Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

EKONOMIA ETA ENPRESA FAKULTATEA
FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA

GRADO: Finanzas y Seguros

Curso 2015/2016

Sistema bonus-malus. Un ejemplo de teoría de credibilidad.

Autor/a: Andrea Giralt Castellano

Director/a: María Araceli Garín Martín

Bilbao, a 12 de Septiembre de 2016.

Resumen

En este trabajo se aborda el procedimiento de cálculo de primas bajo el sistema de tarificación bonus-malus. Para ello se introducen los distintos principios de cálculo de primas y los conceptos de prima de riesgo, prima colectiva y prima Bayes.

Se detalla en varios ejemplos la aplicación de las distintas fórmulas de tarificación y se ilustra con una aplicación a una cartera real de seguros de automóvil el procedimiento completo de obtención de las primas.

Para realizar este trabajo hemos tomado como referencia el texto [Sarabia et al., 2006]. Más concretamente, nos hemos basado en el Capítulo 12: Tarificación. En dicho texto se define la teoría de la credibilidad como " un conjunto de técnicas que permiten al asegurador ajustar de un modo sistemático las primas de los seguros en función de la experiencia de siniestralidad ".

Una de las principales aplicaciones de esta teoría se presenta en el seguro de automóvil en el que la prima inicial se va transformando sucesivamente a medida que se incorpora la información de siniestralidad. Aparecen así, los denominados sistemas bonus-malus.

Los principios de cálculo de primas, así como la metodología asociada a su obtención, constituyen un elemento imprescindible en la tarificación mediante credibilidad.

Como parte práctica, presentamos un caso de estudio aplicado a una cartera de seguros de automóvil en el que obtenemos las diversas primas basadas en los modelos seleccionados.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La cobertura de un riesgo por parte de un compañía aseguradora se establece con la garantía de un contrato, denominado póliza y esta póliza exige al asegurado pagar un precio, la prima.

Desde mediados del siglo XX se ha desarrollado la denominada teoría de la credibilidad que basa su nombre en la "creencia que el actuario debe dar a la experiencia de siniestralidad a la hora de elaborar una tarifa".

La teoría de la credibilidad utiliza ambas clases de experiencias, la individual y la colectiva para ajustar la prima y prever su ocurrencia. Un ejemplo de uso de la teoría de credibilidad lo constituye el sistema de tarificación bonus-malus.

En este trabajo se aborda el procedimiento de cálculo de primas bajo el sistema de tarificación bonus-malus. Para ello se introducen los distintos principios de cálculo de primas y los conceptos de prima de riesgo, prima colectiva y prima Bayes.

Se muestra con varios ejemplos la aplicación de las distintas fórmulas de tarificación y se ilustra con una aplicación a una cartera real de seguros de automóvil el procedimiento completo de obtención de las primas.

Para realizar este trabajo hemos tomado como referencia el texto [Sarabia et al., 2006]. Más concretamente, nos hemos basado en el Capítulo 12: Tarificación. En dicho texto se define la teoría de la credibilidad como " un conjunto de técnicas que permiten al asegurador ajustar de un modo sistemático las primas de los seguros en función de la experiencia de siniestralidad ".

Dicha teoría como disciplina matemática, toma sus métodos de diversos campos de las matemáticas: la estadística Bayesiana, el análisis funcional, las técnicas de mínimos cuadrados, etc.

Uno de sus principales usos se presenta en el seguro de automóvil en el que la prima inicial se va transformando sucesivamente a medida que se incorpora la información de siniestralidad. Aparecen así, los denominados sistemas bonus-malus.

Los principios de cálculo de primas, así como la metodología asociada a su obtención, constituyen un elemento imprescindible en la tarificación mediante credibilidad.

Como parte práctica, presentamos un caso de estudio aplicado a una cartera de seguros de automóvil en el que obtenemos las diversas primas basadas en dos situaciones diferentes. El riesgo se modeliza como una variable aleatoria cuya distribución depende de uno o varios parámetros en general fijos aunque desconocidos. Una situación habitual es permitir que alguno de estos parámetros sea además una variable aleatoria. Surgen así las distribuciones condicionadas y las distribuciones compuestas.

Capítulo 2

Principios de cálculo de primas

La prima se define como el pago que un asegurado hace a un asegurador por la cobertura total o parcial contra un riesgo.

El precio correcto, denominado rating, es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para la compañía aseguradora y si es demasiado alto se pierde competitividad en el mercado. Analizaremos en este trabajo algunos de los métodos de cálculo de primas, también llamadas principios de cálculo de primas.

Si denotamos por X a la variable aleatoria que nos representa el riesgo, un principio de cálculo de prima se define como una función $\mathcal{H}(X)$ que asigna al riesgo X un número real, que es la prima. En la práctica, el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución $F(x)$ de la variable X.

Una vez establecido el principio de cálculo de prima a aplicar a un riesgo X, el siguiente paso será calcular la prima asociada a X conforme a una determinada distribución de probabilidad asociada al riesgo. En algunos casos, las variables aleatorias degeneran en variables deterministas. En otras ocasiones, tanto los costes como el número de siniestros son variables aleatorias.

De aquí en adelante, y salvo que se diga lo contrario, el riesgo X representará indistintamente el número de siniestros, la cuantía por cada uno de ellos o la cantidad total o agregada.

2.1. Funciones de pérdida

La metodología de cálculo de primas utilizando funciones de pérdida, fue propuesta en [Heilmann, 1989], obteniendo de esta manera muchos de los principios de cálculo de primas que ya se utilizaban así como otros nuevos.

Consideramos una función de pérdida $L : R^2 \to R$ que atribuya a algún $(x, P) \in R^2$, la pérdida soportada por un decisor que toma la acción P y se encuentra con el resultado x de algún experimento aleatorio. En este caso la prima de riesgo se define de la siquiente manera:

Definición 2.1 *Dados un riesgo X con función de densidad $f(x)$ y una función de pérdida $L : R^2 \to R$, la prima de riesgo es el valor de P que minimiza la pérdida esperada,*

$$\int L(x,P)f(x)dx = E_f[L(x,P)] \tag{2.1}$$

donde x es el resultado del experimento aleatorio X y P la prima cobrada por tomar x.

Si la variable aleatoria X es discreta, se deberá minimizar la expresión:

$$\sum_{x=0}^{\infty} L(x,P)P(x)$$

donde $P(x)$ es la función de cuantía de X.

Para obtener las distintas primas de riesgo se consideran funciones de pérdida de la forma:

- cuadrática
- exponencial
- cuadrática ponderada

de acuerdo con los siguientes resultados:

Teorema 2.1 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática dada por $L(x, P) = (x - P)^2$, resulta*

$$P = \mathcal{H}(X) = E_f(X) \tag{2.2}$$

denominado principio de prima neta o de equivalencia.

Teorema 2.2 *Si consideramos la función de pérdida exponencial dada por* $L(x,P) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha P})^2$, *con* $\alpha > 0$, *resulta*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{1}{\alpha} \log E_f(e^{\alpha X}) \tag{2.3}$$

denominado principio de utilidad exponencial.

Teorema 2.3 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso* $g(x) = e^{\alpha x}$, *dada por* $L(x,P) = e^{\alpha x}(x-P)^2$ *con* $\alpha > 0$, *entonces,*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{E_f(Xe^{\alpha X})}{E_f(e^{\alpha X})} \tag{2.4}$$

que es el principio de Esscher.

Teorema 2.4 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso* $g(x) = x$, *dada por* $L(x,P) = x(x-P)^2$, *entonces,*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{E_f(X^2)}{E_f(X)} = E_f(X) + \frac{Var_f(X)}{E_f(X)} \tag{2.5}$$

denominado principio de varianza.

Los principios de cálculo de primas mostradas en los teoremas anteriores son los más utilizados en la literatura actuarial y pueden estudiarse siempre que la distribución de la variable aleatoria X sea conocida.

En el contrato actuarial es habitual considerar que todos o algunos de los parámetros de los que depende la distribución de probabilidad de X son desconocidos. La prima calculada de acuerdo con los principios de cálculo de primas mostradas en los Teoremas 2.1- 2.4, dependerá en la práctica de alguno de dichos parámetros.

Por ejemplo, si el riesgo X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, $\mathcal{P}(\lambda)$, la prima calculada conforme al principio de prima neta vendrá dada por $\mathcal{H}(X) = EX = \lambda$. Si el parámetro λ es desconocido pero fijo, la prima se estima y se obtiene como la estimación puntual de λ, $\hat{\lambda}$.

El problema se complica cuando el parámetro del que depende la distribución de X es a su vez desconocido y aleatorio.

En este caso, el cálculo de primas hace uso de conceptos relacionados con las distribuciones compuestas.

2.2. Prima colectiva o a priori

Si $f(x)$ denota la función de densidad asociada a la variable aleatoria X y es dependiente del parámetro θ, escribiremos $f(x,\theta)$ ó $f(x/\theta)$ para derrotar a su función de densidad. En este caso, la variable será denotada por X/θ. Si además θ es un parámetro aleatorio, denotaremos por $\pi(\theta)$ a la función de densidad correspondiente.

Definición 2.2 *Se denomina distribución compuesta de X en relación al parámetro de θ, a la distribución de X incondicionada al valor θ, que se obtiene directamente del Teorema de la partición, como*

$$f(x) = \int_\theta f(x/\theta)\pi(\theta)d\theta$$

Si tanto X/θ como θ son variables aleatorias continuas, la expresión ha de ser convenientemente modificada en el caso de que x/θ ó θ sean variables aleatorias discretas. En dicho caso la integral será sustituida por un sumatorio y las funciones de densidad por funciones de cuantía:

Proposición 2.1 *Sean X/θ y θ dos variables aleatorias con media finita, entonces: $E(X) = E_\theta(E(X/\theta))$*

Proposición 2.2 *Sean X/θ y θ dos variables aleatorias con media y varianza finitas, entonces: $Var(X) = E_\theta(Var(X/\theta)) + Var_\theta(E(X/\theta))$*

Cuando la distribución de X depende del parámetro θ, la prima de riesgo P depende también del parámetro desconocido θ y será denotada por $P(\theta)$. La mejor estimación de dicha prima es la prima colectiva, cuya definición aparece a continuación.

Definición 2.3 *Dados un riesgo X/θ, con función de densidad $f(x/\theta)$, siendo θ un parámetro desconocido y aleatorio con función de densidad a priori $\pi(\theta)$ y una función de pérdida $L : R^2 \to R$, la prima colectiva es el valor P_C que minimiza la pérdida esperada,*

$$\int_\theta L(P(\theta), P_C)\pi(\theta)d\theta \tag{2.6}$$

siendo $P(\theta)$ la prima de riesgo definida en (2.1).

La prima colectiva tal y como está definida en (2.6) es la mejor forma de estimar, ya que optimiza en el sentido de mínimo, la prima de riesgo (obviamente desconocida).

