Kontradibideak topologian

Gradu Amaierako Lana
Matematikako Gradua

Elene Antón Balerdi

Iraide Mardones
Irakasleak zuzendutako lana

Leioa, 2016ko irailaren 1a

Gaien Aurkibidea

Sarrera

Topologia objektu matematikoen propietate kualitatiboen azterketan oinarritzen den zientzia da. Multzoen topologian sakonduko dugu oraingoan. Arlo honetan interesgarria izan ohi da propietate zehatz batzuk betetzen dituen espazioa eraikitzea. Funtsean, gure buruari propietate zehatz hauek betetzen dituen espazioaren existentziaren inguruan galdetzen diogu. Adibidez, existitzen al da espazioren bat non multzo itxi disjuntuei irudi desberdinak ematen dien funtzio jarraitua definitu daitekeen? Propietate hau betetzen duen espazioa topatzen badugu, gure intuizioak aurresan duenaren adibidea topatu dugu. Propietate hau betetzen duen espaziorik ez bada existitzen, teorema bat plazaratzeko aukera dugu.

Kontradibideen kasuan ordea, kontrakoa gertatzen da; askotan proposizio baten egokitasuna susmatuko dugu, honen adibide ugari topatu baititugu, besteak beste. Baina, halako batean, eskuartean dugun espazioak hipotesia bete arren, proposizioaren ondorioa ez duela betetzen ohartzen gara. Hau da, gure arrazonamenduaren kontradibidea topatu dugu. Honela, proposizioak sinesgarritasuna galdu eta lanaren norabidea moldatzera eramango gaitu. Kontradibideak aurkitu edo eraikitzeak, beraz, esku artean dugun eduki matematikoa askoz hobeto ulertzen, barneratzen eta bideratzen lagunduko digu. Horregatik, kontradibideak funtsezkoak dira matematikan.

Esan bezala, multzoen topologian sakonduko dugu, banantze-axiometan hain zuzen. Hitz gutxitan, espazio topologikoak sailkatzen dituzten propietateak dira. Espazio ezberdinak definitzeaz gain, hauen inguruko azterketa sakona egingo dugu. Hasteko, espazio bakoitzaren karakterizazioak erreparatuko ditugu eta propietate hauen heredagarritasun eta biderkagarritasunari arreta berezia jarri. Betiere espazioen biderkadura finituetan egingo dugu lan. Bestetik, espazioen arteko loturak ere frogatuko ditugu, honela, inplikazio katea eraikiz. Prozesu honetan, atzerako inplikazioetan erreparatuko dugu eta kontradibide baten bitartez, hauen faltsukeria frogatu. Halaber, espazio hauen biderkagarritasuna aztertzeak kontradibideak eraikitzeko metodoetan sakontzen lagunduko digu, eranskineko A.2 atalean. Era honetan, espazio hauen izaera guztiz finkatuko dugu.

Lanaren euskarria banantze-axiomak izango dira. Lehen kapituluan hauen inguruko xehetasunak aztertu ondoren, hurrengo kapituluetan trinkotasunean eta metrizagarritasunean murgilduko gara. Trinkotasunean murgiltzerakoan, trinkotasun lokala eta paratrinkotasuna dira tentuz aztertuko ditugun gaiak. Espazio hauen inguruan ikasi ondoren, banantze-axiomen arteko inplikazio katera bueltatuko gara. Helburua, trinkotasunak banantze-axiomen arteko inplikazioetan "zubiak" eraikitzeko gaitasuna aztertzea da. Hau da, hasieran betetzen ez ziren atzerako inplikazio horiek, egoera berezi batzuetan bete egiten direla frogatuko dugu. Eraikitako inplikazio berri hauetan ere, atzerako inplikazioei egingo diegu so, eta baldintza gehigarri hauek baldintza beharrezkoa diren aztertuko dugu eta honela ez bada, kontradibide baten bitartez frogatuko dugu.

Lanari amaiera emateko, metrizagarritasunean arituko gara. Batetik, metrizagarriak diren espazioetan banantze-axiomek eta trinkotasunak nolako portaera duten aztertuko dugu. Bestetik, lanean garatutako kontzeptu berriekin erlazionatuta dauden metrizagarritasun teorema batzuk plazaratuko ditugu. Atal honetan ez dira banantze-axiomen eta metrizagarritasunaren arteko erlazioak finkatzen dituzten kontradibideak garatuko. Izan ere, ikusiko dugun moduan, metrizagarriak diren espazioetan landuko ditugun banantze-axioma guztiak betetzen dira.

Aipatzekoa da ere, eranskin atalean interesgarriak diren beste zenbait gaietan sakontzen dela. Batetik, ohiko $\mathbb{R}$ espazio euklidearrak banantze-axiomekiko duen portaera aztertzen da. Izan ere, espazio hau ezagutzeak, gainontzeko espazioetan betetzen diren propietateak frogatzen lagunduko digu. Bestetik, lehen aipatu bezala, kontradibideak eraikitzeko teknika ezberdinak lantzen dira. Gainera, lanean zehar beharrezkoak diren zenbait kontzeptu ere lantzen dira, zegokien tokian haria galtzeko arriskua zegoenez hor kokatuta daude. Hala nola, beste zenbait banantze-axioma landuko ditugu eta hasierako inplikazio katean txertatu. Axioma hauen garrantzia inplikazio katean txertatzerakoan aztertuko ditugun kontradibideen berezitasunean datza.

Beraz, kontradibideak dira gaurkoan landuko ditugun ariketak, arestian aipatu dugun moduan, ariketa beharrezkoak matematikaren ezagutzan aurrera egiteko. Lan honen motibazioa, kontradibideek, topologian bereziki duten garrantziaz jabetzea da. Kontzeptu berriak garatzen goazen heinean, kontradibideak kontzeptu hauen arteko erlazioak finkatzeko oso lagungarriak izango dira.

1. Kapitulua

Banantze-Axiomak

1.1 Motibazioa

Multzoen topologian oinarritutako teorian sakonduz, banantze-axiomak aztertuko ditugu. Hitz gutxitan, banantze-axiomek espazioan dauden egitura zehatz batzuk (bi puntu, itxia eta barnean ez duen puntua, bi itxi disjuntu . . .) topologikoki bereizteko beharrezkoak diren ireki kopuruaren existentzia bermatzen dute.

Kapitulu honetan ikusiko ditugun banantze-axiomak topologia orokorraren oinarrizkoenak dira. Gainera, eranskineko A.3 atalean gure zereginerako interesgarriak diren beste zenbait axioma aztertzen dira. Ez gara definizio hutsetan geratuko soilik, hauek duten esanahi topologikoari so egin eta hauen arteko inplikazio zuzenak frogatuko ditugu, inplikazio katea eraikiz. Halaber, atzerako inplikazioei erreparatuko diegu, hauen izaera aztertu eta faltsuak direnean zergatiak justifikatu.

1.2 Oinarrizko banantze-axiomak

Definizioa 1.2.1. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau T_0 dela esaten da baldin eta, $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, $U \in \tau$ irekia existitzen bada, non $x \in U$ eta $y \notin U$ diren, edo, $y \in U$ eta $x \notin U$ diren.

Definizioa 1.2.2. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau T_1 edo *Frechet* dela esaten da baldin eta, $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, $U, V \in \tau$ irekiak existitzen badira non $x \in U$, $y \notin U$ eta $y \in V$, $x \notin V$ diren.

Oharra 1.2.3. Dakigunez baliokidea da espazioa Frechet izatea eta atomoak itxiak izatea. Funtsean, T_1 espazioen garrantzia propietate honetan datza.

Definizioa 1.2.4. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau T_2 edo *Hausdorff* espazioa dela esaten da baldin eta, $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen badira non $x \in U$ eta $y \in V$ diren.

Bibliografia ezberdinetara jo ondoren, banantze-axiomei dagozkien kontzeptuak definitzeko era ezberdinak daudela erreparatu daiteke, eta ondorioz, kontzeptu hauen arteko inplikazioetan parte hartzen duten elementuak ere ezberdinak dira. Lan honetan jarraitzen den bidea hurrengoa izango da; T_3, T_4 eta T_5 axiomak propio definituko dira. Jarraian, axiomen konbinaketak eginez erregularra, normala eta gainontzeko propietateak definituz. Ondorioz, azken hauek, gerora landuko diren inplikazioetan agertuko dira.

Definizioa 1.2.5. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa eta $\mathcal{C}$ bertako multzo itxien familia. Espazio hau T_3 dela esaten da baldin eta, $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $x \notin F$ guztietarako, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen badira, non $x \in U$ eta $F \subseteq V$ diren.

Jarraian datorren teoremak T_3 espazioen karakterizazio garrantzitsua emango digu, froga askotan erabiliko duguna.

Teorema 1.2.6. *Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazioa T_3 da baldin eta soilik baldin $x \in X$ eta $U \in \tau$ puntuaren ingurune ireki guztietarako, $V \in \tau$ irekia existitzen bada non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ den.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa.

$\Longrightarrow$) Izan bitez x puntua eta U honen ingurune irekia. Orduan, $X - U \in \mathcal{C}$ itxia da. Hipotesiz, $X - U \in \mathcal{C}$ eta x bikoterako, V eta W ireki disjuntuak existitzen dira non $x \in V$ eta $X - U \subseteq W$ betetzen diren. Gainera, $y \in W$ guztietarako, W, y puntuaren ingurunea da eta V multzoarekin disjuntua. Beraz, $y \notin \overline{V}$ dugu eta honela $\overline{V} \cap W = \emptyset$ betetzen da. Ondorioz, $\overline{V} \subseteq X - W$ dugu. Berehalakoa da orduan, $\overline{V} \subseteq U$ betetzen dela, behar genuena.

$\Longleftarrow$) Izan bitez $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $x \notin F$. Orduan $X - F$, x puntuaren ingurune irekia da. Hipotesiz, $V \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - F$ betetzen den. Honela, V eta $X - \overline{V}$ ireki disjuntuak dira eta, $x \in V$ eta $F \subseteq X - \overline{V}$ betetzen dira. Hau da, espazioa T_3 da. $\square$

T_3 axiomak arazoak sortzen ditu inplikazioak ezartzerako garaian, izan ere axioma honek, bere baitan, ezin du espazioa Hausdorff izatea ondorioztatu. Egoera hau $(\{0, 1\}, \tau_{Indisk})$ espazioan islatzen da, eranskineko A.2 atalean azaldua. Hala ere, egoera honi aurre egin eta inplikazio katea eraikitzeko, erregularrak diren espazioak definitzen dira, T_0 eta T_3 direnak, hain zuzen ere. Honela, gero ikusiko dugun moduan, espazio erregularrak Hausdorff izango dira.

Definizioa 1.2.7. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau *erregularra* dela esaten da T_0 eta T_3 bada.

Proposizioa 1.2.8. *T_3 den espazio topologikoan, T_0 eta T_1 axiomak baliokideak dira.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) T_3 den espazio topologikoa.

