Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

Modelos Estocásticos de Estadística Actuarial

María Araceli Garín Martín

María Cristina González Morgado

Departamento de Economía Aplicada III
Facultad de Economía y Empresa. Sarriko

Resumen

El siguiente texto constituye las notas de clase de la asignatura Estadística actuarial: modelos estocásticos, de carácter obligatorio, que se cursa durante el segundo cuatrimestre del primer curso del máster en Ciencias Actuariales y Financieras.

Dicha asignatura se sitúa dentro de las asignaturas específicas del mundo asegurador, con especial incidencia en el cálculo actuarial y valoración de riesgos financieros.

El seguimiento de estas notas requiere del conocimiento previo de conceptos fundamentales y competencias específicas propias de la Estadística Descriptiva, el Cálculo de Probabilidades o la Inferencia Estadística.

A lo largo de seis capítulos y dos anexos se introducen distintos modelos de distribuciones de probabilidad así como ejemplos de aplicación en el mundo actuarial. En este contexto, el tratamiento del *riesgo* se aborda desde el punto de vista del cálculo de probabilidades, modelizándolo a partir de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias. En el Capítulo 1 se presentan los modelos más habituales relacionados con el comportamiento de la variable *número de siniestros*. Son todos ellos modelos discretos, cuyas propiedades estadísticas son estudiadas en ejemplos de aplicación de carteras de seguros. El Capítulo 2 está dedicado a los modelos relacionados con variables continuas que representan el coste de la reclamación de un siniestro. La mixtura de distribuciones ocupa el Capítulo 3. En los Capítulos 4 y 5 se aborda el *cálculo de primas* y en especial las obtenidas mediante el sistema *bonus-malus*, mostrándo éstas últimas como un ejemplo de la *teoría de la credibilidad*. Finalmente, el Capítulo 6 será dedicado a estudiar y valorar el denominado riesgo de ruina de la compañía aseguradora, dadas las reservas iniciales, las primas cobradas y las indemnizaciones pagadas.

A lo largo de los capítulos se utilizarán ejemplo reales para ilustrar los distintos conceptos y procedimientos de cálculo. Asimismo, al final de cada uno de ellos se proponen algunos ejercicios.

En dos anexos auxiliares se detallan aspectos relativos al binomio negativo y distribuciones conjugadas, respectivamente.

Índice general

Capítulo 1

Modelos de distribuciones de probabilidad discretas. Modelos relacionados con el número de siniestros

En el contexto de la *Estadística Actuarial* entenderemos por *siniestro* a cada realización de un *experimento aleatorio*, ésto es un fenómeno que provoca un riesgo. El individuo afectado, pretenderá cubrirse de las consecuencias económicas de la ocurrencia del siniestro. El *método* que da esta cobertura, se conoce habitualmente como *seguro*. El vendedor del seguro (y deseablemente también el tomador), ha de estudiar bien este fenómeno aleatorio, en términos que poder estimar el precio del contrato, en particular, la *prima* que supone este riesgo.

Así, en el estudio de estos fenómenos aleatorios, serán importantes dos variables aleatorias, a saber: el *número de siniestros* y la *cuantía por reclamación*. El comportamiento de la primera nos dará idea de la frecuencia con la que se producen dichos siniestros. La segunda, nos ayuda a valorar en términos económicos la ocurrencia de los mismos.

Este primer tema, lo vamos a dedicar a presentar tres de las distribuciones más habituales a la hora de modelizar el comportamiento de la v.a. *número de siniestros*. Como veremos se trata de distribuciones discretas, que dependiendo de la situación se ajustan mejor o peor al fenómeno estudiado. También hay que decir, que ninguna de ellas es de nueva creación, todas son distribuciones de probabilidad muy conocidas y estudiadas, pero que han tenido su aplicación y desarrollo particular por parte de los actuarios, de forma relativamente reciente.

1.1. Distribución de Poisson

En esta sección, partiendo de la definición general de la distribución de Poisson, estudiaremos distintos casos particulares, como son las distribuciones de Poisson *truncadas*, *aleatorizadas* en algunos de sus valores o *trasladadas*.

Definición 1.1 *Decimos que la v.a. X sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, $X \in \mathcal{P}(\lambda)$, cuando su soporte o conjunto de valores es el conjunto de los enteros positivos, y su función de cuantía viene dada por*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k \in \mathbf{Z}^+ \tag{1.1}$$

La distribución de Poisson, puede ser introducida también como caso particular de la distribución Binomial $b(p, n)$, donde el número de repeticiones **independientes** del experimento aleatorio n es muy alto, y la probabilidad de ocurrencia del suceso estudiado p es constante y muy pequeña. En este caso, *el número de ocurrencias del suceso a lo largo de las n repeticiones* sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$.

En distintos textos de probabilidad pueden encontrarse muy variadas introducciones a esta distribución, también conocida como *ley de los sucesos raros* y sin embargo hay algo en lo que todas coinciden, y que debemos recalcar; es una distribución que modeliza repeticiones **independientes** del experimento, con **probabilidad constante** de ocurrencia de los dos posibles resultados; hipótesis que debemos tener en cuenta cuando trabajemos con esta distribución.

Como propiedades que debemos recordar, tenemos las siguientes:

1. Su función de distribución es, $F(x) = 0$, si $x < 0$, y $F(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\lambda^k}{k!}$, si $x \geq 0$.

   En particular $F(0) = P(X \leq 0) = e^{-\lambda}$.

2. Su función característica, es, $\psi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$.

3. Su función generatriz es, $\alpha_X(u) = e^{\lambda(e^u-1)}$.

4. Su función cumulativa es, $\mu_X(u) = \lambda(e^u - 1)$.

5. La media y la varianza son iguales, e iguales a λ. $E(X) = V(X) = \lambda$.

1.1.1. Distribuciones de Poisson truncadas

A veces, extensiones de la distribución de Poisson, nos sirven para modelizar la *v.a. número de siniestros*, donde sabemos que, por ejemplo, los primeros valores de la variable entre 0 y s, o bien los últimos a partir de un valor l, están excluidos. Surgen así las distribuciones de Poisson truncadas, siendo la más habitual en el cálculo actuarial, la distribución truncada en el cero

Partimos de una v.a. $X \in \mathcal{P}(\lambda)$.

Sea Y la v.a. definida como $X|X > 0$. En este caso, el soporte de Y es el conjunto $\{1, 2, 3, ..., \}$, y su función de cuantía viene dada por:

$$P(Y = k) = P(X = k|X > 0) = \frac{P(X = k \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!(1 - e^{-\lambda})},$$

donde $k \geq 1$. No es difícil comprobar la forma de la media y varianza de Y.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda})} \\ V(Y) &= \frac{\lambda}{(1 - e^{-\lambda})} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} \\ \alpha_Y(u) &= \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}[e^{\lambda e^u} - 1] \end{aligned}$$

1.2. Distribución Binomial negativa

Al igual que en el caso de la distribución de Poisson, hay varias formas de introducir una distribución Binomial negativa. Presentaremos aquí, una definición que parte de nuevo de repeticiones sucesivas e **independientes** de un experimento aleatorio que da lugar a dos posible resultados, en general, A: éxito y A^c: fracaso.

Así, en cada repetición, tendríamos definida una variable binaria

$X_n = 1$, si se produce un éxito, con $p = P(X_n = 1)$, y

$X_n = 0$, si se produce un fracaso, con $q = 1 - p = P(X_n = 0)$.

De manera que en las sucesivas repeticiones independientes, tendríamos definida una sucesión de v.a. independientes $\{X_n\}_{n \in \mathcal{N}}$.

En el estudio de este experimento nos pueden interesar distintas variables o indicadores, a saber:

1. Número de éxitos conseguidos después de n repeticiones del experimento. Esta variable, Y, corresponde a la suma de las n primeras variables

de la sucesión anterior, $Y = X_1 + ... + X_n$. Su distribución nos es conocida; se trata de una *Binomial* de parámetros n, p. Recordar que en casos particulares, n grande y p muy pequeño, podemos pensar que la distribución de Y es de Poisson de parámetro $\lambda = np$.

2. Si lo que queremos es estudiar la v.a. número de fracasos hasta obtener el primer éxito, veríamos que se trata de una v.a. con distribución *Geométrica* de parámetro p.

3. Si somos más ambiciosos, y lo que queremos es estudiar el número de fracasos antes de obtener m éxitos, tendremos, en principio que esta situación generaliza la anterior, y por lo tanto la distribución *Geométrica* será el caso particular de ésta cuando $m = 1$. Así, la variable objeto de estudio en este caso, Y_m, definida como *número de fracasos hasta obtener m éxitos* sigue una distribución conocida como Binomial negativa de parámetros m y p.

   Es claro que el soporte de Y_m será el conjunto de los enteros positivos, $\mathbf{Z}^+$. Si queremos obtener su función de cuantía, tendremos que analizar el suceso $\{Y_m = k\}$, o lo que es lo mismo, ha habido k fracasos hasta obtener m éxitos. Es claro que

   $$\{Y_m = k\} = \{S_{m+k-1} = m-1, X_{m+k} = 1\}$$

   Es decir, hemos realizado $m + k$ repeticiones. Entre las $m + k - 1$ primeras repeticiones se han producido los $m-1$ éxitos y los k fracasos. La última repetición, ha dado lugar a un éxito, y por lo tanto hemos parado.

   Así, si $S_{m+k-1} = X_1 + X_2 + ... + X_{m+k-1}$ es la suma de las primeras $m + k - 1$ v.a. independientes de la sucesión $\{X_n\}$, sabemos que su distribución es Binomial de parámetros $m + k - 1$, p. Por otro lado, esta v.a. es independiente de X_{m+k}, por lo que la probabilidad del suceso anterior, es

   $$\begin{aligned} P(Y_m = k) &= P(S_{m+k-1} = m-1)P(X_{m+k} = 1) = \\ &= \begin{pmatrix} m+k-1 \\ m-1 \end{pmatrix} p^{m-1} q^k p = \\ &= \begin{pmatrix} m+k-1 \\ k \end{pmatrix} p^m q^k = \\ &= \begin{pmatrix} -m \\ k \end{pmatrix} p^m (-q)^k \end{aligned}$$

Proposición 1.1 *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\binom{m+k-1}{k} = \binom{m+k-1}{m-1} = \binom{-m}{k}(-1)^k$$

donde $k \in \mathbf{Z}^+$.

Demostración:
Ver Apéndice A.1.

Definición 1.2 *Decimos que la v.a. X sigue una distribución Binomial negativa de parámetros m, p, y lo denotamos por $X \in bn(m,p)$, cuando su soporte o conjunto de valores es el conjunto de los enteros positivos, y su función de cuantía viene dada por*

$$P(X=k) = \binom{m+k-1}{k} p^m q^k = \binom{-m}{k} p^m (-q)^k, k \in \mathbf{Z}^+ \tag{1.2}$$

Para cualquier valor m, si expresamos la condición que debe cumplir la función de cuantía anterior por el hecho de serlo, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) = p^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-q)^k = \\ &= p^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} q^k = p^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{m-1} q^k \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-m}{k} (-q)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} q^k = p^{-m} = (1-q)^{-m} \tag{1.3}$$

expresión ésta que nos será de utilidad en adelante.

A partir de aquí, podemos obtener las siguientes características estadísticas de la distribución Binomial negativa.

1. Su función característica es:

$$\begin{aligned} \psi_X(u) &= E(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} P(X=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \binom{m+k-1}{k} p^m q^k = \\ &= p^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} (e^{iu} q)^k = \\ &= p^m (1-e^{iu} q)^{-m} \end{aligned}$$

2. Su función generatriz es, $\alpha_X(u) = p^m(1-e^u q)^{-m}$.

3. Su función cumulativa es, $\mu_X(u) = mlnp - mln(1-e^u q)$.

4. La media y la varianza son, respectivamente:

$$E(X) = \frac{mq}{p} \quad V(X) = \frac{mq}{p^2}$$

En la introducción que hemos presentado, hemos tratado de modelizar el número de repeticiones necesarias del experimento aleatorio, para que se dé un suceso determinado. Por ejemplo, podríamos pensar en el número de lanzamientos sucesivos de un dado hasta obtener cinco seises; el número de lanzamientos de una moneda hasta obtener diez caras, etc. En nuestro contexto, querremos modelizar el número de exposiciones al riesgo hasta que se produzcan m siniestros, donde p es la probabilidad de ocurrencia de dicho siniestro.

Debemos recordar dos aspectos del experimento estudiado hasta ahora: la probabilidad de ocurrencia del siniestro es **constante** y las repeticiones se producen con **independencia**.

Por ota parte, hay otra observación que señalar de la distribución Binomial negativa. De la introducción realizada, se puede inferir el caracter de entero positivo del parámetro m, restricción que formalmente no es necesaria en la definición de la variable. Es más, serán habituales, ejemplos y casos prácticos en los que a partir de la tabla de datos y dados los valores de los estadísticos muestrales, media y varianza, pensemos en ajustar el modelos a una distribución Binomial negativa, donde la estimación de dichos parámetros nos proporcione en particular, valores de m fraccionales.

En este caso, tendremos que tener cuidado con el cálculo del número combinatorio

$$\begin{pmatrix} m+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+k-k)}{k!}$$

donde además sabemos que

$$\begin{pmatrix} m+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+k-1 \\ m-1 \end{pmatrix} = 1$$

siempre que $m+k-1 < k$ (esto sucede cuando $0 < m < 1$ y $k = 0$). Recordar además que $0! = 1$ y si $0 < x < 1$, $x! = 1$.

Proposición 1.2 *Sea X una v.a. con distribución Binomial negativa de parámetros m, p; $X \in bn(m,p)$. Entonces, se verifica la siguiente fórmula recurrente:*

$$p_k = P(X = k) = \frac{(m+k-1)q}{k} P(X = k-1) = \frac{(m+k-1)q}{k} p_{k-1}$$

Demostración: Queda como ejercicio.

1.3. Distribución de Polya-Eggenberger

En las dos secciones anteriores, hemos recalcado la **independencia** como característica de las sucesivas repeticiones del experimento aleatorio considerado. Esto conlleva, como sabemos, el hecho de que la **probabilidad de ocurrencia** de cada posible resultado permanece **constante** a lo largo de la serie de repeticiones.

Sin embargo, hay fenómenos aleatorios en particular en los que es inadmisible esta hipótesis, dado que existe lo que habitualmente es conocido como *contagio*. Para introducir este efecto, y modelizar el comportamiento de la v.a. X: *número de siniestros*, en esta situación, vamos utilizar el siguiente experimento con la denominada *urna de Polya*.

Consideremos una urna, que inicialmente tiene N bolas, de las cuales a son blancas y b negras, de manera que $a + b = N$. Cada vez que se extrae una bola se mira su color y se introduce de nuevo a la urna, junto con c bolas del mismo color.

Observa, que el caso particular $c = 0$, replica una extracción con reemplazamiento, en la que se mantiene la hipótesis de independencia entre resultados de distintas extracciones; mientras que si $c = -1$, estaríamos ante el caso de extracción sin reemplazamiento, y consiguiente pérdida de independencia entre resultados de distintas extracciones.

Analicemos en general el caso $c \neq 0$.

Denotemos por X a la v.a. definida como *número de bolas blancas obtenidas en n extracciones* realizadas según el procedimiento de reemplazamiento que hemos descrito.

Claramente, si $c = 0$, la distribución de la v.a. X es Binomial de parámetros n, $p = \frac{a}{N}$; $X \in b(n, \frac{a}{N})$.

Trataremos de obtener la función de cuantía de X, en el caso $c \neq 0$. Para ello, pensemos en el suceso bl_i: se obtiene bola blanca en la i-ésima extracción y en su complementario, ng_i: se obtiene bola negra en la i-ésima extracción.

Mediante el teorema de la intersección, podemos calcular la probabilidad de obtener bola blanca en las r primeras extracciones. Para ello, necesitamos calcular previamente las siguientes probabilidades condicionadas:

$$\begin{aligned}
P(bl_1) &= \frac{a}{N} \\
P(bl_2|bl_1) &= \frac{a+c}{N+c} \\
P(bl_3|bl_1 \cap bl_2) &= \frac{a+2c}{N+2c} \\
... &= ... \\
P(bl_r|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_{r-1}) &= \frac{a+(r-1)c}{N+(r-1)c}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
& P(bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_{r-1} \cap bl_r) = \\
= \;& P(bl_1)P(bl_2|bl_1)P(bl_3|bl_1 \cap bl_2) \cdots P(bl_r|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_{r-1}) = \\
= \;& \frac{a}{N}\frac{(a+c)}{(c+N)} \cdots \frac{(a+(r-1)c)}{(N+(r-1)c)}
\end{aligned}$$

Del mismo modo, podemos calcular la probabilidad de obtener s bolas negras, en las s siguientes extracciones. Para ello, de nuevo nos hacen falta las siguientes probabilidades condicionadas:

$$\begin{aligned}
P(ng_{r+1}|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_r) &= \frac{b}{N+rc} \\
P(ng_{r+2}|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_r \cap ng_{r+1}) &= \frac{(b+c)}{N+(r+1)c} \\
... &= ... \\
P(ng_n|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_r \cap ng_{r+1} ... \cap ng_{r+(s-1)}) &= \frac{b+(s-1)c}{N+(r+s-1)c}
\end{aligned}$$

Por tanto, en n extracciones, la probabilidad de obtener las r primeras bolas blancas y las s siguientes negras, donde $r+s=n$, es:

$$\begin{aligned}
& P(bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_{r-1} \cap bl_r \cap ng_{r+1} ... \cap ng_{r+s}) = \\
= \;& P(bl_1)P(bl_2|bl_1) \cdots P(bl_r|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_{r-1})P(ng_{r+1}|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_r)... \\
... \;& P(ng_{r+s}|bl_1 \cap bl_2 \cap ... \cap bl_r \cap ng_{r+1} ... \cap ng_{r+(s-1)}) = \\
= \;& \frac{a}{N}\frac{(a+c)}{(N+c)} \cdots \frac{(a+(r-1)c)}{(N+(r-1)c)}\frac{b}{(N+rc)}\frac{(b+c)}{(N+(r+1)c)} \cdots \frac{(b+(s-1)c)}{(N+(n-1)c)}
\end{aligned}$$

Sin embargo, en las n extracciones, el número de formas en que se pueden colocar r bolas blancas y s negras es $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}$; y la probabilidad de cada ordenación de esta n-tupla es igual a la de la ordenación fijada, de r primeras blancas y $s = n - r$ siguientes negras, que ya hemos calculado.

De esta forma, la función de cuantía de la v.a X, que calcula, con este modelo de extracción, la probabilidad de obtener r bolas blancas en $n = r+s$ extracciones, es:

$$P(X=r) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \frac{a}{N}\frac{(a+c)}{(N+c)}\cdots\frac{(a+(r-1)c)}{(N+(r-1)c)}\frac{b}{(N+rc)}\frac{(b+c)}{(N+(r+1)c)}\cdots\frac{(b+(s-1)c)}{(N+(n-1)c)}$$

Dividiendo numerador y denominador en la expresión anterior por $c \neq 0$, se obtiene:

$$P(X=r) \quad = \quad \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} \frac{\frac{a}{c}}{\frac{N}{c}}\frac{(\frac{a}{c}+1)}{(\frac{N}{c}+1)}\cdots\frac{(\frac{a}{c}+(r-1))}{(\frac{N}{c}+(r-1))}\frac{\frac{b}{c}}{(\frac{N}{c}+r)}\frac{(\frac{b}{c}+1)}{(\frac{N}{c}+(r+1))}\cdots\frac{(\frac{b}{c}+(s-1))}{(\frac{N}{c}+(n-1))}$$

Reordenando los términos, se obtiene

$$P(X=r) \quad = \quad \frac{\begin{pmatrix} \frac{a}{c}+r-1 \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{b}{c}+s-1 \\ s \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{N}{c}+n-1 \\ n \end{pmatrix}}$$

Definición 1.3 *Decimos que la v.a X sigue una distribución de Polya-Eggenberger de parámetros p, q y δ, cuando el soporte de valores de la variables es el conjunto de enteros positivos $\{0, 1, 2..., n\}$, y su función de cuantía viene dada por*

$$P(X=k) \quad = \quad \frac{\begin{pmatrix} \frac{p}{\delta}+k-1 \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{q}{\delta}+s-1 \\ s \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta}+n-1 \\ n \end{pmatrix}}$$

donde p representa la probabilidad inicial de siniestro, $q = 1 - p$, δ es la probabilidad de contagio, y $s = n - k$.

Para llegar a la expresión de la función de cuantía anterior, hemos renombrado los parámetros que aparecían en el experimento de la *urna de Polya*. Así la probabilidad inicial de siniestro es la probabilidad inicial de bola blanca $p = \frac{a}{N}$, $q = \frac{b}{N}$ y $\delta = \frac{c}{N}$ es la probabilidad de contagio.

Proposición 1.3 *Sea X una v.a. con distribución de Polya de parámetros, p, δ. Entonces, se verifica la siguiente fórmula recurrente:*

$$p_k = P(X = k) = \frac{(\frac{p}{\delta} + k - 1)}{k} \frac{s+1}{(\frac{q}{\delta} + s)} P(X = k-1)$$

donde, $s = n - k$ y

$$p_0 = P(X = 0) = \frac{\begin{pmatrix} \frac{q}{\delta} + n - 1 \\ n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} + n - 1 \\ n \end{pmatrix}}$$

Demostración: Queda como ejercicio.

En cuanto a las características estadísticas de esta distribución, tenemos:

1. La media es:

$$E(X) = np$$

2. La varianza es:

$$V(X) = npq\frac{1 + n\delta}{1 + \delta}$$

Es decir el efecto contagio, modelizado en esta distribución produce una media independiente de dicho efecto, e igual a la media en una distribución Binomial, en la que el contagio es nulo. Sin embargo la varianza aumenta a medida que aumenta la probabilidad de contagio.

Este tipo de distribuciones se emplea en los estudios estadísticos médicos, sobre posibles contagios de enfermedades. Nosotros la utilizaremos para modelizar propagación de siniestros en contratos de seguros de incendios, por ejemplo.

Ejemplo 1.1 *A partir de datos relativos a 1000 edificios, cada uno con 10 viviendas, se ha estimado para la v.a. X: número de reclamaciones por incendio/edificio, los siguientes estadísticos muestrales $\overline{x} = 0{,}3$, y $s^2 = 1{,}164$. $(n = 10)$.*

1. *Estima los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Polya. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$.*

2. *Estima los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Binomial. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ y $P(X=3)$.*

3. *Estima los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Poisson. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ y $P(X=3)$.*

4. *Estima los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Binomial negativa. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X=0)$, $P(X=1)$, $P(X=2)$ y $P(X=3)$.*

1.4. Otras distribuciones de uso frecuente

Presentamos ahora una distribución discreta, de momento sin nombre conocido, pero que en posteriores capítulos veremos que puede ser introducida como la distribución compuesta (ver Capítulo 3) de una Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$, en la que θ se comporta como una Beta de segunda especie (r, a, b) (ver Capítulo 2).

Esta distribución compuesta es discreta y depende de tres parámetros, a, b y r, todos ellos mayores que cero. Su función de cuantía es:

$$P(X=k) \quad = \quad \binom{r+k-1}{k} \frac{B(a+r, b+k)}{B(a,b)}; \quad k = 0, 1, 2...$$

donde

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Nota: en algunos ejemplos se ha observado que las estimaciones de los valores de b y r coinciden.

En cuanto a las características estadísticas de esta distribución, tenemos:

1. La media es:

$$E(X) = \frac{rb}{a-1}$$

2. El momento ordinario de orden 2, $E(X^2)$ es:

$$E(X^2) \quad = \quad \frac{rb}{a-1} + \frac{r(r+1)b(b+1)}{(a-1)(a-2)}$$

de donde es sencillo obtener el valor de la varianza como,

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{rb}{a-1} + \frac{r(r+1)b(b+1)}{(a-1)(a-2)} - (\frac{rb}{a-1})^2$$

1.5. Estimación de parámetros

Cuando los parámetros de una distribución de probabilidad son desconocidos, su valor se puede estimar a partir de una muestra aleatoria simple, en adelante, m.a.s. $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$. Dicha muestra no es más que un conjunto de observaciones aleatorias independientes que proceden del mismo colectivo que X. Antes de conocer sus valores exactos (obseravciones) pueden ser consideradas como n v.a. independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.), y con la misma distribución que X.

Veremos dos métodos de estimación puntual de los parámetros, la estimación por momentos y la estimación por máxima verosimilitud, ambas en el ámbito de las distribuciones discretas. En el caso de distribuciones continuas se procede de modo similar reemplazando las funciones de cuantía por funciones de densidad.

1.5.1. Estimación por momentos

Para obtener la estimación por momentos de los parámetros de una distribución, necesitamos imponer las ecuaciones (tantas como parámetros se deseen estimar) que igualan los momentos teóricos a los momentos muestrales.

