y (b) se representa \dot{X} respecto a X. En el primero el punto P es un atractor. En el segundo, P es un repelidor y las trayectorias son atraídas a un ciclo límite que rodea el punto P. La figura (c) corresponde al diagrama de bifurcación que corresponde a la situación. (<i>Extraída del libro Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>)	31
6.2. Se representa X(t) en función de t. Oscila entre \bar{X} y \bar{X}' sin un periodo determinado. (<i>Extraída del libro Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>)	33
6.3. Todas las condiciones iniciales cercanas son atraídas la estructura pero finalmente divergen. (<i>Extraída del libro Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>).	34
6.4. El diagrama de bifurcación en el que el periodo se dobla a cada valor R_n del parámetro de no linealidad. El caos aparece más allá del punto de acumulación. (<i>Extraída del libro Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11</i>)	35
6.5. Espectros de frecuencias vs la velocidad local para Ra cada vez más altos. La abcisa es lineal en la frecuencia y logarítmica en la ordenada. (<i>Extraída del libro Physical Fluid Dynamics de Tritton, cap. 24</i>)	36
6.6. Dependencia del número de Nusselt con el número de Rayleigh. (<i>Extraída del artículo de B. Castaing, G. Gunaratne et al, Fluid Mechanics, 204</i>)	36

Capítulo 1

Introducción y objetivos

La convección natural en los fluidos en presencia de un campo gravitatorio ocurre normalmente a causa de las diferencias de temperatura y concentración. La convección es un mecanismo clave a la hora de entender la transferencia de calor en la atmósfera, debido a la diferencia de temperatura en las nubes y los vientos generados en la superficie terrestre, el manto, los océanos y en el interior de las estrellas. Por otro lado, este tipo de movimiento de los fluidos tienen también un gran número de aplicaciones en ingeniería. Además, en la investigación básica, los procesos de convección son de suma importancia para estudiar la dinámica del flujo y la transferencia de calor en sistemas como los ya mencionados. No solo eso, si no que, en los últimos años numerosos resultados experimentales y computacionales han demostrado que existe una gran variedad de topologías de flujo y una gran complejidad en los procesos de transferencia. En estos se observan cambios en las estructuras de flujo más o menos estables y dichas estructuras pueden relacionarse con la cantidad de calor transferido entre los puntos más calientes hasta los puntos más fríos.

La convección de Bénard, o de Rayleigh-Bénard, es un tipo de convección que se da en espacios confinados cuando el gradiente de temperatura en el fluido produce una estratificación inestable de la densidad en dirección vertical. El fenómeno de las cavidades calentadas por abajo ha sido ampliamente estudiado debido al interés que tiene al ser la dirección de la gravedad la única preferida del movimiento del fluido.

Decimos que una situación es estable si ésta es estacionaria, es decir, si su evolución a lo largo del tiempo no se ve modificado por una pequeña alteración de sus condiciones iniciales. Utilizando una analogía mecánica, puede decirse que la estabilidad se obtiene cuando una partícula se mueve alrededor de un mínimo de la energía potencial, en el cual se satisface la definición previamente mencionada. Del mismo modo, se dice que una situación es inestable si una ligera alteración de las condiciones iniciales provoca, a su vez, una significativa alteración en la evolución del sistema. Continuando con la analogía anterior, éste es lo que ocurre cuando se trata de un máximo de la energía potencial.

En el caso particular de la dinámica de fluidos, un flujo laminar podrá ser estable bajo pequeñas perturbaciones,

al menos cuando se cumplen ciertas condiciones. Como se verá más adelante, el flujo se mantendrá estable cuando el valor de algunos números adimensionales sean mayores o menores que cierto valor crítico. Si esto no es así, perturbaciones infinitesimales pueden crecer espontáneamente y alterar de forma drástica el flujo original. Sin embargo, a veces las perturbaciones pueden crecer hasta tener cierta amplitud y alcanzar un nuevo estado estacionario. Este puede, otra vez, ser perturbado hasta llegar a un nuevo estado, y así sucesivamente. De este modo, el flujo se convierte en una superposición de unas cuantas perturbaciones que interactúan entre sí, con fluctuaciones caóticas y fases aleatorias. A esta situación se le llama turbulencia.

En lo que sigue, se intentará entender bajo qué condiciones el sistema se vuelve inestable y también como se produce esa transición. Para ello, se estudiará el caso de que las perturbaciones sean infinitesimales, de este modo, las ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido podrán ser linealizadas, omitiendo términos de orden superior, y el tratamiento analítico de las mismas será mucho más fácil. A pesar de todo, la linearización reduce la cantidad de información que puede extraerse del análisis, por lo tanto, sólo se podrá describir el inicio de las perturbaciones y no las etapas posteriores. Así pues, conviene recalcar que la pérdida de estabilidad no contribuye, per se, a la transición turbulenta. Además, en la teoría lineal, un flujo bajo perturbaciones infinitesimales puede ser estable, mientras que puede ser inestable bajo perturbaciones apreciables en la teoría no lineal. Todo este examen se realizará para tres tipos de condiciones de contorno diferentes.

Una vez conocido el punto de inicio de la inestabilidad se intentará describir la geometría de las células que se forman durante la convección. Se demostrará que las celdas no pueden tener cualquier geometría, si no que estas deben ser cuadrados, triángulos equiláteros o hexágonos regulares. Se verá, también, cuales son las líneas de corriente del fluido para cada caso particular.

A continuación, se hará un breve análisis del experimento original de Bénard en el cual aparecen celdas hexagonales. Aunque él creía que la inestabilidad se debía a la flotabilidad, más tarde se demostró que la principal causa era la variación de la tensión superficial con la temperatura. A esta convección se le conoce con el nombre de Marangoni y es responsable de muchos efectos atmosféricos.

Por último, un estudio de los términos no lineales despreciados hasta el momento dará información acerca de la transición de un flujo laminar a uno turbulento. También, utilizando las ecuaciones de Lorenz se obtienen algunas propiedades características de este tipo de sistemas, y de como se desarrolla el caos en un sistema como este. En particular, se detallarán dos de los modos que existen para llegar al caos: La transición por cascada subarmónica y la transición por régimen cuasiperiódico.

El objetivo de este trabajo no es otro que describir el sistema más simple en el cual la inestabilidad de Bénard surge. Los trabajos de Bénard y, más tarde, Rayleigh sentaron las bases para investigaciones posteriores como, por ejemplo, las inestabilidades que surgen en la célula de Bénard por la presencia de campos magnéticos, tema desarrollado en el libro *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability* por el premio Nobel S. Chandrasekhar.

Capítulo 2

Método de los modos normales

El método que se desarrollará a continuación es el de la estabilidad lineal. Este método consiste en introducir perturbaciones de forma sinusoidal a un estado básico o estado inicial cuya estabilidad se quiere analizar. Al método de análisis que utiliza las componentes de Fourier se le llama método de los modos normales. Una perturbación arbitraria puede ser descompuesta en un conjunto completo de modos normales. En este método la estabilidad de cada uno de los modos es examinado por separado puesto que la linealidad del problema implica que los modos diferentes modos no interactúan entre sí. Este método lleva a un problema de autovalores.

Consideraremos que el flujo del fluido es paralelo al eje x , y varía a lo largo del eje z . Al fluido que está en reposo se le superpone una perturbación que se extiende en el espacio de esta forma :

$$u(x, y, z, t) = \hat{u}(z) \exp(ikx + imy + \sigma t) \quad (2.1)$$

O, escrita de otra forma:

$$u(x, y, z, t) = \hat{u}(z) \exp(i|\vec{K}|(\vec{K}\mathbf{x} - ct)) \quad (2.2)$$

En estas expresiones $\hat{u}(z)$ es la amplitud compleja, $\vec{K}=(k,m,0)$ es el vector de onda, \mathbf{x} el vector de posición, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ es la tasa de crecimiento temporal y $c = c_r + ic_i$ la velocidad de fase compleja de la perturbación. A pesar de que la expresión aparece en forma compleja, se tendrá en cuenta únicamente la parte real, que es la que tiene un significado físico. Puesto que el fluido se considera infinito en las direcciones x e y , los componentes del vector \vec{K} en estas direcciones deberán ser reales.

Para analizar la inestabilidad del sistema consideraremos el valor de la parte real e imaginaria de σ y de c . Estos valores dependen, en general, de \vec{K} . Si σ_r o c_i son positivos para cualquier valor del número de onda, el sistema es inestable a perturbaciones de ese número de onda. En general,

- Si σ_r o c_i son negativos, el flujo será estable.

- Si $\sigma_r=0$ o $c_i=0$, el flujo será neutralmente estable.
- Si σ_r o c_i son positivos, el flujo será inestable.

Al límite entre la estabilidad y la inestabilidad se le llama el estado marginal. En este caso, tanto la parte real del σ y la parte imaginaria del c son nulas. Existen dos tipos de estados marginales. En el primer caso, donde c_r y σ_i son nulas, el estado marginal se caracteriza mediante un patrón estacionario de movimiento. En el segundo caso, cuando los dos valores previos son no nulos, la inestabilidad se caracteriza por oscilaciones en movimiento de creciente amplitud.

Existe una diferencia importante entre el estado marginal y el estado neutralmente estable pese a que compartan que la parte real del σ y la parte imaginaria de c sean nulas. A pesar de esta similitud, el estado marginal está en el límite entre las soluciones estables e inestables del problema. Esto conlleva que un pequeño cambio en los parámetros que rigen el fluido pueden conducirlo a un régimen inestable.

Capítulo 3

La célula de Bénard

3.1. Historia

En 1897, Henri Bénard fue el primero en estudiar científicamente el fenómeno de la convección en una fina capa de fluido calentada desde abajo. Bénard consiguió celdas de convección hexagonales en espermaceti (aceite de ballena), cuya superficie inferior de hierro estaba sobre agua hirviendo. La parte superior del fluido estaba en contacto con el aire de modo que no se lograba una temperatura uniforme.

Aunque Bénard se dió cuenta de la asimetría en las condiciones de contorno, pensaba que esa era la única forma en que se verían las células convectivas. En sus experiencias, la profundidad de la lámina de fluido era de 1 mm aproximadamente, y la diferencia de temperatura era de 80°C. Las células tomaban la forma de polígonos pero él creía que se podían conseguir células hexagonales uniformes. Pensaba, además, que las células se debían a la flotabilidad.

Más tarde, en 1916, Rayleigh inició los estudios teóricos de la estabilidad del sistema y Pearson en 1958 descubrió que las células realmente se formaban por efecto de la tensión superficial. Normalmente, al caso de la convección por la flotabilidad se le llama Rayleigh-Bénard y a la convección debido a la tensión superficial, Marangoni-Bénard o Marangoni, aunque las dos coexisten.

