eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ZTF-FCT
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
Facultad de Ciencia y Tecnología

Espacios de Sóbolev y Formulación Variacional de Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Mikel Legasa Ríos

Trabajo dirigido por
Luis Escauriaza Zubiria

Leioa, Julio de 2016

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar los espacios de Sóbolev, debidos a Sergéi Lvóvich Sóbolev (1908-1989), e introducir una de las técnicas más utilizadas en la búsqueda de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales, el método variacional.

El método variacional es un método cualitativo utilizado para probar la *existencia* y *unicidad* de solución en un determinado *espacio de funciones*. También permite, bajo ciertas condiciones, convertir el problema en uno de minimización. Están involucrados el concepto de derivada débil, los espacios de Hilbert y los espacios de Sóbolev.

Los espacios de Sóbolev serán nuestros espacios de funciones, espacios de Banach formados por funciones de espacios L^p con derivada(s) en L^p, naturalmente en un sentido débil que deberemos hacer preciso. Las herramientas para probar la existencia y unicidad son los conocidos teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram, enunciados para espacios de Hilbert. En términos generales se trata de aplicar teoría del Análisis Funcional y la Topología para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Dedicaremos los dos primeros capítulos a dicha teoría, comenzando con las topologías débiles para un espacio de Banach. Las topologías débiles son particularmente interesantes en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales y en la aplicación del método variacional. Después estudiaremos brevemente los espacios de Hilbert, espacios completos cuya norma está inducida por un producto escalar, y al final del capítulo de espacios de Hilbert se encuentran los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram. El siguiente capítulo está dedicado al estudio de los espacios de Sóbolev y a las derivadas débiles. Comenzaremos estudiando estos espacios para intervalos en $\mathbb{R}$, para después generalizar a abiertos en $\mathbb{R}^n$. Los primeros nos servirán para aplicar el método variacional a ecuaciones diferenciales ordinarias y los segundos para aplicarlo a ecuaciones en derivadas parciales. Esta manera de introducirlos pretende ser más asequible para el lector. Trabajaremos con espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$.

En el cuarto capítulo aplicamos el método variacional a ejemplos concretos de problemas de contorno. El lector puede referirse a la sección inicial de este capítulo, que está enfocada a dar una idea general esquematizada del método, para comprender antes de adentrarse en la teoría en qué consiste en términos generales el método variacional.

Se supondrá que el lector está familiarizado con los conceptos básicos del Análisis Funcional, y se incluye un apéndice donde se enumeran sin demostración varios resultados sobre espacios de Banach, centrándonos principalmente en los espacios L^p, así como los principales resultados de Integración y Teoría de la Medida necesarios para desarrollar la teoría de los espacios de Sóbolev. En el apéndice, además, puede encontrarse una sección donde se resumen los resultados básicos de convolución y regularización, íntimamente relacionados con el estudio de funciones en espacios L^p. Por último, enunciamos en este apéndice algún otro resultado básico como la identidad de Green, que también jugará un papel fundamental a la hora de tratar con problemas de contorno en varias variables. También hemos incluido una sección donde resumimos la notación utilizada.

A lo largo de los capítulos hemos incluido 39 notas numeradas cuyo propósito, generalmente, es dar una explicacion intuitiva de resultados expuestos, remarcar su importancia o ampliar la información.

Capítulo 1

Topologías débiles y el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki

En este primer capítulo se tratan las topologías débiles de un espacio de Banach, un concepto muy conocido en topología. Sabemos que la norma de un espacio normado E induce una topología τ (metrizable) sobre E. El problema de esta topología es que para espacios de dimensión infinita la bola unidad *nunca* es compacta.

1.1. Motivación

El objetivo de este capítulo es construir sobre E dos topologías τ_1 y τ_2 tales que $\tau_2 \subset \tau_1$ y a su vez $\tau_1 \subset \tau$ (se dice que τ_1 es menos fina que τ, i.e que todo abierto de E en τ_1 lo es en τ). Intuitivamente, la razón de definir topologías con *menos* abiertos que la dada por la norma de E es que para una topología con menos conjuntos abiertos se tiene un *mayor* número de conjuntos compactos, ya que cuanto menor sea el número de abiertos de τ sobre X, existirán *menos* cubrimientos por abiertos del conjunto A, lo que facilitará la compacidad. En primer lugar recordamos la definición de compacidad:

Definición 1.1.1. Un conjunto $A \subset X$ es compacto en la topología τ si para todo cubrimiento por abiertos de A en τ existe un subrecubrimiento finito.

Y formalizamos el resultado de que la bola unidad en dimensión infinita *nunca* es compacta:
Teorema 1.1.1. *Sea E un espacio normado. La bola unidad*

$$B_E = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$$

es compacta si y sólo si E es de dimensión finita.

Demostración. **(Teorema 1.1.1, $\Leftarrow$)** Basta tener en cuenta que si E es de dimensión finita existe una isometría lineal biyectiva entre E y $\mathbb{R}^n$ que es un homeomorfismo. La bola unidad es compacta en $\mathbb{R}^n$ por el teorema de Heine-Borel.

□

Para demostrar la implicación recíproca utilizamos el lema de Riesz:

Lema 1.1.2. ***(Lema de Riesz)*** *Sea E un espacio normado y $M \subset E$ un subespacio lineal cerrado tal que $M \neq E$. Entonces*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists u \in E \ tal\ que \ \|u\| = 1 \ y \ d(u, M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Demostración. Sea $v \in E$ tal que $v \notin M$. Como M es cerrado $d(v, M) > 0$, y podemos escoger $m_0 \in M$ tal que

$$d(v, M) \leq \|v - m_0\| \leq \frac{d(v, M)}{1 - \varepsilon}.$$

Si definimos

$$u := \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|},$$

u verifica las propiedades deseadas, ya que $m_0 + \|v - m_0\| \, m \in M$ y por tanto

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geq \frac{d}{\|v - m_0\|} \geq 1 - \varepsilon.$$

□

Demostración. **(Teorema 1.1.1, ⇒)** Supongamos que E es de dimensión infinita. En tal caso existe una sucesión (E_n) de subespacios de dimensión finita de E tales que $E_{n-1} \subset E_n$ y $E_{n-1} \subsetneq E_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicando el lema de Riesz obtenemos una sucesión $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \in E_n$, $\|u_n\| = 1$ y $d(u_n, E_{n-1}) \geq 1/2$. Por tanto $\|u_n - u_m\| \geq 1/2$ para $m < n$. Por tanto ninguna subsucesión de (u_n) es de Cauchy y $(u_n) \subset B_E$ no posee ninguna subsucesión convergente, lo que implica que B_E no es compacta.

□

Teniendo en cuenta el papel fundamental que juegan los conjuntos compactos, es fácil entender la motivación de este primer capítulo, cuyo resultado principal es el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, que afirma que para una cierta topología definida sobre un espacio dual de un espacio de Banach, la bola unidad es compacta. Como consecuencia de la compacidad de la bola unidad obtendremos importantes resultados sobre convergencia de sucesiones, existencia de mínimos para funciones y espacios reflexivos. La sección 1.2 del capítulo formaliza la construcción de las topologías débiles, las secciones 1.3 y 1.4 definen y describen las propiedades de las dos topologías débiles con las que trataremos y en la última sección se enuncia y demuestra el ya mencionado teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki y los resultados que son consecuencia de éste.

En adelante y hasta el fin de este capítulo, E será un espacio de Banach. También, dado que vamos a tratar con la continuidad de aplicaciones, para que no haya confusión detallaremos con el par (X, τ_x) los dominios e imágenes de las aplicaciones cuando sea necesario. Es decir, escribiremos $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ es continua para decir que f es continua especificamente si dotamos a X_1 de la topología τ_1 y a X_2 de la topología τ_2.

1.2. La topología menos fina que contiene a una familia de conjuntos $\mathbb{U}$

Las dos topologías que queremos construir parten de conjuntos de aplicaciones, por lo que en esta sección nos planteamos construir la topología más débil sobre un conjunto X para la cual todas las aplicaciones $(\varphi_i)_{i\in I}$ con $\varphi_i : X \to Y_i$ sean continuas. Es decir, queremos construir (elegir qué conjuntos son abiertos) aquella topología sobre X con el menor número posible de abiertos que las haga continuas a todas. Trataremos con la siguiente caracterización de continuidad en espacios topológicos:

Definición 1.2.1. Una aplicación $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ es continua si y sólo si para todo abierto $V \in \tau_Y$ la imagen inversa de V a través de f es abierta en τ_X.

Por ejemplo, si a X lo dotamos de la topología discreta (todo subconjunto de X es abierto) es evidente que toda aplicación $f : X \to Y$ es continua, puesto que la imagen inversa de cualquier conjunto es un conjunto abierto en (X, τ_{dis}). De hecho, se trata de la topología con mayor número de abiertos para la cual esto se cumple, la más fina.

Esta caracterización de continuidad obliga a empezar incluyendo en la topología todo conjunto $U \subset X$ tal que $U = \varphi_i^{-1}(V_i)$ para todo abierto $V_i \in \tau_{Y_i}$. La familia $\mathbb{U} = \{\varphi_i^{-1}(V_i)\}_{i\in I, V_i \in \mathcal{T}_{Y_i}}$ evidentemente no tiene por qué ser una topología, pues debemos incluir todas las intersecciones finitas y uniones arbitrarias de estos conjuntos (definición de topología). Para ello consideramos la siguiente construcción, la de la topología menos fina posible que continene a la familia $\mathbb{U}$:

Proposición 1.2.1. *Dado X un conjunto y una familia $\mathbb{U}$ de subconjuntos de X, consideramos la familia $\hat{\mathcal{U}}$ formada por todas las intersecciones finitas de conjuntos de $\mathbb{U}$. La familia $\mathcal{U} \cup \{\emptyset, X\}$, donde $\mathcal{U}$ es la familia de conjuntos formada por todas las uniones arbitrarias de elementos de $\hat{\mathcal{U}}$ es una topología sobre X, y es la más débil (i.e. la menos fina) que hace que todo $U \in \mathbb{U}$ sea abierto.*

Demostración. En primer lugar es evidente por la construcción que la familia $\mathcal{U}$ es estable bajo uniones arbitrarias. Requiere demostración la afirmación de que $\mathcal{U}$ es estable bajo intersecciones finitas. Para I, J arbitrarios y $A_i, B_j \in \tilde{\mathcal{U}}$, de la igualdad

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cap B_j)$$

y del hecho de que $A_i \cap B_j \in \tilde{\mathcal{U}}$ tenemos que $\bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j) \in \mathcal{U}$. La identidad puede demostrarse por doble contenido. Es decir, si $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right)$ entonces $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$ para algún $i_0 \in I$ y $j_0 \in J$, y como $(i_0, j_0) \in I \times J$, $x \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J}(A_i \cap B_j)$. La otra inclusión se prueba repitiendo el proceso a la inversa.

□

Nota 1. Es evidente, de la definición de topología, que es la más débil que contiene a la familia $\mathbb{U}$. El orden para construir la topología (primero tomar las intersecciones finitas y después las uniones arbitrarias) no puede alterarse. Si se hubieran tomado en primer lugar todas las uniones arbitrarias de elementos de $\mathbb{U}$ y después las intersecciones arbitrarias de estos últimos, la familia resultante no es necesariamente estable bajo uniones arbitrarias.

De la construcción de la topología obtenemos dos proposiciones inmediatas:

Proposición 1.2.2. *Sea $x \in X$. Para el conjunto de aplicaciones $\varphi_i : X \to Y_i$ con $i \in I$ y la topología construida en la proposición 1.2.1 a partir de la familia de conjuntos*

$\mathbb{U} = \{\varphi_i^{-1}(V_i)\}_{i\in I, V_i\in\mathcal{T}_{Y_i}}$, *la familia*

$$\mathcal{B}_x = \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_{\varphi_i(x)}),$$

donde $V_{\varphi_i(x)}$ *es un entorno de* $\varphi_i(x)$ *en* Y_i*, es una base de entornos de* x*.*

Demostración. Por la construcción que hemos hecho, tenemos que todo entorno $\mathcal{V}$ de x contiene a un abierto U de la forma $U = \bigcup(\bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i))$, con V_i abierto en Y_i y $x \in U$. Así, x pertenece a algún conjunto $\bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_i)$, de modo que basta tomar los entornos $V_{\varphi_i(x)}$ de $\varphi_i(x)$ tales que $V_{\varphi_i(x)} \subset V_i$ para todo i, obteniendo el abierto

$$\bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_{\varphi_i(x)}) \subset U \subset \mathcal{V}, \text{ con } x \in \bigcap_{finita} \varphi_i^{-1}(V_{\varphi_i(x)}).$$

□

Proposición 1.2.3. *Sea* Z *un espacio topológico y* $\psi : (Z,\tau_Z) \to (X,\mathcal{T})$*. Entonces* ψ *es continua si y sólo si* $\varphi_i \circ \psi : (Z,\tau_Z) \to (Y_i,\tau_Y)$ *es continua para todo* $i \in I$*, para la topología* $\mathcal{T}$ *construida como en la proposición 1.2.1 con* $\mathbb{U} = \{\varphi_i^{-1}(V_i)\}_{i\in I, V_i\in\mathcal{T}_{Y_i}}$*.*

Demostración. Si ψ es continua es evidente que toda $\varphi_i \circ \psi$ es continua. Por otra parte, supongamos que $\varphi_i \circ \psi$ es continua $\forall i \in I$. Todo abierto $U \in \mathcal{T}$ es de la forma $\cup \cap_{finita}$ $\varphi_i^{-1}(V_i)$, de modo que

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup \bigcap_{finita} \psi^{-1}\left(\varphi_i^{-1}(V_i)\right) = \bigcup \bigcap_{finita} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(V_i),$$

que es abierto en τ_Z puesto que $\varphi_i \circ \psi$ es continua. □

1.3. La topología débil $\sigma(E,E^*)$

Para un espacio de Banach E, nos centraremos en construír una nueva topología más débil que la dada por la norma $||\cdot||$, siguiendo el proceso de la sección anterior, a partir del espacio dual E^*.

Definición 1.3.1. La topología débil $\sigma(E,E^*)$ sobre E es la topología menos fina asociada al conjunto de aplicaciones E^*, construida tal y como indica la proposición 1.2.1, a partir de la familia de conjuntos $\mathbb{U} = \{f^{-1}(\omega)\}_{f\in E^*, \omega\in(\mathbb{R},\tau_{us})}$.

Nota 2. A lo largo de este capítulo llamaremos *topología fuerte* o simplemente τ a la topología sobre E generada por su norma, y *topología débil* a $\sigma(E,E^*)$. También nos referiremos a los abiertos de una u otra topología como abiertos fuertes o abiertos débiles respectivamente. En general, cuando queramos especificar que un conjunto verifica una propiedad topológica en una u otra topología, hablaremos de *compacto fuerte* (respectivamente *compacto débil*), cerrado *fuerte* (respectivamente *cerrado débil*)...

Proposición 1.3.1. $\sigma(E,E^*) \subseteq \tau$*.*

Demostración. Se deduce inmediatamente de la definición de $\sigma(E, E^*)$, puesto que toda aplicación $f \in E^*$ es continua tomando la topología τ en E. Es decir, si U es abierto en $\sigma(E, E^*)$, entonces U puede escribirse como $U = \cup(\cap_{finita} V)$, donde cada $V = f^{-1}(\omega)$ con $f \in E^*$ y cada $\omega \in (\mathbb{R}, \tau_{us})$. De la continuidad de f tomando la topología fuerte en E se tiene que cada V es abierto en τ, y por tanto U también lo es. $\square$

Proposición 1.3.2. *$\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff (T_2).*

Demostración. Dados $x_1, x_2 \in E$ queremos encontrar dos abiertos $U_1, U_2 \in \sigma(E, E^*)$ tales que $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ con $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Utilizando la segunda forma geométrica de Hahn-Banach (ver B.2) tenemos que existe un hiperplano cerrado que separa x_1 y x_2. Esto es, existe $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_1) < \alpha < f(x_2).$$

Así pues, tomando $U_1 = \{x \in E \quad f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ y $U_2 = \{x \in E \quad f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, +\infty))$, tenemos la separación deseada. Nótese que $(-\infty, \alpha)$ y $(\alpha, +\infty)$ son abiertos usuales de $\mathbb{R}$.

$\square$

Nota 3. La propiedad de ser $T2$, entre otras cosas, garantiza la unicidad de los límites de sucesiones.

Proposición 1.3.3. *Sea $x_0 \in E$. Dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto $\{f_1, f_2, ..., f_k\} \subset E^*$, entonces*

$$V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} = \{x \in \mathbb{E} \;\Big|\; |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, ..., k\}$$

es un entorno de x_0 para la topología $\sigma(E, E^*)$. Además variando ε, k y los f_i obtenemos una base de entornos de x_0. Es decir, $\{V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k}\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, f_1,...,f_k \in E^*}$ es una base de entornos de x_0.

Demostración. En primer lugar tenemos que podemos escribir $V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k}$ como

$$V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}((f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon)),$$

de modo que $V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k}$ es abierto y como contiene a x_0, es un entorno de x_0. Para ver que $(V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k})_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, f_1,...,f_k \in E^*}$ es una base de entornos, queremos ver que para todo x_0 y todo abierto U en $\sigma(E, E^*)$ con $x_0 \in U$ existe algún $V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} \in (V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k})_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, f_1,...,f_k \in E^*}$ tal que $V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} \subset U$.

Teniendo en cuenta la proposición 1.2.2, existe un entorno B_{x_0} de la forma $B_{x_0} = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(V_{f_i(x_0)})$, donde $V_{f_i(x_0)}$ es un entorno en $Y_i = \mathbb{R}$ de $f_i(x_0)$, que verifica $B_{x_0} \subset U$. Podemos por tanto tomar ε positivo con $(f_i(x_0) - \varepsilon, f_i(x_0) + \varepsilon) \subset V_{f_i(x_0)}$. Se sigue que $x_0 \in V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} \subset B_{x_0} \subset U$.

$\square$

Proposición 1.3.4. *Si E es de dimensión finita, $\sigma(E, E^*) = \tau$ (Ambas topologías coinciden).*

Demostración. Ya sabemos que $\sigma(E,E^*) \subseteq \tau$, con lo que debemos ver que $\tau \subseteq \sigma(E,E^*)$.

Sea $x_0 \in E$ y U un entorno de x_0 en τ. Queremos mostrar que existe un entorno V de x_0 en $\sigma(E,E^*)$ tal que $V \subseteq U$. Por la proposición anterior, esto se traduce en encontrar $f_1,...,f_k$ en E^* y $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$ tales que $V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} \subseteq U$.

Como E es de dimensión finita podemos tomar una base $\{e_1,e_2,...,e_k\}$ normalizada, donde cada $x \in E$ puede escribirse como $x = e_1x_1 + ... + e_kx_k$.

Las funciones $f_i : E \to \mathbb{R}$ tales que $f_i(x) = x_i$ son trivialmente lineales y además continuas (Puesto que $|f_i(x)| = |x_i| \leq C||x||$), y recordando que τ está generada por la métrica dada por la norma, se tiene que existe $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \subseteq U$.

Por tanto tenemos que en general, para $x \in E$,

$$||x - x_0|| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_i(x - x_0)| = \sum_{i=1}^{k} |x_i - x_0^i| \leq k\ max\{x_i - x_0^i\} < k\varepsilon$$

par algún ε positivo, por lo que basta tomar $\varepsilon = \frac{r}{k}$, de modo que

$$V^{r/k}_{f_1,...,f_k} = \{x \in \mathbb{E} \ \Big|\ |f_i(x - x_0)| < \frac{r}{k} \quad \forall i = 1,2,...,k\}$$

es un entorno de x_0 en $\sigma(E,E^*)$, y además $||x - x_0|| \leq \sum_{i=1}^{k} |f_i(x - x_0)| < r$, luego $V^{r/k}_{f_1,...,f_k} \subseteq B(x_0,r) \subseteq U$.

$\square$

Proposición 1.3.5. *Si E es de dimensión infinita, $\sigma(E,E^*) \subsetneq \tau$. Es decir, existe algún conjunto U tal que $U \in \tau$ pero $U \notin \sigma(E,E^*)$.*

Demostración. Veremos que la esfera unidad $S = \{x \in E \,\big|\, ||x|| = 1\}$ es cerrada en la topología fuerte pero *no lo es* en la topología débil. Si $\bar{S}$ es la clausura de S en la topología débil, veremos que $S \subsetneq \bar{S}$ probando que $B_E \subset \bar{S}$, donde $B_E = \{x \in E \,\big|\, ||x|| \leq 1\}$.

Sea $x \in E$ con $||x|| < 1$ (recuérdese que $S \subseteq \bar{S}$) y V un entorno de x en la topología débil, veamos que $V \cap S \neq \emptyset$. Por la proposición 1.3.3 y de las propiedades de los sistemas fundamentales de entornos podemos asumir que $V = V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} = \{x \in \mathbb{E} \,\big|\, |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall i = 1,2,...,k \quad f_i \in E^*\}$.

Como E es de dimensión infinita, podemos considerar $y \in E$ con $y \neq 0$ tal que para las $f_1,f_2,...,f_k$ sea $f_i(y) = 0$, en cuyo caso la función $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(t) = ||x + ty||$ es continua, $g(0) = ||x|| < 1$ y $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$. Existe por tanto $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = ||x + t_0y|| = 1$ (i.e $x + t_0y \in S$), y como $f_i(x_0 - (x_0 + t_0y)) = t_0f_i(y) = 0 < \varepsilon$ $x + t_0y \in V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k}$.

Es decir, $x + t_0y \in V^{\varepsilon}_{f_1,...,f_k} \cap S$ y queda demostrado que para todo entorno V de x tal que $x \in B_E$, $V - \{x\} \cap S \neq \emptyset$, luego $S \subsetneq B \subset \bar{S}$, lo que prueba que S no es cerrado en la topología débil $\sigma(E,E^*)$. Nótese que, de hecho,

$$B_E = \bigcap_{f \in E^*, ||f|| \leq 1} \{x \in E \,\big|\, |f(x)| \leq 1\},$$

luego es intersección de conjuntos cerrados, y por tanto cerrado, con lo que $\bar{S} = B_E$.

Nótese que la existencia de y se deduce de que E es de dimensión infinita: supongamos lo contrario, en tal caso la función

$$\begin{aligned} \varphi: \ E &\longrightarrow \mathbb{R}^k \\ x &\longrightarrow (f_1(x), ..., f_k(x)) \end{aligned}$$

verificaría $Ker(\varphi) = \{0\}$. Es decir, $\varphi : E \to \varphi(E)$ sería un isomorfismo y la dimensión de E finita, lo cual es absurdo. $\square$

Nota 4. La inclusión se ha hecho con cerrados, pero evidentemente es equivalente a hacerla con abiertos. Una topología τ_1 es menos fina que τ_2 si todo abierto de τ_1 lo es en τ_2 o *equivalentemente* si todo cerrado de τ_1 lo es en τ_2. Traducido a la proposición anterior, el complementario de S es abierto en la topología fuerte pero no lo es en la débil.

1.4. La topología débil* $\sigma(E^*, E)$

Consideremos ahora E^*, el espacio dual de un espacio de Banach E. Podemos dotar a E^* de dos topologías distintas:

(1) La topología (fuerte) métrica inducida por la norma del dual $||f|| = \sup_{x\in E, ||x||=1} |f(x)|$ (ver B.1).

(2) La topología definida en la sección 1.3 para el espacio de Banach E^*, $\sigma(E^*, E^{**})$.

Siguiendo el guión comentado al comienzo del capítulo, construiremos ahora una tercera topología sobre E^*,

(3) La topología débil*, que denotaremos $\sigma(E^*, E)$. Será la topología menos fina que haga continuos todos los funcionales del conjunto $\{\varphi_x\}_{x\in E}$ definidos como

$$\begin{aligned} \varphi_x: \ E^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow f(x). \end{aligned}$$

Definición 1.4.1. Sea E un espacio de Banach, se define sobre E^* la topología débil*, denotada $\sigma(E^*, E)$, y es la topología menos fina asociada al conjunto de aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x\in E}$, construida tal y como indica la proposicion 1.2.1, a partir de $\mathbb{U} = \{\varphi_x^{-1}(\omega)\}_{x\in E, \omega\in(\mathbb{R}, \tau_{us})}$, con $\varphi_x(f) = f(x)$ para $f \in E^*$.

Proposición 1.4.1. $\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**}) \subseteq \tau$.

Demostración. Ya sabemos que $\sigma(E^*, E^{**}) \subseteq \tau$. Dado que $E \subseteq E^{**}$ (ver definiciones 1.5.1 y 1.5.2), $\{\varphi_x\}_{x\in E} \subset \{\varphi_x\}_{x\in E^{**}}$, y se concluye que si $U \in \sigma(E^*, E)$ necesariamente $U \in \sigma(E^*, E^{**})$. Es decir, $\sigma(E^*, E) \subseteq \sigma(E^*, E^{**})$. $\square$

Omitimos las demostraciones de los dos siguientes resultados por ser idénticas a las de la sección de la topología débil. Basta intercambiar los papeles de E^* y E.

Proposición 1.4.2. *La topología débil* es Hausdorff (T2).*

Proposición 1.4.3. *Sea $f_0 \in E^*$. Dado $\varepsilon > 0$ y un conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset E$, entonces:*

$$V^{\varepsilon}_{x_1,...,x_k} = \{f \in \mathbb{E}^* \,\big|\, |f - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, ..., k\}$$

es un entorno de f_0 para la topología $\sigma(E^*, E)$. La familia $(V^{\varepsilon}_{x_1,...,x_k})_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, x_1,...,x_k \in E}$ es una base de entornos de f_0.

Por último agrupamos las relaciones entre la convergencia en las topologías débiles y la topología fuerte.

Corolario 1.4.4. ***(Convergencia fuerte, débil y débil*)*** *Sean (x_n) y (f_n) dos sucesiones en E y E^*, respectivamente. Denotamos $x_n \to x$, $x_n \rightharpoonup x$ y $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergencia en la topología fuerte, débil y débil*, respectivamente. Se verifica:*

(1) $x_n \rightharpoonup x \iff f(x_n) \to f(x) \; \forall f \in E^*.$

$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff f_n(x) \to f(x) \; \forall x \in E.$

(2) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x.$

$f_n \to f \implies f_n \rightharpoonup f.$

$f_n \rightharpoonup f \implies f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$

Demostración. (1) es corolario inmediato de la definición de la topologías débiles y (2) es corolario inmediato de $\sigma(E, E^*) \subset \tau$ y de $\sigma(E^*, E) \subset \sigma(E^*, E^{**}) \subset \tau$. □

1.5. El teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki

Comenzamos esta sección con el teorema central del capítulo, que enuncia la propiedad más importante de la topología débil*.

Teorema 1.5.1. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)***
La bola unidad

$$B_{E^*} = \{f \in E^* \,\big|\, ||f|| \leq 1\} \subset E^*$$

es compacta en la topología débil $\sigma(E^*, E)$.*

En la demostración del teorema vamos a utilizar el producto de espacios topológicos estándar (producto de Tychonoff, ver [4, Cap. 8]). Una caracterización de la topología producto de Tychonoff para el producto arbitrario de espacios topológicos

$$X := \prod_{i \in I} X_i$$

es la siguiente: la topología de Tychonoff sobre X es la topología menos fina para la cual todas las proyecciones canónicas $p_i : X \to X_i$ son continuas. También se requiere usar el teorema de Tychonoff, cuya demostración puede encontrarse en [4, Teorema 17.8, pág. 120]:

Lema 1.5.2. ***(Teorema de Tychonoff)*** *El producto arbitrario de espacios compactos con la topología producto de Tychonoff es compacto.*

Demostración. **(Banach-Alaoglu-Bourbaki)** Consideramos el espacio producto Y definido como

$$Y = \prod_{x \in E} \mathbb{R},$$

consistente en todas las aplicaciones de E en $\mathbb{R}$, cuyos los elementos denotamos de la forma $\omega = (\omega_x)_{x \in E}$ con $\omega_x \in \mathbb{R}$ y lo equipamos con la topología producto de Tychonoff τ_{tyc} a partir de la topología usual de $\mathbb{R}$. Es decir, la topología menos fina que hace continuas todas las proyecciones

$$p_x : Y \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$$

$$\omega \longrightarrow \omega_x$$

Dado que E^* es el espacio formado por todas las aplicaciones lineales *continuas* de E en $\mathbb{R}$, $E^* \subset Y$. Gracias a la proposición 1.2.3 tenemos que la inclusión canónica $I : (E^*, \sigma(E^*, E)) \to (Y, \tau_{tyc})$, con $I(f) = (f(x))_{x \in E}$ e I^{-1} son continuas.

Es decir, $I : E^* \to I(E^*)$ es un homeomorfismo. Además $I(B_{E^*}) = K$, con K el conjunto definido como

$$K = \{\omega \in Y \,\big|\, |\omega_x| \leq \|x\|\,,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, y \in E\}.$$

(Basta ver que $f \in B_{E^*}$ equivale a $\|f\| \leq 1$ i.e. $\sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1$, con las otras dos condiciones representando la linealidad de f). Para completar la prueba debemos demostrar que K es compacto en Y, para lo cual vamos a escribirlo como la intersección de un conjunto compacto $\tilde{K}$ y uno cerrado C.

Definimos $\tilde{K}$ como $\tilde{K} = \{\omega \in Y \,\big|\, |\omega_x| \leq \|x\| \ \forall x \in E\} = \prod_{x \in E} [-\|x\|\,, \|x\|]$. En virtud del teorema de Tychonoff, $\tilde{K}$ es compacto en τ_{tyc}. Definimos C como $C = \{\omega \in Y \,\big|\, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda \omega_x,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, y \in E\}$.

Para ver que es cerrado basta escribirlo como

$$C = \bigcap_{x,y \in E} A_{x,y} \cap \bigcap_{x \in E, \lambda \in \mathbb{R}} B_{\lambda x}$$

Donde $A_{x,y} = \{\omega \in Y \,\big|\, \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$ y $B_{\lambda y} = \{\omega \in Y \,\big|\, \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x = 0\}$ son conjuntos cerrados, puesto que las aplicaciones $\phi_1, \phi_2 : Y \to \mathbb{R}$ $\phi_1(\omega) = \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$ y $\phi_2(\omega) = \omega_{\lambda x} - \lambda \omega_x$ son continuas y el conjunto $\{x = 0\} \subset \mathbb{R}$ es cerrado. □

Nota 5. Hemos usado un resultado básico de topología: la intersección de un conjunto cerrado y un conjunto compacto es un conjunto compacto. Si K es compacto y C es cerrado, entonces $K \cap C$ es un subconjunto cerrado del compacto K, de modo que es compacto, puesto que la compacidad es débilmente hereditaria. También hemos usado el hecho de que la imagen continua de un compacto es un conjunto compacto.

1.5.1. Corolarios

En esta sección la *reflexividad* juega un papel importante. Recordamos la definición.
Definición 1.5.1. A partir de ahora utilizaremos frecuentemente la aplicación J, a la que llamaremos inyección canónica:

$$J : E \longrightarrow E^{**}$$

$$x \longrightarrow \xi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \longrightarrow f(x)$$

Claramente J es *siempre* inyectiva, lineal, y además $\|x\|_E = \|J(x)\|_{E^{**}}$.

Definición 1.5.2. E es reflexivo si la aplicación J de la definición anterior es sobreyectiva. En tal caso utilizaremos la notación $E = E^{**}$.

Es fácil intuir el papel que juega la propiedad $E = E^{**}$, puesto que estamos trabajando con topologías cuyas definiciones dependen directamente del dual de E. En efecto, destacamos el siguiente teorema como el primer corolario del teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki.

Teorema 1.5.3. ***(Kakutani)*** *Sea E un espacio de Banach. E es reflexivo si y sólo si la bola unidad*

$$B_E = \{x \in E \,\big|\, ||x|| \leq 1\}$$

es compacta en la Topología Débil $\sigma(E, E^*)$.

Demostración. (Teorema 1.5.3, $\Rightarrow$) En primer lugar probaremos que si E es reflexivo, entonces B_E es compacta en $\sigma(E, E^*)$. Si $E = E^{**}$, se verifica $J(B_E) = B_{E^{**}} = \{\xi \in E^{**} \,\big|\, ||\xi|| \leq 1\}$, donde J es la aplicación dada en la definición 1.5.1. La bola unidad $B_{E^{**}}$, por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (teorema 1.5.1), es compacta en la topología $\sigma(E^{**}, E^*)$, con lo que basta ver que J^{-1} es continua definida como aplicación $J^{-1} : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to (E, \sigma(E, E^*))$. Para cada $f \in E^*$, la aplicación φ_f definida como

$$\varphi_f : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_{us})$$

$$\xi \quad \longrightarrow f(J^{-1}(\xi)) = \xi(f)$$

es continua, puesto que, $\forall f \in E^*$, la aplicación

$$\psi_f : \sigma(E^{**}, E^*) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\xi \longrightarrow \xi(f)$$

es continua, de modo que aplicamos la proposición 1.2.3 y J^{-1} es continua. La otra implicación requiere utilizar el teorema de Goldstine.

□

Lema 1.5.4. ***(Teorema de Goldstine)***
Sea E un espacio de Banach. $J(B_E)$ es denso en $B_{E^{**}}$ en la topología $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Demostración. Queremos ver que todo abierto interseca al conjunto $J(B_E)$. Sea $\xi \in B_{E^{**}}$ y V un entorno de ξ en $\sigma(E^{**}, E^*)$, que podemos suponer de la forma $V^{\varepsilon}_{f_1,\dots,f_k}$, definido como en la proposición 1.4.3, es decir,

$$V = V^{\varepsilon}_{f_1,\dots,f_k} = \{\eta \in E^{**} \,\big|\, |(\eta - \xi)(f_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, k\}.$$

En otras palabras, queremos demostrar que existe $x \in B_E$ tal que $J(x) \in V$, o equivalentemente, $|f_i(x) - \xi(f_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, k$ **(*)**. Denotamos $\gamma_i = \xi(f_i)$.

Tenemos que $\|\xi\| \leq 1$ y por la linealidad de ξ, $\xi(\sum_{i=1}^k \beta_i f_i) = \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i$ para $\beta_i \in \mathbb{R}$. Esto implica que $|\sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i| \leq \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\|$. Denotamos $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ y consideramos la aplicación $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ tal que $\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))$.

Supongamos que **(*)** no se cumple. Entonces $\gamma \notin \overline{\varphi(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}$, de modo que, por la segunda forma geométrica de Hahn-Banach (B.2), $\{\gamma\}$ y $\overline{\varphi(B_E)}$ pueden ser separados por un hiperplano, es decir, existen $\beta \in \mathbb{R}^k$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\beta\varphi(x) < \alpha < \beta\gamma \quad \forall x \in B_E.$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x) < \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i.$$

De donde

$$\left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\|_{E^*} \leq \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i,$$

lo cual es una contradicción y prueba que $\gamma \in \overline{\varphi(B_E)}^{\sigma(E^{**},E^*)}$, de donde se sigue **(*)**. $\square$

Estamos en condiciones de acabar la demostración de la implicación del teorema 1.5.3.

Demostración. (Teorema 1.5.3, $\Leftarrow$)

La inyección canónica J, argumentando de la misma manera que para la otra implicación, es continua de $\sigma(E^*, E)$ en $\sigma(E^{**}, E^*)$.

Suponiendo que B_E es compacto débil, deducimos que $J(B_E)$ es compacto en $\sigma(E^{**}, E^*)$, y dado que $\sigma(E^{**}, E^*)$ es Hausdorff, cerrado débil*. Por el lema de Goldstine $J(B_E)$ es además denso débil* en $B_{E^{**}}$. De modo que $J(B_E) = \overline{J(B_E)} = B_{E^{**}}$. En consecuencia $J(E) = E^{**}$, es decir, E es reflexivo.

$\square$

Proposición 1.5.5. *Sea $C \subset E$ un conjunto convexo. C es cerrado en $\sigma(E, E^*)$ si y sólo si lo es en la topología fuerte τ.*

Demostración. Como $\sigma(E, E^*) \subset \tau$, si C es cerrado en $\sigma(E, E^*)$ lo es en τ. Veremos que si C es cerrado en τ lo es en $\sigma(E, E^*)$ comprobando que el complementario de C es abierto en $\sigma(E, E^*)$. Lo haremos probando que todo punto $x \in C^c$ es interior.