$T_0 \Longrightarrow T_1$) Ikus dezagun atomoak itxiak direla. Izan bedi $x \in X$ puntua. Batetik, espazioa T_0 denez, $y \in X$ non $y \neq x$ den puntu guztietarako, $U_y \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in U_y$ eta $y \notin U_y$ diren, edo, $y \in U_y$ eta $x \notin U_y$ diren. Demagun $y \in U_y$ eta $x \notin U_y$ ondorioa betetzen dela. Orduan, U_y, y puntuaren ingurune irekia da eta $U_y \cap \{x\} = \emptyset$. Beraz, $y \notin \overline{\{x\}}$ da. Aldiz, $x \in U_y$ eta $y \notin U_y$ betetzen badira, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, x eta honen U_y ingurune irekirako, V_y irekia existitzen da non $x \in V_y \subseteq \overline{V_y} \subseteq U_y$ betetzen den. Hau da, y puntuaren ingurunea existitzen da, $N_y = (X - \overline{V_y})$ alegia, zeinak $N_y \cap \{x\} = \emptyset$ betetzen duen eta beraz, $y \notin \overline{\{x\}}$ da. Edozein kasutan ere, $y \notin \overline{\{x\}}$ lortu dugu $y \in X$, $y \neq x$ guztietarako. Horrenbestez, $\{x\} \in \mathcal{C}$ itxia da eta espazioa T_1.

$T_1 \Longrightarrow T_0$) Berehalakoa. □

Honela erregularra den espazioan, oso baliagarria den propietatea berreskuratu dugu.

Lehen definizioak eskuartean ditugula, ildo honetatik jarraituz, burura datorkigun galdera da hau: Nolako jarrera edukiko dute propietate hauek topologia erlatiboan eta biderkadura topologian lan egiterako garaian? Jarraian ikusiko dugun moduan, artean definitu ditugun banantze-axiomak propietate heredagarriak eta biderkagarriak izango dira.

Proposizioa 1.2.9. *T_0, T_1, T_2, T_3 eta erregularra izatea propietate heredagarriak eta biderkagarriak dira.*

Frogapena. Batetik, T_0 eta T_1 propietate heredagarriak eta biderkagarriak direla erraz frogatzen da. Ezaguna dugu, Hausdorff propietatea ere hala dela. Beraz, erregularrak diren espazioak heredagarriak eta biderkagarriak direla frogatu behar dugu. Baina, funtsean, T_3 propietaterako frogatu behar dugu soilik.

(i) Heredagarria: (X, τ) espazioa T_3 bada eta $A \subseteq X$, orduan (A, τ_A) azpiespazioa ere T_3 dela frogatuko dugu. Izan bitez $x \in A$ eta $U \in \tau_A$ puntu honen ingurune irekia A azpiespazioan. Orduan $V \in \tau$ irekia existitzen da non $U = A \cap V$ den. (X, τ) espazioan V, x puntuaren ingurune irekia da. Hipotesiz, espazioa T_3 da eta 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $W \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in W \subseteq$

$\overline{W} \subseteq V$ den. Beraz, $W \cap A = W_A \in \tau_A$ irekia izango da. Gainera, $\overline{W_A}^A = \overline{W}_A \cap A$ eta $x \in W_A \subseteq \overline{W_A}^A \subseteq U$ ere beteko ditu.

(ii) Biderkagarria: Bi espazioren arteko biderkadura espaziorako frogatuko dugu baina, antzeko eran frogatzen da biderkadura finituetarako ere betetzen dela.

Izan bitez (X, τ_X) eta (Y, τ_Y) T_3 diren espazioak, orduan $(X \times Y, \tau_{Tych})$ espazioa T_3 dela frogatuko dugu. Izan bitez $(x, y) \in X \times Y$ eta $W \in \tau_{Tych}$ puntuaren ingurune irekia. Orduan, $U \in \tau_X$ eta $V \in \tau_Y$ irekiak existitzen dira non $U \times V \subseteq M$ den. Batetik, U, x puntuaren ingurune irekia denez, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $W \in \tau_X$ irekia existitzen da non $x \in W \subseteq \overline{W} \subseteq U$ betetzen den. Era berean, V, y puntuaren ingurune irekia denez, $Z \in \tau_Y$ irekia existitzen da non $y \in Z \subseteq \overline{Z} \subseteq V$ betetzen den. Orduan, (x, y) puntua eta honen $U \times V$ ingurune irekirako, $W \times Z \in \tau_{Tych}$ irekia existitzen da non $(x, y) \in W \times Z \subseteq \overline{W \times Z} = \overline{W} \times \overline{Z} \subseteq U \times V \subseteq M$ betetzen den. Beraz, espazioa T_3 da.

□

Oharra 1.2.10. T_0, T_1 eta T_2 propietateak finagoak diren espazioetara hedatzen dira.

Aldiz, T_3 propietatea ez da finagoak diren espazioetara hedatzen den propietatea, topologia indiskretua aztertuz jabetuko garen moduan. Izan ere, $(X, \tau_{Indisk} = \{\emptyset, X\})$ topologia T_3 dela berehalakoa da; ezin da puntu eta hau barnean ez duen itxi bikoterik topatu. Era berean, edozein τ topologia, topologia indiskretua baino finagoa da. Orduan, T_3 propietatea finagoa den espazioetara hedatuko balitz, τ topologia oro ere T_3 izango litzateke. Baina hau absurdua da.

Atal honi amaiera emateko, jada ezagunak ditugun T_4 eta normaltasun kontzeptuak gogoratuko ditugu.

Definizioa 1.2.11. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau T_4 dela esaten da baldin eta, $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntu guztietarako, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen badira non $F \subseteq U$ eta $G \subseteq V$ diren.

T_4 diren espazioetarako ere karakterizazio ezberdinak daude.

Teorema 1.2.12. (X, τ) *espazio topologikoan ondokoak baliokideak dira:*

(i) *Espazioa* T_4 *da.*

(ii) $F \in \mathcal{C}$ *eta honen ingurune den* $U \in \tau$ *ireki guztietarako,* $V \in \tau$ *irekia existitzen da non* $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ *betetzen den.*

(iii) *$F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak badira, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira non $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ eta $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ betetzen diren.*

(iv) *$F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak badira, $U \in \tau$ irekia existitzen da non $F \subseteq U$ eta $\overline{U} \cap G = \emptyset$ betetzen diren.*

T_4 propietateak ere arazoak sortzen ditu gainontzeko axiomekin erlazionatzeko garaian. Intuitiboki propietate honek T_3 izatea ondorioztatu beharko luke, baina horretarako, kasu honetan ere espazioari atomoak itxiak izatea eskatu beharko diogu. Honelako egoera bat aztertzen da eranskineko A.1.3 Either-Or topologia kontradibidean. Bertan atomoak ez dira itxiak eta espazioa T_4 den arren, T_3 ez dela frogatzen da. Nahasmen egoera honi aurre egiteko, espazioari atomoak itxiak izatearen propietatea esleitzen zaio, normalak deritzen espazioak definituz eta ikusiko dugun moduan, berehalakoa da hauek erregularrak direla.

Definizioa 1.2.13. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau *normala* dela esaten da T_1 eta T_4 bada.

T_4 axiomari erreparatuz, badirudi T_3 espazioetan betetzen den moduan, bertan T_0 eta T_1 axiomak baliokideak direla. Baina, azpimarratzekoa da oraingo honetan ez dela halakorik gertatzen. (A.1.3) Either-Or topologia bera egoera honen adibide argia da, T_4 eta T_0 den arren, ez baita T_1.

Normaltasuna propietate heredagarria edo/eta biderkagarria den ikustea ere dagokigu. Propietate honetan sakonduz gero, normaltasunak ordea, ez duela joera zintzorik ikusten da. Hala ere, espazio normalen azpiespazio itxiak normalak direla berma dezakegu.

Teorema 1.2.14. *Espazio normalen azpiespazio itxiak normalak dira.*

Normaltasuna propietate sendoa da eta egoera batzuetan zaila izango da normaltasun eza frogatzea. Funtsean T_4 axioma betetzeari buruz ari gara. Lan honetan laguntzeko, ezaguna dugun Jones-en lema enuntziatuko dugu; S. Willard-en *General Topology* [6] liburuko 15.4 atalean frogatua.

Lema 1.2.15. (***Jones-en lema***) *Izan bedi (X, τ) espazio topologiakoa. Demagun,*

(i) *$D \subseteq X$ azpimultzo dentsoa existitzen dela*

(ii) *$S \in \mathcal{C}$ itxia existitzen dela non (S, τ_S) topologia diskretua den*

(iii) *$|S| \leq 2^{|D|}$ dela*

Orduan espazioa ez da T_4.

Inplikazioak eta kontradibideak

Kapituluaren atal honetara iritsi garela, azaldutako definizioen arteko loturak aztertuko ditugu. Espazioak sailkatzeko ahalegin honetan, egitura sinpleenak landuko ditugu lehenengo, puntuak, hain zuzen ere. Puntuak, orokorrean, ez dira multzo irekiak, ezta itxiak ere. Beraz, ezer baino lehen, azter dezagun puntuen inguruan espazio topologikoek eduki ditzaketen jarrerak.

Propietaterik ahulena T_0 dugu. Honelako topologietan, bi puntu ezberdin edukiz gero, puntuetako bat barnean duen eta bestea baztertzen duen irekia topa dezakegu. Ideia naturala da, era berean, bigarren puntua barnean duen beste ireki bat existituko dela pentsatzea, oraingo honetan, bigarren puntua, lehen puntutik baztertzeko. Baina, esan beharra dago honek ez duela zertan gertatu, topologia batzuk ez direla edozein bi puntu, irekien bitartez bereizteko gai. Honela gertatzen da ezaguna dugun Sierpinski-ren topologian, $(X = \{a,b\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\})$. Aldiz, ondoren datorren teorema berehalakoa da.

Teorema 1.2.16. *T_1 diren espazioak T_0 dira.*

Orain bi puntu ezberdin elkarren artean guztiz nola bereizten diren aztertuko dugu. T_1 diren espazioek, bi puntu ezberdin bereizteko, bi irekiren existentzia bermatzen dute. Ez daukagu ireki hauen beste informaziorik. Oro har, $\mathbb{R}$ espazioan definitutako ohiko topologian, bi puntu ezberdin hartuz gero berehala imajina ditzakegu puntu hauen ingurune diren ireki disjuntuak. Baina, topologia arrotzagoetara jotzen badugu gerta daiteke, ez dugula horrelakorik aurkituko. Inplikazio honen kontradibidea topologia kofinituak emango digu; (X, τ) non X multzo infinitua den eta $\tau = \{U \subseteq X \ : \ X - U \text{ finitua}\}$. Jarraian datorren teorema ordea, aski ezaguna zaigu.

Teorema 1.2.17. *T_2 diren espazioak T_1 dira.*

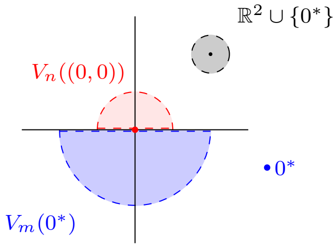
Pauso bat haratago joko dugu orain, banantze-axioma murriztaileagoetara. Aurrerantzean multzo egitura konplexuagoak bereizi nahi izango ditugu; puntua eta itxia (puntua barnean ez dagoenean, noski). Arestian aurresan bezala, inplikazio katean erregularra axioma da kontuan hartuko duguna eta Hausdorff propietatea ondorioztatzen du.