3.2. El origen de la inestabilidad

La célula de Bénard consiste en una lámina de fluido confinada entre por dos placas horizontales separadas una distancia d y mantenidas a temperaturas constantes T_1 y T_2 ; la placa inferior está a mayor temperatura que la superior, $T_2 > T_1$. Si el gradiente de temperatura es pequeño la transferencia de calor será por conducción. Es decir, se transmitirá calor basado en el contacto directo, sin ningún intercambio de materia. La distribución de

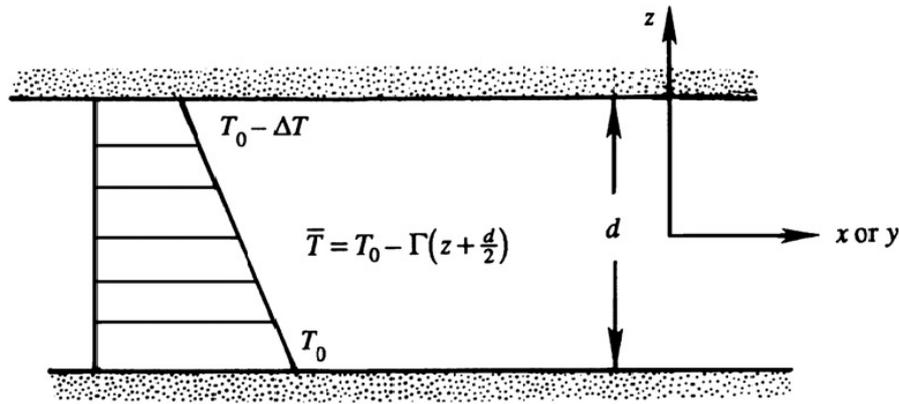


Figura 3.1: Distribución lineal de la temperatura según la ecuación (3.1). T_o corresponde a T_2 en la notación que hemos utilizado en este trabajo. El símbolo Γ representa el gradiente de temperatura. (Extraída del libro *Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11*)

la temperatura puede ser descrita matemáticamente mediante la siguiente relación:

$$T = T_2 - (T_2 - T_1)z/d \quad (3.1)$$

Donde d es la distancia que hay entre las dos placas y z la distancia medida desde la placa inferior (Fig.(3.1)).

En esta situación el gradiente térmico es negativo y el gradiente de densidad es positivo y pueden hacer que esta situación sea inestable. Para estabilizar el sistema, el fluido intenta disipar calor. La conducción térmica y la disipación de energía viscosa ayudan a este fin.

Ahora bien, si el gradiente térmico es el suficiente, la conducción no conseguirá disipar todo el calor. Si eso es así, la transferencia de calor se hará por convección, es decir, las partículas del fluido empezarán a moverse. Mediante este mecanismo las partículas frías de la parte superior descienden y las partículas calientes ascienden, disminuyendo su energía potencial, que se traduce en un incremento de su energía cinética que ayuda al movimiento.

A la convección producida de este modo, debido a la inestabilidad, se le llama convección de Bénard. Una de las características macroscópicas más apreciables visualmente es la formación de celdas de convección (células de Bénard), tal como se muestra en la Fig. (3.2). A continuación se intentará describir el paso entre el régimen conductivo y convectivo.

3.3. Las ecuaciones de movimiento

En la Fig.(3.1) se ha esquematizado la célula de Bénard cuyo comportamiento se intentará describir. Para ello, se tendrán en cuenta las ecuaciones termohidrodinámicas que gobiernan el fenómeno que son las siguientes.

- La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

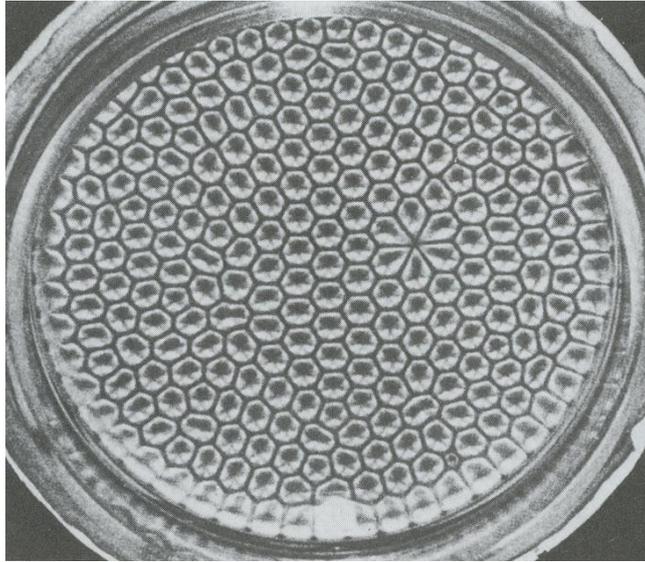


Figura 3.2: Celdas formados por la convección de Bénard vistos lateralmente. (Imagen extraída de *projectavlon.net*)

donde ρ es la densidad del fluido y \mathbf{u} es su velocidad.

- La ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho g - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.3)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad dinámica y g la intensidad del campo gravitatorio.

- Ecuación de conservación de la energía interna:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(C_V T) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla(C_V T) = \nabla(\lambda \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.4)$$

donde C_V es el calor específico a volumen constante y λ es el coeficiente de conductividad térmica.

A estas ecuaciones debemos añadir la ecuación de estado, que relaciona la densidad con la temperatura.

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (3.5)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica ($\alpha = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}$), y T_0 es la temperatura en la cual la densidad del fluido es ρ_0 .

Este es el conjunto de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y fuertemente acopladas que rigen el fenómeno.

3.4. Aproximación de Boussinesq

Para simplificar los cálculos, al conjunto de ecuaciones (3.2)-(3.5) se les aplicará la aproximación de Boussinesq. Esta aproximación es útil cuando el número de Mach del fluido es pequeño, y cuando las diferencias de temperatura, y la escala vertical no son muy grandes.

La primera de las aproximaciones de Boussinesq será suponer que la densidad del fluido no cambia con el tiempo ni con la posición, es decir, que el fluido es un fluido incompresible. Para este tipo de fluidos, la ecuación (3.2) se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.6)$$

Boussinesq sugirió que los cambios de densidad del fluido pueden ser ignorados excepto en el término de flotabilidad, es decir, cuando ρ aparece multiplicado por g , debido a que la densidad cambia en menos de 1% con cambios de temperatura de 10°C. También considera que todas sus propiedades son constantes y que la densidad vale ρ_0 . Se supone que los cambios de densidad se deben a cambios de temperatura y puede obtenerse la siguiente relación a partir de la ecuación (2.3)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -1/\rho_0 \nabla P - g[1 - \alpha(T - T_0)] \hat{z} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.7)$$

Donde α es la razón con la que la densidad cambia con la temperatura, ν es la viscosidad cinemática ($\nu = \mu/\rho$) y \hat{z} es el vector unitario en la dirección de z . Por último, teniendo en cuenta la incompresibilidad del fluido se obtiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \quad (3.8)$$

donde el valor $\kappa = \lambda/(\rho C_V)$ es la difusividad térmica.

La cuarta ecuación (3.5) se mantiene sin ninguna modificación.

3.5. El estado básico

Consideremos ahora un fluido quiescente, es decir, en reposo, con sus correspondientes campos de presión, temperatura y densidad.

Las coordenadas cartesianas que se utilizarán estarán centradas en la mitad de la capa del fluido y se tomará el vertical paralelo al eje z tal y como se muestra en la Fig.(3.1). De estas ecuaciones pueden obtenerse las expresiones que rigen la distribución de la temperatura y de la presión, en el caso del fluido quiescente :

$$\kappa \nabla^2 T = 0 \quad (3.9)$$

$$0 = -1/\rho_0 \nabla P - g[1 - \alpha(T - T_2)] \hat{z} \quad (3.10)$$

La distribución de la temperatura, por tanto, es lineal y si se aplican las condiciones de contorno se obtiene lo siguiente :

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} - \Gamma z \quad (3.11)$$

En la expresión superior, $\Gamma = \frac{T_2 - T_1}{d} = \frac{\Delta T}{d}$.

De la misma forma, se llega a que la presión cambia de forma cuadrática con la altura. Puede verificarse que: $P = P_0 - dg\rho_0 [z/d + \alpha/2(T_2 - T_1)(z/d)^2]$ donde P_0 corresponde al valor de la presión del fluido en la superficie inferior.

3.6. La perturbación

A continuación, se considerarán las desviaciones del flujo básico causadas por la superposición de una perturbación. De este modo, los campos de velocidad, temperatura y presión son los siguientes :

$$\tilde{\mathbf{u}} = 0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

$$\tilde{T} = \bar{T}(z) + T'(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

$$\tilde{P} = P(z) + p(\mathbf{x}, t) \quad (3.14)$$

En la expresión superior, $\bar{T}(z)$ y $P(z)$ representan respectivamente a la temperatura y presión del fluido en reposo. A su vez, $p(\mathbf{x}, t)$ y $T'(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ representan el campo de presión, temperatura y velocidad correspondientes a la perturbación.

Ahora, si se introducen en las ecuaciones termohidrodinámicas los valores de (3.12), (3.13) y (3.14), y se restan las ecuaciones correspondientes al estado básico (3.9) y (3.10) se obtienen las ecuaciones que rigen las perturbaciones en el fluido, que son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -1/\rho_0 \nabla p + g\alpha T' \hat{z} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T' - w\Gamma = \kappa \nabla^2 T' \quad (3.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.17)$$

donde w es el componente z de la velocidad. Para el caso que consideramos, en el que las perturbaciones son pequeñas, linealizar las ecuaciones es una buena forma de conseguir resultados suficientemente precisos, facilitando notablemente los cálculos. Si despreciamos los términos cuadráticos y de orden superior correspondientes

a los términos advectivos las ecuaciones linealizadas son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -1/\rho_0 \nabla p + g\alpha T' \hat{z} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} - w\Gamma = \kappa \nabla^2 T' \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.20)$$

La ecuación (3.18) puede simplificarse aún más de la siguiente manera. Si tomamos el laplaciano de la componente z de la velocidad en la ecuación (3.18) queda de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = -1/\rho_0 \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial z} + g\alpha \nabla^2 T' + \nu \nabla^4 w \quad (3.21)$$

Para poder simplificar el término de la presión en la expresión superior, usaremos la divergencia de la ecuación (3.18) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u} = -1/\rho_0 \nabla^2 p + g\alpha \frac{\partial T'}{\partial z} + \nu \nabla^2 \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.22)$$

Por último, aplicando la ecuación de la incompresibilidad y diferenciando la ecuación anterior con respecto a z se obtiene :

$$0 = -1/\rho_0 \nabla^2 \frac{\partial p}{\partial z} + g\alpha \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \quad (3.23)$$

Restando esto último a (3.21) se llega a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w = \nu \nabla^4 w + g\alpha \nabla_H^2 T' \quad (3.24)$$

donde $\nabla_H^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ es el operador laplaciano horizontal.

Las ecuaciones (3.19) y (3.24) son las que gobiernan la evolución de la perturbación.

3.7. Adimensionalización de las ecuaciones

Antes de resolver el sistema de ecuaciones (3.19) y (3.24) conviene adimensionalizarlas para que estas puedan aplicarse a cualquier fluido, independientemente de sus características. Para ello, se utilizarán las siguientes transformaciones :

$$(x, y, z) = (x^* d, y^* d, z^* d) \quad (3.25)$$

$$t = (d^2/\kappa) t^* \quad (3.26)$$

Las variables de la derecha (con estrella) son las nuevas variables adimensionales.

Si introducimos las nuevas variables en las ecuaciones (3.19) y (3.24) se obtiene :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2}\right)T' = \frac{\Gamma d^2}{\kappa}w \quad (3.27)$$

$$\left(\frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial t^*} - \nabla^{*2}\right)\nabla^{*2}w = \frac{g\alpha d^2}{\nu} \nabla_H^{*2}T' \quad (3.28)$$

De aquí en adelante, se omitirán las estrellas a fin de simplificar la notación al no haber posibilidad de confusión.