Sea $x \notin C$ (si no existe el resultado es trivial). Por el la segunda forma geométrica de Hahn-Banach (ver B.2) existe un hiperplano cerrado que separa C y x. Es decir, existen $f \in E^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < \alpha < f(y) \quad \forall y \in C.$$

El abierto $U = f^{-1}((-\infty, \alpha)) \in \sigma(E, E^*)$ contiene por tanto a x y $U \cap C = \emptyset$ i.e. $U \subset C^c$.

□

Proposición 1.5.6. *Si E es un espacio de Banach reflexivo, todo subespacio lineal cerrado $M \subset E$ es reflexivo.*

Demostración. Queremos ver que $M = M^{**}$. Aplicaremos el teorema 1.5.3, para lo cual necesitamos que B_M sea compacto en la topología $\sigma(M, M^*)$. Como E es reflexivo, B_E es compacto en $\sigma(E, E^*)$, y por ser M convexo (subespacio) y cerrado en τ entonces M es cerrado en $\sigma(E, E^*)$ (proposición 1.5.5).

Teniendo en cuenta que $B_M = B_E \cap M$, B_M es compacto en $\sigma(E, E^*)$, de modo que lo es en la topología inducida sobre M, dado que todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto. Por último basta ver que la topología inducida por $\sigma(E, E^*)$ sobre M es la misma que $\sigma(M, M^*)$. Esto se deduce del teorema de Hahn-Banach (Ver B.2), que afirma que todo funcional lineal continuo (acotado) de M es restricción de un funcional continuo (acotado) de E. □

Corolario 1.5.7. *Los teoremas 1.5 y 1.5.3 son válidos para cualquier bola en E^* y E, respectivamente. Es decir, si $X = E^*$ ó E con E reflexivo, para todo $\lambda > 0$ y todo $x_0 \in X$, entonces la bola*

$$B_{x_0}(\lambda) = \{x \in X \mid \|x - x_0\| \leq \lambda\}$$

es compacta en X con la topología débil ($\sigma(E, E^*)$ para E y $\sigma(E^*, E)$ para E^*).

Demostración. Basta considerar la aplicación continua

$$T : X \longrightarrow X$$

$$x \longrightarrow x_0 + \lambda x.$$

La imagen continua de un conjunto compacto es compacto, B_X es compacto (teoremas 1.5.1 y 1.5.3, respectivamente) y $T(B_X) = B_{x_0}(\lambda)$.

□

Corolario 1.5.8. *Si E es un espacio de Banach reflexivo y $K \subset E$ es un conjunto acotado, cerrado y convexo, entonces K es compacto en $\sigma(E, E^*)$.*

Demostración. Por la proposición 1.5.5, K es cerrado en $\sigma(E, E^*)$. Por ser acotado, existe $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $K \subset mB_E = B_0(m)$, y por el corolario 1.5.7, $B_0(m)$ es compacto débil. Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto. □

Teorema 1.5.9. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $C \subset E$ un conjunto que verifica:*

(1) $C \neq \emptyset$.

(2) C es cerrado (En la topología fuerte).

(3) C es convexo.

Y $\varphi : C \to (-\infty, +\infty]$ una función que verifica:

(4) $\varphi \not\equiv \infty$.

(5) $\lim_{||x|| \to \infty} \varphi(x) = +\infty$. (Sin hipótesis si C está acotado).

(6) $\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y),\ x, y \in C,\ t \in (0,1)$ *(Convexa).*

(7) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ *el conjunto* $\Lambda_{\varphi\leq\lambda} = \{x \in C \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$ *es cerrado en la topología fuerte (Semicontinua inferiormente).*

Entonces φ *alcanza su mínimo en* C*. Es decir,*

$$\exists x_0 \in C \text{ tal que } \varphi(x_0) = \min_{x\in C} \varphi(x)$$

Demostración. Tomando $c \in C$ tal que $\varphi(c) < \infty$ definimos

$$\tilde{C} = \{x \in C \mid \varphi(x) \leq \varphi(c)\}.$$

$\tilde{C}$ es cerrado (por (7)), convexo (por (6)), y acotado (por (5) o trivialmente si C lo está). Por tanto, según el corolario 1.5.8, $\tilde{C}$ es compacto en $\sigma(E, E^*)$.

Nuevamente por (6) y (7) tenemos que el conjunto $\Lambda_{\varphi\leq\lambda}$ es convexo y cerrado en la topología fuerte, y por tanto es cerrado (utilizando la proposición 1.5.5) en $\sigma(E, E^*)$ (φ es semicontinua inferiormente para la topología $\sigma(E, E^*)$).

Se sigue que φ alcanza su mínimo en el compacto $\tilde{C}$ (ver nota 6), es decir, existe $x_0 \in \tilde{C}$ tal que $\varphi(x_0) \leq \varphi(x)\ \forall x \in \tilde{C}$. Pero como para cada $x \in C - \tilde{C}$ es $\varphi(x_0) \leq \varphi(c) < \varphi(x)$ el teorema queda demostrado. □

Nota 6. Hemos usado una propiedad básica de las funciones semicontinuas inferiormente: Si $\varphi : \tilde{C} \to (-\infty, +\infty]$ es una función semicontinua inferiormente y $\tilde{C}$ es compacto entonces φ alcanza su mínimo en $\tilde{C}$. Para demostrarlo basta suponer que φ no alcanza el mínimo, en cuyo caso $\forall x \in \tilde{C}$ existe $\varepsilon(x) > 0$ que verifica $\inf_{x\in\tilde{C}} \varphi < \varphi(x) - \varepsilon(x)$. Por ser φ semicontinua inferiormente existe un entorno N_x de x tal que $\varphi(x) - \varepsilon(x) < \varphi(y)\ \forall y \in N_x$. Como $(N_x)_{x\in\tilde{C}}$ es un cubrimiento por abiertos de $\tilde{C}$ existen $N_{x_1}, ..., N_{x_n}$ tales que

$$\tilde{C} \subset N_{x_1} \cup ... \cup N_{x_n}.$$

Pero $\inf_{x\in\tilde{C}} \varphi < \min_{k=1,...,n}\{\varphi(x_k) - \varepsilon(x_k)\}$ y además $\forall y \in \tilde{C}\ y \in N_{x_k}$ para algún k, es decir, $\min_{k=1,...,n}\{\varphi(x_k) - \varepsilon(x_k)\} \leq \varphi(x_k) - \varepsilon(x_k) < \varphi(y)$, i.e. $\min_{k=1,...,n}\{\varphi(x_k) - \varepsilon(x_k)\} \leq \inf_{x\in\tilde{C}} \varphi$, lo cual es una contradicción.

Nota 7. En las hipótesis del teorema 1.5.9 se ha supuesto que (2) y (7) se verifican en la topología fuerte para después demostrar que lo hacen en la topología débil. Se trata de hipótesis más débiles y por tanto más fáciles de cumplir. Que un conjunto sea cerrado en la topología fuerte es en general *más fácil* que que lo sea en la topología débil, ya que en dimensión infinita, como hemos visto en la proposición 1.3.5, $\sigma(E, E^*) \subsetneq \tau$.

A continuación damos una condición suficiente para que un espacio de Banach sea reflexivo, la de ser *uniformemente convexo*, que definimos a continuación. El resultado es el teorema de Milman-Pettis.

Definición 1.5.3. Un espacio de Banach E es uniformemente convexo si verifica

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si $x, y \in E$ verifican

$$||x||, ||y|| \leq 1,\ ||x - y|| > \varepsilon,$$

entonces

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Teorema 1.5.10. ***(Milman-Pettis)*** *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo.*

Demostración. Queremos ver que J es sobreyectiva, donde J es la inyección canónica (definición 1.5.1), lo que equivale a ver que si $\xi \in E^{**}$ con $||\xi|| = 1$ entonces $\xi \in J(B_E)$ (dado que J es lineal).

$J(B_E)$ es cerrado fuerte en E^{**}, ya que si se considera una sucesión $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} = (J(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{E^{**}}$ tal que $(\eta_n) \to \eta$, dado que J es una isometría, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_E$ es de Cauchy, y por tanto $x_n \to x \in B_E$. De la continuidad de J se deduce que efectivamente $J(x) = \eta$, lo que implica que $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $J(B_E)$, i.e $\overline{J(B_E)}^{\tau} = J(B_E)$. Así pues, basta demostrar que

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists x \in B_E \textit{ tal que } ||\xi - J(x)||_{E^{**}} \leq \varepsilon \qquad (\textit{i.e } \xi \in \overline{J(B_E)}^{\tau}). \quad \textbf{(*)}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ considérese el δ tal que si $||x||, ||y|| \leq 1$ y $||x-y|| > \varepsilon$ entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta$. Dado que $||\xi|| = 1 = \sup_{||f||=1} |\xi(f)|$ podemos tomar $f \in E^*$ tal que $||f|| = 1$ y $\xi(f) > 1 - \frac{\delta}{2}$ **(**)**.

Consideramos el conjunto

$$V_f^{\delta/2} = \{\eta \in E^{**} \,\big|\, |\eta - \xi(f)| < \delta/2\},$$

que es un entorno de ξ en la topología $\sigma(E^{**}, E^*)$, y como $J(B_E)$ es denso en $B_{E^{**}}$ (en $\sigma(E^{**}, E^*)$) por el lema 1.5.4, se tiene que $V_f^{\delta/2} \cap J(B_E) \neq \emptyset$. Es decir, $\exists x \in B_E$ tal que $J(x) \in V_f^{\delta/2}$. Probaremos que x verifica **(*)** por reducción al absurdo:

Supongamos lo contrario, que $||\xi - J(x)|| > \varepsilon$. Esto equivale a decir que $\xi \notin B_{J(x)}(\varepsilon)$, donde $B_{J(x)}(\varepsilon)$ es la bola cerrada centrada en $J(x)$ de radio ε. $B_{J(x)}(\varepsilon)$ es cerrado en $\sigma(E^{**}, E^*)$, lo que se sigue del teorema 1.5.1 (Banach-Alaoglu-Bourbaki), teniendo en cuenta que $\sigma(E^{**}, E^*)$ es Hausdorff, y por tanto todo conjunto compacto es cerrado. Además $B_{J(x)}(\varepsilon)$ es compacta.

Si llamamos W al complementario de $B_{J(x)}(\varepsilon)$ en E^{**} entonces W es abierto y por tanto un entorno de ξ en $\sigma(E^{**}, E^*)$. Así pues $W \cap V_f^{\delta/2} \cap J(B_E) \neq \emptyset$.

Es decir, existe $y \in B_E$ tal que $J(y) \in V_f^{\delta/2} \cap W$. Del hecho de que tanto $J(x)$ como $J(y)$ pertenecen a $V_f^{\delta/2}$, tenemos que

$$|f(x) - \xi(f)| < \delta/2 \quad y \quad |f(y) - \xi(f)| < \delta/2.$$

(Nótese que $J(x) \in V_f^{\delta/2}$ equivale a $|J(x) - \xi(f)| < \delta/2$, que a su vez equivale a $|f(x) - \xi(f)| < \delta/2$ y análogamente para y).

Reescribiendo las desigualdades como

$$-\delta/2 < f(x) - \xi(f) < \delta/2,$$

$$-\delta/2 < f(y) - \xi(f) < \delta/2,$$

obtenemos $2\xi(f) < f(x+y) + \delta \leq ||x+y|| + \delta$ (Ya que $||f|| = 1$). Por la elección de f inicial tenemos además que $\xi(f) > 1 - \frac{\delta}{2}$ **(**)** , lo que prueba:

$$\|x+y\| > 2 + 2\delta \quad i.e.$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| > 1 + \delta.$$

Esto significa, dado que E es uniformemente convexo y de la elección de δ, que $||x-y|| \leq \varepsilon$, lo cual es absurdo porque $J(y) \in W$ i.e. $J(y) \notin B_{J(x)}(\varepsilon)$ i.e. $||x-y|| > \varepsilon$.

□

Nota 8. Un espacio es reflexivo independientemente de la norma equivalente que se le asigne, sin embargo, que el espacio sea uniformemente convexo depende de la norma elegida, incluso aunque las normas elegidas sean equivalentes. El ejemplo más elemental es el de $\mathbb{R}^2$, que es uniformemente convexo si se toma la norma $||\cdot||_2$, pero no lo es si se toma la norma $||\cdot||_1$, siendo ambas normas equivalentes.

Teorema 1.5.11. *Un espacio de Banach E es reflexivo si y sólo si E^* lo es.*

Demostración. Supongamos primero que E es reflexivo. Entonces $J : E \longrightarrow E^{**}$ es una isometría biyectiva (definición 1.5.1). Queremos demostrar que la inyección canónica $J^* : E^* \to E^{***}$ es sobreyectiva. Sea $\varphi \in E^{***}$. La aplicación

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \varphi(J(x))$$

verifica $f \in E^*$ por las propiedades de J^*, y aplicando las definiciones correspondientes tenemos:

$$f(x) = \varphi(J(x)) = J(x)(f).$$

De la sobreyectividad de J deducimos que $\{J(x) \mid x \in E\} = E^{**}$, de donde podemos definir:

$$\varphi(\xi) = \xi(f) \qquad \forall \xi \in E^{**},$$

que significa que la inyección canónica J^* es sobreyectiva con $(J^*)^{-1}(\varphi) = f$.

La otra implicación se demuestra como corolario de ésta. Partimos del hecho de que E^* es reflexivo, de modo que, como acabamos de ver, E^{**} es reflexivo. J es una isometría, de modo que $J(E)$ es cerrado fuerte en E^{**}. Por la proposición 1.5.6 tenemos que $J(E)$ es reflexivo, y como $E = J(E)$, E es reflexivo.

□

Corolario 1.5.12. *Un espacio de Banach E es reflexivo y separable si y sólo si E^* es reflexivo y separable.*

Demostración. Si E^* es reflexivo y separable entonces claramente E es reflexivo y separable (teoremas 1.5.11 y B.3.2). Por otra parte, si E es reflexivo y separable entonces, como $E^{**} = E$, E^{**} es reflexivo y separable, de modo que la implicación $\Leftarrow$ prueba que E^* es reflexivo y separable. □

Teorema 1.5.13. *Sea E un espacio de Banach tal que E^* es separable. Entonces B_E es metrizable en la topología débil $\sigma(E, E^*)$.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso fuerte en B_{E^*} (que es separable por la proposición B.3.1). Para cada $x \in E$ definimos

$$|||x||| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x)|.$$

Claramente $|||\cdot|||$ es una norma en E y además

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f_n\|_{E^*} \|x\|_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|x\|_E = \|x\|_E .$$

Naturalmente, para $|||\cdot|||$ la métrica correspondiente es $d(x,y) := |||x-y|||$. Esta métrica genera una topología $\mathcal{T}$, y el objetivo es mostrar que la topología inducida por $\mathcal{T}$ en B_E es equivalente a la inducida por $\sigma(E,E^*)$. Probaremos por tanto que (i) $\sigma(E,E^*)_{|B_E} \subset \mathcal{T}_{|B_E}$ y que (ii) $\mathcal{T}_{|B_E} \subset \sigma(E,E^*)_{|B_E}$, aplicando el criterio de Hausdorff (ver [4, Teorema 4.8, pág 35]).

(i) Sea $x_0 \in B_E$ y V un entorno débil de x_0. Debemos encontrar $r > 0$ tal que

$$U := \{x \in B_E \,\big|\, d(x,x_0) < r\} \subset V.$$

Como de costumbre, por la proposición 1.3.3, suponemos que $V = V^{\varepsilon}_{g_1,\dots,g_k} = \{x \in B_E \,\big|\, |g_i(x-x_0)| < \varepsilon \ \forall i = 1,\dots,k\}$ con $\varepsilon > 0$ y $g_1,\dots,g_k \in E^*$ y suponemos sin pérdida de generalidad que $g_i \in B_{E^*}$ $\forall i = 1,\dots,k$. Dado que el conjunto $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso para cada i existe un n_i tal que

$$\|g_i - f_{n_i}\|_{E^*} < \frac{\varepsilon}{4},$$

y podemos escoger $r > 0$ tal que

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i = 1,\dots,k.$$

Así, si $d(x,x_0) < r$, i.e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x-x_0) < r$,

$$\frac{1}{2^{n_i}}|f_{n_i}(x-x_0)| < r \quad \forall i = 1,\dots,k.$$

De modo que para cada $i = 1,\dots,k$

$$|g_i(x-x_0)| = |g_i - f_{n_i}(x-x_0) + f_{n_i}(x-x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

y concluimos que $x \in V$ y para dicho r $U \subset V$.

(ii) Sea $x_0 \in B_{E^*}$. Dado $r > 0$ debemos encontrar un entorno V débil de x_0 tal que

$$V \subset U := \{x \in B_E \,\big|\, d(x,x_0) < r\}.$$

Es decir, debemos buscar $\varepsilon > 0$ y k elementos de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para los cuales $V = \{x \in B_E \,\big|\, |f_i(x-x_0)| < \varepsilon \ \forall i = 1,\dots,k\} \subset U$. Para algún ε positivo,

$$d(x,x_0) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}|f_n(x-x_0)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f_n(x-x_0)| <$$

$$\varepsilon + 2\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Tómese $\varepsilon = \frac{r}{2}$ y k suficientemente grande tal que $\frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$.

$\square$

Nota 9. Existe un resultado dual al teorema 1.5.13, que asegura que si E es separable entonces B_{E^*} es metrizable en la topología débil* $\sigma(E^*, E)$. La demostración es idéntica, intercambiando E por E^*.

Nota 10. Como con los resultados de compacidad, la metrizabilidad también se extiende a cualquier bola cerrada mediante la misma aplicación T del corolario 1.5.7. Se trata de un resultado básico de topología que puede encontrarse en [4, Corolario 23.2, pág. 163], y se requiere que el espacio sea $T2$ (ya demostrado en las proposiciones 1.3.2 y 1.4.2) y que además la bola sea compacta (también demostrado en los teoremas 1.5.1 y 1.5.3).

Concluímos con dos resultados de convergencia débil en el que aplicamos toda la teoría expuesta a lo largo del capítulo.

Corolario 1.5.14. *Sea E un espacio de Banach separable y (f_n) una sucesión acotada en E^*. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) de (f_n) tal que $f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f$ (converge en la topología débil* $\sigma(E^*, E)$).*

Demostración. $(f_n) \subset B_0(\lambda)$ para algún λ positivo. El conjunto $B_0(\lambda)$ es compacto en $\sigma(E^*, E)$ (teorema 1.5.1) y metrizable (ver notas 9 y 10), por lo que aplicando la teoría de espacios métricos (ver [8, Teorema 6.17, pág. 100]) concluimos que tiene una subsucesión convergente. $\square$

Corolario 1.5.15. *Sea E un espacio de Banach reflexivo y $(x_n) \subset E$ una sucesión acotada. Entonces existe una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ (converge débilmente en $\sigma(E, E^*)$).*

Demostración. Llamamos M_0 al espacio generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y definimos $M = \overline{M_0}^{\sigma(E,E^*)}$. En primer lugar M es separable, puesto que podemos considerar el conjunto L denso contable, con L definido como el subespacio sobre $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$) generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. L es contable puesto que puede escribirse como

$$L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n,$$

donde L_n es el subespacio sobre $\mathbb{Q}$ generado por $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$

Además M es reflexivo (teorema 1.5.6), de modo que M^* es también separable y reflexivo (teorema 1.5.12). Como M está acotado, vamos a suponer, por $B_0(m)$, aplicando el teorema 1.5.13 tenemos que $B_0(m)$ es metrizable (ver teorema 1.5.13 y nota 10) y compacta (ver teorema 1.5.3 y corolario 1.5.7).

A partir de aquí basta aplicar nuevamente la teoría de espacios métricos (ver [8, Teorema 6.17, pág. 100]) para concluir que para (x_n) existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ en $\sigma(M, M^*)$. Como ya hemos visto en la demostración de la proposición 1.5.6, la topología $\sigma(M, M^*)$ es la misma que la inducida sobre M por $\sigma(E, E^*)$, de modo que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ en $\sigma(E, E^*)$. $\square$

Nota 11. Obtener una subsucesión convergente es muy útil para después utilizar las propiedades mostradas en el corolario 1.4.4 para obtener otras sucesiones convergentes relativas a elementos del dual.

Capítulo 2

Espacios de Hilbert y los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

En este capítulo tratamos los resultados más relevantes sobre espacios de Hilbert, así como los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram. El resultado de Lax-Milgram se enuncia como corolario del teorema de Stampacchia, y se trata de un un resultado fundamental para demostrar la existencia y unicidad de solución al aplicar el Método Variacional.

2.1. Espacios de Hilbert. Propiedades. Proyecciones

Definición 2.1.1. Sea H un espacio vectorial equipado con un producto escalar $(\cdot,\cdot)$, es decir, una forma bilineal $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ que verifica:

(1) $(u+v,w) = (u,w)+(v,w)$, $(u,v+w) = (u,v)+(u,w)$ y $(\lambda u,v) = (u,\lambda v) = \lambda(u,v)$ $\forall u,v,w \in H$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Lineal en ambas variables).

(2) $(u,v) = (v,u)$ $\forall u,v \in H$ (Simétrica).

(3) $(u,u) > 0$ si $u \neq 0$ y $(0,0) = 0$ (Definida positiva).

Si H con la norma $\|u\| := (u,u)^{1/2}$ (ver proposición 2.1.1) es completo, H es un espacio de Hilbert. En adelante y hasta el fin del capítulo, H denotará espacio de Hilbert con el producto escalar $(\cdot,\cdot)$ y la norma $\|\cdot\|$.

Proposición 2.1.1. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*** *Para todo $u,v \in H$, se tiene*

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2},$$

de donde se sigue que $\|u\| := (u,u)^{1/2}$ es una norma sobre H.

Demostración. Si u ó v son el vector nulo la prueba es trivial. Sea $u \neq 0$ y $v \neq 0$ y $\lambda = \frac{(u,v)}{(v,v)} \in \mathbb{R}$. Entonces

$$0 \leq (u-\lambda v, u-\lambda v) = (u,u) - 2\lambda(u,v) + \lambda^2(v,v) =$$

$$(u,u) - 2\frac{(u,v)}{(v,v)}(u,v) + \frac{(u,v)^2}{(v,v)^2}(v,v) = (u,u) - \frac{(u,v)}{(v,v)}^2,$$

de donde $(u,v)^2 \leq (u,u)(v,v)$. Las propiedades (i) y (ii) de la definición de norma (definición B.1.1) son evidentes. Para demostrar (iii), escribimos la definición de $\|\cdot\|$ y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|u+v\|^2 = (u+v,u+v) = (u,u)+(v,v)+2(u,v) \leq \|u\|^2+\|v\|^2+2\|u\|\,\|v\| =$$

$$(\|u\|+\|v\|)^2.$$

□

Nota 12. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$(f,g) = \int_\Omega fg.$$

Este producto escalar genera evidentemente la norma definida en la sección B.4: $||f||_2 = (f,f)^{1/2} = (\int_\Omega ff)^{1/2} = (\int_\Omega |f|^2)^{1/2}$.

Proposición 2.1.2. ***(Regla del paralelogramo)*** *Para todo u,v en un espacio de Hilbert H,*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}(||u||^2+||v||^2)$$

Demostración.

$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = (u+v,u+v)+(u-v,u-v) = 2((u,u)+(v,v)) =$$

$$2(\|u\|^2+\|v\|^2)$$

□

Proposición 2.1.3. *Todo espacio de Hilbert H es reflexivo.*

Demostración. En virtud del teorema 1.5.10 (teorema de Milman-Pettis), basta demostrar que todo espacio de Hilbert H es uniformemente convexo:

Sea $\varepsilon > 0$ y $u,v \in H$ tales que $||u||,||v|| \leq 1$ y $||u-v|| > \varepsilon$, el objetivo es encontrar $\delta > 0$ para el cual

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Por la regla del paralelogramo tenemos que

$$1 \geq \frac{1}{2}(||u||^2+||v||^2) = \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 > \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \frac{\varepsilon^2}{4},$$

así pues,

$$1-\frac{\varepsilon^2}{4} > \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2.$$

Tómese $\delta = 1-(1-\frac{\varepsilon^2}{4})^{1/2}$. □

Teorema 2.1.4. ***(Teorema de la proyección de Hilbert)***

Sea $C \neq \emptyset$ un subconjunto convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H. Para todo $u \in H$ existe un único *elemento $u_0 \in C$ que verifica*

$$||u - u_0|| = \min_{c \in C} ||u - c||.$$

Además, u_0 es el único elemento que verifica

$$u_0 \in C \ y \ (u - u_0, c - u_0) \leq 0 \quad \forall c \in C.$$

Definición 2.1.2. Al elemento u_0 del teorema de la proyección de Hilbert se le llama proyección de u sobre C y lo denotaremos $P_C(u)$.

Demostración. En primer lugar probamos la **existencia**. H es reflexivo y C es no vacío, cerrado y convexo. Vamos a aplicar el corolario 1.5.9 a la función

$$\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$c \longrightarrow ||u - c||.$$

φ verifica $\lim_{||c|| \to \infty} \varphi(c) = +\infty$ (5) y de la continuidad de la norma se deduce que es continua (luego semicontinua inferiormente (7)). Como $||u - tc_1 - (1-t)c_2|| = ||u - tc_1 - (1-t)c_2 - (1-t)u + (1-t)u|| \leq ||u - tc_1 - (1-t)u|| + ||(1-t)u - (1-t)c_2|| = t||u - c_1|| + (1-t)||u - c_2||$ para $t \in (0,1)$, φ es convexa (6). Esto prueba la existencia de u_0.

Probamos ahora la **equivalencia**. Supongamos que $u_0 \in C$ verifica $\|u - u_0\| = \min_{c \in C} \|u - c\|$. Para $v \in C$ tenemos que, $\forall t \in [0,1]$ $c = (1-t)u_0 + tv \in C$, de modo que

$$\|u - u_0\| \leq \|u - (1-t)u_0 - tv\| = \|u - u_0 - t(v - u_0)\|.$$

Elevando al cuadrado:

$$\|u - u_0\|^2 \leq \|u - u_0\|^2 - 2t(u - u_0, v - u_0) + t^2 \|v - u_0\|^2.$$

De donde, si $t \neq 0$:

$$2(u - u_0, v - u_0) \leq t \|v - u_0\|^2.$$

Tomando el límite cuando $t \to 0$ obtenemos $(u - u_0, v - u_0) \leq 0 \ \forall v \in C$.

Recíprocamente, si $u_0 \in C$ verifica $(u - u_0, c - u_0) \leq 0 \ \forall v \in C$ entonces $\|u_0 - u\|^2 - \|c - u\|^2 = 2(u - u_0, c - u_0) - \|u_0 - c\|^2 \leq 0$. De modo que $\|u - u_0\|^2 \leq \|u - c\|^2 \ \forall c \in C$ y u_0 es el mínimo de φ.

Por último probamos la **unicidad**: Supongamos que $\tilde{u}_0$ y u_0 verifican:

$$(u - \tilde{u}_0, c - \tilde{u}_0) \leq 0 \quad \forall c \in C.$$

$$(u - u_0, c - u_0) \leq 0 \quad \forall c \in C.$$

Tomando $c = u_0$ en la primera desigualdad, $c = \tilde{u}_0$ en la segunda y sumándolas obtenemos $\|\tilde{u}_0 - u_0\| \leq 0$.

$\square$

Proposición 2.1.5. *Para un conjunto convexo cerrado y no vacío C de un espacio de Hilbert H, la proyección P_C verifica*

$$||P_C(u_1) - P_C(u_2)|| \leq ||u_1 - u_2|| \quad \forall u_1, u_2 \in H.$$

Nota 13. Esta proposición afirma que, intuitivamente, la proyección no aumenta las distancias.

Demostración. Tenemos que

$$(u_1 - P_C(u_1), c - P_C(u_1)) \leq 0 \quad \forall v \in C.$$

$$(u_2 - P_C(u_2), c - P_C(u_2)) \leq 0 \quad \forall c \in C.$$

Para demostrar la proposición basta sustituir en $c = P_C(u_2)$ en la primera desigualdad y $c = P_C(u_1)$ en la segunda, obteniendo

$$(u_1 - P_C(u_1), P_C(u_2) - P_C(u_1)) + (u_2 - P_C(u_1), P_C(u_1) - P_C(u_2)) \leq 0,$$

y por tanto

$$\|P_C(u_1) - P_C(u_2)\|^2 \leq (u_1 - u_2, P_C(u_1) - P_C(u_2)).$$

De donde se obtiene la desigualdad deseada utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz. □

Corolario 2.1.6. *Si $M \subset H$ es un* subespacio *cerrado de H, la proyección de u $u_0 = P_M(u)$ está caracterizada por ser* el *elemento u_0 que verifica*

$$u_0 \in M \text{ } y \text{ } (u - u_0, m) = 0 \text{ } \forall m \in M.$$

Definición 2.1.3. La aplicación P_M del corolario anterior es un operador lineal y se le llama proyección ortogonal sobre M.

Nota 14. El corolario anterior puede verse como la generalización del conocido resultado en dimensión 3 que asegura que la distancia de un punto a un plano puede encontrarse trazando la recta *perpendicular* al plano que pasa por el punto. Nótese que la distancia de un punto u a, en general, un conjunto C, es precisamente $\inf_{c \in C} ||u - c||$ (como dicta el teorema 2.1.4).

Demostración. De la definición 2.1.4 tenemos que

$$(u - u_0, m - u_0) \leq 0 \quad \forall m \in M,$$

y por tanto $(u - u_0, rm - u_0) \leq 0 \ \forall r \in \mathbb{R}$, de modo que $(u - u_0, rm) \leq (u - u_0, u_0) \ \forall r \in \mathbb{R}$, de donde obtenemos que necesariamente $(u - u_0, m) = 0$.

La implicación recíproca es evidente, puesto que $m - u_0 \in M \ \forall m \in M$. □

2.2. Dual de un espacio de Hilbert. El teorema de representación de Riesz-Fréchet

Queremos estudiar ahora el dual de un espacio de Hilbert H. En primer lugar nótese que pueden escribirse funcionales lineales continuos en H simplemente tomando cualquier elemento $v \in H$ y escribiendo

$$f_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow (v, u).$$

Lo que demuestra el teorema de representación de Riesz-Fréchet para espacios de Hilbert es que, de hecho, todos los funcionales de H^* son de esta forma. Se trata de un resultado fundamental, pues permite identificar H con su dual H^* mediante un isomorfismo isométrico y decir que $H^* = H$.

Teorema 2.2.1. ***(Teorema de representación de Riesz-Fréchet)***

Para todo $f \in H^*$ existe un único v en H que verifica

$$f(u) = (v, u) \qquad \forall u \in H,$$

y además

$$||f||_{H^*} = ||v||_H.$$

Demostración. Consideramos la aplicación T, definida como

$$T : H \longrightarrow H^*$$

$$v \longrightarrow T_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow (v, u)$$

que es lineal e inyectiva. Como $T_v(u) = (v, u)$, $\|T_v\|_{H^*} = \sup_{u \in H} \frac{T_v(u)}{\|u\|} \leq \sup_{u \in H} \frac{\|v\|\|u\|}{\|u\|} = \|v\|_H$. Además, si $u = v$ tenemos $\frac{T_v(v)}{\|v\|} = \frac{(v,v)}{\|v\|} = \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \|v\|_H$, por lo que $\|T_v\|_{H^*} = \|v\|_H$. Es decir, $T : H \to T(H)$ es una isometría lineal biyectiva. $T(H)$ es cerrado, como ya hemos visto, pues es imagen isométrica del espacio completo H.

Lo que queda por demostrar es que $T(H)$ es denso en H^*. Para probarlo basta ver que todo funcional continuo $h : H^* \to \mathbb{R}$ (i.e. $h \in H^{**}$) que se anula en $T(H)$ es el funcional nulo en H^{**} (ver corolario B.2.5). Sea $h \in H^{**}$ tal que $h(T(v)) = 0\ \forall v \in H$. Entonces, como H es reflexivo ($H = H^{**}$, usamos h para referirnos a $J(h)$) tenemos que $h(T(v)) = T_v(h) = 0\ \forall v \in H$. Se sigue que $(v, h) = 0\ \forall v \in H$, i.e. $h = 0$.

□

Nota 15. Este capítulo sigue un esquema que basa sus resultados en la reflexividad de H. Tanto la demostración dada para el teorema 2.2.1 como la dada para el teorema 2.1.4 requieren conocer que H es reflexivo. Es posible dar una demostración más elemental que evita usar la reflexividad como argumento en ambos casos. La reflexividad se tendría en tal caso como corolario inmediato del teorema 2.2.1. Puede consultarse en [10, Capítulo 1].

2.3. Los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram

Los teoremas de Stampacchia y Lax-Milgram son resultados del Análisis Funcional que permiten dar una *representación* para una forma bilineal en un espacio de Hilbert. Como se verá en el capítulo 4, serán nuestras herramientas para demostrar la existencia y unicidad de solución al aplicar el método variacional.

Teorema 2.3.1. ***(Stampacchia)***

Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que verifica:

(1) $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $|a(u,v)| \leq C||u||||v||$ $\forall u, v \in H$. *(Continua)*

(2) $\exists \alpha \ \in \mathbb{R}^+$ tal que $a(u,u) \geq \alpha ||u||^2$. *(Coercitiva)*

Si $C \subset H$ es un conjunto no vacío cerrado y convexo, para todo $f \in H^*$, existe un único elemento $v \in C$ que verifica:

$$a(v, u-v) \geq f(u-v) \quad \forall u \in C. \qquad (^*)$$

*Y si además a es **simétrica** entonces el elemento v está caracterizado por ser el mínimo de la función $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u)$. Es decir, v verifica:*

$$\frac{1}{2}a(v,v) - f(v) = \min_{u \in C} \{\frac{1}{2}a(u,u) - f(u)\}. \qquad (^{**})$$

Para probar la existencia y la unicidad del elemento v usaremos el teorema del punto fijo de Banach, (obsérvese la importancia de la completitud):

Lema 2.3.2. ***(Teorema del punto fijo de Banach)*** *Si $X \neq \emptyset$ es un espacio métrico completo y existe $k < 1$ tal que $S : X \to X$ es una aplicación que verifica:*

$$d(S(v_1), S(v_2)) \leq k d(v_1, v_2) \qquad \forall v_1, v_2 \in X.$$

(Contracción estricta). Entonces S tiene un único punto fijo v. (i.e $\exists!$ v que verifica $S(v) = v$).

Demostración. La unicidad de v es evidente, ya que si $\tilde{v}$ y v son dos puntos fijos de S tenemos que

$$d(S(\tilde{v}), S(v)) = d(\tilde{v}, v) \leq k d(\tilde{v}, v),$$

con $k < 1$ y por tanto $d(\tilde{v}, v) = 0$, i.e. $v = \tilde{v}$.

Para demostrar la existencia de v tomamos cualquier $u_0 \in X$ y definimos la sucesión $u_{n+1} := S(u_n)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, para la cual obtenemos por inducción que

$$d(u_{n+1}, u_n) \leq k^n d(S(u_0), u_0).$$

Además, si $n \in \mathbb{N}$ y $m \geq 1$ tenemos que

$$d(u_{n+m}, u_n) \leq d(u_{n+m}, u_{n+m-1}) + \ldots + d(u_{n+1}, u_n) \leq$$
$$(k^{n+m-1} + \ldots + k^n) d(S(u_0), u_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(S(u_0), u_0).$$

La sucesión (u_n) es de Cauchy y por tanto tiene límite $v \in X$. De la continuidad de S tenemos que $S(v) = \lim_{n\to\infty} S(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = v$, con lo que v es el punto fijo de S. $\square$

Demostración. **(Teorema 2.3.1)** Procedemos por tanto con la prueba de la existencia del elemento v. Fijado $v \in H$ se tiene que

$$a_v : H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow a(v, u)$$

es continuo y lineal, lo que nos permite aplicar el teorema de representación de Riesz-Fréchet (teorema 2.2.1) para afirmar que existe un único elemento en H, que denotaremos $A(v)$, tal que $a(v, u) = (A(v), u)\ \forall u \in H$. Para cada $v \in H$ la aplicación A es un operador lineal de H en H que verifica:

(i) $||Av|| \leq C||v|| \quad \forall v \in H$. (Dado que, de (1), $||Av|| = (Av, Av)^{1/2} = a(v, Av)^{1/2} \leq C^{1/2}||v||^{1/2}||Av||^{1/2}$).