Además (a partir del segundo momento) se pueden utilizar tanto los momentos ordinarios como los centrados.

Esto es, si tenemos dos parámetros desconocidos, a y b, se plantea un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, (a y b).

La primera de ellas iguala los momentos ordinarios de orden uno, teórico y muestral; es decir, la media teórica, EX, y la media muestral, $\bar{x}$,

$EX = \bar{x} = g(a, b)$.

La segunda ecuación iguala los momentos de orden dos (en este caso centrados), teórico y muestral; es decir, la varianza teórica $VarX$ y la varianza muestral s_X^2,

$VarX = s_X^2 = h(a, b)$.

Se plantea y se resuelve este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y su solución es la estimación por momentos de los parámetros, denotada por $\hat{a}_M$ y $\hat{b}_M$.

Se procede del mismo modo cuando hay más parámetros desconocidos añadiendo la correspondiente ecuación.

1.5.2. Estimación por máxima verosimilitud

Para obtener la estimación máximo verosímil hay que construir y maximizar la función de verosimilitud.

A partir de una muestra aleatoria simple $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, la función de verosimilitud se define como la función de cuantía conjunta de la muestra, que por la independencia se puede factorizar como producto de marginales, y por tener todas las variables de la muestra la misma distribución, resulta ser el producto de las funciones de cuantía evaluadas en los distintos elementos de la muestra, es decir:

$$\mathcal{L}(\vec{x}, a, b) = P(x_1, ..., x_n, a, b) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, a, b) \tag{1.4}$$

Un proceso equivalente al de maximizar la función de verosimilitud y numéricamente más sencillo es el de maximizar su logaritmo neperiano.

Tomando logaritmo neperiano en (1.4),

$$\ln\mathcal{L}(\vec{x}, a, b) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \ln P(x_i, a, b)$$

Para obtener los estimadores de a y b por el método de máxima verosimilitud, tenemos que determinar los valores de dichos parámetros que maximizan (1.5), para ello derivamos con respecto a a y a b e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln\mathcal{L}(\vec{x}, a, b)}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial \ln\mathcal{L}(\vec{x}, a, b)}{\partial b} &= 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas nos da la estimación máximo verosímil de los parámetros, $\hat{a}_{MV}$ y $\hat{b}_{MV}$.

1.6. Pruebas de ajuste χ^2

El objetivo de una prueba estadística de ajuste es verificar si una muestra procede de una población con una determinada distribución de probabilidad. A partir de la información muestral (m.a.s. de tamaño n, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$) se ajusta una cierta distribución de probabilidad, siendo la hipótesis nula que dicho ajuste es "bueno", en el sentido que la información muestral no evidencie que debe recharzarse dicha hipótesis nula. La hipótesis alternativa recoge el enunciado opuesto a la hipótesis nula, es decir, que dicho ajuste no es correcto.

Aunque pueden aparecer dos situaciones en este tipo de ajustes, según se conozca o no el valor de los parámetros de los que depende la distribución, la situación más habitual en nuestro ámbito es la del desconocimiento. Así mostraremos el procedimiento de ajuste en este segundo caso.

Inicialmente se parte de la muestra $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ cuyas observaciones pueden clasificarse en k clases o categorías mutuamente excluyentes, A_1,..., A_k, siendo n_i el número de elementos en la clase A_i, y tal que $n_1 + .. + n_k = n$. A los valores n_i, $i = 1, ..., k$, se les denomina frecuencias observadas.

Para poder calcular las probabilidades de cada clase A_i bajo la hipótesis nula, tendremos que estimar previamente el valor de los parámetros desconocidos de la distribución.

En este caso, $\hat{p}_i = P(A_i)$ denotará las probabilidades teóricas (bajo la H_0) y $n\hat{p}_i$ las frecuencias esperadas con $i = 1, ..., k$, respectivamente.

Como medida de las diferencias o discrepancias entre las frecuencias observadas y esperadas, Pearson propuso el estadístico

$$z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} \tag{1.5}$$

denominado estadístico de la bondad del ajuste.

Fisher demostró que si se estiman los parámetros desconocidos con la misma información muestral con que se realiza el contraste, el estadístico del test, z (1.5), tiene una distribución asintótica χ^2 con $k - r - 1$ grados de libertad, siendo k el número de clases y r el número de parámetros estimados.

En este caso, valores elevados del estadístico z evidencian discrepancias relevantes entre las frecuencias observadas n_i y las esperadas $n\hat{p}_i$, por lo que deberá rechazarse la hipótesis nula de que dicha muestra procede de la población con la distribución propuesta, siendo la región crítica del test de la forma $z \geq K$.

El valor de K se determina de manera que si α es el valor de nivel de significación fijado, se verifique

$$P(z \geq K|H_0) = \alpha$$

obteniéndose dicho valor de K, a partir de las tablas de la distribución χ^2.

Observaciones

1. Dado que la distribución del estadístico z es asintótica, se utiliza, comúnmente, como regla de aproximación aceptable, exigiendo que todas las frecuencias esperadas, $n\hat{p}_i$, sean mayores o iguales a 5. En caso de no darse esta condición se procede a reagrupar clases al objeto de satisfacerla.

2. El test χ^2 puede aplicarse a cualquier distribución poblacional, continua o discreta.

3. Aunque es aconsejable, para una mayor calidad de la aproximación a través de la distribución asintótica, que las clases o categorías se construyan de manera que resulten aproximadamente equiprobables, en la mayoría de los ejemplos actuariales, la clase que contiene el valor 0, suele resultar bastante más probable que el resto. Esto es lo que se conoce como *inflado de ceros*.

1.7. Ejercicios de aplicación

Se enumeran a continuación un conjunto de ejercicios de ensayo de las competencias correspondientes a este tema; en particular a la segunda de las formuladas en el programa de la asignatura:

> Describir y analizar situaciones sencillas de riesgo en problemas relacionados con el mundo actuarial o de las finanzas y expresarlas formalmente en términos de variables aleatorias y sus distribuciones.

1. Demuestra que si X sigue una distribución Binomial negativa de parámetros p y m,

$$P(X = k) = p_k = p_{k-1}(1-p)(m+k-1)/k$$

2. Sea X el número de reclamaciones por incendio en un edificio, una v.a. con distribución de Polya de parámetros $p = 0{,}01$, $\delta = 0{,}1$ (recuerda

que es el parámetro que modeliza la probabilidad de contagio en el siniestro), y $n = 4$, lo cual modeliza que el edificio en cuestión tiene 4 viviendas.

Calcula los primeros valores de la función de cuantía de X: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$.

Solución:

$P(X = 0) = 0{,}9653$; $P(X = 1) = 0{,}02991$; $P(X = 2) = 4{,}15 \cdot 10^{-3}$; $P(X = 3) = 5{,}331 \cdot 10^{-4}$; $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1{,}069 \cdot 10^{-4}$.

3. Sea X el número de reclamaciones por incendio en un edificio de cuatro viviendas, una v.a. con Binomial negativa de media $EX = 0{,}04$, y varianza $V(X) = 0{,}0504$. Obtén la estimación por momentos de los parámetros de la distribución de X y calcula los primeros valores de su función de cuantía: $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$.

   Solución:

   $P(X = 0) = 0{,}96507$; $P(X = 1) = 0{,}03064$; $P(X = 2) = 0{,}0036474$; $P(X = 3) = 0{,}00054$; $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1{,}026 \cdot 10^{-4}$.

4. Considera la siguiente tabla de datos sobre el número de siniestros (X: número de reclamaciones por incendio), relativos a 1000 edificios.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	975	15	6	3	1

   Con la tabla de datos anterior, puedes observar que la media muestral es $\overline{x} = 0{,}04$ y la varianza muestral es $s^2 = 0{,}0792$. Sabiendo además que cada edificio consta de 4 viviendas:

   a) Estima por momentos los parámetros correspondientes si planteamos como hipótesis que la distribución de X es de Polya. Calcula los valores de la función de cuantía de X, en este caso, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$.

   b) Estima por momentos los parámetros correspondientes si planteamos como hipótesis que la distribución de X es Binomial negativa. Calcula los valores de la función de cuantía de X, en este caso, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$.

   c) Estima por momentos los parámetros correspondientes si planteamos como hipótesis que la distribución de X es de Poisson. Calcula los valores de la función de cuantía de X, en este caso, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$, $P(X \geq 4)$.

d) A la vista de los resultados de las cuestiones anteriores, ¿qué distribución te parece más adecuada para modelizar el comportamiento aleatorio de X? Confirma con una prueba de ajuste χ^2 el resultado que te parezca intuitivo.

Solución:

x_i	n_i	f_i	$\hat{p}_i$ (Poisson)	$\hat{p}_i$ (bn)	$\hat{p}_i$ (Polya)
0	975	0.975	0.96078	0.97265	0.97456
1	15	0.015	0.03843	0.01945	0.01565
2	6	0.006	$7.686 \cdot 10^{-4}$	0.00505	0.00601
3	3	0.003	$1.024 \cdot 10^{-5}$	0.00172	0.00272
4	1	0.001	$1.115 \cdot 10^{-5}$	0.00065	0.00103

5. A partir de datos relativos a 1000 edificios, cada uno con 10 viviendas, se ha estimado para la v.a. X: número de reclamaciones por incendio/edificio, los siguientes estadísticos muestrales $\overline{x} = 0{,}3$, y $s^2 = 1{,}164$.

   a) Estima por momentos los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Polya. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$.

   b) Estima por momentos los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Binomial. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$.

   c) Estima por momentos los parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Poisson. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$.

   d) Estima por momentoslos parámetros, bajo la hipótesis de que la distribución de X es Binomial negativa. Calcula en este caso, las probabilidades $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ y $P(X = 3)$.

Solución:

x_i	$\hat{p}_i$ (Polya)	$\hat{p}_i$ (b(n,p))	$\hat{p}_i$ (Poisson)	$\hat{p}_i$ (bn)
0	0.885	0.7374	0.7408	0.8683
1	0.0485	0.22807	0.222	0.0671
2	0.0233	0.03174	0.0333	0.0275
3	0.0143	0.0026	0.0033	0.0143

6. En la siguiente tabla tenemos el número de asegurados para un número de reclamaciones en una cartera de seguros de automóvil en Alemania en 1960. Esta cartera aparece en los trabajos de [Willmot, 1987] y [Gómez-Déniz y Sarabia, 2008].

Cuadro 1.1: Frecuencias observadas, Willmot 1987

Nº de reclamaciones	Nº de asegurados
0	20592
1	2651
2	297
3	41
4	7
5	0
6	1

Se observa que hay un total de 23589 asegurados. Denotaremos por X a la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones.

a) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, estima máximo verosímilmente el parámetro obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

b) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{a}{a+1})$, estima (por momentos y/o máximo verosímilmente) los parámetros, obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

7. En la siguiente tabla tenemos el número de asegurados para un número de reclamaciones en una cartera de seguros de automóvil en Suiza en 1961. Esta cartera aparece en los trabajos de [Willmot, 1987] y [Gómez-Déniz y Sarabia, 2008].

   Denotaremos por X a la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones.

   a) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, estima máximo verosímilmente el parámetro, obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

   b) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{a}{a+1})$, estima (por momentos y/o máximo verosímilmente) los parámetros, obtén la tabla de frecuencias estimadas

Cuadro 1.2: Frecuencias observadas, Suiza 1961

Nº de reclamaciones	Nº de asegurados
0	103704
1	14075
2	1766
3	255
4	45
5	6
6	2

y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

8. En la siguiente tabla tenemos el número de asegurados para un número de reclamaciones en una cartera de seguros de automóvil en Bélgica en 1993. Esta cartera aparece en los trabajos de [Willmot, 1987] y [Gómez-Déniz y Sarabia, 2008].

Cuadro 1.3: Frecuencias observadas, Bélgica 1993

Nº de reclamaciones	Nº de asegurados
0	57178
1	5617
2	446
3	50
4	8
5	0

Denotaremos por X a la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones.

a) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, estima máximo verosímilmente el parámetro, obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

b) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{a}{a+1})$, estima (por momentos y/o máximo verosímilmente) los parámetros, obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

9. En la siguiente tabla tenemos el número de asegurados para un número de reclamaciones en una cartera de seguros de automóvil en extraída de [Lemaire, 1979].

Cuadro 1.4: Frecuencias observadas, Lemaire 1979

Nº de reclamaciones	Nº de asegurados
0	96978
1	9240
2	704
3	43
4	9
más de 4	0

Vemos que hay un total de 106974 asegurados. Denotaremos por X a la variable aleatoria que representa el número de reclamaciones.

a) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución de Poisson $P(\lambda)$, estima máximo verosímilmente el parámetro, obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

b) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{a}{a+1})$, estima (por momentos y/o máximo verosímilmente) los parámetros obtén la tabla de frecuencias estimadas y realiza una prueba de ajuste χ^2 para contrastar la hipótesis planteada.

Capítulo 2

Modelos de distribuciones de probabilidad continuas. Modelos relacionados con el coste de cada siniestro

Lo que cuesta cada siniestro, o en adelante, lo que denominaremos *cuantía por reclamación*, también es una variable aleatoria, en este caso de carácter continuo, pues modeliza una variable económica medida en dinero, que como la variable tiempo, se considera continua.

Estudiaremos en este tema distintas distribuciones continuas, con sus características estadísticas más relevantes.

2.1. Distribución log-normal

También conocida como distribución logarítmico-normal. Es lo que se conoce en estadística como una distribución de colas anchas, es decir, su densidad refleja una característica que tambien corrobora la varianza de esta distribución, hay probabilidad alta de que la variable tome valores alejados de la media. Nos servirá para modelizar siniestros con grandes costes o cuantías por reclamación.

La habitual definición de una v.a. X con distribución log-normal, es la de aquella variable, cuyo logaritmo neperiano $Y = lnX$ sigue una distribución normal $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Así para obtener la función de densidad de X, necesitaremos un argumento basado en la transformación de variables.

Pensemos primero en el caso de una v.a. $T \in \mathcal{N}(0,1)$. Sabemos que la función de densidad es:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$$

donde $t \in \mathbf{R}$.

La v.a. $Y \in \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, está definida como una transformación lineal creciente de T, $Y = \sigma T + m$. Utilizando, la fórmula de transformación ya conociada y dada por

$$f_Y(y) = f_t(t(y))|t'(y)| \tag{2.1}$$

donde f_t es la función de densidad de T, y sabiendo que $t(y) = \frac{y-m}{\sigma}$, y $t'(y) = \frac{1}{\sigma} > 0$, obtenemos la función de densidad de Y.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $y \in \mathbf{R}$.

De nuevo, si $Y = lnX$, nuestra variable de interés es $X = e^Y$. Por por tanto utilizando la expresión (2.1), obtenemos la función de densidad de X.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_Y(y(x)) \cdot |y'(x)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(y(x)-m)^2}{2\sigma^2}} |y'(x)| \end{aligned}$$

donde $y(x) = lnx$, e $|y'(x)| = |\frac{1}{x}|$.

Observa, que la nueva variable $X = e^Y$, no puede tomar valores negativos, y por lo tanto su soporte es el conjunto de los reales positivos, $x \in \mathbf{R}^+$.

Definición 2.1 *Decimos que la v.a. X tiene distribución log-normal, si su soporte es el conjunto $\mathbf{R}^+$, y su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{\frac{-(lnx-m)^2}{2\sigma^2}}, x \geq 0$$

Sus características estadísticas más relevantes, se deducen al igual que su función de densidad, de su relación con la distribución normal.

1. Para calcular los valores de su función de distribución, $F(x)$, emplearemos la tablas de la $N(0,1)$, mediante la siguiente relación:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(e^Y \leq x) = P(Y \leq lnx) = \Phi(\frac{lnx - m}{\sigma})$$

2. Su media resulta de realizar la integral

$$E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{\frac{-(lnx-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Sin más que hacer el cambio de variable $t = \frac{lnx-m}{\sigma}$, y por tanto $x = e^{\sigma t+m}$, $dx = \sigma e^{\sigma t+m} dt$, la integral anterior se puede expresar como

$$E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \sigma e^{\sigma t+m} dt = e^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(t^2-2\sigma t)}{2}} dt$$

Completando el exponente a un cuadrado completo $\frac{(t^2-2\sigma t+\sigma^2-\sigma^2)}{2} = \frac{(t-\sigma)^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}$, se obtiene

$$E(X) = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-h^2}{2}} dh = e^{m+\frac{\sigma^2}{2}}$$

donde $h = t - \sigma$, y $dh = dt$.

3. Operando de forma similar, en la integral de $E(X^2)$, se puede demostrar que la varianza de la variable X es,

$$V(X) = e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

2.2. Distribución de Pareto

Al igual que la distribución anterior, es una ley de colas anchas por lo que la utilizaremos para modelizar cuantías elevadas.

La distribución de Pareto surge al considerar que la probabilidad de que una v.a. X tome una valor superior a un x determinado, tiene la siguiente forma funcional:

$$P(X > x) = (\frac{k}{x})^\alpha$$

si $x \geq k$, y $P(X > x) = 1$, en otro caso. En la expresión anterior, k y α son dos parámetros reales.

A partir de la consideración anterior, es sencillo obtener la función de distribución de la variable X,

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - (\frac{k}{x})^\alpha$$

si $x \geq k$, y $F(x) = 0$, en otro caso.

Definición 2.2 *Decimos que la v.a. X tiene distribución de Pareto de parámetros k, α, si su soporte es el subconjunto de números reales $[k, \infty)$ y su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$$

Normalmente k es un parámetro prefijado de antemano, a partir de los datos iniciales de la aplicación. El parámetro α es un parámetro de ajuste, cuyo valor se estima o determina a posteriori. Como veremos más adelante, para algunos valores de este parámetro de ajuste, no existen momentos de esta variable.

En cuanto a las características estadísticas,

1. Su media,

   $$E(X) = \frac{\alpha k}{(\alpha - 1)}$$

   se puede calcular como la integral anterior siempre que $\alpha > 1$.

2. Su varianza,

   $$V(X) = \frac{\alpha k^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2}$$

   siempre que $\alpha > 2$.

Hemos visto que la existencia de los dos primeros momentos depende del valor del parámetro α. Es por ello, que a menudo conviene estimar su valor a partir de los datos, para tener una mayor información del comportamiento de la variable.

Como método de estimación, se puede emplear tanto el de momentos como el de máxima verosimilitud, aunque los estimadores que nos proporcionan no coinciden.

1. Estimación por momentos.

   Partiendo de una m.a.s. de la distribución, $\{x_1, ..., x_n\}$, igualamos el momento de orden uno poblacional, $E(X)$, con el correspondiente momento muestral $\overline{x}$.

   $$\frac{\alpha k}{(\alpha - 1)} = \overline{x}$$

   de donde

   $$\hat{\alpha}_M = \frac{\overline{x}}{(\overline{x} - k)}$$

2. Estimación por máxima verosimilitud.

   Partiendo de una m.a.s. de la distribución, $\{x_1, ..., x_n\}$, construimos la función de verosimilitud:

$$L(\vec{x}, \alpha) = (\frac{\alpha}{k})^n \prod_{i=1}^{n} (\frac{k}{x_i})^{\alpha+1}$$

   Tomando logaritmos,

$$lnL(\vec{x}, \alpha) = n(ln\alpha - lnk) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha + 1)(lnk - lnx_i)$$

   derivando respecto a α e igualando a 0, despejamos el estimador máximo verosímil

$$\hat{\alpha}_{MV} = \frac{1}{(\overline{lnx} - lnk)}$$

   donde $\overline{lnx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} lnx_i$.

Considerando las expresiones de los estimadores anteriores obtenidas para una muestra de tamaño uno, se puede intuir su relación.

2.2.1. Distribuciones de Pareto de segundo y tercer tipo

1. La distribución de Pareto de segundo tipo, no es más que la de primer tipo, trasladada al origen. Es decir, si Y es una v.a. con distribución de Pareto (de primer tipo) y parámetros k, α, se define como distribución de Pareto de segundo tipo a la distribución de la v.a. $X = Y - k$.

   La relación entre las funciones de distribución, es

$$F(x) = P(X \leq x) = P(Y - k \leq x) = P(Y \leq x + k) = 1 - (\frac{k}{x + k})^\alpha$$

   si $x \geq 0$, y $F(x) = 0$, en otro caso.

2. La distribución de Pareto de tercer tipo, es una generalización de las anteriores, en la que además de la traslación se produce un cambio en la estructura de varianza. Se define como distribución de Pareto de tercer tipo a la distribución de la v.a. X, cuya función de distribución es:

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - (\frac{k}{x + k})^\alpha e^{-bx}$$

   si $x \geq 0$, y $F(x) = 0$, en otro caso. Esta distribución depende de tres parámetros, α, k y b.

2.2.2. Distribución de Burr

Es otra distribución transformada de la distribución de Pareto, que se emplea habitualmente para estudiar las pérdidas en carteras de seguros.

Sea X una v.a. de Pareto de segundo tipo y Z transformación definida como $Z^\beta = X$, con $\beta > 0$.

La relación entre ambas funciones de distribución, teniendo en cuenta que $Z = X^{\frac{1}{\beta}}$, es:

$$F(z) = P(Z \leq z) = P(X^{\frac{1}{\beta}} \leq z) = P(X \leq z^\beta) = 1 - (\frac{k}{z^\beta + k})^\alpha$$

si $z \geq 0$ y $F(z) = 0$, en otro caso.

Proposición 2.1 *Sea Z una v.a. con distribución de Burr de parámetros k, α, β. El momento ordinario de orden r de la v.a. Z es:*

$$E(Z^r) = k^{\frac{r}{\beta}} \frac{\Gamma(\alpha - r/\beta)\Gamma(r/\beta + 1)}{\Gamma(\alpha)}$$

siempre que $r < \alpha\beta$.

Demostración: Queda como ejercicio.

2.3. Distribución Gamma

Definición 2.3 *Se dice que la v.a. X sigue una distribución Gamma de parámetros $a > 0$, $r > 0$, y se denota por $\gamma(a, r)$, si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-ax}, \quad x \geq 0 \tag{2.2}$$

y $f(x) = 0$, en otro caso; donde $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$

Nota: Si $r \in \mathbf{Z}^+$, se verifica $\Gamma(r) = (r-1)!$.

Además como principales características estadísticas tenemos:

1. Su media es:

$$E(X) = \frac{r}{a} \tag{2.3}$$

2. Su varianza es:
$$V(X) = \frac{r}{a^2} \tag{2.4}$$

3. Su función generatriz de momentos es:
$$\alpha_X(u) = (1 - \frac{u}{a})^{-r}, \tag{2.5}$$
si $u < a$.

4. Su función característica es:
$$\psi_X(u) = (1 - \frac{iu}{a})^{-r} \tag{2.6}$$

5. Su función cumulativa es:
$$\mu_X(u) = -r \cdot ln(1 - \frac{u}{a}) \tag{2.7}$$
si $u < a$.

Para calcular momentos ordinarios de cualquier orden, o bien para calcular la función generatriz de este tipo de variables es imprescindible resolver la integral correspondiente reformulándola en términos de la integral de una función de densidad de su misma familia (Gamma), aunque posiblemente de distintos parámetros. La cuenta más corta, puede ser obtener la función generatriz, y a partir de ella la cumulativa. Observar también que las derivadas sucesivas en cero de la función cumulativa (cumulantes) nos dan información directa de los valores típicos de una variable, media, varianza, asimetría y curtosis.

2.3.1. Distribución exponencial

La distribución exponencial se puede introducir como el caso particular de la distribución γ cuando el parámetro $r = 1$, en este caso:

Definición 2.4 *Se dice que la v.a. X sigue una distribución exponencial de parámetro $a > 0$, y se denota por $\epsilon(a)$, si su función de densidad viene dada por*
$$f(x) = ae^{-ax}, \quad x \geq 0 \tag{2.8}$$
y $f(x) = 0$, en otro caso.

Sus principales características, se obtienen también como caso particular de la distribución γ.

1. Su media es:
$$E(X) = \frac{1}{a} \tag{2.9}$$

2. Su varianza es:
$$V(X) = \frac{1}{a^2} \tag{2.10}$$

3. Su función generatriz de momentos es:
$$\alpha_X(u) = (1 - \frac{u}{a})^{-1} \tag{2.11}$$

4. Su función característica es:
$$\psi_X(u) = (1 - \frac{iu}{a})^{-1} \tag{2.12}$$

5. Su función cumulativa es:
$$\mu_X(u) = -ln(1 - \frac{u}{a}) \tag{2.13}$$

Observar además que de la forma de la función característica, tanto de la distribución γ, como en particular de la exponencial, se deduce el siguiente resultado:

Proposición 2.2 *La suma de v.a. independientes con distribución γ del mismo parámetro a, es una v.a. con distribución γ del mismo parámetro a y donde su parámetro r se obtiene como suma de dichos parámetros en las distribuciones γ que hemos sumado.*

Demostración: Evidente si calculamos la función característica de la suma de v.a. independientes con distribución γ.