Considerando que la distribución del riesgo X condicionada a la ocurrencia del parámetro θ es $f(x/\theta)$ y que θ es una variable aleatoria con densidad $\pi(\theta)$, podemos obtener las expresiones de la prima colectiva para los principios de prima neta, exponencial, Esscher y varianza, sin más que extender los Teoremas 2.1-2.4 a este caso.

Teorema 2.5 *Para el principio de prima neta con función de pérdida cuadrática, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = (P(\theta) - P_C)^2$$

donde $P(\theta) = E(X/\theta)$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = E_\theta(P(\theta))$$

Teorema 2.6 *Para el principio de utilidad exponencial con función de pérdida cuadrática, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha P(\theta)} - e^{\alpha P_C})^2$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = \frac{1}{\alpha}\log E(e^{\alpha X/\theta})$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{1}{\alpha}\log E_\theta(e^{\alpha P(\theta)})$$

Teorema 2.7 *Para el principio de prima Esscher con función de pérdida cuadrática ponderada, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = (e^{\alpha P(\theta)})(P(\theta) - P_C)^2, \alpha > 0$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = \frac{E(X/\theta e^{\alpha X/\theta})}{E(e^{\alpha X/\theta})}$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{E_\theta(P(\theta)e^{\alpha P(\theta)})}{E_\theta(e^{\alpha P(\theta)})}.$$

Teorema 2.8 *Para el principio de prima de varianza con función de pérdida cuadrática ponderada, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = P(\theta)(P(\theta) - P_C)^2$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)}$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{E_\theta(P(\theta))^2}{E_\theta(P(\theta))} = \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} + E_\theta(P(\theta)).$$

Es decir, para calcular la prima colectiva en cualquiera de los cuatro principios de prima, se repite dos veces un mismo cálculo. Primero se obtiene la prima de riesgo, $P(\theta)$, a partir de la distribución condicionada de X/θ; y luego, con el mismo procedimiento, se obtiene la prima colectiva P_C a partir de la distribución de θ.

Ejemplo 2.1 *a) Veamos cómo se calculan la prima de riesgo y la prima colectiva bajo el principio de prima neta cuando el riesgo,* X/θ, *sigue una distribución de Poisson,* $\mathcal{P}(\theta)$ *y* θ *a su vez sigue una distribución gamma,* $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$.

En este caso, por el Teorema 2.1, la prima de riesgo es $P(\theta) = E(X/\theta) = \theta$ [1], *mientras que la prima colectiva es por el Teorema 2.5:*

$$P_C = E_\theta(P(\theta)) = E_\theta(\theta) = \frac{r}{a}. \tag{2.7}$$

b) Si utilizamos el principio de varianza, por el Teorema 2.4, la prima de riesgo es: $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta + \frac{\theta}{\theta} = \theta + 1$ [2], *mientras que la prima colectiva es por el Teorema 2.8:*

$$\begin{aligned} P_C &= E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} = \\ &= E_\theta(\theta+1) + \frac{Var_\theta(\theta+1)}{E_\theta(\theta+1)} = \\ &= \frac{r}{a} + 1 + \frac{\frac{r}{a^2}}{\frac{r}{a}+1} = \frac{(r+a)^2 + r}{a(r+a)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

[1] Partimos de conocer que la media de una Poisson de parámetro θ es θ y la media de una gamma (a, r) es $\frac{r}{a}$.

[2] Partimos de conocer que la varianza de una gamma (a, r) es $\frac{r}{a^2}$.

Ejemplo 2.2 *a) En este caso veremos cómo se calculan la prima de riesgo y prima colectiva bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo X/θ sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ con función de cuantía:*

$$P(x/\theta) = \begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} (\tfrac{r}{r+\theta})^r (\tfrac{\theta}{r+\theta})^x, \; x = 0, 1, 2, ..$$

y θ sigue una distribución Beta de segunda especie, con $r, a, b > 0$ y función de densidad:

$$\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y $\theta > 0$.

Siguiendo de nuevo el Teorema 2.1, la prima de riesgo en este caso es[3]*, si $X/\theta \in Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$,*

$$P(\theta) = E(X/\theta) = r\frac{\frac{\theta}{r+\theta}}{\frac{r}{r+\theta}} = \theta \tag{2.9}$$

Siguiendo de nuevo el Teorema 2.5, la prima colectiva se calcula como $P_C = E_\theta(P(\theta)) = E_\theta(\theta)$.

Para calcular la esperanza de θ hacemos uso del hecho de que su función de densidad integra la unidad,

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = 1 \tag{2.10}$$

de donde,

$$\int_0^\infty r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = B(a,b) \tag{2.11}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (2.10),

$$E(\theta) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty \theta r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \frac{r}{B(a,b)} \int_0^\infty r^{a-1} \frac{\theta^b}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta =$$

[3] Partimos de conocer, aunque lo comprobaremos en el Capítulo 4, la media y la varianza de una Binomial negativa.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r}{B(a,b)}B(a-1,b+1) = r\frac{\frac{\Gamma(a-1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} = r\frac{(a-2)!(b)!}{(a-1)!(b-1)!} = \\
&= r\frac{b}{a-1}, \ si\ a \neq 1.
\end{aligned}
$$

Luego, la prima colectiva es,

$$P_C = E_\theta(\theta) = \frac{rb}{a-1}, \ si\ a \neq 1. \tag{2.12}$$

b) Si utilizamos el principio de varianza, siguiendo el Teorema 2.4, la prima de riesgo es

$$P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var_\theta(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta + \frac{\theta(r+\theta)}{r\theta} = \frac{\theta(r+1)}{r} + 1 \tag{2.13}$$

Y en este caso, la prima colectiva es $P_C = E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))}$.

Para calcular $Var_\theta(P(\theta))$, *nos hace falta conocer la varianza de* θ *y por tanto su momento ordinario de orden 2,* $E(\theta^2)$.

Dicho momento, al igual que la media, se calcula haciendo uso de la forma de la integral que sabemos hacer de la densidad de una Beta.

Así,

$$
\begin{aligned}
E(\theta^2) &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^\infty \theta^2 r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^\infty r^a \frac{\theta^{b+1}}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta = \\
&= \frac{r^2}{B(a,b)}\int_0^\infty r^{a-2}\frac{\theta^{b+1}}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta = \frac{r^2}{B(a,b)}B(a-2,b+2) = \\
&= r^2\frac{(b+1)b}{(a-1)(a-2)}, \ si\ a \neq 1,2.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
Var(\theta) &= E(\theta^2) - [E(\theta)]^2 = r^2\frac{(b+1)b}{(a-1)(a-2)} - [\frac{rb}{(a-1)}]^2 = \\
&= \frac{r^2 b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)}, \ si\ a \neq 1,2.
\end{aligned}
$$

De donde,

$$E(P(\theta)) = E_\theta(1 + \theta\frac{1+r}{r}) = 1 + \frac{(1+r)b}{a-1}$$

y

$$Var_\theta(P(\theta)) = Var(1+\theta\frac{1+r}{r}) = \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)},$$

siendo $a \neq 1,2$. *Por tanto, la prima colectiva en este caso resulta ser,*

$$\begin{aligned} P_C &= E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} = \\ &= 1+\frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{\frac{(1+r)^2b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)}}{1+\frac{(1+r)b}{(a-1)}} = \\ &= 1+\frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)(a-2)[(a-1)+(1+r)b]}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

si $a \neq 1,2$.

2.3. Prima de Bayes o a posteriori

Para obtener la prima de Bayes o a posteriori, debemos combinar la información a priori obtenida del parámetro θ y la información muestral. Si la densidad a priori viene dada por $\pi(\theta)$ y $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ es un vector que recoge la información muestral, la verosimilitud del dato observado será $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)$. Utilizando el teorema de Bayes, la distribución a priori será:

$$\pi(\vec{x}/\theta) = \frac{\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)}{\int\limits_\theta \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)d\theta} \;\; \alpha \;\; \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)$$

Con lo cual, la prima de Bayes se puede definir de la siguiente manera:

Definición 2.4 *Dados un riesgo X,* (X/θ), *con función de densidad de probabilidad* $f(x/\theta)$, *siendo* θ *un parámetro desconocido con distribución a priori* $\pi(\theta)$, *una función de pérdida* $\mathcal{L}: R^2 \to R$ *y un vector de datos observados* $\vec{x}$, *la prima de Bayes es el valor* $P(\vec{x})$ *que minimiza:*

$$\int\limits_\theta \mathcal{L}[\mathcal{P}(\theta), \mathcal{P}(\vec{x})]\pi(\theta/\vec{x})d\theta$$

siendo $P(\theta)$ *la prima de riesgo y* $\pi(\theta/\vec{x})$ *la distribución a posteriori de* θ *dada la muestra.*

Suponiendo los resultados de los Teoremas 2.1-2.4, para la prima de riesgo, y 2.5-2.8, para la prima colectiva, se pueden obtener las expresiones de la prima de Bayes para los principios de cálculo de primas vistas anteriormente, de la siguiente forma:

Teorema 2.9 *Bajo el principio de prima neta, tenemos que la función de pérdida es* $\mathcal{L}(\mathcal{P}(\theta), \mathcal{P}(\vec{x}))^2$*, donde* $P(\theta) = E(X/\theta)$*. Entonces la prima de Bayes viene dada por*

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}[E_f(X/\theta)],$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ *es la distribución a posteriori de* θ *dado* $\vec{x}$*.*

Teorema 2.10 *Para el principio de utilidad exponencial, tenemos que la función de pérdida es* $\mathcal{L}(\mathcal{P}(\theta), \mathcal{P}(\vec{x})) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha\mathcal{P}(\theta)} - e^{\alpha\mathcal{P}(\vec{x})})^2$*, donde*

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{1}{\alpha}\log E(e^{\alpha P(\theta)}).$$

Entonces la prima de Bayes viene dada por:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\log E_{\pi(\theta/\vec{x})}(e^{\alpha P(\theta)}),$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ *es la distribución a posteriori de* θ *dado* $\vec{x}$*.*

Teorema 2.11 *Para el principio de prima de Esscher, tenemos que la función de pérdida es* $\mathcal{L}(\mathcal{P}(\theta), \mathcal{P}(\vec{x})) = e^{\alpha\mathcal{P}(\theta)}(\mathcal{P}(\theta) - \mathcal{P}(\vec{x}))^2, \quad \alpha > 0$*. Entonces la prima de Bayes viene dada por:*

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[\mathcal{P}(\theta)e^{\alpha P(\theta)}]}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[e^{\alpha P(\theta)}]},$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ *es la distribución a posteriori de* θ *dada* $\vec{x}$*.*

Teorema 2.12 *Para el principio de prima de varianza, tenemos que la función de pérdida es* $\mathcal{L}(\mathcal{P}(\theta), \mathcal{P}(\vec{x})) = \mathcal{P}(\theta)(\mathcal{P}(\theta) - \mathcal{P}(\vec{x}))^2$*. Entonces, la prima de Bayes viene dada por:*

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[\mathcal{P}(\theta)]^2}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[P(\theta)]},$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ *es la distribución a posteriori de* θ *dada* $\vec{x}$*.*

A la vista de los resultados mostrados en los Teoremas 2.9-2.12, calcular la prima de Bayes equivale a utilizar las fórmulas de la prima colectiva dados en los Teoremas 2.5-2.8, reemplazando la distribución a priori θ, por la distribución a posteriori de θ dado $\vec{x}$.