(ii) $(Av, v) \geq \alpha||v||^2$. (Dado que, de (2), $(Av, v) = a(v, v) \geq \alpha||v||^2$).

Sabemos además, de nuevo por el teorema 2.2.1, que existe un elemento $w \in H$ tal que $f(u) = (w, u)\ \forall u \in H$. Todo esto nos permite afirmar que encontrar v que verifique **(*)** *equivale* a encontrar v que verifique:

$$(Av, u - v) \geq (w, u - v) \qquad \forall u \in C.$$

Que a su vez *equivale* a encontrar v que verifique:

$$(\rho w - \rho Av + v - v, u - v) \leq 0 \qquad \forall u \in C.$$

(Donde $\rho \in \mathbb{R}^+$ y será determinado después. Nótese que $(w - Av, u - v) \leq 0$ *es equivalente* a $\rho(w - Av, u - v) = (w\rho - Av\rho, u - v) \leq 0$ siempre que ρ sea positivo, y esto último *equivalente* a $(w\rho - Av\rho + v - v, u - v) \leq 0$).

Obsérvese ahora que esta última desigualdad define a v como la proyección del elemento $\rho w - \rho Av + v$ para algún $\rho \in \mathbb{R}^+$ (teorema 2.1.4), es decir:

$$v = P_C(\rho w - \rho Av + v).$$

Para ver que tal v existe consideramos la aplicación

$$S : C \longrightarrow C$$

$$u \longrightarrow P_C(\rho w - \rho Au + u).$$

El elemento buscado v es por tanto un punto fijo de la aplicación S, demostrar su existencia y unicidad se reduce ahora a comprobar que S verifica las condiciones del teorema del punto fijo de Banach (lema 2.3.2). C es completo puesto que es cerrado en un espacio completo. Veamos por tanto que la correcta elección de ρ garantiza que S sea una contracción estricta.

De la proposición 2.1.5 tenemos que

$$||S(u_1) - S(u_2)|| \leq ||(u_1 - u_2) - \rho(Au_1 - Au_2)||.$$

Desarrollando la expresión a la derecha en términos del producto escalar tenemos:

$$||(u_1 - u_2) - \rho(Au_1 - Au_2)||^2 = (u_1 - u_2 + \rho(Au_2 - Au_1), u_1 - u_2 + \rho(Au_2 - Au_1)) =$$

$$(u_1-u_2,u_1-u_2)+(\rho(Au_2-Au_1),u_1-u_2)+(u_1-u_2,\rho(Au_2-Au_1))+(\rho(Au_2-Au_1),\rho(Au_2-Au_1)) =$$
$$||u_1-u_2||^2+\rho^2||Au_2-Au_1||^2+2\rho(Au_2-Au_1,u_1-u_2) =$$
$$||u_1-u_2||^2+\rho^2||A(u_2-u_1)||^2-2\rho(A(u_2-u_1),u_2-u_1) \leq$$
$$||u_1-u_2||^2+\rho^2C^2||u_2-u_1||^2-2\rho\alpha||u_1-u_2||^2 =$$
$$||u_1-u_2||^2(1-2\rho\alpha+\rho^2C)$$

(Esta última desigualdad debida a (i) y a (ii)).

Es decir,

$$||S(u_1)-S(u_2)|| \leq ||u_1-u_2||^2(1-2\rho\alpha+\rho^2C).$$

Así pues, si se toma ρ de manera que $0<\rho<\frac{2\alpha}{C^2}$ se tiene que S es una contraccion estricta con $k=(1-2\rho\alpha+\rho^2C)^{1/2}<1$ y la existencia y unicidad de v quedan probadas.

Supongamos ahora que además a es además **simétrica**. En este caso a define un nuevo producto escalar en H, y de las propiedades de a *(1)* y *(2)* se tiene que $0 \leq \alpha||u|| \leq |a(u,u)|^{1/2} \leq C||u|| \ \forall u \in H$, de modo que las normas $||\cdot||$ y la generada por a, que denotamos $||\cdot||_a$, son equivalentes.

Esto implica que H es completo con la nueva norma $||\cdot||_a$ (i.e H con a es un espacio de Hilbert), de modo que podemos aplicar nuevamente el teorema 2.2.1 para representar el funcional f utilizando el producto escalar $a(\cdot,\cdot)$. Es decir, existe un único elemento $g \in H$ que verifica:

$$f(u)=a(g,u) \ \forall u \in H.$$

De esta manera, la desigualdad **(*)** es *equivalente* a la desigualdad

$$a(v,u-v) \geq a(g,u-v),$$

i.e:

$$a(g-v,u-v) \leq 0 \qquad \forall u \in C.$$

Donde v es precisamente, tal y como prueba el teorema 2.1.4, la proyección de g sobre C. Es decir, v es el único elemento que verifica

$$a(g-v,g-v)^{1/2} = \min_{u\in C}(g-u,g-u)^{1/2} = \min_{u\in C}||g-u||_a.$$

Es decir, v minimiza la función

$$\tilde{F}: C \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow a(g-u,g-u).$$

Donde $a(g-u,g-u)=a(u,u)-2a(g,u)+a(g,g)=a(u,u)-2f(u)+a(g,g)$. Luego minimizar $\tilde{F}$ es *equivalente* a minimizar

$$\tilde{F}: C \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \frac{1}{2}a(u,u)-f(u).$$

□

Corolario 2.3.3. ***(Teorema de Lax-Milgram)***

Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal que verifica:

(1) $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $|a(u,v)| \leq C||u||||v||\ \forall u,v \in H$. (Continua)

(2) $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $a(u,u) \geq \alpha||u||^2 \quad \forall u \in H$. (Coercitiva)

Entonces, para todo $f \in H^*$, existe un único elemento $v \in H$ que verifica:

$$a(v,u) = f(u) \quad \forall u \in H. \qquad \text{(*)}$$

*Y si además a es **simétrica** entonces el elemento v está caracterizado por ser el mínimo de la función $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u)$. Es decir, v verifica:*

$$\frac{1}{2}a(v,v) - f(v) = \min_{u \in H}\{\frac{1}{2}a(u,u) - f(u)\}. \qquad \text{(**)}$$

Demostración. Basta considerar $C = H$ en el teorema de Stampacchia, en cuyo caso tenemos que $\forall f \in H^*$ existe un único $v \in H$ que verifica

$$a(v,u-v) \geq f(u-v) \qquad \forall u \in H.$$

Y por tanto $\forall t \in \mathbb{R}\ a(v,tu-v) \geq f(tu-v)$. O equivalentemente,

$$ta(v,u) - a(v,v) \geq f(tu-v).$$

i.e.

$$t(a(v,u) - f(u)) \geq a(v,v) - f(v) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in H.$$

Y argumentamos de la misma manera que en la demostración de la proposición 2.1.6: necesariamente $a(v,u) - f(u) = 0$, puesto que si suponemos lo contrario, i.e. $\exists\ u \in H$ *t.q.* $a(v,u) - f(u) = k \neq 0$, entonces basta hacer t tender a $+\infty$ ó a $-\infty$ y ver que se contradice la desigualdad anterior.

$\square$

Nota 16. En el **cálculo de variaciones**, se dice que **(*)** del teorema de Lax-Milgram es la ecuación de Euler asociada al problema de minimización **(**)**. Podemos ver el elemento v como aquel que verifica $F'(v) = 0$, donde $F(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - f(u)$ (v es el mínimo de F).

Capítulo 3

Espacios de Sóbolev

En el tema anterior nos hemos encargado de las herramientas para probar la existencia y unicidad de solución, que constituye el paso (3) del método variacional (ver esquema dado en la sección 4.1). Para aplicar estos teoremas necesitamos trabajar en un espacio de funciones adecuado. Estos espacios son precisamente los espacios de Sóbolev. Dedicamos este capítulo a estudiarlos en profundidad. Los espacios de Sóbolev son de gran utilidad en la búsqueda de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales.

En primer lugar se introducen los espacios de Sóbolev en una dimensión (sección 3.1), y en N dimensiones (sección 3.2). Ambas secciones comparten el mismo esquema general, dando las propiedades básicas de estos espacios así como de las derivadas débiles para cada caso. El lector advertirá rápidamente los problemas que surgen al generalizar a N dimensiones los resultados de la primera sección, principalmente patentes en las subsecciones 3.2.3, 3.2.4 y 4.3.2. Introducir este vasto tema comenzando con intervalos en $\mathbb{R}$ permite abordarlo de una manera mucho más simple e introducir el método variacional aplicándolo a ecuaciones diferenciales ordinarias, antes de abordar las ecuaciones en derivadas parciales y sus interminables subíndices.

Los espacios de Sóbolev son espacios de Banach formados por funciones de L^p y su(s) derivada(s), equipados con una norma que es combinación de las normas L^p de dicha función y su(s) derivada(s). Naturalmente, y para que estas derivadas tengan sentido para toda función en L^p, deben entenderse en un sentido *débil* que haremos preciso a continuación.

3.1. Espacios de Sóbolev en una dimensión

En adelante $I \subset \mathbb{R}$ denotará un intervalo abierto (no necesariamente acotado). La clase de espacios de Sóbolev estudiada en esta sección sirve como base para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

3.1.1. El espacio $W^{m,p}(I)$. Propiedades de las derivadas débiles.

Definición 3.1.1. Para un intervalo I abierto, se define el espacio de Sóbolev $W^{1,p}(I)$ como

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) \,\big|\, \exists\; g \in L^p(I)\; t.q \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)\}.$$

Llamamos a φ función test y g es la derivada débil de u. Naturalmente, denotaremos u' a g, que es única por la proposición B.4.2.9.

- Dotamos a $W^{1,p}(I)$ de la norma $||u||_{W^{1,p}(I)} = ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p}$.
- Dotamos a $W^{1,2}(I)$, al que denotamos $H^1(I)$, del producto escalar $(u, v)_{W^{1,2}(I)} = (u, v)_{L^2} + (u', v')_{L^2}$.

Las normas $\|u\|_p + \|u'\|_p$ y $\left(\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p\right)^{1/p}$ son equivalentes.

Nota 17. Esta definición es consistente: Si una función $u \in L^p(I)$ es derivable en el sentido *clásico*, y si $u' \in L^p(I)$, entonces la derivada *clásica* u' coincide con la derivada débil dada en esta definición. Basta integrar por partes (suponemos que $I = (a, b)$): $\int_I u\varphi' = u(b)\varphi(b) - u(a)\varphi(a) - \int_I u'\varphi = -\int_I u'\varphi$, debido a que φ es de soporte compacto. Evidentemente en este caso $u \in W^{1,p}(I)$.

Nota 18. Como **ejemplo** de función que pertenece a $W^{1,p}((-1, 1))$ pero que no es derivable en el sentido usual o clásico, tenemos la función $u(x) = |x|$, que pertenece a $W^{1,p}((-1, 1))\ \forall\ p\ t.q\ 1 \leq p \leq \infty$. La derivada débil es la función g, definida como:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in (0, 1) \\ -1 & si\ x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Nota 19. El ejemplo anterior muestra la derivada débil de una función no derivable (en el sentido usual) en un punto. Intuitivamente podemos decir que la derivada débil *ignora* ese punto. Si consideramos la misma función pero con dominio restringido a $(-1, 0) \cup (0, 1)$, la derivada clásica es, evidentemente, la misma g. Lo cual se entiende fácilmente puesto que un punto es un conjunto de medida cero, y la integral ignora dichos conjuntos. Puede entenderse que f es derivable *en casi todo punto.*

Teorema 3.1.1. *El espacio $W^{1,p}(I)$ verifica:*

(1) Es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

(2) Es reflexivo para $1 < p < \infty$.

(3) Es separable para $1 \leq p < \infty$.

(4) $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ *es un espacio de Hilbert (Separable y reflexivo).*

Demostración. La demostración es idéntica a la del espacio $W^{1,p}(\Omega)$ para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (teorema 3.2.1). El operador a utilizar para demostrar (2) y (3) es $T : W^{1,p}(I) \to L^p(I) \times L^p(I)$.

$\square$

Teorema 3.1.2. *Sea* $u \in W^{1,p}(I)$ *con* $1 \leq p \leq \infty$. *Existe una función* $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ *tal que*

$$u = \tilde{u} \text{ en casi todo punto} \qquad \textbf{(*)}$$

y

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \quad \forall x, y \in \bar{I}. \qquad \textbf{(**)}$$

Nota 20. Este teorema afirma que para un elemento $u \in W^{1,p}(I)$ existe un único (ver nota 39) *representante continuo* en $\bar{I}$. Es decir, en la clase de equivalencia de u existe un único elemento $\tilde{u}$ continuo. También se deduce que, si $u \in W^{1,p}(I)$ y $u' \in C(\bar{I})$ (i.e. hay un representante continuo de u' en $\bar{I}$), entonces existe $\tilde{u}$ representante continuo de u tal que $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ (teorema fundamental del cálculo).

También supone una gran diferencia entre los espacios de Sóbolev en una variable y varias variables. La manera de demostrar a través del método variacional (ver esquema de la sección 4.1) la regularidad de una determinada solución a partir de una cierta hipótesis cambia drásticamente a la hora de abordar ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones en derivadas parciales. Mientras que en el primer caso es prácticamente inmediato a partir de este teorema, como muestra el párrafo anterior, en el segundo caso la cuestión es más delicada (sección 4.3.3).

Demostración. Sea $y_0 \in I = (a, b)$. Definimos $\tilde{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)\ dt$. Tenemos, para toda $\varphi \in C_c^1(I)$,

$$\int_I \tilde{u}\varphi' =$$

$$\int_I \int_{y_0}^x u'(t)dt\ \varphi'(x)dx = -\int_a^{y_0}\int_x^{y_0} u'(t)\varphi'(x)\ dtdx + \int_{y_0}^b \int_{y_0}^x u'(t)\varphi'(x)\ dtdx.$$

Y por el teorema de Fubini se sigue

$$\int_I \tilde{u}\varphi' = -\int_a^{y_0}\int_a^t u'(t)\varphi'(x)\ dxdt + \int_{y_0}^b \int_t^b u'(t)\varphi'(x)\ dxdt.$$

Dado que φ es de soporte compacto, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ y por tanto

$$\int_I \tilde{u}\varphi' = -\int_a^{y_0} u'(t)\varphi(t)dt - \int_{y_0}^b u'(t)\varphi(t) = -\int_I u'(t)\varphi(t)\ dt.$$

Luego $\int_I \tilde{u}\varphi' + \int_I u'\varphi = 0$ i.e. $\int_I (\tilde{u} - u)\varphi' = 0\ \forall \varphi \in C_c^1(I)$. Tenemos por tanto que $u - \tilde{u} = C$ *en casi todo punto* (ver corolario B.4.2.10). Definimos $\tilde{\tilde{u}} := \tilde{u} + C$, que es continua, pertenece a la clase de equivalencia de u y verifica **(**)**. $\square$

A continuación enunciamos un resultado de gran utilidad para trabajar en espacios de Sóbolev. Un elemento $u \in W^{1,p}(I)$ extendido como $\overline{u}$ a $\mathbb{R}$ para ser cero en el complementario de I no pertenece en general a $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Como ciertas construcciones (por ejemplo la convolución) sólo tienen sentido para funciones definidas en todo $\mathbb{R}$, es necesario algún mecanismo que permita extender un elemento $u \in W^{1,p}(I)$ a un elemento $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Es muy útil para demostrar ciertos resultados para $W^{1,p}(I)$. Primero se demuestra para $W^{1,p}(\mathbb{R})$ y después se demuestra gracias a este resultado que se transfiere la propiedad a $W^{1,p}(I)$. Esta sección es introductoria, pretendemos mostrar que para $I \subset \mathbb{R}$ la extensión se hace de manera *elemental* que al generalizar a abiertos en $\mathbb{R}^N$, así que algunos detalles se dejan al lector.

Teorema 3.1.3. ***(Operador de extensión)*** *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Existe un operador lineal continuo $P : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$, que llamaremos operador de extensión, que verifica, $\forall u \in W^{1,p}(I)$:*

(1) $P(u)_{|_I} = u$.

(3) $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{L^p(I)}$.

(3) $\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

Donde C depende sólo de la medida de I.

Demostración. Para un intervalo no acotado la extensión es sencilla. Supongamos sin pérdida de generalidad que $I = (0, \infty)$. Definimos $P(u)(x)$ (por reflexión) como

$$P(u)(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \geq 0 \\ u(-x) & si\ x < 0. \end{cases}$$

Puede comprobarse fácilmente que $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ con

$$P(u)'(x) = \begin{cases} u'(x) & si\ x > 0 \\ -u'(-x) & si\ x < 0. \end{cases}$$

Además $\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq 2 \|u\|_{W^{1,p}(I)}$ y $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2 \|u\|_{L^p(I)}$. Consideramos ahora un intervalo *acotado* I. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $I = (0, 1)$ para simplificar los cálculos. Consideramos $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ que verifique

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 1/4 \\ 0 & si\ x > 3/4. \end{cases}$$

La función $\eta\tilde{u}$, donde $\tilde{u}$ es la función

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x) & si\ x \in I \\ 0 & si\ x \geq 1, \end{cases}$$

verifica $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0, \infty)$ con $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\widetilde{u'}$. En efecto, para toda $\varphi \in C_c^1(0, \infty)$,

$$\int_0^\infty \eta\tilde{u}\varphi' =$$

$$\int_I \eta u\varphi' = \int_I u((\eta\varphi)' - \eta'\varphi) = -\int_I u\eta'\varphi - \int_I u'\eta\varphi = -\int_0^\infty (\tilde{u}\eta' + \widetilde{u'}\eta)\varphi.$$

(Puesto que $\eta\varphi \in C_c^1(0, 1)$, y es evidente que $u, (\eta\tilde{u})' \in L^p(0, \infty)$).

Escribimos u como $u = (\eta u) + (1 - \eta)u$, con el objetivo de extender ambos sumandos a $W^{1,p}(\mathbb{R})$. Extendemos ηu a $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$, tal y como acabamos de explicar, con $\|\eta\tilde{u}\|_{W^{1,p}(0,\infty)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ y $\|\tilde{u}\|_{L^p(0,\infty)} \leq C\,\|\eta u\|_{L^p(I)}$, puesto que $\|\eta'\|_{\infty} < \infty$. Después se extiende a $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ por reflexión, como ya hemos explicado. Evidentemente $v_{1_{|I}} = \eta u$.

Extendemos $(1 - \eta)u$ primero a $\tilde{v}_2 \in W^{1,p}(-\infty, 1)$ como 0 fuera de I, lo cual puede hacerse puesto que $1 - \eta(0) = 0$, luego $(1 - \eta)u(0) = 0$, y puede repetirse el proceso mostrado para extender a $(0,\infty)$. Después extendemos $\tilde{v}_2$ por reflexión sobre el punto 1 a $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Puede comprobarse fácilmente que $\|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ y que $\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{L^p(I)}$.

Concluimos la prueba definiendo $P(u) = v_1 + v_2$, que verifica la tesis del teorema.

□

Teorema 3.1.4. ***(Densidad)*** *Sea $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p < \infty$. Existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $u_{n|_I} \to u$ en $W^{1,p}(I)$.*

Demostración. La demostración depende de varios resultados de convolución (ver B.4.2), y es análoga a la del teorema 3.2.2. Consiste en probar el resultado para $\mathbb{R}$ para después generalizarlo a las restricciones. La proposición B.4.2.7 muestra que una función en $L^p(I)$ puede *regularizarse* (hacerse C^{∞}). Después debe hacerse el soporte compacto.

Se toma cualquier función $\xi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$ y

$$\begin{cases} 1 & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 2 \end{cases}$$

y se define la sucesión $(\xi_n(x)) = (\xi(x/n))$. Del teorema de la convergencia dominada tenemos que si $f \in L^p(I)$ entonces $\xi_n f \to f$ en $L^p(I)$ (nótese que $1 \leq p < \infty$). Tomamos ahora una sucesión regularizante (ver B.4.2). Puede comprobarse fácilmente que $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$ converge a u en $W^{1,p}(\mathbb{R})$ y verifica $u_{n_{|I}} \to u$ en $W^{1,p}(I)$.

En efecto, $u_n - u = \xi_n((\rho_n * u) - u) + (\xi_n u - u)$, luego tomando normas tenemos que $\|u_n - u\|_p \to 0$. Por otra parte, por el lema 3.2.4 $u_n' = \xi_n'(\rho_n * u) + \xi_n(\rho_n * u')$, y por tanto

$$\left\|u_n' - u'\right\|_p \leq C/n\,\|u\|_p + \left\|\rho_n * u' - u'\right\|_p + \left\|\xi_n u' - u'\right\|_p \to 0,$$

lo que prueba el resultado. □

Teorema 3.1.5. *Existe una constante C tal que*

$$\|u\|_{L^{\infty}(I)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I) \text{ y } \forall\ 1 \leq p \leq \infty.$$

Es decir, $\forall 1 \leq p \leq \infty$ se tiene $W^{1,p}(I) \subset L^{\infty}(I)$ mediante una inyección continua.

Demostración. Basta probar la acotación para $I = \mathbb{R}$, después, gracias al operador de extensión, se demuestra el resultado para cualquier $I \subset \mathbb{R}$. Primero probaremos el resultado para $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ y argumentaremos por densidad para demostrarlo para cualquier $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Sea $v \in C_c^1(\mathbb{R})$, y definimos $G(v) = |v|^{p-1}v \in C_c^1(\mathbb{R})$ con $(G(v))' = p|v|^{p-1}v'$. Así:

$$|v(x)|^p = G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)\,dt \leq p\left\|v^{p-1}\right\|_{p'}\left\|v'\right\|_p.$$

(Por la desigualdad de Hölder. Téngase en cuenta que $p'(p-1) = p$). Se sigue que $\|v\|_\infty \leq C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ por la desigualdad de Young.

Para demostrar el resultado para cualquier $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ consideramos una sucesión $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R})$ que converge a $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Se tiene para cada n que $\|u_n - u_m\|_\infty \leq C\,\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$, de donde, puesto que (u_n) es convergente en $W^{1,p}(I)$, (u_n) es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R})$ y por tanto converge a $u \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Para cualquier $u \in W^{1,p}(I)$ tenemos, gracias al operador de extensión (teorema 3.1.3), $\|u\|_{L^\infty(I)} = \left\|P(u)_{|I}\right\|_{L^\infty(I)} \leq \|P(u)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\,\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}$. $\square$

Nota 21. *Argumentar por densidad*, como acabamos de hacer, es un proceso estándar que usaremos frecuentemente para demostrar propiedades para espacios de Sóbolev. Utilizar el operador de extensión también es un proceso estándar para demostrar propiedades para espacios de Sóbolev. Este teorema es una aproximación a la sección 3.2.4 (Desigualdades de Sóbolev).

Los siguientes resultados muestran que las derivadas débiles se comportan *bien* para la suma y composición. Omitimos las demostraciones por ser idénticas al caso N dimensional (ver proposiciones 3.2.5 y 3.2.6).

Corolario 3.1.6. ***(Derivada del producto)*** *Sean $u, v \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Se tiene:*

(1) $uv \in W^{1,p}(I)$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$.

(3) $\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \qquad \forall x, y \in \bar{I}$.

Corolario 3.1.7. ***(Derivada de la composición)*** *Sean $g \in C^1(R)$ y $u \in W^{1,p}(I)$ con $1 \leq p \leq \infty$ tal que $g(0) = 0$. Entonces:*

(1) $g \circ u \in W^{1,p}(I)$.

(2) $(g \circ u)' = (g' \circ u)u'$.

Hasta ahora hemos trabajado en el espacio $W^{1,p}(I)$, formado por los elementos de $L^p(I)$ con *una* derivada en $L^p(I)$. Lo que procede ahora es definir el espacio $W^{m,p}(I)$, aquel formado por los elementos de $L^p(I)$ que tienen m derivadas en $L^p(I)$.

Definición 3.1.2. Dado un entero m mayor que 1, definimos, para $1 \leq p \leq \infty$ el espacio $W^{m,p}(I)$ como

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) \,\big|\, u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

i.e $u \in W^{m,p}(I)$ si y sólo si existen m funciones $g_1, g_2, ..., g_m \in L^p(I)$ tales que

$$\int_I u\varphi^{(n)} = (-1)^n \int_I g_n \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

$\forall n = 1, ..., m$.

Evidentemente denotaremos a cada g_n (derivadas débiles) como $g_1 = u', g_2 = u'', ..., g_m = u^{(m)}$.

- Dotamos a $W^{m,p}(I)$ de la norma $||u||_{W^{m,p}(I)} = ||u||_{L^p} + \sum_{n=1}^m ||u^{(n)}||_{L^p}$.

- Dotamos a $W^{m,2}(I)$, que denotamos como H^m, del producto escalar $(u,v)_{W^{m,2}(I)} = (u,v)_{L^2} + \sum_{n=1}^{m}(u^{(n)}, v^{(n)})_{L^2}$.

Teorema 3.1.8. *El espacio $W^{m,p}(I)$ es completo para todo $m \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. Nos remitimos a la demostración del teorema 3.2.8. Se procede exactamente de la misma manera para $u, u', \ldots, u^{(m)}$. □

Nota 22. Es evidente que si $u \in W^{m,p}(I)$ entonces $u \in W^{1,p}(I)$, y que $W^{m,p}(I) \subset \ldots \subset W^{2,p}(I) \subset W^{1,p}(I)$. Por tanto, todas las propiedades vistas para los elementos de $W^{1,p}(I)$ se verifican también para todo $u \in W^{m,p}(I)$ con $m \geq 2$. De hecho, tenemos que para $u \in W^{m,p}(I)$ $u, u', \ldots, u^{(m-1)} \in W^{1,p}(I)$, de donde obtenemos que $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ gracias al teorema 3.1.2.

3.1.2. El espacio $W_0^{1,p}(I)$

Definición 3.1.3. Sea $1 \leq p < \infty$, definimos $W_0^{1,p}(I)$ como

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_c^1(I)}^{W^{1,p}(I)}$$

Equipado con la norma de $W^{1,p}(I)$ ($W_0^{1,2}(I) = H_0^1(I)$ con el producto escalar de $W^{1,2}(I)$) y teniendo en cuenta que es una clausura, es evidente que $W_0^{1,p}(I)$ es un espacio de Banach (de Hilbert para $p = 2$) separable y para $p > 1$ reflexivo (proposiciones B.3.1 y 1.5.6).

Nota 23. Tal y como muestra el teorema 3.1.4, cuando $I = \mathbb{R}$, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

La importancia de $W_0^{1,p}(I)$ se hace patente en el siguiente teorema. Los elementos de $W_0^{1,p}(I)$ son aquellos elementos de $W^{1,p}(I)$ que se anulan en la frontera de I (hay un resultado **similar** para dimensiones mayores, sección 3.2), y las ecuaciones diferenciales (o ecuaciones en derivadas parciales) a menudo vienen acompañadas de condiciones de contorno o frontera. Por supuesto, la frontera de $\mathbb{R}$ es vacía, por lo que la nota 23 es fácilmente comprensible. Naturalmente, y para dar sentido al valor de $u \in W^{1,p}(I)$ en la frontera de I (que es un conjunto de medida 0), tendremos que trabajar con el representante continuo de u. Esto es una diferencia fundamental entre los espacios de Sóbolev en N dimensiones y 1 dimensión. Como ya hemos comentado y veremos más adelante, cuando generalicemos a N dimensiones no siempre será posible encontrar un representante continuo. Por tanto en esta sección es suficiente con supononer que $u \in W_0^{1,p}(I)$, quedando implícito que aquel elemento que se anula en la frontera es *el representante continuo* de u.

Teorema 3.1.9. *Sea $u \in W^{1,p}(I)$. $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u = 0$ en $\partial(I)$.*

Demostración. **(Teorema 3.1.9, $\Rightarrow$)** Sea $u \in W_0^{1,p}(I)$. Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^1(I)$ tal que $u_n \to u \in W^{1,p}(I)$. Es decir, $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$. Por el teorema 3.1.5, se tiene que $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)}$, de donde $u_n \to u$ uniformemente y como consecuencia $u = 0$ en $\partial(I)$. □

Veamos ahora que si $u \in W^{1,p}(I)$ y $u = 0$ en $\partial(I)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$. Utilizaremos el lema siguiente:

Lema 3.1.10. *Si $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$, entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$.*

Demostración. Como u es de soporte compacto podemos extender u a $\mathbb{R}$ como

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in I \\ 0 & x \notin I. \end{cases}$$

Tomamos una sucesión regularizante (ver B.4.2) (η_n), de modo que $\eta_n * \overline{u} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y para n suficientemente grande $sop(\eta_n * \overline{u}) \subset I$. Así, como $\eta_n * \overline{u}$ se anula para en el complementario de I para n suficientemente grande (y por tanto también su derivada), $\|u - \rho_n * u\|_{W^{1,p}(I)} = \|\overline{u} - \rho_n * \overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$, de donde se sigue tomando el límite que $u \in \overline{C_c^1(I)}^{W^{1,p}(I)}$. □

Demostración. (Teorema 3.1.9, $\Leftarrow$) Considérese cualquier $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si\ |t| \leq 1 \\ t & si\ |t| \geq 2. \end{cases}$$

y

$$|G(t)| \leq |t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Y definimos $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$. Por el corolario 3.1.7, $u_n \in W^{1,p}(I)$, y además

$$sop(u_n) \subset \{x \in I \,\big|\, |u(x)| \geq \frac{1}{n}\},$$

dado que $|u(x)| < \frac{1}{n}$ implica que $nu(x) < 1$, luego $G(nu(x)) = 0$. Este conjunto es cerrado (por la definición) y acotado, puesto que o bien I está acotado, o, $u = 0$ en $\partial(I)$ y $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ (para demostrar esto último basta tener en cuenta que existe $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R})$ tal que $\left\|u_{n|_I} - u\right\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$, luego, por el teorema 3.1.5 $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \to 0$).

Queda probado que u_n es de soporte compacto, y utilizando el lema 3.1.10, $u_n \in W_0^{1,p}(I)$.

Por último, por el teorema de la convergencia dominada, $u_n \to u$ en norma $|| \cdot ||_{W^{1,p}(I)}$, con lo que, dado que $W_0^{1,p}(I)$ es cerrado, $u \in W_0^{1,p}(I)$.

□

Nota 24. Vamos a clarificar la obligatoriedad de la hipótesis de que $u = 0$ en ∂I. La hemos usado para mostrar que $sop(u_n) \subset I$. Supongamos que $I = (0, 1)$. Si u no se anulara en la frontera de I, podría ocurrir que $sop(u_n) = [0, 1]$, en cuyo caso $u_n \notin C_c^1(I)$.

Proposición 3.1.11. ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Si I es un intervalo acotado, entonces existe una constante C (dependiente de la medida de I) tal que:*

$$||u||_{W^{1,p}(I)} \leq C||u'||_{L^p(I)} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

(Lo que equivale a decir que las normas $||u||_{W^{1,p}(I)}$ y $||u'||_{L^p(I)}$ son equivalentes para $u \in W_0^{1,p}(I)$).

Demostración. Sea $u \in W_0^{1,p}(I)$, y supongamos que $I = (a, b)$. Entonces, dado que $u(a) = 0$, se tiene que

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t)dt \right| \leq ||u'||_{L^1(I)}.$$

Así pues, $||u||_{L^\infty(I)} \leq ||u'||_{L^1(I)}$, de modo que, por la desigualdad de Hölder:

$$||u||_{L^p(I)} = \left(\int_I |1u|^p \right)^{1/p} \leq (||u^p||_{L^\infty(I)}||1||_{L^1(I)})^{1/p} \leq |I|^{1/p}||u'||_{L^p(I)}.$$

($|I|$ es la medida de I). □

3.2. Espacios de Sóbolev en N dimensiones

A partir de ahora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ será un conjunto abierto conexo. En general también utilizaremos la notación f_{x_i} para referirnos a la derivada parcial (débil o clásica) de f respecto a x_i, ó $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ cuando la primera resulte confusa. La clase de espacios de Sóbolev estudiada en esta sección sirve como base para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

3.2.1. El espacio $W^{m,p}(\Omega)$. Propiedades de las derivadas parciales débiles

Definición 3.2.1. El espacio de Sóbolev $W^{1,p}(\Omega)$ se define como

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \, \big| \, \exists \, g_1, ..., g_N \in L^p(\Omega) \ t.q \int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)\}.$$

De manera análoga al caso 1 dimensional, denotamos u_{x_i} a las derivadas parciales débiles g_i , que son únicas como muestra la proposición B.4.2.9. También definimos el gradiente de ∇u, como

$$\nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_N}) \in L^p(\Omega)^N.$$

- Dotamos a $W^{1,p}(\Omega)$ de la norma $||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||u_{x_i}||_{L^p(\Omega)}$.
- Dotamos a $W^{1,2}(\Omega)$, al que denotamos $H^1(\Omega)$, del producto escalar $(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N (u_{x_i}, v_{x_i})_{L^2(\Omega)}$.

Teorema 3.2.1. $W^{1,p}(\Omega)$ *verifica:*

(1) Es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

(2) Es reflexivo para $1 < p < \infty$.

(3) Es separable para $1 \leq p < \infty$.

(4) $W^{1,2}(\Omega) := H^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert (reflexivo y separable).*

Demostración. (1) Consideramos una sucesión de Cauchy $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Evidentemente $u_n \to u$ y $(u_n)_{x_i} \to g_i \ \forall i$ en norma $|| \cdot ||_{L^p}$. Es necesario que $u_n \to u$ en norma $|| \cdot ||_{W^{1,p}(\Omega)}$, es decir, que $g_i = u_{x_i}$.

Queremos ver que $\int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi \ \forall\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Como para cada n

$$\int_\Omega u_n\varphi_{x_i} = -\int_\Omega (u_n)_{x_i}\varphi \quad \forall\varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Utilizamos la desigualdad de Hölder y tenemos que

$$\left|\int_\Omega (u_n - u)\varphi_{x_i}\right| \leq \int_\Omega |(u_n - u)\varphi_{x_i}| \leq \|u_n - u\|_{L^p} \|\varphi_{x_i}\|_{L^{p'}} \to 0.$$

$$\left|\int_\Omega ((u_n)_{x_i} - g_i)\varphi\right| \leq \int_\Omega |((u_n)_{x_i} - g_i)\varphi| \leq \|(u_n)_{x_i} - g_i\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}} \to 0.$$

De modo que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n\varphi_{x_i} = \int_\Omega u\varphi_{x_i} = -\int_\Omega g_i\varphi = \lim_{n\to\infty} -\int_\Omega (u_n)_{x_i}\varphi.$$

Para demostrar (2) y (3) se considera el operador

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times ... \times L^p(\Omega)$$

$$u \longrightarrow (u, u_{x_1}, ..., u_{x_N})$$

$L^p(\Omega) \times L^p(\Omega) \times ... \times L^p(\Omega)$ es reflexivo y el operador T una isometría inyectiva (ver B.5). Por tanto $T(W^{1,p}(\Omega))$ es cerrado en E, y por la proposición 1.5.6 reflexivo, de modo que $W^{1,p}(\Omega)$ es reflexivo. Se razona análogamente para demostrar que $W^{1,p}(\Omega)$ es separable, utilizando que un subespacio de un espacio separable es separable.

(4) De las propiedades del producto escalar de $L^2(\Omega)$ se deduce trivialmente que $(u, v)_{H^1(\Omega)}$ es un producto escalar y $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

□

Obsérvese la analogía del siguiente teorema con el teorema 3.1.4, y también las diferencias entre ambos.

Definición 3.2.2. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, se dice que un conjunto abierto U está *fuertemente incuído* en Ω (Lo denotamos $U \subset\subset \Omega$) si $\bar{U} \subset \Omega$ y además $\bar{U}$ es compacto.

Teorema 3.2.2. ***(Friedrichs)*** *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que verifica*

$$u_{n|\Omega} \to u \text{ en } L^p(\Omega),$$

y

$$\nabla u_{n|\Omega} \to \nabla u_{|U} \text{ en } L^p(U)^N \quad \forall\ U \subset\subset \Omega.$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ que verifica

$$u_n \to u \text{ en } L^p(U),$$

y

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N)^N.$$

Utilizaremos los siguientes lemas:

Lema 3.2.3. *Sean $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y $\alpha \in C_c^1(\Omega)$. Si definimos la extensión $\overline{f}$ de una función f como*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \mathbb{R}^N - \Omega. \end{cases}$$

Entonces $\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\overline{(\alpha u)}_{x_i} = \overline{\alpha u_{x_i} + \alpha_{x_i} u}$. El lema sigue siendo válido si $\alpha \in C^1(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\nabla\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ y $sop(\alpha) \subset \mathbb{R}^N - \partial\Omega$.