2.3.2. Distribución exponencial desplazada

La distribución exponencial se puede generalizar, trasladándola del origen. Surge así, la distribución *exponencial desplazada*.

Sea X una v.a. con distribución exponencial de parámetro a. $X \in \mathcal{E}(a)$. Consideremos la v.a. transformación lineal de X, $Y = X + k$, $k > 0$. La función de densidad de Y, de acuerdo con la expresión (2.1), vendrá dada por:

$$f_Y(y) = f_X(y-k) = ae^{-a(y-k)} \tag{2.14}$$

si $y \geq k$; siendo $f_Y(y) = 0$, en otro caso.

Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5 *Se dice que la v.a. X sigue una distribución exponencial desplazada de parámetros $a > 0$, $k > 0$ y se denota por $\mathcal{E}(a,k)$, si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = ae^{-a(x-k)}, \quad x \geq k > 0 \tag{2.15}$$

y $f(x) = 0$, en otro caso.

Sus principales características, son evidentes a partir de su relación con una v.a. exponencial. De la propia definición, se sigue que:

1. Su media es:

$$E(X) = \frac{1}{a} + k \tag{2.16}$$

2. Su varianza es la misma que la de la exponencial de parámetro a:

$$V(X) = \frac{1}{a^2} \tag{2.17}$$

3. Su función característica es:

$$\psi_X(u) = e^{iuk}(1 - \frac{iu}{a})^{-1} \tag{2.18}$$

2.4. Distribución de Weibull

Es otra generalización de la distribución exponencial, en la que intervienen dos parámetros, el parámetro $\theta > 0$, que corresponde en la definición de la distribución exponencial a $\frac{1}{a}$, y se denomina parámetro de escala; y el parámetro $\alpha > 0$, denominado comúnmente parámetro de forma.

Esta distribución se usa habitualmente para modelar la compensación de las reclamaciones de los trabajadores. Proporciona una adecuada respresentación de la distribución de la pérdida.

Se define como sigue:

Definición 2.6 *Se dice que la v.a. X sigue una distribución de Weibull de parámetros $\alpha > 0$, $\theta > 0$ y se denota por $W(\alpha, \theta)$, si su función de densidad viene dada por*

$$f(x) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\alpha}, \quad x \geq 0 \tag{2.19}$$

y $f(x) = 0$, en otro caso.

Recordando la definición de la función $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x} dx$, para $r > 0$, se deducen sus principales características estadísticas:

1. Su media es:

$$E(X) = \frac{\alpha}{\theta^\alpha} \int_0^\infty x x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\alpha} dx = \theta \Gamma(\frac{1}{\alpha} + 1) \tag{2.20}$$

2. Su varianza es:

$$V(X) = \theta^2 [\Gamma(\frac{2}{\alpha} + 1) - \Gamma^2(\frac{1}{\alpha} + 1)] \tag{2.21}$$

2.5. Distribución Beta

Pensemos en una póliza que cubre dos tipos de siniestros independientes, y que la cuantía de cada uno de ellos sigue una distribución $\gamma(a, r_i)$, $i = 1, 2$. En este caso la v.a. $Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$ representa la fracción de pérdida asociada al primer siniestro, mientras que $Y_2 = \frac{X_2}{X_1+X_2}$, respresenta la fracción asociada al segundo siniestro.

En este caso, haciendo uso de transformaciones de variables, se comprueba que la distribución de Y_1 es una distribución Beta de parámetros r_1, r_2, mientras que la de Y_2 es una distribución Beta de parámetros r_2, r_1.

Formalmente, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.7 *Se dice que la v.a. X sigue una distribución Beta de parámetros $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ y se denota por $\mathcal{B}(r_1, r_2)$, si su función de densidad viene dada por*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma(r_1 + r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} x^{r_1-1}(1-x)^{r_2-1} = \\ &= \frac{1}{B(r_1, r_2)} x^{r_1-1}(1-x)^{r_2-1} \end{aligned}$$

si $0 \leq x \leq 1$, y $f(x) = 0$, en otro caso.

De imponer la condición de que la función de densidad integra la unidad, se deduce que

$$B(r_1, r_2) = \int_0^1 x^{r_1-1}(1-x)^{r_2-1} dx = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1 + r_2)}$$

y, $\Gamma(r) = \int_0^\infty x^{r-1}e^{-x}dx$, para $r > 0$.

En cuanto a sus carácterísticas estadísticas:

1. Su media es:

$$E(X) = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \tag{2.22}$$

2. Su varianza es:

$$V(X) = \frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)^2(r_1 + r_2 + 1)} \tag{2.23}$$

Para calcular momentos ordinarios de cualquier orden de este tipo de variables es imprescindible resolver la integral correspondiente reformulándola en términos de la integral de una función de densidad de su misma familia (Beta), aunque posiblemente de distintos parámetros.

En la práctica actuarial, es habitual la utilización de distribuciones Beta de segunda especie, tambien denominadas Betas de tres parámetros, $r, r_1, r_2 > 0$.

Definición 2.8 *Se dice que la v.a. Z sigue una distribución Beta de segunda especie o Beta de tres parámetros $r > 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ y se denota por $\mathcal{B}(r, r_1, r_2)$, si su función de densidad viene dada por*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\Gamma(r_1 + r_2)}{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)} r^{r_1} \frac{z^{r_2-1}}{(r+z)^{r_1+r_2}} = \\ &= \frac{r^{r_1}}{B(r_1, r_2)} \frac{z^{r_2-1}}{(r+z)^{r_1+r_2}}, \end{aligned}$$

si $z \geq 0$, y $f(z) = 0$, en otro caso.

Donde,

$$B(r_1, r_2) = \frac{\Gamma(r_1)\Gamma(r_2)}{\Gamma(r_1 + r_2)}$$

y, $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$, para $a > 0$.

Evidentemente las variables X y Z están relacionadas. En particular $X = \frac{r}{r+Z}$, o lo que es lo mismo, $Z = r\frac{(1-X)}{X}$.

En cuanto a las carácterísticas estadísticas de la v.a. Z con distribución Beta de segunda especie:

1. Su media es:

$$E(Z) = \frac{r r_2}{r_1 - 1}, \tag{2.24}$$

   para $r_1 > 1$.

2. Su varianza es:

$$V(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2,$$

   donde,

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_0^\infty \frac{r^{r_1}}{B(r_1, r_2)} z^2 \frac{z^{r_2 - 1}}{(r+z)^{r_1 + r_2}} = \\ &= \frac{r^2}{B(r_1, r_2)} \int_0^\infty z^2 \frac{r^{r_1 - 2}}{(r+z)^{r_1 - 2}} \frac{z^{r_2 + 1}}{(r+z)^{r_2 + 2}} = \\ &= \frac{r^2}{B(r_1, r_2)} B(r_1 - 2, r_2 + 2) = \frac{r^2 (r_2 + 1) r_2}{(r_1 - 1)(r_1 - 2)}, \end{aligned}$$

   de donde,

$$V(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2 = \frac{r^2 r_2 (r_1 + r_2 - 1)}{(r_1 - 1)^2 (r_1 - 2)}. \tag{2.25}$$

   Una cuenta similar a la realizada en el caso del momento ordinario de segundo orden $E(Z^2)$, es la que se hace siempre, a partir de la condición de que la función de densidad integra la unidad, para calcular momentos ordinarios de cualquier orden en variables con distribución Beta.

2.6. Ejercicios de aplicación

Se enumeran a continuación un conjunto de ejercicios de aplicación de este tema; en particular seguimos con la segunda de las formuladas en el programa de la asignatura:

> Describir y analizar situaciones sencillas de riesgo en problemas relacionados con el mundo actuarial o de las finanzas y expresarlas formalmente en términos de variables aleatorias y sus distribuciones.

1. En una compañía de seguros se ha estimado que la cuantía por reclamación por responsabilidad del profesional médico, es una v.a. con distribución de Pareto con parámetros k, α. Se sabe además que la empresa aseguradora cubre las reclamaciones de cuantía menor que un cierto valor $c > k$, y que subcontrata a su vez a una empresa reaseguradora para cubrir las reclamaciones con cuantías superiores a c.

   a) Obtén la función de densidad truncada de X, es decir, la de la v.a. $Y = X|X > c$.

   b) Demuestra que la v.a. Y, sigue una distribución de Pareto de parámetros $k = c$, α.

   Solución:

   a) $f(y) = \frac{\alpha c^\alpha}{y^{\alpha+1}}$, si $y \geq c$; $f(y) = 0$, en otro caso. *b*) Se deduce directamente a la vista de la función de densidad obtenida en *a*).

2. La cuantía por reclamación, X, (en miles de euros) en la compañía aseguradora *Gentilicia* es una v.a. con distribución de Pareto de parámetros $k = 3$ (miles de euros) y $\alpha = 2{,}6$. La compañía decide reasegurarse con en banco *Providencial*, de manera que dicho banco cubra las reclamaciones por encima de los 6000 euros.

   a) Obtener la función de densidad de la v.a. X.

   b) Calcular su media y su varianza.

   c) Calcular la probabilidad de que en una reclamación, la cuantía supere los 6000 euros.

   d) Si sabemos que la cuantía de una reclamación ha superado los 6000 euros, calcular la probabilidad de que supere los 9000.

e) Obtener la función de densidad de las cuantías reclamadas al banco *Providencial*.

Solución:

a) $f(x) = \frac{45{,}23}{x^{3{,}6}}$, si $x \geq 3$; $f(x) = 0$, en otro caso. *b*) $EX = 4,875$ miles de euros, $VarX = 15{,}234375$ millones de euros. *c*) $P(X > 6) = 0{,}16$ *d*) $P(X > 9|X > 6) = 0{,}3484$ *e*) $f(y) = \frac{2{,}6 \cdot 6^{2{,}6}}{y^{3{,}6}}$, si $y \geq 6$; $f(y) = 0$, en otro caso.

3. Para una v.a. no negativa X con función de distribución $F(x, \theta)$, se define la "*prima de riesgo bajo el principio de prima de riesgo ajustada*", como:

$$P(\theta) = \int_0^\infty [P(X > x)]^{\frac{1}{\rho}} dx = \int_0^\infty [1 - F(x, \theta)]^{\frac{1}{\rho}} dx$$

Demostrar que:

a) Si $X \in \exp(\theta)$, entonces $P(\theta) = \frac{\rho}{\theta}$.

b) Si $X \in Pareto(\theta, \alpha)$, con α conocido, entonces $P(\theta) = \frac{\rho\theta}{(\alpha-\rho)}$, $\alpha > \rho$.

4. Un reaseguro "*excess loss*" es una modalidad de reaseguro por la que el reasegurador cubre la parte del seguro que excede del pleno fijado por la cedente para cada siniestro. En esta modalidad, el reasegurador asume la parte de cada siniestro que supera una determinada cantidad. Esta cantidad recibe el nombre de *cesión* en los seguros vida y *deducible* en los seguros no vida. Si denotamos por M al pleno o deducible fijado para cada siniestro, y X es la v.a. que representa la cuantía por reclamación, pueden suceder dos cosas:

a) Que $X \leq M$, entonces el responsable es el asegurador y no hay reaseguro.

b) Que $X > M$, existe reaseguro que cubre $X - M$. Por tanto, el asegurador paga $Y = \text{mín}\{X, M\}$, mientras que el reasegurador paga $Z = \text{máx}\{0, X - M\}$.

Si $F_Y(y)$ es la función de distribución de la v.a. $Y = \text{mín}\{X, M\}$, se verifica:

$$F_Y(y) = \{ \begin{array}{ll} F(x), & x \leq M \\ 1, & x \geq M \end{array}$$

De donde $E(Y^n) = \int_0^\infty [\text{mín}\{X, M\}]^n f(x)dx$, y teniendo en cuenta que

$$Y = \text{mín}\{X, M\} = \left\{ \begin{array}{ll} x, & 0 \leq x \leq M \\ M, & x \geq M \end{array} \right.$$

y dado que $E([\text{mín}\{X, M\}]^n) = \int_0^M x^n f(x)dx + M^n[1 - F(M)]$, se obtiene que los pagos medios del asegurador son: $E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M[1 - F(M)]$,

Si la v.a. X sigue una distribución log-normal (μ, σ), calcula $E(Y^n)$ y $E(Y)$, para un reaseguro *excess loss*.

Solución:

$E(Y^n) = e^{mn+\frac{1}{2}\sigma^2 n^2}\Phi(\frac{lnM-m}{\sigma} - \sigma n) + M^n \left(1 - \Phi(\frac{lnM-m}{\sigma})\right)$.

$E(Y) = e^{m+\frac{1}{2}\sigma^2}\Phi(\frac{lnM-m}{\sigma} - \sigma) + M \left(1 - \Phi(\frac{lnM-m}{\sigma})\right)$.

5. Considera una v.a. continua de la que sabemos que $X > k$, con $k = 2$, su media es $E(X) = 3$.

   a) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución de Pareto de primer tipo, calcula el valor del parámetro α.

   b) Bajo la hipótesis de que X sigue una distribución exponencial desplazada, calcula su varianza.

   c) Analiza las diferencias en varianza de las posibilidades anteriores.

   d) Analiza las diferencias entre las probabilidades de que dicha variables tome valores superiores a 10, bajo ambas condiciones.

   e) Representa gráficamente, $f(2), f(3), f(4)$ y $f(10)$, en ambas situaciones, para darte una idea de cómo decrecen ambas distribuciones.

   Solución:

   a) $\alpha = 3$. *b*) $VarX = 1$. *c*) La varianza si X es Pareto es 3, luego es tres veces mayor que si X es exponencial desplazada. *d*) Si X es Pareto (3,2), $P(X > 10) = 0{,}008$, si es exponencial desplazada, $P(X > 10) = 0{,}000335$. *e*) Representar las funciones $f(x) = \frac{3 \cdot 2^3}{x^4}$, si $x \geq 2$; $f(x) = 0$, en otro caso y $g(x) = e^{x-2}$, si $x \geq 2$; $g(x) = 0$, en otro caso, en los puntos 2, 3, 4 y 10. En la gráfica se tiene que apreciar la diferencia mostrada en *c*).

6. Sea X una v.a. con distribución $\gamma(a, r)$ y c una constante positiva. Demuestra que la v.a. cX sigue una distribución $\gamma(\frac{a}{c}, r)$.

   Aplicación: Si la v.a. cuantía por reclamación sigue una distribución γ, y estaba expresada en años anteriores en pesetas, ¿cuál es la distribución de la misma variable si la expresamos en euros?

   Solución:

   $Y = cX$, $g(y) = \frac{(\frac{a}{c})^r}{\Gamma(r)} y^{r-1} e^{-(\frac{a}{c})y}, \quad y \geq 0$, luego Y sigue una distribución $\gamma(\frac{a}{c}, r)$. Si Y mide el coste en euros y X el mismo coste en pesetas, siendo la distribución de X una $\gamma(a, r)$, entonces la distribución de Y es $\gamma(\frac{a}{0{,}006}, r)$.

7. La cuantía por reclamación de cada uno de n siniestros independientes, sigue una distribución exponencial de parámetro a.

   a) Calcula la distribución de la v.a. *cuantía total*, definida como la suma de las cuantías de los n siniestros.

   b) Calcula la distribución de la v.a. *cuantía media*, definida como la media aritmética de las n cuantías. Calcula su media y su varianza.

   Solución:

   a) Si Z es la cuantía total, $Z \in \gamma(a, n)$. *b*) Si $\overline{X}$ es la cuantía media, $\overline{X} \in \gamma(na, n)$.

8. Una opción de compra (*call*) sobre un activo es un contrato por el cual el poseedor de la opción adquiere el derecho a comprar el activo (*subyacente*) en una fecha de vencimiento (T) y a un precio (p) fijado de antemano (*precio de ejercicio*).

   Considera un inversor de una *call* que paga hoy 1,7 euros por el derecho a comprar en T un activo $BVBV$ a 28 euros. Obviamente si el activo vale en T, menos de 28 euros, el inversor no ejercerá su derecho a compra y perderá el euro con siete; mientras que si el activo en T vale más, el inversor ejercerá la opción de compra y comprará el activo.

   Sobre la distribución del precio X del activo $BVBV$ en T, sabemos que

$$\begin{aligned} P(X < 28) &= 0{,}3 \\ E(X|X > 28) &= \int_{28}^{\infty} xf(x)dx = 21{,}6 \end{aligned}$$

a) Define la v.a. B:*beneficio proporcionado por la opción*, y determina sus valores en función del valor del activo en T.

b) Calcula en beneficio esperado proporcionado por la opción, $E(B)$.

c) Si el precio del activo BVBV hoy es de 27.64 euros, ¿cuál ha de ser su valor esperado en T, para que el beneficio esperado por cada euro sea el mismo, invirtiendo en opciones que directamente en el mismo activo subyacente?

Solución:

a) $B = \begin{cases} -1{,}7 & \text{si} \quad X < 28 \\ X - 1{,}7 - 28 & \text{si} \quad X > 28 \end{cases}$ *b*) $E(B) = 0{,}3$ euros. *c*) 32.51 euros.

9. Un empresa aseguradora ha recogido datos sobre las cuantías por reclamación (Y) de distintos siniestros, todas ellas superiores a 3 millones (M)de euros. Se estima además en 5, el número esperado de siniestros de este tipo por año.

$$\{ \ 3{,}2 \ ; \ 4 \ ; \ 5 \ ; \ 4{,}5 \ ; \ 3{,}1 \ ; \ 3{,}8 \ ; \ 7 \ ; \ 3{,}2 \ ; \ 3{,}4 \ ; \ 4 \ \}$$

Suponiendo que la v.a. Y: cuantía por reclamación en millones de euros, sigue una distribución de Pareto, calculad:

a) Probabilidad de tener un siniestro con cuantía superior a los 20 M de euros.

b) ¿Cada cuántos años se espera un siniestro de más de 20 M de cuantía?

c) Si la cartera de esta empresa está formada por 200000 pólizas que se renuevan anualmente, ¿cuánto cuesta por póliza el reaseguro de los siniestros de más de 20 M?

Solución:

a) $P(Y > 20) = 0{,}000932 \approx 0{,}001$. *b*) Cada 200 años. *c*) 0.6396 euros por póliza.

Capítulo 3

Distribuciones compuestas

En los dos temas anteriores, hemos visto por separado el comportamiento de dos variables aleatorias, a saber, número de siniestros y cuantía por reclamación. Sin embargo, en la práctica, éstas son dos variables que aparecen simultáneamente, y que tenemos que estudiar de forma conjunta. La *cuantía por reclamación, condicionada a la ocurrencia de un siniestro*, puede tener características distintas de la *cuantía por reclamación, condicionada a la ocurrencia de k siniestros* o en general de la *cuantía por reclamación* incondicionada al número de siniestros, por ejemplo.

Además haciendo extensivo este estudio, veremos que a la hora de modelizar el comportamiento de una v.a., como una distribución concreta, ésta puede depender de parámetros, que a su vez sean variables aleatorias. Este caso también se enmarca dentro del estudio de las *distribuciones de probabilidad compuestas.*

Consideremos una v.a. X cuya función de probabilidad, ya sea función de cuantía o de densidad, dependa de un parámetro θ_0; es decir $P(x;\theta_0)$ ó $f(x;\theta_0)$. Ahora bien, si el parámetro θ es además una v.a. con su función de probabilidad denotada por $P(\theta)$ ó $f(\theta)$. Realmente, cuando escribamos $P(x;\theta_0)$ nos estaremos refiriendo a la probabilidad de que X el valor x condicionada o sabiendo que el valor de θ es fijo y vale θ_0, es decir $P(x|\theta=\theta_0)$. Asimismo, en el caso continuo, cuando escribamos $f(x;\theta_0)$ nos estaremos refiriendo a la desidad de X condicionada o sabiendo que el valor de θ es fijo y vale θ_0, es decir $f(x|\theta=\theta_0)$.

Haciendo uso de la extensión del Teorema de Bayes y del de la partición, se define el concepto de *distribución compuesta* o *mixtura de distribuciones.*

Definición 3.1 *Se denomina distribución compuesta de X en relación a θ, a la distribución de X incondicionada al valor de θ, que se obtiene directamente* *del teorema de la partición, como*

$$P(X = x) = \sum_{\theta} P(x|\theta)P(\theta) \tag{3.1}$$

si X y θ son v.a. discretas y como

$$f(x) = \int_{\theta} f(x|\theta)f(\theta)d\theta \tag{3.2}$$

si tanto X como θ son v.a. continuas.

Como veremos en el siguiente ejemplo también son frecuentes las combinaciones de v.a. discretas y continuas.

3.0.1. La distribución de Poisson compuesta

Sea X una v.a de Poisson de parámetro λ. Es decir

$$P(X = k; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

donde a su vez el parámetro λ es una v.a., por ejemplo continua y con función de densidad $f(\lambda)$.

La distribución compuesta de X, vendrá dada por:

$$P(X = k) = \int_0^{\infty} P(X = k|\lambda)f(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}f(\lambda)d\lambda$$

En el caso particular de que λ siga una distribución γ, veremos en el siguiente ejemplo que la distribución compuesta de X es una Binomial negativa.

Ejemplo 3.1 *Sea X una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ, donde dicho parámetro se comporta a su vez como una v.a. $\gamma(a, r)$.*

Es decir:

$$P(X = k|\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

y

$$f(\lambda) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}e^{-a\lambda}, \quad \lambda \geq 0$$

y $f(\lambda) = 0$, en otro caso; donde $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1}e^{-x}dx$.

Por lo tanto la distribución de X incondicionada a λ es:

$$P(X = k) = \int_0^{\infty} P(k|\lambda)f(\lambda)d\lambda = \frac{a^r}{\Gamma(r)k!}\int_0^{\infty} e^{-\lambda(a+1)}\lambda^{k+r-1}d\lambda \qquad (3.3)$$

Sabiendo que

$$\frac{(a+1)^{k+r}}{\Gamma(k+r)}\int_0^{\infty} \lambda^{k+r-1}e^{-(a+1)\lambda}d\lambda = 1$$

puesto que es la función de densidad de una v.a. $\gamma(a+1, k+r)$*. En la expresión (3.3), si* $k + r \in \mathbf{Z}^+$*, tenemos:*

$$P(X = k) = \frac{a^r}{\Gamma(r)k!}\frac{\Gamma(k+r)}{(a+1)^{k+r}} = \left(\begin{array}{c} r+k-1 \\ k \end{array} \right)\left(\frac{a}{a+1}\right)^r\left(\frac{1}{a+1}\right)^k$$

que corresponde a una función de cuantía de una v.a. Binomial negativa de parámetros $m = r$*,* $p = \frac{a}{(a+1)}$*.*

Es decir otra forma alternativa de introducir la distribución *Binomial negativa* es como la distribución compuesta de una v.a. Poisson, donde el parámetro λ sigue una distribución γ.

3.0.2. La distribución Binomial compuesta

Sea X una v.a. con distribución Binomial de parámetros (N, p), es decir $X \in B(N, p)$. Su función de cuantía viene dada por:

$$P(X = k; N) = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{N-k}, \quad k \in \{0, ..., N\}$$

Si el número de repeticiones o exposiciones al riesgo, N, es también una v.a., la expresión anterior es en realidad la probabilidad condicionada al valor del parámetro N, es decir:

$$P(X = k; N) = P(X = k|N = n)$$

Si queremos obtener la distribución incondicionada de X, tendremos que conocer cuál es la distribución de la v.a. N. Consideremos el caso en el que N es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ, así

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Entonces la distribución de X *incondicionada* a N, será:

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_n P(k|N=n)P(N=n) = \quad (k \leq n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \\
&= e^{-\lambda}\lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{p^k(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{n!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \\
&= \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^n}{(n)!} = \frac{e^{-\lambda}(p\lambda)^k}{k!} e^{q\lambda} = \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, ...
\end{aligned}$$

función de cuantía que corresponde a una distribución de Poisson de parámetro $p\lambda$. Es decir, la distribución Binomial compuesta con una Poisson de parámetro λ es una Poisson $\lambda \cdot p$.

3.1. La teoría de los valores extremos

Consideremos de forma general que la cuantía por reclamación por siniestro es una v.a. Y que tiene como función de distribución $F(y)$. Así, para un valor cualquiera y, $F(y) = P(Y \leq y)$, nos da la probabilidad de que la cuantía o el coste del siniestro sea inferior o igual a y.

El número de siniestros por su parte es otra v.a. X.

En muchos casos prácticos nos interesa conocer la probabilidad de que, a lo largo de un tiempo determinado, el coste mayor de los correspondientes a los siniestros ocurridos no supere una cierta cantidad y.

Es decir nos interesa buscar la distribución de probabilidad del *máximo de las cuantías* (o coste de la reclamación de mayor cuantía), *incondicionada al número de siniestros que han podido ocurrir*.