En este sentido, serán útiles las familias de distribuciones conjugadas. Existe una clase de distribuciones a priori conocidas como distribuciones conjugadas, en las cuales se da que si la distribución a priori es de la familia conjugada, la distribución a posteriori lo será también.

Definición 2.5 *Supongamos que el modelo que genera los datos x tiene distribución $f(x/\theta)$. Una familia de densidades a priori $\mathcal{F}$ para el parámetro θ, se dice conjugada para el muestreo dado por $f(x/\theta)$ si para cualquier densidad a priori $\pi(\theta) \in \mathcal{F}$ se confirma que la densidad a posteriori $\pi(\theta/\vec{x}) \ \alpha \ \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)$ es también una densidad de la familia $\mathcal{F}$.*

En la práctica consideramos familias conjugadas aquellas que aparecen de forma natural en los procesos de muestreo más habituales. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.3 *Teniendo en cuenta que el riesgo X/θ sigue una distribución de Poisson, $P(\theta)$, y θ sigue una distribución gamma, $\gamma(a, r)$. Obtendremos que la distribución a posteriori $\pi(\theta/x) \in \gamma(a+n, r+n\bar{x})$. Es decir, la clase de densidades a priori $\gamma(a, r)$ es conjugada para el muestreo de Poisson. Para verlo, calculamos la verosimilitud:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}/\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}...e^{-\theta}\frac{\theta^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{x_1+...+x_n}}{x_1!...x_n!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{n\bar{x}}}{x_1!...x_n!}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{x} = \frac{x_1+...+x_n}{n}$, luego $n\bar{x} = x_1 + ... + x_n$ y

$$\pi(\theta) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}e^{-a\theta}\theta^{r-1}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta) &= e^{-n\theta}\frac{\theta^{n\bar{x}}}{x_1!...x_n!}\frac{a^r}{\Gamma(r)}e^{-a\theta}\theta^{r-1} \\
&= \frac{a^r}{\Gamma(r)x_1!...x_n!}e^{-(a+n)\theta}\theta^{n\bar{x}+r-1} \quad \alpha \quad e^{-(a+n)\theta}\theta^{n\bar{x}+r-1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\pi(\theta/\vec{x}) \in \gamma(a + n, r + n\bar{x})$.

Ejemplo 2.4 *Teniendo en cuenta que el riesgo X/θ sigue una distribución binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$, y θ sigue una distribución Beta de segunda especie $Be(r, a, b)$. Obtendremos que la distribución a posteriori, $\pi(\theta/x) \in Be(r, a+nr, b+n\bar{x})$ y por tanto, la clase de densidades a priori Beta de segunda especie (r, a, b) es conjugada para el muestreo mediante una Binomial negativa.*

En este caso, la verosimilitud $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta) \ \alpha \ (\frac{r}{r+\theta})^{nr}(\frac{\theta}{r+\theta})^{x_1 \ldots x_n}$ y $\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)}\frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$, de donde, $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta) \ \alpha \ \frac{\theta^{b+n\bar{x}-1}}{(r+\theta)^{n\bar{x}+a+b}}$, luego

$$\pi(\theta/\vec{x}) \in Be(r, a+nr, b+n\bar{x}).$$

Ejemplo 2.5 *a) Veamos cómo se calcula la prima de Bayes bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo X/θ sigue una distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, y θ sigue una distribución gamma, $\gamma(a, r)$, a, r>0.*

Según el Teorema 2.9, la prima de Bayes bajo el principio de prima neta es: $\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))$, donde $P(\theta) = E(X/\theta) = \theta$.

Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.3, la distribución a posteriori de $\theta/\vec{x}$ es $\gamma(a+n, r+n\bar{x})$.

Por lo tanto la prima de Bayes será:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(E(X/\theta)) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta) = \frac{r+n\bar{x}}{a+n} \tag{2.15}$$

b) Si utilizamos el principio de varianza, por el Teorema 2.12, la prima de Bayes será:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta)) + \frac{Var_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))},$$

donde $P(\theta) = \theta + 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &= E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta+1) + \frac{Var_\theta(\theta+1)}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta+1)} = \frac{r+n\bar{x}}{a+n} + 1 + \frac{\frac{r+n\bar{x}}{(a+n)^2}}{\frac{r+n\bar{x}}{a+n}+1} = \\ &= \frac{(r+n\bar{x}+a+n)^2 + r + n\bar{x}}{(a+n)(r+n\bar{x}+a+n)} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ejemplo 2.6 *a) En este caso, veremos cómo se calcula la prima de Bayes bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo X/θ sigue una distribución Binomial Negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ con función de cuantía:*

$$P(x/\theta) = \left(\begin{array}{c} r+x-1 \\ x \end{array} \right) (\tfrac{r}{r+\theta})^r (\tfrac{\theta}{r+\theta})^x, \; x = 0,1,2,..$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ *y* $\theta > 0$*, sigue una distribución Beta de segunda especie de parámetros* r, a, b*.*

Según el Teorema 2.9, la prima de Bayes será: $\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}E(X/\theta)$

Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.4, la distribución a posteriori de $\theta/\vec{x}$ *es Beta de parámetros* $(r, a+nr, b+n\bar{x})$*.*

Además si $X/\theta \in Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$*, también hemos visto en el Ejemplo 2.1 a) que* $E(X/\theta) = \theta$*, siendo en este caso la prima de riesgo* $\mathcal{P}(\theta) = E(X/\theta) = \theta$*.*

Por lo tanto, la prima de Bayes será, $\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\mathcal{P}(\theta)) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta)$*. Si* $E\theta = \frac{rb}{a-1}$*, siendo* $\theta \in$ *Beta de parámetros (r, a, b), sustituyendo los parámetros de la distribución a posteriori, obtenemos que la prima de Bayes, bajo el principio de prima neta es en este caso,*

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta) = r\frac{b+n\bar{x}}{a+nr-1}.$$

b) Análogamente si utilizamos el principio de varianza, la prima de riesgo (ver Ejemplo 2.1b)) es: $\mathcal{P}(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta\frac{(r+1)}{r} + 1$*, y por tanto, la prima de Bayes es:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{x}) &= E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\mathcal{P}(\theta)) + \frac{Var_{\pi(\theta/\vec{x})}(\mathcal{P}(\theta))}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\mathcal{P}(\theta))} = 1 + \frac{\frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1}{(a+nr-1)^2(a+nr-2)}}{1+\frac{(1+r)(b+n\bar{x}}{a+nr-1}} = \\ &= 1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{a+nr-1} + \\ &+ \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]} \qquad (2.17) \end{aligned}$$

Expresión análoga a la obtenida en el Ejemplo 2.1 b) (2.14) para la prima colectiva, donde ahora $a+nr$ *reemplaza al parámetro* a*, y* $b+n\bar{x}$ *reemplaza al parámetro* b*.*

Capítulo 3

La teoría de la credibilidad

3.1. Introducción

Esta teoría se define como el conjunto de técnicas que permiten al asegurador ajustar de modo sistemático, en función de la experiencia de siniestralidad, las primas de los seguros.

Además, se ocupa de medir la importancia que ha de tener la información de un individuo frente a la información de la cartera de seguros en relación a la prima que debe satisfacer.

Uno de sus principales usos se presenta en el seguro de automóvil, son los denominados sistemas de tarificación bonus-malus. En ellos, la prima inicial se va transformando sucesivamente a medida que se incorpora la información de la siniestralidad. Con este sistema, el asegurado puede ver bonificada o penalizada su prima particular dependiendo de su propia experiencia de reclamaciones.

En las últimas décadas, el sector financiero ha sufrido un gran cambio, debido principalmente a la globalización de los mercados, a las nuevas tecnologías, al desarrollo de complejos productos derivados y a la incorporación a los mercados de países subdesarroyados. Por todo ello, es de vital importancia para alcanzar el éxito en la gestión financiera, el control y la medición de riesgos. De ahí que haya nacido el riesgo operacional, el cual es un riesgo adscrito a sucesos que no incluyen los de mercado ni los de crédito, y que pueden tener una procedencia interna y/o externa. Para modelizar el riesgo operacional de acuerdo con las nuevas indicaciones regulatorias conocidas como Basilea II, se está realizando un esfuerzo en la implementación de procedimientos tanto cualitativos como cuantitativos.

3.2. Concepto y perspectiva histórica

"Proceedings" fue el primer trabajo publicado sobre teoría de la credibilidad. Fue escrito por [Whitney, 1918], el cual se basó en el trabajo de [Mowbray, 1914] para realizarlo. "Proceedings" propone que de una forma simple, la prima que se debe pagar por parte del asegurado incluya su experiencia individual y la de la cartera de seguros:

$$\mathcal{P} = Z\ X + (1 - Z)\ C \tag{3.1}$$

donde X es la experiencia individual, C la información que se dispone sobre el colectivo y Z un factor de ponderación denominado factor de credibilidad.

Además, el factor de credibilidad Z debería satisfacer lo siguiente:

- Ser una función del tiempo de vigencia de la póliza, n, por tanto $Z \equiv Z(n)$
- Ser una función creciente en n, de modo que se aproxime a 1 cuando n tienda a infinito, mientras que tienda a 0 cuando n tienda a 0. Por tanto, si $n = 0$, supondríamos que se trataría de un contrato nuevo y la prima a cobrar sería C. Por otro lado, si n tiende a infinito, la prima estará basada en la experiencia individual, por lo que la prima sería X,
- Z debería ser también una función creciente de la varianza de las primas teóricas, con limite 1 cuando aquella tiende a infinito y 0 cuando tiende a 0.

[Hickmann, 1975] propuso que la teoría de la credibilidad es el mecanismo que permite el ajuste sistemático de las primas de seguros conforme se obtiene la experiencia de siniestralidad.

Por otro lado, [Hewitt, 1970] define credibilidad como un estimador lineal de la prima teórica esperada que sea una combinación convexa entre la hipótesis y la observación.

Más tarde, a mediados del siglo XX, empezó a tener importancia una nueva visión de la estadística, la Bayesiana. Muchos estimadores Bayes y su distribución a priori natural conjugada respondían a la propuesta de [Mowbray, 1914], [Whitney, 1918] y [Bailey, 1945]. En este aspecto destacamos el trabajo de [Mayerson, 1964] en el que por primera vez se utilizan los términos credibilidad y estadística Bayesiana.

En 1975 se publicó el texto " Credibility. Theory and Applications ", el cual incluye todo el conocimiento existente hasta la fecha sobre la teoría de la credibilidad.

Lo que hoy en día se entiende por teoría de la credibilidad moderna surge con la publicación del modelo de distribución libre, publicado por [Bühlmann, 1967]. El objetivo de este modelo es estimar la prima correspondiente a un asegurado o grupo, que forman una póliza en una cartera de seguros, restringiéndose a las primas lineales y utilizando el método de los mínimos cuadrados.