Teorema 1.2.18. *Erregularrak diren espazioak T_2 dira.*

Frogapena. Izan bitez $x, y \in X$ puntu ezberdinak. Espazioa T_1 denez, orokortasuna galdu gabe, $\{x\} \in \mathcal{C}$ itxia da. Espazioa T_3 denez $\{x\}$ eta $y \notin \{x\}$ bikote honetarako $V, W \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira, non $\{x\} \subseteq V$ eta $y \in W$ diren. Beraz, espazioa Hausdorff da. □

Hala ere, kontrako bidean pentsatuz gero, ondorengo prozesua irudikatuko genuke: Hausdorff diren espazioetan, bi puntu ezberdin ireki disjuntuetan bereiztea posible da. Gainera, bertan atomoak itxiak dira, hortaz, puntua eta atomoa ireki disjuntuetan bereizi ditugu. Seguru asko, burura datorkigun hurrengo pausua atomo itxia zabaltzea da, multzo itxi orokor bat lortu arte. $\mathbb{R}$-n ohiko topologiarekin, adibidez, pauso hori ematea posible da. Baina, halakorik egitea kasu batzuetan ezinezkoa da jarraian datorren kontradibidean aztertuko dugun moduan.

Kontradibidea 1.2.19. Jatorri bikoitzaren topologia landuko dugu. $X = \mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}$ espazioa da, non 0^* puntu gehigarria den. Ondoko elementuez osatutako ingurune-oinarri irekiek eraikitzen dute $(\mathbb{R}^2 \cup \{0^*\}, \tau)$ topologia: batetik, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ puntuetarako, $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ azpiespazioan dauden ohiko bola euklidearrak. Bestetik, $(0,0)$ jatorriaren inguruneak $V_n((0,0)) = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2} \,,\, y > 0\} \cup \{(0,0)\}$ motako multzoak dira eta azkenik, 0^* puntu gehigarriaren inguruneak $V_m(0^*) = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 < \frac{1}{m^2} \,,\, y < 0\} \cup \{0^*\}$ motakoak.



- Espazioa Hausdorff dela erraz egiaztatzen da puntuen araberako kasu ezberdinak aztertuz.

- Espazioa ez da erregularra ez baitu T_3 axioma betetzen, 1.2.6 teoremako karakterizazioa erabiliko dugu. Har ditzagun $\mathbf{b} = 0^*$ puntua eta $U = V_2(0^*)$, 0^* puntuaren ingurune irekia. Orduan, 0^* puntuaren edozein W ingurunea hartuz gero, $n_0 \in \mathbb{N}$ arrunta existitzen da non $V_{n_0}(0^*) \subseteq W$ den. Gainera, $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \,:\, -\frac{1}{n_0} \leq x \leq \frac{1}{n_0},\ x \neq 0\} \subseteq \overline{V_{n_0}(0^*)} \subseteq \overline{W}$ beteko da. Ondorioz, 0^* puntuaren edozein W ingurunerako $\overline{W} \nsubseteq U$ dugu. Beraz, espazioa ez da T_3.

□

Lehen ere aurresan dugu normalak diren espazioak erregularrak direla, formaldu dezagun inplikazio hau.

Teorema 1.2.20. *Normalak diren espazioak erregularrak dira.*

Frogapena. Normalak diren espazioak T_3 direla soilik frogatu behar dugu. Har ditzagun $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $x \notin F$. Batetik, espazioa T_1 denez, atomoak itxiak dira. Bestetik, T_4 ere badenez, $\{x\}$ eta F itxi disjuntu bikoterako $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira, non $\{x\} \subseteq U$ eta $F \subseteq V$ diren. Beraz, espazioa T_3 da. $\square$

Esanahiari erreparatzen badiogu, espazio erregularrak puntua eta hau barnean ez duen itxia, ireki disjuntuen bitartez bereizten ditu. Hau normala izan dadin, atomo itxitik abiatu eta itxi orokor baten kasua aztertu behar dugu, hasierako itxiarekin disjuntua dena noski. Atomoak itxiak izateak ez du gainontzeko itxien inguruko informaziorik ematen eta ez dugu urrutira jo behar inplikazio honen kontradibide bat topatzeko: eranskineko A.2.1 Sorgenfrey-ren planoa kontradibidea, hain zuzen.

Beraz, hurrengoak dira orain arte lortutako erlazioak:

$$\text{Normala} \Rightarrow \text{Erregularra} \Rightarrow \text{Hausdorff} \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

1.3 Beste zenbait banantze-axioma

Honezkero aipatu ditugu banantze-axioma esanguratsuenak. Hurrengo kapituluetan lantzen diren gaiekin zerikusi estua duten hiru propietate aztertzen dira atal honetan. Gure helburuari eutsiz, aurreko atalean eraiki dugun inplikazio katea osatuko dugu, propietate berri hauek katean daudenen artean kokatuko baitira eta atzerako inplikazioak arretaz aztertuko ditugu, hauen faltsukeriaren zergatiaz ohartzeko.

Jarraian datozen espazioek nolabaiteko berezitasuna dute. Orain arte espazioko egiturak irekien bitartez bereizten ziren, baina aurrerantzean datozen axiomek egitura hauek funtzio jarraituen bitartez bereiziko dituzte.

Definizioa 1.3.1. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $A, B \subseteq X$ azpimultzo disjuntuak. Aurreko azpimultzoei dagokien *Urysohn-en funtzioa*, jarraitua den eta honela definituta dagoen f funtzioari deritzo:

$$f : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u^{[0,1]}) \ , \text{ non } f|_A = 0 \textit{ eta } f|_B = 1$$

Oharrak 1.3.2. (1) Urysohn-en funtzioan 0 eta 1 puntuen paperak trukatzea posible da.

(2) Urysohn-en f funtzioak multzo disjuntu bikotea, ireki disjuntuetan bereizteko gaitasuna du. Izan ere, $f^{-1}([0, \frac{1}{2})), f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) \in \tau$ ireki disjuntuak dira eta, A eta B azpimultzoen inguruneak, hurrenez hurren.

(3) Izan bitez τ_1 eta τ_2, X espazioan definitutako bi topologia. Demagun, (X, τ_2) espazioan $A, B \in X$ azpimultzo disjuntuei dagokien Urysohn-en f funtzioa definituta dagoela. Orduan, τ_1 espazioa τ_2 espazioa baino finagoa bada, (X, τ_1) espazioan ere f jarraitua da eta A eta B azpimultzo disjuntuei dagokien Urysohn-en funtzioa da.

Jarraian, jada ezaguna dugun Urysohn-en lema enuntziatuko dugu. Garrantzi handiko lema da, T_4 espazioak funtzioen bitartez karakterizatzen dituelako. Froga S. Willard-en *General Topology* [6] liburuko 15.6 atalean topa daiteke.

Teorema 1.3.3. (***Urysohn-en lema***) *Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $A, B \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Orduan, espazioa T_4 da baldin eta soilik baldin A eta B azpimultzoei dagokien Urysohn-en funtzioa existitzen bada.*

Definizioa 1.3.4. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau $T_{3\frac{1}{2}}$ dela esaten da baldin eta, edozein $F \in \mathcal{C}$ eta $x \notin F$ bikoterako, Urysohn-en funtzio bat defini badaiteke.

Oharra 1.3.5. Baliokidea da $T_{3\frac{1}{2}}$ axioma hurrengo eran formulatzea: $x \in X$ eta $U \in \tau$ puntuaren ingurune ireki guztietarako, $\{x\}$ eta $X - U$ bikoteari dagokion Urysohn-en funtzioa existitzen da.

Intuitiboki espazio hau T_3 eta T_4 espazioen artean kokatuko genuke, baina $T_{3\frac{1}{2}}$ axiomaren egitura aztertuz, T_3 espazioetan gertatzen zen moduan arazoak egongo dira hau inplikazio katean txertatzerakoan. Berriz ere, arazoa gainditzeko espazioari T_0 baldintza esleitzen zaio eta guztiz erregularrak diren espazioak definitzen dira. Honela, espazio guztiz erregularrak, espazio erregular eta normalen artean kokatuko direla frogatuko dugu aurrerago.

Definizioa 1.3.6. $T_{3\frac{1}{2}}$ eta T_0 diren espazioei *guztiz erregular* edo *Tychonoff-en espazio* esaten zaie.

Halaber, espazio hauetan ondorengo baliokidetasuna beteko da:

Proposizioa 1.3.7. *$T_{3\frac{1}{2}}$ diren espazioetan T_0 eta T_1 axiomak baliokideak dira.*

Propietate hauek heredagarriak edo/eta biderkagarriak diren pentsatzea dagokigu orain. Funtzio jarraituen egitura aztertuz berehala ondorioztatuko dugu hala direla:

Proposizioa 1.3.8. *$T_{3\frac{1}{2}}$ eta guztiz erregularra izatea propietate heredagarriak eta biderkagarriak dira.*

Frogapena. Funtsean, $T_{3\frac{1}{2}}$ propietate heredagarria eta biderkagarria dela frogatu behar dugu soilik.

(i) Heredagarria: Izan bitez (X, τ_X) $T_{3\frac{1}{2}}$ den espazio topologikoa eta $A \subseteq X$ azpimultzoa. (A, τ_A) azpiespazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ dela frogatuko dugu. Izan bitez $G \in \mathcal{C}_A$ itxia eta $x \notin G$ $(x \in A)$. Orduan, existitzen da $F \in \mathcal{C}$ itxia X espazioan non $G = F \cap A$ den eta derrigorrez $x \notin F$ da. Hipotesiz, x eta F itxiari dagokien Urysohn-en f funtzio jarraitua existitzen da non $f(x) = 0$ eta $f(F) = \{1\}$ diren. Funtzioa A azpiespaziora murriztuz, $f|_A : A \longrightarrow [0,1]$ jarraitua da eta $f|_A(x) = 0$ eta $f|_A(G) = \{1\}$ dira. Orduan, (A, τ_A) azpiespazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ da.

(ii) Biderkagarria: Izan bitez (X, τ_X) eta (Y, τ_Y) $T_{3\frac{1}{2}}$ diren espazio topologikoak. $(X \times Y, \tau_{Tych})$ biderkadura espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ dela frogatuko dugu. Izan bitez $(x, y) \in X \times Y$ eta honen $M \in \tau_{Tych}$ ingurune irekia. Orduan, existitzen dira $U \in \tau_X$ eta $V \in \tau_Y$ irekiak non $x \in U$, $y \in V$ eta $U \times V \subseteq M$ diren. Hipotesiz, $\{x\}$ eta $X - U$ bikoteari dagokion Urysohn-en f_1 funtzio jarraitua existitzen da non $f_1(x) = 1$ eta $f_1|_{(X-U)} = 0$ diren. Antzera, $\{y\}$ eta $Y - V$ bikoteari dagokion Urysohn-en f_2 funtzio jarraitua existitzen da non $f_2(y) = 1$ eta $f_2|_{(Y-V)} = 0$ diren. Defini dezagun g funtzioa :

$$g : X \times Y \longrightarrow [0,1] \quad \text{non} \quad g(a, b) = \inf\{f_1(a), f_2(b)\}$$

Funtzio hau ondo definituta dago eta jarraitua da, funtzio jarraituen infimoa jarraitua baita. Batetik, $g(x, y) = 1$ da. Bestetik, $(a, b) \in (X \times Y) - (U \times V)$ denean, $a \notin U$ edo $b \notin V$ denez, $a \in X - U$ edo $b \in Y - V$ da, eta edozein kasutan ere, $g(a, b) = 0$ betetzen da. Are gehiago, $(X \times Y) - M \subseteq (X - Y) \times (U \times V)$ denez, $g|_{(X \times Y)-M} = 0$ da. Ondorioz, 1.3.5 oharraren karakterizazioa erabiliz $(X \times Y, \tau_{Tych})$ espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ da.