Demostración. Para toda $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tenemos $\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u}\varphi_{x_i} = \int_\Omega \alpha u \varphi_{x_i} = \int_\Omega u((\alpha\varphi)_{x_i} - \alpha_{x_i}\varphi)$. Como $\alpha\varphi \in C_c^1(\Omega)$ tenemos que

$$\int_\Omega u((\alpha\varphi)_{x_i} - \alpha_{x_i}\varphi) = \int_\Omega u_{x_i}(\alpha\varphi) - u\alpha_{x_i}\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (\overline{u_{x_i}\alpha - u\alpha_{x_i}})\varphi.$$

□

Lema 3.2.4. *Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ de soporte compacto y sea $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{con} \quad (\rho * v)_{x_i} = \rho * v_{x_i} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. De la sección B.4.2 sabemos que, para $\hat{\rho}(x) := \rho(-x)$, por el teorema B.4.2.1 $\rho * v \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Además, por la proposición B.4.2.2,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (p * v)\varphi_{x_i} = \int_{\mathbb{R}^N} v(\hat{\rho} * \varphi_{x_i}) = \int_{\mathbb{R}^N} v(\hat{\rho} * \varphi)_{x_i} = -\int_{\mathbb{R}^N} v_{x_i}(\hat{\rho} * \varphi) = -\int_{\mathbb{R}^N} (\rho * v_{x_i})\varphi.$$

□

Demostración. **(Teorema 3.2.2)** Se requieren ciertos resultados básicos de la sección de convolución y regularización (sección B.4.2). Consideramos una sucesión regularizante ρ_n y definimos $v_n = \rho_n * \overline{u}$, donde $\overline{u}$ es la ya conocida extensión nula a $\mathbb{R}^N - \Omega$. Sabemos que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y que además converge a $\overline{u}$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, y queremos ver que $\nabla v_{n|_\omega} \to \nabla u_{|_\omega}$ en $L^p(\omega)^N$ para todo $\omega \subset\subset \Omega$.

Para $\omega \subset\subset \Omega$ consideramos una función $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ que verifique $1 \leq \alpha \leq 1$ tal que $\alpha = 1$ en un entorno de ω (puede hacerse gracias a la hipótesis $\omega \subset\subset \Omega$). Por la definición de ρ_n y la proposición B.4.2.3 tenemos que para n suficientemente grande $\rho_n * (\overline{\alpha u}) = \rho_n * \overline{u}$ en ω. De los lemas 3.2.4 y 3.2.3 tenemos que

$$(\rho_n * \overline{\alpha u})_{x_i} = \rho_n * (\overline{\alpha u_{x_i} + \alpha_{x_i} u}),$$

de donde podemos tomar límite y concluir que

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_n * \overline{\alpha u})_{x_i} = \overline{\alpha u_{x_i} + \alpha_{x_i} u} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Si restringimos a ω teniendo en cuenta que $\alpha = 1$ en ω, para n suficientemente grande obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} (\rho_n * \overline{u})_{x_i} = u_{x_i} \text{ en } L^p(\omega).$$

Si definimos $u_n = v_n\xi_n$, donde $\xi_n = \xi(\frac{x}{n})$ con $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \xi \le 1$ y

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 2. \end{cases}$$

obtenemos que $u_n \to u \in L^p(\Omega)$, $\nabla u_n \to \nabla u$ en $L^p(\omega)^N$ y que $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, basta tomar la sucesión $u_n = \xi_n(\rho_n * u)$. □

Continuamos con los tres resultados esenciales sobre las derivadas débiles en espacios de Sóbolev de dimensión N. El teorema 3.2.2 es clave para demostrarlos. Como para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ no tenemos el teorema 3.1.5, debemos añadirlo como hipótesis. Nótese que de toda sucesión $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ podemos extraer una subsucesión que converge *en casi todo punto* a u.

Proposición 3.2.5. ***(Derivada del producto)*** *Sean $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ con $1 \le p \le \infty$. Entonces $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y*

$$(uv)_{x_i} = u_{x_i}v + uv_{x_i} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. Para u, v existen sucesiones $(u_n), (v_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ que verifican la tesis del teorema 3.2.2 para $1 \le p < \infty$. Observando la construcción de las sucesiones en la demostración de éste tenemos que $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ y $\|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \le \|v\|_{L^\infty(\Omega)}$. Aplicando las reglas de derivación clásicas para u y v:

$$\int_\Omega u_n v_n \varphi_{x_i} = -\int_\Omega ((u_n)_{x_i} v_n + u_n (v_n)_{x_i})\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

El resultado se concluye gracias al teorema de la convergencia dominada, ya que $|u_n v_n \varphi_{x_i}| \le | \|u_n\|_\infty \|v_n\|_\infty \varphi_{x_i}| \le | \|u\|_\infty \|v\|_\infty \varphi_{x_i}|$, que es integrable porque φ es de soporte compacto. Extraemos una subsucesión convergente *en casi todo punto* a $uv\varphi_{x_i}$ (ya que *sop*$(\varphi) \subset\subset \Omega$ por ser compacto) (análogamente para el otro término) y concluimos el resultado.

Para el caso $p = \infty$ tenemos $u, v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, es decir $uv \in L^\infty(\Omega)$ y $w = u_{x_i}v + uv_{x_i} \in L^\infty(\Omega)$. Debemos ver que $(uv)_{x_i} = w$. Para ello tomamos un abierto U *acotado* que verifique *sop*$(\varphi) \subset U \subset \Omega$. En tal caso $u, v \in W^{1,p}(U)$ para todo $1 \le p < \infty$, y del razonamiento anterior podemos escribir

$$\int_\Omega uv\varphi_{x_i} = \int_U uv\varphi_{x_i} = -\int_U w\varphi = -\int_\Omega w\varphi.$$

□

Proposición 3.2.6. ***(Derivada de la composición)*** *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ una función que verifica $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \le M$ $\forall s \in \mathbb{R}$ para $M \in \mathbb{R}$. Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ y*

$$(G \circ u)_{x_i} = (G' \circ u)u_{x_i} \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Demostración. En primer lugar, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que $|G(s)| = |G(s) - G(0)| = |\int_0^s G'(t)dt| \le |\int_0^s M dt| = M|s|$ $\forall s \in \mathbb{R}$, de modo que $|G \circ u| \le M|u|$, y por tanto $G \circ u \in L^p(\Omega)$. También $|(G' \circ u)u_{x_i}| \le M|u_{x_i}|$, luego $(G' \circ u)u_{x_i} \in L^p(\Omega)$.

Para $1 \leq p < \infty$ utilizamos de nuevo el teorema 3.2.2 para conseguir una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con los resultados de convergencia explicados para la cual, de la misma forma que en la proposición anterior,

$$\int_\Omega (G \circ u_n)\varphi_{x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u_n)(u_n)_{x_i}\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Como $G \circ u_n \to G \circ u$ en $L^p(\Omega)$ y $(G' \circ u_n)(u_n)_{x_i} \to (G' \circ u)u_{x_i}$ en $L^p(\omega)$ para cada $\omega \subset\subset \Omega$, por el teorema de la convergencia dominada se sigue que se verifica

$$\int_\Omega (G \circ u)\varphi_{x_i} = -\int_\Omega (G' \circ u)u_{x_i}\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Para el caso $p = \infty$ se considera U abierto con $sop(\varphi) \subset U \subset\subset \Omega$ y se procede como en la demostración de la proposición anterior. □

Proposición 3.2.7. ***(Cambio de variables)*** *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Si $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ y $H : \Omega_2 \to \Omega_1$ es una aplicación biyectiva tal que $y \to x$ con $H \in C^1(\Omega_2)$ y $H^{-1} \in C^1(\Omega_1)$, $H' \in L^\infty(\Omega_2)^{N\times N}$ y $H'^{-1} \in L^\infty(\Omega_1)^{N\times N}$, con H' la matriz jacobiana de H. Entonces:*

(1) $u \circ H \in W^{1,p}(\Omega_2)$.

(2) $\frac{\partial}{\partial y_j}(u(H(y))) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, \dots, N.$

Demostración. Como en las dos proposiciones anteriores se toma la $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ del teorema 3.2.2. En tal caso $u_n \circ H \to u \circ H$ en $L^p(\Omega_2)$ y además

$$((u_n)_{x_i} \circ H)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \to (u_{x_i} \circ H)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \quad en\ L^p(\omega_2)\ \forall \omega_2 \subset\subset \Omega_2.$$

Obtenemos el resultado como en las proposiciones anteriores del hecho de que

$$\int_{\Omega_2} (u_n \circ H)\psi_{y_j}\, dy = \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^n ((u_n)_{x_i} \circ H)\frac{\partial H_i}{\partial y_j}\psi\, dy \qquad \forall \psi \in C_c^1(\Omega_2),\ j = 1, \dots, N.$$

□

Definición 3.2.3. Definimos para $m \geq 2$ $(1 \leq p \leq \infty)$ el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ como

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega) \,\big|\, u_{x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \ \ \forall i = 1, 2, ..., N\}.$$

A partir de ahora utilizaremos frecuentemente la **notación multiíndice**, donde cada derivada parcial se expresará como

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Con $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$ y $|\alpha| \leq m$ y algún $\alpha_i \geq 1$ **(*)**.

Y la definición es equivalente a

$$W^{m,p}(\Omega) =$$
$$\{u \in L^p(\Omega) \,\big|\, \exists\, g_\alpha \in L^p(\Omega)\ t.q. \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\ \forall \alpha\ (*)\}.$$

Donde a cada derivada débil g_α de u la llamamos $D^\alpha u$.

- Dotamos a $W^{m,p}(\Omega)$ de la norma $||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = ||u||_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha\in(*)} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}$.
- Dotamos a $W^{m,2}(\Omega)$, al que denotamos $H^m(\Omega)$, del producto escalar $(u,v)_{W^{m,2}(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha\in(*)} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$.

Teorema 3.2.8. *El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es completo.*

Demostración. Procedemos como en la demostración del teorema 3.2.1, utilizando la notación multiíndice, teniendo en cuenta que $L^p(\Omega)$ es completo, y que si (u_n) es de Cauchy en $W^{m,p}(\Omega)$ lo es cada $(D^\alpha u_n)$ y (u_n), y por tanto convergen en $L^p(\Omega)$. Queda probar que el límite de cualquier $(D^\alpha u_n)$ coincide con $D^\alpha u$, lo que demostramos usando la desigualdad de Hölder como en la demostración del teorema 3.2.1. □

3.2.2. Abiertos de clase C^1 y particiones de la unidad

Lo que procede ahora es dar el resultado para dimensiones mayores que 1 del teorema 3.1.3 (**operador de extensión**). El problema es que mientras que en dimensión 1 un elemento $u \in W^{m,p}(I)$ puede extenderse para cualquier abierto conexo I, en mayores dimensiones se requieren más hipótesis sobre el abierto Ω.

Se dice que este tipo de abiertos son de clase C^1, y para este tipo de abiertos el operador de extensión funciona de la misma manera que en dimensión 1. Antes de abordar la construcción del operador, en esta breve sección damos la definición de abierto y el lema de particiones de la unidad, una herramienta que será fundamental, no sólo para tratar con el operador de extensión, sinó también a la hora de mostrar la regularidad (sección 4.3.2).

Definición 3.2.4. Definimos los siguientes conjuntos, con los que trataremos frecuentemente a partir de ahora:

(1) $R^N_+ = \{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_N > 0\}$.

(2) $Q = \{x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \mid (\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2)^{1/2} < 1 \text{ y } |x_N| < 1\}$.

(3) $Q_+ = R^N_+ \cap Q$.

(4) $Q_0 = \{(x_1, ..., x_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N \mid (\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2)^{1/2} < 1\}$.

Un abierto Ω es de clase C^1 si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U_x de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $H_x : Q \to U_x$ tal que:

(i) $H_x \in C^1(\overline{Q})$.

(ii) $H_x^{-1} \in C^1(\overline{U_x})$.

(iii) $H_x(Q_+) = U_x \cap Q$.

(iv) $H_x(Q_0) = U_x \cap \partial\Omega$.

Nota 25. Está definición afirma intuitivamente que la frontera de Ω es *suave*. A menudo se llama a los abiertos de clase C^1 abiertos con frontera C^1, como en [12]. Las definiciones son equivalentes: la dada aquí afirma que, localmente, existe un difeomorfismo entre el dominio y el *semiplano*; y la dada en [12] afirma que, localmente, el dominio está acotado por el grafo de una función C^1. Los abiertos con *esquinas* están excluídos de la clase C^1.

Es decir, la frontera es localmente difeomorfa en cada punto al segmento abierto Q_0 (ver nota 26). Naturalmente, todo intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ es de clase C^1.

Las particiones de la unidad son un tema clásico de Geometría, el lector puede consultar la demostración en [5, págs 191-197].

Lema 3.2.9. ***(Partición de la unidad)*** *Sea $K \in \mathbb{R}^N$ un conjunto compacto y $U_1, ..., U_k$ un cubrimiento por abiertos de K (i.e $K \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$). Entonces existen $k+1$ funciones $\theta_0, ..., \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ que verifican:*

(1) $0 \leq \theta_i(x) \leq 1 \quad \forall i = 0, 1, ..., k.$

(2) $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1.$

(3) $sop(\theta_i) \subset U_i \quad \forall i = 1, 2, ..., k.$

(4) $sop(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N - C.$

Si además K es la frontera de un conjunto abierto Ω, entonces $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$.

Nota 26. En la siguiente figura podemos ver para $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ intuitivamente la utildad de las particiones de la unidad en combinación con la definición de abierto de clase C^1. Sea u una función definida en Ω, de frontera compacta, que naturalmente será nuestro conjunto $K = \partial\Omega$. Entonces existe un conjunto *finito* de abiertos U_x de la definición 3.2.4. Aplicando el lema 3.2.9 con $U_x = U_i$ escribimos $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$ (gracias a *(2)* de dicho lema). A partir de aquí podemos transferir u a través de H_i *pieza por pieza* (cada $\theta_i u$) de $\Omega \cap U_i$ a Q_+, y trabajar en el entorno Q_+. Obsérvese como $\partial\Omega \cap U_i$ es transferido a Q_0 (marcado en negrita). Obsérvese también como se transfiere el soporte (marcado en gris). El hecho de que $\{U_i\}$ sea finito permite conservar las acotaciones que hagamos en Q_+, y el hecho de que H_x sea un difeomorfismo, la diferenciabilidad.

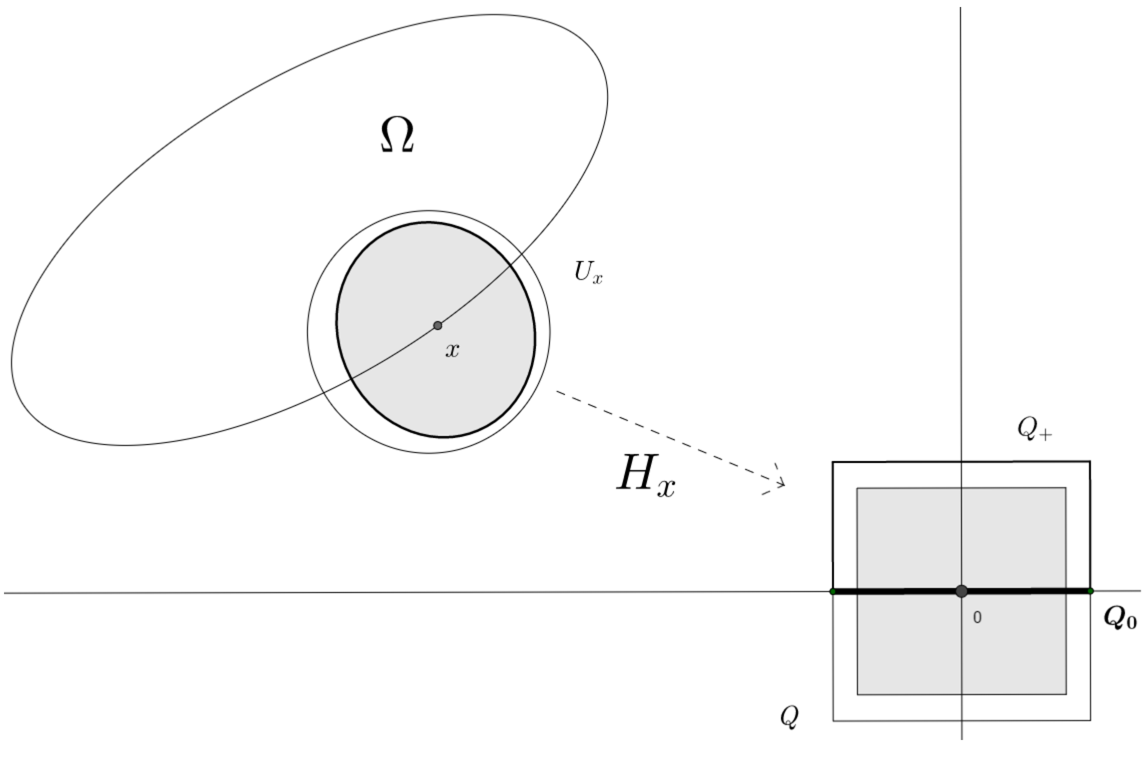

figura a

3.2.3. Operador de extensión

Teorema 3.2.10. ***(Operador de extensión)***

Sea Ω un abierto de clase C^1 y sea o bien $\partial\Omega$ acotada o bien $\Omega = R^n_+$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Existe un operador lineal continuo $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, que llamaremos operador de extensión, que verifica:

(1) $P(u)_{|\Omega} = u \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(3) $\|P(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(3) $\|P(u)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Donde C depende sólo de la medida de Ω.

Usaremos la definición de abierto de clase C^1 y particiones de la unidad (ver nota 26), así como el siguiente lema:
Lema 3.2.11. ***(Extensión por reflexión)*** *Dado $u \in W^{1,p}(Q_+)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Si definimos, para $x = (x_1, ..., x_N)$, la extensión de u a Q_+ como*

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x_N > 0 \\ u(x_1, ..., x_{N-1}, -x_N) & si\ x_N < 0, \end{cases}$$

entonces $u^* \in W^{1,p}(Q)$ (ó $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si $u \in W^{1,p}(R^n_+)$) y

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2 \|u\|_{L^p(Q_+)} \quad y \quad \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2 \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

El resultado también se tiene para $u \in W^{1,p}(R^N_+)$ (y por tanto prueba para este caso el teorema 3.2.10), sustituyendo Q_+ por R^N_+ y Q por $\mathbb{R}^N$. La demostración de ambos casos es idéntica, sustituyendo los dos conjuntos mencionados en cada paso.

Demostración. Probaremos las dos siguientes afirmaciones:

$$u^*_{x_i} = (u_{x_i})^* \quad \forall\ 1 \leq i \leq N-1, \qquad (*)$$

y

$$u^*_{x_N} = (u_{x_N})^‘. \qquad (**)$$

Donde $(u_{x_N})^‘$ se define como

$$(u_{x_N})^‘(x) = \begin{cases} u_{x_N}(x) & si\ x_N > 0 \\ -u_{x_N}(x_1, ..., x_{N-1}, -x_N) & si\ x_N < 0. \end{cases}$$

Utilizaremos también una sucesión $(\eta_k) \subset C^\infty(\mathbb{R})$ definida como

$$\eta_k(t) = \eta(kt),\ t \in \mathbb{R},$$

con $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ cualquier función que verifique $|\eta(t)| \leq 1$ y

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < \frac{1}{2} \\ 1 & si\ t > 1. \end{cases}$$

(*) Sea $\varphi \in C_c^1(Q)$. Sabemos que

$$\int_Q u^* \varphi_{x_i} = \int_{Q^+} u\varphi_{x_i} + \int_{Q^+} u\varphi^*_{x_i}.$$

Donde $\varphi^* = \varphi(x_1, ..., x_{N-1}, -x_N)$. Definiendo ψ como $\psi(x) = \varphi(x_1, ..., x_N) + \varphi(x_1, ..., x_{N-1}, -x_N)$ escribimos la igualdad anterior como

$$\int_Q u^* \varphi_{x_i} = \int_{Q^+} u\psi_{x_i}.$$

Por otra parte de la definición de η_k se deduce que $\eta_k(x_N)\psi(x) \in C_c^1(Q_+)$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$, y como $u \in W^{1,p}(Q^+)$ entonces

$$\int_{Q^+} u(\eta_k\psi)_{x_i} = -\int_{Q^+} u_{x_i}\eta_k\psi.$$

Además $(\eta_k\psi)_{x_i} = \eta_k\psi_{x_i}$ (recuérdese que $1 \leq i \leq N-1$), y por tanto

$$\int_{Q^+} u\eta_k\psi_{x_i} = -\int_{Q^+} u_{x_i}\eta_k\psi.$$

Es evidente que $\eta_k\psi_{x_i} \to \psi_{x_i}$ y que $\eta_k\psi \to \psi$ *en casi todo punto* y que $|\eta_k\psi_{x_i}| \leq |\psi_{x_i}|$, $|\eta_k\psi| \leq |\psi|$ $\forall k \in \mathbb{N}$, con lo que, por el teorema de la convergencia dominada pasando al límite en la igualdad anterior tenemos

$$\int_{Q^+} u\psi_{x_i} = -\int_{Q^+} u_{x_i}\psi.$$

Y por tanto

$$\int_Q u^*\varphi_{x_i} = \int_{Q^+} u\psi_{x_i} = -\int_{Q^+} u_{x_i}\psi = -\int_Q (u_{x_i})^*\varphi.$$

Quedando **(*)** demostrado.

Para demostrar **(**)** consideramos nuevamente $\varphi \in C_c^1(Q)$. Análogamente al caso anterior tenemos que

$$\int_Q u^*\varphi_{x_N} = \int_{Q^+} u\chi_{x_N}.$$

Con $\chi(x) = \varphi(x) - \varphi(x_1, ..., x_{N-1}, -x_N)$.

Nuevamente, para la misma sucesión η_k, $\eta_k\chi \in C_c^1(Q_+)$,

$$\int_{Q_+} u(\eta_k\chi)_{x_N} = -\int_{Q_+} u_{x_N}\eta_k\chi,$$

y $(\eta_k\chi)_{x_N} = \eta_k\chi_{x_N} + k\eta'(kx_N)\chi$. Pasando al límite:

$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q_+} u(\eta_k\chi)_{x_N} = \lim_{k\to\infty} -\int_{Q_+} u_{x_N}\eta_k\chi$$

i.e.

$$\lim_{k\to\infty}\int_{Q_+} u\eta_k\chi_{x_N} + uk\eta'(kx_N)\chi = \lim_{k\to\infty} -\int_{Q_+} u_{x_N}\eta_k\chi.$$

Supongamos por ahora (se demostrará al final) que $\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \to 0$. Pasamos al límite, como antes, utilizando el teorema de la convergencia dominada y obtenemos que

$$\int_{Q^+} u\chi_{x_N} = -\int_{Q^+} u_{x_N}\chi,$$

y como

$$-\int_{Q^+} u_{x_N}\chi = -\int_{Q}(u_{x_N})^{\text{‘}}\varphi,$$

obtenemos **(**)**. Por último demostramos $\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \to 0$. Nótese que $\chi(x_1,...,x_{N-1},0)=0$, luego existe una constante M que verifica $|\chi(x)|\le M|x_N|\ \forall x\in Q$. Así pues:

$$\left|\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi\right| \le M\sup_{t\in[0,1]}|\eta'(t)|\int_{0<x_N<1/k} kx_N|u| \le \int_{0<x_N<1/k}|u|,$$

puesto que si $x_N<\frac{1}{k}$ $kx_N<1$. Claramente $\lim_{k\to\infty}\int_{0<x_N<1/k}|u|=0$. □

Nota 27. Acabamos de mostrar en el lema cómo extender una función de Q_+ a Q. El lector advertirá ahora rápidamente lo útil que es el proceso descrito en la nota 26. El proceso a seguir para demostrar el teorema es escribir $u=\sum_{i=0}^k\theta_i u$, dividir la frontera en los abiertos U_i, transferir a Q_+ cada *pieza* (cada abierto) $\Omega\cap U_i$, después utilizar el lema para extenderla a Q, y por último *retransferir* la función de Q a U_i. A partir de aquí, gracias al soporte compacto de $\theta_i u$, ésta puede extenderse fácilmente a $\mathbb{R}^N$.

Demostración. **(Teorema 3.2.10)** Dado que Ω es de clase C^1 y la frontera acotada (i.e. compacta, porque es cerrada. El caso $\Omega=R^N_+$ ya está demostrado en el lema 3.2.11), existe un número finito k de abiertos $U_i\subset\mathbb{R}^N$ tales que $\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^k U_i$ y k aplicaciones biyectivas $H_i: Q\to U_i$ que verifican (i), (ii), (iii) y (iv). Específicamente los U_i y las H_i se toman aplicando la hipótesis de que $\partial\Omega$ es de clase C^1, extrayendo del cubrimiento abierto $\bigcap_{x\in\partial\Omega}U_x$ el subrecubrimiento finito $U_1,...,U_k$, al cual aplicamos el lema 3.2.9 para obtener las $\{\theta_i\}_{i=0,...,k}$ que verifican *(1),(2),(3) y (4)*. Lo haremos por pasos.

1) Para $u\in W^{1,p}(\Omega)$ escribimos u como

$$u(x)=\theta_0(x)u(x)+\theta_1(x)u(x)+...+\theta_k(x)u(x).$$

2) Extendemos $u_0:=\theta_0 u$ como

$$\bar{u}_0(x)=\begin{cases}u_0(x) & en\ \Omega\\ 0 & en\ \mathbb{R}^N-\Omega.\end{cases}$$

Como $\theta_0\in C^\infty\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y como $\nabla\theta_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (ya que $\nabla\theta_0=-\sum_i^N\nabla\theta_i$ es de soporte compacto y continua). Además por hipótesis $sop(\theta_0)\subset\Omega$, y por tanto, por el lema 3.2.3, $\bar{u}_0\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y además $\|\bar{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}\le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

3) Transferimos de $U_i\cap\Omega$ a Q_+ utilizando las H_i. Es decir, definimos $\tilde{u}_i$ como $\tilde{u}_i(y)=u(H_i(y)):Q_+\to\mathbb{R}$. Por la proposición 3.2.7 $\tilde{u}_i\in W^{1,p}(Q_+)$.

4) Mediante el lema 3.2.11 extendemos $\tilde{u}_i$ de $W^{1,p}(Q_+)$ a $\tilde{u}_i{}^* \in W^{1,p}(Q)$.

5) Volvemos a transferir $\tilde{u}_i{}^*$ de Q a U_i mediante H_i^{-1}. Es decir, definimos $\tilde{\tilde{u}}_i$ como $\tilde{\tilde{u}}_i = \tilde{u}_i{}^*(H_i^{-1}(x))$ para cada $x \in U_i$. De la construcción se sigue que para todo $x \in U_i \cap \Omega$ es $\tilde{\tilde{u}}_i(x) = u(x)$ y que $\tilde{\tilde{u}}_i \in W^{1,p}(U_i)$. Además

$$\left\| \tilde{\tilde{u}}_i(x) \right\|_{W^{1,p}(U_i)} \leq C \left\| u \right\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)} .$$

6) Gracias al lema 3.2.9 extendemos $\tilde{\tilde{u}}_i$ a $\mathbb{R}^N$ mediante

$$\bar{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x)\tilde{\tilde{u}}_i(x) & \textit{en } U_i \\ 0 & \textit{en } \mathbb{R}^N - U_i, \end{cases}$$

y nuevamente por el lema 3.2.3 se sigue que $\bar{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Además $\bar{u}_i = u_i$ en Ω y $\left\| \bar{u}_i \right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \left\| u \right\|_{W^{1,p}(U_i \cap \Omega)}$.

8) El operador

$$P(u) = \sum_{i=0}^{k} \bar{u}_i$$

verifica las propiedades deseadas. □

El teorema de extensión permite demostrar el siguiente resultado fundamental:

Corolario 3.2.12. ***(Densidad)*** *Sea Ω de clase C^1 con frontera acotada y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_{n|\Omega} \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Consideramos la sucesión $\xi_n(\rho_n * P(u))$, donde P es el operador de extensión, ρ_n una sucesión regularizante y ξ_n la ya conocida sucesión $\xi(x/n)$ con $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \textit{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

De los resultados dados en el apéndice B.4.2 deducimos que $\xi_n(\rho_n * P(u)) \to P(u)$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y por las propiedades de P ya demostradas obtenemos el resultado. □

Nota 28. Los resultados demostrados son de gran importancia y proporcionan un mecanismo para demostrar propiedades de $W^{1,p}(\Omega)$ (En realidad el resultado puede demostrarse para *cualquier* Ω de clase C^1): Para demostrar una cierta propiedad de $W^{1,p}(\Omega)$ con Ω de clase C^1, uno puede demostrarla para $C_c^1(\mathbb{R}^N)$, después argumentar por densidad para *transferirla* a todo $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y por último utilizar el operador de extensión para probarla para $W^{1,p}(\Omega)$. En la sección que sigue podremos en acción este mecanismo.

3.2.4. Desigualdades de Sóbolev

A los resultados de esta sección a menudo se los llama **Teorema del Embebimiento de Sóbolev**. El objetivo de esta sección es encontrar embebimientos de espacios de sóbolev en otros espacios. En la sección 3.1 vimos que $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ mediante una inclusión continua (teorema 3.1.5). En dimensión $N \geq 2$, si $p \leq N$, pueden construirse funciones que estén en $W^{1,p}(\Omega)$ y no en $L^\infty(\Omega)$. Y la pregunta a responder ahora es: *Para* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *con* $N \geq 2$ *Si* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *¿Pertenece* u *automáticamente a algún otro espacio?*

La respuesta es afirmativa, pero nuevamente no tan sencilla como en el caso 1 dimensional, y dependerá de si $1 \leq p < N$, $p = N$ ó $N < p \leq \infty$ (Este resultado queda formalizado en el corolario 3.2.16).

Definición 3.2.5. Sea $1 \leq p < N$. Se define el conjugado de Sóbolev p^* como

$$p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Nótese que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}.$$

Comenzamos con los resultados para $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para después, utilizando el operador de extensión (teorema 3.2.10), generalizar estos resultados a cualquier Ω de clase C^1.

Teorema 3.2.13. ***(Sóbolev, Gagliardo, Nirenberg)*** *Sea* $1 \leq p < N$ *y* p^* *el conjugado de Sóbolev. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N).$$

Nota 29. Habitualmente el teorema anterior suele expresarse como que existe una constante C, que depende sólo de N y p, tal que $\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, con la notación $\|\nabla u\|_p := \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_p$.

La demostración depende del lema B.4.1.8.

Demostración. Demostramos primero el caso $p = 1$ y $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Para cada x_i tenemos:

$$|u(x_1, ..., x_N)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)}{\partial x_i} dt \right| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)}{\partial x_i} dt \right|.$$

Denotamos esta última integral como $f_i(\tilde{x}_i)$ (Nótese que $f_i(\tilde{x}_i)$ no depende de x_i y $f_i \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$). Por tanto

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leq \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)}{\partial x_i} dt \right| \right)^{N/(N-1)}.$$

Integrando ambos términos obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)}{\partial x_i} \right| dt \right)^{N/(N-1)}$$

y por el lema B.4.1.8:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x_1, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_N)}{\partial x_i} \right| dt \right)^{N/(N-1)} \leq \prod_{i=1}^N \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{1/(N-1)} =$$

$$\prod_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/(N-1)} .$$

Nótese que elevando a ambos lados a la $\frac{N-1}{N}$ y con $\left\|u_{x_j}\right\|_1 = \text{máx}_{i=1,\ldots,k} \|u_{x_i}\|_1$:

$$\|u\|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq \prod_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \leq \prod_{i=1}^{N} \left\|u_{x_j}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{1/N} = \left\|u_{x_j}\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_1 .$$

Continuamos con el caso $1 < p < N$, todavía para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Aplicamos la desigualdad demostrada para el caso anterior a la función $|u|^{m-1}u$

$$\|u\|_{mN/(N-1)}^m \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\||u|^{m-1}u_{x_i}\right\|_1^{1/N} \leq m \|u\|_{p'(m-1)}^{m-1} \prod_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_p^{1/N} . \qquad (*)$$

La última desigualdad se deduce de la desigualdad de Hölder ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Asignando el valor de $m = \frac{(N-1)p^*}{N} \geq 1$ obtenemos la desigualdad

$$\|u\|_{p^*} \leq m \prod_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_p^{1/N} , \qquad (**)$$

que prueba que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $u \in L^{p^*}(\Omega)$. Nótese que si $\|u_{x_0}\|_p = \text{máx}_{i=1,\ldots,n} \|u_{x_i}\|_p$ entonces claramente

$$\|u\|_{p^*} \leq m \|u_{x_0}\|_p \leq m \|\nabla u\|_p .$$

(Ver nota 29).

Completamos la prueba considerando $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Por el teorema 3.2.12 existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ que converge a u en norma $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Los u_n verifican la desigualdad **(**)**. Como $u_n - u_m$ es de soporte compacto tenemos

$$\|u_n - u_m\|_{p^*} \leq m \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial(u_n - u_m)}{\partial x_i} \right\|_p^{1/N} .$$

Dado que (u_n) converge en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ entonces es de Cauchy y por tanto (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, que converge por la completitud a $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

□

Nota 30. El lector puede comprobar que puede tomarse como C el valor $C = \frac{p(N-1)}{N-p}$.

Nota 31. Utilizando la desigualdad de Young (lema B.4.1.6) y el teorema anterior puede verse que para $1 \leq p < N$, de hecho, $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [p, p^*]$.

El siguiente corolario responde a lo que ocurre si $p = N$:

Corolario 3.2.14. *Sea $p = N$. Se tiene la inclusión*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [N, \infty).$$

Demostración. Supongamos que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. En la demostración del teorema 3.2.13, escribimos **(*)** con $p = N$, obteniendo

$$\|u\|_{\frac{mN}{N-1}}^m \leq m \|u\|_{\frac{N(m-1)}{N-1}}^{m-1} \left\| \prod_{i=1}^N u_{x_i} \right\|_N^{1/N} \qquad \forall m \geq 1.$$

Por la desigualdad de Young obtenemos

$$\|u\|_{\frac{mN}{N-1}} \leq C \left(\|u\|_{\frac{N(m-1)}{N-1}} + \left\| \prod_{i=1}^N u_{x_i} \right\|_N^{1/N} \right) \leq C \left(\|u\|_{\frac{N(m-1)}{N-1}} + \|\nabla u\|_N \right) \qquad \forall m \geq 1,$$

y si tomamos $m = N$ se tiene que

$$\|u\|_{\frac{N^2}{N-1}}^N \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Aplicando la desigualdad de interpolación (corolario B.4.1)

$$\|u\|_q \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

$\forall q$ con $N \leq q \leq \frac{N^2}{N-1}$. Reiterando este argumento para $m = N+1, N+2...$ obtenemos la desigualdad anterior para todo $q \in [N, \infty)$ y para cada $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Argumentando por densidad, como en la demostración del teorema 3.2.13, se demuestra el resultado para cada $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

El caso $p > N$ se conoce como teorema de Morrey:

Teorema 3.2.15. ***(Morrey)*** *Sea $p > N$. Entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Mediante una inyección continua. Además $\forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_p \quad \textit{para casi todo } x, y \in \mathbb{R}^N,$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ y C una constante dependiente de p y N.