En esta ecuación $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ es el número de Prandtl, que relaciona la difusión del momento lineal con la difusividad térmica. La difusividad térmica da cuenta de cuán rápidamente se propaga el calor a lo largo del material por la difusión microscópica y las colisiones con otras partículas. Por el contrario, la difusión del momento da cuenta de como se difunde la velocidad de un fluido. Cuando este número es alto, la forma de transferencia de calor es la convección, mientras que si el número es bajo, la conducción es más efectiva.

Otro número adimensional de interés es el número de Nusselt. Este número relaciona la transferencia de calor por convección con la transferencia de calor por conducción en una superficie. Matemáticamente, puede describirse de la siguiente manera:

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad (3.29)$$

λ es, como antes, la conductividad térmica, L la longitud característica del sistema, y h es el coeficiente de transferencia de calor o coeficiente de convección que viene de la ley del enfriamiento de Newton.

3.8. Los modos normales

Como los coeficientes de las anteriores dos ecuaciones son independientes de x , y , y t , podemos escribir w (la componente z de la velocidad) y T' de la siguiente manera, si consideramos el vector $\vec{K} = (k, l, 0)$, cuyos componentes k y l deberán ser reales, debido a que las oscilaciones son finitas en todo el espacio.

$$w = \hat{w}(z)\exp(ikx + ily + \sigma t) \quad (3.30)$$

$$T' = \hat{T}(z)\exp(ikx + ily + \sigma t) \quad (3.31)$$

Estos modos normales son oscilaciones en las direcciones que no están acotadas. Las ecuaciones (3.27) y (3.28) se transforman en:

$$\left(\sigma + K^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\hat{T} = W \quad (3.32)$$

$$\left(\frac{\sigma}{Pr} + K^2 - \frac{d^2}{dz^2}\right)\left(\frac{d^2}{dz^2} - K^2\right)W = -RaK^2\hat{T} \quad (3.33)$$

Para llegar a estas, se han hecho un cambio de variable, $W = \Gamma d^2 \hat{w} / \kappa$. De esta sustitución aparece el número adimensional de Rayleigh:

$$Ra = \frac{g\alpha\Gamma d^4}{\kappa\nu} \quad (3.34)$$

Este está asociado con la transferencia de calor de un fluido. Para números de Rayleigh altos, el calor se transferirá a través de la convección, pero para números bajos el calor se transfiere por conducción. Normalmente, los fluidos empiezan a transferir calor por convección cuando el número de Rayleigh es mayor que mil.

En el problema de Bénard, para un número de Rayleigh positivo, σ debe ser real¹. En este caso, el estado marginal corresponde a $\sigma = 0$, siendo este estacionario y no conteniendo ondas propagadoras. De este modo el inicio de la inestabilidad supone una transición desde el estado inicial a otro estado estacionario. Suele decirse que el principio de intercambio de las estabildades es válido y que la inestabilidad empieza como una convección en forma celular.

El cálculo siguiente se realizará en el estado marginal. En este estado, las ecuaciones (3.32) y (3.33) se convierten en :

$$(K^2 - \frac{d^2}{dz^2})\hat{T} = W \quad (3.35)$$

$$(\frac{d^2}{dz^2} - K^2)^2 W = RaK^2\hat{T} \quad (3.36)$$

Si eliminamos \hat{T} de las expresiones de arriba, obtenemos:

$$(\frac{d^2}{dz^2} - K^2)^3 W = -RaK^2 W \quad (3.37)$$

Con todo, este es un problema de una ecuación diferencial homogénea de orden seis. Para un \vec{K} dado, una solución no nula solo existe para un determinado valor de Ra . Se trata, por tanto, de un problema de valores propios. También hay que destacar que el número de Prandtl no juega ningún papel en el estado marginal.

3.9. Resolución del problema para diferentes condiciones de contorno

3.9.1. Dos superficies rígidas

Primero, se obtendrán las soluciones de la ecuación (3.37) para el caso de que las dos superficies sean rígidas. En las placas la temperatura asociada a la perturbación, T' , será nula y además no habrá deslizamiento, es decir, las componentes x e y de la velocidad serán también nulas. De la primera condición se obtiene que w debe ser idénticamente nula en los contornos. De la segunda, sabiendo que u y v , las componentes x e y de la velocidad, son nulas para cualquier x e y en los contornos, la derivada de w respecto a z deberá ser nula también.

¹Ver la demostración en el apéndice A.

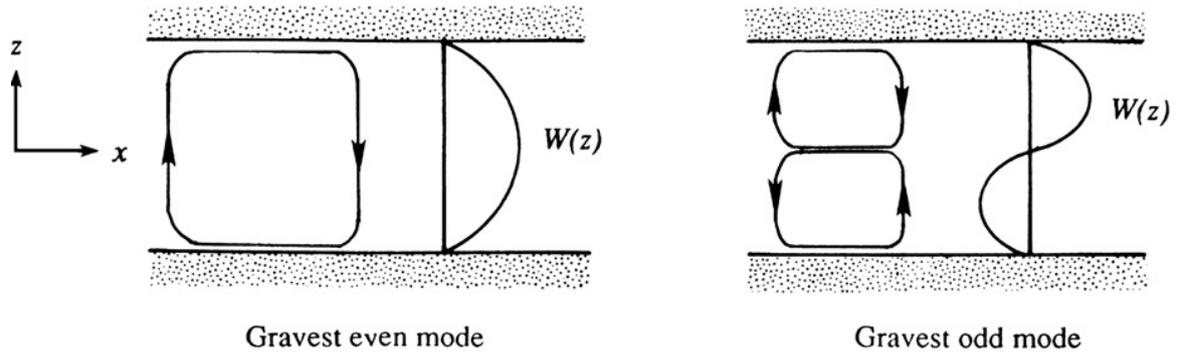


Figura 3.3: Los primeros modos y su respectivo patrón de flujo. (Extraída del libro *Fluid Mechanics* de Kundu, cap. 11)

En consecuencia, podrán escribirse como:

$$w = \partial w / \partial z = T' = 0, \text{ en } z = \pm d/2. \quad (3.38)$$

que adimensionalizadas toman la forma:

$$W = \partial W / \partial z = \hat{T} = 0, \text{ en } z = \pm 1/2. \quad (3.39)$$

O pueden ser escritas de manera equivalente:

$$W = \partial W / \partial z = (d^2/dz^2 - K^2)^2 W = 0, \text{ en } z = \pm 1/2. \quad (3.40)$$

Para determinar por completo la solución hacen falta estas seis condiciones de contorno homogéneas.

Como las condiciones de contorno son simétricas respecto al plano $z=0$, se esperan que las autofunciones, es decir, los resultados de esta ecuación sean de dos clases distintas. Algunas velocidades verticales serán simétricas respecto al plano $z=0$, mientras que otras velocidades verticales serán antisimétricas con respecto al plano $z=0$.

El primer modo par tiene una fila de células, mientras que el primer modo impar tiene dos filas de células, como se aprecia en la Fig.(3.3). El valor mínimo del número de Rayleigh para que la convección empiece se consigue en el modo par. Debido a que los coeficientes de (3.37) no dependen de z , la solución general puede expresarse como una superposición de soluciones de la forma $W \propto \exp(qz)$. Si se introduce este valor en la ecuación (3.37) se llega a lo siguiente:

$$(q^2 - K^2)^3 = -RaK^2 \quad (3.41)$$

Si resolvemos la ecuación anterior para q^2 , los tres valores que se obtienen son estos:

$$q^2 = -K^2 \left[\left(\frac{Ra}{K^4} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad (3.42)$$

$$q^2 = K^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ra}{K^4} \right)^{1/3} (1 \pm i\sqrt{3}) \right] \quad (3.43)$$

Aplicando la raíz cuadrada, una de las soluciones es $i \pm q_o$, siendo q_o

$$q_o = K \left[\left(\frac{Ra}{K^4} \right)^{1/3} - 1 \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

El valor q es la raíz cuadrada de la expresión (3.43):

$$q = \sqrt{K^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ra}{K^4} \right)^{1/3} (1 + i\sqrt{3}) \right]} \quad (3.45)$$

q^* , la compleja conjugada de q , es también una solución de la ecuación.

La solución par de la ecuación (3.37) es una combinación lineal de las soluciones previamente mencionadas:

$$W = A \cos q_o z + B \cosh qz + C \cosh q^* z \quad (3.46)$$

Para determinar las constantes A, B y C se usarán las condiciones de contorno (3.40). Además como W tiene que anularse en las superficies del fluido, derivando se obtienen las siguientes condiciones.

$$dW/dz = -Aq_o \sin q_o z + Bq \sinh qz + Cq^* \sinh q^* z \quad (3.47)$$

$$(d^2/dz^2 - K^2)^2 W = A(q_o^2 + K^2)^2 \cos q_o z + B(q^2 - K^2)^2 \cosh qz + C(q^{*2} - K^2)^2 \cosh q^* z \quad (3.48)$$

Si se aplican estas expresiones en $z = \pm 1/2$, sabiendo el valor de estas es nulo, se puede escribir este sistema de ecuaciones a partir de la construcción de una matriz de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \cos \frac{q_o}{2} & \cosh \frac{q}{2} & \cosh \frac{q^*}{2} \\ -q_o \sin \frac{q_o}{2} & q \sinh \frac{q}{2} & q^* \sinh \frac{q^*}{2} \\ (q_o^2 + K^2)^2 \cos \frac{q_o}{2} & (q^2 - K^2)^2 \cosh \frac{q}{2} & (q^{*2} - K^2)^2 \cosh \frac{q^*}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = 0$$

Si queremos que el sistema de ecuaciones tenga soluciones no nulas, el determinante de la matriz debe ser nulo. Esto nos permite hallar la relación entre Ra y el autovalor K . Los puntos $K(Ra)$ separan las regiones de estabilidad e inestabilidad, como puede observarse en la Fig.(3.4).

El valor mínimo de Ra es $Ra = 1707,762$, cuando $K = 3,117$. Como el sistema permite cualquier valor de K y la perturbación se descompone en un conjunto completo de modos normales, para ese valor mínimo de Ra en el cual el sistema se vuelve inestable. En el 'onset' de la inestabilidad la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi d}{K} \approx 2d \quad (3.49)$$

Como puede observarse en la Fig.(3.5), si Nu es igual a 1 el fluido estará en reposo y cuando Nu es mayor que 1 existirá convección. De dicha figura se desprende que el 'onset' del movimiento ocurre para el valor de Ra

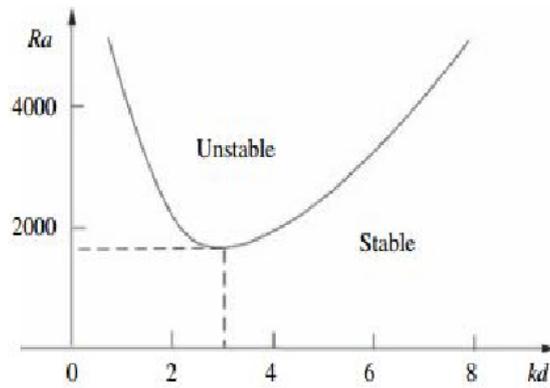


Figura 3.4: El número de Rayleigh en función de $K(= kd)$ en el estado marginal. (Extraída del libro *Hydrodynamic Instabilities* de François Charru cap. 2)

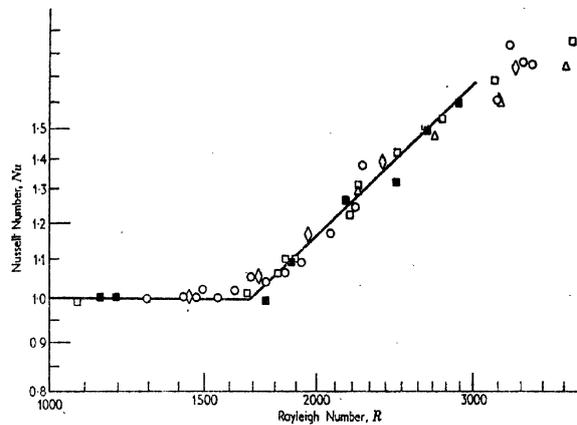


FIG. 14. Silveston's experimental results in the neighbourhood of instability in various liquids (■ silicone oil AK 350; ◇ silicone oil AK 3; □ ethylene glycol; Δ heptane; ○ water). These data consistently indicate that in all of these liquids instability sets in at the Rayleigh number 1700 ± 51 (to be compared with the theoretical value 1708).