□

Ondoren, multzo klase berria aurkeztuko dugu, multzo bananduak deritzenak eta banantze-axioma sendoago bati ekingo diogu.

Definizioa 1.3.9. Izan bitez X multzoa eta $A, B \subseteq X$ azpimultzoak. Esaten da A eta B *multzo bananduak* direla, $\overline{A} \cap B = \emptyset = \overline{B} \cap A$ betetzen bada.

Definizioa 1.3.10. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau T_5 dela esaten da baldin eta $A, B \subseteq X$ multzo banandu guztietarako, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen badira, non $A \subseteq U$ eta $B \subseteq V$ diren.

Espazio hauen karakterizazio garrantzitsua landuko dugu jarraian. Lagungarria izango da T_5 ez diren espazioak identifikatzeko.

Lema 1.3.11. *Izan bedi (X, τ) espazioa. Ondokoak baliokideak dira:*

(i) *Espazioa T_5 da.*

(ii) *$A \subseteq X$ guztietarako, (A, τ_A) azpiespazioa T_4 da.*

(iii) *$U \in \tau$ guztietarako, (U, τ_U) azpiespazioa T_4 da.*

Frogapena. Izan bedi (X,τ) espazioa.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Izan bedi $A \subseteq X$ azpimultzoa. (A,τ_A) azpiespazioa T_4 dela frogatuko dugu. Izan bitez $F,G \in \mathcal{C}_A$ itxi disjuntuak. F eta G bananduak direla ikusiko dugu: $\overline{F}^X \cap G = \overline{F}^X \cap (A \cap G) = \overline{F}^A \cap G = \emptyset$ dugu, $F \in \mathcal{C}_A$ itxia eta G multzoarekin disjuntua baita. Antzera gertatzen da $F \cap \overline{G}^X$ kalkulatuz gero. Beraz, F eta G bananduak direnez, hipotesiz, $U,V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira non $F \subseteq U$ eta $G \subseteq V$ diren. Hortaz, $U \cap A, V \cap A \in \tau_A$ irekiak dira A azpiespazioan, disjuntuak eta F eta G multzoen inguruneak, hurrenez hurren. Ondorioz, (A,τ_A) azpiespazioa T_4 da.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Tribiala da.

(iii)$\Longrightarrow$(i) Izan bitez $A,B \subseteq X$ azpimultzo bananduak. Har dezagun $Y = X - (\overline{A} \cap \overline{B}) \in \tau$ irekia. Hipotesiz, (Y,τ_Y) azpiespazioa T_4 da. Ohartu $A,B \subseteq Y$ direla, izan ere, multzo bananduak direnez, $\overline{B} \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X - \overline{B} \subseteq X - (\overline{A} \cap \overline{B})$ da. Antzera gertatzen da B multzoarekin. Hauen itxiturak kalkulatuko ditugu Y azpiespazioan: $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap (X - (\overline{A} \cap \overline{B}))$ eta $\overline{B}^Y = \overline{B} \cap (X - (\overline{A} \cap \overline{B}))$ dira. Disjuntuak direla berehalakoa da. Orduan, $\overline{A}^Y, \overline{B}^Y \in \mathcal{C}_Y$ itxi disjuntuetarako, hipotesiz, $U,V \in \tau_Y$ ireki disjuntuak existitzen dira non $A \subseteq \overline{A}^Y \subseteq U$ eta $B \subseteq \overline{B}^Y \subseteq V$ diren. Gainera, $Y \in \tau$ irekia denez, U eta V ere irekiak dira X espazioan. Beraz, espazioa T_5 da. □

Espazio klase honek ere arazoak sortzen ditu inplikazio katean txertatzerako garaian. Horregatik, espazio hauei ere T_1 propietatea esleitzen zaie eta guztiz normalak diren espazioak definitu. Honela, guztiz normalak diren espazioak normalak direla aurrerago frogatuko dugu.

Definizioa 1.3.12. Izan bedi (X,τ) espazio topologikoa. Espazio hau *guztiz normala* dela esaten da T_1 eta T_5 bada.

Propietate hau heredagarria edo/eta biderkagarria den pentsatzen jardunez gero, bi ondorio garrantzitsu lortuko ditugu. Batetik, propietate heredagarria da, berehalakoa da 1.3.11 lemaren ondorioz.

Proposizioa 1.3.13. *T_5 propietatea eta guztiz normala izatea propietate heredagarriak dira.*

Bestetik, ez da biderkagarria, kontradibide gisa Sorgenfrey-ren planoa dugu. Batetik, A.1.2 Sorgenfrey-ren zuzena adibidean, Sorgenfrey-ren zuzena guztiz normala dela frogatzen da. Hala ere, A.2.1 Sorgenfrey-ren planoa kontradibidean Sorgenfrey-ren planoa ez dela normala frogatzen da, hortaz, aurrerago frogatuko dugun 1.3.24 korolarioaren ondorioz hau ezin da guztiz normala izan. Beraz, Sorgenfrey-ren zuzena guztiz normala den arren, Sorgenfrey-ren planoa ez da guztiz normala.

Hemendik aurrera, landuko dugun azkeneko banantze-axiomari ekingo diogu baina horretarako G_δ eta F_σ izeneko multzoak definituko ditugu. Gainera, eranskineko A.4 atalean hauen inguruko beharko ditugun propietateak azaltzen dira.

Definizioa 1.3.14. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. *G_δ-multzoa* multzo irekien ebakidura zenbakigarri gisa idatz daitekeen multzoa da. *F_σ-multzoa*, ordea, multzo itxien bildura zenbakigarri gisa idatz daitekeen multzoa da.

Definizioa 1.3.15. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazioa T_6 (edo *perfektuki* T_4) dela esaten da baldin eta, espazioa T_4 bada eta multzo itxi guztiak G_δ-multzoak badira.

Espazio klase honek ere arazoak dakartza inplikazio katean txertatu nahi izanez gero. Arazoa ekiditeko, espazioari T_1 baldintza gehitu eta perfektuki normalak diren espazioak definitzen dira. Aurrerago frogatuko dugun moduan, espazio berri hauek guztiz normalak dira.

Definizioa 1.3.16. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau *perfektuki normala* dela esaten da T_1 eta T_6 bada.

Arestian normaltasuna landu dugunean, ikusi dugu propietate hau funtzio jarraituen bitartez ere karakterizatu daitekeela. Oraingoan ere antzera gertatzen da:

Teorema 1.3.17. *Izan bedi (X, τ) T_1 den espazio topologikoa. Ondokoak baliokideak dira:*

(i) *Espazioa perfektuki normala da.*

(ii) *$F, H \in \mathcal{C}$ itxi disjuntu guztietarako, $f : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzio jarraitua existitzen da non $F = f^{-1}(0)$ eta $H = f^{-1}(1)$ diren.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) T_1 den espazio topologikoa.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Izan bitez $F, H \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Lehen urratsetan F multzoarekin egingo dugu lan. Hipotesiz G_δ-multzoa da eta orduan, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ non $U_n \in \tau$ modura idatz dezakegu. Egoera honetan, n guztietarako F eta $X - U_n$ itxiak eta disjuntuak dira. Hipotesiz, espazioa T_4 denez 1.3.3 Urysohn-en lema aplikatuz F eta $X - U_n$ multzoei dagokien Urysohn-en $g_n : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzio jarraitua existitzen da non $g_n|_F = 0$ eta $g_n|_{(X-U_n)} = 1$ diren. Orain defini dezagun $g : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzioa non $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{g_n(x)}{2^n}$ den. Batetik, hau funtzio jarraitua da: n bakoitzerako, $\frac{g_n(x)}{2^n}$ funtzioak jarraituak dira eta $|\frac{g_n(x)}{2^n}| \leq \frac{1}{2^n}$ betetzen da. Gainera, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ konbergentea denez, eranskineko A.4.3 teoremaren ondorioz, g funtzio jarraitua da. Bestetik, $g^{-1}(0) = F$ betetzen da:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{g_n(x)}{2^n} = 0 \Leftrightarrow g_n(x) = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in U_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Azken baliokidetasunean $\Rightarrow$) inplikazioa berehalakoa da. Baina, $\Leftarrow$) betetzen da $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = F$ baita. Horrenbestez, $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ lortu dugu. Hau da, $g^{-1}(0) = F$ betetzen da.

Antzerako prozesua jarraituko dugu H multzo itxiarekin: $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ non $V_n \in \tau$ idatziz gero, n bakoitzerako $h_n : X \longrightarrow [0,1]$ Urysohn-en funtzio jarraitua existitzen da non $h_n|_H = 0$ eta $h_n|_{(X-V_n)} = 1$ diren. Jarraian $h : X \longrightarrow [0,1]$ funtzio jarraitua definituko dugu non $h(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{h_n(x)}{2^n}$ den. Era berean, $h^{-1}(0) = H$ da.

Amaitzeko, bi funtzio hauen konbinaketa bat eginez behar dugun f funtzioa eraikiko dugu:

$$f : X \longrightarrow [0,1] \ \text{ non } \ f(x) = \frac{g(x)}{g(x) + h(x)}$$

Funtzioa ondo definituta dago eta jarraitua da. Izan ere, batetik, funtzio jarraituen batuketa jarraitua da. Bestetik, zatiketa ere jarraitua, izan ere, $g(x) + h(x) \neq 0$ dugu. Hain zuzen ere $g(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \wedge h(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F \wedge x \in H$ baita eta hauek disjuntuak baitira. Egiazta dezagun $f^{-1}(0) = F$ eta $f^{-1}(1) = H$ direla:

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x)+h(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in F$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{g(x)+h(x)} = 1 \Leftrightarrow h(x) = 1 \Longleftrightarrow x \in H$$

Beraz topatu dugu behar genuen f funtzio jarraitua.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Espazioa T_4 eta itxiak G_δ-multzoak direla egiaztatu behar dugu. Batetik, hipotesitik $F, H \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuei dagokien Urysohn-en funtzioa definiturik dagoela ondorioztatzen da. Beraz, 1.3.3 Urysohn-en lema aplikatuz, espazioa T_4 da. Bestetik, har dezagun $F \in \mathcal{C}$ azpimultzo itxia, bi egoera bereiziko ditugu:

- $F = X$ bada, tribiala da, $X \in \tau$ baita.
- $F \neq X$ bada, har dezagun $x \notin F$. Orduan, $F, \{x\} \in \mathcal{C}$ itxiak eta disjuntuak dira. Hipotesiz, $f : X \longrightarrow [0,1]$ funtzio jarraitua existitzen da non $f^{-1}(0) = F$ eta $f^{-1}(1) = \{x\}$ diren. Kontsidera ditzagun $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $[0, \frac{1}{n})$ multzo irekiak $[0,1]$ azpiespazioan. Orduan, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}) = \{0\}$ dugu. Egoera honetan, $f^{-1}([0, \frac{1}{n})) = U_n$ multzo ireki bat izango da eta ondokoa beteko da:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}([0, \frac{1}{n})) = f^{-1}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0, \frac{1}{n})) = f^{-1}(\{0\}) = F$$

  Hau da, F, G_δ-multzoa da.