Demostración. Comenzaremos probando la desigualdad para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sea Q un cubo $N-$dimensional con lados de medida r (paralelos a los ejes coordenados). Para cada $x \in Q$ tenemos la desigualdad

$$|u(x) - u(0)| = \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(tx) \right| dt.$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dt} u(tx) \right| dt = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(tx) \right| dt \leq \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(tx) \right| dt \leq$$

$$r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} u(tx) \right| dt.$$

Integramos sobre Q a ambos lados y dividimos por $|Q|$ (Denotamos $|Q|$ a la medida de Q):

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x)-u(0)| \leq \frac{r}{|Q|}\int_Q \left(\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dt\right) dx =$$

$$\frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N}\int_Q \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(tx)\right| dx\right) dt = \frac{1}{r^{N-1}}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N}\int_{tQ} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| \frac{dy}{t^N}\right) dt.$$

Realizando el cambio de variable $tx = y$. De la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\int_{tQ}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(y)\right| dy \leq \left(\int_{tQ}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{1/p}\left(\int_{tQ} 1\right)^{1/p'} \leq \left(\int_{Q}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p\right)^{1/p} |tQ|^{1/p'},$$

y dado que $tQ \subset Q$ para $t \in (0,1)$ obtenemos

$$\left|\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\right) - u(0)\right| \leq$$

$$\frac{r^{N/p'}}{r^{N-1}}\sum_{i=1}^{N}||u_{x_i}||_{L^p(Q)}\int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N}dt = \frac{r^{1-N/p}}{1-N/p}\sum_{i=1}^{N}||u_{x_i}||_{L^p(Q)}.$$

Y mediante una traslación la igualdad se mantiene para cualquier cubo de lados paralelos a los ejes coordenados. Es decir,

$$\left|-u(x) + \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\right| \leq \frac{r^{1-N/p}}{1-N/p}\sum_{i=1}^{N}||u_{x_i}||_{L^p(Q)} \qquad \forall x \in Q. \qquad (*)$$

Así pues, denotando $\bar{u} = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)$ y por la desigualdad triangular:

$$|u(x)-u(y)| = |\bar{u} - u(x) - (\bar{u} - u(y))| \leq \frac{2r^{1-N/p}}{1-N/p}\sum_{i=1}^{N}||u_{x_i}||_{L^p(Q)} \qquad \forall x \in Q.$$

Como dados dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^N$ existe un cubo Q (con lado $r = 2|x-y|$) que contiene a ambos, tenemos la desigualdad enunciada en el teorema para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$

Para demostrar la desigualdad para cualquier $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ basta aplicar el corolario 3.2.12, tomando una sucesión $(u)_n \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Nótese que entonces $u_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y por tanto existe una subsucesión de (u_n) que converge *en casi todo punto* a u, obteniéndose la desigualdad.

Probamos ahora la inclusión $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. A partir de (*) tenemos:

$$|u(x)| = |\bar{u} - u(x) - \bar{u}| \leq |\bar{u} - u(x)| + |\bar{u}| \leq |\bar{u}| + \frac{r^{1-N/p}}{1-N/p}\sum_{i=1}^{N}||u_{x_i}||_{L^p(Q)} =$$

$$\left|\frac{1}{Q}\int_Q u\right| + C(p,N)\left\|\nabla u\right\|_{L^p(Q)} \leq C\left\|u\right\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Por tanto $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$. Argumentando por densidad, como en los casos anteriores, tenemos el resultado para cualquier $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, es decir, tomamos $(u_n) \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ que verifica

$$||u_n - u_m||_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq ||u_n - u_m||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

luego (u_n) es de Cauchy en $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ y converge a $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Después se toman límites en $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C||u_n||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$ concluyendo $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$. □

Nota 32. Todas las inclusiones dadas son inyecciones continuas. Por ejemplo, para el caso $p < N$ se tiene la aplicación:

$$S_{[p<N]} : W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$$

$$u \longrightarrow u$$

Por los resultados explicados es acotada (i.e. continua).

Generalizamos ahora los tres resultados dependientes de la relación p, N a cualquier abierto Ω de clase C^1 y acotado.

Corolario 3.2.16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ o un abierto de clase C^1 con frontera $\partial\Omega$ acotada o bien $\Omega = R_+^N$, definido como en la definición 3.2.4, y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces:*

(1) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *si* $p < N$.

(2) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, \infty)$ *si* $p = N$.

(3) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ *y*

$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_p$ *p.c.t* $x, y \in \Omega$ *si* $p > N$.

Para $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. Todas estas inyecciones son continuas y además también se tiene la inclusión:

(4) $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ *si* $p > N$.

Demostración. Extendemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$ a $P(u) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ mediante el operador de extensión (Teorema 3.2.10) y aplicamos los tres teoremas anteriores (teoremas 3.2.13, 3.2.14 y 3.2.15) para cada caso. Por ejemplo, para el caso (1):

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \left\|P(u)_{|\Omega}\right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|P(u)\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq m \prod_{i=1}^N \|(P(u))_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^{1/N} \leq$$

$$m \prod_{i=1}^N C\,\|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}^{1/N}.$$

Quedando demostrada la acotación (y por tanto la inclusión) para Ω. La demostración de los otros dos apartados es idéntica. *(4)* es el corolario que sigue. □

Corolario 3.2.17. ***(Repesentante continuo)*** *Sea $p > N$ y Ω de clase C^1 con frontera acotada (ó $\Omega = \mathbb{R}_+^n$). Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces existe una función $\tilde{u} \in C(\Omega)$ tal que $\tilde{u} = u$ en casi todo punto. Equivalentemente, para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ existe un único representante continuo $\tilde{u}$ en la clase de equivalencia de u.*

Demostración. Se deduce de la desigualdad probada en el teorema 3.2.15 (corolario 3.2.16 para Ω en general). Sea A el conjunto de medida 0 en el que la desigualdad no se cumple, es decir:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \sum_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_p \quad \forall\, x, y \in \Omega - A.$$

Como $\Omega - A$ es denso en Ω, u admite una única extensión continua a Ω. $\square$

Ahora vamos a considerar espacios de Sóbolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $m \geq 2$. (Para los siguientes resultados supondremos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es o un abierto de clase C^1 con frontera $\partial\Omega$ acotada o bien $\Omega = R_+^N$).

Corolario 3.2.18. *Para $p \leq N$ y $m \geq 2$:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m-1,q}(\Omega).$$

Donde q está determinado por el corolario anterior dependiendo de si $p < N$ ($\Rightarrow \; q = p^*$) ó $p = N$ ($\Rightarrow \; q \in [p, \infty)$).

Demostración. Se deduce del corolario 3.2.16. Basta tener en cuenta que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ tiene m derivadas débiles en $L^p(\Omega)$, es decir, denotando $D^0 u = u$ se tiene que $D^{\alpha}u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $|\alpha| = 0, \ldots, m-1$, y (para cada caso) $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, luego $D^{\alpha}u \in L^q(\Omega)$ para $|\alpha| = 1, \ldots, m-1$, lo que equivale a decir que $u \in W^{m-1,q}(\Omega)$. $\square$

Como corolario de todos los resultados de la sección probamos un embebimiento fundamental para demostrar la regularidad de la solución cuando apliquemos el método variacional:

Corolario 3.2.19. *Sea $m \geq 2$, $1 \leq p < \infty$ y $m - \frac{N}{p} > 1$. Entonces:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\Omega).$$

Donde $k \in \mathbb{N}$ y está definido como

$$k = \begin{cases} [m - \frac{N}{p}] & si\ m - \frac{N}{p} \notin \mathbb{N} \\ m - \frac{N}{p} - 1 & si\ m - \frac{N}{p} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

($[\cdot]$ denota parte entera).

Demostración. Si $p > N$ entonces para $u \in W^{m,p}(\Omega)$ $D^{\alpha}u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m-1$, con lo que podemos aplicar el teorema 3.2.16 (3) y ver que

$$|D^{\alpha}u(x) - D^{\alpha}u(y)| \leq C|x-y|^{\theta} \sum_{i=1}^{N} \|D^{\alpha}u_{x_i}\|_p \quad para\ casi\ todo\ x, y \in \Omega.$$

Con $\theta = 1 - \frac{N}{p} > 0$. Luego $D^{\alpha}u \in C(\Omega)$ para $|\alpha| \leq m-1$ por el corolario 3.2.17. Nótese que $m > m - \frac{N}{p} > m - 1 = k$, con lo que $u \in C^k(\Omega)$ (Ver nota 33).

Si $p = N$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m-1,q}(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty)$, de donde se sigue que existe un $q > N$ para el cual $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m-1,q}(\Omega)$ (corolario 3.2.18), y por tanto

$D^\alpha u \in W^{1,q}(\Omega)$ con $|\alpha| \leq m-2$ y podemos aplicar la parte anterior para $q > N$, teniendo en cuenta que $m - \frac{N}{p} = m - 1 \in \mathbb{N}$, con lo que $k = m - 2$.

El caso $p < N$ es más delicado. Sea $|\alpha| \leq k$. Vamos a mostrar que $D^\alpha u \in W^{1,q}(\Omega)$ para $q > N$ y proceder como en el primer caso. Por definición $D^\alpha u \in W^{m-k,p}(\Omega)$, y además, por el corolario 3.2.16 (4), $W^{m-k,p}(\Omega) \subset W^{m-k-1,p^*}(\Omega) \subset W^{m-k-1,p^{**}}(\Omega) \subset \ldots \subset W^{1,p^{(m-k-1)*}}(\Omega)$ con

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^*} &= \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \\ \frac{1}{p^{**}} &= \frac{1}{p^*} - \frac{1}{N}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{p^{(m-k-1)*}} &= \frac{1}{p^{(m-k-2)*}} - \frac{1}{N}. \end{aligned}$$

Y sustituyendo hacia atrás tenemos que

$$\frac{1}{p^{(m-k-1)*}} = \frac{1}{p} - \frac{m-k-1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} + \frac{k}{N} + \frac{1}{N}.$$

Por último, como $k < m - \frac{N}{p}$ i.e. $\frac{k}{N} < \frac{m}{N} - \frac{1}{p}$ concluímos que

$$\frac{1}{p^{(m-k-1)*}} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N} + \frac{k}{N} + \frac{1}{N} < \frac{1}{p} - \frac{m}{N} + \frac{m}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N} = \frac{1}{N}.$$

Es decir, $p^{(m-k-1)*} > N$, y podemos aplicar la demostración dada al principio para $W^{1,p^{(m-k-1)*}}(\Omega)$, concluyendo que $D^\alpha u$ es continua para cualquier α con $|\alpha| \leq k$. $\square$

Nota 33. En realidad hemos probado que k derivadas débiles son continuas, lo que *implica* que $u \in C^k(\overline{\Omega})$ en el sentido clásico (ver teorema B.7.2).

3.2.5. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$

Definición 3.2.6. Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$$

Equipado con la norma de $W^{1,p}(\Omega)$ ($W_0^{1,2}(\Omega)$ con el producto escalar de $W^{1,2}(\Omega)$) y teniendo en cuenta que es una clausura, es evidente que $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach (de Hilbert para $p = 2$) separable y para $p > 1$ reflexivo (proposiciones B.3.1 y 1.5.6).

Llamaremos $H_0^1(\Omega)$ a $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Procedemos a enunciar y demostrar el análogo al teorema 3.1.9 para $W_0^{1,p}(\Omega)$. La principal diferencia reside en el hecho de que, como ya hemos comentado, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no tiene necesariamente un representante continuo. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ está formado por funciones definidas *en casi todo punto*, y la frontera de un abierto Ω es de medida nula, deberemos añadir como hipótesis el que *u sea continua*.

Teorema 3.2.20. *Sea Ω acotado de clase C^1 y $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $u = 0$ en $\partial\Omega$ si y sólo si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. (Nótese que si $p > N$ entonces si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $u \in C(\bar{\Omega})$, por el corolario 3.2.17).*

Lema 3.2.21. *Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ y sea $sop(u) \subset \Omega$ compacto. Entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. El proceso seguido en la demostración del lema 3.1.10 es válido también para N dimensiones. Se extiende de la misma manera u a $\overline{u}$ como 0 fuera de Ω y se sigue que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

□

Demostración. **(Teorema 3.2.20 $\Rightarrow$)**. Veremos primero que si $u = 0$ en $\partial\Omega$ entonces $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Consideramos cualquier función $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $|G(t)| \leq |t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y además

$$G(t) = \begin{cases} 0 & si \ |t| \leq 1 \\ t & si \ |t| \geq 2. \end{cases}$$

Las funciones $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ pertenecen a $W^{1,p}(\Omega)$ por la proposición 3.2.6. Como ya se ha explicado anteriormente, por el teorema de la convergencia dominada $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Además $sop(u_n) \subset \{x \in \Omega \,\big|\, |u(x)| \geq 1/n\}$ (como en la demostración del teorema 3.1.9), y por tanto el soporte de u_n es un compacto contenido en Ω. Por el lema 3.2.21 se deduce que $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y por tanto $u_n \to u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostraremos la otra implicación en la siguiente sección (sección 3.2.6), usando el operador de traza. □

Nota 34. Para demostrar la implicación $\Rightarrow$ no hemos usado la suposición de que Ω es de clase C^1. Además, el teorema también puede probarse para Ω no acotado (ver [11, sección 9.3]).

Lema 3.2.22. *Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces la función $\overline{u}$ definida como*

$$\overline{u} = \begin{cases} u(x) & si \ x \in \Omega \\ 0 & si \ x \in \mathbb{R}^N - \Omega \end{cases}$$

verifica $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\overline{u}_{x_i} = \overline{u_{x_i}}$.

Demostración. Sea $(u_n) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u \in W^{1,p}(\Omega)$. La sucesión $(\overline{u}_n) \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ y converge a $\overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Nota 35. El lema anterior no requiere considerar que Ω sea de clase C^1. Se puede extender cualquier función de $W_0^{1,p}(\Omega)$ a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Es decir, los embebimientos mostrados en la sección 3.2.4 son válidos para todo Ω.

Corolario 3.2.23. ***(Desigualdad de Poincaré)*** *Sea $1 < p < \infty$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado. Entonces existe C (dependiente de la medida de Ω y p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$$

Es decir, en $W_0^{1,p}(\Omega)$, las normas $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ y $\sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$ son equivalentes.

Demostración. Para $p < n$, el resultado se sigue inmediatamente de la desigualdad mostrada en el teorema 3.2.13 y del teorema B.4.1.14 . En efecto, como Ω está acotado,

$$||u||_p \leq \tilde{C}||u||_{p^*} \leq C||\nabla u||_p,$$

ya que $p^* > p$. Para $p \geq n$ se requiere el teorema de Rellich-Kondrachov, un profundo resultado sobre espacios de Sóbolev que puede encontrarse en [11, Teorema 9.16, pág. 285] ó [12, Sección 5.7, Teorema 1, página 272]. Se prueba la desigualdad por reducción al absurdo (ver [12, Sección 5.8.1]). □

3.2.6. Teorema de la traza

El siguiente teorema pretende solucionar el problema de la medida de la frontera. El *operador de traza* da sentido al valor de $u \in W^{1,p}(\Omega)$ restringido a $\partial\Omega$.

Teorema 3.2.24. ***(Teorema de la Traza)*** *Sea $1 \leq p < \infty$. Supongamos que Ω está acotado y que es de clase C^1. Entonces existe un operador lineal acotado T con*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

(i) Si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ entonces $T(u) = u_{|\partial\Omega}$.

(ii) $\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Definición 3.2.7. $T(u)$ es la traza de u.

Antes de demostrar el teorema consideramos el siguiente lema:

Lema 3.2.25. *Sea Ω de clase C^1. Entonces para cada punto $x \in \partial\Omega$ existe una bola B_x de radio r centrada en x y una función $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$\Omega \cap B_x = \{x \in B_x \,\big|\, x_N > \gamma(x_1, ..., x_{N-1})\}.$$

Además podemos definir el difeomorfismo Φ:

$$\Phi : B_x \cap \Omega \longrightarrow B \cap R^n_+$$

$$x \longrightarrow (x_1, ..., x_{N-1}, x_N - \gamma(x_1, ..., x_{N-1})$$

Con $\Phi^{-1}(y) = (y_1, ..., y_{N-1}, y_N + \gamma(y_1, ...y_{N-1}))$ y B una bola en $\mathbb{R}^N$. Se tiene que $\Phi \in C^1(\overline{B_x \cap \Omega})$ y $\Phi^{-1} \in C^1(\overline{B \cap R^n_+})$ y que el determinante de la matriz Jacobiana es 1. Nótese también que $\Phi(\Omega \cap \partial\Omega \cap B_x) \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$.

Nota 36. Esta es la definición dada en [12] para abierto de clase C^1. Como ya se comentó ambas son equivalentes. Nos interesa esta implicación por la comodidad que supone trabajar con un difeomorfismo de jacobiano 1.

Demostración. La función $H^{-1}_{x_0}$ de la definición de abierto de clase C^1 es un difeomorfismo. Para cualquier punto x_0 de $\partial\Omega$ mediante una rotación hacemos paralelo el eje $x_N = 0$ a la recta tangente a $\partial\Omega$ en x_0. Consideramos la hipersuperficie $\{x \in \mathbb{R}^N \,\big|\, H^{-1}_N(x) = 0\} = Q_0$ y le aplicamos el teorema de la función implícita.

Obtenemos que para un entorno del punto $x = H_{x_o}^{-1}(x_0)$ podemos escribir $x_N = \gamma(x_1, ..., x_{N-1})$ con $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{N-1})$. Tenemos que $Q_+ = \{x \in \mathbb{R}^N \,\big|\, x_N > y \textit{ con } y \in Q_0\} \cap Q$, de modo que para una bola abierta B_x centrada en x se verifica

$$\Omega \cap B_x = \{x \in B_x \,\big|\, x_N > \gamma(x_1, ..., x_{N-1})\}.$$

La existencia del difeomorfismo Φ es evidente a partir de γ. □

Demostración. Suponemos primero que $u \in C^1(\bar{\Omega})$ para después argumentar por densidad. Suponemos también que para $x_0 \in \partial\Omega$ existe un entorno U_{x_0} de x_0 en Ω tal que $U_{x_0} \cap \partial\Omega \subset R_0 := \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \,\big|\, x_N = 0\}$.

Tomamos una bola abierta B centrada en x_0 y de radio r que verifique

$$B^+ := B \cap \{x \in \mathbb{R}^N \,\big|\, x_N \geq 0\} \subset \bar{\Omega},$$

$$B^- := B \cap \{x \in \mathbb{R}^N \,\big|\, x_N \leq 0\} \subset \mathbb{R}^N - \Omega.$$

Y sea $\tilde{B}$ la bola centrada en x_0 y de radio $r/2$. Consideramos $\xi \in C_c^1(B)$ tal que $\xi \geq 0$ en B y $\xi = 1$ en $\tilde{B}$. Llamamos Γ a $U_{x_0} \cap \partial\Omega \cap \tilde{B}$ y x' a $(x_1, ..., x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1} = \{(x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N \,\big|\, x_N = 0\}$. Entonces

$$\int_\Gamma |u|^p dx' \leq \int_{R_0} \xi |u|^p dx' = -\int_{B^+} \xi(|u|^p)_{x_N} dx.$$

Esta última igualdad se tiene porque $u \in C^1(\bar{\Omega})$, de modo que $|u|$ es absolutamente continua (se aplica el teorema fundamental del cálculo de Lebesgue para $|u|$, que es diferenciable en casi todo punto, en la variable x_N), y porque ξ es de soporte compacto en B. Por tanto, derivando:

$$-\int_{B^+} \xi(|u|^p)_{x_N} dx = -\int_{B^+} |u|^p \xi_{x_N} + p|u|^{p-1}(signo(u)) u_{x_N} \xi dx.$$

Por la desigualdad de Young (B.4.1.6), si $q = p/(p-1)$ entonces

$$|u|^{p-1}|u_{x_N}| \leq C(|u|^{q(p-1)} + |u_{x_N}|^p) = C(|u|^p + |u_{x_N}|^p)) \leq C(|u|^p + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|^p)),$$

de donde

$$-\int_{B^+} |u|^p \xi_{x_N} + p|u|^{p-1}(signo(u)) u_{x_N} \xi dx \leq C \int_{B^+} |u|^p + \sum_{i=1}^N |u_{x_i}|^p.$$

Supongamos ahora que para $x_0 \in \partial\Omega$ no existe un entorno U_{x_0} de x_0 en Ω tal que $U_{x_0} \cap \partial\Omega \subset R_0$. Queremos, mediante un cambio de variables, transformar el problema a la situación anterior, es decir, buscar un difeomorfismo que transforme el recinto un entorno de x_0 en un entorno U_{x_0} tal que $U_{x_0} \cap \partial\Omega \subset R_0$. El cambio de variables viene determinado por el difeomorfismo Φ dado en el lema 3.2.25. Dado que el jacobiano de esta transformación es 1 obtenemos la misma acotación para cada entorno inducido sobre la frontera, lo que forma un cubrimiento por abiertos de $\partial\Omega$.

Dado que la frontera es compacta de dicho cubrimiento por abiertos obtenemos el conjunto de abiertos $\{U_i\}_{i=1,\ldots,k}$ que cubre $\partial\Omega$ para el cual

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega \cap U_i)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U_i)}.$$

Lo que implica que podemos definir para $u \in C^1(\overline{\Omega})$ $T(u) := u_{|\partial\Omega}$ y se tiene $\|T(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Del teorema 3.2.12 tenemos que existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que ${u_n}_{|\overline{\Omega}} \to u_{|\overline{\Omega}}$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Para dicha sucesión acabamos de demostrar que

$$\|T(u_n) - T(u_m)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Así que $(T(u_n))$ es de Cauchy y por tanto converge en $L^p(\partial\Omega)$. Definimos por tanto, para $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $T(u)$ como

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) \in L^p(\Omega)$$

Queremos ver por último que si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces $T(u) = u_{|\partial\Omega}$. Para ello basta ver que la sucesión construída en la prueba del teorema 3.2.12 converge uniformemente a u en $\overline{\Omega}$. Recordamos la definición de dicha sucesión: $\xi_n(\rho_n * P(u))$, donde P es el operador de extensión, ρ_n una sucesión regularizante y $\xi_n = \xi(x/n)$ con $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ definida como

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 2. \end{cases}$$

En primer lugar, como $\overline{\Omega}$ es compacto podemos aplicar la proposición B.4.2.6 para concluir que $\rho_n * P(u)_{|\overline{\Omega}} \to P(u)_{|\overline{\Omega}}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$. Por otra parte, como Ω está acotado, pongamos, por una bola cerrada de radio M, para $n > M$ tenemos que $\xi_n = 1$ en $\overline{\Omega}$. Por tanto $\xi_n(\rho_n * P(u)) \to u$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, de donde concluimos que $T(u) = u_{|\partial\Omega}$. □

Nota 37. El teorema de la traza define la traza de u para *toda* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. (i) es una comprobación de que la definición es consistente, que sólo puede efectuarse si los valores en la frontera están definidos.

Estamos ahora en condiciones de terminar la demostración del Teorema 3.2.20:

Demostración. (Teorema 3.2.20 $\Leftarrow$) Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$.

Como $T(u_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y dado que T es acotado (i.e. continuo porque es lineal), necesariamente $\lim_{n\to\infty} T(u_n) = 0 = T(\lim_{n\to\infty} u_n) = T(u)$. Es decir, $u = 0$ en $\partial\Omega$. □

Nota 38. De hecho, el teorema 3.2.20 puede reformularse para Ω de clase C^1 y acotado como:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow T(u) = 0.$$

Esta formulación no requiere la continuidad de u, puesto que la traza está definida aunque u no sea continua, y es consistente con la dada en el teorema 3.2.20, ya que para que $T(u) = u_{|\partial\Omega}$ se sigue requiriendo que u sea continua en $\overline{\Omega}$.

Capítulo 4

El método variacional

4.1. Formulación débil y el método variacional

Consideremos el siguiente problema de contorno en una variable, que servirá como ejemplo para explicar los pasos que constituyen el método variacional:

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) & t \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Donde $f \in C[a,b]$. Naturalmente y para ilustrar el método ignoraremos que este problema puede ser resuelto de manera elemental resolviendo la homogénea y después utilizando el método de los coeficientes indeterminados. Recuérdese que una solución *clásica* de (*) es una función $u \in C^2[a,b]$ que satisface (*).

Si ahora tomamos una función $\varphi \in C_c^1[a,b]$ ($\varphi(a) = \varphi(b) = 0$), y la multiplicamos a la ecuación (*), tenemos

$$-u(t)''\varphi(t) + u(t)\varphi(t) = f(t)\varphi(t),$$

por lo que, integrando en $[a,b]$ (omitimos la t por comodidad):

$$\int_a^b -u''\varphi + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi.$$

Integrando por partes el primer término obtenemos la igualdad

$$-u'(b)\varphi(b) + u'(a)\varphi(a) + \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi.$$

Es decir,

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \qquad \forall\varphi \in C^1[a,b] \text{ } con \text{ } \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Para esta última igualdad (a la que se denomina formulación débil de la ecuación (*)) se requiere una hipótesis *más débil*. En efecto basta suponer que u es derivable *una* vez y que tanto u como u' pertenecen a $L^1(a,b)$. Intuitivamente, hemos *pasado* la segunda derivada de u a la derivada de φ. Hemos *pasado* de la formulación clásica a la formulación débil.

El teorema de Lax-Milgram probará la existencia y unicidad de solución u en $H_0^1(I)$ (definición 3.1.1) para la formulación débil (se intuyen la forma bilineal $a(u,\varphi) = \int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi$ y el funcional $\psi(\varphi) = \int_a^b f\varphi$), y obtendremos una única solución u de la formulación débil que además verificará $u(0) = u(1) = 0$ por el teorema 3.1.9. Después habrá que demostrar que dicha solución es también solución clásica. Más concretamente, los pasos principales a seguir del método variacional para demostrar la existencia y unicidad de solución *clásica* a una ecuación diferencial ordinaria o ecuación en derivadas parciales son como sigue:

(1) Se prueba que toda solución clásica es también solución débil. Para ello se utilizan herramientas básicas del Análisis como la integración por partes o la identidad de Green, siguiendo el proceso que acabamos de describir para **(*)**.

(2) Se prueba la existencia y la unicidad de solución débil para el problema expuesto. Para ello utilizaremos los teoremas de Stampacchia (teorema 2.3.1) y Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en espacios de Sóbolev.

(3) Se prueba que la solución débil es C^2 (o la regularidad que se requiera para cada caso concreto). Para ello estudiaremos con detalle las propiedades de las derivadas débiles. En el caso 1 dimensional se concluye gracias al teorema 3.1.2 y en el caso N-dimensional, considerablemente más complicado, gracias a las secciones 4.3.2 y 4.3.3.

(4) Se prueba que una solución débil que además sea C^2 es una solución clásica, lo que concluye junto con el paso (1) la equivalencia de las formulaciones débil y clásica bajo las condiciones de regularidad demostradas en (3), y por el caso (2) tenemos existencia y unicidad de solución **clásica** (ver también nota 39).

Nota 39. Es importante tener en cuenta que en los espacios de Sóbolev están formados por clases de equivalencia, es decir, cada elemento $u \in W^{1,p} \subset L^p$ es un conjunto de funciones que coinciden *en casi todo punto*. Sin embargo, cuando una función u se dice que está en $L^p \cap C$ ó $W^{1,p} \cap C$, en realidad es, cuando existe, la *única* función continua de la clase de equivalencia de u. (Ver definición B.4.3)

Los representantes continuos son únicos siempre que existan, dado que si se modifica una función continua en un punto y la función resultante debe ser continua, debe hacerse una modificación en todo un intervalo, que hará que esta nueva función ya no esté en la misma clase de equivalencia, puesto que un intervalo tiene medida positiva. O equivalentemente, el complementario de un conjunto de medida nula es siempre denso, y dos funciones continuas que son iguales en un conjunto denso necesariamente lo son en todo punto (ver proposición B.2.2).

4.2. Solución a algunas ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método variacional

En esta sección, mediante el proceso descrito en la sección 4.1, utilizaremos el método variacional para resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. Comenzamos con el ejemplo canónico, el dado en dicha sección. El método se aplica de la misma manera para cada ejemplo, pero es fundamental definir en qué espacio de Hilbert y qué formulación débil vamos a utilizar.

Ejemplo 4.2.1.

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Definimos la solución débil del problema como un elemento $u \in H_0^1(I)$ que verifique

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I). \qquad (**)$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Se deduce multiplicando a ambos lados de la igualdad **(*)** por $v \in H_0^1(I)$ e integrando por partes (gracias al corolario 3.1.6). Se tiene entonces

$$-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv,$$

que, por el teorema 3.1.9 equivale a

$$\int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv. \qquad (**)$$

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H_0^1(I)$ a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv.$$

y al funcional (evidentemente continuo)

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_I fv. \end{aligned}$$

(Nótese que $a(u,v) = (u,v)_{H_0^1(I)}$, con lo que a es trivialmente coerciva y simétrica).

Obteniendo que existe un único elemento $u \in H_0^1(I)$ que verifica **(**)**. También obtenemos que dicho elemento u puede obtenerse mediante un problema de minimización, dado que

$$u = \min_{v \in H_0^1(I)} \{\frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv\}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Como $f \in L^2(I)$ entonces $u \in H^2(I)$, dado que

$$\int_I u'v' = \int_I (f-u)v \qquad \forall v \in C_c^1(I) \subset H_0^1(\Omega).$$

Es decir, $(u')' = (f-u) \in L^2(I)$. Si además $f \in C(\bar{I})$, entonces $u'' \in C(\bar{I})$, y por tanto gracias al teorema 3.1.2 (ver también la nota 20) $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **(Recuperación de solución clásica)** Por último veamos que una solución débil que además es C^2 es una solución clásica del problema. Sea $u \in C^2(\overline{I})$ con $u(0) = u(1) = 0$. Integramos por partes en **(**)** el primer término, es decir (nótese que $C_c^1(\overline{I}) \subset H_0^1(I)$),

$$\int_I u'v' = u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_I vu'' \qquad \forall \varphi \in C_c^1((0,1)),$$

y obtenemos

$$\int_0^1 (-u'' + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1((0,1)).$$

Por el corolario B.4.2.9, $-u'' + u = f$ *en casi todo punto*, y como $u \in C^2(\bar{I})$, en todo punto.

Ejemplo 4.2.2. Si las condiciones de contorno son no homogéneas, es decir, si el problema es:

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta. \end{cases}$$

Basta considerar una función u_0 afín (C^2), que verifique $u_0(0) = \alpha$, $u_0(1) = \beta$, y resolver para $\tilde{u} = u - u_0$ el problema

$$\begin{cases} -\tilde{u}(t)'' + \tilde{u}(t) = f(t) + u_0'' - u_0 & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ \tilde{u}(0) = 0,\ \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

que se reduce al ejemplo 4.2.1.

Ejemplo 4.2.3. (Sturm-Liouville)

$$\begin{cases} -(p(t)u'(t))' + q(t)u(t) = f(t) & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

Con $p \in C^1(\bar{I})$, $p(t) \geq \alpha > 0$ y $q \in C(\bar{I})$ con $q(t) \geq 0$.

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Si u es solución del problema, entonces, multiplicando a ambos lados por $v \in H_0^1(I)$ e integrando por partes obtenemos

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H_0^1(I)$ a la forma bilineal:

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv,$$

y al funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_I fv. \end{aligned}$$

a es evidentemente es una forma bilineal simétrica en $H_0^1(I)$, y teniendo en cuenta que

$$|a(u,v)| = \left| \int_I pu'v' + \int_I quv \right| \leq \left| \int_I \|p\|_\infty u'v' + \|q\|_\infty uv \right| \leq$$

$$\max\{\|p\|_\infty, \|q\|_\infty\} \left| \int_I u'v' + uv) \right| = C|(u,v)_{H_0^1(I)}| \leq$$

$$C||u||_{H_0^1(I)}||v||_{H_0^1(I)}.$$

a es continua.

La coercitividad de a se demuestra teniendo en cuenta que $q \geq 0$ y que $p \geq \alpha$ mediante la desigualdad de Poincaré (proposición 3.1.11),

$$a(v,v) =$$

$$\int_I pv'^2 + \int_I qv^2 \geq \int_I pv'^2 \geq \alpha \left\| v' \right\|_{L^2(I)}^2 \geq \frac{\alpha}{C}||v'||_{H^2(I)}.$$

Obtenemos que existe un único elemento $u \in H_0^1(I)$ que verifica la formulación débil. También obtenemos que dicho elemento u puede obtenerse mediante un problema de minimización, es decir,

$$u = \min_{v \in H_0^1(I)} \{\frac{1}{2} \int_I (pv'^2 + qv^2) - \int_I fv\}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Análogamente al ejemplo 4.2.1, evidentemente $pu' \in H^1$ con derivada $f - qu$, y por tanto (corolario 3.1.6) $u' = \frac{1}{p}(pu') \in H^1(I)$, con lo que $u \in H^2(I)$.

Y si además $f \in C(\bar{I})$, entonces $(pu')' = f - qu$ es continua (ya que q es continua y u tiene un representante continuo), lo que implica que $u \in C^2(\bar{I})$, como en el ejemplo 4.2.1.

(4) **(Recuperación de solución clásica)** Suponemos que $u \in C^2(\bar{I}) \cap H_0^1(\Omega)$ (se anula en la frontera de I). Nuevamente integramos por partes en la igualdad

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in C_c^1(\bar{I}).$$

Obteniendo

$$\int_I (-(pu')' + qu - f)v = 0 \qquad \forall v \in C_c^1(\bar{I}).$$

Por el corolario B.4.2.9, $-(pu')' + qu - f = 0$ en casi todo punto, y como $u \in C^2(\bar{I})$, en todo punto. Naturalmente u se anula en la frontera porque $u \in H_0^1(\Omega)$.

Ejemplo 4.2.4. Consideramos el problema de condiciones de contorno de tipo Neumann

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) \quad en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Los valores en la frontera de u son desconocidos, así que no tiene sentido utilizar como espacio de Hilbert $H_0^1(I)$. Una solución débil del problema es un elemento $u \in H^1(I)$ que verifique

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H^1(I). \qquad (**)$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Se lleva a cabo el mismo proceso descrito en el ejemplo 4.2.1 suponiendo que $u \in C^2(\bar{I})$ y verifica la ecuación inicial y las condiciones de contorno. Nótese que al integrar por partes el primer término obtenemos $-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'$, anulándose los dos primeros términos por las condiciones de contorno.

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H^1(I)$ a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$$

y al funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_I fv \end{aligned}$$

Obtenemos una única solución débil $u \in H^1(I)$, que además, por (**), está en $H^2(I)$.

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Si además f es continua, como ya hemos visto $u \in C^2(\bar{I})$.

(4) **(Recuperación de solución clásica)** En primer lugar debe tenerse en cuenta que como $u \in H^2(I)$, entonces $u' \in H^1(I)$, lo que significa que (Teorema 3.1.2) $u \in C^1(\bar{I})$. Esto asegura que la condición $u'(0) = 0 = u'(1)$ tenga sentido. Supongamos que u es una solución débil con $u \in C^2(\bar{I})$.

Integramos por partes (**), obteniendo

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H^1(I).$$

Como $C_c^\infty(I) \subset H_0^1(I) \subset H^1(I)$, y toda $v \in H_0^1(I)$ se anula en la frontera, obtenemos que $-u'' + u - f = 0$ (corolario B.4.2.9), de modo que

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \qquad \forall v \in H^1(I).$$

Y de la arbitrariedad de $v(1)$ y $v(0)$ deducimos que $u'(0) = u'(1) = 0$, de modo que u es la solución clásica del problema.

Ejemplo 4.2.5. El problema de condiciones de contorno de tipo Neumann no homogéneo

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u'(0) = \alpha,\ u'(1) = \beta \end{cases} \qquad (*)$$

se soluciona de manera idéntica al anterior, aplicando el teorema de Lax-Milgram en el espacio $H^1(I)$ con la misma forma bilineal a, i.e.

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

pero con el funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1), \end{aligned}$$

que es continuo (basta aplicar el teorema 3.1.5).

Ejemplo 4.2.6. Consideramos ahora el problema con condiciones de contorno mixtas

$$\begin{cases} -u(t)'' + u(t) = f(t) & en\ I = (0,1),\ f \in L^2(I) \\ u(0) = 0\ u'(1) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Para este problema definimos el espacio de Hilbert H como

$$H = \{v \in H^1(I) \bigm| v(0) = 0\}.$$

(Con el producto escalar de $H^1(I)$) Para demostrar que H es de Hilbert basta ver que es cerrado en $H^1(I)$, tomando cualquier sucesión convergente $(v_n) \subset H$, $v_n \to v$ y viendo que $v \in H$. En efecto, como (v_n) converge en norma $||\cdot||_{H^1(I)}$, también lo hace en norma $||\cdot||_{L^\infty(I)}$, la convergencia es por tanto uniforme y $v(0) = 0$ (para el representante continuo).