Posteriormente en [Bühlmann y Straub, 1972] se generaliza el modelo clásico de [Bühlmann, 1967] a una cartera de seguros. La solución obtenida es más general que la del modelo de [Bühlmann, 1967], además de incluirla como un caso particular.

Pocos años más tarde, [Jewell, 1974] se planteó el problema de considerar como verosimilitud asociada al número de reclamaciones. La solución fue que el estimador de la prima neta admitía siempre una expresión lineal, con el factor de credibilidad igual al de [Bühlmann, 1967].

Gracias a [Bühlmann, 1975] la teoría de credibilidad se ha llevado al terreno de la teoría de juegos, cuando interpretó el problema de decisión del actuario para elegir una prima de seguro a cobrar como un juego entre dos jugadores, el actuario y la naturaleza utilizando el criterio de decisión minimax.

Combinando la teoría de la decisión y la de juegos, aparecen los modelos gamma-minimax ([Eichenauer et al., 1988]) y posterior regret gamma-minimax, ver ([Gómez-Déniz et al., 2006] y [Gómez-Déniz y Sarabia, 2008]). Estos modelos surgen de la estadística Bayesiana robusta, en la cual el investigador no tiene conocimiento sobre la distribución a priori del parámetro de riesgo.

Otro tipo de modelos tienen en cuenta el hecho empíricamente contrastado de que las distribuciones del número de siniestros en el ramo de automóviles están muy cargados de ceros, incorporando las distribuciones infladas de ceros, ver [Boucher y Denuit, 2007]. Además, se han propuesto modelos de credibilidad tipo panel, basados en varios períodos de tiempo, ver [Gajek et al., 2007].

3.3. Credibilidad total

Si los asegurados tienen una experiencia de reclamación favorable, querrán que la prima que tengan que pagar esté basada en su experiencia de siniestralidad. Sin embargo, esto sólo será posible si la experiencia de reclamación es estable. Para resolver este problema, una manera es suponer que $\bar{x}$ es estable si existe una probabilidad alta de que la diferencia entre $\bar{x}$ y ϵ sea pequeña, siendo ϵ la media teórica de $\bar{x}$. Esto requeriría admitir credibilidad total si se verifica:

$$Pr(|\bar{x}-\epsilon| \leq c\epsilon) = Pr[((1-c)\epsilon \leq \bar{x} \leq (1+c)\epsilon)] \geq p \tag{3.2}$$

siendo $0 < p < 1$ y $c > 0$.

La fórmula (3.2) también se puede escribir de la siguiente forma:

$$Pr[(|\frac{\bar{x}-\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq \frac{c\epsilon\sqrt{n}}{\sigma})] \geq p \tag{3.3}$$

Además, X_p se define como:

$$X_p = inf_x\{Pr(|\frac{\bar{x}-\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq x) \geq p\}$$

Si suponemos que $\bar{x}$ sigue una $N(\epsilon, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Ésta última expresión equivale a:

$$Pr(|\frac{\bar{x}-\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq X_p) = p \tag{3.4}$$

donde X_p es el cuantil $1-\frac{p}{2}$. Así, tendremos que X_p es 1,96 si suponemos que p es 0,95.

Por tanto, de (3.3) para suponer credibilidad total, se ha de verificar que:

$$\frac{c\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq X_p$$

que es lo mismo que el coeficiente de variación

$$g_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} \leq \frac{c}{X_p}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} \tag{3.5}$$

es decir, que el coeficiente de variación es menor o igual que $\sqrt{n/\lambda_0}$.

Así, se supondrá credibilidad total si,

$$n \geq \lambda_0 (\frac{\sigma}{\epsilon})^2. \tag{3.6}$$

En la práctica, si la experiencia del asegurado es suficientemente grande, de acuerdo al Teorema Central del Límite, la variable aleatoria $(\bar{x}-x)/(\sigma\sqrt{n})$ sigue una distribución $N(0,1)$ aproximadamente. Así, obtenemos que la fórmula (3.4) puede escribirse como $p = 2\Phi(X_p) - 1$, donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la normal tipificada. Y X_p es el cuantil $1 - p/2$ de la distribución normal tipificada.

Ejemplo 3.1 *Se cuenta con la experiencia x_j, donde $j = 1, ..., n$, de un contrato de seguro y que $x_1, ..., x_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tipo Poisson ($\theta = 200$). ¿Cuál es el valor más pequeño de n para considerar credibilidad total? Suponiendo que $c = 0,04$ y que $p = 0,95$, y, además, teniendo en cuenta que la aseguradora tarifica atendiendo sólo al número de reclamaciones, X_i, $i = 1, ..., n$ son i.i.d. $\in P(\theta)$ con $\theta = 200$. Entonces, $EX_i = VarX_i = 200$. Además, $E(\bar{x}) = 200$ y $Var(\bar{x}) = \sqrt{\frac{200}{n}}$.*

Si suponemos que $p = 0,95$, obtenemos que el area $1 - p/2 = 0,025$. Por lo que $\Phi(t_{\alpha/2}) = 0,975$. Y entonces $X_p = t_{\alpha/2} = 1,96$.

En este caso, por ser una distribución de Poisson, $\epsilon = \sigma^2 = 200$. Entonces, $\lambda_0 = (\frac{X_p}{c})^2 = (\frac{1,96}{0,04})^2 = 49^2 = 2401$.

Según (3.6), $n \geq \lambda_0(\frac{\sigma}{\epsilon})^2 = 2401(\frac{\sqrt{200}}{200})^2 = 12{,}005$.

Por lo tanto, si los contratos son anuales, harán falta algo más de 12 años para asumir credibilidad total.

3.4. Credibilidad parcial

En la práctica, para muchos asegurados la experiencia de siniestralidad es insuficiente para suponer credibilidad total, es decir $Z(n) = 1$. En la credibilidad parcial, la prima es una combinación lineal convexa entre la experiencia del asegurado y la del colectivo, de modo que:

$$\mathcal{P} = Z(n)\bar{x} + [1 - Z(n)]M$$

Para obtener la prima, habrá primero que obtener $Z(n)$, y dado que:

$$Var(\mathcal{P}) = Var[Z(n)\bar{x} + [1 - Z(n)]M] = (Z(n))^2 Var(\bar{x}) = (Z(n))^2 \frac{\sigma^2}{n},$$

igualando este último término a ϵ^2/λ_0 resulta,

$$Z(n) = (\epsilon/\sigma)\sqrt{n/\lambda_0}$$

Y así, obtenemos que

$$Z(n) = min\{\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{\lambda_0}}, 1\} \tag{3.7}$$

Ejemplo 3.2 *Con los datos del Ejemplo 3.1, vamos a calcular el factor de credibilidad para una experiencia de reclamaciones correspondiente a 10 años.*

En este caso:

$$Z(n) = Z(10) = min\left\{\frac{200}{\sqrt{200}}\sqrt{\frac{10}{2401}}, 1\right\} = min\{0{,}9126, 1\} = 0{,}9126.$$

Es decir, en más de un $90\,\%$ *se considerarán los datos del colectivo y en menos del* $10\,\%$ *los del individuo a la hora de calcular la prima.*

3.5. Credibilidad e inferencia Bayesiana

En general, cuando se quiere tarificar un riesgo nuevo no se dispone de datos, por ello resulta útil el uso de distribuciones a priori.

El problema de la teoría de la credibilidad consiste en calcular la ponderación que afecta a la experiencia de la siniestralidad de una póliza respecto a la experiencia de un colectivo al cual pertenece dicha póliza.

Si consideramos la siguiente tabla, la cual consta de k asegurados y n periodos de observación de las mismas.

La teoría de la credibilidad determina una prima establecida como una combinación lineal o convexa entre la experiencia de un asegurado y la del colectivo. Esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}_j = [1 - Z(n)]\mathcal{P}_0 + Z(n)]\tilde{\mathcal{P}}_j$$

de donde:

	1	2	...	j	...	k
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{j1}	...	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{j2}	...	X_{k2}
...	...	...	...	...	...	...
n	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{jn}	...	X_{kn}

- $\mathcal{P}_j$ es la prima a aplicar a los asegurados del riesgo j.
- $\mathcal{P}_0$ es la prima del colectivo al que pertenece el asegurador j.
- $\tilde{\mathcal{P}}_j$ es la prima obtenida en base a la experiencia del asegurado j.
- $Z(n)$ es el factor de credibilidad que verifica:

  $$\lim_{n\to\infty} Z(n) = 1$$

  siendo n el número de expuestos al riesgo j o el periodo de observación de la póliza j.

También se puede escribir de la siguiente forma:

[*Prima (a posteriori)* $= [1 - Z(n)]$ *Prima a priori* $+ Z(n)$ *Experiencia observada.*]

Según la definición propuesta por [Hickmann, 1975], la teoría de la credibilidad es un mecanismo que permite el ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene la experiencia de siniestralidad.

Así, la teoría de la credibilidad sigue un esquema bayesiano, dando entrada a la información a priori con la información muestral, para obtener finalmente una situación revisada de la prima.

Ejemplo 3.3 *Comprobaremos que la prima Bayes, bajo el principio de prima neta, obtenida en el Ejemplo 2.5 a) donde X/θ seguía una distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$ y θ una distribución $\gamma(a,r)$, $a, r > 0$, se puede escribir como una fórmula de credibilidad.*

La prima de Bayes obtenida en (2.15) puede escribirse como:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{a}{a}\frac{r}{a+n} + \frac{n\bar{x}}{a+n}$$

donde se ha multiplicado y dividido el primer término por a. Entonces resulta:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{r}{a}\frac{a}{a+n} + \frac{n}{a+n}\bar{x} = E(\theta)\frac{a}{a+n} + \frac{n}{a+n}\bar{x} = P_C(1 - Z(n)) + Z(n)\bar{x}$$

donde $Z(n) = \frac{n}{a+n}$ *y* P_C *es la prima colectiva que en este caso viene dada por* $P_C = \frac{r}{a}$, $a > 0$.

Ejemplo 3.4 *Comprobaremos que la prima de Bayes obtenida en el Ejemplo 2.6 a), donde* X/θ *seguía una distribución* $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ *y* θ *una distribución Beta de segunda especie de parámetros* $r, a, b > 0$*, se puede escribir como una fórmula de credibilidad.*

La prima de Bayes obtenida fue:

$$\mathcal{P}(\vec{x}) = r\frac{b + n\bar{x}}{a + nr - 1}$$

Multiplicando y dividiendo por $a - 1$*, se obtiene:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\vec{x}) &= \frac{(a-1)r(b+n\bar{x})}{(a-1)(a+nr-1)} = \frac{rb}{a-1}\frac{a-1}{a+nr-1} + \frac{r(a-1)n\bar{x}}{(a-1)(a+nr-1)} \\
&= P_C\frac{(a-1)}{(a+nr-1)} + \frac{nr}{a+nr-1}\bar{x} = P_C(1 - Z(n)) + Z(n)\bar{x}
\end{aligned}$$

donde $Z(n) = \frac{nr}{a+nr-1}$ *y* $P_C = \frac{br}{a-1}$ *es la prima colectiva.*

Los ejemplos anteriores muestran un resultado que probaron en las décadas de los 50 y 60 [Bailey, 1945] y [Mayerson, 1964] y es que la fórmula de la credibilidad coincidía con el estimador (prima) de Bayes para determinadas combinaciones de verosimilitures y funciones a priori. Por ejemplo, para los pares Poisson-Gamma o Binomial negativa-Beta.