Partimos de la hipótesis de que los siniestros ocurren de manera independiente y la cuantía de todos ellos, Y, tiene la misma distribución, con función de distribución $F(\cdot)$.

Denotaremos por $\phi(y)$ a la función de distribución buscada, esto es, la función de distribución de *la cuantía con mayor coste* ($= \max Y$).

Claramente, de acuerdo con el teorema de la partición,

$$\phi(y) \quad = \quad P(\max Y \leq y) = \sum_{j=0}^{\infty} P(\max Y \leq y | X = j) \cdot P(X = j)$$

Además,

$P(\text{máx}\, Y \leq y|X = j) = P(\text{máx}\{Y_1, ..., Y_j\} \leq y) = P(Y_1 \leq y \cap ... \cap Y_j \leq y) = [P(Y \leq y)]^j$

, de donde

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= P(X = 0) + P(X = 1)P(Y \leq y) + P(X = 2)P(Y \leq y)^2 + ... = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)P(Y \leq y)^j = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)F(y)^j
\end{aligned}$$

Ahora bién, esta suma ha aparecido ya en probabilidad. Pensemos en una v.a. discreta X, para la que queremos calcular su función generatriz de probabilidad (también denominada función generatriz de momentos factoriales), $G_X(u)$, definida como, $G_X(u) = E(u^X)$. Si X es discreta:

$$G(u) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)u^j$$

Es decir,

$$\phi(y) = G(F(y))$$

para cualesquiera v.a. X y Y y siempre la v.a. X tenga función generatriz de probabilidad.

Ejemplo 3.2 *Considera que el número de siniestros X es una v.a de Poisson de parámetro λ. Obtener la distribución del coste de la reclamación de mayor cuantía.*

En este caso:

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X = j)(F(y))^j = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^j}{j!} F(y)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda F(y))^j}{j!} = \\
&= e^{-\lambda}e^{\lambda F(y)} = e^{-\lambda(1-F(y))}
\end{aligned}$$

Siendo $F(y)$ la función de distribución de la cuantía en y.

Nota: Observa que la función generatriz de probabilidad de una v.a. $X \in \mathcal{P}(\lambda)$, es $G_X(u) = e^{-\lambda(1-u)}$, $\lambda > 0$.

En similares condiciones a las descritas anteriormente, en ocasiones nos interesará conocer la distribución de la *cuantía total incondicionada al número* *de siniestros*. Si denotamos por Z a la v.a. cuantía total, y por $F_Z(\cdot)$ a su función de distribución, tenemos:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X=0)+P(X=1)P(Z_1=S_1\leq z)+ \\ &+ P(X=2)P(Z_2=S_1+S_2\leq z)+...= \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)P(Z_j\leq z)=\sum_{j=0}^{\infty} P(X=j)F^{*j}(z) \end{aligned}$$

donde $Z_j = S_1 + ... + S_j$ es la cuantía total condicionada a la ocurrencia de j siniestros, es decir la suma de las cuantías de los j-ésimos primeros siniestros y F^{*j} es su función de distribución.

Entonces, la distribución de la *cuantía total* es la distribución compuesta de la cuantía con respecto al número de siniestros.

A veces, es sencillo obtener las funciones de distribución anteriores, y a partir de ellas, las de densidad. En otras ocasiones, simplemente no es necesario obtener la forma de su función de densidad y basta con obtener una relación de sus primeros momentos, media y varianza.

3.2. Relación entre momentos condicionados y no condicionados

Consideremos dos v.a. discretas X e Y. La función de cuantía condicionada de $X|Y=y$, viene dada por:

$$P(X=x|Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$$

Si ambas v.a. son continuas, la correspondiente función de densidad condicionada es:

$$f(x|Y=y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$$

Así, siempre que los denominadores sean distintos de cero, las ditribuciones condicionadas están bién definidas y podemos obtener sus momentos. Por simplicidad haremos las cuentas en el caso particular de v.a. discretas, aunque las relaciones que obtengamos serán también válidas en el caso de v.a. continuas o mixtas.

En el caso de v.a. discretas, se obtiene la esperanza de la distribución condicionada de $X|Y=y$, como

$$E(X|Y=y)=\sum_x xP(X=x|Y=y)$$

De modo que su relación con la esperanza de la v.a. X incondicionada es:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_x xP(X=x) = \sum_x x \sum_y P(X=x, Y=y) = \\
&= \sum_x \sum_y xP(X=x|Y=y)P_Y(y) = \\
&= \sum_y \sum_x xP(X=x|Y=y)P_Y(y) = \\
&= \sum_y P_Y(y) \sum_x xP(X=x|Y=y) = \\
&= \sum_y P_Y(y)E(X|Y=y) = E_Y[E(X|Y)]
\end{aligned}$$

Así mismo si la varianza de la distribución de X condicionada a $Y=y$, es:

$$V(X|Y=y) = \sum_x x^2 P(X=x|Y=y) - [E(X|Y)]^2$$

entonces la varianza incondicionada de X se puede expresar en función de los dos momentos de la distribución condicionada como sigue:

Proposición 3.1 *Sean X e Y dos v.a. cualesquiera, tales que existen y son finitos los valores los momentos condicionados, $E(X|Y=y)$ y $V(X|Y=y)$. Entonces, se verifica:*

$$V(X) = E_Y[V(X|Y)] + V_Y[E(X|Y)]$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_x x^2 P(X=x) - [E(X)]^2 = \\
&= \sum_y P_Y(y) \sum_x x^2 P(X=x|Y=y) - [E_Y(E(X|Y))]^2 = \\
&= E_Y(E(X^2|Y)) - [E_Y(E(X|Y))]^2
\end{aligned}$$

sumamos y restamos $E_Y([E(X|Y)]^2)$,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E_Y(E(X^2|Y)) - E_Y([E(X|Y)]^2) + E_Y([E(X|Y)]^2) - [E_Y(E(X|Y))]^2 = \\
&= E_Y[E(X^2|Y) - [E(X|Y)]^2] + V_Y(E(X|Y)) = \\
&= E_Y(V(X|Y)) + V_Y(E(X|Y))
\end{aligned}$$

Las relaciones anteriores son válidas en cualquier contexto de probabilidad. En particular nos resultarán de gran utilidad para determinar valores esperados y varianzas de distribuciones incondicionadas, sin necesidad de obtener de forma explícita la forma completa de la distribución compuesta.

Ejemplo 3.3 *Considera que el número de siniestros que suceden en determinado tipo de riesgo sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, y que la cuantía por reclamación de cada uno de ellos sigue una distribución exponencial de parámetro a. Bajo la hipótesis de independencia tanto entre cuantías como entre siniestros, vamos a obtener la media y la varianza de la v.a.* cuantía total.

En primer lugar si llamamos $Z_k = Y_1 + ... + Y_k$ a la cuantía total para un número de siniestros k, donde Y_i representa la cuantía por reclamación en cada siniestro, sabemos que la distribución de Z_k es $\gamma(a,k)$. Por lo tanto $E(Z_k) = \frac{k}{a}$ y $V(Z_k) = \frac{k}{a^2}$.

Por otro lado si el número de siniestros X, sigue una distribución de Poisson, tenemos que la media incondicionada de Z, es

$$E(Z) = E_X(E(Z|X = k)) = E_X(\frac{k}{a}) = \frac{1}{a}\lambda$$

y la varianza incondicionada de Z, será

$$\begin{aligned} V(Z) &= E_X(V(Z|X = k)) + V_X(E(Z|X = k)) = E_X(\frac{k}{a^2}) + V_X(\frac{k}{a}) = \\ &= \frac{1}{a^2}\lambda + \frac{1}{a^2}\lambda = \frac{2\lambda}{a^2} \end{aligned}$$

3.3. Mixtura de distribuciones normales

Vamos a ver en esta sección distintos casos de distribuciones compuestas que se obtienen a partir de distribuciones normales donde los parámetros varían.

Consideremos una v.a X que sigue una distribución normal de parámetros (m, σ^2), tal que el parámetro σ a su vez toma el valor σ_1 con probabilidad p y el valor σ_2 con probabilidad $q = 1 - p$.

Tenemos por lo tanto que la distribución de X condicionada al valor de su varianza es conocida; su función de densidad es:

$$f(x|\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

Lo que queremos es determinar *la distribución compuesta de X*; es decir su distribución incondicionada.

Su función de densidad, $f(x)$, se obtiene como:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x|\sigma=\sigma_1)P(\sigma=\sigma_1)+f(x|\sigma=\sigma_2)P(\sigma=\sigma_2)= \\ &= p\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma_1^2}}+(1-p)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma_2^2}} \end{aligned}$$

En ocasiones esta función de densidad no es manejable y lo que nos interesa es conocer simplemente sus valores típicos: media, varianza, asimetría y curtosis.

La función generatriz de momentos de X, $\alpha_X(u)$, es fácil de obtener a partir de su relación con las distribuciones condicionadas.

En particular, la función generatriz de momentos $\alpha_X(u)$, es:

$$\begin{aligned} \alpha_X(u) &= E(e^{uX})=\int e^{ux}f(x)dx=p\int e^{ux}f(x|\sigma=\sigma_1)dx+ \\ &+ (1-p)\int e^{ux}f(x|\sigma=\sigma_2)dx= \\ &= pe^{\frac{\sigma_1^2u^2}{2}+mu}+(1-p)e^{\frac{\sigma_2^2u^2}{2}+mu} \end{aligned}$$

Utilizando del desarrollo en serie de la función, e^x.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

e igualando los coeficientes de términos de igual grado en el desarrollo en serie de la función generatriz,

$$\alpha_X(u)=1+\alpha_1u+\alpha_2\frac{u^2}{2!}+\alpha_3\frac{u^3}{3!}+... \tag{3.4}$$

podemos obtener los momentos ordinarios α_k para la variable X. Concretamente:

$$\begin{aligned} \alpha_X(u) &= pe^{\frac{\sigma_1^2u^2}{2}+mu}+(1-p)e^{\frac{\sigma_2^2u^2}{2}+mu}= \\ &= e^{mu}[pe^{\frac{\sigma_1^2u^2}{2}}+(1-p)e^{\frac{\sigma_2^2u^2}{2}}]= \\ &= e^{mu}[p(1+\frac{\sigma_1^2u^2}{2}+\frac{\sigma_1^4u^4}{2^22!}+\frac{\sigma_1^6u^6}{2^33!}+...)+ \\ &+ (1-p)(1+\frac{\sigma_2^2u^2}{2}+\frac{\sigma_2^4u^4}{2^22!}+\frac{\sigma_2^6u^6}{2^33!}+...)]= \\ &= e^{mu}[1+\frac{p\sigma_1^2+(1-p)\sigma_2^2}{2}u^2+\frac{p\sigma_1^4+(1-p)\sigma_2^4}{2^22!}u^4+\frac{p\sigma_1^6+(1-p)\sigma_2^6}{2^33!}u^6+...] \end{aligned}$$

Sin embargo, también podemos obtener los valores típicos, media, varianza, asimetría y curtosis, directamente de la función cumulativa, $\mu_X(u)$. Para ello, es necesario obtener el desarrollo en serie de $\mu_X(u)$. Por un lado:

$$\mu_X(u) = k_1 u + k_2 \frac{u^2}{2!} + k_3 \frac{u^3}{3!} + k_4 \frac{u^4}{4!} + ... \tag{3.5}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= E(X) \\ k_2 &= V(V) \\ k_3 &= \mu_3 = E(X-m)^3 \\ k_4 &= \mu_4 - 3\sigma^4 = E(X-m)^4 - 3\sigma^4 \end{aligned}$$

Pero por otro lado, tenemos que ver cuales son concretamente los cumulantes k_i en nuestro caso.

$$\begin{aligned} \mu_X(u) &= ln\alpha_X(u) = mu + ln(1 + \frac{p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2}{2}u^2 + \frac{p\sigma_1^4 + (1-p)\sigma_2^4}{2^2 2!}u^4 + \\ &+ \frac{p\sigma_1^6 + (1-p)\sigma_2^6}{2^3 3!}u^6 + ...) = mu + ln(1+Y) \end{aligned}$$

donde llamamos

$$Y = \frac{p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2}{2}u^2 + \frac{p\sigma_1^4 + (1-p)\sigma_2^4}{2^2 2!}u^4 + \frac{p\sigma_1^6 + (1-p)\sigma_2^6}{2^3 3!}u^6 + ...$$

Utilizando ahora el desarrollo en serie de la función $ln(1+x)$, que es:

$$ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

calculando los coeficientes de los primeros términos de las potencias Y, Y^2,..., e identificando todos aquellos que acompañan a u, a u^2, etc, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu_X(u) &= mu + ln(1+Y) = mu + \frac{1}{2}(p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2)u^2 + \\ &+ \frac{1}{8}(1-p)p(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 u^4 + ... \end{aligned}$$

Así, los cumulantes nos proporcionan los valores típicos:

$$k_1 = E(X) = E_\sigma(E(X|\sigma)) = E_\sigma(m) = m$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= V(x) = E_\sigma(V(X|\sigma)) + V_\sigma(E(X|\sigma)) = \\
&= E_\sigma(\sigma^2) + V_\sigma(m) = {\sigma_1}^2 p + \sigma_2^2(1-p) + 0 = p\sigma_1^2 + (1-p)\sigma_2^2 \\
k_3 &= \mu_3 = E(X-m)^3 = 0 \\
k_4 &= \mu_4 - 3\sigma^4 = E(X-m)^4 - 3\sigma^4 = 4!\frac{1}{8}(1-p)p(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2 = 3p(1-p)(\sigma_1^2-\sigma_2^2)^2
\end{aligned}
$$

3.4. Ejercicios de aplicación

Se enumeran a continuación un conjunto de ejercicios de aplicación correspondientes a este tema. En particular se trabajan las competencias segunda y tercera de las formuladas en la guia docente de la asignatura:

> Describir y analizar situaciones sencillas de riesgo en problemas relacionados con el mundo actuarial o de las finanzas y expresarlas formalmente en términos de variables aleatorias y sus distribuciones.

1. De un total de 9872 pólizas de seguros de automóvil contratadas en una compañía de seguros, 1083 presentaron reclamaciones durante el año 2004. Disponemos de la tabla de datos que nos da el número de reclamaciones efectuadas X, así como la cuantía total de las reclamaciones Y (en euros).

$X\|Y$	< 1200	≥ 1200
1	937	28
2 ó más	103	15

Si escogemos una póliza al azar entre las 9872, calcula las siguientes probabilidades:

   a) Que haya efectuado una única reclamación.

   b) Si se sabe que ha reclamado, la probabilidad de que la cuantía de dicha reclamación haya sido igual o superior a 1200 euros.

   c) Que haya efectuado más de una reclamación con una cuantía total igual o superior a 1200 euros.

   d) ¿Son independientes el número de reclamaciones y la cuantía total?

Solución:

a) $P(X=1) = \frac{965}{9872}$. *b*) $P(Y \geq 1200|X \geq 1) = \frac{43}{1083}$. *c*) $P(X \geq 2 \cap Y \geq 1200) = \frac{15}{9872}$. *d*) No son independientes, dado que las probabilidades marginales y condicionadas no son iguales, p.e., $P(X = 1) \neq P(X = 1|Y < 1200)$.

2. Considera una compañía de seguros que contrata 200 pólizas donde el número de siniestros X sigue una dsitribución de Poisson, $\mathcal{P}(\lambda)$ y la cuantía por reclamación en cada uno de ellos Y, se pueden modelizar como una v.a. exponencial de parámetro a, donde la media de la exponencial es 20 euros y el parámetro de la distribución de Poisson es 0.05. Si la prima que se paga por cada póliza es de 6 euros, calcula:

   a) La probabilidad de que en una determinada póliza se produzca una reclamación y que además la cuantía por reclamación sea superior a 6 euros.

   b) La probabilidad de que la cuantía más elevada, para una póliza en concreto, sea menor que 60 euros.

   c) La probabilidad de que la cuantía más elevada, sobre el total de las 200 pólizas, sea menor que 60 euros.

   d) Media y varianza de la cuantía total por póliza.

   e) Media y varianza de la cuantía total por reclamaciones de las 200 pólizas.

   f) La probabilidad aproximada de que el beneficio neto de la compañía sea superior a 600 euros.

   g) La probabilidad aproximada de que la compañía pierda dinero en esta operación con las 200 pólizas.

   Solución:

   a) $P(X = 1 \cap Y > 6) = 0{,}035$.

   b) $P(maxY \leq 60) = 0{,}9975$.

   c) $(P(maxY \leq 60))^{200} = 0{,}606$.

   d) $E(Z) = 1$, $Var(Z) = 40$.

   e) $E(Z_{200}) = 200$, $Var(Z_{200}) = 8000$.

   f) $P(B_{neto} > 600) \approx 1$.

   g) $P(B_{neto} < 0) \approx 0$.

3. Obtén la distribución incondicionada de la v.a. X, su media, EX y su varianza, $V(X)$, en las dos siguientes situaciones:

a) X/θ sigue una distribución de Poisson, $\mathcal{P}(\theta)$, tal que,

$$\mathcal{P}(x/\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

y θ sigue una distribución $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$, con función de densidad:

$$\pi(\theta) = \frac{a^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-a\theta}$$

donde para $r > 0$, $\Gamma(r) = \int_0^\infty n^{r-1}e^{-n}dn$, y $\theta \geq 0$.

b) X/θ sigue una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ cuya función de cuantía es:
$P(x/\theta) = \begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} (\frac{r}{r+\theta})^r(\frac{\theta}{r+\theta})^x$, $x = 0, 1, 2, ..$
y θ sigue una distribución Beta de segunda especie, con $r, a, b > 0$ y función de densidad:

$$\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)}\frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y $\theta > 0$.

Solución:

a) Se trata de una distribución Binomial negativa, de parámetros $(r, \frac{a}{a+1})$. Por tanto, $EX = \frac{r}{a}$ y $V(X) = \frac{r(a+1)}{a^2}$.

b) Se trata de una distribución discreta con función de cuantía,

$$P(X = k) \quad = \quad \begin{pmatrix} r+k-1 \\ k \end{pmatrix} \frac{B(a+r, b+k)}{B(a,b)}; \quad k = 0, 1, 2...$$

Además, $EX = \frac{rb}{a-1}$ y $E(X^2) = \frac{rb}{a-1} + \frac{r+1}{r}r^2\frac{b(b+1)}{(a-1)(a-2)}$. Luego la varianza, $V(X) = E(X^2) - (EX)^2$.

Nota: observa que en este segundo caso, para obtener los momnetos de la v.a. X hay que utilizar las distribuciones condicionada y condición, dado que de otra forma, la cuenta es mucho más conplicada.

4. Cierta compañía tiene 100 pólizas contratadas en 100 edificios. 25 de ellos poseen 5 viviendas, otros 25 poseen 15 viviendas y el resto posee 10 viviendas. Se ha estimado que el número de reclamaciones anuales por incendio y edificio sigue una ley de Polya con parámetro de contagio $\delta = 0{,}2$, y que la probabilidad inicial de incendio en una vivienda es $p = 0{,}01$.

   a) Sabiendo que cierto edificio tiene 10 viviendas, calcula la probabilidad de que se efectúen en él 2 reclamaciones por incendio.

   b) Idem con un edificio de 5 viviendas.

   c) Calcula medias y varianzas del número de reclamaciones, condicionadas al número de viviendas por edificio.

   d) Calcula la media y la varianza del número de reclamaciones por edificio, incondicionada al número de viviendas que posea.

   e) Calcula la probabilidad aproximada de que el total de reclamaciones sobre las 100 pólizas no sea superior a 10.

   Solución:

   a) $P(X = 2/n = 10) = 0{,}0123$.

   b) $P(X = 2/n = 5) = 0{,}0071$.

   c) $EX = 10$, $Var(X) = 26{,}81$.

   d) $P(X_T < 10) = 0{,}46$.

5. Consideremos un activo tal que su precio mañana es una v.a con distribución normal $N(m = 3, \sigma = 2)$ con probabilidad 0.7 y sigue una distribución normal $N(m = 5, \sigma = 1)$ con probabilidad 0.3. Obtén la distribución incondicionada del precio del activo mañana, su media y varianza.

   Solución:

   $EX = 3{,}6$, $Var(X) = 3{,}94$.

6. Considera un activo cuyo rendimiento es normal $N(m = 3, \sigma_1^2 = 30)$ con probabilidad p y sigue una distribución normal $N(m = 3, \sigma_2^2 = 100)$ con probabilidad $1-p$. Obtén media y la varianza incondicionada del rendimiento del activo.

   Solución:

   $EX = 3$, $Var(X) = 100 - 7p$.

7. Cierto siniestro tiene una probabilidad de ocurrir de 0,005, en cada exposición al riesgo del tomador de la póliza. Se sabe que el número de exposiciones al riesgo sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 5$.

   a) Calcula la probabilidad de que no haya ningún siniestro si ha habido 20 exposiciones al riesgo.

   b) Calcula la distribución compuesta del número de siniestros.

   c) Calcula la probabilidad (incondicionada) de que no haya ningún siniestro.

   Solución:

   a) $P(X = 0/n = 20) = 0{,}9046$.

   b) $\mathcal{P}(\lambda p)$.

   c) $P(X = 0) = 0{,}9753$.

8. Una compañía aseguradora dispone de dos tipos de asegurados A y B. El 30 % son de tipo A y el resto de tipo B. Para los del tipo A, el número de siniestros sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_A = 0{,}5$, y para los de tipo B de parámetro $\lambda_B = 0{,}3$.

   a) Obtén la función de cuantía del número de siniestros incondicionada al tipo de asegurado.

   b) Calcula las probabilidades correspondientes de 0,1 y 2 siniestros.

   c) Obtén la media y la varianza de la distribución incondicionada.

   d) Si la empresa tiene 1000 pólizas, por lo tanto 300 de tipo A y 700 de tipo B, y hay independencia entre siniestros, calcula de forma aproximada la probabilidad de que el número total de siniestros no exceda de 400. ¿En qué te basas para realizar esta aproximación?

   Solución:

   a) $P(X = k) = e^{-0{,}5} \cdot \frac{0{,}5^k}{k!} \cdot 0{,}3 + e^{-0{,}3} \cdot \frac{0{,}3^k}{k!} \cdot 0{,}7$, $k = 0, 1, ...$

   b) $P(X = 0) = 0{,}7$, $P(X = 1) = 0{,}2454$, $P(X = 2) = 0{,}04581$.

   c) $EX = 0{,}36$, $Var(X) = 0{,}3684$.

   d) $P(X_T < 400) \approx 0$.

9. Considera una póliza de una comunidad que cubre dos tipos de siniestros, A y B. El número de reclamaciones por el siniestros A sigue

una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 0{,}01$, mientras que el número de reclamaciones de tipo B sigue una distribución binaria de parámetro $p = 0{,}001$. Bajo la hipótesis de independencia entre ambos tipos de siniestros.

a) La cuantía que se paga por cada reclamación del tipo A es de 10000 euros, y de 100000 euros por cada una de tipo B. Calcula el valor esperado de la cuantía total por póliza.

b) Obtén la varianza de la cuantía total por póliza.

c) Si se tienen 100 pólizas iguales, estima el valor de la prima para que se alcance un beneficio final total al menos de 30000 euros con probabilidad 0.8. (Utiliza el T.C.L.)

d) Resuelve de nuevo los tres apartados anteriores, bajo la hipótesis de que la cuantía por reclamación es una v.a. exponencial de media 10000 para las pólizas de tipo A y de media 100000 para las de tipo B.

Solución:

a) $EY = 200$ euros.

b) $Var(Y) = 1{,}099 \cdot 10^7$ euros^2.

c) prima= 778,46 euros.

d) $EY = 200$ euros, $Var(Y) = 2{,}199 \cdot 10^7$ euros^2 y prima= 893,905 euros.

10. Una empresa aseguradora sabe que la cuantía por reclamación de determinado tipo de póliza tiene una distribución de Pareto de parámetros $k = 10$ euros y $\alpha = 2{,}1$. La empresa cubre las reclamaciones de hasta 1000 euros de cuantía, y cuantías superiores a dicha cantidad son cubiertas por otra compañía reaseguradora.

a) Para cada reclamación, calcula la probabilidad de que la compañía reaseguradora no tenga que cubrir su cuantía.

b) Siendo el número de reclamaciones una v.a. de Poisson de parámetro $\lambda = 10$. Calcula la probabilidad de que la compañía reaseguradora no tenga que cubrir ninguna reclamación, incondicionada al número de las mismas.

Solución:

a) $P(Y < 1000) = 0{,}999936$.

b) $P(maxY < 1000) = 0{,}999000$.