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Para $u \in C^2(I)$, al integrar por partes el primer término en la ecuación **(*)** obtenemos $-u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'$, anulándose el primero por la condición $u'(1) = 0$ y el segundo por el espacio H elegido, obteniendo la formulación débil

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H. \qquad (**)$$

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Se soluciona de manera idéntica al ejemplo 4.2.4, pero aplicando el teorema de Lax-Milgram en el espacio H. Es decir, con la misma forma bilineal a

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

y el funcional

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longrightarrow \int_I fv.$$

Obtenemos que existe un único elemento $u \in H$ que verifica **(**)**. También obtenemos que dicho elemento u puede obtenerse mediante un problema de minimización, es decir, que

$$u = \min_{v \in H} \{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** De manera idéntica a los casos anteriores. Si f es continua, entonces $u \in C^2(\overline{I})$.

(4) **(Recuperación de solución clásica)** Se recupera la solución clásica a partir de una solución débil C^2 nuevamente integrando por partes **(**)**, obteniendo

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) - \int_0^1 u''v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv \qquad \forall v \in H.$$

Como $C_c^\infty(I) \subset H_0^1(I) \subset H$, los dos primeros términos se anulan y se obtiene

$$-u'' + u - f = 0$$

(corolario B.4.2.9). Por último de $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$, como $v(0) = 0$ se tiene que $u'(1)v(1) = 0$, y de la arbitrariedad de v(1) se obtiene que $u'(1) = 0$.

4.3. Solución a ecuaciones en derivadas parciales elípticas mediante el método variacional

Procedemos a aplicar el método variacional para resolver algunas ecuaciones en derivadas parciales elípticas clásicas. Nos interesa no sólo demostrar la existencia y unicidad de solución para un determinado problema y convertirlo en uno de minimización, sinó también estudiar de qué manera se "transfiere"la regularidad a partir de una cierta hipótesis sobre la ecuación (secciones 4.3.2 y 4.3.3). Para ello es útil considerar las ecuaciones como operadores. En general, cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, un operador elíptico de segundo orden es de la forma (ver [12, sección 6.1] y [11, pág. 294])

$$L(u) = -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^N (a_i u)_{x_i} + a_0 u,$$

donde las a_{ij}, a_i y a_0 son funciones dadas y L satisface la condición de elipticidad, es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \ \forall x \in \Omega, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

La ecuación puede escribirse entonces como, por ejemplo, para condiciones de tipo Dirichlet,

$$\begin{cases} L(u) = f & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega, \end{cases}$$

para $f \in L^2(\Omega)$.

El proceso a seguir es, en esencia, el del capítulo anterior y el esquematizado en la sección 4.1. La diferencia principal, como ya hemos comentado, está en el paso (3), consistente en demostrar a partir de una solución débil que es además regular, y a la que dedicamos la sección 4.3.3. Comenzamos con el ejemplo canónico.

Ejemplo 4.3.1. (Problema de Dirichlet Homogéneo para el Laplaciano)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1, $\Delta u := \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}$ y $f \in L^2(\Omega)$. Buscamos una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que sea solución clásica, i.e. una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de (*). Una solución débil será un elemento $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (**)$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de (*). Entonces $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y como $u = 0$ en $\partial\Omega$, por el teorema 3.2.20 (en realidad no es necesario suponer, de momento, que Ω es de clase C^1, ver nota 34), $u \in H_0^1(\Omega)$. Para dicha u, tomamos $v \in C_c^1(\Omega)$, multiplicamos a ambos lados de la ecuación (*) e integramos en Ω:

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Utilizando la identidad de Green (proposición B.6.3) tenemos, para el primer término,

$$-\int_\Omega v \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}\ dV = -\int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n}\ dS + \int_\Omega \sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i}\ dV.$$

Como v es de soporte compacto la integral sobre la frontera es nula, de donde se obtiene que u verifica (**) para toda $v \in C_c^1(\Omega)$. Escribimos $\sum_{i=1}^N u_{x_i} v_{x_i} = \nabla u \nabla v$.

De la definición de $H_0^1(\Omega)$ se tiene que para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ existe una sucesión $(v_n) \subset C_c^1(\Omega)$ que converge a v en norma $H^1(\Omega)$. La ecuación (**) puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^N (u_{x_i}, v_{n_{x_i}})_{L^2(\Omega)} + (u, v_n)_{L^2(\Omega)} = (f, v_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^N (u_{x_i}, v_{n_{x_i}})_{L^2(\Omega)} + (u, v_n)_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} (f, v_n)_{L^2(\Omega)}.$$

Y de la continuidad del producto escalar obtenemos la igualdad para cualquier $v \in H_0^1(\Omega)$.

Nota 40. Hemos argumentado por densidad para demostrar la igualdad para todo $v \in H_0^1(\Omega)$. De hecho, la identidad de Green se verifica para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ (ver teorema B.7.1).

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv,$$

que es continua y coerciva dado que $a(u,v) = (u,v)_{H^2(\Omega)}$, y al funcional

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longrightarrow \int_\Omega fv.$$

Obteniendo que existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica (**) y que

$$u = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \{\frac{1}{2}\int_\Omega ((|\nabla v|)^2 + |v|^2) - \int_\Omega fv\}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Nos remitimos a la sección 4.3.2.

(4) **(Recuperación de solución clásica)** Ω es de clase C^1, $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema y además $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Por el teorema 3.2.20 $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se tiene la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C_c^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega). \qquad (**)$$

Volvemos a aplicar la identidad de Green para el primer término, obteniendo la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \; dV = -\int_\Omega v(\Delta u) \; dV + \int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n} \; dS.$$

Nuevamente v se anula en la frontera, y por tanto concluímos que u verifica

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = 0 \quad \forall v \in C_c^1(\Omega).$$

Por el corolario B.4.2.9 $-\Delta u + u - f = 0$ *en casi todo punto*, y por último, como $u \in C^2(\Omega)$, en todo punto, luego u es la solución clásica.

Ejemplo 4.3.2. (Problema de Dirichlet no homogéneo para el Laplaciano)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega \\ \qquad\quad u = g & en\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto de clase C^1 y acotado. g está definida en $\partial\Omega$ y además suponemos que existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\tilde{g} = g$ en $\partial\Omega$. Para dicha $\tilde{g}$, definimos el conjunto

$$C = \{v \in H^1(\Omega) \,\big|\, v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}.$$

C no depende de la elección de la $\tilde{g}$ que verifique la hipótesis deseada por el teorema 3.2.20. $C \subset H^1(\Omega)$ y es no vacío, convexo y cerrado. La formulación débil es como en el ejemplo anterior:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad \textbf{(**)}$$

Pero buscaremos la solución débil u en C, que es *único* (no depende de $\tilde{g}$). Naturalmente, tendremos que usar el teorema de Stampacchia.

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Se procede exactamente igual al ejemplo anterior. Partiendo de $u \in C^2(\overline{\Omega})$ se multiplica por $v \in H_0^1(\Omega)$ y se integra por partes el primer término. Como $u = g$ en $\partial\Omega$ entonces $u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$ y por tanto $u \in C$.

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Vamos a aplicar el teorema de **Stampacchia** (teorema 2.3.1) a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$$

y al funcional

$$\varphi(v) = \int_\Omega fv,$$

para lo cual debemos demostrar que las formulaciones **(**)** y

$$\int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) + \int_\Omega u(v-u) \geq \int_\Omega f(v-u) \quad \forall v \in C \qquad \textbf{(***)}$$

son equivalentes.

En primer lugar está claro que si u verifica **(**)** entonces u verifica **(***)**, puesto que $u-v \in C$ y por tanto $u-\tilde{g}, v-\tilde{g} \in H_0^1(\Omega)$, de modo que $u-v = u-\tilde{g}-(v-\tilde{g}) \in H_0^1(\Omega)$. Para demostrar la otra implicación para $u \in C$ escogemos $w \in H_0^1(\Omega)$ y aplicamos la desigualdad **(***)** para $v = u+w \in C$ y $v = u-w \in C$, obteniendo las desigualdades

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w + \int_\Omega uw \geq \int_\Omega fw \quad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla w - \int_\Omega uw \geq -\int_\Omega fw \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Es decir,

$$\int_\Omega \nabla u \nabla w + \int_\Omega uw = \int_\Omega fw \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Estamos en condiciones de utilizar el teorema de Stampacchia a la forma bilineal a y a φ en el conjunto convexo cerrado $C \subset H^1(\Omega)$, obteniendo un único elemento $u \in C$ que verifica **(***)** (que equivale a **(**)**) y que dicho elemento está caracterizado por ser el mínimo de la función

$$F : C \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longrightarrow \frac{1}{2}a(u,u) - \varphi(u) = \int_\Omega ((\nabla v)^2 + v^2 - fv).$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Nos remitimos a la sección 4.3.3.

(4) **(Una solución débil regular es solución clásica)** Se procede como en el ejemplo anterior partiendo de la formulación **(**)**.

Ejemplo 4.3.3. (Problema de Neumann homogéneo para el Laplaciano)

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega \\ \nabla_n u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto de clase C^1 y acotado y de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$. $\nabla_n u$ denota la derivada normal de u, es decir, $\nabla_n u = \nabla u \cdot n$, con n el vector normal a la frontera de Ω apuntando hacia el exterior. No tiene sentido trabajar en $H_0^1(\Omega)$ puesto que las condiciones son sobre las derivadas de u. Buscamos $u \in H^1(\Omega)$ que verifique la formulación débil

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \qquad (**)$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de **(*)**. Entonces $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para dicha u multiplicamos a ambos lados de la ecuación **(*)** por $v \in C^1(\Omega)$, e integramos en Ω:

$$-\int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Aplicamos la identidad de Green al primer término:

$$\int_\Omega v\Delta u\ dV = \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)v\ dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dV \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Con $\int_{\partial\Omega}(\nabla u \cdot n)v\ d(S) = 0$ por las condiciones de contorno. Concluimos por densidad que u verifica **(**)**, gracias al teorema 3.2.12, dado que estamos trabajando en $H^1(\Omega)$.

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$$

y al funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Obtenemos que existe un único $u \in H^1(\Omega)$ que verifica **(**)** y que

$$u = \min_{v \in H^1(\Omega)} \{\frac{1}{2}\int_\Omega ((|\nabla v|)^2 + |v|^2) - \int_\Omega fv\}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Nos remitimos a la sección 4.3.3.

(4) **(Una solución débil regular es solución clásica)** Sea $u \in H^1(\Omega)$ solución de **(**)** con $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Como viene siendo habitual, mediante la identidad de Green obtenemos que, para toda $v \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v\ dV + \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)v\ dS = \int_\Omega fv\ dV \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}). \quad \textbf{(***)}$$

Como $C_c^1(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ tenemos la igualdad para todo $v \in C_c^1(\Omega)$ y como v se anula en la frontera deducimos que

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C_c^1(\Omega),$$

concluyendo que $-\Delta u + u = f$ en Ω gracias al corolario B.4.2.9, de donde, volviendo a **(***)**, que

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot n)v\ dS = 0 \quad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Y por tanto, nuevamente por el corolario B.4.2.9 $(\nabla u \cdot n) = 0$ en $\partial\Omega$ (en todo punto, ya que $\nabla u \in C^1(\overline{\Omega})$), con lo que u verifica la formulación clásica.

Ejemplo 4.3.4.

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{en } \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

Con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto de clase C^1 y acotado, $f \in L^2(\Omega)$ y $c \in L^\infty(\Omega)$ con $c \geq 0$ (Por ejemplo, $c = 0$ es la ecuación de Poisson en N dimensiones y $c = 1$ es el problema 4.3.1). Buscamos $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique la formulación débil

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad \textbf{(**)}$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de **(*)**. Entonces $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ y como $u = 0$ en $\partial\Omega$, por el teorema 3.2.20, $u \in H_0^1(\Omega)$. Para dicha u multiplicamos a ambos lados de la ecuación **(*)** por $v \in C_c^1(\Omega)$, e integramos en Ω:

$$\int_\Omega \Delta uv + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv.$$

A partir de aquí utilizamos la identidad de Green (corolario B.6.3) y procedemos como en el ejemplo 4.3.1.

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Aplicamos el teorema de Lax-Milgram (teorema 2.3.3) en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$ a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv$$

y al funcional

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \int_\Omega fv. \end{aligned}$$

Obtenemos que existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica (**) y que

$$u = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \{\frac{1}{2}\int_\Omega ((|\nabla v|)^2 + c|v|^2) - \int_\Omega fv\}.$$

La **continuidad** de a se deduce de la desigualdad de Hölder:

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u \nabla v + cuv\right| \leq \int_\Omega |\nabla u \nabla v| + \int_\Omega |cuv| \leq$$
$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq$$
$$\max\{1, \|c\|_{L^\infty(\Omega)}\} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Y por otra parte, la **coercitividad** se tiene de $a(v,v) = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_2^2 + \int_\Omega cv^2 + \geq \sum_{i=1}^N \|v_{x_i}\|_2^2 \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$ con $\alpha > 0$ por la desigualdad de Poincaré.

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Nos remitimos a la sección 4.3.3.

(4) **(Una solución débil regular es solución clásica)** Ω es de clase C^1 (ver teorema 3.2.20 y nota 34), $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema y además $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Por el teorema 3.2.20 $u = 0$ en $\partial\Omega$. Se tiene la igualdad

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in C_c^1(\Omega) \qquad (**).$$

Volvemos a aplicar la identidad de Green para el primer término y procedemos como en el ejemplo 4.3.1.

4.3.1. La condición de elipticidad

Nos planteamos ahora estudiar un problema más general. Los ejemplos 4.3.1 y 4.3.4 son en realidad casos particulares del que vamos a estudiar a continuación. El objetivo es ver claramente la razón por la cual nos ocupamos solamente de las ecuaciones en derivadas parciales **elípticas** (ver también lema 4.3.7). Consideremos la siguiente ecuación:

Ejemplo 4.3.5.

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + a_0 u = f & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y de clase C^1, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ con $a_0 \geq 0$ y los a_{ij} satisfacen la condición de elipticidad:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ para\ \alpha > 0.$$

Una solución clásica es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifica (*) en el sentido clásico, y una solución débil una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique la formulación débil

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (**)$$

(1) **(Toda solución clásica es solución débil)** Como en los anteriores ejemplos, en la ecuación **(*)** multiplicamos por $v \in C_c^1(\Omega)$ y aplicamos la identidad de Gauss-Green (corolario B.6.2) al primer término para cada derivada parcial respecto a j, obteniendo

$$\int_\Omega (a_{ij}u_{x_i})_{x_j}v = -\int_\Omega (a_{ij}u_{x_i})v_{x_j}$$

gracias al soporte compacto de v. Se concluye para toda $v \in H_0^1(\Omega)$ como ya hemos visto anteriormente, por densidad.

(2) **(Existencia y unicidad de solución débil)** Se aplica el teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \int_\Omega a_0uv$$

y al funcional $\varphi \in H_0^1(\Omega)^*$ definido como $\varphi(v) = \int_\Omega fv$.

La continuidad de a se deduce de la desigualdad de Hölder para ambas integrales. La desigualdad de Poincaré, $a_0 \geq 0$ y la condición de **elipticidad** implican la **coercitividad**, es decir, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \int_\Omega a_0v^2 \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \geq C\alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 .$$

Si además la matriz formada por los (a_{ij}) es simétrica, claramente la forma bilineal es **simétrica** y por tanto la solución débil u es la solución problema de minimización

$$\min_{v\in H_0^1(\Omega)} \{\frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} + \int_\Omega a_0v^2\}.$$

(3) **(Regularidad de la solución débil)** Nos remitimos a la sección 4.3.3.

(4) **(Una solución débil regular es solución clásica)** Se razona análogamente a los casos anteriores.

Nota 41. El método variacional se puede aplicar a otros problemas, como el ejemplo 4.3.5 con condiciones de tipo Neumann. La formulación débil es la misma pero en el espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$. Se procede de manera a idéntica a este ejemplo, pero mostrando la equivalencia de las formulaciones como en el ejemplo 4.3.3.

4.3.2. Regularidad para el problema del laplaciano

En esta sección nos proponemos llevar a cabo el paso (3) del método variacional para el problema del laplaciano. Estudiaremos el problema homogéneo con condiciones de frontera de tipo Dirichlet. En la última sección pueden consultarse los resultados sobre regularidad para otros problemas.

Análogamente al caso 1-dimensional, se realiza una suposición sobre la regularidad de f para ver de qué manera se transfiere a la solución del problema, u. Naturalmente, también habrá que suponer una cierta regularidad sobre el dominio Ω:

Definición 4.3.1. Con los conjuntos Q, Q_+ y Q_0 definidos de la definición 3.2.4 y $m \in \mathbb{N}$, decimos que un abierto Ω es de clase C^m si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un entorno U_x de x en $\mathbb{R}^N$ y una aplicación biyectiva $H_x : Q \to U_x$ tal que:

(i) $H_x \in C^m(\overline{Q})$.

(ii) $H_x^{-1} \in C^m(\overline{U_x})$.

(iii) $H_x(Q_+) = U_x \cap Q$.

(iv) $H_x(Q_0) = U_x \cap \partial\Omega$.

Y que Ω es de clase C^∞ si es de clase C^m para todo $m \in \mathbb{N}$. En adelante trabajaremos con frecuencia con los conjuntos Q, Q_+ y Q_0.

Teorema 4.3.1. ***(Regularidad del problema del Laplaciano con condiciones de tipo Dirichlet)***

Sea o bien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado o bien $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

(Formulación débil para el problema del Laplaciano con condiciones de tipo Dirichlet homogéneas). Según la regularidad de f y de Ω:

(1) Si $f \in L^2(\Omega)$ y Ω es de clase C^2, entonces

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{i.e. } u \in H^2(\Omega).$$

(2) Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2}, entonces

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^m(\Omega)} \quad \text{i.e. } u \in H^{m+2}(\Omega).$$

(3) Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2} con $m > \frac{N}{2}$, entonces

$$u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

(4) Si $f \in H^\infty(\Omega)$ y Ω es de clase C^∞ entonces

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Nota 42. $f \in H^\infty(\Omega)$ significa que $f \in H^m(\Omega)$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

La demostración del teorema es bastante técnica. Utilizaremos toda la teoría expuesta a lo largo de los cuatro capítulos, incluyendo los resultados relativos a las topologías débiles.

Para mayor claridad, vamos a dividir el enunciado y la prueba en diferentes teoremas. El primer paso consiste en demostrar el resultado para $\Omega = \mathbb{R}^N$. Este paso es considerablemente más sencillo que el caso general, y sirve para hacerse una idea en términos generales de en qué consiste la demostración. Después se demuestra para Ω en general utilizando como lema el resultado para $\mathbb{R}^N$. Para cada uno de ellos primero debemos demostrar la implicación (1): $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$ y después la implicación (2): $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$, obteniendo las conclusiones (3) y (4) como corolario inmediato (ver corolario 4.3.11). Comenzamos con tres lemas previos.

Lema 4.3.2. *Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 < p \leq \infty$. $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ si y sólo si existe una constante C tal que $\forall h \in \mathbb{R}^N$ con $h \neq 0$*

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C|h|,$$

donde $|h| = |h_1| + \ldots + |h_N|$. Y en particular podemos tomar $C = \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$. Por comodidad, a partir de ahora usaremos la ya explicada notación $\|\nabla u\| = \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|$.

Demostración. Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. En primer lugar suponemos que $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, y definimos $v(t) = u(x+th)$, de donde $v'(t) = h\nabla u(x+th)$. Así:

$$|u(x+h) - u(x)| = |v(1) - v(0)| = \left| \int_0^1 v'(t)dt \right| = \left| \int_0^1 h\nabla u(x+th)dt \right|.$$

Usando la desigualdad de Hölder para $t \to h\nabla u(x+th) \in L^2((0,1))$ obtenemos

$$\left| \int_0^1 h\nabla u(x+th) \right| dt \leq \int_0^1 |h\nabla u(x+th)|\, dt \leq \left(\int_0^1 |h\nabla u(x+th)|^p\, dt \right)^{1/p},$$

y si elevamos a la p obtenemos

$$|u(x+h) - u(x)|^p \leq \int_0^1 |h\nabla u(x+th)|^p dt.$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^N$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+h) - u(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |h\nabla u(x+th)|^p\, dt\ dx =$$

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |h\nabla u(x+th)|^p dx\ dt = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |h\nabla u(y)|^p dy\ dt = \int_{\mathbb{R}^N} |h\nabla u(y)|^p dy.$$

(Mediante el cambio de variables $y = x + th$). Y por tanto

$$\|u(x+h) - u(x)\|_p \leq \|h\nabla u\|_p.$$

(Nótese que evidentemente $\|h\nabla u\|_p \leq |h| \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_p = |h|\, \|\nabla u\|_p$) Para demostrar el resultado para cualquier $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ basta argumentar por densidad.

Para demostrar el recíproco tomamos cualquier $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Tenemos que, por la hipótesis y la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(x+h) - u(x))\varphi \right| \leq \|u(x+h) - u(x)\|_p \|\varphi\|_{p'} \leq C|h|\, \|\varphi\|_{p'}.$$

Por otra parte,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(x+h) - u(x))\varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(x+h)\varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)\ dx.$$

Mediante el cambio de variables $x + h = y$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x+h)\varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))\ dy,$$

de modo que, como $h \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))}{|h|}\,dy \leq C\,\|\varphi\|_{p'}\,.$$

Tomando para cada $i = 1,\ldots,N$ $h = te_i$ y el límite obtenemos la desigualdad

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_{x_i}\right| = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(y)(\varphi(y-h)-\varphi(y))}{|h|}\,dy \leq C\,\|\varphi\|_{p'}$$

A partir de $|\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi_{x_i}| \leq C\,\|\varphi\|_{p'}$ se utiliza el lema 4.3.3 para demostrar que $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Lema 4.3.3. *Sea $u \in L^p(\Omega)$ con $1 < p \leq \infty$. Si existe una constante C tal que*

$$\left|\int_\Omega u\varphi_{x_i}\right| \leq C\,\|\varphi\|_{p'} \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1,\ldots,N,$$

entonces $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Demostración. Para cada φ_{x_i} definimos el funcional lineal

$$f_i : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi \longrightarrow \int_\Omega u\varphi_{x_i}.$$

De la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$ en $L^{p'}(\Omega)$ y de la continuidad de f_i (de la hipótesis tenemos que f_i es acotado), deducimos que existe una única extensión continua (ver proposición B.2.2) del funcional a $L^{p'}(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz (teorema B.4.1.11) sabemos que existe una función $g_i \in L^p(\Omega)$ tal que

$$f_i(\varphi) = \int_\Omega u\varphi_{x_i} = \int_\Omega g_i\varphi \qquad \forall\varphi \in L^{p'}(\Omega),$$

y en particular para toda $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, lo que prueba que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, puesto que $u_{x_i} = -g_i$. □

Lema 4.3.4. *Sea $u \in H_0^1(Q_+)$ con*

$$sop(u) \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid \left(\sum_{i=1}^{N-1}|x_i|^2\right)^{1/2} < 1-\delta,\ 0 \leq x_N < 1-\delta\} \subsetneq Q_+$$

y $h \in Q_0$ tal que $\left(\sum_{i=1}^{N-1}|h_i|^2\right)^{1/2} < \delta < 1$. Entonces

$$\|D_h u\|_{L^2(Q_+)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(Q_+)}\,.$$

Donde definimos $D_h u = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}$. (Ver figura c).

Demostración. La primera parte es idéntica a la demostración del lema 4.3.2. Se repite el proceso para $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiendo $v(t) = u_n(x+th)$ con $t \in [0,1]$, de donde $v'(t) = h\nabla u_n(x+th)$ y se obtiene

$$|u_n(x+h)-u_n(x)|^2 \leq \int_0^1 |h\nabla u_n(x+th)|^2 dt.$$

Integramos sobre Q_+:

$$\int_{Q_+} |u_n(x+h) - u_n(x)|^2 dx \leq \int_{Q_+} \int_0^1 |h\nabla u_n(x+th)|^2 dt\ dx \leq$$

$$\int_0^1 \int_{Q_+} |h\nabla u_n(x+th)|^2 dx\ dt = \int_0^1 \int_{Q_+ + th} |h\nabla u_n(y)|^2 dy\ dt = \int_{Q_+ + th} |h\nabla u_n(y)|^2 dy.$$

(Mediante el cambio de variables $y = x + th$). Y por tanto

$$\|u_n(x+h) - u_n(x)\|_{L^2(Q_+)} \leq \|h\nabla u_n\|_{L^2(Q_+ + th)}.$$

Para demostrar el resultado extendemos $u \in H_0^1(Q_+)$ a $\overline{u} \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ como 0 en $\mathbb{R}^N - Q_+$ (lema 3.2.22) y tomamos límites a ambos lados de la igualdad aplicando el teorema 3.2.2 al conjunto $Q_+ + th \subset\subset \mathbb{R}^n$ obteniendo

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|h\nabla u\|_{L^2(Q_+ + th)}.$$

Pero de la hipótesis sobre h tenemos que $\|h\nabla u\|_{L^2(Q_+ + th)} = \|h\nabla u\|_{L^2(Q_+)}$ y evidentemente $\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(Q_+)} \leq \|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, de modo que

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{L^2(Q_+)} \leq \|h\nabla u\|_{L^2(Q_+)}.$$

$\square$

Teorema 4.3.5. ***(El caso** $\Omega = \mathbb{R}^N$**)*** *Sea $u \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ tal que u verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

(1) Si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{i.e. } u \in H^2(\mathbb{R}^N).$$

(2) Si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, entonces

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)} \quad \textit{i.e. } u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N).$$

Demostración. En **(*)**, dado que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, podemos tomar $\varphi = D_{-h}(D_h u)$, con $D_h u = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}$, como en el lema anterior, es decir,

$$\varphi(x) = \frac{2u(x) - u(x+h) - u(x-h)}{|h|^2}.$$

Operando obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D_h u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |D_h u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u)$$

Es decir,

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D_h u|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} |D_h u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} f D_{-h}(D_h u) \leq \|f\|_2 \|D_{-h}(D_h u)\|_2$$

Gracias a la desigualdad de Hölder. Además, por el lema 4.3.2, y dado que $D_h u \in H^1(\mathbb{R}^N)$,

$$\|D_{-h}(D_h u)\|_2 \leq \|\nabla D_h u\|_2 \qquad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Concluimos que

$$\|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_2 \, \|\nabla(D_h u)\|_2 \,,$$

de donde, evidentemente

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_2 \,.$$

En particular

$$\|D_h u_{x_i}\|_2 \leq \|f\|_2 \qquad \forall i = 1, ...N,$$

y por el lema 4.3.2 $u_{x_i} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ $\forall i = 1, ..., N$ y por tanto $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Probamos ahora (2): Si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ entonces $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$. Lo haremos por inducción sobre m, comenzando con el caso $f \in H^1(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u \in H^3(\mathbb{R}^N)$.

Llamamos Du a cualquiera de las derivadas u_{x_i} de u (notación que será útil en el caso general), y queremos ver que $Du \in H^2(\mathbb{R}^N)$, lo que quedará probado, aplicando el resultado (1) a Du ($Df \in L^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow Du \in H^2(\mathbb{R}^N)$), si mostramos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(Du)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (Du)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (Df)\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\mathbb{R}^N). \quad (**)$$

Consideramos $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, y podemos reemplazar φ por $D\varphi$ en (*), de donde

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla(D\varphi) + \int_{\mathbb{R}^N} u(D\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(D\varphi).$$

Por ser φ de soporte compacto podemos aplicar la identidad de Green (para espacios de Sóbolev, proposición B.7.1) a cada una de las integrales y concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(Du)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (Du)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (Df)\varphi.$$

Como $C^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N) = H^1_0(\mathbb{R}^N)$ obtenemos el resultado deseado.

Para ver $f \in H^m(\mathbb{R}^N) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$ suponemos que se verifica $f \in H^{m-1} \Rightarrow u \in H^{m+1}(\mathbb{R}^N)$.

Si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ entonces $D^m f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, donde $D^m f$ es cualquier derivada de orden m de f. Queremos ver que $D^m u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ y sabemos que $D^m u \in H^1(\mathbb{R}^N) = H^1_0(\mathbb{R}^N)$. De la hipótesis de inducción tenemos que, $\forall \varphi \in H^1_0(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(D^{m-1}u)\nabla(D\varphi) + \int_{\mathbb{R}^N} (D^{m-1}u)\nabla(D\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} (D^{m-1}f)\nabla(D\varphi),$$

de donde como en el caso base de la inducción concluimos la desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(D^m u)\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^N} (D^m u)\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} (D^m f)\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\mathbb{R}^N),$$

a partir de la cual obtenemos que aplicando el caso (1) que $D^m u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. □

Teorema 4.3.6. ***(El caso general*** Ω***,*** $f \in L^2(\Omega) \Rightarrow u \in H^2(\Omega)$***)***

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado y* $u \in H_0^1(\Omega)$*, que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

(1) Si $f \in L^2(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^2*, entonces*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad i.e.\ u \in H^2(\Omega).$$

Demostración. Esquematizamos los pasos a seguir (ver nota 26 y *figura a*): **1)** Partiendo de $u \in H_0^1(\Omega)$ y con el objetivo de demostrar que $u_{x_i} \in H^1(\Omega)$ $\forall i$, se escribe $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$, donde $\{\theta_0, ..., \theta_k\}$ es una partición de la unidad, como se describe en el lema 3.2.9. El objetivo es mostrar que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ $\forall i$. **2)** Para ver que $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$, se extiende a $\mathbb{R}^N$ gracias al lema 3.2.3 y se aplica el teorema 4.3.5. Nótese que $sop(\theta_0) \subset \Omega$, y por ello este paso conoce como **estimaciones en el interior**. **3)** Para ver que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ debemos tener en cuenta que los k abiertos U_i forman un cubrimiento finito de la frontera para cada cual tenemos una función θ_i, por ello este paso se conoce como **estimaciones cerca de la frontera**. **3.1)** Mediante $H_i \in C^2(\overline{Q})$ se transfiere $\theta_i u$ para $i \geq 1$ de $H_0^1(\Omega \cap U_i)$ a $w \in H_0(Q_+)$. **3.2)** Se prueba que la transferencia mantiene la condición de elipticidad. **3.3)** Se prueba que, en efecto, $w \in H^2(Q_+)$. **3.4)** Por último, se concluye a partir del paso anterior que $\theta_i u \in H^2(\Omega \cap U_i)$ y por tanto que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$.

La *figura b* muestra para $\mathbb{R}^2$ intuitivamente la situación del abierto Ω, el cubrimiento $\{U_i\}$ y los soportes de las funciones θ_i:

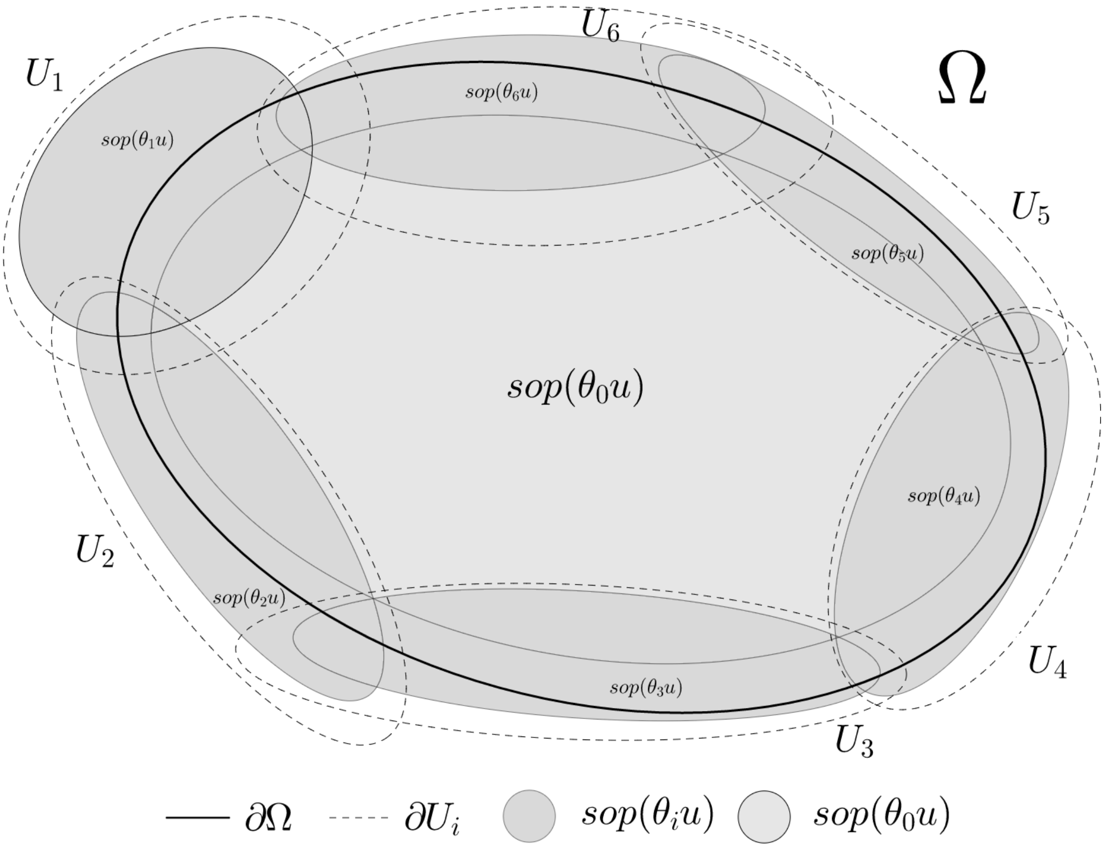

figura b

1) Ω está acotado y por tanto $\partial\Omega$ es compacto. Como en el teorema 3.2.10 utilizamos particiones de la unidad, escogiendo el cubrimiento finito $(U_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ como dicta la definición 4.3.1 (Ω es de clase C^2) y aplicando después el lema 3.2.9 a $\partial\Omega$. Escribimos u como $u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u$.

2) (Estimaciones en el interior) Queremos ver, en primer lugar, que $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$. Del lema 3.2.9 sabemos que $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$. Si extendemos $\theta_0 u$ a $\overline{\theta_0 u}$ como 0 fuera de Ω sabemos que $\overline{\theta_0 u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (lema 3.2.3), y a partir de **(*)** tenemos que $\overline{\theta_0 u}$ es solución débil en $\mathbb{R}^N$ de (para todas las funciones extendidas a $\mathbb{R}^N$, por comodidad utilizamos la misma notación)

$$-\Delta(\theta_0 u) + \theta_0 u = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0\nabla u - (\Delta\theta)u.$$

Como $\theta_0 f - 2\nabla\theta_0\nabla u - (\Delta\theta)u \ \in L^2(\mathbb{R}^N)$ podemos aplicar el teorema 4.3.5 ($\Omega = \mathbb{R}^N$) y concluir que

$$\|\theta_0 u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|\theta_0 f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|2\nabla\theta_0\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|(\Delta\theta_0)u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \leq$$

$$C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}) \leq C\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\,.$$

(Escribiendo $\varphi = u$ en **(*)**). Por tanto $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$.

3) (Estimaciones cerca de la frontera) El objetivo es mostrar que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ $\forall i = 1,\dots,k$.

3.1) Como el soporte de θ_i es compacto en cada U_i y $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $\theta_i u \in H_0^1(\Omega\cap U_i)$, de modo que $\theta_i u$ es solución débil de la ecuación en $\Omega \cap U_i$

$$-\Delta(\theta_i u) = \theta_i f - \theta_i u - 2\nabla\theta_i\nabla u - (\Delta\theta_i)u.$$

Evidentemente $g := \theta_i f - \theta_i u - 2\nabla\theta_i\nabla u - (\Delta\theta_i)u \ \in L^2(\Omega \cap U_i)$. Además escribiendo la formulación débil de la ecuación anterior con g:

$$\int_{\Omega\cap U_i} \nabla(\theta_i u)\nabla\varphi = \int_{\Omega\cap U_i} g\varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega\cap U_i).$$

Mediante $H_i : Q \to U_i \ \in C^2(\overline{Q})$, que denotamos H por comodidad, transferimos $\theta_i u_{|\Omega\cap U_i}$ a Q_+, i.e. definimos:

$$w : Q_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow \theta_i u(H(y))$$

i.e $w(H^{-1}(x)) = \theta_i u(x)$ $\forall x \in \Omega\cap U_i$.