Posteriormente, [Jewell, 1974], demostró que estos resultados no eran más que casos particulares del caso general, consistente en considerar como verosimilitud la familia exponencial.

En definitiva, el estimador de credibilidad de Bühlmann es igual al de Bayes de la prima en un gran número de casos. Esto ocurre, por ejemplo, si la distribución a priori es conjugada y la verosimilitud es un miembro de la familia exponencial.

Entonces, como hemos visto en los Ejemplos 3.3 y 3.4, el estimador del factor de credibilidad de Bühlmann de la prima neta coincide con el Bayesiano.

3.6. Sistema bonus-malus

Con objeto de reducir el número de reclamaciones en el sector del seguro de automóviles, las compañías Europeas introdujeron el sistema de tarificación bonus-malus. Este sistema premia a los conductores que no experimentan reclamación, los buenos, penalizando a los malos.

Es un sistema de tarificación en el que la prima inicial, a medida que se incorpora a la experiencia de siniestralidad, se va modelando. Para ello se parte de un nivel neutro en el cual, el asegurado entra en la categoría bonus para niveles inferiores o, por el contrario, en la escala malus para niveles superiores.

Este sistema está basado en el número de reclamaciones, y no en la cuantía. La prima se expresa como una función del número medio de reclamaciones $\bar{x}$, donde $n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, y del período de tiempo n. Representaremos la prima bonus-malus mediante $\mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n)$.

Aplicando este sistema, un asegurado que no presente en el periodo actual ninguna reclamación, se verá bonificado en el siguiente periodo mediante un descuento de su prima. Por otro lado, si se da el caso contrario, el asegurado verá incrementada su prima. Luego, tendrán que verificarse las siguientes reglas de transición:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n)}{\partial \bar{x}} > 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n)}{\partial n} < 0$$

3.6.1. Cálculo de primas bonus-malus. Método Bayesiano

Para que la prima bonus-malus cumpla las reglas de transición, utilizando la metodología bayesiana, se debe cumplir:

$$\mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{\mathcal{P}(\vec{x})}{\mathcal{P}_C},$$

donde $P(\vec{x})$ es la prima de Bayes y P_C es la prima colectiva. Es decir, se divide la prima de Bayes entre la prima colectiva.

Ejemplo 3.5 *Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Ejemplos 2.1 y 2.5, donde X/θ seguía una distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$ y θ una distribución gamma, $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$. Calcular la prima bonus-malus:*

a)Bajo el principio de prima neta, obtuvimos que la prima colectiva $\mathcal{P}_C = \frac{r}{a}$ y la prima de Bayes, $\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{r+n\bar{x}}{a+n}$. Por lo que, para obtener la prima bonus-malus, tendremos que dividir la prima de Bayes, $\mathcal{P}(\vec{x})$, entre la colectiva, $\mathcal{P}_C$.

$$\mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{\frac{r+n\bar{x}}{a+n}}{\frac{r}{a}} = \frac{(r + n\bar{x})a}{(a + n)r} \tag{3.8}$$

b)Bajo el principio de varianza, obtuvimos que la prima colectiva era $\mathcal{P}_C = \frac{(r+a)^2+r}{a(r+a)}$ *y la prima de Bayes,* $\mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{(r+n\bar{x}+a+n)^2+r+n\bar{x}}{(a+n)(r+n\bar{x}+a+n)}$*. Entonces, la prima bonus-malus es,*

$$\mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{[(r+n\bar{x}+a+n)^2+r+n\bar{x}][a(r+a)]}{[(a+n)(r+n\bar{x}+a+n)][(r+a)^2+r]} \tag{3.9}$$

Ejemplo 3.6 *Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Ejemplos 2.2 y 2.6, donde* X/θ *seguía una distribución Binomial negativa,* $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ *y* θ *una distribución Beta de segunda especie con* $r, a, b > 0$*. Calcular la prima bonus-malus:*

a) Bajo el principio de prima neta; obtuvimos que la prima colectiva era $\mathcal{P}_C = r\frac{b}{(a-1)}$ *y* $\mathcal{P}(\vec{x}) = r\frac{(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)}$*. Entonces, la prima bonus-malus es:*

$$\mathcal{P}_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{(b+n\bar{x})(a-1)}{b(a+nr-1)} \tag{3.10}$$

b)Bajo el principio de varianza, según (2.14) la prima colectiva fue:

$$P_C = 1 + \frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)(a-2)[(a-1)+(1+r)b]},$$

mientras que la prima de Bayes según (2.17) fué:

$$P(\vec{x}) = 1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)} + \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]}$$

Por lo tanto, la prima bonus-malus es:

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)} + \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]}}{1 + \frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)(a-2)[(a-1)+(1+r)b]}}. \tag{3.11}$$

Capítulo 4

Caso ilustrativo

Con objeto de ilustrar el procedimiento de cálculo de las primas bonus-malus, consideraremos un ejemplo de datos reales.

En la siguiente tabla tenemos el número de asegurados para un número de reclamaciones en una cartera de seguros de automóvil en Alemania en 1960. Esta cartera aparece en los trabajos de [Willmot, 1987] y [Gómez-Déniz y Sarabia, 2008].

Cuadro 4.1: Frecuencias observadas, Willmot 1987

Nº de reclamaciones	Nº de asegurados
0	20592
1	2651
2	297
3	41
4	7
5	0
6	1

Se observa que hay un total de 23589 asegurados. Denotaremos por X a la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones.

A partir de esta información y basándonos en un sistema de tarificación bonus-malus, y el principio de prima neta vamos a obtener las primas a pagar en los siguientes cinco años analizando las dos siguientes situaciones:

4.1. Situación A

X/θ sigue una distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, tal que,

$$\mathcal{P}(x/\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

y θ sigue una distribución $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$, con función de densidad:

$$\pi(\theta) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-a\theta}$$

donde para $r > 0$, $\Gamma(r) = \int_0^\infty n^{r-1}e^{-n}dn$, y $\theta \geq 0$.

En este caso y con el fin de calcular el porcentaje de prima a aplicar cada periodo a un individuo dado su número de reclamaciones, bajo un sistema de tarificación bonus-malus y el principio de prima neta, la prima bonus-malus, de acuerdo con el Ejemplo 3.5, es:

$$\mathcal{P}_{BM} = \frac{a(r + n\bar{x})}{r(a + n)} \tag{4.1}$$

que se obtiene, como hemos visto, del cociente de la prima de Bayes y la prima colectiva.

Para poder utilizar correctamente la fórmula (4.1), tenemos que realizar previamente el siguiente análisis estadístico.

4.1.1. Distribución incondicionada

Primero, deberemos obtener la distribución incondicionada de X teniendo en cuenta que X/θ sigue una distribución Poisson (θ), en la que θ se comporta como una $\gamma(a, r)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(X = k) &= \int_0^\infty \mathcal{P}(k/\theta)\pi(\theta)d\theta = \int_0^\infty \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!}\frac{a^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-a\theta}d\theta \\
&= \frac{a^r}{k!\Gamma(r)}\int_0^\infty e^{-\theta}\theta^k\theta^{r-1}e^{-a\theta}d\theta = \frac{a^r}{k!\Gamma(r)}\int_0^\infty e^{-\theta(1+a)}\theta^{k+r-1}d\theta \\
&= \frac{a^r}{k!\Gamma(r)}\frac{\Gamma(k+r)}{(a+1)^{k+r}} = \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!}(\frac{a}{a+1})^r(\frac{1}{a+1})^k
\end{aligned}$$

Entonces,

$$P(X=k)=\begin{pmatrix} r+k-1 \\ k \end{pmatrix}(\frac{a}{a+1})^r(\frac{1}{a+1})^k \quad k=0,1,2...$$

En difinitiva, se trata de una Binomial negativa de parámetros $(r, \frac{a}{a+1})$.

4.1.2. Prueba de ajuste

A partir de la información muestral dada en el Cuadro 4.1, es preciso estimar el valor de los parámetros a y r, y realizar una prueba de ajuste χ^2 que confirme la distribución propuesta, ver [Ruíz Maya y Martín Pliego, 1999].

Basándonos en la teoría de este tipo de ajustes necesitamos estimar los parámetros mediante máxima verosimilitud. Aplicando este método veremos que se llega a una ecuación no lineal que es preciso resolver mediante métodos numéricos.

Asimismo, y sabiendo que los resultados teóricos de la prueba de ajuste χ^2 no están demostrados para la estimación por momentos, planteamos este método dada la mayor facilidad en la obtención de las estimaciones.

Estimación máximo verosímil

A partir de una muestra aleatoria simple $\vec{x}=(x_1,...,x_n)$, la función de verosimilitud es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{x},a,r) &= \begin{pmatrix} r+x_1-1 \\ x_1 \end{pmatrix}(\frac{a}{a+1})^r(\frac{1}{a+1})^{x_1}\begin{pmatrix} r+x_2-1 \\ x_2 \end{pmatrix}(\frac{a}{a+1})^r(\frac{1}{a+1})^{x_2}... \\ &= \prod_{i=1}^{n}\begin{pmatrix} r+x_i-1 \\ x_i \end{pmatrix}(\frac{a}{a+1})^{rn}(\frac{1}{a+1})^{x_1+...+x_n}\end{aligned}$$

Tomando logaritmo neperiano:

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,r) &= \sum_{i=1}^{n}\ln\begin{pmatrix} r+x_i-1 \\ x_i \end{pmatrix}+rn\ln(\frac{a}{a+1})+n\bar{x}\ln(\frac{1}{a+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\ln\begin{pmatrix} r+x_i-1 \\ x_i \end{pmatrix}+rn\ln(\frac{a}{a+1})-n\bar{x}\ln(a+1)\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} r+x_i-1 \\ x_i \end{pmatrix}=\frac{(x+x_i-1)}{x_i!(r-1)!}=\frac{1}{x_i}\prod_{j=0}^{x_i-1}(r+x_i-1-j) \tag{4.2}$$

Se obtiene:

$$\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,r) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{x_i-1}\ln(r+x_i-1-j) - \ln x_i!) + rn\ln(\frac{a}{a+1}) - n\bar{x}\ln(a+1) \quad (4.3)$$

Para obtener los estimadores de r y a por el método de máxima verosimilitud, tenemos que determinar los valores de dichos parámetros que maximizan (4.3), para ello derivamos con respecto a a y a r e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,r)}{\partial a} &= rn\frac{\frac{(a+1)-a}{(a+1)^2}}{\frac{a}{a+1}} - n\bar{x}\frac{1}{a+1} = rn\frac{1}{a(a+1)} - n\bar{x}\frac{1}{a+1} = 0\\ &\longrightarrow r\frac{1}{a} - \bar{x} = 0 \longrightarrow \frac{r}{a} = \bar{x} \Longleftrightarrow \hat{a}_{MV} = \frac{r}{\bar{x}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,r)}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{(r+x_i-1-j)}) + n\ln\frac{a}{a+1} = 0$$

Sustituyendo el valor de $a = \frac{r}{\bar{x}}$ en esta ecuación, resulta:

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{r+x_i-1-j}) + n\ln\frac{\frac{r}{\bar{x}}}{\frac{r}{\bar{x}}+1} = 0$$

A partir de la información muestral del Cuadro 4.1, el sistema de ecuaciones a resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} a = \frac{r}{0{,}1442197634} \\ \frac{2997}{r} + \frac{346}{r+1} + \frac{49}{r+2} + \frac{8}{r+3} + \frac{1}{r+4} + \frac{1}{r+5} - 23589(\ln r - \ln(r+0{,}1442197634)) = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo numéricamente esta ecuación[1] se obtiene: $\hat{a}_{MV} = 7{,}7513$, $\hat{r}_{MV} = 1{,}1179$.