□

Azkenik, aipatu beharra dago ere, normaltasun perfektua propietate heredagarria dela. Lanaren hedapena murriztua denez, ez dugu froga honetan sakonduko, R. Engelking-en *General Topology* [2] liburuan (68. orria) topa daiteke froga.

Proposizioa 1.3.18. *Normaltasun perfektua heredagarria da.*

Inplikazioak eta kontradibideak

Atal honen hasieran esan bezala, definitu berri ditugun propietateak inplikazio kate nagusian kokatuko ditugu. Lehen bezala, katearen alde ahuletik hasiko gara eta kontzeptu berri hauetan sakontzeko asmoz, atzerako inplikazioei erreparatuko diegu.

Guztiz erregularrak diren espazioak kokatuko ditugu lehenengo. Espazio hauetan Urysohn-en funtzioekin egiten da lan, honek dakusan propietaterik garrantzitsuena bi multzo itxi disjuntu konkretu irekien bitartez bereizteko gaitasuna da. Hortaz, ezaugarri honi erreparatuko diogu gainontzeko axiomekin erlazionatzeko garaian.

Jarraian datorren teorema berehalakoa da oharrak 1.3.2 (*ii*) atalari erreparatzen badiogu.

Teorema 1.3.19. *$T_{3\frac{1}{2}}$ diren espazioak T_3 dira.*

Korolarioa 1.3.20. *Guztiz erregularrak diren espazioak erregularrak dira.*

Kontrako inplikazioaren kontradibide bat topatzea ez da lan erraza eta lanaren hedapena mugatua denez, ez dugu honetan sakonduko. Kontradibidea *Counterexamples in Topology* [5] liburuko 90.Tychonoff Corkscrew (109 orria) espazioak ematen digu.

Aipatutako ondorioetara bueltatuz, normalak diren espazioak, guztiz erregularrak direla aurresan dugu, jarraian frogatuko dugun moduan.

Teorema 1.3.21. *Normalak diren espazioak guztiz erregularrak dira.*

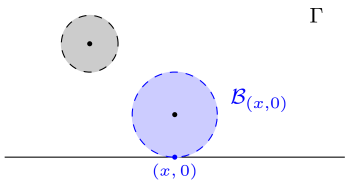
Frogapena. Espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ dela egiaztatu behar dugu soilik. Izan bitez, $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $x \notin F$. Hipotesiz, 1.3.3 Urysohn-en lema aplikatu eta $\{x\}$ eta F itxi disjuntu bikoterako Urysohn-en funtzioa existitzen dela ziurta dezakegu. □

Frogatu berri dugun inplikazioak espazio normalak eta espazio guztiz erregularrak erlazionatzen ditu, baina oraingoan ere alderantzizko inplikazioari so egingo diogu. Ikus dezagun nolako portaera duen Mooren planoak propietate hauekiko eta honela, normaltasunak zein alderditan huts egin dezakeen erreparatu.

Kontradibidea 1.3.22. Mooren Planoa: $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ espazioan definitutako τ topologiaren ingurune-oinarri irekia ondokoa da:

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \begin{cases} \{B((x,y),\epsilon) \ : \ \epsilon > 0\}, & y > 0 \ \text{ denean} \\ \{\{(x,0)\} \cup B((x,\epsilon),\epsilon) \ : \ \epsilon > 0\}, & y = 0 \ \text{ denean} \end{cases}$$

non $B((x,y),\epsilon)$ topologia euklidearrean definitutako bola irekia den.



Nabaria denez, $\tau_u^\Gamma \subseteq \tau$ da. Ondorioz, (Γ,τ) espazioa T_1 dela badakigu, besteak beste.

- Espazio hau guztiz erregularra da, $T_{3\frac{1}{2}}$ dela frogatzea dagokigu. Izan bitez, $F \in \mathcal{C}$ eta $\mathbf{b} \notin F$. Urysohn-en funtzioa eraiki behar dugu espazio honetan. Hasteko, bi egoera aztertu behar ditugu, $\mathbf{b}$ puntuaren arabera:

  (i) $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \ : \ b_2 \neq 0$ bada, $\Gamma - F$ multzoa $\mathbf{b}$ puntuaren ingurune irekia da eta, beraz, $U \in \mathcal{B}_{\mathbf{b}}$ existitzen da non $\mathbf{b} \in U \subseteq \Gamma - F$ den. Halaber, $U \in \tau_u^\Gamma$ da eta $F \subseteq \Gamma - U$ eta $\Gamma - U \in \mathcal{C}_u^\Gamma$ ere badira. Batetik, guztiz erregularra propietate heredagarria denez, (Γ, τ_u^Γ) azpiespazioa guztiz erregularra da, $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ hala delako. Beraz, (Γ, τ_u^Γ) azpiespazioan $\mathbf{b}$ eta $\Gamma - U$ bikoteari dagokion Urysohn-en funtzio bat dugu definituta. Funtzio hau jarraitua da ere (Γ,τ) espazioan, $\tau_u^\Gamma \subseteq \tau$ baita, oharreak 1.3.2 (iii) atalak dioen moduan. Azkenik, $F \subseteq \Gamma - U$ denez, f funtzioa bera da $\mathbf{b} \notin F$ eta $F \in \mathcal{C}$ bikoteari dagokion Urysohn-en funtzioa.

  (ii) Aldiz, $\mathbf{b} = (b_1, 0) \in L$ bada. Egoera honetan ere, $\Gamma - F$ multzoa $\mathbf{b}$ puntuaren ingurune irekia da eta, beraz, existitzen da $D = \{\mathbf{b}\} \cup B((b_1,\delta),\delta) \in \tau$ non $D \cap F = \emptyset$ den, δ egoki baterako. Orain, defini dezagun f funtzio hau:

  $$f : (\Gamma,\tau) \to ([0,1], \tau_u^{[0,1]}) \ , \ f((x,y)) = \begin{cases} 1, & (x,y) \notin D \\ 0, & (x,y) = \mathbf{b} \\ \frac{(x-b_1)^2+y^2}{2\delta y}, & (x,y) \in D - \{\mathbf{b}\} \end{cases}$$

  Orain, funtzioa jarraitua dela frogatuko dugu, $V \in \beta_u^{[0,1]}$ guztietarako, $f^{-1}(V) \in \tau$ dela ikusiz. Hiru egoerak aztertuko ditugu:

  * $V = (a,c) \subseteq (0,1)$, non $a < c$ den. Puntu hauen aurreirudiak kalkula ditzagun:

  $$\frac{(x-b_1)^2+y^2}{2\delta y} = a \Leftrightarrow (x-b_1)^2 + y^2 - 2a\delta y = 0 \Leftrightarrow (x-b_1)^2 + (y-a\delta)^2 = (a\delta)^2$$

  $$\frac{(x-b_1)^2+y^2}{2\delta y} = c \Leftrightarrow (x-b_1)^2 + y^2 - 2c\delta y = 0 \Leftrightarrow (x-b_1)^2 + (y-c\delta)^2 = (c\delta)^2$$

Gainera, $a < c$ denez, (a, c) multzoaren aurreirudia ondokoa da: $f^{-1}((a,c)) = \{(x,y) \in \Gamma \ : (a\delta)^2 < \frac{(x-b_1)^2+y^2}{2\delta y} < (b\delta)^2\}$. Multzo hau irekia da τ_u^Γ topologian, eta ondorioz, τ topologian ere.

* $V = [0, \alpha), 0 < \alpha \leq 1$. Oraingoan, 0 eta α puntuen aurreirudiak kalkulatuko ditugu:

$$f((x,y)) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = \mathbf{b}$$

$$f((x,y)) = \alpha \Leftrightarrow (x-b_1)^2 + (y-\alpha\delta)^2 = (\alpha\delta)^2$$

Laburbilduz, $f^{-1}(V) = C_\alpha = B((b_1, \alpha\delta), \alpha\delta) \cup \{\mathbf{b}\} \in \tau$ dugu.

* $V = (\alpha, 1]$ badugu, $0 \leq \alpha < 1$, aurreko arrazonamenduari eutsiz, $f^{-1}(V) = \Gamma - \overline{C}_\alpha$ dugu. Ondorioz, $\Gamma - \overline{C}_\alpha \in \tau$

Beraz, f funtzio jarraitua da eta $f(\mathbf{b}) = 0$ eta $f|_F = 1$ betetzen dira, $F \subseteq \Gamma - D$ baita. Hortaz, f Urysohn-en funtzioa da eta espazioa guztiz erregularra.

- Espazio hau normala ez dela frogatzeko 1.2.15 Jones-en lema erabiliko dugu. Batetik, $\mathbb{Q}^2 \cap \Gamma$ azpimultzoa dentsoa da. Bestetik, $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ multzoa itxia da eta (L, τ_L) azpiespazioak topologia diskretua du. Gainera L-ren kardinala, c jarraituaren kardinala da eta $\mathbb{Q}^2 \cap \Gamma$ azpimultzoa zenbakigarria da, hortaz, $|L| = c = 2^{|\mathbb{Q}^2 \cap \Gamma|}$ dugu. Beraz, espazioa ez da normala.

□

Gure inplikazio katean maila bat igo eta propietate murriztaileagoa aztertuko dugu orain, guztiz normala izatea hain zuzen. Inplikazio katearen amaieran jarriko duguna da hau; guztiz normala izateak espazioa normala izatea ondorioztatuko baitu. Definizioei erreparatuz, bi pausotan berehala frogatzen den teorema da hau.

Teorema 1.3.23. *T_5 diren espazioak T_4 dira.*

Frogapena. Izan bitez (X, τ) T_5 den espazio topologikoa eta $A, B \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Bereziki, hauek multzo bananduak dira, orduan, espazioa T_4 da. □

Korolarioa 1.3.24. *Espazio guztiz normalak, normalak dira.*

Kontrako inplikazioa betetzen ez dela frogatzea lan astuna da. Inplikazio honen kontradibidea ere *Counterexamples in Topology* [5] liburuan topatuko dugu, 86.**T** Tychonoff-en plaka (106 orria), hain zuzen ere.

Artean eraiki dugun inplikazio katea ondokoa da:

$$\text{Guztiz normala} \Rightarrow \text{Normala} \Rightarrow \text{Guztiz erregularra} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Erregularra} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Inplikazio kateari azkeneko espazioa kokatzea falta zaio; perfektuki normalak diren espazioak. Katearen amaieran kokatuko dugu espazio mota hau. Oso propietate onuragarria izango da hau, gainontzeko axioma guztiak inplikatzen dituelako. Gainera, lan honetan zehar beste propietate garrantzitsu batekin, metrizagarritasunarekin hain zuzen, lotura estua duela frogatuko dugu eta emaitza oso interesgarriak lortu.