Figura 3.5: Se representa el número de Nusselt frente al número de Rayleigh medido experimentalmente. La convección empieza a partir del número de Rayleigh predicho por la teoría. (Extraída del libro de Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, cap. 1)

predicho por la teoría. Se trata, por tanto, de uno de los mayores éxitos de la teoría de la estabilidad lineal.

Por otro lado, la solución impar es dada por:

$$W = A \sin(q_0 z) + B \cos(qz) + C \sinh(q^* z) \quad (3.50)$$

Mediante el mismo procedimiento de antes, es decir, construyendo una matriz con los coeficientes del sistema de ecuaciones que cumplen las condiciones de contorno se llega a lo siguiente: El mínimo del número de Rayleigh es $Ra = 17610,39$ cuando K es igual a 5,365.

3.9.2. Dos superficies libres

Esta solución fue dada primero por Rayleigh. Experimentalmente puede lograrse una situación aproximada si una capa de fluido se encuentra flotando encima de otro fluido más denso.

Estas son las condiciones de contorno :

$$w = T' = \mu(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) = \mu(\partial v/\partial z + \partial w/\partial y) = 0 \quad (3.51)$$

Las primeras dos condiciones se dan por los mismos motivos que en el caso anterior. Las dos últimas condiciones, por el contrario, vienen de que no hay tensión mecánica tangencial en dichas superficies. El tensor de tensiones σ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i) \quad (3.52)$$

Si i y j son distintos solo hay que considerar el segundo término. En este problema, al no haber tensión, $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$. Puesto que w es idénticamente nulo, para todos los x e y , en $z = \pm \frac{1}{2}$ se llega a la conclusión de que $\partial u/\partial z = \partial v/\partial z = 0$. A su vez, si diferenciamos la ecuación de continuidad, ecuación (3.6), se concluye que $\partial^2 w/\partial z^2 = 0$.

Ahora, el problema de autovalores que hay que resolver es igual a la ecuación (3.37), con estas condiciones de contorno adimensionalizadas:

$$W = (d^2/dz^2 - K^2)^2 W = d^2 W/dz^2 = 0 \text{ en } z = \pm 1/2 \quad (3.53)$$

Expandiendo y simplificando las expresiones de (3.54) las condiciones de contorno pueden ser reescritas así:

$$W = d^2 W/dz^2 = d^4 W/dz^4 = 0 \text{ en } z = \pm 1/2 \quad (3.54)$$

Como la sucesiva diferenciación de la ecuación (3.37) muestra que todas las derivadas pares de W deben anularse en el contorno del fluido, las autofunciones deben ser de la siguiente forma:

$$W = A \cos(n\pi z) \quad (3.55)$$

En la expresión superior, A es una constante y n un número entero. Sustituyendo esto en la ecuación (3.37) se llega a que los valores propios cumplen esta relación:

$$Ra = (n^2\pi^2 + K^2)^3/K^2 \quad (3.56)$$

Entonces se ve que para cierto K^2 el primer modo se logra cuando n es igual a uno. El valor crítico para el

número de Rayleigh, es decir, el valor a partir del cual el flujo será inestable se consigue de minimizar el número de Rayleigh con respecto al K^2 .

$$\frac{dRa}{dK^2} = \frac{3(\pi^2 + K^2)^2}{K^2} - \frac{(\pi + K^2)^3}{K^4} = 0 \quad (3.57)$$

Esto significa que el valor crítico de K^2 es, $K^2 = \pi^2/2$, y que la longitud de onda crítica es:

$$\lambda = 2\pi d/K = 2^{3/2}d \quad (3.58)$$

y que el valor de Ra es:

$$Ra = \frac{27}{4}\pi^4 = 657,5 \quad (3.59)$$

3.9.3. Una superficie libre y otra rígida

El problema en el que la superficie superior es libre y la superficie inferior es rígida puede definirse así:

$$(q^2 - K^2)^3 W = -RaK^2 W \quad (3.60)$$

Las condiciones de contorno de este problema son una combinación de las condiciones de contorno de las situaciones anteriores.

$$W = d^2W/dz^2 = d^4W/dz^4 = 0, \text{ en } z = 1/2 \quad (3.61)$$

Y:

$$W = \partial W/\partial z = (d^2/dz^2 - K^2)^2 W = 0, \text{ en } z = -1/2 \quad (3.62)$$

La condición de contorno (3.62) es igual a la que se obtiene en la solución impar para el caso de las dos superficies rígidas, salvo que la distancia entre las superficies es, en este caso, la mitad. De este modo,

$$K = 5,365/2 \approx 2,682 \quad (3.63)$$

$$Ra = 17610,39/2^4 \approx 1100,65 \quad (3.64)$$

De modo que a partir de ese valor del número de Rayleigh el sistema será inestable.

Capítulo 4

Geometría de los patrones celulares

La teoría de la estabilidad lineal determina la longitud de onda inicial en la cual la convección empieza. Sin embargo, esta teoría es incapaz de predecir el patrón de las células que aparecen. Esto se explica por el hecho de que el vector \vec{K} puede descomponerse en dos componentes ortogonales en un número infinito de maneras. Sabemos que si las direcciones horizontales son isótropas las formas de las células serán polígonos regulares, tales como triángulos equiláteros, cuadrados o hexágonos regulares (véase S. Chandrasekhar, pag.43). Que esto debe ser así puede demostrarse aplicando nociones fundamentales de la geometría euclídea bidimensional. Por un lado, sabemos que si n es el número de lados de un polígono los ángulos internos deben valer $\pi(1 - 2/n)$. Este valor tiene que ser, a su vez, 2π partido por un número entero. Este número se denota por m . De esta forma debe verificarse que:

$$1 - \frac{2}{n} = \frac{2}{m} \quad (4.1)$$

Para los valores de n , 3, 4 y 6, las m que se consiguen son, respectivamente, 6, 4 y 3. Es decir, hexágonos, cuadrados y triángulos.

Drazin y Reid observaron en 1981 que la geometría hexagonal es predominante en los inicios y, que para números de Rayleigh más altos, las células tienden a fundirse y adquieren forma de rolo. A medida que el número de Rayleigh crece, las células se vuelven más y más caóticas y la turbulencia empieza a partir de $Ra > 5 \cdot 10^4$.

La teoría de la estabilidad lineal es incapaz de predecir la forma de las células debido a que poco tiempo después del inicio de la convección, debido al crecimiento exponencial, los términos no lineales son lo suficientemente importantes como para no poder despreciarlos.

En el fluido se observan células unidad que se repiten periódicamente. Las paredes de las células son verticales y sus superficies simétricas. En estas paredes el gradiente normal de la velocidad w debe ser nulo. Esta última condición matemáticamente puede escribirse así:

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp})w = 0 \quad (4.2)$$

Siendo:

$$\nabla_{\perp} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, 0) \quad (4.3)$$

La expresión (4.2) es equivalente a decir que la componente horizontal normal a las paredes de la célula es nula.

La componente z de la velocidad puede escribirse como producto de dos funciones de esta manera:

$$w = F(x, y)W(z) \quad (4.4)$$

Para la función F se cumple la condición de que:

$$\nabla_{\perp}^2 F = -K^2 F \quad (4.5)$$

K es el número de onda. Definamos ahora las funciones ϕ , que es el potencial de velocidad de un fluido irrotacional, y ψ , que es la función de corriente de un fluido de divergencia nula. Matemáticamente se definen así:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (4.6)$$

$$\psi = \int (u dy - v dx) \quad (4.7)$$

Estas son dos funciones de la forma que tienen las ecuaciones (2.1) o (2.2). Los componentes horizontales de la velocidad, u y v , pueden escribirse a partir de dos funciones anteriores de la siguiente manera:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.9)$$

Mediante la ecuación de continuidad, pueden relacionarse las tres componentes de la velocidad con las nuevas variables:

$$-\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -K^2 \phi \quad (4.10)$$

También, si definimos $d\xi = \partial_x v - \partial_y u$, que es la vorticidad del fluido, se satisface la siguiente igualdad:

$$d\xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -K^2 \psi \quad (4.11)$$

Por tanto, se puede escribir :

$$u = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + d \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \quad (4.12)$$

$$v = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - d \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad (4.13)$$

De estos resultados también se pueden obtener los valores de las funciones ϕ y ψ .

$$\phi = \frac{1}{K^2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (4.14)$$

$$\psi = -\frac{1}{K^2} d\xi \quad (4.15)$$

Gracias a estos valores pueden reescribirse los componentes horizontales de la velocidad que son estos.

$$u = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \quad (4.16)$$

$$v = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \quad (4.17)$$

Ahora se aplicarán estas ecuaciones para diferentes geometrías, solo las más sencillas, que las células de Benard pueden tener.

Una de las formas que dichas células pueden tomar son los rollos. Estos son estructuras que se alargan infinitamente en una única dirección que por elección tomaremos como y , siendo dependiente de dos coordenadas, la altura z y la coordenada horizontal x . Si seguimos este convenio, la velocidad del fluido no es dependiente de la coordenada y y se puede escribir así:

$$w = W(z) \cos(Kx) \quad (4.18)$$

K es $2\pi/L$. De este modo:

$$u = \frac{1}{K^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = -\frac{DW}{K} \sin(Kx) \quad (4.19)$$

En la expresión superior D es la derivada respecto a z . También se deduce que $v = 0$. Solamente se cumple $u = 0$ cuando x es igual a $\pm nL$ o $\pm(n + 1/2)L$ siendo n un número entero. En estos valores de x , el gradiente normal de w es cero. Por tanto, la anchura es L , la misma que la longitud de onda.