Estimación por momentos

Para obtener las estimaciones por momentos, necesitamos imponer las ecuaciones que igualan los momentos teóricos a los momentos muestrales. Esto es, $EX = \bar{x}$, $VarX = s_X^2$.

[1]Esta solución ha sido obtenida mediante métodos numéricos cuyo desarrollo escapa a los objetivos del presente trabajo.

Para obtener la esperanza de la Binomial negativa $Bn(r,p)$, utilizamos la función generatriz:

$$\alpha_X(u) = p^r(1-e^u q)^{-r}$$

$$\frac{d\alpha_X(u)}{du} = p^r(-r)(1-e^u q)^{-r-1}(-e^u q)$$

$$\frac{d\alpha_X(u)}{du}(u=0) = \frac{r(1-p)}{p} = E(X)$$

Además, podemos obtener también su varianza:

$$\frac{d\alpha''_X(u)}{du^2} = p^r rq[(r+1)e^{2u}q(1-e^u q)^{-r-2} + (1-e^u q)^{-r-1}e^u]$$

$$\frac{d\alpha''_X(u=0)}{du^2} = \frac{r(r+1)q^2 + rqp}{p^2}$$

$$Var(X) \quad = \quad E(X)^2 - [E(X)]^2 = \frac{rq}{p^2}$$

Una vez obtenidos los primeros momentos, pasaremos a estimar por el método de momentos los parámetros correspondientes de la distribución de X:

Primero, calcularemos la media muestral:

$$\bar{x} = \frac{2651 + 2\cdot 297 + 3\cdot 41 + 4\cdot 7 + 6}{23\cdot 589} = 0{,}1442197634$$

A continuación, la varianza muestral:

$$s_X^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{x_i^2\ n_i}{N} - (\bar{x})^2 = 0{,}1638630025$$

Teniendo en cuenta que el parámetro $p = \frac{a}{a+1}$, se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r(1-\frac{a}{a+1})}{\frac{a}{a+1}} = 0{,}1442197634 \\ \frac{r(1-\frac{a}{a+1})}{(\frac{a}{a+1})^2} = 0{,}1638630025 \end{array}\right\}$$

de donde $\hat{a} = 7{,}341954281$ y $\hat{r} = 1{,}058854909$.
Entonces $Bn(r, p) = Bn(1{,}058854909, 0{,}8801240134)$.

Ahora, obtendremos la tabla de frecuencias estimadas para las clases $X = 0, X = 1, X = 3$ y $X \geq 4$.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=0) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909 + 0 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909} (0{,}1198759866)^0 \\ &= 0{,}8735343854\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=1) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909 + 1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909} (0{,}1198759866) \\ &= 0{,}110878835\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=2) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909 + 2 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909} (0{,}1198759866)^2 \\ &= 0{,}01368285091\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=3) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909 + 3 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909} (0{,}1198759866)^3 \\ &= 0{,}001672424081\end{aligned}$$

$$\mathcal{P}(X \geq 4) = 1 - [\mathcal{P}(x=0) + \mathcal{P}(x=1) + \mathcal{P}(x=2) + \mathcal{P}(x=3)] = 0{,}000231504609$$

Con estos datos, podemos realizar una prueba de ajuste χ^2, con un nivel de significación del 5 %, para ver si hay evidencia estadística a favor de la hipótesis nula H_0: la muestra procede de una distribución $Bn(1{,}058854909, 0{,}8801240134)$. Para ello construimos el Cuadro 4.2 y veremos que el valor del estadístico es,

$$z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n_i})^2}{\hat{n_i}} = 4{,}473227369$$

De acuerdo con el ajuste χ^2, el estadístico $z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n_i})^2}{\hat{n_i}}$ bajo H_0, sigue una distribución χ^2_{k-r-1} grados de libertad donde $k =$n^o de clases$= 5$, $r =$n^o de parámetros estimados$= 2$. En nuestro caso, $\chi^2_{5-2-1} = \chi^2_2$. Dado que $z = 4{,}473227369 < \chi^2_{2,0,05} = 5{,}99$, no se rechaza H_0 con un nivel de significación del 5 %.

Cuadro 4.2: Situación A. Prueba de ajuste χ^2

Clases	$\hat{p}_i$	$\hat{p}_i N$	$\hat{n}_i$	n_i	$(n_i - \hat{n}_i)^2$	$\frac{(n_i-\hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$
0	0.8735343854	20605.80262	20606	20592	196	0.009511792682
1	0.110878835	2615.520839	2616	2651	1225	0.4682721713
2	0.01368285091	322.7647701	323	297	676	2.092879257
3	0.001672424081	39.45081165	39	41	4	0.1025641026
≥ 4	0.000231504609	5.460962222	5	8	9	1.8

4.1.3. Primas bonus-malus

Ahora estamos en condiciones de obtener las primas a pagar en los siguientes cinco periodos, bajo un sistema de tarificación bonus-malus y el principio de prima neta.

Hay que tener en cuenta que $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, por lo que $n\bar{x} = \sum x_i$ es el número de reclamaciones, donde n denota el periodo de tiempo. Además, en el Cuadro 4.3, todas las primas aparecen en tanto por ciento.

Entonces, teniendo en cuenta que la prima bonus-malus se calcula como,

$$\mathcal{P}_{BM} = \frac{(r + n\bar{x})a}{(a+n)r}$$

y que $\hat{a} = 7{,}341954281$ y $\hat{r} = 1{,}058854909$, y dando valores al periodo de tiempo n, y al número de siniestros $n\bar{x}$, obtendremos el siguiente cuadro:

Cuadro 4.3: Situación A. Primas bonus-malus

$n/n\bar{x}$	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	88.01	171.13	254.25	337.37	420.49	503.61
2	78.59	152.81	227.04	301.26	375.48	449.71
3	70.99	138.04	205.08	272.13	339.18	406.22
4	64.73	125.87	187	248.14	309.27	370.41
5	54.49	115.67	171.85	228.03	284.21	340.39

4.2. Situación B

Plantearemos una segunda hipótesis dada por:

X/θ sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ cuya función de cuantía es:

$P(x/\theta) = \begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} (\frac{r}{r+\theta})^r (\frac{\theta}{r+\theta})^x$, $x = 0, 1, 2, ..$

y θ sigue una distribución Beta de segunda especie, con $r, a, b > 0$ y función de densidad:

$$\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y $\theta > 0$.

En este caso y con el fin de calcular el porcentaje de prima a aplicar en cada periodo a un individuo dado su número de reclamaciones, bajo un sistema de tarificación bonus-malus y el principio de prima neta, la prima bonus-malus, de acuerdo con el Ejemplo 3.6, es:

$$P_{BM} = \frac{(b + n\bar{x})(a-1)}{(a + nr - 1)b}$$

que se obtiene del cociente de la prima de Bayes y la prima colectiva.

De nuevo, para poder utilizar correctamente la fórmula de tarificación anterior, deberemos realizar previamente el siguiente análisis estadístico.

4.2.1. Distribución incondicionada

Primero, deberemos obtener la distribución incondicionada de X teniendo en cuenta que X/θ sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$, en la que θ se comporta como una Beta de segunda especie (r, a, b). Esta distribución compuesta se obtendrá de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \int_0^\infty P(k/\theta)\pi(\theta)d\theta \\ &= \int_0^\infty \begin{pmatrix} r+k-1 \\ k \end{pmatrix} (\frac{r}{r+\theta})^r (\frac{\theta}{r+\theta})^k (\frac{r^a}{B(a,b)})(\frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}})d\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{r+k-1}{k} \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty r^a \left(\frac{r}{r+\theta}\right)^r \left(\frac{\theta}{r+\theta}\right)^k \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta \\
&= \binom{r+k-1}{k} \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty \frac{r^{a+r}\theta^{k+b-1}}{(r+\theta)^{r+k+a+b}} d\theta \\
&= \binom{r+k-1}{k} \frac{B(a+r,b+k)}{B(a,b)}; \quad k = 0,1,2...
\end{aligned}
$$

Este resultado, lo obtenemos sabiendo que la función de densidad de una Beta integra la unidad, es decir,

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} &\rightarrow \int_0^\infty \left(\frac{r^a}{B(a,b)}\right)\left(\frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}\right) d\theta = 1 \\
&\rightarrow \int_0^\infty \frac{r^a}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = B(a,b)
\end{aligned}
$$

4.2.2. Estimación de parámetros

Esta distribución depende de tres parámetros a, b y r que estimaremos a partir de los valores muestrales. Al igual que en la Situación A, y con el fin de comparar los procedimientos, propondremos tanto la estimación máximo verosímil como la estimación por momentos.