Teorema 1.3.25. *Perfektuki normalak diren espazioak guztiz normalak dira.*

Frogapena. Izan bitez perfektuki normala den (X, τ) espazioa eta $A \subseteq X$ azpimultzoa. Normaltasun perfektua heredagarria denez, (A, τ_A) ere perfektuki normala da eta definizioz normala. Normaltasuna X espazioko azpimultzo guztietarako betetzen denez, 1.3.11 lema aplikatu eta (X, τ) espazioa guztiz normala dela dugu. □

Atzerako inplikazioari erreparatuko diogu orain. Multzo bananduak eta G_δ-multzoak zentzu batean eta egoera berezi batean erlazionatzeko gai izan garen arren, orokorrean ez daukate inolako erlaziorik. Hurrengo kontradibidean bananduak diren multzoetatik informazio ugari jasoko dugu, baina ez da nahikoa izango itxi guztiak G_δ-multzoak direla ziurtatzeko.

Kontradibidea 1.3.26. $\mathbb{R}$ gainean definitutako Fort-en topologia kofinitua aztertuko dugu. Izan bedi $p \in \mathbb{R}$ puntu finko bat.

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R} \ : \ \mathbb{R} - U \text{ finitua edo } \ p \in \mathbb{R} - U\}$$

$$\mathcal{C} = \{F \subseteq \mathbb{R} \ : \ F \text{ finitua edo } \ p \in F\}$$

Froga dezagun espazioa guztiz normala izan arren, ez dela perfektuki normala.

- Espazioa guztiz normala dela frogatzeko, batetik, T_1 dela berehalakoa da, atomoak itxiak baitira. Bestetik, T_5 dela egiaztatzeko, izan bitez A eta B azpimultzo bananduak, hauen egituraren arabera bi kasu aztertuko ditugu:
    - (i) $p \notin A, B$ bada, hauek irekiak dira eta disjuntuak, bananduak baitira.
    - (ii) Orokortasuna galdu gabe, $p \in A$ bada, A itxia da, eta derrigorrean, $p \notin B$ izan behar da, A eta B multzo bananduak baitira. Orduan, B irekia, A itxia eta multzo bananduak direnez $A \subseteq X - \overline{B}$ da. $X - \overline{B}$ eta B irekiak eta disjuntuak dira.

Beraz espazioa guztiz normala da.

- Ez da perfektuki normala, $\{p\}$ itxia izanda ez baita G_δ-multzoa. p puntua barnean duten ireki bakarrak osagarri finitua duten multzoak dira. Demagun $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ osagarri finitua eta p barnean duten multzoak direla. Orduan, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ multzoa $\mathbb{R}$ espazioari multzo finituen bildura zenbakigarria kentzean datza, beraz, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ multzo infinitua da oraindik ere. Hortaz, ezin du $\{p\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ izan, lehena finitua baita eta bigarrena infinitua. Ondorioz, $\{p\}$ ez da G_δ-multzoa eta espazioa ez da perfektuki normala.

□

Azkenean hau izan da eraiki dugun inplikazio katea:

$$\text{Perfektuki normala} \Rightarrow \text{Guztiz normala} \Rightarrow \text{Normala} \Rightarrow$$

$$\text{Guztiz erregularra} \Rightarrow \text{Erregularra} \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Atal hauen sintesi bat eginez, banantze-axioma esanguratsuenak eskuartean izan ditugu. Espazio bakoitza tentuz aztertu eta propietate ugarirekiko duten portaera ere nabarmendu dugu. Era berean, hauen arteko inplikazioak aztertu ditugu, inplikazio katea eraikiz.

Halaber, eranskineko A.3 atalean beste zenbait banantze-axioma aztertzen dira. Banantze-axioma hauek ez dira ohikoenak, baina hauei lotuta datozen kontradibideak interesgarriak izango dira. Jarraitu dugun prozesua errepikatuz, espazio berri hauen karakterizazio eta propietate heredagarri eta biderkagarriei arreta jartzeaz gain, hauek inplikazio katean txertatzen dira. Halaber, atzerako inplikazioak aztertu eta hauen faltsukeria kontradibide baten bitartez frogatuko da. Horrenbestez eta lehen kapitulu hau luzeegia ez izateko asmoz, atal hau eranskinean kokatuta dago.

1.4 Zubiak eraikiz

Kapitulu honi amaiera emateko, eraiki berri dugun inplikazio kateari erreparatuko diogu. Mailaz maila, atzerako inplikazioen faltsukeria erakutsi dugu kontradibide baten bitartez. Baina atal honetan, egoera berezi batzuetan atzerako inplikazio hauek betetzen direla frogatuko dugu. Gure espazioei propietate zehatz batzuk eskatuz, banantze-axiomen arteko zubiak eraiki eta emaitza oso interesgarriak lortuko ditugu.

Hasteko, ireki-oinarri eta ingurune-oinarrien izaeraren araberako propietateak aztertuko ditugu.

Definizioa 1.4.1. Izan bedi (X, τ_X) espazio topologikoa. X espazioa 1*go-zenbakigarria*, C_I, edota *espazioak zenbakigarritasunaren lehen axioma betetzen duela* esaten da baldin eta, espazioak puntu bakoitzerako ingurune-oinarri zenbakigarria onartzen badu.

Oharra 1.4.2. Kontuan izan, edozein ingurunek, bere baitan, ingurune irekia duela, hortaz ingurune irekiekin egingo dugu lan aurrerantzean.

Definizioa 1.4.3. Izan bedi (X, τ_X) espazio topologikoa. X espazioa 2. *zenbakigarria,* C_{II} edota *zenbakigarritasunaren bigarren axioma betetzen duela* esaten da baldin eta, espazioak ireki-oinarri zenbakigarria onartzen badu.

Teorema 1.4.4. *C_{II} diren espazioak C_I dira.*

Frogapena. Izan bitez C_{II} den espazioa eta β bertako ireki-oinarri zenbakigarria. Honela, $x \in X$ guztietarako $\mathcal{B}_x = \{B : x \in B \text{ eta } B \in \beta\}$ bilduma ingurune-oinarri zenbakigarria da eta ondorioz, espazioa C_I da. □

Propietate hauek aztertuz, berehala frogatzen da ondokoa:

Teorema 1.4.5. *C_I eta C_{II} propietate heredagarriak eta biderkagarriak dira.*

Teorema 1.4.6. *Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. X espazioa T_3 eta C_{II} bada, orduan, hau T_4 da.*

Frogapena. Demagun (X, τ) espazio topologikoa T_3 dela eta ireki-oinarri zenbakigarria duela; $\beta = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. Izan bitez, $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Ikus dezagun X T_4 dela, horretarako F eta G multzoen estalki ireki disjuntuak eraikiko ditugu.

Lehenik eta behin, F multzoaren estalki irekia eraikiko dugu. F eta G multzo itxi disjuntuak dira; bereziki, G itxia da eta F multzoarekin disjuntua, hortaz, F multzoko puntuak ez daude G multzoaren itxituran. Hau da, $x \in F$ guztietarako, U_x puntuaren ingurune bat existitzen da, non $U_x \cap G = \emptyset$ den. Jarraian, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $x \in F$ eta honen U_x ingurunerako, $V_x \in \tau$ irekia existitzen da, non $x \in V_x$ eta $\overline{V_x} \subseteq U$ diren. Beraz, $x \in F$ guztietarako, V_x ingurune bat existitzen da, non $\overline{V_x} \cap G = \emptyset$ den. V_x ingurunea denez, $D_x \in \beta$ ireki-oinarriko elementu bat existituko da non $x \in D_n \subseteq V_x$ den. Honen itxitura ere, G multzoarekin disjuntua izango da. F multzoko puntu guztietarako prozesu hau jarraituz, estalki ireki zenbakigarria (β zenbakigarria baita) eraiki dugu F multzorako: $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, non $D_n \in \beta$ eta $\overline{D}_n \cap G = \emptyset$ diren $n \in \mathbb{N}$ guztietarako.

Ondoren, G multzoaren estalki irekia eraikiko dugu. Horretarako, azaldu berri dugun propietatea jarraituz, $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ estalki ireki zenbakigarria eraikiko dugu. Antzera, $E_n \in \beta$ eta $\overline{E}_n \cap F = \emptyset$ dira, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Artean,

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \quad \text{eta} \quad E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

F eta G multzoen ingurune irekiak dira hurrenez hurren, baina ez dute zertan disjuntuak izan. Arazo honi aurre egiteko, eraiki ditzagun disjuntuak izango diren ingurune irekiak. n bakoitzerako, defini ditzagun ondorengo multzoak:

$$D'_n = D_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{E_i} \quad \text{eta} \quad E'_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{D_i}$$

Azkenean, $D' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D'_n$ eta $E' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E'_n$ multzoak irekiak dira. Halaber, F eta G itxien inguruneak dira, hurrenez hurren. Hain zuzen ere $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $\overline{E_n} \cap F = \emptyset$ eta $\overline{D_n} \cap G = \emptyset$ baitira. Azkenik, disjuntuak direla egiaztatuko dugu: absurdura eramanez, demagun ez direla disjuntuak, hortaz, $z \in D' \cap E'$ existitzen da. Orduan, $n, k \in \mathbb{N}$ existitzen dira non $z \in D'_n$ eta $z \in E'_k$ diren. Batetik, $n < k$ bada, $z \in D'_n$ dugu, ondorioz, $z \in D_n \subseteq \overline{D_n}$ da eta beraz, $z \notin E'_k$. Absurdu batera iritsiz. Antzera frogatzen da $n > k$ denean ere egoera absurdua dela. Azkenik, $n = k$ bada, $z \in D'_n$ eta $z \in E'_n$ dira, eta hauek garatuz, $z \notin E'_n$ eta $z \notin D'_n$ lortzen dira, absurdua dena. Beraz, ikusi dugu espazioa T_4 dela. $\square$

Korolarioa 1.4.7. *C_{II} diren espazioetan normala, guztiz erregularra eta erregularra izatea baliokideak dira.*

Are gehiago, T_3 eta C_{II} diren espazioetan banantze-axioma murriztaileagoa betetzen da:

Teorema 1.4.8. *T_3 eta C_{II} diren espazioak, T_5 dira.*

Frogapena. Izan bedi $A \subseteq X$ azpimultzoa. Hipotesiz, X espazioa T_3 eta C_{II} da, hauek propietate heredagarriak dira, orduan, (A, τ) azpiespazioa T_3 eta C_{II} da ere. 1.4.6 Teoremaren ondorioz, A azpiespazioa T_4 da eta hau (A, τ_A) azpiespazio guztietarako betetzen denez, 1.3.11 lemaren ondorioz, espazioa T_5 da. $\square$

Korolarioa 1.4.9. *C_{II} diren espazioetan guztiz normala, normala, guztiz erregularra eta erregularra izatea baliokideak dira.*

Hala eta guztiz ere, aipatu beharra dago guztiz normalak diren espazioak ez dira zertan C_{II} izan. Propietate hau, banantze-axiomen arteko zubia eraikitzeko giltza da, honela, C_{II} eta erregularra izatea baldintza nahikoa da espazioa normala izateko, baina ez da baldintza beharrezkoa. Honen kontradibide argia da Sorgenfrey-ren zuzena; eranskineko A.2.1 adibidean azaltzen den moduan, guztiz normala izan arren, ez da C_{II}.