Si suponemos que las células son rectangulares y seguimos el proceso anterior se llega a:

$$w = W(z) \cos(2\pi/L_x x) \cos(2\pi/L_y y) \quad (4.20)$$

Esta es la condición que cumplen L_x y L_y :

$$K^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \quad (4.21)$$

De este modo, las componentes u y v son:

$$u = -\frac{DW}{K^2} \frac{2\pi}{L_x} \sin\left(\frac{2\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{L_y} y\right) \quad (4.22)$$

$$v = -\frac{DW}{K^2} \frac{2\pi}{L_y} \cos\left(\frac{2\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L_y} y\right) \quad (4.23)$$

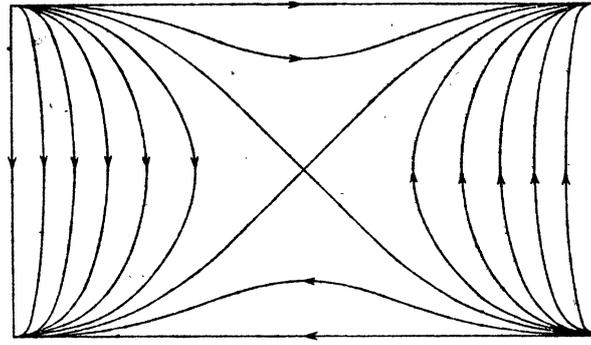


Figura 4.1: Las líneas de corriente en el plano horizontal para celdas de geometría rectangular. (Extraída del libro de Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, cap. 1)

De la ecuación (4.20) se ve directamente que w alcanza estos valores particulares

$$w = W(z), \text{ en } (\pm n L_x, 0), [\pm(n + \frac{1}{2})L_x, \pm \frac{1}{2}L_y], \text{ etc.} \quad (4.24)$$

$$w = -W(z), \text{ en } [\pm(n + \frac{1}{2})L_x, 0], [\pm n L_x, \pm \frac{1}{2}L_y], \text{ etc.} \quad (4.25)$$

$$w = 0, \text{ a lo largo de las líneas, } x = \pm \frac{1}{4}L_x, \pm \frac{3}{4}L_x, \text{ etc.}, y, y = \pm \frac{1}{4}L_y, \pm \frac{3}{4}L_y, \text{ etc.} \quad (4.26)$$

Ahora se verá cuando u y v son nulos:

$$u = 0, \text{ a lo largo de las líneas, } x = 0, \pm \frac{1}{2}L_x, \pm L_x, \text{ etc.}, y, y = \frac{1}{4}L_y, \pm \frac{3}{4}L_y, \text{ etc.} \quad (4.27)$$

$$v = 0, \text{ a lo largo de líneas, } y = 0, \pm \frac{1}{2}L_y, \pm L_y, \text{ etc.}, y, x = \frac{1}{4}L_x, \pm \frac{3}{4}L_x, \text{ etc.} \quad (4.28)$$

De todas estas ecuaciones se deduce también que $\partial w / \partial x = 0$ a lo largo de las líneas en las que u se anula y $\partial w / \partial y = 0$ a lo largo de las líneas en las que v se anula. Como puede verse, las células son rectángulos de lados L_x y L_y . El patrón de movimiento del fluido dentro de la celda está centrado en $x = 0$ y $y = 0$ y acotado por $x = \pm 1/2$ y $y = \pm 1/2$. Este patrón se repite periódicamente. De las expresiones (4.22) y (4.23) se obtiene lo siguiente:

$$L_x u \pm L_y v = -\frac{2\pi}{K^2} DW \sin 2\pi \left(\frac{x}{L_x} \pm \frac{y}{L_y} \right) \quad (4.29)$$

En $\frac{x}{L_x} \pm \frac{y}{L_y} = 0$ y $\pm 1/2$ se llega a:

$$L_x u + L_y v = 0 \quad (4.30)$$

$$L_x u - L_y v = 0 \quad (4.31)$$

Para estos valores, las dos componentes de la velocidad son perpendiculares. En general:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u}{v} = \frac{L_y [\sin(2\pi x/L_x)] [\cos(2\pi y/L_y)]}{L_x [\cos(2\pi x/L_x)] [\sin(2\pi y/L_y)]} \quad (4.32)$$

El comportamiento de las líneas de corriente en un plano horizontal viene representado en la Fig.(4.1). La celda

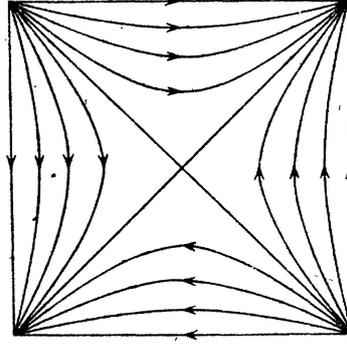


Figura 4.2: Las líneas de corriente en el plano horizontal para celdas de geometría cuadrada. (Extraída del libro de Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, cap. 1)

cuadrada es un caso particular de la celda rectangular en la que $L_x = L_y$. La Fig.(4.2) muestra las líneas de corriente en este caso.

Por último, se intentará analizar las células que tienen geometría hexagonal. En lo que sigue, se presentara la solución de Christopherson (véase S. Chandrasekhar pag.47). Su valor para w es:

$$w = \frac{1}{3}W(z)\left\{2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L\sqrt{3}}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{3L}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{3L}\right)\right\} \quad (4.33)$$

Este valor puede reescribirse así:

$$w = \frac{1}{3}W(z)\left\{\cos\frac{4\pi}{3L}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \cos\frac{4\pi}{3L}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2}\right) + \cos\left(\frac{4\pi y}{3L}\right)\right\} \quad (4.34)$$

O:

$$w = \frac{1}{3}W(z)\left\{4 \cos\frac{2\pi}{3L}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{y}{2}\right) \cos\frac{2\pi}{3L}\left(\frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{4\pi y}{3L}\right) - 1\right\} \quad (4.35)$$

Como se verificará, la longitud L corresponde a la de los lados del hexágono. Sin embargo, primero se demostrará que la solución (4.33) tiene forma sinusoidal para un número de onda K .

$$\nabla_{\perp}^2 w = -\left(\frac{4\pi}{3L}\right)^2 w \quad (4.36)$$

De este modo, $K = \frac{4\pi}{3L}$. A su vez, puede apreciarse la simetría hexagonal de la célula mediante una transformación de coordenadas:

$$x = \omega \cos \theta \quad (4.37)$$

$$y = \omega \sin \theta \quad (4.38)$$

Si se realiza esta transformación en la ec. (4.18) tenemos que el siguiente término se convierte en:

$$\frac{\sqrt{3}x}{2} \pm \frac{y}{2} = \omega \sin(60^\circ \pm \theta) \quad (4.39)$$

Conociendo esto la ec.(4.34) puede reescribirse y expresarse de la siguiente forma:

$$w = \frac{1}{3}W(z)\left\{\cos\frac{4\pi}{3L}(\omega\sin(\theta+60^\circ)) + \cos\frac{4\pi}{3L}(\omega\sin(\theta+120^\circ)) + \cos\left(\frac{4\pi\omega\sin\theta}{3L}\right)\right\} \quad (4.40)$$

Puede verse fácilmente que:

$$w(\omega, \theta) = w(\omega, \theta + 60^\circ) \quad (4.41)$$

Entonces, existe una simetría rotacional de 60° , es decir, al realizar esa rotación con respecto al eje que pasa por el centro de la célula se recupera la original. De esta solución también puede verse que la célula es periódica en las direcciones x e y. Es decir, cumplen la siguiente condición:

$$w(x, y) = w(x + nL/\sqrt{3}, y + 3mL) \quad (4.42)$$

En la ecuación superior n y m son números enteros. Concluimos por tanto, que la longitud de onda de la periodicidad es $\sqrt{3}$ mayor en la dirección y que en la dirección x.

Puede verse que se cumple $w(0) = w(z)$ en las siguientes direcciones:

$$y = \pm\frac{3}{4}L, \quad (4.43)$$

$$x\sqrt{3} + y = \pm\frac{3}{2}L, \quad (4.44)$$

$$x\sqrt{3} - y = \pm\frac{3}{2}L. \quad (4.45)$$

A su vez, se satisface $w = -\frac{1}{3}W(z)$ en estos seis puntos:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L, \pm\frac{L}{2}\right) \quad (4.46)$$

$$(0, \pm L) \quad (4.47)$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}L, \pm\frac{L}{2}\right) \quad (4.48)$$

Las componentes horizontales de la velocidad son:

$$u = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{DW}{3K^2} \frac{4\pi}{L\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi x}{L\sqrt{3}} \cos \frac{2\pi y}{3L} \quad (4.49)$$

$$v = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -\frac{DW}{3K^2} \frac{4\pi}{3L} \left(\cos \frac{2\pi x}{L\sqrt{3}} + 2 \cos \frac{2\pi y}{3L}\right) \sin \frac{2\pi y}{3L} \quad (4.50)$$

De estas dos ecuaciones se sigue que:

$$u = 0, \text{ en } x = 0, \pm\frac{\sqrt{3}L}{2}, \text{ en } y = \pm\frac{3L}{4} \quad (4.51)$$

$$v = 0, \text{ en } y = 0, y \pm \frac{3L}{2} \quad (4.52)$$

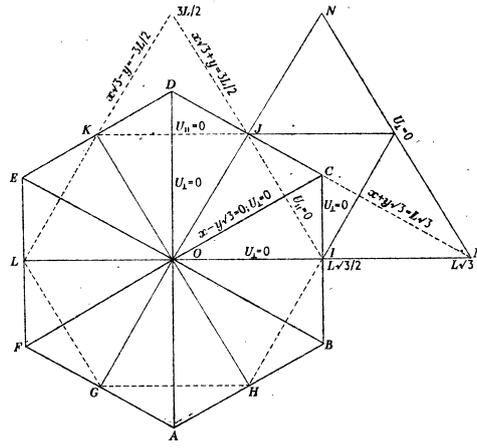


Figura 4.3: La geometría de la célula. (Extraída del libro de Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, cap. 1)

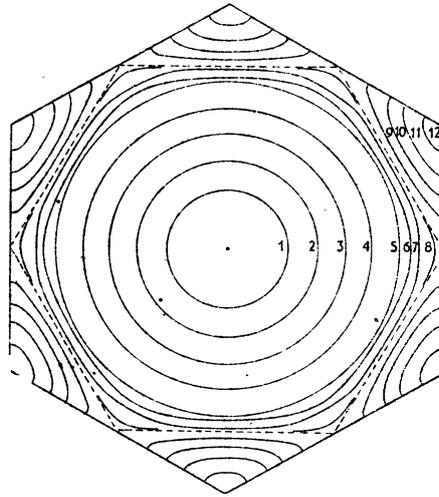


Figura 4.4: Las líneas de corriente en el plano horizontal para w constantes. Esta está normalizada en el centro. (Extraída del libro de Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, cap. 1)

Puede verse que según la Fig.(4.3), no habrá flujo del fluido a través de OD, BC y OI. Además, debido a la simetría de la célula no habrá ningún flujo a través de las paredes de esta. Por la proporcionalidad entre \mathbf{u}_\perp y $\nabla_\perp w$ se deduce que las paredes que forman cada lado del hexágono son simétricas. De los valores de u y v pueden representarse las líneas de corriente a w constante como están representadas en la Fig.(4.4).