11. Considera dos tipos de siniestros A y B independientes. La probabilidad de reclamar por A es 0.1 y la de reclamar por B es 0.01, y como mucho se admite una reclamación por cada uno de ellos. La cuantía por reclamación, para ambos tipos de siniestro sigue una distribución exponencial de media 100 euros. Una compañía oferta una póliza compuesta para cubrir ambos siniestros y cobra una prima por póliza de 30 euros. Se pide:

    a) Distribución del número de reclamaciones por póliza. Media y varianza.

    b) Probabilidad de que una póliza efectúe una reclamación y que su cuantía sea superior a los 5 euros.

    c) Media y varianza de la cuantía incondicionada al número de reclamaciones.

    d) Si la empresa posse 100 pólizas independientes, utiliza el T.C.L. para obtener la distribución de la cuantía total por reclamaciones.

    e) Probabilidad de que los beneficios de la compañía superen los 1000 euros.

    Solución:

    a) $P(X = 0) = 0{,}891$, $P(X = 1) = 0{,}108$, $P(X = 2) = 0{,}001$, $EX = 0{,}11$ y $Var(X) = 0{,}0999$.

    b) $P(X = 1 \cap Y > 5) = 0{,}102732$.

    c) $E(Y_T) = 11$ euros, $Var(Y_T) = 2099$ euros^2.

    d) $N(m = 1900, \sigma^2 = 209900)$.

    e) $P(B > 1000) = 0{,}975$.

Capítulo 4

Principios de cálculo de primas

La *prima* se define como el pago que un asegurado hace a un asegurador por la cobertura total o parcial contra un riesgo.

El precio correcto, también denominado *rating*, es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para la compañía aseguradora y si es demasiado alto se pierde competitividad en el mercado. Analizaremos en este trabajo algunos de los métodos de cálculo de primas, también llamadas principios de cálculo de primas.

Si denotamos por X a la variable aleatoria que nos representa el riesgo, un principio de cálculo de prima se define como una función $\mathcal{H}(X)$ que asigna al riesgo X un número real, que es la prima. En la práctica, el principio de cálculo de prima dependerá de la función de distribución $F(x)$ de la variable X.

Una vez establecido el principio de cálculo de prima a aplicar a un riesgo X, el siguiente paso será calcular la prima asociada a X conforme a una determinada distribución de probabilidad. En algunos casos, las variables aleatorias degeneran en variables deterministas. En otras ocasiones, tanto los costes como el número de siniestros son variables aleatorias.

De aquí en adelante, y salvo que se diga lo contrario, el riesgo X representará indistintamente el número de siniestros, la cuantía por cada uno de ellos o la cantidad total o agregada.

4.1. Cálculo de Primas y Funciones de pérdida

La metodología de cálculo de primas utilizando funciones de pérdida, fue propuesta en [Heilmann, 1989], obteniendo de esta manera muchos de los principios de cálculo de primas que ya se utilizaban así como otros nuevos.

Consideramos una función de pérdida $L : R^2 \to R$ que atribuya a algún $(x, P) \in R^2$, la pérdida soportada por un decisor que toma la acción P y se encuentra con el resultado x de algún experimento aleatorio. En este caso la *prima de riesgo* se define de la siquiente manera:

Definición 4.1 *Dados un riesgo X con función de densidad $f(x)$ y una función de pérdida $L : R^2 \to R$, la prima de riesgo es el valor de P que minimiza la pérdida esperada,*

$$\int L(x,P)f(x)dx = E_f[L(x,P)] \tag{4.1}$$

donde x es el resultado del experimento aleatorio X y P la prima cobrada por tomar x.

Si la variable aleatoria X es discreta, se deberá minimizar la expresión:

$$\sum_{x=0}^{\infty} L(x,P)P(x)$$

donde $P(x)$ es la función de cuantía de X.

Para obtener las distintas primas de riesgo se consideran funciones de pérdida de la forma:

- cuadrática
- exponencial
- cuadrática ponderada

de acuerdo con los siguientes resultados:

Teorema 4.1 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática dada por $L(x,P) = (x-P)^2$, resulta*

$$P = \mathcal{H}(X) = E_f(X) \tag{4.2}$$

denominado principio de prima neta o de equivalencia.

Teorema 4.2 *Si consideramos la función de pérdida exponencial dada por $L(x,P) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha P})^2$, con $\alpha > 0$, resulta*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{1}{\alpha} \log E_f(e^{\alpha X}) \tag{4.3}$$

denominado principio de utilidad exponencial.

Teorema 4.3 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso $g(x) = e^{\alpha x}$, dada por $L(x, P) = e^{\alpha x}(x - P)^2$ con $\alpha > 0$, entonces,*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{E_f(Xe^{\alpha X})}{E_f(e^{\alpha X})} \tag{4.4}$$

que es el principio de Esscher.

Teorema 4.4 *Si consideramos la función de pérdida cuadrática ponderada, con peso $g(x) = x$, dada por $L(x, P) = x(x - P)^2$, entonces,*

$$P = \mathcal{H}(X) = \frac{E_f(X^2)}{E_f(X)} = E_f(X) + \frac{Var_f(X)}{E_f(X)} \tag{4.5}$$

denominado principio de varianza.

Los principios de cálculo de primas mostradas en los teoremas anteriores son los más utilizados en la literatura actuarial y pueden estudiarse siempre que la distribución de la variable aleatoria X sea conocida.

En el contrato actuarial es habitual considerar que todos o algunos de los parámetros de los que depende la distribución de probabilidad de X son desconocidos. La prima calculada de acuerdo con los principios de cálculo de primas mostradas en los Teoremas 4.1- 4.4, dependerá en la práctica de alguno de dichos parámetros.

Por ejemplo, si el riesgo X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, $\mathcal{P}(\lambda)$, la prima calculada conforme al principio de prima neta vendrá dada por $\mathcal{H}(X) = EX = \lambda$. Si el parámetro λ es desconocido pero fijo, la prima se estima y se obtiene como la estimación puntual de λ, $\hat{\lambda}$.

El problema se complica cuando el parámetro del que depende la distribución de X es a su vez desconocido y aleatorio.

En este caso, el cálculo de primas hace uso de conceptos relacionados con las *distribuciones compuestas* introducidos en el capítulo anterior.

4.2. Prima colectiva o a priori

Si $f(x)$ denota la función de densidad asociada a la variable aleatoria X y es dependiente del parámetro θ, escribiremos $f(x, \theta)$ ó $f(x/\theta)$ para denotar a su función de densidad. En este caso, la variable será denotada por X/θ. Si además θ es un parámetro aleatorio, denotaremos por $\pi(\theta)$ a la función de densidad correspondiente.

Serán de utilidad, tanto la distribución compuesta de X en relación al parámetro θ, como las fórmulas que relacionan el cálculo de los momentos ordinarios de X en relación a los de las variables X/θ y θ.

Cuando la distribución de X depende del parámetro θ, la *prima de riesgo* P depende también del parámetro desconocido θ y será denotada por $P(\theta)$. La mejor estimación de dicha prima es la *prima colectiva*, cuya definición aparece a continuación.

Definición 4.2 *Dados un riesgo X/θ, con función de densidad $f(x/\theta)$, siendo θ un parámetro desconocido y aleatorio con función de densidad a priori $\pi(\theta)$ y una función de pérdida $L : R^2 \rightarrow R$, la prima colectiva es el valor P_C que minimiza la pérdida esperada,*

$$\int_\theta L(P(\theta), P_C)\pi(\theta)d\theta \tag{4.6}$$

siendo $P(\theta)$ la prima de riesgo definida en (4.1).

La prima colectiva tal y como está definida en (4.6) es la mejor forma de estimar, ya que optimiza en el sentido de mínimo, la prima de riesgo (obviamente desconocida).

Considerando que la distribución del riesgo X condicionada a la ocurrencia del parámetro θ es $f(x/\theta)$ y que θ es una variable aleatoria con densidad $\pi(\theta)$, podemos obtener las expresiones de la *prima colectiva* para los principios de *prima neta, exponencial, Esscher y varianza*, sin más que extender los Teoremas 4.1-4.4 a este caso.

Teorema 4.5 *Para el principio de prima neta con función de pérdida cuadrática, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = (P(\theta) - P_C)^2$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = E(X/\theta)$. Entonces la prima colectiva viene dada por

$$P_C = E_\theta(P(\theta))$$

Teorema 4.6 *Para el principio de utilidad exponencial con función de pérdida cuadrática, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha P(\theta)} - e^{\alpha P_C})^2$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = \frac{1}{\alpha} \log E(e^{\alpha X/\theta})$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{1}{\alpha} \log E_\theta(e^{\alpha P(\theta)})$$

Teorema 4.7 *Para el principio de prima Esscher con función de pérdida cuadrática ponderada, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = (e^{\alpha P(\theta)})(P(\theta) - P_C)^2, \alpha > 0$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = \frac{E(X/\theta e^{\alpha X/\theta})}{E(e^{\alpha X/\theta})}$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{E_\theta(P(\theta)e^{\alpha P(\theta)})}{E_\theta(e^{\alpha P(\theta)})}.$$

Teorema 4.8 *Para el principio de prima de varianza con función de pérdida cuadrática ponderada, tenemos que*

$$L(P(\theta), P_C) = P(\theta)(P(\theta) - P_C)^2$$

donde la prima de riesgo es $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)}$. *Entonces la prima colectiva viene dada por*

$$P_C = \frac{E_\theta(P(\theta))^2}{E_\theta(P(\theta))} = \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} + E_\theta(P(\theta)).$$

Es decir, para calcular la prima colectiva en cualquiera de los cuatro principios de prima, se repite dos veces un mismo cálculo. Primero se obtiene la prima de riesgo, $P(\theta)$, a partir de la distribución condicionada de X/θ; y luego, con el mismo procedimiento, se obtiene la prima colectiva P_C a partir de la distribución de θ.

Ejemplo 4.1 *a) Veamos cómo se calculan la prima de riesgo y la prima colectiva bajo el principio de prima neta cuando el riesgo,* X/θ, *sigue una distribución de Poisson,* $\mathcal{P}(\theta)$ *y* θ *a su vez sigue una distribución gamma,* $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$.

En este caso, por el Teorema 4.1, la prima de riesgo es $P(\theta) = E(X/\theta) = \theta$ [1], *mientras que la prima colectiva es por el Teorema 4.5:*

$$P_C = E_\theta(P(\theta)) = E_\theta(\theta) = \frac{r}{a}. \tag{4.7}$$

[1] Partimos de conocer que la media de una Poisson de parámetro θ es θ y la media de una gamma (a, r) es $\frac{r}{a}$.

b) Si utilizamos el principio de varianza, por el Teorema 4.4, la prima de riesgo es: $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta + \frac{\theta}{\theta} = \theta + 1$ [2], *mientras que la prima colectiva es por el Teorema 4.8:*

$$\begin{aligned} P_C &= E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} = \\ &= E_\theta(\theta+1) + \frac{Var_\theta(\theta+1)}{E_\theta(\theta+1)} = \\ &= \frac{r}{a} + 1 + \frac{\frac{r}{a^2}}{\frac{r}{a}+1} = \frac{(r+a)^2+r}{a(r+a)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ejemplo 4.2 *a) En este caso veremos cómo se calculan la prima de riesgo y prima colectiva bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo* X/θ *sigue una distribución Binomial negativa,* $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ *con función de cuantía:*

$P(x/\theta) = \begin{pmatrix} r+x-1 \\ x \end{pmatrix} (\frac{r}{r+\theta})^r (\frac{\theta}{r+\theta})^x,\ x = 0,1,2,..$

y θ *sigue una distribución Beta de segunda especie, con* $r, a, b > 0$ *y función de densidad:*

$$\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ *y* $\theta > 0$.

Siguiendo de nuevo el Teorema 4.1, la prima de riesgo en este caso es[3], *si* $X/\theta \in Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$,

$$P(\theta) = E(X/\theta) = r\frac{\frac{\theta}{r+\theta}}{\frac{r}{r+\theta}} = \theta \tag{4.9}$$

Siguiendo de nuevo el Teorema 4.5, la prima colectiva se calcula como $P_C = E_\theta(P(\theta)) = E_\theta(\theta)$.

Para calcular la esperanza de θ *hacemos uso del hecho de que su función de densidad integra la unidad,*

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{B(a,b)} \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = 1 \tag{4.10}$$

[2]Partimos de conocer que la varianza de una gamma (a, r) es $\frac{r}{a^2}$.
[3]Partimos de conocer la media y la varianza de una Binomial negativa.

de donde,

$$\int_0^\infty r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = B(a,b) \tag{4.11}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (4.10),

$$\begin{aligned}
E(\theta) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty \theta r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \frac{r}{B(a,b)} \int_0^\infty r^{a-1} \frac{\theta^{b}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \\
&= \frac{r}{B(a,b)} B(a-1,b+1) = r \frac{\frac{\Gamma(a-1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} = r \frac{(a-2)!(b)!}{(a-1)!(b-1)!} = \\
&= r\frac{b}{a-1}, \ \textit{si } a \neq 1.
\end{aligned}$$

Luego, la prima colectiva es,

$$P_C = E_\theta(\theta) = \frac{rb}{a-1}, \ \textit{si } a \neq 1. \tag{4.12}$$

b) Si utilizamos el principio de varianza, siguiendo el Teorema 4.4, la prima de riesgo es

$$P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta + \frac{\theta(r+\theta)}{r\theta} = \frac{\theta(r+1)}{r} + 1 \tag{4.13}$$

Y en este caso, la prima colectiva es $P_C = E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))}$.

Para calcular $Var_\theta(P(\theta))$*, nos hace falta conocer la varianza de* θ *y por tanto su momento ordinario de orden 2,* $E(\theta^2)$*.*

Dicho momento, al igual que la media, se calcula haciendo uso de la forma de la integral que sabemos hacer de la densidad de una Beta.

Así,

$$\begin{aligned}
E(\theta^2) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty \theta^2 r^a \frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^\infty r^a \frac{\theta^{b+1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \\
&= \frac{r^2}{B(a,b)} \int_0^\infty r^{a-2} \frac{\theta^{b+1}}{(r+\theta)^{a+b}} d\theta = \frac{r^2}{B(a,b)} B(a-2,b+2) = \\
&= r^2 \frac{(b+1)b}{(a-1)(a-2)}, \ \textit{si } a \neq 1, 2.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
Var(\theta) &= E(\theta^2) - [E(\theta)]^2 = r^2\frac{(b+1)b}{(a-1)(a-2)} - [\frac{rb}{(a-1)}]^2 = \\
&= \frac{r^2 b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)},\ \textit{si } a \neq 1,2.
\end{aligned}$$

De donde,

$$E(P(\theta)) = E_\theta(1+\theta\frac{1+r}{r}) = 1 + \frac{(1+r)b}{a-1}$$

y

$$Var_\theta(P(\theta)) = Var(1+\theta\frac{1+r}{r}) = \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)},$$

siendo $a \neq 1, 2$. *Por tanto, la prima colectiva en este caso resulta ser,*

$$\begin{aligned}
P_C &= E_\theta(P(\theta)) + \frac{Var_\theta(P(\theta))}{E_\theta(P(\theta))} = \\
&= 1 + \frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{\frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)^2(a-2)}}{1+\frac{(1+r)b}{(a-1)}} = \\
&= 1 + \frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)(a-2)[(a-1)+(1+r)b]},
\end{aligned} \tag{4.14}$$

si $a \neq 1, 2$.

4.3. Prima de Bayes o a posteriori

Para obtener la *prima de Bayes o a posteriori*, debemos combinar la información a priori obtenida del parámetro θ y la información muestral. Si la densidad a priori viene dada por $\pi(\theta)$ y $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ es un vector que recoge la información muestral, la verosimilitud del dato observado será $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)$. Utilizando el teorema de Bayes, la distribución a priori será:

$$\pi(\vec{x}/\theta) = \frac{\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)}{\int_\theta \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)d\theta}\ \ \alpha\ \ \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)$$

Con lo cual, la *prima de Bayes o a posteriori* se puede definir de la siguiente manera:

Definición 4.3 *Dados un riesgo X, (X/θ), con función de densidad de probabilidad $f(x/\theta)$, siendo θ un parámetro desconocido con distribución a priori $\pi(\theta)$, una función de pérdida $L : R^2 \to R$ y un vector de datos observados $\vec{x}$, la prima de Bayes es el valor $P(\vec{x})$ que minimiza:*

$$\int_\theta L[P(\theta), P(\vec{x})]\pi(\theta/\vec{x})d\theta$$

siendo $P(\theta)$ la prima de riesgo y $\pi(\theta/\vec{x})$ la distribución a posteriori de θ dada la muestra.

Suponiendo los resultados de los Teoremas 4.1-4.4, para la prima de riesgo, y 4.5-4.8, para la prima colectiva, se pueden obtener las expresiones de la prima de Bayes para los principios de cálculo de primas vistas anteriormente, de la siguiente forma:

Teorema 4.9 *Bajo el principio de prima neta, tenemos que la función de pérdida es $L(P(\theta), P(\vec{x}))^2$, donde $P(\theta) = E(X/\theta)$ denota a la prima de riesgo. Entonces la prima de Bayes viene dada por*

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}[E_f(X/\theta)],$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ es la distribución a posteriori de θ dado $\vec{x}$.

Teorema 4.10 *Para el principio de utilidad exponencial, tenemos que la función de pérdida es $L(P(\theta), P(\vec{x})) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha P(\theta)} - e^{\alpha P(\vec{x})})^2$, siendo la prima de riesgo $P(\theta) = \frac{1}{\alpha}\log E(e^{\alpha X/\theta})$.*

Entonces la prima de Bayes viene dada por:

$$P(\vec{x}) = \frac{1}{\alpha}\log E_{\pi(\theta/\vec{x})}(e^{\alpha P(\theta)}),$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ es la distribución a posteriori de θ dado $\vec{x}$.

Teorema 4.11 *Para el principio de Esscher, tenemos que la función de pérdida es $L(P(\theta), P(\vec{x})) = e^{\alpha P(\theta)}(P(\theta) - P(\vec{x}))^2, \quad \alpha > 0$, siendo la prima de riesgo $P(\theta) = \frac{E(X/\theta e^{\alpha X/\theta})}{E(e^{\alpha X/\theta})}$. Entonces la prima de Bayes viene dada por:*

$$P(\vec{x}) = \frac{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[P(\theta)e^{\alpha P(\theta)}]}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[e^{\alpha P(\theta)}]},$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ es la distribución a posteriori de θ dada $\vec{x}$.

Teorema 4.12 *Para el principio de varianza, tenemos que la función de pérdida es $L(P(\theta), P(\vec{x})) = P(\theta)(P(\theta) - P(\vec{x}))^2$, siendo la prima de riesgo $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)}$. Entonces, la prima de Bayes viene dada por:*

$$P(\vec{x}) = \frac{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[P(\theta)]^2}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}[P(\theta)]},$$

donde $\pi(\theta/\vec{x})$ es la distribución a posteriori de θ dada $\vec{x}$.

A la vista de los resultados mostrados en los Teoremas 4.9-4.12, calcular la prima de Bayes equivale a utilizar las fórmulas de la prima colectiva dados en los Teoremas 4.5-4.8, reemplazando la distribución a priori θ, por la distribución a posteriori de θ dado $\vec{x}$.

En este sentido, serán útiles las familias de distribuciones conjugadas. Existe una clase de distribuciones a priori conocidas como distribuciones conjugadas, en las cuales se da que si la distribución a priori es de la familia conjugada, la distribución a posteriori lo será también.

Definición 4.4 *Supongamos que el modelo que genera los datos X tiene distribución $f(x/\theta)$. Una familia de densidades a priori $\mathcal{F}$ para el parámetro θ, se dice conjugada para el muestreo dado por $f(x/\theta)$ si para cualquier densidad a priori $\pi(\theta) \in \mathcal{F}$ se confirma que la densidad a posteriori es proporcional al producto de la verosimilitud y dicha distribución a priori,*

$$\pi(\theta/\vec{x}) \;\; \alpha \;\; \mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta)$$

y por lo tanto es también una densidad de la familia $\mathcal{F}$.

En la práctica consideramos familias conjugadas aquellas que aparecen de forma natural en los procesos de muestreo más habituales. Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.3 *Teniendo en cuenta que el riesgo X/θ sigue una distribución de Poisson, $P(\theta)$, y θ sigue una distribución gamma, $\gamma(a, r)$. Obtendremos que la distribución a posteriori $\pi(\theta/x) \in \gamma(a+n, r+n\bar{x})$. Es decir, la clase de densidades a priori $\gamma(a, r)$ es conjugada para el muestreo de Poisson. Para verlo, calculamos la verosimilitud:*

$$\mathcal{L}(\vec{x}/\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}...e^{-\theta}\frac{\theta^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{x_1+...+x_n}}{x_1!...x_n!} = e^{-n\theta}\frac{\theta^{n\bar{x}}}{x_1!...x_n!}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{x} = \frac{x_1+...+x_n}{n}$*, luego* $n\bar{x} = x_1 + ... + x_n$ *y*

$$\pi(\theta) = \frac{a^r}{\Gamma(r)} e^{-a\theta}\theta^{r-1}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta) &= e^{-n\theta}\frac{\theta^{n\bar{x}}}{x_1!...x_n!}\frac{a^r}{\Gamma(r)}e^{-a\theta}\theta^{r-1} \\ &= \frac{a^r}{\Gamma(r)x_1!...x_n!}e^{-(a+n)\theta}\theta^{n\bar{x}+r-1} \quad \alpha \quad e^{-(a+n)\theta}\theta^{n\bar{x}+r-1}\end{aligned}$$

Por lo tanto: $\pi(\theta/\vec{x}) \in \gamma(a+n, r+n\bar{x})$.

Ejemplo 4.4 *Teniendo en cuenta que el riesgo* X/θ *sigue una distribución Binomial negativa,* $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$*, y* θ *sigue una distribución Beta de segunda especie* $Be(r, a, b)$*. Obtendremos que la distribución a posteriori,* $\pi(\theta/x) \in Be(r, a+nr, b+n\bar{x})$ *y por tanto, la clase de densidades a priori Beta de segunda especie* (r, a, b) *es conjugada para el muestreo mediante una Binomial negativa.*

En este caso, la verosimilitud $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta) \quad \alpha \quad (\frac{r}{r+\theta})^{nr}(\frac{\theta}{r+\theta})^{x_1...x_n}$ *y* $\pi(\theta) = \frac{r^a}{B(a,b)}\frac{\theta^{b-1}}{(r+\theta)^{a+b}}$*, de donde,* $\mathcal{L}(\vec{x}/\theta)\pi(\theta) \quad \alpha \quad \frac{\theta^{b+n\bar{x}-1}}{(r+\theta)^{n\bar{x}+a+b}}$*, luego*

$$\pi(\theta/\vec{x}) \in Be(r, a+nr, b+n\bar{x}).$$

Ejemplo 4.5 *a) Veamos cómo se calcula la prima de Bayes bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo* X/θ *sigue una distribución de Poisson,* $P(\theta)$*, y* θ *sigue una distribución gamma,* $\gamma(a, r)$*,* a*,* $r>0$*.*

Según el Teorema 4.9, la prima de Bayes bajo el principio de prima neta es: $P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))$*, donde* $P(\theta) = E(X/\theta) = \theta$*.*

Teniendo en cuenta el Ejemplo 4.3, la distribución a posteriori de $\theta/\vec{x}$ *es* $\gamma(a+n, r+n\bar{x})$*.*

Por lo tanto la prima de Bayes será:

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(E(X/\theta)) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta) = \frac{r+n\bar{x}}{a+n} \tag{4.15}$$

b) Si utilizamos el principio de varianza, por el Teorema 4.12, la prima de Bayes será:

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta)) + \frac{Var_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))},$$

donde $P(\theta) = \theta + 1$. Entonces:

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta+1) + \frac{Var_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta+1)}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta+1)} = \frac{r+n\bar{x}}{a+n} + 1 + \frac{\frac{r+n\bar{x}}{(a+n)^2}}{\frac{r+n\bar{x}}{a+n}+1} =$$

$$= \frac{(r+n\bar{x}+a+n)^2 + r + n\bar{x}}{(a+n)(r+n\bar{x}+a+n)} \quad (4.16)$$

Ejemplo 4.6 *a) En este caso, veremos cómo se calcula la prima de Bayes bajo el principio de prima neta, cuando el riesgo X/θ sigue una distribución Binomial Negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ con función de cuantía:*

$$P(x/\theta) = \binom{r+x-1}{x} (\tfrac{r}{r+\theta})^r (\tfrac{\theta}{r+\theta})^x, \; x = 0, 1, 2, ..$$

donde $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ y $\theta > 0$, sigue una distribución Beta de segunda especie de parámetros r, a, b.

Según el Teorema 4.9, la prima de Bayes será: $P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}E(X/\theta)$

Teniendo en cuenta el Ejemplo 4.4, la distribución a posteriori de $\theta/\vec{x}$ es Beta de parámetros $(r, a+nr, b+n\bar{x})$.