Bestetik, trinkotasuna ere banantze-axiomen arteko erlazioak eraikitzeko giltza dela ikusiko dugu. Hain zuzen, Hausdorff den espaziotik abiatu eta trinkotasunari esker normalak diren espazioetara zubia eraikiko dugu.

Teorema 1.4.10. *Hausdorff eta trinkoak diren espazioak T_4 dira.*

Frogapena. Ezer baino lehen espazioa T_3 dela frogatuko dugu. Izan bitez $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $x \notin F$. Batetik, F trinkoa da, itxia baita Hausdorff eta trinkoa den espazioan. Badakigu, F trinko eta $x \notin F$ bikoterako, $U, V \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen direla non $x \in U$ eta $F \subseteq V$ diren. Beraz, espazioa T_3 da.

Jarraian, espazioa T_4 dela frogatuko dugu. Izan bitez $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Berriro ere, F eta G trinkoak dira eta $a \in F$ guztietarako, $U_a, V_a \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira non $a \in U_a$ eta $G \subseteq V_a$ diren. Ondorioz, $\{U_a \ : \ a \in F\}$ F-ren estalki irekia da eta F trinkoa denez azpiestalki finitua du: $\{U_{a_1}, \ldots, U_{a_n}\}$. Hortaz, $U = U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$ hartuz, F multzoaren ingurune irekia da. Halaber, $V = V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n}$ irekia da eta G multzoaren ingurunea. Izan ere, $a \in F$ guztietarako $G \subseteq V_a$ da, eta bereziki $a_1, \ldots, a_n$ hauetarako ere. Gainera, U eta V disjuntuak dira:

$$U \cap V = (U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}) \bigcap (V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n}) =$$

$$= (U_{a_1} \cap (V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n})) \bigcup \ldots \bigcup (U_{a_n} \cap (V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_n})) = \emptyset$$

da, $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ baita, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako. Beraz, espazioa T_4 da. $\square$

Korolarioa 1.4.11. *Hausdorff eta trinkoak diren espazioak normalak dira.*

Oraingoan ere, trinkoa eta Hausdorff izatea baldintza nahikoa da espazioa normala izateko. Ohiko zuzen erreala, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, kontradibide argia da baldintza beharrezkoa ez dela erakusteko.

Banantze-axiometan trinkotasunak duen garrantzia ikusi berri dugula, hau da hurrengo kapitulurako motibazioa.

2. Kapitulua

Trinkotasuna eta banantze-axiomak

2.1 Motibazioa

Kapitulu honetan trinkotasunaren inguruko kontzeptu berri batzuk aztertuko ditugu, hala nola trinkotasun lokala eta paratrinkotasuna. Trinkotasunarekin gertatzen den moduan, egoera batzuetan propietate hauek frogatzea ez da lan erraza izaten. Horregatik, kontzeptu berriak definitzeaz gain, tresna ezberdinak ere garatuko ditugu hauekin errazago lan egin ahal izateko. Kapituluaren amaieran, gure funtsezko zereginera bueltatu eta garatutako ideia berriek, hasierako banantze-axiomen artean zubiak eraikitzeko duten gaitasuna aztertuko dugu.

2.2 Kontzeptuak

Kapitulu hau trinkotasun lokala landuz hasiko dugu. Propietate lokalak espazioko puntuen inguruneetan gertatzen diren propietateak dira.

Trinkotasun lokala

Definizioa 2.2.1. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. *Trinko erlatiboa* esaten zaio itxitura trinkoa duen espazioko azpimultzoari.

Definizioa 2.2.2. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $x \in X$ guztietarako $\mathcal{N}_x$, x puntuaren inguruneen familia. Espazioa *lokalki trinkoa* dela esaten da baldin eta $x \in X$ guztietarako, $C \subseteq X$ azpimultzo trinkoa eta $N \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existitzen badira, non $N \subseteq C$ betetzen den.

Oharra 2.2.3. Baliokidea da, (X, τ) lokalki trinkoa dela pentsatzea baldin eta $x \in X$ guztietarako, puntuaren ingurune trinkoa existitzen bada. Antzera, baliokidea da, (X, τ) lokalki trinkoa dela pentsatzea baldin eta $x \in X$ guztietarako, $N \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existitzen bada non N trinko erlatiboa den.

Definizioari erreparatuz, ondorengo teorema berehalakoa da:

Teorema 2.2.4. *Trinkoak diren espazioak lokalki trinkoak dira.*

Jarraian datozen baliokidetasunek aurreragoko zereginetan asko lagunduko gaituzte.

Teorema 2.2.5. *Izan bedi (X, τ) Hausdorff den espazio topologikoa. Bertan ondokoak baliokide dira:*

(i) *X lokalki trinkoa da.*

(ii) *$x \in X$ eta $U \in \tau$ puntuaren ingurune ireki guztietarako, $V \in \tau$ trinko erlatibo irekia existitzen da, non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ den.*

(iii) *C azpimultzo trinko eta $U \in \tau$ non $C \subseteq U$ guztietarako, $V \in \tau$ trinko erlatibo irekia existitzen da, non $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ den.*

(iv) *X espazioak trinko erlatibo irekiez osatutako β ireki-oinarria du.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) Hausdorff den espazio topologikoa.

(i)$\Rightarrow$(ii) Izan bitez $x \in X$ eta $U \in \tau$ non $x \in U$ den. Hipotesiz (X, τ) lokalki trinkoa da, orduan 2.2.3 oharra erabiliz, $x \in X$ horretarako $W \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in W$ eta $\overline{W}$ trinkoa den. Har dezagun $(\overline{W}, \tau_{\overline{W}})$ azpiespazioa. Hau Hausdorff eta trinkoa da eta 1.4.11 korolarioaren ondorioz, espazioa normala da, beraz T_3 ere bada. Bertan T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $x \in \overline{W}$ eta puntuaren $U' = U \cap \overline{W} \in \tau_{\overline{W}}$ ingurunerako, $G \in \tau_{\overline{W}}$ irekia existitzen da non $x \in G \subseteq \overline{G}^{\overline{W}} \subseteq U'$ betetzen den. Halaber, $E \in \tau$ irekia existitzen da non $G = E \cap \overline{W}$ den eta $\overline{G}^{\overline{W}} = \overline{G} \cap \overline{W}$ betetzen da.

Azkenik, $V = E \cap W$ hartu eta behar dugun trinko erlatibo irekia dela egiaztatuko dugu. Batetik, irekia da τ espazioan, irekien ebakidura baita. Bestetik, $\overline{V} = \overline{E \cap W} = \overline{E \cap W} \cap \overline{W} \subseteq \overline{G} \cap \overline{W} = \overline{G}^{\overline{W}} \subseteq U'$ betetzen denez, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ betetzen da. Gainera, $\overline{V} = \overline{V} \cap \overline{W}$ da, $V \subseteq \overline{W}$ delako, hortaz, $\overline{V}$ itxia da $(\overline{W}, \tau_{\overline{W}})$ azpiespazioan. Azkenik, $\overline{V}$ itxia denez Hausdorff eta trinkoa den azpiespazioan, trinkoa da azpiespazioan eta baita (X, τ) espazioan ere.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Izan bitez C azpimultzo trinkoa eta $U \in \tau$ non $C \subseteq U$ den. Hipotesiz, $c \in C$ guztietarako U puntuaren ingurune irekia denez, $V_c \in \tau$ trinko erlatibo irekia existitzen da non $c \in V_c \subseteq \overline{V}_c \subseteq U$ den. Eraiki dezagun C azpimultzoaren $\{V_c \ : \ c \in C\}$ estalkia. C trinkoa denez azpiestalki finitua du; demagun hau $\{V_1, \ldots, V_n\}$ elementuez osatuta dagoela. Har dezagun C azpimultzoaren V ingurune irekia: $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$. Halaber, $\overline{V}$ trinkoa da trinkoak diren elementuen bildura finitua baita. Amaitzeko, $\overline{V} \subseteq U$ betetzen dela egiaztatuko dugu: $i \in \{1, \ldots, n\}$ bakoitzerako, $\overline{V}_i \subseteq U$ betetzen da, orduan, $\overline{V} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} V_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \subseteq U$ ere beteko da. Laburbilduz, V trinko erlatibo irekia topatu dugu zeinak $C \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ betetzen duen.

(iii)⇒(iv) Izan bedi $\beta = \{B \in \tau \ : \ \overline{B} \text{ trinkoa}\}$. Hau X espazioaren ireki-oinarria dela egiaztatuko dugu. Batetik, $\beta \subseteq \tau$ dela berehalakoa da. Bestetik, $U \in \tau$ eta $x \in U$ guztietarako, $\{x\}$ azpimultzoa trinkoa da eta $\{x\} \subseteq U$ betetzen da. Hipotesiz, $V \in \tau$ trinko erlatibo irekia existitzen da non $\{x\} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ den. Orduan, $V \in \beta$ da eta $x \in V \subseteq U$ betetzen du. Hortaz, β τ topologiaren ireki-oinarria da.

(iv)⇒(i) Berehalakoa da 2.2.3 oharra erreparatuz. □

Trinkotasun lokala propietate heredagarria edo/eta biderkagarria den aztertuko dugu orain. Orokorrean espazioa lokalki trinkoa bada, honen azpiespazioak ez dira lokalki trinkoak izango. Hurrengo proposizioan aztertuko dugu zein egoeratan betetzen den.

Proposizioa 2.2.6. *Izan bitez (X, τ) Hausdorff eta lokalki trinkoa den espazio topologikoa eta $A \subseteq X$ azpimultzoa. A itxia edo irekia bada X espazioan, orduan (A, τ_A) azpiespazioa lokalki trinkoa da.*

Frogapena. Izan bedi $A \subseteq X$ azpimultzoa. (A, τ_A) azpiespazioan egingo dugu lan. Izan bitez $x \in A$ eta $U \in \tau_A$ puntuaren ingurune irekia. Orduan, $U' \in \tau$ irekia existitzen da non $U = U' \cap A$ den. Hipotesiz, x eta honen ingurune den $U' \in \tau$ irekirako, $V \in \tau$ trinko erlatibo irekia existitzen da non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U'$ den.

Batetik, A itxia den kasua aztertuz, $V_A = V \cap A$ irekia da A azpiespazioan eta x puntuaren ingurunea. Halaber, $\overline{V_A}^A = \overline{V} \cap A$ da eta hau trinkoa da. Izan ere $\overline{V}_A^A \subseteq \overline{V}$ da eta $\overline{V_A}^A$ itxia da $(\overline{V}, \tau_{\overline{V}})$ Hausdorff eta trinkoa den azpiespazioan, orduan, $\overline{V_A}^A$ trinkoa da. Honenbestez, $x \in V_A \subseteq \overline{V}_A^A \subseteq U$ betetzen da eta V_A trinko erlatibo irekia da. Beraz, (A, τ_A) lokalki trinkoa da.