En el caso en el que $x = 0$ se obtienen estos valores para las componentes de la velocidad:

$$u = 0 \quad (4.53)$$

$$v = \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = -\frac{DW}{3K^2} \frac{4\pi}{3L} (1 + 2 \cos \frac{2\pi y}{3L}) \sin \frac{2\pi y}{3L} \quad (4.54)$$

$$w = \frac{1}{3} W(z) \left\{ 2 \cos \left(\frac{2\pi y}{3L} \right) + \cos \left(\frac{4\pi y}{3L} \right) \right\} \quad (4.55)$$

O cuando $y = 0$:

$$u = -\frac{DW}{3K^2} \frac{4\pi}{L\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi x}{L\sqrt{3}} \quad (4.56)$$

$$v = 0 \quad (4.57)$$

$$w = \frac{1}{3}W(z)\{2\cos(\frac{2\pi x}{L\sqrt{3}}) + 1\} \quad (4.58)$$

Cuando $x = 0$ puede establecerse la siguiente relación:

$$\frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (4.59)$$

Integrando esta expresión en el plano y-z se obtiene:

$$\left\{ \frac{1 + 2\cos(2\pi y/3L)}{1 + \cos(2\pi y/3L)} \sin(\frac{2\pi y}{3L}) \right\}^2 W(z) = cte. \quad (4.60)$$

Las ecuaciones (4.53)-(4.60) son las que gobiernan el comportamiento de las líneas de corriente para estos casos particulares en las celdas hexagonales. Una vez analizado de que forma son las células y cual es la velocidad que el fluido tiene dentro de ellas, solo queda ver como es el comportamiento que el sistema tiene cuando el gradiente de temperatura y, por tanto, el número de Rayleigh son muy grandes. En estas condiciones el sistema adquiere un comportamiento caótico y turbulento en el cual las células pierden su forma.

Capítulo 5

Convección de Bénard-Marangoni

Como ya se ha mencionado previamente, Bénard observó la convección en una fina capa de fluido cuya superficie superior estaba en contacto con el aire, es decir, no tenía tensión mecánica tangencial. Además, la viscosidad y la conductividad térmica del aire son pequeños lo que implica que la superficie no era isotérma. Por efecto de la convección, las zonas más calientes son aquellas en las que el fluido inferior asciende, y las zonas más frías son aquellas en las que el fluido superior desciende. Sabemos que la tensión superficial disminuye con el aumento de temperatura. Debido a que la materia se desplaza de lugares de mayor a menor tensión superficial, el paulatino aumento del fluido caliente en la superficie libre hace que este tenga menor tensión superficial. Esto ayuda a la convección porque disminuye la energía de Gibbs. Tanto la diferencia en la tensión superficial como la liberación de la energía de Gibbs contribuyen a mantener el movimiento del fluido, contrarrestando la disipación de energía debido a la viscosidad.

Este tipo de convección es la causante de las celdillas que Bénard observó. Estas células son provocadas por la convección de Bénard-Marangoni más que por la convección de Bénard-Rayleigh.

Esta convección es la predominante cuando se cumple la siguiente condición:

$$-\frac{d\sigma}{dT} > \alpha\rho g d^2 \quad (5.1)$$

En esta ecuación, σ es la tensión superficial. El parámetro adimensional que determina el inicio de la convección es el número de Marangoni. Este se define así:

$$Ma = \frac{\sigma' \Delta T d}{\kappa \mu} \quad (5.2)$$

donde σ' es la derivada de la tensión superficial respecto a la temperatura. Este número es proporcional a la fuerza de la tensión superficial dividido por las fuerzas viscosas.

Puede demostrarse que el valor crítico del número de Marangoni para la convección es $Ma_{cr} = 80$.



Figura 5.1: Lago de sal secado que ha tomado esta forma debido a la convección de Bénard-Marangoni. (*Extraída del libro *Fluid Dynamics for Physicists* de Faber, cap. 8*)

Tal como se puede apreciar en la Fig.(5.1), la forma que toma un lago de sal después de la evaporación puede ser debida a este proceso. A medida que el lago va evaporándose empiezan a precipitarse cristales de sal, y es donde, durante la convección, el agua desciende y se obtienen las formas que aparecen en la imagen al secarse por completo. Estas formas corresponden a los contornos de las células.

Capítulo 6

Transición y caos determinista

6.1. Comentarios sobre los efectos no lineales

Hasta ahora se ha utilizado la teoría lineal para predecir el inicio de la inestabilidad. Sin embargo, sabemos que esta teoría no proporciona ninguna información sobre los procesos que acontecen a mayores números de Rayleigh. En los anteriores apartados se ha supuesto que las perturbaciones no afectan al flujo básico.

La dependencia del número de Nusselt con el número de Rayleigh para números mayores que el valor crítico no puede determinarse sin estudios mucho más elaborados. En estas condiciones los términos no lineales de las ecuaciones de movimiento determinan el valor de \mathbf{u} en el que la convección se estabiliza.

Un tratamiento no lineal de las ecuaciones de Boussinesq es también necesario para determinar en que manera los rollos pueden fundirse para conseguir un patrón de convección tridimensional. Se ha visto experimentalmente que, para números de Rayleigh bajos, las celdas de convección adquieren geometría hexagonal y no forma de rollo. Tal como puede observarse en la Fig.(3.2), las celdas forman una estructura parecida a la de un panel. Esta estructura puede ser considerada como una superposición de tres conjuntos de rollos con ejes separados $\pm 60^\circ$.

Los efectos no lineales son más importantes cuanto mayor sea el flujo de calor. En esta situación el flujo evoluciona hacia flujos irregulares, aperiódicos y caóticos. De esto se tratará a continuación.

Se le llama transición al proceso mediante el cual un flujo laminar pasa a ser turbulento. Este es un proceso complejo que empieza con la amplificación de pequeñas perturbaciones y que se ve muy afectado por las condiciones iniciales y por la geometría del contorno.

En un sistema dinámico de bajo orden, como es la célula de Bénard, solo unos pocos modos son responsables de la dinámica a causa de la fuerte restricción de las condiciones de contorno. Solo unos pocos modos no son

idénticamente nulos y el caos se desarrolla ordenadamente. Pero, si las restricciones se relajan, la evolución hacia el caos ocurre de una manera mucho más desordenada.

6.2. Transición al caos

Los sistemas disipativos no lineales llegan a un estado caótico cuando el parámetro que caracteriza la no linealidad es muy grande. La evolución desde el flujo laminar hasta el flujo caótico sucede de manera ordenada. Sabemos que el caos no solo se produce en sistemas continuos que tienen un número infinito de grados de libertad si no que también sucede en sistemas discretos con pocos grados de libertad. El comportamiento de estos sistemas viene dado por ecuaciones diferenciales no lineales. De este modo, este tipo de sistemas son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. Como consecuencia, dos sistemas con condiciones iniciales cercanas pueden evolucionar hasta configuraciones muy lejanas entre sí. Otra de las características de estos sistemas es que las soluciones son aperiódicas y el espectro de fluctuaciones no está compuesto solo por unas pocas frecuencias.

Puede demostrarse que un sistema no lineal gobernado por un conjunto finito de ecuaciones diferenciales ordinarias permite soluciones caóticas cuando se ve sometido a una fuerza estacionaria. Al contrario que un sistema disipativo no lineal, una fuerza periódica aplicada puede dar lugar a una respuesta periódica o aperiódica.

Por suerte, la transición hacia el caos de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias muestra un comportamiento universal. La transición hacia la turbulencia se relaciona con el desarrollo del caos en las soluciones de las ecuaciones. En lo que sigue, se intentará entender como evolucionan con el tiempo estas soluciones hasta llegar al caos. Para ello, resultan útiles los conceptos de espacio de fases, la trayectoria que describe la evolución del sistema, y las dimensiones del espacio de fases que equivalen a los grados de libertad.

Una de las características de los sistemas disipativos es la existencia de atractores. Estos son estructuras del espacio de fases a las cuales las trayectorias cercanas unas a otras se aproximan cuando $t \rightarrow \infty$. Un atractor puede ser un punto fijo, que representa un flujo estable y estacionario, o una curva cerrada (llamada ciclo límite), que representa oscilaciones estables (Fig.(6.1.a)). El tipo de atractor viene determinado por un parámetro de no linealidad que se denota por R . A medida que R se incrementa, el punto fijo puede cambiar y pasar de ser atractor a ser repelidor con trayectorias espirales hacia fuera (Fig.(6.1.b)). Esto quiere decir que el flujo es inestable bajo perturbaciones infinitesimales. A su vez, estas trayectorias frecuentemente se ven atraídos por un ciclo límite. Por tanto, la solución estacionaria inestable da paso a una solución estacionaria estable.

A la ramificación de una solución para un valor crítico R_{cr} del parámetro de no linealidad se le llama bifurcación. Esto puede ser representado en una gráfica de una variable dependiente respecto al parámetro de no linealidad. Cuando la curva de la solución se bifurca en dos caminos, esta adquiere los valores X_1 y X_2 que corresponde a los valores máximos y mínimos que aparecen en la Fig.(6.1.c). Se ve que el tamaño del ciclo límite se hace

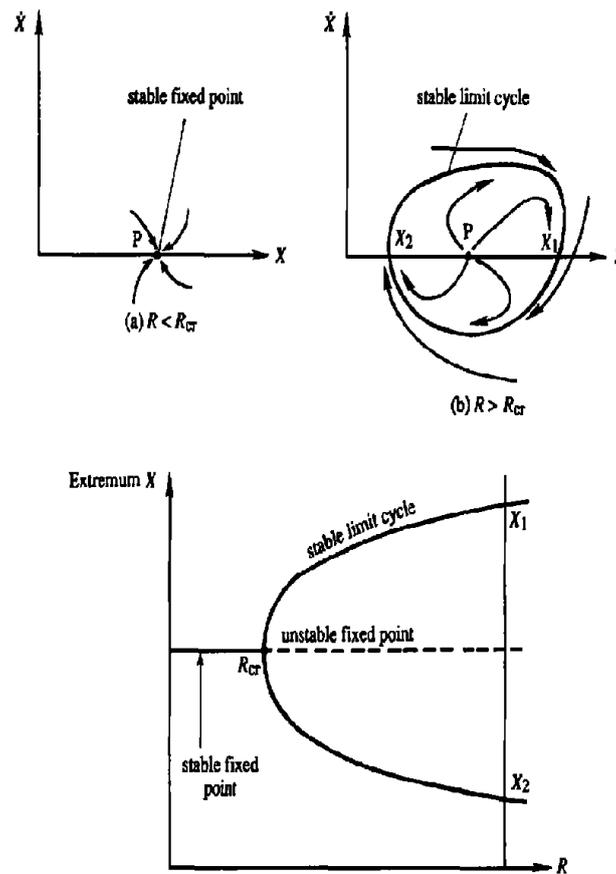


Figura 6.1: En el espacio de fases de (a) y (b) se representa \dot{X} respecto a X . En el primero el punto P es un atractor. En el segundo, P es un repelidor y las trayectorias son atraídas a un ciclo límite que rodea el punto P . La figura (c) corresponde al diagrama de bifurcación que corresponde a la situación. (Extraída del libro *Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11*)

más grande a medida que $(R - R_{cr})$ aumenta. Los ciclos límite, que representan una respuesta oscilante cuya amplitud no depende de las condiciones iniciales, son propiedades características de este tipo de sistemas. La teoría de la estabilidad lineal predice que la perturbación aumenta de manera exponencial si $R > R_{cr}$ pero a menudo una teoría no lineal muestra que las perturbaciones se equilibrarán a una oscilación estacionaria cuya amplitud aumenta con $R - R_{cr}$.