Demostraremos después **3.2)** (Lema 4.3.7) que $w \in H_0^1(Q_+)$ y que se convierte en solución del problema:

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl} w_{y_k} \psi_{y_l}\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi\, dy \qquad \forall\psi \in H_0^1(Q_+) \qquad (***)$$

Con $\tilde{g} = (g\circ H)|Jac(H)| \in L^2(Q_+)$ y donde los a_{kl} mantienen las condiciones de elipticidad. (Denotando $\sum_{k,l=1}^{N} = \sum_{k=1}^{N}(\sum_{l=1}^{N})$ y $Jac(H)$ al determinante de la matriz jacobiana).

3.3) Demostraremos que $w \in H^2(Q_+)$ mostrando que para cada derivada parcial $\frac{\partial w}{\partial y_k} = w_{y_k}$ verifica

$$\left| \int_\Omega w_{y_k} \psi_{y_i} \right| \leq C \left\| \tilde{g} \right\|_2 \left\| \psi \right\|_2 \qquad \forall \psi \in C_c^1(Q_+) \; \forall i = 1, ..., N,$$

para aplicar después el lema 4.3.3. Por comodidad, como de costumbre, vamos a denotar la constante como C, aunque esta vaya variando al aplicar las desigualdades demostradas dependiendo de los a_{kl}. Tomamos $h \in Q_0$ con $|h|$ lo suficientemente pequeño para que $D_{-h}(D_h w) \in H_0^1(Q_+)$, lo cual puede hacerse porque el soporte por definición es cerrado y está contenido en el abierto Q (¡Pero no necesariamente en Q_+!), es decir, existe $\delta > 0$ tal que $sop(w) \subset \{(x_1, ..., x_N) \mid (\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2)^{1/2} < 1 - \delta \ y \ 0 \leq x_N < 1 - \delta\}$. h sólo puede tomarse en Q_0, como muestra la $figura$ c. Es por ello que primero se prueba en Q_+ que $w_{x_i} \in H^1(Q_+)$ para $i \neq N$ y después se argumenta para w_{x_N} escribiéndola en función de las demás derivadas gracias a la ecuación de partida. En la $figura$ c hemos destacado en gris el conjunto $sop(\theta_i u) \cap \Omega$ y el subconjunto de Q_+ en el que se transforma a través de $H = H_x$, $sop(w)$.

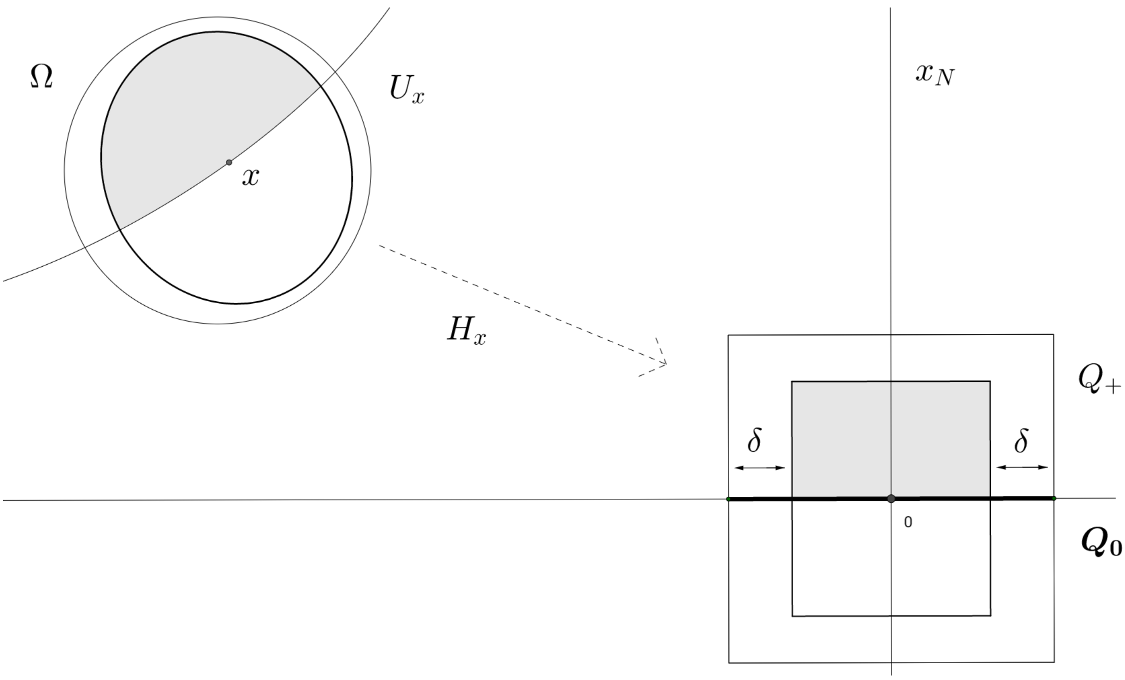

figura c

Sustituímos en **(***)**, obteniendo

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} D_h(a_{kl} w_{y_k})(D_h w)_{y_l} = \int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w),$$

y por el lema 4.3.4 tenemos la desigualdad

$$\int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w) \leq \left\| \tilde{g} \right\|_2 \left\| D_{-h}(D_h w) \right\|_2 \leq \left\| \tilde{g} \right\|_2 \left\| \nabla(D_h w) \right\|_2 .$$

Además, reescribiendo $D_h(a_{kl}w_{y_k})(y)$ como

$$D_h(a_{kl}w_{y_k})(y) = a_{kl}(y+h)(D_h(w(y)))_{y_k} + (D_h a_{kl}(y))w_{y_k}(y)$$

y de la condición de elipticidad obtenemos

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} D_h(a_{kl}w_{y_k})(D_h w)_{y_l} \geq \alpha \left\|\nabla(D_h w)\right\|_2^2 - C\left\|w\right\|_{H^1}\left\|\nabla(D_h w)\right\|_2 .$$

Agrupando las desigualdades probadas ($\alpha > 0$):

$$\alpha \left\|\nabla(D_h w)\right\|_2^2 - C\left\|w\right\|_{H^1}\left\|\nabla(D_h w)\right\|_2 \leq \left\|\tilde{g}\right\|_2 \left\|\nabla(D_h w)\right\|_2$$

i.e:

$$\left\|\nabla(D_h w)\right\|_2 \leq C(\left\|w\right\|_{H^1} + \left\|\tilde{g}\right\|_2).$$

Y por la desigualdad de Poincaré

$$\left\|\nabla(D_h w)\right\|_2 \leq C\left\|\tilde{g}\right\|_2 .$$

Tomamos ahora $(D_h u)_{y_i} = D_h u_{y_i}$ para cada i y $\psi \in C_c^\infty(Q_+)$. Tomamos h suficientemente pequeño para que $\psi(y+h)$ y $\psi(y-h)$ sean de sopore compacto en Q_+. Si ω es el soporte de ψ, integramos:

$$\int_{Q_+} D_h w_{y_i}\psi = \int_\omega D_h w_{y_i}\psi = \frac{1}{|h|}\int_\omega \left(w_{y_i}(y+h) - w_{y_i}(y)\right)\psi(y) =$$

$$\frac{1}{|h|}\left(\int_\omega w_{y_i}(y+h)\psi(y) - \int_\omega w_{y_i}(y)\psi(y)\right) = \frac{1}{|h|}\left(\int_{\omega+h} w_{y_i}(y)\psi(y-h) - \int_\omega w_{y_i}\psi\right) =$$

$$\frac{1}{|h|}\left(\int_{Q_+} w_{y_i}(y)\psi(y-h) - \int_{Q_+} w_{y_i}(y)\psi(y)\right) = \int_{Q_+} w_{y_i}D_{-h}\psi.$$

Como $D_{-h}\psi \in C_c^\infty(Q_+)$, de la definición de derivada débil para $w \in H^1(Q_+)$ tenemos que

$$\left|\int_{Q_+} D_h w_{y_i}\psi\right| = \left|\int_{Q_+} w_{y_i}D_{-h}\psi\right| = \left|\int_{Q_+} wD_{-h}\psi_{y_i}\right|.$$

Agrupando las igualdades mostradas, por la desigualdad de Hölder y por la desigualdad ya demostrada ($\left\|\nabla(D_h w)\right\|_2 \leq C\left\|\tilde{g}\right\|_2$) finalmente obtenemos

$$\left|\int_{Q_+} wD_{-h}\psi_{y_i}\right| = \left|\int_{Q_+} D_h w_{y_i}\psi\right| \leq \left\|D_h w_{y_i}\right\|_2 \left\|\psi\right\|_2 \leq C\left\|\tilde{g}\right\|_2\left\|\psi\right\|_2 .$$

$h \in Q_0$, luego para $h = |h|e_k$ con $k = 1, \ldots, N-1$ tomando el límite en h,

$$\lim_{h\to 0}\left|\int_{Q_+} wD_{-h}\psi_{y_i}\right| = \left|\int_{Q_+} w\psi_{y_k y_i}\right| \leq C\left\|\tilde{g}\right\|_2\left\|\psi\right\|_2 .$$

Y de nuevo, por la definición de derivada débil para w, y dado que $\psi_{y_k y_i} = \psi_{y_i y_k}$,

$$\left|\int_{Q_+} w\psi_{y_k y_i}\right| = \left|\int_{Q_+} w_{y_i}\psi_{y_k}\right| \leq C\left\|\tilde{g}\right\|_2\left\|\psi\right\|_2 \qquad \forall (i,k) \neq (N,N).$$

Lo que queda por demostrar para aplicar el lema 4.3.3 es que

$$\left| \int_{Q_+} w_{y_N} \psi_{y_N} \right| \leq C \, \|\tilde{g}\|_2 \, \|\psi\|_2 \, .$$

En la ecuación (***) reemplazamos ψ por $\frac{1}{a_{NN}}\psi \in C^1_c(Q_+)$ (téngase en cuenta que $a_{NN} \geq \alpha > 0$ por las condiciones de elipticidad y que $a_{NN} \in C^1(\overline{Q_+})$):

$$\int_{Q_+} a_{NN} w_{y_N} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right)_{y_N} = \int_{Q_+} \frac{\tilde{g}}{a_{NN}} \psi - \sum_{(k,l) \neq (N,N)} \int_{Q_+} a_{kl} w_{y_k} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right)_{y_l} .$$

Tenemos que

$$\int_{Q_+} a_{NN} w_{y_N} \left(\frac{\psi}{a_{NN}} \right)_{y_N} =$$

$$\int_{Q_+} a_{NN} w_{y_N} \left(\frac{\psi_{y_N} a_{NN} - \psi (a_{NN})_{y_N}}{a^2_{NN}} \right) = \int_{Q_+} w_{y_N} \psi_{y_N} - \int_{Q_+} \frac{(a_{NN})_{y_N} w_{y_N} \psi}{a_{NN}},$$

de modo que

$$\int_{Q_+} w_{y_N} \psi_{y_N} =$$

$$\int_{Q_+} \frac{(a_{NN})_{y_N} w_{y_N} \psi}{a_{NN}} + \int_{Q_+} \frac{\tilde{g}}{a_{NN}} \psi \, +$$

$$\sum_{(k,l) \neq (N,N)} \left(\int_{Q_+} w_{y_k} (a_{kl})_{y_l} \frac{\psi}{a_{NN}} - \int_{Q_+} w_{y_k} \left(\frac{\psi a_{kl}}{a_{NN}} \right)_{y_l} \right) .$$

Y podemos aplicar la acotación mostrada para $(k,l) \neq (N,N)$ para acotar en función de las constantes a_{kl} y las demás derivadas parciales la derivada u_{x_N}. Obtenemos la desigualdad buscada,

$$\left| \int_{Q_+} w_{y_N} \psi_{y_N} \right| \leq C(\|w\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_2) \, \|\psi\|_2 \, .$$

El lema 4.3.3 muestra que $w_{y_i} \in H^1(Q_+) \; \forall i = 1, ..., N$, lo que concluye la prueba de que $w \in H^2(Q_+)$.

3.4) Para cada $x \in \Omega \cap U_i$, $\theta_i u(x) = w(H^{-1}(x))$, y gracias a que $H^{-1} \in C^2(\overline{U}_i)$ (Ω es de clase C^2) $\theta_i u(x) \in H^2(U_i \cap \Omega)$, usando la proposición 3.2.7. $\theta_i u$ es de soporte compacto en U_i (ver *figura c*) y por tanto $\theta_i u \in H^2(\Omega)$. □

Nos queda por demostrar el lema 4.3.7, que muestra que la condición de elipticidad

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \; \forall x \in \Omega, \; \forall \xi \in \mathbb{R}^N \; \textit{para} \; \alpha > 0$$

se conserva bajo cambios de variable.

Lema 4.3.7. *Con la notación de la demostración del teorema 4.3.6, $w \in H_0^1(Q_+)$ y verifica*

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl} w_{y_k} \psi_{y_l} \ dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi \ dy \qquad \forall \psi \in H_0^1(Q_+). \qquad \text{(***)}$$

Donde $\tilde{g} = (g \circ H)|Jac(H)| \in L^2(Q_+)$, donde $Jac(H)$ es el determinante de la matriz jacobiana y los $a_{kl} \in C^1(\overline{Q}_+)$ satisfacen la condición de elipticidad.

Demostración. Sea $\psi \in H_0^1(Q_+)$, denotamos $J = H^{-1}$ y $v = \theta_i u$ a las funciones de la demostración del teorema. También definimos $\varphi(x) = \psi(Jx) \in H_0^1(\Omega \cap U_i)$ para $x \in \Omega \cap U_i$, de modo que, por el corolario 3.2.7 (utilizamos superíndices para denotar las componentes de J),

$$v_{x_j} = \sum_{k=1}^{N} w_{y_k} J_{x_j}^k \quad y \quad \varphi_{x_j} = \sum_{l=1}^{N} \psi_{y_l} J_{x_j}^l.$$

(Nótese que $v(x) = w(J(x))$). Utilizando estas dos identidades:

$$\int_{\Omega \cap U_i} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\Omega \cap U_i} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} w_{y_k} J_{x_j}^k \psi_{y_l} J_{x_j}^l dx.$$

Y efectuamos un cambio de variables usando el difeomorfismo H:

$$\int_{Q_+} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} w_{y_k} J_{x_j}^k \psi_{y_l} J_{x_j}^l \ |Jac(H)| \ dy.$$

Si escribimos $a_{kl} = \sum_{j=1}^{N} J_{x_j}^k J_{x_j}^l \ |Jac(H)|$ entonces la igualdad anterior se convierte en

$$\int_{Q_+} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_{kl} w_{y_k} \psi_{y_l} \ dy.$$

Nótese que $\theta_i u$ verifica la ecuación $-\Delta(\theta_i u) = g$, y mediante el difeomorfismo H:

$$\int_{\Omega \cap U_i} g(x)\varphi(x) dx = \int_{Q_+} g(H(y))\psi(y)|Jac(H)| dy.$$

Combinando estas dos últimas igualdades obtenemos la ecuación (***).

Por último queremos ver que los a_{kl} satisfacen la condición de elipticidad. En primer lugar nótese que $a_{kl} \in C^1(\overline{Q}_+)$ puesto que $H \in C^2(\overline{Q}_+)$ y $H^{-1} = J \in C^2(\overline{U}_i)$. Como H y J son C^1 las matrices jacobianas son no singulares, y tenemos que $Jac(H)$ y $Jac(J)$ son no nulos, de donde $|Jac(H)|, |Jac(J)| \geq \alpha$ y por tanto

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} a_{kl} \xi_k \xi_l = Jac(H) \sum_{j=1}^{N} | \sum_{l=1}^{N} J_{x_j}^k \xi_k|^2 \geq \alpha |\xi|^2,$$

con $\alpha > 0$. $\square$

Teorema 4.3.8. ***(El caso general** Ω, $f \in H^m(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$)*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado y* $u \in H_0^1(\Omega)$, *que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

(2) Si $f \in H^m(\Omega)$ *y* Ω *es de clase* C^{m+2}, *entonces*

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\, \|f\|_{H^m(\Omega)} \quad \textit{i.e. } u \in H^{m+2}(\Omega).$$

Demostración. Se demuestra por inducción como en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, pero en el caso general, como viene siendo habitual, la demostración se complica. El principal problema viene de que no podemos utilizar como en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ el hecho de que $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$ Vamos a suponer en primer lugar que $f \in H^1(\Omega)$, y queremos ver que $u \in H^3(\Omega)$. Procedemos como en la demostración del teorema 4.3.6, utilizando particiones de la unidad. **1)** Escribimos u como $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$, y queremos ver que $\theta_i u \in H^3(\Omega)$ para todo $i = 0, 1, ..., k$.

2) (Estimaciones en el interior) Queremos demostrar que $\theta_0 u \in H^3(\Omega)$. Razonamos como en la demostración del teorema 4.3.6. Si extendemos $\theta_0 u$ a $\overline{\theta_0 u}$ como 0 fuera de Ω sabemos que $\overline{\theta_0 u} \in H^2(\mathbb{R}^N)$ y tenemos que $\overline{\theta_0 u}$ es solución débil de

$$-\Delta(\theta_0 u) + \theta_0 u = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \nabla u - (\Delta\theta)u.$$

Sin embargo ahora $\theta_0 f - 2\nabla\theta_0\nabla u - (\Delta\theta)u \;\in H^1(\mathbb{R}^N)$, y podemos aplicar el teorema 4.3.5 (2) y concluir que $\theta_0 u \in H^3(\Omega)$.

3) (Estimaciones cerca de la frontera) Queremos demostrar que $\theta_i u \in H^3(\Omega)$ para $i = 1, ..., k$, de modo que utilizamos el difeomorfismo $H : Q \to U_i$ y transferimos u de $\Omega \cap U_i$ a Q_+. Nótese que ahora $H \in C^3(\overline{Q})$ y que $H^{-1} \in C^3(\overline{U_i})$. Por tanto es evidente (la demostración del lema 4.3.7 seguida de manera idéntica) que el lema 4.3.7 queda transformado en:

Lema 4.3.9. *Con la notación de la demostración del teorema 4.3.8,* $w \in H_0^1(Q_+) \cap H^2(Q_+)$ *y verifica*

$$\sum_{k,l=1}^N \int_{Q_+} a_{kl} w_{y_k} \psi_{y_l}\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi\, dy \qquad \forall \psi \in H_0^1(Q_+). \qquad (***)$$

Donde $\tilde{g} = (g \circ H)|Jac(H)| \in H^1(Q_+)$, $Jac(H)$ *es el determinante de la matriz Jacobiana y los* $a_{kl} \in C^2(\overline{Q}_+)$ *satisfacen la condición de elipticidad.*

Nótese que ya hemos demostrado en el teorema anterior que $w \in H^2(\Omega)$. A partir de aquí el objetivo es demostrar que $Dw \in H_0^1(\Omega)$ y que Dw verifica la ecuación (***). Esto permite concluir, a partir del paso **3.3)** del teorema 4.3.6 para la función Dw, que $Dw \in H^2(Q_+)$, es decir, que $w \in H^3(Q_+)$. Transfiriendo de nuevo la solución a cada $\Omega \cap U_i$ a través de $H \in C^3(\overline{Q}_+)$ obtendremos que $\theta_i u \in H^3(\Omega \cap U_i)$, lo que concluirá el caso base de la inducción. Debemos argumentar para las derivadas en la dirección Q_0 para utilizar diferencias finitas ($D_h w$) y después, como en la demostración del teorema 4.3.6, escribir en función de las demás derivadas parciales la función w_{x_N}.

Tomamos h en Q_0 suficientemente pequeño tal que $D_h w \in H_0^1(Q_+)$ y denotamos Dw a cualquier derivada en la dirección $e_1, ..., e_{N-1}$. La comprobación de que Dw verifica la ecuación **(***)**, es decir, que Dw verifica

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl}(Dw)_{y_k}\psi_{y_l}\, dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi\, dy \qquad \forall \psi \in H_0^1(Q_+),$$

es análoga a la del caso (2) del teorema 4.3.5, teniendo en cuenta $D\tilde{g} \in L^2(Q_+)$, dado que $\tilde{g} = (g \circ H)|Jac(H)| \in H^1(Q_+)$.

Vamos a demostrar por tanto que $Dw \in H_0^1(Q_+)$. Sabemos que $w \in H_0^1(Q_+)$, y por el lema 4.3.4:

$$\|D_h w\|_{H^1(Q_+)} = \|D_h w\|_{L^2} + \|\nabla D_h w\|_{L^2} = \|D_h w\|_{L^2} + \|D_h(\nabla w)\|_{L^2} \leq$$
$$\|\nabla w\|_{L^2} + \|\nabla(\nabla w)\|_{L^2} \leq \|w\|_{H^2(Q_+)}\,.$$

Utilizamos ahora los resultados del capítulo 1. Como $\|D_h w\|_{H^1(Q_+)} \leq \|w\|_{H^2(Q_+)}$ $\forall h \in Q_0$ suficientemente pequeño tenemos que, para toda sucesión $(h_n) \to 0$, aplicando el corolario 1.5.15, (dado que $H_0^1(Q_+)$ es reflexivo) de la sucesión $D_{h_n}w$ existe una subsucesión, sin pérdida de generalidad, (h_n), tal que $D_{h_n}w \rightharpoonup g \in H_0^1(Q_+)$ (converge débilmente en $H_0^1(Q_+)$).

Por el teorema de representación de Riesz-Fréchet para espacios de Hilbert (teorema 2.2.1) tenemos que para cada $\varphi \in C_c^\infty(Q_+) \subset H_0^1(Q_+) = H_0^1(Q_+)^*$ existe (por comodidad lo denotamos igual) $\varphi \in H_0^1(Q_+)$ que verifica

$$\varphi(D_{h_N}w) = \int_{Q_+} (D_{h_N}w)\varphi.$$

A su vez

$$\int_{Q_+} (D_{h_N}w)\varphi = \int_{Q_+} w(D_{-h_N}\varphi).$$

Aplicamos el corolario 1.4.4 obteniendo que para cada $\varphi \in C_c^\infty(Q_+)$ se verifica $\varphi(D_{h_N}w) \to \varphi(g)$, y obtenemos, tomando el límite cuando $h \to 0$ para $h = |h|e_i$ con $i = 1, ..., N-1$, que

$$\int_{Q_+} g\varphi = -\int_{Q_+} w\varphi_{y_i} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(Q_+) \quad i = 1, ..., N-1.$$

De modo que $w_{y_i} = g \in H_0^1(Q_+)$ para $i = 1, ..., N-1$.

Como ya hemos comentado, aplicamos el paso **3.3)** a cada w_{y_i} y concluimos que $w_{y_i} \in H^2(Q_+)$ para $i \neq N$. Para demostrar que $w_{x_N} \in H^2(Q_+)$, la escribimos a partir de **(***)**, que es la formulación débil de la ecuación

$$-\sum_{k,l=1}^{N} (a_{kl}w_{y_k})_{y_l} = \tilde{g}$$

Lo que significa que (escribiendo $a_{NN} = \tilde{a}$),

$$(\tilde{a}w_{x_N})_{x_N} = \tilde{a}_{x_N}w_{x_N} + \tilde{a}w_{x_N x_N} = -\sum_{(k,l)\neq(N,N)} (a_{kl}w_{y_k})_{y_l} + \tilde{g}.$$

Es decir,

$$w_{x_N x_N} = \frac{1}{a_{NN}} \left(\tilde{a}_{x_N} w_{x_N} - \sum_{(k,l)\neq(N,N)} (a_{kl} w_{y_k})_{y_l} + \tilde{g} \right).$$

Gracias a la condición de elipticidad, a que $\tilde{a}_{x_N} \in C^1(\overline{Q_+})$, a que $a_{kl} \in C^2(\overline{Q}_+)$, a que $\tilde{g} \in H^1(Q_+)$ (ver lema 4.3.10) y a que $w_{x_N}, w_{x_k x_l} \in H^1(Q_+)$ para $(k,l) \neq (N,N)$ obtenemos el resultado $w_{x_N x_N} \in H^1(Q_+)$.

Para terminar la inducción suponemos, como en el teorema 4.3.5, que se verifica $f \in H^{m-1}(\Omega) \Rightarrow u \in H^{m+1}(\Omega)$ con el objetivo de demostrar que si $f \in H^m(\Omega)$ entonces $u \in H^{m+2}(\Omega)$. El proceso es idéntico al dado para demostrar $f \in H^1(\Omega) \Rightarrow u \in H^3(\Omega)$.

Primero se demuestra para $\theta_0 u$ utilizando el teorema 4.3.5 que $\theta_0 u \in H^{m+2}(\Omega)$. Después se transfiere cada $\theta_i u$ utilizando el difeomorfismo $H \in C^{m+2}(\overline{Q})$ y se demuestra que $w \in H^{m+2}(Q_+)$. Para ello se razona de la misma manera, sustituyendo Dw por $D^\alpha w$ con $|\alpha| = m$. Sabemos de la hipótesis de inducción que $D^\alpha w \in H^1(Q_+)$, y demostramos que $D^\alpha w \in H_0^1(Q_+)$ para las derivadas en la dirección Q_0, lo que implica que $D^\alpha w \in H^2(Q_+)$ excepto para $w_{x_N x_N}$. Por último se escribe $w_{x_N x_N}$ en función de las demás derivadas para demostrar que $w_{x_N x_N} \in H^m(Q_+)$. Nótese que el lema 4.3.7 queda transformado en:

Lema 4.3.10. *Con la notación de la demostración del teorema 4.3.8, $w \in H_0^1(Q_+) \cap H^{m+1}(Q_+)$ y verifica:*

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl} w_{y_k} \psi_{y_l} \, dy = \int_{Q_+} \tilde{g}\psi \, dy \qquad \forall \psi \in H_0^1(Q_+).$$

Con $\tilde{g} = (g \circ H) Jac(H) \in H^m(Q_+)$, donde $Jac(H)$ es el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana y los $a_{kl} \in C^{m+1}(\overline{Q}_+)$ satisfacen la condición de elipticidad.

□

Teorema 4.3.11. ***(Conclusión)***

Sea o bien $\Omega = \mathbb{R}^N$ o bien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $u \in H_0^1(\Omega)$, que verifica

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \qquad (*)$$

(3) Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2} con $m > \frac{N}{2}$, entonces

$$u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

(4) Si $f \in H^\infty(\Omega)$ y Ω es de clase C^∞ entonces

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Demostración. Es corolario inmediato del resultado (2) de los teoremas de regularidad y del embebimiento de Sóbolev dado en el corolario 3.2.19. Si $f \in H^m(\Omega)$ con Ω de clase C^{m+2} entonces $u \in H^{m+2}(\Omega)$ con $m > \frac{N}{2}$. Esto significa que $u \in H^{\tilde{m}}(\Omega)$ con $\tilde{m} > \frac{N}{2} + 2$. Por tanto k del corolario 3.2.19 verifica $k > 2$, de donde $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Si $f \in H^\infty(\Omega)$ es evidente que $u \in H^\infty(\Omega)$, lo que nuevamente, por el corolario 3.2.19, implica que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

□

4.3.3. Regularidad para otros problemas

El lector puede consultar otros resultados de regularidad en [12, Capítulo 6, sección 3]. Citamos en esta última sección los dos más importantes. Las demostraciones son análogas a la dada para el laplaciano con condiciones de tipo Dirichlet.

Teorema 4.3.3.1. ***(Regularidad del problema del Laplaciano con condiciones de tipo Neumann)***

Sea o bien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado o bien $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sea $u \in H^1(\Omega)$, que verifica:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

(Formulación débil para el problema del Laplaciano con condiciones de tipo Neumann). Según la regularidad de f y de Ω:

(1) Si $f \in L^2(\Omega)$ y Ω es de clase C^2, entonces

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad i.e.\ u \in H^2(\Omega).$$

(2) Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2}, entonces

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^m(\Omega)} \quad i.e.\ u \in H^{m+2}(\Omega).$$

(3) Si $f \in H^m(\Omega)$ y Ω es de clase C^{m+2} con $m > \frac{N}{2}$, entonces

$$u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

(4) Si $f \in H^\infty(\Omega)$ y Ω es de clase C^∞ entonces

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Teorema 4.3.3.2. ***(Regularidad para el problema asociado a un operador elíptico de segundo orden)***

Sea o bien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado o bien $\Omega = \mathbb{R}^N$. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$, que verifica:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(Formulación débil para el problema general). Según la regularidad de f, Ω, los a_{ij} y a_0:

(1) Si $f \in L^2(\Omega)$, Ω es de clase C^2 y $a_{ij}, a_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ entonces

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad i.e.\ u \in H^2(\Omega).$$

(2) Si $f \in H^m(\Omega)$, Ω es de clase C^{m+2} y $a_{ij}, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ entonces

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^m(\Omega)} \quad i.e.\ u \in H^{m+2}(\Omega).$$

(3) Si $f \in H^m(\Omega)$, Ω es de clase C^{m+2} y $a_{ij}, a_0 \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ con $m > \frac{N}{2}$, entonces

$$u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

(4) Si $f \in H^\infty(\Omega)$, Ω es de clase C^∞ y $a_{ij}, a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ entonces

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Apéndice A

Notación

Damos un repaso a la notación. Para un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ó $I \subset \mathbb{R}$, un entero positivo k y $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p \leq \infty$:

(a) Definimos los conjuntos de aplicaciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ó $f : I \to \mathbb{R}$:

  (i) $C(\Omega)$ es el conjunto de funciones continuas.

  (ii) $C^k(\Omega)$ es el conjunto de funciones con k derivadas continuas.

  (iii) $C^\infty(\Omega) := \cap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.

  (iv) $C^k(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\Omega) \,\big|\, D^\alpha u \textit{ admite una ext. continua a } \overline{\Omega}\ \forall |\alpha| \leq k\}$.

  (v) $C_c(\Omega)$ es el conjunto de funciones con soporte compacto.

  (vi) $C_c^k(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^k(\Omega)$.

  (vii) $C_c^\infty(\Omega) := C_c(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$.

  (viii) $L^p(\Omega)$ es el espacio de la definición B.4.3.

  (ix) $L^p_{loc}(\Omega)$ es el conjunto de aplicaciones tales que $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ compacto en Ω.

  (x) $W^{1,p}(I), H^1(I), W^{1,p}(\Omega)$ y $H^1(\Omega)$ son los espacios de Sóbolev de las definiciones 3.1.1 y 3.2.1.

  (xi) $W_0^{1,p}(I), H_0^1(I), W_0^{1,p}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ son los espacios de Sóbolev de las definiciones 3.1.3 y 3.2.6.

  (xii) $W^{m,p}(I), H^m(I), W^{m,p}(\Omega)$ y $H^m(\Omega)$ son los espacios de Sóbolev de las definiciones 3.1.2 y 3.2.3.

  (xiii) $W^{\infty,p}(I) = \cap_{m\in\mathbb{N}} W^{m,p}(I)$.

(b) Sucesiones:

  (i) Denotamos por $(x_n) \subset X$ una sucesión de elementos de X.

  (ii) $x_n \to x$ significa que (x_n) converge a x. Especificaremos la norma cuando pueda haber confusión.

(c) Para un conjunto A de un espacio vectorial normado X sobre $\mathbb{R}$, $x_0, x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

(i) Llamamos $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los números reales estrictamente positivos. No confundir con R^n_+.

(ii) Escribimos $\lambda + A$ para referirnos al conjunto $\{\lambda + a \mid a \in A\}$.

(iii) Escribimos λA para referirnos al conjunto $\{\lambda a \mid a \in A\}$.

(iv) Escribimos $\cup A$ para referirnos a la unión arbitraria de elementos de X y $\cap_{finita}$ para referirnos a la intersección finita de elementos de X.

(v) Llamamos B_X a la bola unidad, es decir, $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$.

(vi) Llamamos $B_{x_0}(\lambda)$ a la bola de radio λ centrada en x_0.

(vii) Escribimos $d(x, x_0)$ para referirnos a la distancia de x a x_0 y $d(x_0, A)$ a la distancia de x_0 a A.

(d) Utilizamos, al tratar con topologías, para un conjunto $A \subset X$, si a X lo dotamos de la topología $\mathcal{T}$:

(i) La notación $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ para referirnos a la clausura del conjunto A en la topología $\mathcal{T}$ sobre X, o $\overline{A}$ cuando no haya confusión.

(ii) La notación $\mathcal{T}_A$ para referirnos a la topología inducida por $\mathcal{T}$ sobre el conjunto A.

(iii) ∂A para referirnos a la frontera de A.

(e) Otra notación (Para $h \in \mathbb{R}^N$ y $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función):

(i) R^N_+, Q, Q_+, Q_0 para referirnos a los conjuntos de la definición 3.2.4

(ii) Para $h \in \mathbb{R}^N$, $|h| = h_1 + ... + h_N$.

(iii) $D_h u$ es la diferencia finita de u. Es decir, $D_h u = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}$.

(iv) $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ es la derivada parcial de u respecto a x_i, clásica o débil.

(v) ∇u es el gradiente de u. Es decir, $\nabla u = (u_{x_1}, ..., u_{x_N})$

(vi) Δu es el laplaciano de u, es decir, $\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i}$.

(vii) p' es el conjugado de p, dado en la definición B.4.1.1.

(vii) p^* es el conjugado de Sóbolev de p, dado en la definición 3.2.5.

Nota. Durante todo el trabajo requerimos demostrar acotaciones en función de constantes. Utilizamos siempre la constante C, para no complicar la notación, aunque esta vaya variando. Es decir, si por ejemplo $\|u\|_1 \leq C_1 \|u\|_2 \forall u \in X$ y $\|u\|_2 \leq C_2 \|u\|_3 \forall u \in X$ escribimos, sin pérdida de generalidad, $\|u\|_1 \leq C \|u\|_2$ y $\|u\|_2 \leq C \|u\|_3$, y volvemos a usar C al agruparlas, es decir,

$$\|u\|_1 \leq C \|u\|_3 \ \forall u \in X.$$

Apéndice B

Conceptos básicos

Damos un breve repaso a los conceptos básicos de Análisis Real, Análisis Funcional y Topología necesarios a lo largo de todo el trabajo. Primero se dan las definiciones de los espacios con los que trabajamos. La siguiente sección se ocupa del teorema de Hahn-Banach y de sus dos formas geométricas. Después se introducen los conceptos de dual de un espacio de Banach y el concepto de separabilidad. La siguiente sección está dedicada a los espacios L^p, espacios de Banach formados por funciones medibles cuya norma se define generalizando la norma p para el caso finito-dimensional. En esta sección incluimos un apartado sobre convolución y regularización. Por último tratamos brevemente el producto finito de espacios de Banach y otros resultados del Análisis Real.

B.1. Espacios vectoriales normados

A lo largo del trabajo hemos trabajado con espacios vectoriales normados sobre $\mathbb{R}$. Vamos a dar un breve repaso a los conceptos más básicos. Para una completa introducción a los espacios normados y a los operadores lineales puede consultarse [9, Capítulos 2 y 4].

Definición B.1.1. Un espacio vectorial X sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ es un conjunto X al que dotamos de dos funciones, $+ : X \times X \to X, y \cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, que verifican, para todo $x, y, z \in X$ y todo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

(1) $x + y = y + x$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.

(2) Existe un único elemento en X, que denotamos 0, tal que $x + 0 = x$.

(3) Existe un único elemento en X, que denotamos $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

(4) $1x = x$ y $\lambda_1(\lambda_2 x) = (\lambda_1\lambda_2)x$.

(5) $\lambda_1(x + y) = \lambda_1 x + \lambda_1 y$ y $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$.

Y un espacio vectorial normado es un espacio vectorial al que dotamos de una norma, una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) $\|x\| > 0$ para todo $x \neq 0$ y $\|0\| = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Proposición B.1.1. *Una norma sobre X induce una métrica dada por $d(x,y) = \|x-y\|$, la cual induce una topología sobre X. Las topologías inducidas por una métrica se llaman topologías metrizables. Estos espacios (espacios métricos) disfrutan de muchas propiedades pueden consultarse en [8].*

Definición B.1.2. (Completitud) Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy converge en X.

Definición B.1.3. (Espacio de Banach) Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo.

A partir de ahora denotaremos E a un espacio de Banach.

Definición B.1.4. (Dual de un espacio de Banach) Para un espacio de Banach E definimos el espacio dual de E E^* como el espacio (Es un espacio de Banach) formado por todas las aplicaciones $f : E \to \mathbb{R}$ (funcionales) lineales continuas. La norma estándar de E^* es:

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\| \leq 1, x \in E} |f(x)| = \max_{\|x\| \leq 1, x \in E} |f(x)| = \max_{\|x\| = 1, x \in E} |f(x)| = \max_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

(Todas estas caracterizaciones son equivalentes).