Estimación máximo verosímil

Para una m.a.s. de tamaño n, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, la función de verosimilitud es:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, a, b, r) = \prod_{i=1}^{n} \binom{r+x_i-1}{x_i} \frac{B(a+r, b+x_i)}{B(a,b)}$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Teniendo en cuenta las propiedades de la función gamma,

$$\Gamma(a+r) = (a+r)...(a+1)\Gamma(a) = \prod_{j=0}^{r-1}(a+r-j)\Gamma(a)$$

$$\Gamma(b+x_i) = (b+x_i)...(b+1)\Gamma(b) = \prod_{j=0}^{x_i-1}(b+x_i-j)\Gamma(b)$$

$$\begin{aligned}\Gamma(a+b+r+x_i) &= (a+b+r+x_i)...(a+b+1)\Gamma(a+b)\\ &= \prod_{j=0}^{r+x_i-1}(a+b+r+x_i-j)\Gamma(a+b)\end{aligned}$$

Además,

$$\left(\begin{array}{c} r+x_i-1 \\ x_i \end{array}\right) = \prod_{j=0}^{x_i-1}(r+x_i-1-j)\frac{1}{x_i!}$$

de donde:

$$\mathcal{L}(\vec{x},a,b,r) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\prod_{j=0}^{x_i-1}(r+x_i-1-j)}{x_i!}\frac{\prod_{j=0}^{r-1}(a+r-j)\prod_{j=0}^{x_i-1}(b+x_i-j)}{\prod_{j=0}^{r+x_i-1}(a+b+r+x_i-j)}$$

Tomando logaritmos:

$$\begin{aligned}\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,b,r) &= \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{x_i-1}\ln(r+x_i-1-j)+\sum_{j=0}^{r-1}\ln(a+r-j)\\ &+ \sum_{j=0}^{x_i-1}\ln(b+x_i-j)-\ln x_i!-\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\ln(a+b+r-x_i-j)]\end{aligned}$$

Derivando respecto a los parámetros a, b y r, se obtiene el sistema de ecuaciones no lineales:

$$\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,b,r)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{a+r-j}-\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j}] = 0$$

$$\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,b,r)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{b+x_i-j}-\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j}] = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\vec{x},a,b,r)}{\partial a} &= \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{r+x_i-1-j}+\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{a+r-j}\\ &- \sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j}] = 0\end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$n\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{a+r-j}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{b+x_i-j}-\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j}]=0$$

$$n\sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{a+r-j}+\sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=0}^{x_i-1}\frac{1}{r+x_i-1-j}-\sum_{j=0}^{r+x_i-1}\frac{1}{a+b+r+x_i-j}]=0$$

Este sistema necesita de métodos numéricos para su resolución[2]. Utilizando el programa mathematica, se obtiene: $\hat{a}_{MV}=51{,}1597$ y $\hat{b}_{MV}=\hat{r}_{MV}=2{,}6895$.

Estimación por momentos

En este caso, se necesitarán tres ecuaciones, igualando los momentos ordinarios de orden uno, dos y tres de la distribución a los de la muestra. Así, el sistema de ecuaciones que se plantea es,

$$EX=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_in_i}{N}=\frac{2651+2\cdot 297+3\cdot 41+4\cdot 7+6}{23589}=0{,}1442197634$$

$$EX^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2n_i}{N}=\frac{2651+2^2\cdot 297+3^2\cdot 41+4^2\cdot 7+6^2}{23589}=0{,}1846623426$$

$$EX^3=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3n_i}{N}=\frac{2651+2^3\cdot 297+3^3\cdot 41+4^3\cdot 7+6^3}{23589}=0{,}2881851711$$

Para completar la primera ecuación necesitamos $E(X)$, donde:

$$E(X)=E_\theta(E(X/\theta))$$

Además, sabemos que $E(X/\theta)=\theta$, luego: $EX=E(\theta)=\frac{rb}{a-1}$.

Entonces tenemos que:

$$\frac{rb}{a-1}=0{,}1442197634$$

Para completar la segunda ecuación necesitamos $E(X^2)$:

$$E(X^2)=E_\theta(E(X^2/\theta))=E_\theta(Var(X/\theta)+[E(X/\theta)]^2)=E_\theta(\frac{\theta(r+\theta)}{r}+\theta^2)$$

[2] Esta solución ha sido obtenida mediante métodos numéricos cuyo desarrollo escapa a los objetivos del presente trabajo.

Este resultado lo obtenemos de: $Var(X/\theta) = \frac{r\frac{\theta}{r+\theta}}{(\frac{r}{r+\theta})^2} = \frac{\frac{r\theta}{r+\theta}}{\frac{r^2}{(r+\theta)^2}} = \frac{\theta(r+\theta)}{r}$.

Continuando con lo anterior:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E_\theta(\frac{\theta(r+\theta)}{r} + \theta^2) = E_\theta(\theta) + \frac{1}{r}E_\theta(\theta^2) + E_\theta(\theta^2) \\ &= E_\theta(\theta) + \frac{r+1}{r}E_\theta(\theta^2) = \frac{rb}{a-1} + \frac{r+1}{r}r^2\frac{b(b+1)}{(a-1)(a-2)} \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{rb}{a-1} + \frac{r+1}{r}r^2\frac{b(b+1)}{(a-1)(a-2)} = 0{,}1846623426.$$

Para completar la tercera ecuación necesitamos $E(X^3)$, donde $E(X^3) = E_\theta(E(X^3/\theta))$. Primero, necesitamos calcular $E(X^3/\theta)$, es decir el momento ordinario de orden 3 de una variable con distribución Binomial negativa.

Hallando la tercera derivada de la función generatriz, en el cero, tendremos el momento ordinario de tercer orden. La función generatriz es (si $Bn(r,p)$):

$$\alpha_X(u) = p^r(1-e^uq)^{-r}$$

$$\begin{aligned} \alpha_X'''(u) &= p^r rq[e^u(1-e^uq)^{-r-1} + (r-1)qe^{2u}(1-e^uq)^{-r-2} \\ &+ (r+1)q[2e^{2u}(1-e^uq)^{-r-2} + e^{2u}(-r-2)(1-e^uq)^{-r-3}(-qe^u)]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_X'''(u=0) &= rqp^r[\frac{1}{p^{r+1}} + \frac{(r+1)q}{p^{r+2}} + q(r+1)(\frac{2}{p^{r+2}} + \frac{(r+2)q}{p^{r+3}})] \\ &= rq[\frac{p^r}{p^{r+1}} + \frac{p^r(r+1)q}{p^{r+2}} + q(r+1)[\frac{2p^r}{p^{r+2}} + \frac{(r+2)qp^r}{p^{r+3}}]] \\ &= rq[\frac{1}{p} + \frac{(r+1)q}{p^2} + q(r+1)(\frac{2}{p^2} + \frac{(r+2)q}{p^3})] \\ &= \frac{rq}{p} + \frac{r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{2q^2(r+1)r}{p^2} + \frac{q^3(r+2)(r+1)r}{p^3} \\ &= \frac{rq}{p} + \frac{3r(r+1)q^2}{p^2} + \frac{q^3(r+1)(r+2)r}{p^3} \end{aligned}$$

Sustituyendo los parámetros $p = \frac{r}{r+\theta}$ y $q = \frac{\theta}{r+\theta}$, se obtiene,

$$E(X^3/\theta) = \theta + \frac{\theta^2}{r}3(r+1) + \frac{\theta^3}{r^2}(r+1)(r+2)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= E_\theta(E(X^3/\theta)) = E_\theta[(\theta + \frac{\theta^2}{r}3(r+1) + \frac{\theta^3}{r^2}(r+1)(r+2))] \\
&= E_\theta(\theta) + \frac{3(r+1)}{r}E_\theta(\theta^2) + \frac{(r+1)(r+2)}{r^2}E_\theta(\theta^3) \\
&= \frac{rb}{a-1} + \frac{3(r+1)}{r}r^2\frac{b(b+1)}{(a-1)(a-2)} \\
&+ \frac{(r+1)(r+2)}{r^2}r^3\frac{b(b+1)(b+2)}{(a-1)(a-2)(a-3)}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que, si $\theta \in \text{Beta}(r, a, b)$,

$$\begin{aligned}
E(\theta^2) &= \int_0^\infty r^a \frac{1}{B(a,b)}\frac{\theta^{b-1}\theta^3}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta = \frac{1}{B(a,b)}\int_0^\infty r^a \frac{\theta^{b+2}}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta \\
&= \frac{r^3}{B(a,b)}\int_0^\infty r^{a-3}\frac{\theta^{b+2}}{(r+\theta)^{a+b}}d\theta = \frac{r^3}{B(a,b)}B(a-3,b+3) \\
&= r^2\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\frac{\Gamma(a-3)\Gamma(b+3)}{\Gamma(a+b)} = r^3\frac{\Gamma(a-3)(b+2)(b+1)b\Gamma(b)}{(a-1)(a-2)(a-3)\Gamma(b)\Gamma(a-3)} \\
&= r^3\frac{(b+2)(b+1)b}{(a-1)(a-2)(a-3)}
\end{aligned}$$

Entonces, la tercera ecuación resulta ser:

$$\frac{rb}{a-1} + \frac{3(r+1)r(b+1)b}{(a-1)(a-2)} + \frac{(r+1)(r+2)rb(b+2)(b+1)}{(a-1)(a-2)(a-3)} = 0{,}2881851711$$

Por lo consiguiente, el sistema de ecuaciones buscado es:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{rb}{a-1} &= 0{,}1442197634 \\
\tfrac{rb}{a-1} + \tfrac{(r+1)rb(b+1)}{(a-1)(a-2)} &= 0{,}1846623426 \\
\tfrac{rb}{a-1} + \tfrac{3(r+1)rb(b+1)}{(a-1)(a-2)} + \tfrac{(r+1)(r+2)rb(b+2)(b+1)}{(a-1)(a-2)(a-3)} &= 0{,}2881851711
\end{aligned}\right\}$$

O equivalentemente:

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{rb}{a-1} &= 0{,}1442197634 \\
\tfrac{(r+1)(b+1)}{a-2} &= 0{,}2804232807 \\
\tfrac{(r+2)(b+2)}{a-3} &= 0{,}5597484277
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Operando, resulta:

$$\hat{a}_M = 18{,}87745359 \tag{4.5}$$

Y la ecuación $b^2 - 1{,}154548773b + 2{,}57828212 = 0$, que como podemos observar, no tiene solución exacta en $\mathbf{R}$. Es por eso que debemos obtener una solución aproximada del sistema (4.4). Igualando $r = b$ y sustituyéndolo en la primera ecuación de dicho sistema, se obtiene $\hat{r} = \hat{b} = 1{,}605703001$.

Si estos valores los sustituimos en el sistema (4.4), veremos que:

$$\begin{aligned} \frac{rb}{a-1} &= 0{,}1442197634 \\ \frac{(r+1)(b+1)}{a-2} &= 0{,}4022933965 \neq 0{,}2804232807 \\ \frac{(r+2)(b+2)}{a-3} &= 0{,}8188400021 \neq 0{,}5597484277 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución obtenida de esta forma es una mala aproximación, pero puede ser considerada como valor inicial y utilizar un método de aproximaciones sucesivas hasta obtener la solución[3]: $\hat{a}_M = 50{,}9214$ y $\hat{r}_M = \hat{b}_M = 2{,}6832$.

En este caso:

$$\begin{aligned} \frac{rb}{a-1} &= 0{,}144219 \\ \frac{(r+1)(b+1)}{a-2} &= 0{,}2773 \approx 0{,}2804232807 \\ \frac{(r+2)(b+2)}{a-3} &= 0{,}45767 \approx 0{,}5597484277 \end{aligned}$$

lo que constituye una mejor aproximación a la solución del sistema (4.4).

Ahora, obtendremos la tabla de frecuencias estimadas para las clases $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ y $X \geq 4$.