6.3. Modelo de Lorenz para la convección térmica

Tomando como ejemplo la convección térmica en una capa calentada desde abajo (célula de Bénard), Lorenz demostró que el desarrollo del caos se debe a que el atractor adquiere ciertas propiedades extrañas. Él consideró una capa de aire cuya superficie superior no estaba sometida a tensión mecánica. Si suponemos que las perturbaciones tienen forma de rollo invariante en la dirección y , y además, definimos una función de corriente de la perturbación en el plano x - z mediante:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad (6.1)$$

$$w = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (6.2)$$

También, él substituyó soluciones de la siguiente forma en las ecuaciones de movimiento:

$$\psi \propto X(t) \cos(\pi z) \sin(kx) \quad (6.3)$$

$$T' \propto Y(t) \cos(\pi z) \cos(kx) + Z(t) \sin(2\pi z) \quad (6.4)$$

donde T' es la temperatura medida a partir de la correspondiente al estado básico no convectivo y k es el número de onda de la perturbación y los límites están en $z = \pm 1/2$. De estas dos ecuaciones se deduce que X es proporcional a la intensidad de la convección e Y es proporcional a la diferencia de temperatura entre las corrientes ascendentes y descendentes. A su vez, Z es proporcional a la desviación del perfil de la temperatura vertical de la linealidad. El análisis lineal de Rayleigh demostró que si los valores de X y Y son constantes y $Z = 0$, se desarrollaría la convección si Ra excediese su valor crítico ($Ra_{cr} = 27\pi^4/4$).

Sustituyendo las expresiones (6.3) y (6.4) en las ecuaciones de movimiento, Lorenz obtuvo las ecuaciones siguientes:

$$\dot{X} = Pr(Y - X) \quad (6.5)$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y \quad (6.6)$$

$$\dot{Z} = XY - bZ \quad (6.7)$$

Aquí, Pr es el número de Prandtl, r es Ra/Ra_{cr} y $b = 4\pi^2/(\pi^2 + K^2)$. Las ecuaciones (6.5)-(6.7) forman un conjunto de ecuaciones no lineales con tres grados de libertad. Por tanto, el espacio de fases tendrá tres

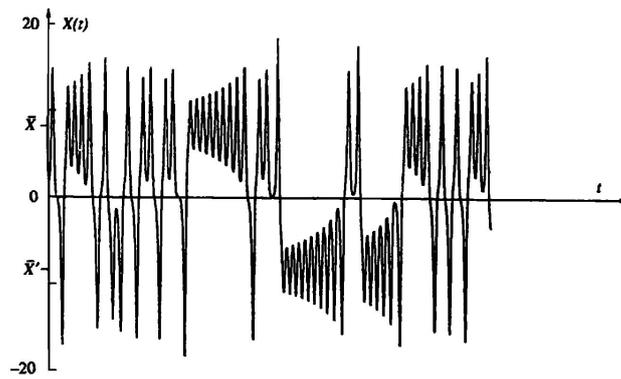


Figura 6.2: Se representa $X(t)$ en función de t . Oscila entre \bar{X} y \bar{X}' sin un periodo determinado. (Extraída del libro *Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11*)

dimensiones. Este conjunto de ecuaciones fue derivado por primera vez como una simplificación por truncación de las ecuaciones de Bénard.

De estas ecuaciones se deduce una solución estacionaria trivial en la que $X = Y = Z = 0$. Esto representa un estado no convectivo. Cuando $r > 1$, el sistema tiene otras dos soluciones estacionarias que se denotan:

$$\bar{X} = \bar{Y} = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad (6.8)$$

$$\bar{Z} = r - 1 \quad (6.9)$$

Los dos signos de la ecuación (6.8) equivalen a los dos posibles sentidos de rotación de los rollos. Sin embargo, Lorenz demostró que la convección estacionaria se vuelve inestable para altos valores de r . Eligiendo los valores $Pr = 10$, $b = 8/3$ y $r=28$, integró numéricamente el conjunto de ecuaciones y vio que la solución no se repetía nunca. Al contrario, era aperiódica y evolucionaba de manera caótica. En la Fig.(6.2) se muestra la variación de $X(t)$ en función del tiempo. Puede verse que, al principio, la amplitud del movimiento de convección oscila alrededor de uno de los valores estacionarios de \bar{X} con cada vez mayores oscilaciones. Cuando este es lo suficientemente grande, la amplitud cae a cero y empieza a oscilar cerca del otro \bar{X} . Dicho de otra forma, el movimiento cambia de manera caótica entre dos ciclos límite. El número de oscilaciones entre las transiciones es, según parece, aleatorio. Comportamientos análogos se encuentran para y y Z .

Los cálculos demuestran que las variables X , Y y Z tienen espectros continuos y que dependen sensiblemente de las condiciones iniciales. Esto es lo que se intenta mostrar en la Fig.(6.2).

Las trayectorias en el espacio de fases de las ecuaciones de Lorenz vienen representados en la Fig.(6.3). Los centros de las curvas equivalen a las soluciones dadas por las expresiones (6.8)-(6.9). Las trayectorias van en dirección de las agujas del reloj en la curva de la izquierda, y en sentido opuesto en la curva de la derecha.

Como consecuencia de la disipación del sistema, una órbita con condiciones iniciales fuera de estas curvas se

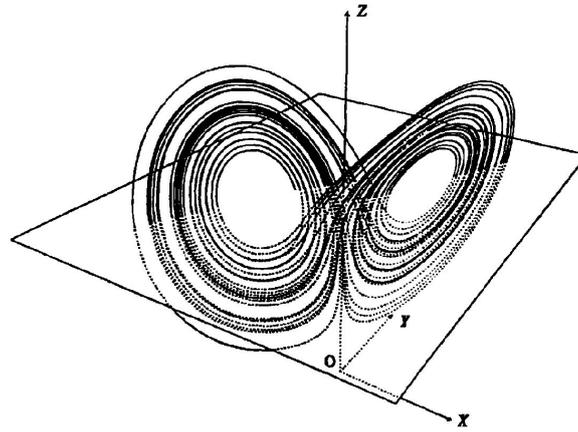


Figura 6.3: Todas las condiciones iniciales cercanas son atraídas a la estructura pero finalmente divergen. (Extraída del libro *Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11*).

incorporan a estas y siguen su trayectoria. Por tanto, es un atractor. Sin embargo, en un atractor aperiódico, cuando las condiciones iniciales de dos órbitas distan infinitesimalmente unas de otras se siguen unas a otras por un momento y, al final, divergen hacia estados muy diferentes. Esta es la razón por la cual estos sistemas son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. Teniendo en cuenta todo esto, al atractor aperiódico también se le llama atractor extraño.

Lo que se ha descrito hasta ahora corresponde a un sistema dinámico discreto que tiene pocos grados de libertad y sabemos que aparecen soluciones aperiódicas o caóticas cuando el parámetro de no linealidad es grande. Existen algunas rutas hacia el caos en este tipo de sistemas. En lo que sigue, se analizarán dos de estas rutas:

- Transición por cascada subarmónica:** A medida que R se incrementa, un sistema no lineal desarrolla un ciclo límite de determinada frecuencia ω . Si R aumenta aún más algunos sistemas generan algunas frecuencias adicionales como $\omega/2$, $\omega/4$, $\omega/8$ etc. Estas frecuencias no alteran el carácter periódico de la solución, pero sí doblan el periodo cada vez que se añade un nuevo armónico. El periodo se dobla más y más rápido a medida que R aumenta hasta llegar a un punto de acumulación (Fig.(6.4)). A partir de este punto, la solución evoluciona de manera caótica. Cuando se llega a este punto los picos dejan de aparecer. En la Fig.(6.5). se muestran los espectros de frecuencias que corresponden a diferentes velocidades para distintos valores de Ra . En éstos puede verse la evolución descrita. Feigenbaum demostró que el siguiente resultado es universal e independiente del sistema considerado cuando n tiende a infinito.

$$\frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} \rightarrow 4,6692 \quad (6.10)$$

R_n es el valor en el cual un nuevo subarmónico se desarrolla. Por consecuencia, el intervalo horizontal entre dos bifurcaciones es aproximadamente un quinto del intervalo anterior. El intervalo vertical entre dos bifurcaciones también decrece, siendo dos quintos del anterior. De este modo, el diagrama de bifurcación es autosimilar a medida que se va acercando al punto de acumulación.

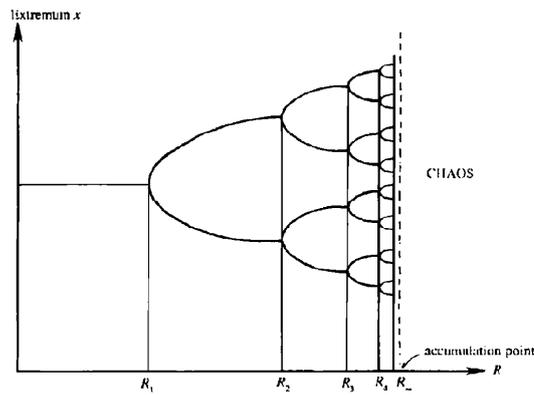


Figura 6.4: El diagrama de bifurcación en el que el periodo se dobla a cada valor R_n del parámetro de no linealidad. El caos aparece más allá del punto de acumulación. (Extraída del libro *Fluid Mechanics de Kundu, cap. 11*)

Los experimentos que se han realizado para materiales con números de Prandtl bajos, tales como los metales líquidos, indican que los rollos de convección desarrollan un movimiento oscilatorio para una cierta frecuencia ω cuando $Ra = 2Ra_{cr}$. A medida que Ra se incrementa se han visto las frecuencias $\omega/2$, $\omega/4$, $\omega/8$, $\omega/16$ y $\omega/32$. Según los cálculos, el límite de la división (6.10) da 4,4, un valor aproximado a la constante de Feigenbaum.

- Transición por un régimen quasiperiódico:** Se ha demostrado que algunos sistemas solo necesitan una pequeña cantidad de bifurcaciones para producir soluciones caóticas. Cuando el parámetro de no linealidad aumenta, la solución estacionaria pierde su estabilidad y se bifurca en un ciclo límite oscilante de frecuencia ω_1 . Cuando R sea aún más grande aparecerán otras dos frecuencias (ω_2 y ω_3) por medio de otras bifurcaciones. El cociente entre estas frecuencias es un número irracional, y, por tanto, el movimiento no es periódico.

Una vez que aparece la frecuencia ω_3 el espectro del sistema adquiere rápidamente las características de una banda ancha de un sistema caótico. De hecho, no es fácil darse cuenta de que esta tercera frecuencia ha aparecido hasta que se ve el efecto de la banda ancha.

Por último, la relación existente entre Ra y Nu ha sido extendido en años recientes hasta números de Rayleigh tan altos como 10^{15} . En los experimentos se utilizó gas helio a muy bajas temperaturas contenido en una celda de 8,7 cm de altura y 8,7 cm de diámetro. Este fluido se ha utilizado para realizar este experimento debido a que κ y μ son pequeños y ρ puede aumentarse aplicando presión.

Algunos autores (B. Castaing, G. Gunaratne *et al*) creen que la convección es realmente turbulenta cuando el número de Rayleigh supera $5 \cdot 10^5$. También estos autores distinguen entre dos tipos de turbulencia. La primera, la turbulencia suave (*soft turbulence*), permanece hasta $Ra = 4 \cdot 10^7$. A partir de este valor a la turbulencia se le llama turbulencia fuerte (*hard turbulence*). En la Fig.(6.6) se representa la dependencia de Nu respecto a Ra para muy altos valores de éste último. En dicha figura se distinguen claramente ambos tipos de turbulencia.