Además si $X/\theta \in Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$, también hemos visto en el Ejemplo 4.1 a) que $E(X/\theta) = \theta$, siendo en este caso la prima de riesgo $P(\theta) = E(X/\theta) = \theta$.

Por lo tanto, la prima de Bayes será, $P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta)) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta)$. Si $E\theta = \frac{rb}{a-1}$, siendo $\theta \in$ Beta de parámetros (r, a, b), sustituyendo los parámetros de la distribución a posteriori, obtenemos que la prima de Bayes, bajo el principio de prima neta es en este caso,

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(\theta) = r\frac{b+n\bar{x}}{a+nr-1}.$$

b) Análogamente si utilizamos el principio de varianza, la prima de riesgo (ver Ejemplo 4.1b)) es: $P(\theta) = E(X/\theta) + \frac{Var(X/\theta)}{E(X/\theta)} = \theta\frac{(r+1)}{r} + 1$, y por tanto, la prima de Bayes es:

$$P(\vec{x}) = E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta)) + \frac{Var_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))}{E_{\pi(\theta/\vec{x})}(P(\theta))} = 1 + \frac{\frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1}{(a+nr-1)^2(a+nr-2)}}{1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x}}{a+nr-1}} =$$

$$= 1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{a+nr-1} +$$

$$+ \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]} \quad (4.17)$$

Expresión análoga a la obtenida en el Ejemplo 4.1 b) (4.14) para la prima colectiva, donde ahora $a+nr$ reemplaza al parámetro a, y $b+n\bar{x}$ reemplaza al parámetro b.

Capítulo 5

La teoría de la credibilidad

5.1. Introducción

Esta teoría se define como el conjunto de técnicas que permiten al asegurador ajustar de modo sistemático, en función de la experiencia de siniestralidad, las primas de los seguros.

Además, se ocupa de medir la importancia que ha de tener la información de un individuo frente a la información de la cartera de seguros en relación a la prima que debe satisfacer.

Uno de sus principales usos se presenta en el seguro de automóvil, son los denominados *sistemas de tarificación bonus-malus*. En ellos, la prima inicial se va transformando sucesivamente a medida que se incorpora la información de la siniestralidad. Con este sistema, el asegurado puede ver bonificada o penalizada su prima particular dependiendo de su propia experiencia de reclamaciones.

En las últimas décadas, el sector financiero ha sufrido un gran cambio, debido principalmente a la globalización de los mercados, a las nuevas tecnologías, al desarrollo de complejos productos derivados y a la incorporación a los mercados de países subdesarroyados. Por todo ello, es de vital importancia para alcanzar el éxito en la gestión financiera, el control y la medición de riesgos. De ahí que haya nacido el riesgo operacional, el cual es un riesgo adscrito a sucesos que no incluyen los de mercado ni los de crédito, y que pueden tener una procedencia interna y/o externa.

Para modelizar el riesgo operacional de acuerdo con las nuevas *indicaciones regulatorias conocidas como Basilea II*, se está realizando un esfuerzo en la implementación de procedimientos tanto cualitativos como cuantitativos.

5.2. Concepto y perspectiva histórica

"Proceedings" fue el primer trabajo publicado sobre teoría de la credibilidad. Fue escrito por [Whitney, 1918], el cual se basó en el trabajo de [Mowbray, 1914] para realizarlo. Dicho texto propone que de una forma simple, la prima que se debe pagar por parte del asegurado incluya su experiencia individual y la de la cartera de seguros:

$$P = Z\ X + (1 - Z)\ C \tag{5.1}$$

donde X es la experiencia individual, C la información que se dispone sobre el colectivo y Z un factor de ponderación denominado factor de credibilidad.

Además, el factor de credibilidad Z debería satisfacer lo siguiente:

- Ser una función del tiempo de vigencia de la póliza, n, por tanto $Z \equiv Z(n)$
- Ser una función creciente en n, de modo que se aproxime a 1 cuando n tienda a infinito, mientras que tienda a 0 cuando n tienda a 0. Por tanto, si $n = 0$, supondríamos que se trataría de un contrato nuevo y la prima a cobrar sería C. Por otro lado, si n tiende a infinito, la prima estará basada en la experiencia individual, por lo que la prima sería X,
- Z debería ser también una función creciente de la varianza de las primas teóricas, con limite 1 cuando aquella tiende a infinito y 0 cuando tiende a 0.

[Hickmann, 1975] propuso que la teoría de la credibilidad es el mecanismo que permite el ajuste sistemático de las primas de seguros conforme se obtiene la experiencia de siniestralidad.

Por otro lado, [Hewitt, 1970] define credibilidad como un estimador lineal de la prima teórica esperada que sea una combinación convexa entre la hipótesis y la observación.

A mediados del siglo XX, empezó a tener importancia una nueva visión de la estadística, la Bayesiana. Muchos estimadores Bayes y su distribución a priori natural conjugada respondían a la propuesta de [Mowbray, 1914], [Whitney, 1918] y [Bailey, 1945]. En este aspecto destacamos el trabajo de [Mayerson, 1964] en el que por primera vez se utilizan los términos credibilidad y estadística Bayesiana.

En 1975 se publicó el texto "Credibility. Theory and Applications", el cual incluye todo el conocimiento existente hasta la fecha sobre la teoría de la credibilidad.

Lo que hoy en día se entiende por *teoría de la credibilidad moderna* surge con la publicación del modelo de distribución libre, publicado por [Bühlmann, 1967]. El objetivo de este modelo es estimar la prima correspondiente a un asegurado o grupo, que forman una póliza en una cartera de seguros, restringiéndose a las primas lineales y utilizando el método de los mínimos cuadrados.

Posteriormente en [Bühlmann y Straub, 1972] se generaliza el modelo clásico de [Bühlmann, 1967] a una cartera de seguros. La solución obtenida es más general que la del modelo de [Bühlmann, 1967], además de incluirla como un caso particular.

Pocos años más tarde, [Jewell, 1974] se planteó el problema de considerar como verosimilitud asociada al número de reclamaciones. La solución fue que el estimador de la prima neta admitía siempre una expresión lineal, con el factor de credibilidad igual al de [Bühlmann, 1967].

Otro tipo de modelos tienen en cuenta el hecho empíricamente contrastado de que las distribuciones del número de siniestros en el ramo de automóviles están muy cargados de ceros, incorporando las distribuciones infladas de ceros, ver [Boucher y Denuit, 2007]. Además, se han propuesto modelos de credibilidad tipo panel, basados en varios períodos de tiempo, ver [Gajek et al., 2007].

5.3. Credibilidad total

Si los asegurados tienen una experiencia de reclamación favorable, querrán que la prima que tengan que pagar esté basada en su experiencia de siniestralidad. Sin embargo, esto sólo será posible si la experiencia de reclamación es estable. Para resolver este problema, una manera es suponer que $\bar{x}$ es estable si existe una probabilidad alta de que la diferencia entre $\bar{x}$ y ϵ sea pequeña, siendo ϵ la media teórica de $\bar{x}$. Esto requeriría admitir credibilidad total si se verifica:

$$Pr(|\bar{x} - \epsilon| \leq c\epsilon) = Pr[((1-c)\epsilon \leq \bar{x} \leq (1+c)\epsilon)] \geq p \tag{5.2}$$

siendo $0 < p < 1$ y $c > 0$.

La fórmula (5.2) también se puede escribir de la siguiente forma:

$$Pr[(|\frac{\bar{x} - \epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq \frac{c\epsilon\sqrt{n}}{\sigma})] \geq p \tag{5.3}$$

Además, X_p se define como:

$$X_p = inf_x\{Pr(|\frac{\bar{x}-\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq x) \geq p\}$$

Si suponemos que $\bar{x}$ sigue una $N(\epsilon, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Ésta última expresión equivale a:

$$Pr(|\frac{\bar{x}-\epsilon}{\sigma/\sqrt{n}}| \leq X_p) = p \tag{5.4}$$

donde X_p es el cuantil $1-\frac{p}{2}$. Así, tendremos que X_p es 1,96 si suponemos que p es 0,95.

Por tanto, de (5.3) para suponer credibilidad total, se ha de verificar que:

$$\frac{c\epsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq X_p$$

que es lo mismo que el coeficiente de variación

$$g_0 = \frac{\sigma}{\epsilon} \leq \frac{c}{X_p}\sqrt{n} = \sqrt{\frac{n}{\lambda_0}} \tag{5.5}$$

es decir, que el coeficiente de variación es menor o igual que $\sqrt{n/\lambda_0}$.

Así, se supondrá credibilidad total si,

$$n \geq \lambda_0(\frac{\sigma}{\epsilon})^2. \tag{5.6}$$

En la práctica, si la experiencia del asegurado es suficientemente grande, de acuerdo al Teorema Central del Límite, la variable aleatoria $(\bar{x}-x)/(\sigma\sqrt{n})$ sigue una distribución $N(0,1)$ aproximadamente. Así, obtenemos que la fórmula (5.4) puede escribirse como $p = 2\Phi(X_p) - 1$, donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de la normal tipificada. Y X_p es el cuantil $1 - p/2$ de la distribución normal tipificada.

Ejemplo 5.1 *Se cuenta con la experiencia x_j, donde $j = 1, ..., n$, de un contrato de seguro y que $x_1, ..., x_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tipo Poisson ($\theta = 200$). ¿Cuál es el valor más pequeño de n para considerar credibilidad total? Suponiendo que $c = 0,04$ y que $p = 0,95$, y, además, teniendo en cuenta que la aseguradora tarifica atendiendo sólo al número de reclamaciones, X_i, $i = 1, ..., n$ son i.i.d. $\in P(\theta)$ con $\theta = 200$. Entonces, $EX_i = VarX_i = 200$. Además, $E(\bar{x}) = 200$ y $Var(\bar{x}) = \sqrt{\frac{200}{n}}$.*

Si suponemos que $p = 0,95$, *obtenemos que el area* $1 - p/2 = 0,025$. *Por lo que* $\Phi(t_{\alpha/2}) = 0,975$. *Y entonces* $X_p = t_{\alpha/2} = 1,96$.

En este caso, por ser una distribución de Poisson, $\epsilon = \sigma^2 = 200$. *Entonces,* $\lambda_0 = (\frac{X_p}{c})^2 = (\frac{1{,}96}{0{,}04})^2 = 49^2 = 2401$.

Según (5.6), $n \geq \lambda_0(\frac{\sigma}{\epsilon})^2 = 2401(\frac{\sqrt{200}}{200})^2 = 12{,}005$.

Por lo tanto, si los contratos son anuales, harán falta algo más de 12 años para asumir credibilidad total.

5.4. Credibilidad parcial

En la práctica, para muchos asegurados la experiencia de siniestralidad es insuficiente para suponer credibilidad total, es decir $Z(n) = 1$. En la credibilidad parcial, la prima es una combinación lineal convexa entre la experiencia del asegurado y la del colectivo, de modo que:

$$P = Z(n)\bar{x} + [1 - Z(n)]M$$

Para obtener la prima, habrá primero que obtener $Z(n)$, y dado que:

$$Var(P) = Var[Z(n)\bar{x} + [1 - Z(n)]M] = (Z(n))^2 Var(\bar{x}) = (Z(n))^2 \frac{\sigma^2}{n},$$

igualando este último término a ϵ^2/λ_0 resulta,

$$Z(n) = (\epsilon/\sigma)\sqrt{n/\lambda_0}$$

Y así, obtenemos que

$$Z(n) = min\{\frac{\epsilon}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{\lambda_0}}, 1\} \tag{5.7}$$

Ejemplo 5.2 *Con los datos del Ejemplo 5.1, vamos a calcular el factor de credibilidad para una experiencia de reclamaciones correspondiente a 10 años.*

En este caso:

$$Z(n) = Z(10) = min\left\{\frac{200}{\sqrt{200}}\sqrt{\frac{10}{2401}}, 1\right\} = min\{0{,}9126, 1\} = 0{,}9126.$$

Es decir, en más de un $90\,\%$ *se considerarán los datos del colectivo y en menos del* $10\,\%$ *los del individuo a la hora de calcular la prima.*

5.5. Credibilidad e inferencia Bayesiana

En general, cuando se quiere tarificar un riesgo nuevo no se dispone de datos, por ello resulta útil el uso de distribuciones a priori.

El problema de la teoría de la credibilidad consiste en calcular la ponderación que afecta a la experiencia de la siniestralidad de una póliza respecto a la experiencia de un colectivo al cual pertenece dicha póliza.

Si consideramos la siguiente tabla, la cual consta de k asegurados y n periodos de observación de las mismas.

	1	2	...	j	...	k
1	X_{11}	X_{21}	...	X_{j1}	...	X_{k1}
2	X_{12}	X_{22}	...	X_{j2}	...	X_{k2}
...	...	...	...	...	...	...
n	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{jn}	...	X_{kn}

La teoría de la credibilidad determina una prima establecida como una combinación lineal o convexa entre la experiencia de un asegurado y la del colectivo. Esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$P_j = [1 - Z(n)]P_0 + Z(n)]\tilde{P}_j$$

de donde:

- P_j es la prima a aplicar a los asegurados del riesgo j.
- P_0 es la prima del colectivo al que pertenece el asegurador j.
- $\tilde{P}_j$ es la prima obtenida en base a la experiencia del asegurado j.
- $Z(n)$ es el factor de credibilidad que verifica:

  $$\lim_{n \to \infty} Z(n) = 1$$

  siendo n el número de expuestos al riesgo j o el periodo de observación de la póliza j.

También se puede escribir de la siguiente forma:

$$Prima\ (a\ posteriori) = [1 - Z(n)]\ Prima\ (a\ priori) + Z(n)\ Experiencia\ observada$$

Según la definición propuesta por [Hickmann, 1975], la teoría de la credibilidad es un mecanismo que permite el ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene la experiencia de siniestralidad.

Así, la teoría de la credibilidad sigue un esquema bayesiano, dando entrada a la información a priori con la información muestral, para obtener finalmente una situación revisada de la prima.

Ejemplo 5.3 *Comprobaremos que la prima Bayes, bajo el principio de prima neta, obtenida en el Ejemplo 4.5 a) donde* X/θ *seguía una distribución de Poisson,* $P(\theta)$ *y* θ *una distribución* $\gamma(a,r)$, $a,r>0$, *se puede escribir como una fórmula de credibilidad.*

La prima de Bayes obtenida en (4.15) puede escribirse como:

$$P(\vec{x}) = \frac{a}{a}\frac{r}{a+n} + \frac{n\bar{x}}{a+n}$$

donde se ha multiplicado y dividido el primer término por a. *Entonces resulta:*

$$P(\vec{x}) = \frac{r}{a}\frac{a}{a+n} + \frac{n}{a+n}\bar{x} = E(\theta)\frac{a}{a+n} + \frac{n}{a+n}\bar{x} = P_C(1-Z(n)) + Z(n)\bar{x}$$

donde $Z(n) = \frac{n}{a+n}$ *y* P_C *es la prima colectiva que en este caso viene dada por* $P_C = \frac{r}{a}$, $a>0$.

Ejemplo 5.4 *Comprobaremos que la prima de Bayes obtenida en el Ejemplo 4.6 a), donde* X/θ *seguía una distribución* $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ *y* θ *una distribución Beta de segunda especie de parámetros* $r,a,b>0$, *se puede escribir como una fórmula de credibilidad.*

La prima de Bayes obtenida fue:

$$P(\vec{x}) = r\frac{b+n\bar{x}}{a+nr-1}$$

Multiplicando y dividiendo por $a-1$, *se obtiene:*

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &= \frac{(a-1)r(b+n\bar{x})}{(a-1)(a+nr-1)} = \frac{rb}{a-1}\frac{a-1}{a+nr-1} + \frac{r(a-1)n\bar{x}}{(a-1)(a+nr-1)} \\ &= P_C\frac{(a-1)}{(a+nr-1)} + \frac{nr}{a+nr-1}\bar{x} = P_C(1-Z(n)) + Z(n)\bar{x} \end{aligned}$$

donde $Z(n) = \frac{nr}{a+nr-1}$ *y* $P_C = \frac{br}{a-1}$ *es la prima colectiva.*

Los ejemplos anteriores muestran un resultado que probaron en las décadas de los 50 y 60 [Bailey, 1945] y [Mayerson, 1964] y es que la fórmula de la credibilidad coincidía con el estimador (prima) de Bayes para determinadas combinaciones de verosimilitures y funciones a priori. Por ejemplo, para los pares Poisson-Gamma o Binomial negativa-Beta.

Posteriormente, [Jewell, 1974], demostró que estos resultados no eran más que casos particulares del caso general, consistente en considerar como verosimilitud la familia exponencial.

En definitiva, el estimador de credibilidad de Bühlmann es igual al de Bayes de la prima en un gran número de casos. Esto ocurre, por ejemplo, si la distribución a priori es conjugada y la verosimilitud es un miembro de la familia exponencial.

Entonces, como hemos visto en los Ejemplos 5.3 y 5.4, el estimador del factor de credibilidad de Bühlmann de la prima neta coincide con el Bayesiano.

5.6. Sistema bonus-malus

Con objeto de reducir el número de reclamaciones en el sector del seguro de automóviles, las compañías Europeas introdujeron el sistema de tarificación bonus-malus. Este sistema premia a los conductores que no experimentan reclamación, los buenos, penalizando a los malos.

Es un sistema de tarificación en el que la prima inicial, a medida que se incorpora a la experiencia de siniestralidad, se va modelando. Para ello se parte de un nivel neutro en el cual, el asegurado entra en la categoría bonus para niveles inferiores o, por el contrario, en la escala malus para niveles superiores.

Este sistema está basado en el número de reclamaciones, y no en la cuantía. La prima se expresa como una función del número medio de reclamaciones $\bar{x}$, donde $n\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$, y del período de tiempo n. Representaremos la prima bonus-malus mediante $P_{BM}(\bar{x}, n)$.

Aplicando este sistema, un asegurado que no presente en el periodo actual ninguna reclamación, se verá bonificado en el siguiente periodo mediante un descuento de su prima. Por otro lado, si se da el caso contrario, el asegurado verá incrementada su prima. Luego, tendrán que verificarse las siguientes reglas de transición:

$$\frac{\partial P_{BM}(\bar{x}, n)}{\partial \bar{x}} > 0, \quad \frac{\partial P_{BM}(\bar{x}, n)}{\partial n} < 0$$

5.6.1. Cálculo de primas bonus-malus. Método Bayesiano

Para que la prima bonus-malus cumpla las reglas de transición, utilizando la metodología bayesiana, se debe cumplir:

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{P(\vec{x})}{P_C},$$

donde $P(\vec{x})$ es la prima de Bayes y P_C es la prima colectiva. Es decir, se divide la prima de Bayes entre la prima colectiva.

Ejemplo 5.5 *Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Ejemplos 4.1 y 4.5, donde X/θ seguía una distribución de Poisson, $P(\theta)$ y θ una distribución gamma, $\gamma(a, r)$, $a, r > 0$. Calcular la prima bonus-malus:*

a) Bajo el principio de prima neta, obtuvimos que la prima colectiva $P_C = \frac{r}{a}$ y la prima de Bayes, $P(\vec{x}) = \frac{r+n\bar{x}}{a+n}$. Por lo que, para obtener la prima bonus-malus, tendremos que dividir la prima de Bayes, $P(\vec{x})$, entre la colectiva, P_C.

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{\frac{r+n\bar{x}}{a+n}}{\frac{r}{a}} = \frac{(r + n\bar{x})a}{(a + n)r} \tag{5.8}$$

b) Bajo el principio de varianza, obtuvimos que la prima colectiva era $P_C = \frac{(r+a)^2+r}{a(r+a)}$ y la prima de Bayes, $P(\vec{x}) = \frac{(r+n\bar{x}+a+n)^2+r+n\bar{x}}{(a+n)(r+n\bar{x}+a+n)}$. Entonces, la prima bonus-malus es,

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{[(r + n\bar{x} + a + n)^2 + r + n\bar{x}][a(r + a)]}{[(a + n)(r + n\bar{x} + a + n)][(r + a)^2 + r]} \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.6 *Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los Ejemplos 4.2 y 4.6, donde X/θ seguía una distribución Binomial negativa, $Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ y θ una distribución Beta de segunda especie con $r, a, b > 0$. Calcular la prima bonus-malus:*

a) Bajo el principio de prima neta; obtuvimos que la prima colectiva era $P_C = r\frac{b}{(a-1)}$ y $P(\vec{x}) = r\frac{(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)}$. Entonces, la prima bonus-malus es:

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{(b + n\bar{x})(a - 1)}{b(a + nr - 1)} \tag{5.10}$$

b) Bajo el principio de varianza, según (4.14) la prima colectiva fue:

$$P_C = 1 + \frac{(1 + r)b}{(a - 1)} + \frac{(1 + r)^2 b(a + b - 1)}{(a - 1)(a - 2)[(a - 1) + (1 + r)b]},$$

mientras que la prima de Bayes según (4.17) fué:

$$P(\vec{x}) = 1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)} + \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]}$$

Por lo tanto, la prima bonus-malus es:

$$P_{BM}(\bar{x}, n) = \frac{1 + \frac{(1+r)(b+n\bar{x})}{(a+nr-1)} + \frac{(1+r)^2(b+n\bar{x})(a+nr+b+n\bar{x}-1)}{(a+nr-1)(a+nr-2)[(a+nr-1)+(1+r)(b+n\bar{x})]}}{1 + \frac{(1+r)b}{(a-1)} + \frac{(1+r)^2 b(a+b-1)}{(a-1)(a-2)[(a-1)+(1+r)b]}} \tag{5.11}$$

Capítulo 6

Decisión y riesgo

Considera un juego en el que el concursante puede ganar 100 euros con probabilidad $\frac{1}{5}$, 0 euros con probabilidad $\frac{2}{5}$ o perder 40 euros con probabilidad $\frac{2}{5}$. La ganancia esperada en este juego será:

$$\frac{1}{5}(100) + \frac{2}{5}(0) + \frac{2}{5}(-40) = 4$$

En general, cualquier juego de este tipo se puede representar por una v.a. X con una distribución de probabilidad específica. Hay que entender que un valor positivio de la variable representa una ganancia monetaria real para la persona y que un valor negativo de X representa una pérdida (o ganancia negativa). La ganancia esperada del juego es simplemente el valor de $E(X)$.

Aunque dos juegos muy distintos pueden tener la misma ganancia esperada, una persona que deba elegir entre ambos, tendrá preferencia por uno de ellos.

Por ejemplo un juego alternativo al anterior, podía ser aquel en el que en el que el concursante puede ganar 400 euros con probabilidad $\frac{1}{2}$, o perder 392 euros con probabilidad $\frac{1}{2}$. En este caso, la ganacia esperada en este segundo juego es la misma que en el anterior, 4 euros, aunque existe la misma probabilidad de que el concursante gane 400 o de que pierda 392. Veremos que esta segunda situación comporta un riesgo mayor.

6.1. Funciones de utilidad

Las *funciones de utilidad* surgen dentro de la *teoría de la utilidad* durante las décadas de 1930 y 1940 para describir preferencias de una persona entre juegos como los que acabamos de mostrar.

De acuerdo con esta teoría una persona preferirá un juego X para el que la esperanza de una cierta función $U(X)$ sea un máximo, antes que un juego para el que simplemente $E(X)$ sea un máximo. La función U se denomina *función de utilidad* y representa el valor que asigna cada persona a cada cantidad posible x, o lo que es lo mismo, el valor real para la persona de ganar la cantidad x.

Si la función de utilidad para el concursante anterior es U,

$$E[U(X)] = \frac{1}{5}U(100) + \frac{2}{5}U(0) + \frac{2}{5}U(-40)$$

y

$$E[U(Y)] = \frac{1}{2}U(400) + \frac{1}{2}U(-392)$$

La persona preferirá el juego para el que la *utilidad esperada de ganancia*, sea mayor. Formalmente, la función de utilidad de una persona se define como una función con la siguiente propiedad: Cuando la persona debe elegir entre dos juegos X e Y, preferirá X a Y, si $E[U(X)] > E[U(Y)]$, y será indiferente a X e Y si $E[U(X)] = E[U(Y)]$. Cuando la persona esté eligiendo entre más de dos juegos, elegirá aquél, X, para el que el valor $E[U(X)]$ sea máximo.

En un contexto general, las funciones de utilidad se suelen clasificar como lineales, cóncavas y convexas.

En el caso de funciones de utilidad lineales, por ejemplo, $U(x) = ax + b$, donde $a, b \in \mathbf{R}^+$, se cumple que para cualquier v.a. X: $E[U(X)] = aE(X) + b$. Por tanto para cualesquiera juegos X e Y, la desigualdad $E[U(X)] > E[U(Y)]$, se cumple si y sólo si se cumple $E(X) > E(Y)$.

En otras palabras, una persona con una función de utilidad lineal, elegirá un juego donde la ganancia esperada sea mayor.