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{k} \frac{B(a+r, b+k)}{B(a,b)}$$

$$\begin{aligned} \hat{a} &= 50{,}9214 \\ \hat{b} = \hat{r} &= 2{,}6832 \end{aligned}$$

[3]Esta solución ha sido obtenida mediante métodos numéricos cuyo desarrollo escapa a los objetivos del presente trabajo.

$$\left.\begin{array}{r} a+b=a+r=53{,}6046 \\ a+b+r=56{,}2878 \end{array}\right\}$$

Además, tendremos que tener en cuenta que:

$$\begin{aligned} \Gamma(a+r)=\Gamma(a+b)=\Gamma(53{,}6046)&=8{,}874968*10^{68} \\ \Gamma(a+b+r)=\Gamma(56{,}2878)&=4{,}036579*10^{73} \\ \Gamma(a)=\Gamma(50{,}9214)&=2{,}234715*10^{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{r-1}{0}\frac{B(a+r,b)}{B(a,b)}=\frac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+r)} \\ &= 0{,}873167 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \binom{r}{1}\frac{B(a+r,b+1)}{B(a,b)}=\frac{rb}{(a+b+r)}P(X=0) \\ &= 0{,}1116835 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \binom{r+1}{2}\frac{B(a+r,b+2)}{B(a,b)}=\frac{(r+1)(b+1)}{2(a+b+r+1)}P(X=1) \\ &= 0{,}0132235 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{r+2}{3}\frac{B(a+r,b+3)}{B(a,b)}=\frac{(r+2)(b+2)}{3(a+b+r+2)}P(X=2) \\ &= 0{,}0016586 \end{aligned}$$

$$P(X\geq 4)=1-\sum P(X<4)=0{,}0002674$$

Con estos datos podemos realizar una prueba de ajuste χ^2, con un nivel de significación del 5 % para ver si hay evidencia estadística a favor de la hipótesis planteada.

Cuadro 4.4: Situación B. Prueba de ajuste χ^2

Clases	$\hat{p}_i$	$\hat{n}_i = \hat{p}_i N$	$\hat{n}_i$	n_i	$(n_i - \hat{n}_i)^2$	$\frac{(n_i-\hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$
0	0.873167	20597.136	20597	20592	25	0.001213768995
1	0.1116835	2634.50	2635	2651	256	0.09715370019
2	0.0132235	311.929	312	297	225	0.7211538462
3	0.0016586	39.12	39	41	4	0.1025641026
≥ 4	0.0002674	6.307	6	7	1	0.16666

En este caso el estadístico es:

$$z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} = 1{,}088752$$

De acuerdo con el ajuste χ^2, el estadístico $z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i-\hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$ bajo H_0, sigue una distribución χ^2_{k-r-1} grados de libertad donde k =nº de clases= 5, r =nº de parámetros estimados= 3. En nuestro caso, $\chi^2_{5-3-1} = \chi^2_1$. Dado que $z = 1{,}722085418 < \chi^2_{1,0,05} = 3{,}84$, no se rechaza H_0 con un nivel de significación del 5 %.

4.2.3. Prima bonus-malus

Como no se rechaza la hipótesis nula, estamos en situación de utilizar la fórmula de tarificación de la situación B, dada por:

$$P_{BM} = \frac{(b + n\bar{x})(a-1)}{(a + nr - 1)b}$$

De nuevo, n denota el periodo de tiempo y $n\bar{x} = \sum x_i$ el número de reclamaciones. Además, en el Cuadro 4.5 todas las primas aparecen en tanto por ciento.

Teniendo en cuenta que $\hat{a}_M = 50{,}9214$ y $\hat{b}_M = \hat{r}_M = 2{,}6832$, y dando valores a los periodos de tiempo, n, y al número de reclamaciones, $n\bar{x}$, se obtiene la estimación de las primas para distintos periodos y distinto número de siniestros.

Cuadro 4.5: Situación B. Primas bonus-malus

$n/n\bar{x}$	0	1	2	3	4	5
0	100					
1	94.90	130.27	165.64	201.00	236.37	271.74
2	90.29	123.95	157.60	191.25	224.90	258.55
3	86.11	118.21	150.30	182.40	214.49	246.58
4	82.31	112.98	143.65	174.33	205.00	235.68
5	78.82	108.19	137.57	166.94	196.32	225.69

Cuadro 4.6: Frecuencias estimadas

X	n_i	$\hat{n}_i$ (situación A)	$\hat{n}_i$ (situación B)
0	20592	20606	20597
1	2651	2615	2635
2	297	323	312
3	41	39	39
4	7	5	5
5	0	1	1
6	1	0	0

4.3. Conclusiones

En el Cuadro 4.6 se muestran el número de siniestros observados y estimados bajo las dos situaciones consideradas.

Donde, para la Situación A, hemos calculado:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=4) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909+4-1 \\ 4 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909}(0{,}1198759866)^4 \\ &= 0{,}0002034333461\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X=5) &= \begin{pmatrix} 1{,}058854909+5-1 \\ 5 \end{pmatrix} (0{,}8801240134)^{1{,}058854909}(0{,}1198759866)^5 \\ &= 0{,}00002467382933\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X > 5) &= 1 - [\mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) \\ &+ \mathcal{P}(X = 4) + \mathcal{P}(X = 5)] = 0{,}000003397433568\end{aligned}$$

Además, para la Situación B:

$$\mathcal{P}(X = 4) = \frac{(r+3)(b+3)}{4(a+b+r+3)} P(X = 3) = 0{,}00022589$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X = 5) &= \begin{pmatrix} r+4 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{B(a+r, b+5)}{B(a,b)} \\ &= \frac{(r+4)(b+4)}{5(a+b+r+4)} \mathcal{P}(X = 4) = 0{,}00003347\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X > 5) &= 1 - [\mathcal{P}(X = 0) + \mathcal{P}(X = 1) + \mathcal{P}(X = 2) + \mathcal{P}(X = 3) \\ &+ \mathcal{P}(X = 4) + \mathcal{P}(X = 5)] = 0{,}00000804\end{aligned}$$

Como se aprecia en el Cuadro 4.6, la Situación B da lugar a un ajuste ligeramente mejor (confirmado por un valor del estadístico menor).

Asimismo, las primas bonus-malus obtenidas para ambos modelos se muestran en los Cuadros 4.4 y 4.2.

En ambas tablas se verifican las reglas de transición descritas en la Sección 3.6. Así, podemos observar que en ambas situaciones, las primas disminuyen a medida que pasan los años, independientemente del número de siniestros. Por otro lado, en ambas situaciones las primas se incrementan a medida que crece el número de siniestros, para cualquier periodo.

También podemos observar que, en la Situación A, si no hay ningún siniestro, las primas son más pequeñas que en la Situación B, pero a su vez, si se da algún siniestro, las primas son mas altas.

Asimismo, y aún no siendo deseable la estimación por momentos en una prueba de ajuste χ^2, en las dos situaciones planteadas, los valores de los parámetros estimados han dado lugar a no rechazar la H_0, y por lo tanto a poder efectuar la tarificación de acuerdo con las dos situaciones propuestas.

Bibliografía

[Bailey, 1945] Bailey, A. (1945). *A generalized theory of credibility.* Proceedings of the Casualty Acturial Society, XXXII, 13, 13-20.

[Bárcena et al., 2003] Bárcena, M., Fernández, K., Ferreira, E., and Garín, M.A. (2003). *Elementos de Probabilidad y Estadística Descriptiva.* Servicio Editorial de la UPV|EHU, Bilbao.

[Boland, 2007] Boland, P. (2007). *Statistical and probabilistic methods in actuarial science.* Chapman & Hall/CRC, London.

[Boucher y Denuit, 2007] Boucher, J.P. y Denuit, M. (2007). *Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation.* Insurance: Mathematics and Economics.

[Bühlmann, 1967] Bühlmann, H. (1967). *Experience rating and credibility.* Astin Bulletin, 4, 199-207.

[Bühlmann, 1975] Bühlmann, H. (1975). *Minimax credibility. In Kahn, P.M. ed.*. Credibility Theory and Applications Academic Press, New York, 1-22.

[Bühlmann y Straub, 1972] Bühlmann, H. y Straub, E. (1972). *Credibility for loss ratios.* Actuarial Research Clearing House, 2.

[Eichenauer et al., 1988] Eichenauer, J., Lehn, J. y Rettig, S. (1988). *A gamma-minimax result in credibility theory.* Insurance: MAthematics and Economics, 7, 79-57.

[Ferreira y Garín, 2010] Ferreira, E. y Garín, A. (2010). *Estadística Actuarial: Modelos Estocásticos. Notas de clase.* Disponible en versión .pdf en serie de publicaciones Sarriko-online dentro del repositorio de la UPV/EHU, ADDI, http://hdl.handle.net/10810/12500.

[Gajek et al., 2007] Gajek, L., Miś, P. y Slowińska (2007). *Optimalstreams of premiums in multiperiod credibility models.* Applicationes Mathematicae, 34, 223-235.

[Gómez-Déniz et al., 2006] Gómez-Déniz, E., Calderín E. y Cabrera, I. (2006). *A simple method to study sensitivity of BMP's.* Communications in Statistics: Theory and Methods, 35, 583-591.

[Gómez-Déniz y Sarabia, 2008] Gómez-Déniz, E. y Sarabia, J. (2008). *A Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales.* Fundación MAPFRE, Madrid.

[Heilmann, 1989] Heilmann, W. (1989). *Decision theoretic foundations of credibility theory.* Insurance: Mathematics and Economics, 8, 77-95.

[Hewitt, 1970] Hewitt, C. (1970). *Credibility for severity.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 57, 148-171.

[Hickmann, 1975] Hickmann, J. (1975). *Introduction and historical overview of credibility.* In: Credibility. Theory and Applications. P.M. Kahn Ed.. Academic Press, New York.

[Hossack et al., 1983] Hossack, I., Pollard, J., and Zennwirth, B. (1983). *Introductory statistics and applications in general insurance.* Cambridge University Press, USA.

[Jewell, 1974] Jewell, W.S. (1974). *Credible means are exact Bayesian for exponential familie.* Astin Bulletin, 8, 79-90.

[Lemaire, 1979] Lemaire, J. (1979). How to define a bonus-malus system with an exponential utility function. *Astin Bulletin, Cambridge University Press*, 10:274–282.

[López Cachero, 1996] López Cachero, M. (1996). *Estadística para actuarios.* Fundación Mapfre Estudios, Madrid.

[Mayerson, 1964] Mayerson, A.L. (1964). *A Bayesian view of credibility.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 51, 85-104.

[Mowbray, 1914] Mowbray, A. (1914). *How extensive a payroll is necessary to give dependable pure premium?.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1, 24-30.

[Ruíz Maya y Martín Pliego, 1999] Ruíz Maya, L. y Martín Pliego, J. (1999). *Fundamentos de Inferencia Estadística, 3^a edición.* Thomson Paraninfo, Madrid.

[Sarabia et al., 2006] Sarabia, J., Gómez Déniz, E., and Vázquez Polo, F. (2006). *Estadística Actuarial: teoría y aplicaciones.* Prentice Hill, Madrid.

[Vegas Pérez, 1981] Vegas Pérez, A. (1981). *Estadística. Aplicaciones econométricas y actuariales.* Pirámide, Madrid.

[Whitney, 1918] Whitney, A. (1918). *The theory of experience rating.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 4, 274-292.

[Willmot, 1987] Willmot, G.E. (1987). *The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial.* Scandinavian Actuarial Journal, 113-127.