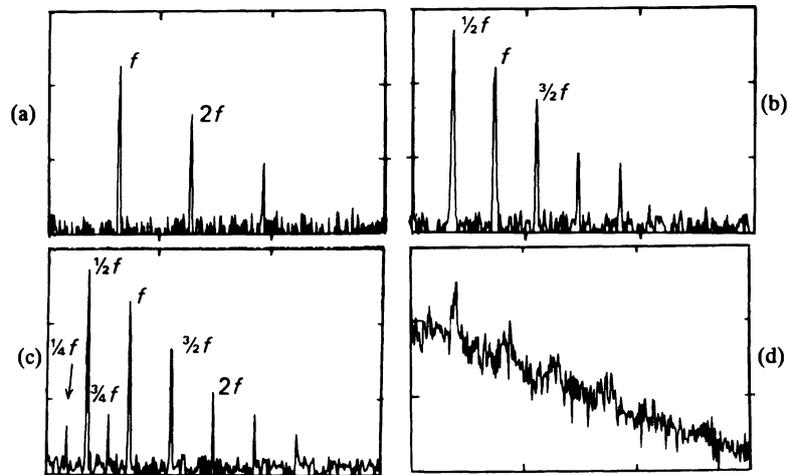


Figura 6.5: Espectros de frecuencias vs la velocidad local para Ra cada vez más altos. La abcisa es lineal en la frecuencia y logarítmica en la ordenada. (Extraída del libro *Physical Fluid Dynamics* de Tritton, cap. 24)

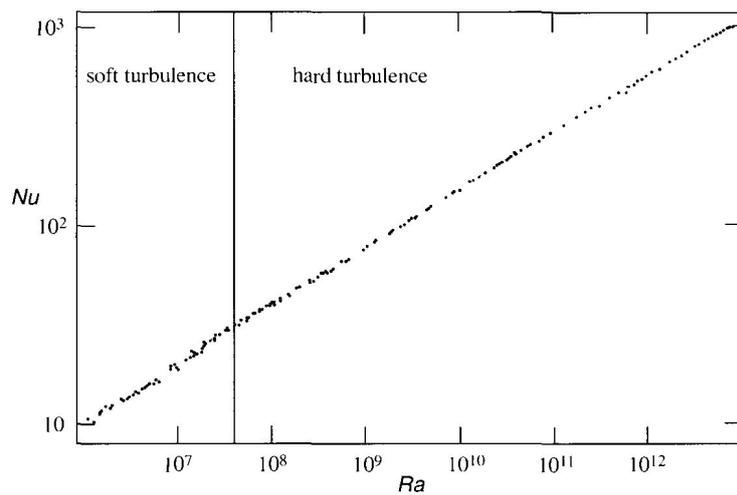


Figura 6.6: Dependencia del número de Nusselt con el número de Rayleigh. (Extraída del artículo de B. Castaing, G. Gunaratne et al, *Fluid Mechanics*, 204)

Capítulo 7

Conclusiones

A lo largo del trabajo hemos obtenido el valor del número de Rayleigh para el cual la convección comienza. Por debajo de dicho número el sistema disipa calor por conducción y por tanto, no hay ningún efecto macroscópico. Es cuando se supera este número crítico cuando empieza a moverse el fluido, y forma las células características y los rollos.

Hemos visto, entre otras cosas, que en el estado marginal el número de Prandtl no influye en el inicio de la inestabilidad. Esto implica que el análisis posterior es aplicable a cualquier fluido sea cual sea su número de Prandtl característico. Esto es una prueba más del carácter universal que tiene este tipo de convección. La diferencia de temperatura mínima que haya que aplicar al sistema varía, como es lógico, con las propiedades intrínsecas de cada fluido.

En primera aproximación, se han omitido los términos cuadráticos y de orden superior. Aun así, se ha obtenido una muy buena estimación del inicio si lo comparamos con los valores experimentales, a pesar de que no podamos describir situaciones posteriores. Esto se debe, en parte, a que la teoría lineal es realmente eficaz aunque las aproximaciones realizadas no sean del todo correctas para todo tipo de fluidos. Hay que recordar que una de las suposiciones de Boussinesq es que los fluidos son incompresibles. Esta es una aproximación aceptable cuando se trata de líquidos, pero muy poco realista cuando se aplica a un gas.

También se ha deducido que la geometría de las células no puede ser cualquiera, si no que solo puede tener forma cuadrada, triangular o hexagonal. A esta conclusión se llegó por medio de un argumento geométrico simple.

Una de las características principales de los sistemas caóticos es su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto quiere decir que dos soluciones arbitrariamente cercanas evolucionan a dos estados muy diferentes pese a que las ecuaciones sean deterministas. De este modo, cuando la teoría lineal falla, la evolución de los rollos se vuelve imprevisible.

Sabemos, por la segunda ley de la termodinámica, que la entropía de un sistema aumenta en los procesos

irreversibles, y que, tradicionalmente, la entropía ha sido asociada al desorden. Sin embargo, este es, de hecho, un proceso irreversible y, aún así, las celdas conservan su forma. Las células forman una estructura disipativa de Prigogine. Es decir, son estructuras coherentes y autoorganizadas en sistemas que no están en equilibrio. Una estructura disipativa se caracteriza por la aparición espontánea de una ruptura de simetría y la formación de estructuras.

En definitiva, en este trabajo se ha realizado un estudio sobre el sistema más simple en que puede ocurrir un movimiento convectivo en un fluido confinado entre dos placas a diferente temperatura. Para una mayor profundización en este análisis, el trabajo puede complementarse con estudios experimentales y computacionales que permitan, por ejemplo, un mayor conocimiento del estado turbulento o del proceso exacto de formación de las células.

Apéndice A

Demostración de que σ es real para

$$Ra > 0$$

El signo de la parte real de $\sigma(\sigma=\sigma_r+i\sigma_i)$ determina si el flujo es estable o inestable. Mostraremos a continuación que para el problema de Bénard σ es real y el estado marginal, el que separa la estabilidad de la inestabilidad está gobernado por $\sigma=0$.

Tomemos la ecuación $[\sigma - (D^2 - K^2)] \hat{T} = W$, donde se cumple que $D \equiv \frac{d}{dz}$, y multipliquemos por \hat{T}^* , la compleja conjugada de \hat{T} . Lo integramos por partes cuando sea necesario entre $\pm 1/2$ empleando las condiciones de contorno $W = DW = \hat{T}=0$. Los diferentes términos toman la forma:

$$\int \hat{T}^* \hat{T} dz = \int |\hat{T}|^2 dz \quad (\text{A.1})$$

$$\int \hat{T}^* D^2 \hat{T} dz = [\hat{T}^* D \hat{T}]_{-1/2}^{1/2} - \int D \hat{T}^* D \hat{T} dz = - \int |D \hat{T}|^2 dz \quad (\text{A.2})$$

De este modo, la ecuación $[\sigma - (D^2 - K^2)] \hat{T} = W$ se convierte en:

$$\sigma \int |\hat{T}|^2 dz + \int |D \hat{T}|^2 dz + K^2 \int |\hat{T}|^2 dz = \int \hat{T}^* W dz \quad (\text{A.3})$$

Ahora se reescribirá la ecuación utilizando las siguientes definiciones :

$$I_1 \equiv \int |\hat{T}|^2 dz$$

$$I_2 \equiv \int |D \hat{T}|^2 dz + K^2 \int |\hat{T}|^2 dz$$

Así pues, la ecuación se reescribe de esta forma:

$$\sigma I_1 + I_2 = \int \hat{T}^* W dz \quad (\text{A.4})$$

De manera análoga al anterior, multipliquemos la ecuación $(\frac{\sigma}{Pr} + K^2 - D^2)(D^2 - K^2)W = -RaK^2\hat{T}$ por W^* e integremos el resultado por partes. Debido a la gran cantidad de cálculos dividimos la integral anterior en dos partes. El primer término de dicha ecuación da:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{Pr} \int W^*(D^2 - K^2)W dz &= \frac{\sigma}{Pr} \int W^*D^2W dz - \frac{\sigma K^2}{Pr} \int W^*W dz \\ &= -\sigma/Pr \int [|DW|^2 + K^2|W|^2] dz \quad (A.5) \end{aligned}$$

Repetiendo el mismo cálculo con el segundo término se llega a:

$$\begin{aligned} \int W^*(D^2 - K^2)(D^2 - K^2)W dz &= \int W^*(D^4 + K^4 - 2K^2D^2)W dz \\ &= \int W^*D^4W dz + K^4 \int W^*W dz - 2K^2 \int W^*D^2W dz \\ &= [W^*D^3W]_{-1/2}^{1/2} - \int DW^*D^3W dz + K^4 \int |W|^2 dz - 2K^2[W^*DW]_{-1/2}^{1/2} + 2K^2 \int DW^*DW dz \\ &= \int [|D^2W|^2] + 2K^2|DW|^2 + K^4|w|^2 dz \quad (A.6) \end{aligned}$$

Usando las expresiones (A.5) y (A.6) la integral de (3.33) queda de esta forma :

$$\frac{\sigma}{Pr} J_1 + J_2 = RaK^2 \int W^*\hat{T} dz \quad (A.7)$$

Donde:

$$J_1 \equiv \int [|DW|^2 + K^2|W|^2] dz$$

$$J_2 \equiv \int [|D^2W|^2] + 2K^2|DW|^2 + K^4|w|^2 dz$$

Las cuatro integrales I_1, I_2, J_1 y J_2 son todas positivas. Comparando la expresión (A.7) y (A.4), se observa que la parte derecha de (A.7) es la conjugada compleja de la parte derecha de (A.4) multiplicada por RaK^2 . Calculando el conjugado complejo de (A.4) y sustituyéndolo en (A.7) se llega a la siguiente relación.

$$\frac{\sigma}{Pr} J_1 + J_2 = RaK^2(\sigma^* I_1 + I_2) \quad (A.8)$$

Tomando la parte imaginaria de ambas partes, se da la siguiente igualdad.

$$\sigma_i \left[\frac{J_1}{Pr} + RaK^2 I_1 \right] = 0 \quad (A.9)$$

Teniendo en cuenta que la expresión de dentro del corchete es positivo, necesariamente la parte imaginaria de σ tendrá que ser idénticamente nulo. De modo que σ es real en el problema de Bénard.

Bibliografía

- [1] S. Chandrasekhar *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. International Series of Monographs on Physics, Oxford: Clarendon, 1961
- [2] T.E.Faber *Fluid mechanics for physicists*. Cambridge University Press, 1995
- [3] P.K.Kundu, I.M.Cohen, D.R.Dowling *Fluid Mechanics*. Elsevier Academic Press, 2012
- [4] J.M. Aguirregabiria Aguirre *Mekanika klasikoa*. 2012
- [5] J.M. Aguirregabiria Aguirre *Fisika Ikasleentzako Ekuazio Diferentzial Arruntak*. Servicio Editorial UPV 1998-2000
- [6] Martín Rivas *Elementos de Física de los Medios Continuos*. 2014
- [7] K.T.Aligood, T.D. Sauer y J.A. Yorke *Chaos: An introduction to Dynamical Systems*. Springer 2000
- [8] François Charru *Hydrodynamic Instabilities* Cambridge University Press 2011
- [9] P.G. Drazin y W.H. Reid *Hydrodynamic Stability* Cambridge University Press 2004
- [10] D.J. Tritton *Physical Fluid Dynamics* Oxford Science Publications 2007
- [11] B. Castaing, G. Gunaratne *et al*, "Fluid Mechanics", **204**, 1 (1989)
- [12] J.K.Platten, J.C.Legros *Convection in liquids* Springer-Verlag 1984