Recordamos la caracterización para funciones lineales de continuidad que se utiliza frecuentemente:

Proposición B.1.2. *Una función lineal $f : E \to F$ entre espacios de Banach es continua si y sólo si es acotada, i.e.*

$$\|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E .$$

También tenemos el siguiente resultado básico:

Proposición B.1.3. *Un subespacio $F \subset E$ de un espacio de Banach E cerrado en E es un espacio de Banach.*

B.2. El teorema de Hahn Banach y sus formas geométricas

El teorema de Hahn-Banach es un resultado básico del Análisis Funcional que permite extender un funcional definido para un subespacio $F \subset E$ a un funcional definido en todo E. Este resultado y en particular sus dos formas geométricas son de gran utilidad. Las demostraciones de esta sección pueden consultarse en [11, Capítulo 1].

Teorema B.2.1. ***(Hahn-Banach)*** *Sea $p : E \to \mathbb{R}$ una función que satisface:*

(1) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ $\forall x \in E$ *y* $\lambda > 0$.

(2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in E$.

Y $G \subset E$ un subespacio lineal y $g : G \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $g(x) \leq p(x)$ $\forall x \in G$.

Entonces existe un funcional $\tilde{g}$ definido en todo E tal que $\tilde{g}_{|F} = g$ y $\tilde{g}(x) \leq p(x)$.

Nótese que una norma $\|\cdot\|$ verifica (1) y (2). A menudo se utiliza este teorema considerando $p = \|\cdot\|$.

Conviene tener en cuenta que es fácil demostrar sin necesidad de utilizar el teorema de Hahn-Banach que para una función f continua definida en un conjunto denso (Ver definición B.3.1) $D \subset E$ existe una única extensión continua de f a E.

Proposición B.2.2. ***(Extensión por densidad)***

Sea $D \subset E$ denso en E y $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Existe una única extensión de f que denotamos $\hat{f}$ a X continua, es decir, existe una función continua $\hat{f} : E \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{f}_{|D} = f$.

Demostración. Basta considerar las definiciónes de conjunto denso, clausura y continuidad. Si $\overline{D} = E$ para todo $x \in E$ existe una sucesión $(x_n) \subset D$ tal que $x_n \to x$. Una función continua $\hat{f} : E \to \mathbb{R}$ verifica $\hat{f}(\text{lím}_{n\to\infty} x_n) = \text{lím}_{n\to\infty} \hat{f}(x_n)$, de modo que la única extensión de f posible es la dada por, para cada punto $x \in E$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}(x_n).$$

$\square$

Definición B.2.1. (Hiperplano) Un hiperplano afín de un espacio de Banach E es un subconjunto de E de la forma

$$[f = \alpha] := \{x \in E \,\big|\, f(x) = \alpha\},$$

donde f es un funcional (No necesariamente continuo) y $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante dada. Es fácil ver que $[f = \alpha]$ es cerrado si y sólo si f es continua. En dimensión infinita existen los funcionales lineales no continuos.

Definición B.2.2. Un conjunto $C \subset E$ es convexo si para todo $x, y \in C$ el punto $x(1 - t) + yt \in C$ para todo $t \in [0, 1]$.

Corolario B.2.3. ***(Hahn-Banach, Primera Forma Geométrica)*** *Sean $U, B \subset E$ dos conjuntos no vacíos convexos tales que $U \cap B = \emptyset$ con U abierto. Entonces existe un hiperplano cerrado $[f = \alpha]$ que **separa** B y U, es decir:*

$$f(x) \leq \alpha \ \forall x \in U \quad y \quad f(x) \geq \alpha \ \forall x \in B.$$

Corolario B.2.4. ***(Hahn-Banach, Segunda Forma Geométrica)*** *Sean $F, C \subset E$ dos conjuntos no vacíos convexos tales que $F \cap C = \emptyset$ con F cerrado y C compacto. Entonces existe un hiperplano cerrado $[f = \alpha]$ que **separa estrictamente** F y C, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \forall x \in F \quad y \quad f(x) \geq \alpha + \varepsilon \ \forall x \in C.$$

El siguiente corolario es de especial utilidad para demostrar que un subespacio $F \subset E$ es denso en E.

Corolario B.2.5. *Sea $F \subset E$ un subespacio lineal de E tal que $\overline{F} \neq E$. Entonces existe $f \in E^*$ con $f \neq 0$ tal que*

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in F.$$

El proceso para demostrar que un determinado subespacio F de E es denso en E es demostrar que todo funcional $f \in E^*$ que se anula en F necesariamente se anula en todo E i.e. $f = 0$.

B.3. Espacios separables

La separabilidad es una propiedad *topológica* importante para trabajar con espacios de Banach, y que hemos utilizado principalmente en el capítulo 1. En esta sección X denota un espacio topológico.

Definición B.3.1. Un espacio topológico X es separable si y sólo si existe un conjunto contable $D \subset X$ denso en X (i.e. $\overline{D} = X$, donde $\overline{D}$ denota la clausura de D).

Proposición B.3.1. *Todo subconjunto $A \subset X$ de un espacio separable métrico X es separable.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ un conjunto denso. Consideramos cualquier sucesión $(r_n) \subset \mathbb{R}^+$ tal que $r_m \to 0$. Escogemos cualquier punto $a_{m,n} \in B_{u_n}(r_m) \cap A$ (A es denso en X).

El conjunto contable $\{a_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ es denso en A. □

Teorema B.3.2. *Sea X un espacio de Banach tal que X^* es separable. Entonces X es separable. La implicación recíproca no es cierta, como contraejemplo tenemos $L^1(\Omega)$ (separable), cuyo dual es $L^\infty(\Omega)$ (no separable), como muestra el teorema B.4.1.11.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto denso en X^*. Cada f_n verifica

$$\|f_n\| = \sup_{x\in X, \|x\|\leq 1} f_n(x),$$

y por tanto existe $x_n \in X$ tal que

$$\|x_n\| = 1 \text{ y } f_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|f_n\|.$$

Si denotamos L_0 el espacio generado sobre $\mathbb{Q}$ (Denso en $\mathbb{R}$) por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Claramente L_0 es contable, y si L es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ generado por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ claramente L_0 es denso en L.

Queremos demostrar que L es denso en X, lo que concluirá la demostración. Lo haremos utilizando el resultado mostrado en el corolario B.2.5. Sea $f \in X^*$ tal que f se anula en L. Queremos ver que $f = 0$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n_0 tal que $\|f - f_{n_0}\| < \varepsilon$ y como $f(x_n) = 0$ tenemos que

$$\frac{1}{2}\|f_{n_0}\| \leq f_{n_0}(x_{n_0}) = (f_{n_0} - f)(x_{n_0}) < \varepsilon.$$

Se sigue que $\|f\| \leq \|f - f_{n_0}\| + \|f_{n_0}\| < 3\varepsilon$, de donde $f = 0$. □

B.4. Espacios L^p

Las demostraciones de resultados de esta sección pueden consultarse en [1], [6] y [7].
Definición B.4.1. Sea Ω un conjunto. Un espacio de medida es una terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, donde:

(1) $\mathcal{M}$ es una $\sigma-$álgebra, una familia de subconjuntos de Ω tales que:

   (i) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

   (ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$.

   (iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}\ \forall A_n \in \mathcal{M}$.

(2) μ es una medida, i.e. una función $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ que verifica:

   (i) $\mu(\emptyset) = 0$.

   (ii) Para toda familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ de conjuntos disjuntos

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Llamamos a los elementos de $\mathcal{M}$ conjuntos *medibles* y a los elementos $A \in \mathcal{M}$ tales que $\mu(A) = 0$ conjuntos de medida nula. Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ se cumple *para casi todo punto* (abreviado *p.c.t.p*, ó *e.c.t.p.*) si y sólo si el conjunto donde $\mathcal{P}$ no se verifica es de medida nula.

Definición B.4.2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue, definimos el espacio $L^1(\Omega)$ como el espacio de las funciones integrables Lebesgue de Ω en $\mathbb{R}$. Para la construcción de la medida de Lebesgue así como de los resultados que enunciamos a continuación puede consultarse [1, Capítulo 11], así como [6, Capítulos 2 y 3].

Por comodidad utilizaremos la notación $\int_\Omega f$ en lugar de $\int_\Omega f d\mu$, ó $\int f$ cuando no haya confusión.

En adelante, diremos que f es medible para referirnos que f es medible Lebesgue.

Definición B.4.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio $L^p(\Omega)$ de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$ para $1 < p < \infty$ como

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Dotamos a $L^p(\Omega)$ de la norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_{L^p} = \|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p)^{1/p}$.

Definimos el espacio $L^\infty(\Omega)$ de funciones medibles como

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, |f(x)| \le C \ p.c.t.p.\}.$$

Dotamos a $L^\infty(\Omega)$ de la norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \text{ínf}\{C \,\big|\, |f(x)| \le C\}$.

Nota: Los espacios L^p se definen como espacios cociente mediante la relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff f = g \ e.c.t.p \ i.e. \ \|f - g\|_p = 0$$

(De lo contrario $\|\cdot\|_p$ no sería una norma , ver [6, Capítulo 4]). Es fundamental tener esto en cuenta a la hora de trabajar con *elementos* de los espacios L^p, que son en realidad clases de equivalencia, i.e. conjuntos de funciones (ver nota 39).

B.4.1. Resultados básicos de Teoría de la Medida y espacios L^p

Teorema B.4.1.1. ***(Teorema de la convergencia monótona)*** *Sea $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ una sucesión de funciones que verifican:*

(1) $f_1 \leq f_2 \leq ...$ *en casi todo punto.*

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int f_n < \infty$.

Entonces $f_n(x)$ converge en casi todo punto a un límite finito $f(x) \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Teorema B.4.1.2. ***(Teorema de la convergencia dominada)*** *Sea $(f_n) \subset L^1(\Omega)$ una sucesión de funciones que verifican:*

(1) $f_n(x) \to f(x)$ *en casi todo punto.*

(2) $\exists g \in L^1(\Omega)$ *tal que para todo* n $|f_n(x)| \leq g(x)$ *en casi todo punto.*

Entonces $f \in L^1(\Omega)$ y $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Lema B.4.1.3. ***(Lema de Fatou)*** *Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ que verifican:*

(1) $f_n \geq 0$ *en casi todo punto.*

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n < \infty$.

Si denotamos $f = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, entonces

$$\int_\Omega f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n.$$

Teorema B.4.1.4. ***(Tonelli)*** *Sea $F(x,y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ una función medible tal que:*

(1) $\int_{\Omega_2} |F(x,y|)dy < \infty$ *para casi todo punto* $x \in \Omega_1$.

(2) $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy\ dx < \infty$.

Entonces $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Teorema B.4.1.5. ***(Fubini)*** *Sea $F(x,y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ con $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Entonces para casi todo $x \in \Omega_1$ $F(x,y) \in L^1(\Omega_2)$ y $\int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1(\Omega_1)$ (Análogo para la casi todo y). Además:*

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F(x,y)dy\ dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F(x,y)dx\ dy = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)\ dx\ dy.$$

Definición B.4.1.1. Definimos el conjugado de p con $1 < p < \infty$ p' como

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Y el conjugado de $p = 1$ como $p' = \infty$ y viceversa.

En adelante p' denotará el conjugado de p.

Lema B.4.1.6. ***(Desigualdad de Young)*** *Sea $1 < p < \infty$, entonces*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

Como consecuencia tenemos:

Teorema B.4.1.7. ***(Desigualdad de Hölder)*** *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^{p'}(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} .$$

Enunciamos dos desigualdades más que son extensión de la desigualdad de Hölder:

Proposición B.4.1.8. *Si $n \geq 2$ y $f_1, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$ se define para $x \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq i \leq n$ $\tilde{x}_i = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Entonces:*

(1) $f(x) = f_1(\tilde{x}_1)f_2(\tilde{x}_2)...f_n(\tilde{x}_n) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(2) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{n=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}$.

Proposición B.4.1.9. *Sean $f_1 \in L^{p_1}(\Omega), ..., f_k \in L^{p_k}(\Omega)$ tales que*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Entonces el producto $f = f_1 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \ldots \|f_k\|_{p_k} .$$

Como corolario obtenemos:

Corolario B.4.1. ***(Desigualdad de interpolación)*** *Sea $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

para todo r tal que $p \leq r \leq q$ y α verifica

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \text{ y } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Los siguientes dos teoremas muestran que los espacios L^p son espacios de Banach. Suponemos en adelante que $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema B.4.1.10. $\|\cdot\|_p$ *es una norma y por tanto $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial normado.*

Teorema B.4.1.11. ***(Fischer-Riesz)*** *$L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial normado completo, es decir, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Por último enunciamos cuatro resultados fundamentales de los espacios L^p.

Teorema B.4.1.12. ***(Teorema de representación de Riesz)*** *Sea $1 \leq p < \infty$. Para toda $\varphi \in L^p(\Omega)^*$ existe un único elemento $u \in L^{p'}(\Omega)$ que verifica*

$$\varphi(f) = \int_\Omega uf \qquad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Y además $\|u\|_{p'} = \|\varphi\|_p$.

Es decir, podemos identificar $L^p(\Omega)$ con $L^{p'}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$. Lo denotaremos $L^p(\Omega)^* = L^{p'}(\Omega)$. Nótese que $L^\infty(\Omega)^* \neq L^1(\Omega)$ en general. De hecho $L^1(\Omega) \subsetneq L^\infty(\Omega)^*$. Para obtener una idea sobre el dual de $L^\infty(\Omega)$ puede consultarse [11, Páginas 101-103].

El caso $p = 2$ es especial, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert y $L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega)$.

Teorema B.4.1.13. ***(Reflexividad y separabilidad de los espacios L^p)*** *El espacio $L^p(\Omega)$ es un espacio reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.*

Teorema B.4.1.14. *Si Ω es de medida finita (acotado) y $1 \leq p \leq q \leq \infty$ entonces*

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Teorema B.4.1.15. *Sea $1 \leq p < \infty$. El espacio $C_c(\Omega)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

El soporte de una función f habitualmente se define como la clausura del conjunto $\{x \mid f(x) \neq 0\}$. Esta definición no es consistente cuando tratamos con espacios L^p, cuyos elementos son clases de equivalencia. Por ejemplo, $\chi_\mathbb{Q}$ (Definida sobre $\mathbb{R}$) pertenece a la clase de equivalencia de la función nula, pero con esta definición el soporte de $\chi_\mathbb{Q}$ es $\mathbb{R}$ porque $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Así pues, redefinimos el soporte para una función:

Definición B.4.1.2. (Soporte) Para una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ consideramos la familia $(\omega_i)_{i \in I}$ de todos los abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que para cada $i \in I$ $f = 0$ *p.c.t.p.* Si $\omega = \cup_{i \in I} \omega_i$, definimos el soporte como

$$sop(f) = \mathbb{R}^n - w.$$

Nótese que si $f_1 = f_2$ *en casi todo punto* (i.e. $f_1 = f_2$ en L^p) entonces $sop(f_1) = sop(f_2)$.

Nótese que si f es continua entonces las dos nociones de soporte coinciden.

B.4.2. Convolución y regularización

Los resultados de convolución y regularización son muy importantes a la hora de trabajar con funciones en $L^p(\Omega)$. El primer teorema formaliza la definición de convolución:

Teorema B.4.2.1. ***(Young)*** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ la función*

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longrightarrow f(x-y)g(y)$$

es integrable.

Definición B.4.2.1. (Convolución) Gracias al teorema anterior, definimos $f * g$ como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

Que además verifica $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Por comodidad, a partir de ahora denotamos $\int$ a $\int_{\mathbb{R}^n}$.

Demostración. Si $p = \infty$ es evidente.

Si $p = 1$ tenemos

$$\int |f(x-y)g(y)|dx = |g(y)| \int |f(x-y)|dx = |g(y)| \|f\|_1 < \infty,$$

e integrando la expresión anterior respecto a y

$$\int \int |f(x-y)g(y)|dx\ dy = \int |g(y)| \|f\|_1 dy = \|g\|_1 \|f\|_1 .$$

Del teorema de Tonelli deducimos que $f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y del teorema de Fubini $\int f(x-y)g(y)dy < \infty$ *en casi todo* y y

$$\int \int |f(x-y)g(y)|dy\ dx = \int \int |f(x-y)g(y)|dx\ dy = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Si $1 < p < \infty$, por el caso $p = 1$, *para casi todo* $x \in \mathbb{R}^n$ fijo

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^N),$$

y como $|f(x,y)|^{1/p'} \in L^{p'}(\mathbb{R})$ deducimos de la desigualdad de Hölder que

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p'}|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Por tanto

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \|f\|_1^{1/p'} (\int |f(x-y)||g(y)|^p dy)^{1/p},$$

es decir

$$|(f * g)(x)|^p \leq \|f\|_1^{p/p'} (|f| * |g|^p)(x).$$

Y por el caso $p = 1$ concluimos

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

□

Proposición B.4.2.2. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^n} g(\hat{f} * h),$$

con $\hat{f}(x) = f(-x)$.

Demostración. De la desigualdad de Hölder y el teorema anterior, tenemos que

$$\int |h(x)| \int |f(x-y)||g(y)| \; dy \; dx < \infty.$$

Así, $F(x,y) := f(x-y)g(y)h(x) \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$. Por tanto

$$\int (f*g)(x)h(x)dx = \int\int F(x,y) \; dy \; dx = \int\int F(x,y) \; dx \; dy = \int g(y)(\hat{f}*h)(y) \; dy.$$

□

Proposición B.4.2.3. *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$sop(f*g) \subset \overline{sop(f)+sop(g)}.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que la función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable, y tenemos:

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y) \; dy = \int_{x-sop(f)\cap sop(g)} f(x-y)g(y) \; dy.$$

Y si $x \notin sop(f)+sop(g)$ entonces $x - sop(f) \cap sop(g) = \emptyset$, de modo que $(f*g)(x) = 0$ y por tanto

$$(f*g)(x) = 0 \; e.c.t.p \; en \; (sop(f)+sop(g))^c$$

Y en particular en el interior de $(sop(f)+sop(g))^c$. Concluimos que

$$sop(f*g) \subset \overline{sop(f)+sop(g)}.$$

□

Proposición B.4.2.4. *Sean $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $(f*g)(x)$ esta bien definido para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $(f*g) \in C(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ la función $y \to f(x-y)g(y)$ es integrable, y por tanto $(f*g)$ está definida *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

Tomamos (x_n) una sucesión convergente a x y C un conjunto compacto en $\mathbb{R}^n$ tal que $(x_n - sop(f)) \subset C \; \forall n \in \mathbb{N}$, de modo que $f(x_n - y) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall y \notin C$.

Como f es uniformemente continua tenemos que

$$|f(x_n - y) - f(x-y)| \leq \varepsilon_n \chi_C(y) \quad \forall n, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

con $\varepsilon_n \to 0$. Concluimos que

$$|(f*g)(x_n) - (f*g)(x)| \leq \varepsilon_n \int_C |g(y)| \; dy \to 0,$$

lo que prueba que $(f*g) \in C(\mathbb{R}^n)$. □

Proposición B.4.2.5. *Sea $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$ $(k \geq 1)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y:*

$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f)*g$$

Y si $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f*g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. (Utilizando notación multiíndice, ver definición 3.2.3).

Demostración. Basta demostrar que $f * g$ es diferenciable y que

$$\nabla(f * g)(x) = (\nabla f) * g(x)$$

ya que el resto de resultados se concluyen aplicando este resultado a las sucesivas derivadas.

Sea $h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < 1$. Para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| =$$

$$|\int_0^1 h\nabla f(x+sh-y) - h\nabla f(x-y)|ds \leq |h|\varepsilon(|h|),$$

con $\varepsilon(|h|)$ una función que verifica $\varepsilon(|h|) \to 0$ cuando $|h| \to 0$, por la continuidad absoluta de ∇f.

Si escogemos un compacto C suficientemente grande para que $x + B - sop(f) \subset C$, con B la bola unidad, entonces $\forall h \in B$

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y) = 0 \quad \forall y \notin C.$$

Y por tanto

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| \leq |h|\varepsilon(|h|)\chi_K(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Concluimos que

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x) - h(\nabla f * g)(x)| \leq |h|\varepsilon(|h|) \int_C |g(y)|\, dy.$$

Lo que significa que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f*g(x+h) - f*g(x) - \nabla f * g(x)}{|h|} = \lim_{h\to 0} \varepsilon(|h|)C = 0.$$

Es decir, $f * g$ es diferenciable en x y $\nabla(f*g)(x) = (\nabla f) * g(x)$. $\square$

Definición B.4.2.2. (Sucesión regularizante) Una sucesión regularizante $(\rho_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de funciones en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ sop(\rho_n) \subset \overline{B_0(1/n)},\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1,\ \rho_n(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Como ejemplo tenemos la sucesión $\rho_n(x) = Cn^N\rho(nx)$, con $C = 1/\int \rho$ y:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{1/(|x|^2-1)} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| > 1 \end{cases}$$

En adelante ρ_n representa una sucesión regularizante.

Nota. Los siguientes teoremas (teoremas B.4.2.6 y B.4.2.7) junto con la proposición B.4.2.5 explican el papel de esta sección. Nos serán muy útiles para trabajar en espacios de Sóbolev y demostrar la densidad de $C_c^\infty(\Omega)$. Nos permiten **regularizar** una función $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, lo que significa utilizar una sucesión $(\varphi_n * f) \in C_c^\infty$ que sabemos que converge a la propia función $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Es decir, nos permiten aproximarla mediante funciones *regulares*.

Proposición B.4.2.6. *Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\rho_n * f \to f$ uniformemente en todo conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ compacto (i.e. cerrado y acotado). Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ dependiendo de C y ε tal que $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in C$ y $\forall y \in B_0(\delta)$, donde $B_0(\delta)$ es la bola de radio δ.

Por tanto para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(\rho_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\, dy = \int_{B_0(1/n)} (f(x-y) - f(x))\rho_n(y)\, dy.$$

Para $n > 1/\delta$ y $x \in C$ obtenemos

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n = \varepsilon.$$

□

Teorema B.4.2.7. *Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $(\rho_n * f) \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Fijamos $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ (Por el teorema B.4.1.15). Por el teorema anterior sabemos que $\rho_n * f_1 \to f_1$ uniformemente en todo conjunto C compacto en $\mathbb{R}^n$. Por la proposición B.4.2.3:

$$sop(\rho_n * f_1) \subset \overline{B_0(1/n)} + sop(f_1) \subset \overline{B} + sop(f_1),$$

que es un conjunto compacto, de donde se sigue que

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p \to 0 \ \ \textit{cuando } n \to \infty.$$

Escribimos

$$(\rho_n * f) - f = \rho_n * (f - f_1) + (\rho_n * f_1 - f_1) + (f_1 - f)$$

y obtenemos, por la definición de convolución

$$\|\rho_n * f - f\|_p \leq 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p,$$

de donde concluimos

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_p = 0,$$

ya que lím $sup_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_p \leq 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. □

Los resultados probados nos permiten demostrar el siguiente resultado de densidad para espacios L^p.

Corolario B.4.2.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ (i.e. $\overline{C_c^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega)$) para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Definimos la extension $\overline{f}$ de $f \in L^p(\Omega)$ como

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in \Omega \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases}$$

Claramente $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Consideramos la sucesión de conjuntos compactos C_n definidos como

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| \leq n\ y\ d(x, \mathbb{R}^n - \Omega) \geq 2/n\}.$$

Los C_n verifican

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \Omega \quad y\ d(C_n, \mathbb{R}^n - \Omega) \geq \frac{2}{n}.$$

Si definimos $g := \chi_{C_n}\overline{f}$ y la sucesión $f_n := \rho_n * g_n$ tenemos que

$$sop(f_n) \subset \overline{B(1/n)} + C_n \subset \Omega,$$

de modo que $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ y además

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = \left\|f_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\left\|(\rho_n * g_n) - (\rho_n * \overline{f})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\left\|g_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \left\|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Por el teorema de la convergencia dominada $\left\|g_n - \overline{f}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$ y por el teorema B.4.2.7 $\left\|(\rho_n * \overline{f} - \overline{f})\right\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, de donde concluimos que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$.

□

Corolario B.4.2.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ una función que verifica*

$$\int_I uf = 0 \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ en casi todo punto.

Demostración. Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $sop(g)$ es un compacto contenido en Ω. Definimos $g_n := \rho_n * g$, de modo que por la definición de ρ_n $g_n \in C_c^\infty(\Omega)$ para n suficientemente grande y por tanto

$$\int ug_n = 0 \quad \forall n. \qquad (*)$$

Dado que $g_n \to g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, existe una subsucesión, que denotamos por comodidad g_n, tal que $g_n \to g$ *e.c.t.p* y además $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Pasando al límite en (*), gracias al teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\int ug = 0. \qquad (**)$$

Para un conjunto compacto $C \subset \Omega$ definimos g como

$$g = \begin{cases} signo(u) & si\ x \in C \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}^n - C. \end{cases}$$

Y deducimos de **(**)** que $\int_C u = 0$ ($\Rightarrow u = 0$ *e.c.t.p.*) para todo compacto $C \subset \Omega$, concluyendo que $u = 0$ *e.c.t.p.* en Ω.

$\square$

Corolario B.4.2.10. *Sea $I \subset \mathbb{R}$. Dada $f \in L^1_{loc}(I)$ una función que verifica:*

$$\int_I f\varphi' = 0 \quad \forall \varphi \in C^1_c(I).$$

Entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = c$ en casi todo punto en I.

Demostración. Consideramos $\psi \in C_c(I)$ tal que $\int_I \psi = 1$. Para toda $\psi \in C_c(I)$ existe $\varphi \in C^1_c(I)$ tal que

$$\varphi' = w - (\int_I w)\psi.$$

En efecto, la función $h = w - (\int_I w)\psi$ es de soporte compacto en I y $\int_I h = 0$, de modo que h tiene una única función primitiva de soporte compacto en I. Deducimos de la hipótesis que

$$\int_I f(w - (\int_I w)\psi) = 0 \quad \forall w \in C_c(I).$$

$$\int_I (f - (\int_I f\psi))w = 0 \quad \forall w \in C_c(I).$$

Por el corolario anterior tenemos que $f - \int_I f\psi = 0$ *e.c.t.p.* en I. Es decir, $f = C$ *e.c.t.p.* con $C = \int_I f\psi$.

$\square$

B.5. Producto finito de espacios de Banach

Consideramos el espacio producto $E \times F$ de los espacios de Banach E y F. Es decir, el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ formado las tuplas (f_1, f_2) con $f_1 \in E$, $f_2 \in F$. Naturalmente lo que sigue es extensible al producto *finito* de espacios de Banach. Nos interesa en particular el resultado para espacios $L^p(\Omega)$.

Proposición B.5.1. *Para el espacio vectorial $E \times F$, la norma $\|(f_1, f_2)\| = n(\|f_1\|, \|f_2\|)$, donde n es cualquier norma para $\mathbb{R}^2$, es una única norma (En el sentido de que las normas generadas por cada norma n de $\mathbb{R}^2$ son todas equivalentes).*

Demostración. Basta considerar dos normas n_1, n_2 en $\mathbb{R}^2$, que sabemos que son equivalentes, de modo que existen dos constantes c_1 y c_2 tales que:

$$c_1 \leq \frac{n_1(x,y)}{n_2(x,y)} \leq c_2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

lo cual implica que

$$c_1 \leq \frac{n_1(\|f_1\|, \|f_2\|)}{n_2(\|f_1\|, \|f_2\|)} \leq c_2.$$

Es decir, las normas son equivalentes en $E \times F$. $\square$

Proposición B.5.2. *El producto finito de espacios reflexivos es reflexivo.*

Demostración. Sean X e Y reflexivos. Vamos a probar que $(X\times Y)^* = X^*\times Y^*$, lo que prueba el resultado. Es decir, $(X\times Y)^{**} = X^{**}\times Y^{**} = X\times Y$.

Sean L_X, L_Y dos funcionales lineales continuos en X e Y respectivamente. Claramente el funcional

$$L : X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longrightarrow L_X(x) + L_Y(y)$$

es continuo.

Por otra parte, si $L \in (X\times Y)^*$ podemos definir $L_X \in X^*$ y $L_Y \in Y^*$ como

$$L_X(x) = L(x,0),\ \ L_Y(y) = L(0,y),$$

que son claramente continuos y que $L(x,y) = L(x,0) + L(0,y) = L_X(x) + L_Y(y)$.

Lo que prueba que la aplicación

$$I : X^*\times Y^* \longrightarrow (X\times Y)^*$$

$$(L_X, L_Y) \longrightarrow L$$

es un isomorfismo isométrico. $\square$

De manera similar tenemos el siguiente resultado:

Proposición B.5.3. *El producto finito de espacios de Banach separables es separable.*

Demostración. Sen $x \in D_X \subset X$ e $y \in D_Y \subset Y$ con D_X y D_Y conjuntos densos en X e Y respectivamente. Definimos

$$D = D_X \times D_Y,$$

que es denso en $X\times Y$ y contable. $\square$

B.6. Teorema de la divergencia

Por último enunciamos una serie de resultados del Cálculo relativos a la integración en varias variables. Estos resultados son fundamentales a la hora de aplicar los pasos (1) y (2) del método variacional. En esta sección $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y acotado con frontera C^1. Además:

(i) $\vec{n}$ es el vector normal exterior a la frontera de Ω $\partial\Omega$.

(ii) Δu representa el laplaciano de u.

(iii) $\int_{\partial\Omega} dS$ denota integral sobre la frontera de Ω (Utilizando la medida de superficie, de dimensión $n-1$), y $\int_\Omega dV$ la integral sobre el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(iv) $\nabla\cdot u$ representa la *divergencia* de u, i.e. $\nabla\cdot u = u_{x_1} + \ldots + u_{x_n}$.

Teorema B.6.1. ***(Teorema de Gauss-Ostrogradsky, Teorema de la Divergencia)*** *Sea $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\int_\Omega (\nabla \cdot u) dV = \int_{\partial\Omega} u\vec{n} \, dS.$$

Donde $u\vec{n} = u_1\vec{n}_1 + \ldots u_n\vec{n}_n$.

Demostración. Ver [1, Capítulo 10].

□

Obsérvese la analogía de la siguiente fórmula con la fórmula de integración por partes para una variable:

Corolario B.6.2. ***(Teorema de Gauss-Green, Integración por Partes)*** *Sean dos funciones $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces, para $i = 1, ..., n$,*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} v \; dV = -\int_\Omega \sum_{i=1}^n u v_{x_i} \; dV + \int_{\partial\Omega} uv\vec{n}_i \; dV.$$

Demostración. Basta aplicar el teorema de la divergencia a la función uv. □

La siguiente identidad se sigue aplicando la regla de derivación para el producto y después el teorema de la divergencia:

Corolario B.6.3. ***(Identidad de Green)*** *Sean dos funciones $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\int_\Omega v\Delta u \; dV = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n} \; dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v \; dS.$$

Esta identidad es conocida como la Primera Identidad de Green. Otras identidades pueden encontrarse en [12, Apéndice C].

Demostración. De la regla para derivar un producto $(uv)_{x_i} = u_{x_i}v + uv_{x_i}$ y del hecho de que $\nabla \cdot \nabla = \Delta$, tenemos que

$$\nabla u \cdot \nabla v + u\nabla \cdot \nabla v = \nabla u \cdot \nabla v + u\Delta v.$$

Aplicando el teorema de la divergencia obtenemos la identidad. □

B.7. Otros resultados

Las identidades mostradas en la sección anterior requieren regularidad clásica de las funciones. Vamos a mostrar que una identidad mostrada para funciones diferenciables en sentido clásico puede extenderse al espacio de Sóbolev $H^2(\Omega)$ por densidad siempre que ambos lados de la identidad sean continuos respecto a la norma del espacio de Sóbolev. Como ejemplo lo haremos con la primera identidad de Green.

Teorema B.7.1. ***(Identidad de Green para espacios de Sóbolev)*** *Sea Ω un abierto de clase C^1 acotado. La identidad de Green (corolario B.6.3) se verifica para toda $u, v \in H^2(\Omega)$.*

Demostración. Consideramos la identidad de Green:

$$\int_\Omega v\Delta u\ dV = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n}\ dS - \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dS.$$

La función

$$H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longrightarrow \int_\Omega v\Delta u$$

es continua, puesto que es lineal y por la desigualdad de Hölder

$$\left|\int_\Omega v\Delta u\right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

está acotada. De manera similar el operador $(u, v) \to \int_\Omega \nabla u \nabla v$ es continuo.

La acotación del operador $(u, v) \to \int_\Omega v(\nabla u)\vec{n}$ se consigue gracias al operador de traza (ver teorema 3.2.6):

$$\left|\int_{\partial\Omega} v(\nabla u)\vec{n}\right| \leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^2}\|u\|_{H^2}.$$

De la densidad de las funciones continuas (el corolario 3.2.12 asegura que existe una sucesión $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_{n_{|\overline{\Omega}}} \to u_{|\overline{\Omega}}$) y del hecho de que ambos lados de la igualdad son operadores continuos definidos en un conjunto denso de $H^2(\Omega)^2$ deducimos el resultado, puesto que los operadores tienen una única extensión continua a $H^2(\Omega)^2$, y dos operadores que coinciden en un conjunto denso de $H^2(\Omega)^2$ necesariamente lo hacen en todo $H^2(\Omega)^2$ (ver proposición B.2.2).

□

En la sección 3.2.4, en el corolario 3.2.19 hemos mostrado que la función u es continua y que las derivadas parciales en sentido débil son continuas. Este resultado implica que $u \in C^k(\Omega)$ en sentido **clásico**.

Teorema B.7.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Si u es continua y toda $D^\alpha u$ (notación multiíndice) es continua para todo $|\alpha| \leq k$, entonces $u \in C^k(\Omega)$ en sentido clásico.*

Utilizaremos el siguiente lema:

Lema B.7.3. *Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola cerrada. El espacio de funciones $C^k(B)$ con la suma de las normas uniforme para cada una de las derivadas y u, es decir,*

$$\|u\| = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in B} |D^\alpha u|$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [12, Capítulo 5, sección 1]. □

Demostración. Dado que la diferenciabilidad es una propiedad local, argumentamos para cualquier punto $x \in \Omega$. Tomamos una bola B cerrada (acotada) suficientemente pequeña tal que $x \subset B \subset \Omega$. Extendemos u a $\overline{u}$ como 0 en $\mathbb{R}^n - \Omega$. Los resultados de convolución y regularización mostrados en la sección B.4.2 prueban que, para una sucesión regularizante (ρ_n) en el conjunto compacto B:

(1) $\overline{u} * \rho_n \to u$ uniformemente cuando $n \to \infty$.

(2) $D^\alpha(\overline{u} * \rho_n) = (D^\alpha \overline{u}) * \rho_n$.

(3) $(D^\alpha \overline{u}) * \rho_n \to D^\alpha \overline{u}$ uniformemente cuando $n \to \infty$.

De estos tres apartados y la definición de convergencia uniforme se deduce que $(\overline{u} * \rho_n)$ es una sucesión de Cauchy en la norma dada en el lema anterior. De (3) deducimos lo mismo para $((D^\alpha \overline{u}) * \rho_n)$. Dado que $C^k(B)$ es un espacio de Banach con la norma uniforme, esta sucesión converge a un elemento en $C^k(B)$. Este elemento es f por (1).

□

Bibliografía

[1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3^{rd} ed., McGraw-Hill, 1976.

[2] W. Rudin, *Real & Complex Analysis*, 3^{rd} ed., McGraw-Hill, 1987.

[3] M. Spivak, *Calculus*, 3ª ed., Reverté, 2010.

[4] S. Willard, *General Topology*, Courier Corporation, 1970.

[5] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.

[6] P. Alegría, *Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue*, Apuntes UPV-EHU, 2007.

[7] E. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis: Measure Theory, Integration and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[8] M. Macho, *Topología de Espacios Métricos*, Apuntes UPV-EHU, Curso 2009/2010.

[9] B. P. Rynne, M. A. Youngson, *Lineal Functional Analysis*, 2^{nd} ed., Springer, 2008.

[10] B. Cascales, J. M. Mira, J. Orihuela, M. Raja, *Análisis Funcional*, Electolibris, 2013.

[11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, University of California, 2010.

[12] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2^{nd} ed., American Mathematical Society, 2010.

[13] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDEs and Optimization*, 2^{nd} ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.