Analicemos el caso de una función de utilidad logarítmica, por ejemplo, $U(x) = log(x + 400)$ para $x > -400$. Una persona que tenga esta función de utilidad no puede elegir un juego en el que exista alguna posibilidad de que su ganancia sea -400 o menos. Para los juegos X e Y definidos antes:

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= \frac{1}{5}log(500) + \frac{2}{5}log(400) + \frac{2}{5}log(360) = \\ &= \frac{1}{5}2{,}698 + \frac{2}{5}2{,}6020 + \frac{2}{5}2{,}556 = 2{,}6028 \end{aligned}$$

y

$$E[U(Y)] = \frac{1}{2}log(800) + \frac{1}{2}log(8) = \frac{1}{2}2{,}9030 + \frac{1}{2}0{,}9030 = 1{,}903$$

Además la utilidad de no aceptar ningún juego es $U(0) = log(400) = 2{,}6020$. Puesto que $E[U(X)] > E[U(0)] > E[U(Y)]$, la persona elegiría el juego X. Si dicho juego no estuviera disponible, preferiría no jugar, antes de aceptar el juego Y.

Si la función de utilidad es cuadrática, por ejemplo, $U(x) = x^2$, para $x \geq 0$. Tendríamos que para los juegos definidos antes:

$$\begin{aligned} E[U(X)] &= \frac{1}{5}(100)^2 + \frac{2}{5}(0)^2 + \frac{2}{5}(-40)^2 = \\ &= \frac{1}{5}10000 + \frac{2}{5}0 + \frac{2}{5}1600 = 2640 \end{aligned}$$

y

$$E[U(Y)] = \frac{1}{2}(400)^2 + \frac{1}{2}(-392)^2 = \frac{1}{2}160000 + \frac{1}{2}153664 = 236832$$

Por lo tanto la persona elegiría el segundo juego, Y, antes que el primero X, y antes que no jugar, pues $E[U(0)] = 0$.

En el contexto actuarial, y en general en el económico, consideraremos que las funciones de utilidad son cóncavas, (como $-x^2$, $logx$, etc) o lo que es los mismo, que existe *aversión al riesgo*. Cuando la función de utilidad de una persona es lineal se dice que es *indiferente al riesgo*, mientras que si es convexa, se dice que es *aficionada al riesgo*.

6.2. Función de riesgo

El riesgo es considerado una media de desutilidad, puesto que la compañía preferirá situaciones menos arriesgadas a situaciones más arriesgadas.

Así conocer la función de riesgo, nos permitirá conocer el orden de preferencias de la compañía.

Una forma de definir el riesgo, es la basada en considerarlo como la dispersión de la variable que nos define el juego. La definición que consideraremos aquí, será la desviación típica, raíz cuadrada de la varianza, en nuestro caso de la cuantía por reclamación de los siniestros.

Así,

$$r = SD(X) = \sqrt{E(X - E(X))^2}$$

será el valor que trataremos de minimizar, cuando el valor esperado del juego, $E(X)$ sea dado.

La decisión en un contexto de riesgo medido en términos de desviaciones, será la de elegir aquel juego que con el mismo valor esperado tiene menor desviación típica como medida de la dispersión del riesgo.

En el contexto que carteras de seguros, fondos de inversión, etc, donde se trata con eventos que tienen probabilidades pequeñas de ocurrir, pero donde la cuantía toma en general valores altos (pérdidas elevadas), veremos que la medida del riesgo definida anteriormente, conduce a valores de éste muy elevados.

En el caso de los dos juegos planteados al principio del tema, para describir el primero, podemos utilizar la v.a. X, tal que

$$P(X = 100) = \frac{1}{5}, \quad P(X = 0) = \frac{2}{5}, \quad P(X = -40) = \frac{2}{5}$$

donde, la ganacia esperada es $E(X) = 4$ euros con un riesgo de $r_1 = SD(X) = 51{,}22$ euros.

En el caso del segundo juego, si empleamos una v.a. Y para describirlo, tenemos:

$$P(Y = 400) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = -392) = \frac{1}{2}$$

donde, la ganacia esperada es la misma, $E(Y) = 4$ euros con un riesgo mucho mayor, $r_2 = SD(Y) = 396$ euros.

Estas dos situaciones ilustran el hecho de que, a igual beneficio esperado, en una situación de mayor riesgo hay una probabilidad más alta de obtener una mayor pérdida.

Dado el carácter introductorio de esta sección, no nos plantearemos de momento el diseño de carteras de seguros o fondos de inversión óptimos, sino que veremos, dada una deteminada cartera, de qué forma puede cubrirse la compañía contra estos riesgos elevados.

Dicho de otro modo, en el caso de carteras de seguros, calcularemos las primas que debe cobrar la compañía para cubrirse en esta situación de riesgo.

6.3. Utilidad con nivel de riesgo ϵ

Consideremos una función de utilidad definida sobre el espacio de posibles resultados Ω, es decir $\Omega = \{S\}$, tal que la v.a. X describe la utilidad de S, $X = U(S)$. Así podemos hablar de $P(X = U(S) \leq a)$ para un cierto valor $a \in \mathbf{R}$.

Definición 6.1 *Para un valor ϵ prefijado, se denomina utilidad con nivel de riesgo ϵ, al valor a tal que*

$$P(X = U(S) \leq a) \geq \epsilon$$

y tal que

$$P(X = U(S) \geq a) \leq 1 - \epsilon$$

El valor a es tal que la función de distribución de la utilidad, $H = F_X$, en él, es al menos ϵ. Es decir $a = H(S, \epsilon)$.

El siguiente resultado, conocido como *indiferencia con respecto al azar*, nos indica que da lo mismo trabajar con S que con $X = U(S)$.

Proposición 6.1 *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$H(U(S)) = U(H(S))$$

Demostración:

Llamemos $a_1 = H(U(S), \epsilon)$ i.e. si $X = U(S)$,

$$P(U(X) \leq a_1) \geq \epsilon,$$

Si la función de utilidad, U es estrictamente monótona,

$$P(U(X) \leq a_1) = P(X \leq U^{-1}(a_1)) \geq \epsilon,$$

donde $a = U^{-1}(a_1)$ es la utilidad con nivel de riesgo ϵ, i.e. $a = H(S, \epsilon)$ luego,

$$a_1 = H(U(S), \epsilon) = U(a) = U(H(S, \epsilon))$$

A continuación estudiaremos un caso particular con gran interés en los estudios actuariales, la situación de ruina.

6.4. Probabilidad de ruina

Consideremos una compañía que se pone en marcha con una reserva económica inicial que denomiraremos W. Si Z es la v.a. que representa la capacidad económica de la empresa en un determinado momento, la probabilidad de ruina, es la probabilidad de que la compañía deba cesar su actividad por no disponer de reserva alguna. Matemáticamente,

$$P(Z < -W) = P(Z + W < 0)$$

Cada momento o periodo de estudio se denomina *unidad de riesgo*, y si $Z < -W$, decimos que se *ha producido la ruina* en dicha unidad de riesgo.

Consideremos conocida la distribución de Z, en particular su función de distribución, F_Z, así la probabilidad de ruina, π, es

$$\pi = F_Z(-W) = P(Z < -W) = P(Z + W < 0)$$

Dada la definición de Z, es habitual su carácter continuo. Mirando la expresión anterior, se puede interpretar que la reserva económica inicial con signo menos, es la utilidad con nivel de riesgo π. También se puede decir que dicha reserva es la desutilidad a ese nivel de riesgo.

Como nuestro interés se centrará en conocer la probabilidad de ruina, para ello, tendremos las siguientes opciones:

1. Conocer la función de distribución de la capacidad económica, F_Z y calcular $\pi = F_Z(-W)$.

2. Si no conocemos F_Z de forma exacta o su expresión resulta muy complicada de manipular, y estamos en situación de emplear el T.C.L.; aproximar la distribución de Z a $N(m, \sigma)$, $\pi \approx \phi(\frac{-W-m}{\sigma})$.

3. Si no conocemos F_Z ni estamos en situación de emplear el T.C.L.; utilizaremos la cota que nos proporciona el siguiente resultado.

Proposición 6.2 *Sea $R(Z)$ una función monótona decreciente, tal que $E(e^{R(Z)}) \leq 1$. Entonces, la probabilidad de ruina es siempre menor o igual que $e^{-R(-W)}$. Es decir,*

$$\pi \leq e^{-R(-W)}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} 1 &\geq E(e^{R(Z)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{R(z)} dF_Z(z) \geq \int_{-\infty}^{-W} e^{R(z)} dF_Z(z) \geq \\ &\geq e^{R(-W)} \int_{-\infty}^{-W} dF_Z(z) = e^{R(-W)} P(Z < -W) = e^{R(-W)} \pi \end{aligned}$$

Despejando, de la desigualdad, se obtiene el resultado

$$\pi \leq e^{-R(-W)}$$

Veremos ahora la utilidad de la cota proporcionada por este resultado. Si identificamos la función $R(z)$, podremos acotar la probabilidad de ruina de forma sencilla.

Recordemos la expresión de la función generatriz de momentos de una v.a. continua Z, esto es,

$$\alpha_Z(u) = E(e^{uZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} f(z) dx$$

Para analizar el crecimiento o decrecimiento de esta función, analizamos la forma de la integral

$$\alpha_Z(u) = \int_{-\infty}^{0} e^{uz} f(z) dz + \int_{0}^{\infty} e^{uz} f(z) dz$$

Sabemos que $\alpha_Z(0) = 1$ y $\alpha'_Z(0) = m > 0$, luego es creciente en 0. Así, si las probabilidades $P(Z < 0)$ y $P(Z > 0)$ son no nulas a la vez, $\alpha_Z(u) \to \infty$, cuando $u \to \infty$ o cuando $u \to -\infty$, ya que el valor de la exponencial crece en ambos casos con u.

Por otra parte,

$$\alpha''_Z(u) = E(Z^2 e^{uZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{uz} z^2 f(z) dz > 0, \quad \forall u$$

Esto quiere decir que $\alpha_Z(u)$ tiene una representación parabólica con un único vértice (mínimo), en algún valor de $u < 0$, si el valor de la media es positivo. En este caso, $\alpha'_Z(0) = m > 0$, y la función está creciendo en 0, con lo que el vértice es anterior, y por lo tanto negativo.

Como además sabemos que $\alpha(0) = 1$, ha de existir un valor $u^* < 0$ tal que $\alpha(u^*) = 1$.

Tomemos ahora como función $R(z) = u^* z = -|u^*|z$. Se trata de una función que es claramente decreciente de z, y además $E(e^{R(z)}) = E(e^{uz^*}) = \alpha(u^*) = 1$.

Utilizando esta función para la v.a. Z, el resultado anterior, nos lleva a que

$$\pi \leq e^{-R(-W)} = e^{-|u^*|W}$$

expresión que es cierta para una v.a. Z tal que $P(Z < 0)$ y $P(Z > 0)$ son no nulas, o lo que es lo mismo en cada unidad de riesgo hay probabilidad de beneficios positivos o negativos.

Definición 6.2 *Se denomina nivel de la probabilidad de ruina al valor α, calculado como*

$$\pi \leq \alpha = e^{-|u^*|W}$$

Lo interesante en las aplicaciones de la definición anterior, no es calcular el nivel de probabilidad de ruina dado el valor de u^*, sino al revés. Lo habitual es, fijar el nivel de probabilidad de ruina de una compañía, α, su reserva inicial W, y calcular el valor de u^*, donde

$$|u^*| = -\frac{ln\alpha}{W}, \quad u^* < 0$$

Este resultado nos proporciona el valor de u^*. Valor que no tiene sentido por sí mismo. Lo que sí es interesante es conocer cual es el valor de ingreso que tiene que generar una compañía para poder mantener pequeño su nivel de probabilidad de ruina. Es decir todavía tenemos que calcular este ingreso a partir del valor u^*.

Sin embargo, antes de obtener la función de ingreso, veamos las siguientes observaciones:

- El nivel de probabilidad de ruina, α, es bastante conservador, en el sentido de que $\pi << \alpha$. Como veremos en ejemplos en los que se puede calcular explícitamente π, este valor siempre es mucho menor que α.
- Por eso, la función de ingreso siempre nos proporcionará valores de los ingresos que mantienen acotada la probabilidad de ruina en el nivel deseado.

6.5. Función de ingreso

Sean $\mathcal{Y}$ y Z dos v.a. que representan respectivamente el *montante de siniestralidad*, es decir, la cuantía total por reclamaciones, y *el beneficio* o *situación económica de la empresa* en la unidad de riesgo, respectivamente.

Si denotamos por I al ingreso, obtenemos, $Z = I - \mathcal{Y}$, donde I representa una cantidad fija, a provenir por la reserva inicial más las primas por pólizas.

Definición 6.3 *Llamamos recargo de seguridad al valor esperado del beneficio, $m_z = E(Z)$, calculado como*

$$m_z = E(Z) = I - m_{\mathcal{Y}}$$

Despejando el valor del ingreso, I, y sustituyendo en Z, el beneficio se puede expresar como una transformación lineal del montante de siniestralidad:

$$Z = m_Z + m_{\mathcal{Y}} - \mathcal{Y}$$

Si denotamos por $\alpha_{\mathcal{Y}}(u)$ y $\alpha_Z(u)$ a sus respectivas funciones generatrices de momentos, la relación entre ambas es:

$$\alpha_Z(u) = e^{(m_Z+m_{\mathcal{Y}})u}\alpha_{\mathcal{Y}}(-u)$$

Si denotamos por $\mu_{\mathcal{Y}}(u) = ln\alpha_{\mathcal{Y}}(u)$ a la función cumulativa de $\mathcal{Y}$, se tiene que $\alpha_{\mathcal{Y}}(u) = e^{\mu_{\mathcal{Y}}(u)}$, de donde

$$\alpha_Z(u) = e^{(m_Z+m_{\mathcal{Y}})u}e^{\mu_{\mathcal{Y}}(-u)}$$

Si además W representa la reserva inicial de la compañía, tenemos que existe $u^* < 0$, que cumple, $\alpha_Z(u^*) = 1$, y por tanto

$$(m_Z + m_{\mathcal{Y}})u^* + \mu_{\mathcal{Y}}(-u^*) = 0$$

de donde

$$\frac{\mu_{\mathcal{Y}}(|u^*|)}{|u^*|} = m_Z + m_{\mathcal{Y}}$$

y, por lo tanto

$$m_Z = \frac{\mu_{\mathcal{Y}}(|u^*|)}{|u^*|} - m_{\mathcal{Y}}$$

Definición 6.4 *El cociente dado por*

$$\frac{\mu_{\mathcal{Y}}(u)}{u}$$

recibe el nombre de función de ingreso.

Por lo tanto, el recargo de seguridad, m_Z, resulta ser el valor de la función de ingreso en el punto u^* menos la cuantía media por siniestros, $m_{\mathcal{Y}}$.

Si sustituimos u^* por su valor, en términos del nivel de la probabilidad de ruina α y de la reserva inicial de la compañía, obtenemos el valor del recargo de seguridad, como

$$m_Z = \frac{\mu_{\mathcal{Y}}(\frac{|ln\alpha|}{W})}{\frac{|ln\alpha|}{W}} - m_{\mathcal{Y}} = I(W) - m_{\mathcal{Y}}$$

donde el ingreso se puede expresar también en función del nivel de probabilidad de ruina y de la reserva inicial

$$I(W) = \frac{\mu_{\mathcal{Y}}(\frac{|ln\alpha|}{W})}{\frac{|ln\alpha|}{W}}$$

Esta es la expresión del nivel de ingreso necesario para garantizar la supervivencia de la empresa a un nivel de probabilidad de ruina α, y con una reserva inicial W.

Observando la expresión anterior, podemos deducir que a mayor reserva inicial, el ingreso se puede disminuir y así obtener primas más competitivas.

Por tanto, la fusión de compañías es beneficiosa, y permite afrontar mejor situaciones más arriesgadas.

6.5.1. Desarrollo en serie de la función de ingreso

El numerador de la función de ingreso es una función cumulativa. Del desarrollo el serie de ésta, visto en, (3.5), donde

$$\begin{aligned} k_1 &= E(\mathcal{Y}) = m_{\mathcal{Y}} \\ k_2 &= V(\mathcal{Y}) = \sigma^2_{\mathcal{Y}} \\ k_3 &= \mu_3 = E(\mathcal{Y} - m)^3 \\ k_4 &= \mu_4 - 3\sigma^4 = E(\mathcal{Y} - m)^4 - 3\sigma^4 \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\frac{\mu_{\mathcal{Y}}(u)}{u} = m_{\mathcal{Y}} + \sigma^2_{\mathcal{Y}} \frac{u}{2!} + \mu_3 \frac{u^2}{3!} + ...$$

Así el valor del recargo de seguridad, para un nivel de probabilidad de ruina α, y con reserva inicial W, $m_Z = I(W) - m_{\mathcal{Y}}$, admite el siguiente desarrollo en serie:

$$m_Z = \sigma^2_{\mathcal{Y}} \frac{|ln\alpha|}{2!W} + \mu_3 \frac{|ln\alpha|^2}{3!W^2} + ...$$

6.5.2. Función de ingreso de variables compuestas

Consideremos ahora que la v.a. montante total o cuantía por siniestralidad corresponde a la cuantía por reclamación de k siniestros independientes e idénticamente distribuidos; es decir, $\mathcal{Y}|X = k = Y_1 + ... + Y_k$, donde el número de siniestros es de nuevo una v.a. X con función generatriz de momentos $\alpha_X(u)$.

La función generatriz de momentos de la distribución condicionada $\mathcal{Y}|X = k$, es:

$$\alpha_{\mathcal{Y}|X=k}(u) = \alpha_{Y_1+...+Y_k}(u) = (\alpha_{Y_i}(u))^k = (\alpha_Y(u))^k$$

dado que las cuantías por las k reclamaciones son independientes y tienen la misma distribución.

Por lo tanto la función generatriz de momentos de la distribución compuesta de $\mathcal{Y}$ en relación a X, es:

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{Y}}(u) &= E(e^{u\mathcal{Y}}) = E_X(E(e^{u\mathcal{Y}}|X=k)) = E_X(\alpha_{\mathcal{Y}|X=k}(u)) = \\ &= E_X[\alpha_Y(u)^k] = E_X(e^{\mu_Y(u)k}) = \alpha_X(\mu_Y(u)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

con $\mu_Y(u)$, función cumulativa común a las cuantías por reclamación Y_i, $\forall i$, dado que dichas variables son i.i.d.

La expresión (6.1) nos indica que la función generatriz de momentos de la cuantía total incondicionada al número de siniestros, coincide con la función generatriz de momentos de la v.a. número de siniestros, X, evaluada en $\mu_Y(u)$, función cumulativa de la v.a. Y cuantía por reclamación.

De ahí, se obtiene en particular la función de ingreso de la distribución compuesta de $\mathcal{Y}$, como

$$\frac{\mu_{\mathcal{Y}}(u)}{u} = \frac{\mu_X(\mu_Y(u))}{u}$$

es decir en función de las funciones cumulativas del número de siniestros y de la cuantía por reclamación, respectivamente.

Ejemplo 6.1 *Consideremos una compañía de seguros, donde el número de siniestros sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, y la cuantía por reclamación es una v.a. con distribución exponencial de parámetro a. Vamos a obtener la función de ingreso de la compañía para un nivel prefijado de riesgo α y una reserva inicial de W.*

La v.a. cuantía total para (condicionada a) las X reclamaciones es $\mathcal{Y}|X = Y_1 + ... + Y_X$. Si las cuantía por reclamación son independientes, la función cumulativa de $\mathcal{Y}|X$ es la suma de las funciones cumulativas de las Y_i.

La función cumulativa de la distribución compuesta de la cuantía total, $\mathcal{Y}$, es:

$$\mu_{\mathcal{Y}}(u) = \mu_X(\mu_Y(u))$$

En primer lugar recordamos la función generatriz de momentos de una v.a. de Poisson

$$\alpha_X(u) = e^{\lambda(e^u-1)}$$

Luego, su función cumulativa es:

$$\mu_X(u) = \lambda(e^u - 1)$$

Para la distribución exponencial de parámetro a:

$$\alpha_Y(u) = \frac{a}{(a-u)}, \forall u < a$$

y

$$\mu_Y(u) = ln\left(\frac{a}{(a-u)}\right), \forall u < a$$

Por tanto

$$\mu_{\mathcal{Y}}(u) = \mu_X(\mu_Y(u)) = \lambda(e^{\mu_Y(u)} - 1) = \lambda(\frac{a}{(a-u)} - 1) = \lambda\frac{u}{(a-u)}$$

Finalmente la función de ingreso de $\mathcal{Y}$, es:

$$I(W) = \frac{\lambda}{a - \frac{|ln\alpha|}{W}}$$

y tiene sentido siempre que $W > \frac{|ln\alpha|}{a}$.

Por ejemplo si la cuantía media es de 500 euros, $\alpha = 0{,}05$, se obtiene que $W > 1497,86$ euros.

6.5.3. Función de integración

En este apartado nos ocuparemos de T unidades de riesgo. En cada una de ellas, t, consideraremos que se dispone de una reserva inicial W_t, que el nivel de probabilidad de ruina α y que las v.a. X_t correspondientes al montante total de siniestralidad son independientes. Denotaremos además por μ_t a la función cumulativa de la v.a. X_t para la unidad de riesgo t.

Definición 6.5 *Llamaremos función de integración y la denotaremos por $\nu_T(u)$ a la función de ingreso correspondiente al conjunto de las T unidades de riesgo integradas en una sola, es decir:*

$$\nu_T(u) = \frac{\mu_T(u)}{u} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \mu_t(u)}{u}$$

por la independencia de las v.a X_t.

Así si denotamos por W a la reserva inicial total, y denotamos por W_t a las reservas iniciales en cada unidad de riesgo, t. Se obtiene la función de ingreso en términos de la reserva inicial total, W, como

$$\begin{aligned} I_T(W) &= \frac{\mu_T(\frac{|ln\alpha|}{W})}{\frac{|ln\alpha|}{W}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\mu_t(\frac{|ln\alpha|}{W})}{\frac{|ln\alpha|}{W}} \\ &\leq \sum_{t=1}^{T} I_t(W_t) \end{aligned}$$

Es decir, el ingreso total necesario para garantizar la supervivencia de la compañía con nivel de probabilidad de ruina α considerando las unidades de riesgo integradas, es menor que la suma de los ingresos necesarios para obtener la misma garantía, considerando la unidades de riesgo por separado.

Como resumen, podemos decir que la función de ingreso puede ser interpretada como una buena representación de la desutilidad de la compañía. A menor ingreso necesario, es decir primas más bajas, mayor utilidad. Es decir, la función de ingreso con signo menos, proporciona una función de utilidad que depende de la estructura de siniestralidad y donde la característica de cada compañía viene determinada por su reserva inicial.

Con esta interpretación obtenemos compañías todas ellas aversas al riesgo, utilidad cóncava, y tanto más aversas cuanto menos reserva inicial tengan, lo que es coherente con lo estudiado aqui.

6.6. VaR: Value at Risk, Valor en Riesgo

El tratamiento del riesgo basado en acotar la probabilidad de ruina que hemos visto en la sección anterior, resulta en ocasiones muy conservador, pero adecuado por otra parte en el cálculo de primas de pólizas de seguros.

En esta sección vamos a presentar un tratamiento alternativo, basado en calcular la pérdida máxima que se está dispuesto a asumir. Se trata de un tema muy relevante tanto para compañías de seguros como para entidades financieras.

Vamos a comenzar por mostrar cómo evaluar el VaR, en el contexto de carteras de activos financieros.

En este contexto, consideraremos un activo de precio P_t y con rendimiento definido por la expresión:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Estos rendimientos son v.a. aleatorias continuas, y es habitual la hipótesis de que siguen una distribución normal, de media m y varianza σ^2.

En este caso se puede calcular la probabilidad de que este rendimiento esté por debajo de una cantidad determinada.

Definición 6.6 *Se define el* valor en riesgo, VaR, *como la pérdida máxima que se puede dar con un nivel de confianza* $0 < \alpha < 1$.

Es decir, $P(R_t < -VaR) = \alpha$.

Bajo la hipótesis de normalidad de los rendimientos, se puede obtener la habitual expresión de VaR, como sigue:

$$P(R_t < -VaR) = P(\frac{R_t - m}{\sigma} < \frac{-VaR - m}{\sigma}) = \alpha$$

de donde

$$\frac{-VaR - m}{\sigma} = -t_\alpha$$

y por lo tanto

$$VaR = \sigma t_\alpha - m$$

Si la distribución de los rendimientos no es normal, la obtención de VaR se realiza del mismo modo, pero tomado el cuantil de la distribución correspondiente.

En el caso de querer calcular el VaR de una cartera compuesta por n activos, los cálculos se complican y una forma de simplificarlos es mantener la hipótesis de normalidad en el comportamiento de todos los rendimientos.

Así, el rendimiento de una cartera en t, se define como

$$R_t = \sum_{i=1}^{n} \omega_{it} R_{it}$$

donde ω_{it} representa la proporción de capital destinada a la compra del activo i en t, y por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} \omega_{it} = 1$, para todo t. Por su parte R_{it} representa el rendimiento del activo i en t.

La primera dificultad es encontrar la distribución del rendimiento de la cartera en t. Para ello, necesitamos la distribución conjunta de los rendimientos de los activos.

En caso de que las proporciones no varíen con t es relativamente sencillo, puesto que la podemos tomar a su vez como un activo y es una distribución univariante. Sin embargo, el caso más realista pasa por considerar que los inversores revisan con relativa frecuencia la composición de su cartera y por tanto, dichas proporciones varían con t.

Como ya hemos dicho consideraremos que la distribución conjunta es normal. Donde en particular, para cada activo la media es m_i y la varianza σ_i^2. Además $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, respresenta el término de covarianza, y ρ_{ij} correlación entre el rendimiento del activo i y el de j.

Al ser la distribución conjunta normal, la distribución marginal de los rendimientos individuales de los activos es $N(m_{it}, \sigma_{it}^2)$ y la distribución del rendimiento de la cartera en t es también normal $N(m_t, \sigma_t^2)$, donde $m_t = \sum_{i=1}^n \omega_{it} m_{it}$ y $\sigma_t^2 = \sum_{i,j} \omega_{it}\omega_{jt}\sigma_{ij}$

De este modeo el VaR de la cartera, se obtiene utilizando el cuantil correspondiente de la distribución normal anterior:

$$\begin{aligned} VaR &= \sigma_t t_\alpha - m_t = \\ &= \sqrt{\sum_{i,j} \omega_{it}\omega_{jt}\sigma_{ij}} t_\alpha - \sum_{i=1}^n \omega_{it} m_{it} \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2 *Consideremos los rendimientos de los activos BBVA, REPSOL, e IBERIA durante el año 2000. Del estudio descriptivo de dichos rendimientos se han obtenido los siguientes valores típicos:*

$m_B = 0{,}00046$, $m_R = -0{,}00121$, $m_I = -0{,}00012$,

$\sigma_B = 0{,}019779$, $\sigma_R = 0{,}021331$, $\sigma_I = 0{,}016025$,

$\rho_{BI} = 0{,}02814$, $\rho_{BR} = 0{,}02234$, $\rho_{RI} = 0{,}01637$,

Partiendo de la hipótesis de normalidad en las distribuciones, obtenemos los valores individuales del VaR, para cada uno de los tres activos. Así, con $\alpha = 1\,\%$, $t_{0,01} = 2{,}33$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} VaR_B &= 0{,}019779 \cdot 2{,}33 - 0{,}00046 = 0{,}04562 \\ VaR_R &= 0{,}021331 \cdot 2{,}33 + 0{,}00121 = 0{,}05091 \\ VaR_I &= 0{,}016025 \cdot 2{,}33 - 0{,}00012 = 0{,}03748 \end{aligned}$$

Si confeccionamos una cartera con igual proporción de los tres activos, es decir, donde su rendimiento es

$$R = \frac{1}{3}R_B + \frac{1}{3}R_R + \frac{1}{3}R_I$$

En este caso el rendimiento medio de la cartera es $m = -0{,}00029$ *y la desviación* $\sigma = 0{,}012559$. *A partir de aqui, dada la hipótesis de normalidad, se sigue que el VaR de la cartera es:*

$$VaR \;=\; 0{,}012559 \cdot 2{,}33 - 0{,}00029 = 0{,}02955$$

Vemos que el VaR de la cartera, o pérdida máxima a un nivel 0,01*, es menor cuando diversificamos el riesgo invirtiendo en activos que tienen poca correlación.*

6.7. Ejercicios de aplicación

Se enumeran a continuación un conjunto de ejercicios aplicación correspondientes a este tema; en particular se trabaja la siguiente competencia de entre las formuladas en la guia docente de la asignatura:

> Modelizar la incertidumbre de las situaciones sencillas de azar en el ámbito del negocio financiero y asegurador, mediante formulaciones matemáticas basadas en la teoría de la probabilidad. Deducir soluciones para el cálculo de la prima de riesgo, y la función de ingreso acotando la probabilidad de ruina. Utilizar un tratamiento alternativo basado en el cálculo de la pérdida máxima, para medir el riesgo de una cartera.

1. Considera una empresa aseguradora que se plantea asegurar dos tipos de siniestros. En el primero, el número de siniestros, X_1 es una v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1)$, con cuantía por reclamación fija e igual a C. En el segundo el número de siniestros, X_2 es también una v.a. de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_2)$, con cuantía por reclamación con distribución exponencial de parámetro $a = \frac{1}{C}$. La función de utilidad de la empresa viene dada por:

   $$U(m, \sigma^2) = -(Am + B\sigma^2)$$

   donde m es la media de cuantía total por reclamaciones, (montante medio de siniestralidad), σ^2 es la varianza y A y B son parámetros positivos fijos de la empresa.

   a) ¿Qué tipo de seguro le conviene más a la compañía?

   b) ¿En qué situación estamos si $\lambda_1 = \lambda_2$?

c) Considera ahora que la empresa quiere diseñar una póliza combinada para cubrir ambos tipos de siniestro, y sabe además que si se produce reclamación en uno de los dos tipos, se produce en todas las pólizas de ese tipo. Si la utilidad sigue siendo la anterior y hay una porporción de pólizas p del primer tipo.

1) Calcula la media y la varianza del beneficio de la cartera.
2) Calcula la proporción p que le proporciona utilidad máxima a la empresa.

Solución:

a) Aquel que maximice la función de utilidad. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ no podemos decidir. *b*) El primer tipo de siniestros, ya que tiene una utilidad mayor. *c*) 1) $E(B) = I - E(\mathcal{Y}) = I - cp(\lambda_1 - \lambda_2) + c\lambda_2$. $Var(B) = p^2c^2(\lambda_1 + 2\lambda_2) + 2c^2\lambda_2(1-2p)$. 2) $p = \frac{2B\sigma_2^2 - A(\lambda_1 - \lambda_2)}{2B(\sigma_1^2 + \sigma - 2^2)}$.

2. Obtén la función de ingreso de la cuantía total por reclamaciones, si el número de siniestros X es una v.a. Binomial negativa y la cuantía por reclamación Y es constante e igual a a.

Solución:

$I(u) = \frac{mlnp - mln(1-e^{au}q)}{u}$.

3. Obtén la función de ingreso de la cuantía total por reclamaciones, si el número de siniestros X es una v.a. Binomial negativa y la cuantía por reclamación Y_i, en cada siniestro es $\gamma(a,r)$. Además Y_i, son v.a. independientes e i.d. para cada siniestro. Compara el resultado con el obtenido en el ejercicio anterior.

Solución:

$I(u) = \frac{mlnp - mln(1-(1-\frac{u}{a})^{-r}q)}{u}$. Son similares, donde el término que cambia es e^{ua} en el caso del ejercicio anterior, que en este caso es $(1-\frac{u}{a})^{-r}$.

4. Considera dos compañías que cubren respectivamente dos tipos de siniestros. En la primera el número de reclamaciones es Poisson ($\lambda_1 = 1$) y la cuantía por reclamación es exponencial de parámetro $a_1 = 0{,}1$. En la segunda, el número de reclamaciones es Poisson ($\lambda_2 = 10$) y la cuantía por reclamación es exponencial de parámetro $a_2 = 1$.

   a) ¿Cuál de las dos compañías aborda una situación más arriesgada?

   b) Obtén la función de ingreso, en ambas compañías para un nivel de riesgo $\alpha = 0{,}05$.

c) Si la reserva inicial para la primera compañía es $W_1 = 50$ y para la segunda es $W_2 = 70$, obtén el valor de las funciones de ingreso respectivas.

d) ¿Qué pasaría si se fusionasen ambas compañías? ¿Cuál sería su función de ingreso integrada? ¿Y su valor considerando la reserva inicial como suma de las dos reservas $W_1 + W_2$?

Solución:

a) La cuantía total media es igual en ambas compañías, sin embargo, la varianza en la primera es mayor, lo que indica un mayor riesgo. *b*) $I_1(W) = \frac{1}{0{,}1 - \frac{2{,}9957}{W}}$, si $W > 29{,}957$; mientras que $I_2(W) = \frac{10}{1 - \frac{2{,}9957}{W}}$, si $W > 2{,}9957$. *c*) $I_1(50) = 24{,}95$; $I_2(70) = 10{,}44$. *d*) La cuantía total por recamación sería la suma (independiente) de ambas, y por tanto la función de ingreso también sería la suma de las respectivas funciones de ingreso, $I(W) = I_1(W) + I_2(W)$. Si $W = W_1 + W_2 = 50 + 70 = 120$, $I(120) = 23{,}58$.

5. Una compañía tiene 100 pólizas contratadas. El número de reclamaciones por cada póliza es una v.a Poisson de media 0,01, y la cuantía por reclamación es exponencial de media 2 (en miles de euros).

   a) Calcula la probabilidad de que una determinada póliza presente una reclamación. Calcula la probabilidad de que entre las 100 pólizas se presenten 20 reclamaciones.

   b) Sabiendo que una póliza ha presentado una reclamación, calcula la probabilidad de que la cuantía de la misma sea superior a 3 mil euros.

   c) Calcula la media y la varianza de la cuantía total por póliza, incondicionada al numero de reclamaciones.

   d) Si sabemos que en la compañía se han presentado un total de 20 reclamaciones, ¿cuál es la distribución de la cuantía total?

   e) Obtén la función cumulativa de la cuantía total incondicionada al número de reclamaciones.

   f) Obtén la función de ingreso de la compañía para un nivel de 0.05 de probabilidad de ruina.

   Solución:

a) $P(X=1)=0{,}0099$, $P(X_{100}=20)\approx 0$. *b*) $P(Y>3|X=1)=0{,}223$. *c*) $E(\mathcal{Y})=20$ euros, $Var(\mathcal{Y})=8000$ euros^2. *d*) $\gamma(\frac{1}{2},20)$. *e*) $\mu_{\mathcal{Y}}(u)=\frac{\lambda u}{u-0{,}5}$, si $u<0{,}5$. *f*) $I(W)=\frac{0{,}01}{0{,}5-\frac{2{,}9957}{W}}$, si $W>5{,}9914$.

6. En una empresa aseguradora el número de reclamaciones por póliza sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, donde λ puede tomar los valores, 0.09 (asegurados tipo A), con probabilidad 0.5 y 0.005 (asegurados de tipo B), con la misma probabilidad 0.5. Las primas se calculan como $k\cdot E(X)$, donde k es una constante igual para todas las pólizas en todos los años y $E(X)$ es la media de la v.a. número de reclamaciones.

   Un asegurado es de tipo A y le cobran una prima de 75 u.m. Después del primer año, durante el que no ha presentado ninguna reclamación se le revisa la prima. Obtener el nuevo valor de la prima, a partir de las siguientes cuestiones:

   a) Obtener el valor de k.

   b) Calcula las probabilidades de que el asegurado sea de tipo A o B condicionadas a que no ha presentado ninguna reclamación.

   c) Calcula la media del número de reclamaciones de este asegurado, para el segundo año, condicionada a que no ha presentado ninguna reclamación.

   d) Calcula la prima para el segundo año.

   e) Repite los apartados $b), c)$ y $d)$ suponiendo que el asegurado ha presentado una reclamación.

   Solución:

   a) $k=1578{,}95$. *b*) $P(A|X=0)=0{,}4787$; $P(B|X=0)=0{,}5213$. *c*) $E(X_2|X_1=0)=0{,}0456$. *c*) $p_2=72$ euros. *d*) $P(A|X=1)=0{,}0{,}0436$; $P(B|X=1)=0{,}0573$; $E(X_2|X_1=1)=0{,}085$;$p_2'=134{,}21$ euros.

7. En una entidad bancaria se quiere confeccionar una cartera formada por dos activos, con rendimientos aleatorios R_1 y R_2, y el activo de rendimiento seguro $S=5\,\%$. Se sabe que las distribuciones de los rendimientos R_1 y R_2 son independientes, siendo $R_1\equiv N(15\,\%,\sigma_1=10\,\%)$ y $R_2\equiv N(7\,\%,\sigma_2=5\,\%)$. La cartera se confecciona de manera que $R_A=0{,}25R_1+0{,}25R_2+0{,}5S$.

   a) Analiza el rendimiento medio, varianza y probabilidad de que el rendimiento supere el $10\,\%$.

b) Rendimiento mínimo al nivel del 5 % ($VaR_{0,95}$).

c) ¿Qué rendimiento puede llegar a ofrecer el banco si se quiere asegurar una probabilidad igual a 0.8 de obtener un rendimiento neto positivo?

Solución:

a) $E(R_A) = 8\,\%$, $Var(R_A) = 7,8125\,\%$, $P(R_a > 10) = 0{,}2358$. *b*) $VaR_{0,95} = -3{,}41\,\%$. *c*) $R^* = 5{,}652\,\%$.

8. El número de reclamaciones recibidas sigue una distribución Binomial negativa de media 5 y varianza 20, y la cuantía por reclamación es gamma de media 2 u.m. y varianza 8 u.m.^{2}. Calcular:

   a) Media y varianza de la cuantía total por reclamaciones.

   b) Estructura de probabilidad de la cuantía total.

   c) Función de ingreso de la compañía para un nivel de 0.05 de probabilidad de ruina.

   d) Reserva para que el ingreso necesario por póliza no deba exceder las 20 u.m.

   Solución:

   a) $E(\mathcal{Y}) = 10$ u.m., $Var(\mathcal{Y}) = 120$ u.m.^{2} *b*) $F_{\mathcal{Y}}(y) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x)P(\mathcal{Y}|X \leq y)$, donde $P(X = x)$ es la función de cuantía de la distribución de X y $P(\mathcal{Y}|X \leq y)$ es la función de distribución de $\mathcal{Y}|X$ en y. *c*) $I(W) = \frac{1{,}67}{\frac{|ln 0{,}05|}{W}}[ln(\frac{0{,}25}{1-0{,}75(\frac{0{,}25}{0{,}25-\frac{|ln 0{,}05|}{W}})^{0{,}5}})]$, si $W > 11{,}98$. *d*) Con un valor de $W = 39$ es suficiente.

9. Una compañía asegura dos tipos de siniestros A y B. El número de reclamaciones por póliza, X_A, correspondientes al siniestro de tipo A, sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda_A = 0{,}01$ y la cuantía por reclamación, Y_A sigue una ley de Pareto de forma

$$f(y) = \frac{3 \cdot 10^3}{y^4}, \quad y \geq 10$$

   El número de reclamaciones por póliza, X_B, correspondientes al siniestro de tipo B, sigue una ley de Poisson de parámetro $\lambda_B = 0{,}01$ y la cuantía por reclamación, Y_B sigue una ley exponencial de media 15.

a) ¿Cuál de los dos siniestros es más arriesgado? ¿Qué prima debe ser más cara?

b) La compañía contrata 100 pólizas, 60 de tipo A y 40 de tipo B. Utilizando el T.C.L., obtén la probabilidad de que la cuantía total por reclamaciones no supere las 20 unidades.

Solución:

a) $E(\mathcal{Y}_A) = 0{,}15$, $Var(\mathcal{Y}_A) = 3$, mientras que $E(\mathcal{Y}_B) = 0{,}15$, $Var(\mathcal{Y}_B) = 4{,}5$; luego ambas cuantías totales tienen igual media, pero en el caso del siniestro B, su varianza es mayor; por tanto el siniestro B es más arriesgado. La prima del siniestro B ha de ser más elevada. *b*) $P(\mathcal{Y} \leq 20) \approx 0{,}60$.

Apéndice A

Binomios negativos

Proposición A.1 *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\binom{m+k-1}{k} = \binom{m+k-1}{m-1} = \binom{-m}{k}(-1)^k$$

donde $k \in \mathbf{Z}^+$.

Demostración:
Basta con desarrollar el término de la izquierda:

$$\begin{aligned}
\binom{m+k-1}{k} &= \frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+k-k)(m-1)!}{k!(m-1)!} \\
&= \frac{(-1)(-m-k+1)(-1)(-m-k+2)\cdots(-1)(m-k+k)(m-1)!}{k!(m-1)!} \\
&= (-1)^k \frac{(-m-(k-1))(-m-(k-2))\cdots(-m-1)(-m)}{k!} = \\
&= (-1)^k \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-(k-2))(-m-(k-1))(-m-k)!}{k!(-m-k)!} = \\
&= (-1)^k \frac{(-m)!}{k!(-m-k)!} = (-1)^k \binom{-m}{k} \bullet
\end{aligned}$$

De la Proposición A.1, si la leemos de derecha a izquierda, se deduce la definición de un número combinatorio en el que el número superior es negativo. Así, para cualquier $m > 0$ y cualquier k, si queremos calcular

$$\binom{-m}{k}$$

lo haremos,

$$\left(\begin{array}{c} -m \\ k \end{array}\right) = (-1)^k \frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+k-k)}{k!}$$

De la demostración, se induce la **identidad** del factorial de un entero negativo. Así, situándonos en las dos últimas lineas de la demostración:

$$(-m)! = (-m)(-m-1)\cdots(-m-(k-2))(-m-(k-1))(-m-k)!$$

Pero observa que este producto es infinito, y **no sirve** como procedimiento de cálculo.

Si queremos calcular números combinatorios, con el número superior fraccional, debemos recordar la forma de cálculo general:

$$\left(\begin{array}{c} m+k-1 \\ k \end{array}\right) = \frac{(m+k-1)(m+k-2)\cdots(m+k-k)}{k!}$$

donde además sabemos que

$$\left(\begin{array}{c} m+k-1 \\ k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} m+k-1 \\ m-1 \end{array}\right) = 1$$

siempre que $m+k-1 < k$ (esto sucede por ejemplo cuando $0 < m < 1$ y $k = 0$). Recordar además que $0! = 1$.

Apéndice B

Distribuciones a priori conjugadas

La definición de familias conjugadas introducida en el Capítulo 4 (Definición 4.4) puede ser algo ambigua puesto que si una familia $\mathcal{F}$ es conjugada, entonces dada cualquier $\pi(\theta) \in \mathcal{F}$ se tiene que para cualquier densidad $g(\theta)$ definida por $g(\theta) = p(\theta)\pi(\theta)$, siendo $p(\theta)$ cualquier función que haga a g densidad, se tiene que la familia $\mathcal{G}$ de densidades proporcionales a las de $\mathcal{F}$ también es conjugada, y entonces podríamos no saber bien a qué nos referimos cuando hablamos de que una familia $\mathcal{F}$ determinada es conjugada. De hecho, en muchas ocasiones esta situación más general se conoce como familias cerradas bajo muestreo dado por $f(\vec{x}/\theta)$.

En la práctica consideraremos familias conjugadas aquellas que aparecen de forma natural en cada uno de los procesos de muestreo más habituales.

En la siguiente tabla presentamos algunas de las más habituales.

Cuadro B.1: Distribuciones a priori conjugadas

Verosimilitud Distribución a priori	Distribución a posteriori
$X\|\theta \in \mathcal{P}(\theta)$ $\theta \in \gamma(a, r)$	$\theta\|\vec{x} \in \gamma(a+n, r+n\overline{x})$
$X\|\theta \in Bn(r, \frac{r}{r+\theta})$ $\theta \in Be(r, a, b)$	$\theta\|\vec{x} \in Be(r, a+nr, b+n\overline{x})$
$X\|\theta \in B(r, \theta)$ $\theta \in Be(r, a, b)$	$\theta\|\vec{x} \in Be(r, a+n\overline{x}, b+nr-n\overline{x})$
$X\|\theta \in \gamma(\theta, r)$ $\theta \in \gamma(a, b)$	$\theta\|\vec{x} \in \gamma(b+n\overline{x}, a+nr)$
$X\|\theta \in \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ $\theta \in \mathcal{N}(a, b^2)$	$\theta\|\vec{x} \in \mathcal{N}(\frac{a\sigma^2+n\overline{x}b^2}{\sigma^2+nb^2}, \frac{\sigma^2 b^2}{\sigma^2+nb^2})$

Bibliografía

[Bailey, 1945] Bailey, A. (1945). *A generalized theory of credibility.* Proceedings of the Casualty Acturial Society, XXXII, 13, 13-20.

[Bárcena et al., 2003] Bárcena, M., Fernández, K., Ferreira, E., and Garín, M.A. (2003). *Elementos de Probabilidad y Estadística Descriptiva.* Servicio Editorial de la UPV|EHU, Bilbao.

[Boland, 2007] Boland, P. (2007). *Statistical and probabilistic methods in actuarial science.* Chapman & Hall/CRC, London.

[Boucher y Denuit, 2007] Boucher, J.P. y Denuit, M. (2007). *Credibility premiums for the zero-inflated Poisson model and new hunger for bonus interpretation.* Insurance: Mathematics and Economics.

[Bühlmann, 1967] Bühlmann, H. (1967). *Experience rating and credibility.* Astin Bulletin, 4, 199-207.

[Bühlmann, 1975] Bühlmann, H. (1975). *Minimax credibility. In Kahn, P.M. ed.*. Credibility Theory and Applications Academic Press, New York, 1-22.

[Bühlmann y Straub, 1972] Bühlmann, H. y Straub, E. (1972). *Credibility for loss ratios.* Actuarial Research Clearing House, 2.

[Eichenauer et al., 1988] Eichenauer, J., Lehn, J. y Rettig, S. (1988). *A gamma-minimax result in credibility theory.* Insurance: MAthematics and Economics, 7, 79-57.

[Ferreira y Garín, 2010] Ferreira, E. y Garín, A. (2010). *Estadística Actuarial: Modelos Estocásticos. Notas de clase.* Disponible en versión .pdf en serie de publicaciones Sarriko-online dentro del repositorio de la UPV/EHU, ADDI, http://hdl.handle.net/10810/12500.

[Gajek et al., 2007] Gajek, L., Miś, P. y Slowińska (2007). *Optimalstreams of premiums in multiperiod credibility models.* Applicationes Mathematicae, 34, 223-235.

[Gómez-Déniz et al., 2006] Gómez-Déniz, E., Calderín E. y Cabrera, I. (2006). *A simple method to study sensitivity of BMP's.* Communications in Statistics: Theory and Methods, 35, 583-591.

[Gómez-Déniz y Sarabia, 2008] Gómez-Déniz, E. y Sarabia, J. (2008). *A Teoría de la Credibilidad: Desarrollo y Aplicaciones en Primas de Seguros y Riesgos Operacionales.* Fundación MAPFRE, Madrid.

[Heilmann, 1989] Heilmann, W. (1989). *Decision theoretic foundations of credibility theory.* Insurance: Mathematics and Economics, 8, 77-95.

[Hewitt, 1970] Hewitt, C. (1970). *Credibility for severity.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 57, 148-171.

[Hickmann, 1975] Hickmann, J. (1975). *Introduction and historical overview of credibility.* In: Credibility. Theory and Applications. P.M. Kahn Ed.. Academic Press, New York.

[Hossack et al., 1983] Hossack, I., Pollard, J., and Zennwirth, B. (1983). *Introductory statistics and applications in general insurance.* Cambridge University Press, USA.

[Jewell, 1974] Jewell, W.S. (1974). *Credible means are exact Bayesian for exponential familie.* Astin Bulletin, 8, 79-90.

[Lemaire, 1979] Lemaire, J. (1979). How to define a bonus-malus system with an exponential utility function. *Astin Bulletin, Cambridge University Press*, 10:274–282.

[López Cachero, 1996] López Cachero, M. (1996). *Estadística para actuarios.* Fundación Mapfre Estudios, Madrid.

[Mayerson, 1964] Mayerson, A.L. (1964). *A Bayesian view of credibility.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 51, 85-104.

[Mowbray, 1914] Mowbray, A. (1914). *How extensive a payroll is necessary to give dependable pure premium?.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 1, 24-30.

[Ruíz Maya y Martín Pliego, 1999] Ruíz Maya, L. y Martín Pliego, J. (1999). *Fundamentos de Inferencia Estadística, 3ª edición.* Thomson Paraninfo, Madrid.

[Sarabia et al., 2006] Sarabia, J., Gómez Déniz, E., and Vázquez Polo, F. (2006). *Estadística Actuarial: teoría y aplicaciones.* Prentice Hill, Madrid.

[Vegas Pérez, 1981] Vegas Pérez, A. (1981). *Estadística. Aplicaciones econométricas y actuariales.* Pirámide, Madrid.

[Whitney, 1918] Whitney, A. (1918). *The theory of experience rating.* Proceedings of the Casualty Actuarial Society, 4, 274-292.

[Willmot, 1987] Willmot, G.E. (1987). *The Poisson-inverse Gaussian distribution as an alternative to the negative binomial.* Scandinavian Actuarial Journal, 113-127.