Bestetik, A irekia den kasuan, U bera x puntuaren ingurune irekia da X espazioan. Hipotesiz, $V \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ eta $\overline{V}$ trinkoa diren. Are gehiago, A azpiespazioan, $V \in \tau_A$ irekia da eta $\overline{V}^A = \overline{V} \cap A = \overline{V}$ denez, $\overline{V}^A$ trinkoa da. Hortaz, (A, τ_A) lokalki trinkoa da. □

Bestetik, aipatzekoa da ere trinkotasun lokala ez dela propietate biderkagarria.

Lindelof espazioak

Jarraian Lindelof espazioetan sakonduko dugu. Espazio mota honek erlazio estua du lehen kapituluan aipatutako zenbakigarritasun axiomekin eta trinkotasunarekin.

Definizioa 2.2.7. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. X espazioaren edozein estalki irekik, azpiestalki zenbakigarria badu, espazioari *Lindelof* espazio deritzo.

Espazio mota honi tentuz erreparatzen badiogu, ohartuko gara Lindelof propietatea heredagarria dela azpiespazio itxietarako soilik. Aldiz, ez da propietate biderkagarria.

Proposizioa 2.2.8. *Lindelof izatea heredagarria da azpiespazio itxietarako.*

Frogapena. Demagun A azpimultzoa itxia dela X espazioan. Har dezagun, $\{U_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$ A-ren estalki irekia, azpiestalki zenbakigarria duela frogatuko dugu. Batetik, A, X-ren azpiespazioa denez, $\alpha \in I$ guztietarako, V_α irekia existitzen da, non $U_\alpha = V_\alpha \cap A$ den. Bestetik, $A \in \mathcal{C}$ itxia denez, $\{X - A\} \cup \{V_\alpha \ : \ \alpha \in I\}$, X-ren estalki irekia da eta hipotesiz azpiestalki zenbakigarria du: $\{X - A\} \cup \{V_{\alpha_i} \ : \ i \in \mathbb{N}\}$. Orduan, $\{U_{\alpha_i} = V_{\alpha_i} \cap A \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ A azpiespazioaren azpiestalki zenbakigarria da. □

Halaber, berehala ohartuko gara trinkotasunaren eta Lindelof espazioen arteko erlazioa zein den.

Teorema 2.2.9. *Trinkoak diren espazioak Lindelof espazioak dira.*

Azkenik, Lindelof espazioek zenbakigarritasun axiomekin duten erlazioa aztertuko dugu.

Lema 2.2.10. *C_{II} diren espazioak Lindelof dira.*

Frogapena. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa, $\mathcal{A}$, X multzoaren estalki irekia eta $\beta = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ireki-oinarri zenbakigarria. Har dezagun $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, $A_n \in \mathcal{A}$ non $B_n \subseteq A_n$, halakorik baldin badago. Eraiki dezagun $\mathcal{A}' = \{A_n \in \mathcal{A} : B_n \subseteq A_n, n \in J\}$ familia non J bertako elementuak indexatzeko $\mathbb{N}$ multzoaren azpimultzoa den: $J = \{n \in \mathbb{N} : \exists A_n \in \mathcal{A} \ : \ B_n \subseteq A_n\}$. Honela, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}$-ren azpifamilia zenbakigarria da. Ikus dezagun X multzoaren estalkia dela: $x \in X$ guztietarako, $\mathcal{A}$ estalkia denez $A_x \in \mathcal{A}$ existitzen da non $x \in A_x$ eta $A_x \in \tau$ diren. Irekia denez, $B_n \in \beta$ existituko da, non $x \in B_n \subseteq A_x$ den. Orduan, $A_n \in \mathcal{A}'$ existitzen da non $x \in B_n \subseteq A_n$ den. Beraz, $\mathcal{A}'$ estalkia da. □

Paratrinkotasuna

Kapitulu honetako azkeneko kontzeptua garatuko dugu orain, paratrinkotasuna. Propietate hau trinkotasuna baino ahulagoa den arren, egitura nahikoa dauka trinkotasunak betetzen dituen propietate ugari bermatzeko eta gainera, espazio paratrinkoen klasean, trinkotasunaz gain beste zenbait espazio klase ere badaude. Espazio metrizagarrien klasea da, klase honetan dagoen espazio mota garrantzitsuenetako bat. Ez hori bakarrik, espazio paratrinkoen klasea, espazio trinkoen klasea eta espazio metrizagarrien klasea barnean dituen ezagutzen den klaserik txikiena da. Has gaitezen paratrinkotasuna definitzeko beharko ditugun lehen definizioak garatzen:

Definizioa 2.2.11. Izan bitez X espazioa eta $\mathcal{A}$ eta $\mathcal{D}$, X espazioaren estalkiak. $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$-ren *finketa* dela esaten da, baldin eta $D \in \mathcal{D}$ guztietarako, $A \in \mathcal{A}$ azpimultzoa existitzen bada, non $D \subseteq A$ betetzen den.

Antzera, (X, τ) espazio topologikoan, $\mathcal{D}$ familiako elementuak irekiak badira, *finketa irekia* dela esaten da. Elementuak itxiak badira, ordea, *finketa itxia* dela.

Definizio honetaz baliatuz, jarraian datorren proposizioa berehalakoa da.

Proposizioa 2.2.12. *Izan bitez $\mathcal{A}$ $\mathcal{C}$ eta $\mathcal{D}$, X espazioaren estalkiak. Demagun $\mathcal{C}$, $\mathcal{A}$-ren finketa eta $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$-ren finketa direla, orduan $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$-ren finketa da.*

Definizioa 2.2.13. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $\mathcal{A}$ X-ren azpimultzoez osatutako familia. $\mathcal{A}$ *lokalki finitua* dela esaten da, baldin eta $x \in X$ guztietarako, $N \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existitzen bada zeinak $\mathcal{A}$ familiako elementu kopuru finitua ebakitzen duen.

Ohartu $\mathcal{A}$ familia finitua bada, lokalki finitua dela. Jarraian lokalki finituak diren familien inguruan interesgarria den propietatea egiaztatuko dugu.

Lema 2.2.14. *Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $\{A_\lambda \ : \ \lambda \in \Gamma\}$ lokalki finitua den X-ren azpimultzoen familia. Orduan:*

(i) $\{\overline{A}_\lambda \ : \ \lambda \in \Gamma\}$ *ere lokali finitua da.*

(ii) $\cup\overline{A_\lambda} = \overline{\cup A_\lambda}$.

Frogapena. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa.

(i) Hipotesiz, $x \in X$ guztietarako, $U \in \mathcal{N}_x$ existitzen da, non $U \cap A_\lambda = \emptyset$ den λ kopuru finitu baterako izan ezik. Azter dezagun $U \cap \overline{A}_\lambda$:

- $U \cap \overline{A}_\lambda \neq \emptyset$ betetzen da λ kopuru finitu baterako. Izan ere, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ den λ kasuetarako, $U \cap A_\lambda \subseteq U \cap \overline{A}_\lambda$ denez, $U \cap \overline{A}_\lambda \neq \emptyset$ ere betetzen da.

- $U \cap \overline{A}_\lambda = \emptyset$ betetzen da gainontzeko λ guztietarako. Izan ere, $U \cap A_\lambda = \emptyset$ den kasuetan, $U \cap \overline{A}_\lambda = \emptyset$ ere betetzen da. Egiazta dezagun: absurdura eramanez, demagun $x \in U \cap \overline{A}_\lambda$ existitzen dela, orduan $x \in U \in \mathcal{N}_x$ eta $x \in \overline{A}_\lambda$ izateagatik, $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ litzateke, absurdua.

Beraz, lokalki finitua da.

(ii) $\cup\overline{A_\lambda} = \overline{\cup A_\lambda}$ egiaztatzeko bi partekotasunak frogatuko ditugu.

$\subseteq$) Beti betetzen da.

$\supseteq$) Demagun $p \in \overline{\bigcup A_\lambda}$ dugula. Hipotesiz, $M \in \mathcal{N}_p$ existitzen da non $M \cap A_\lambda = \emptyset$ den, λ kopuru finitu baterako izan ezik, dei ditzagun $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Frogatuko dugu $k \in \{1, \ldots, n\}$ existitzen dela non $p \in \overline{A_{\lambda_k}}$ den, honela, $p \in \bigcup \overline{A_\lambda}$ izango baita. Absurdura eramanez, demagun p ez dagoela $\overline{A_{\lambda_i}}$ elementuetan, $i = 1, \ldots, n$ denean. Orduan, $M - \overline{A_{\lambda_1}} - \ldots - \overline{A_{\lambda_n}} \in \mathcal{N}_p$ ingurunea da eta ez du $\mathcal{A}$ familiako elementurik ebakitzen. Beraz, $(M - \overline{A_{\lambda_i}} - \ldots - \overline{A_{\lambda_n}}) \cap (\bigcup A_\lambda) = \emptyset$ da eta ondorioz, $p \notin \overline{\bigcup A_\lambda}$, baina hau absurdua da.

□

Jarraian multzoen familia mota berria aurkeztuko dugu. Familia honek lokalki finitua izatea baino ahulagoa den propietatea beteko du: familia mota berri hau ez da lokalki finitua izango, baina, propietate hau betetzen duten azpifamilien bildura zenbakigarri gisa idatzi ahal izango da:

Definizioa 2.2.15. Izan bitez (X, τ) espazio topologikoa eta $\mathcal{A}$, X-ren azpimultzoez osatutako familia. $\mathcal{A}$ *σ-lokalki finitua* dela esaten da, $\mathcal{A}$ lokalki finituak diren azpifamilien bildura zenbakigarri gisa idatz badaiteke, hau da, $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ non $\mathcal{V}_n$ lokalki finituak diren.

Jarraian datorren teorema berehalakoa da:

Teorema 2.2.16. *Izan bitez X multzoa eta $\mathcal{A}$, X-ren azpimultzoen familia. $\mathcal{A}$ lokalki finitua bada, orduan $\mathcal{A}$ σ-lokalki finitua da.*

Ideia guzti hauek garatu ditugula, defini dezagun orain paratrinkotasuna:

Definizioa 2.2.17. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Esaten da espazioa *paratrinkoa* dela, baldin eta espazioaren edozein estalki irekik, finketa ireki lokalki finitua badu.

Teorema 2.2.18. *Trinkoak diren espazioak, paratrinkoak dira.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) espazio trinkoa. Demagun, $\mathcal{A}$ espazioaren estalki irekia dela. Hipotesiz, $\mathcal{D}$ azpiestalki finitua existitzen da. Ohartu $\mathcal{D}$ azpiestalkia $\mathcal{A}$-ren finketa lokalki finitua ere badela. □

Lema 2.2.19. *Izan bedi X erregularra den espazioa. Bertan ondokoak baliokideak dira:*

(i) *X espazioa paratrinkoa da.*

(ii) *X espazioaren edozein estalki irekik, σ-lokalki finitua den finketa irekia du.*

(iii) *X espazioaren edozein estalki irekik, lokalki finitua den finketa du (ez du zertan irekia izan).*

(iv) *X espazioaren edozein estalki irekik, lokalki finitua den finketa itxia du.*

Frogapena. Izan bedi erregularra den X espazioa.

(i)$\Longrightarrow$(ii) Hipotesiz, X paratrinkoa bada, honen edozein $\mathcal{A}$ estalki irekik $\mathcal{D}$ finketa lokalki finitua du. Bereziki, $\mathcal{D}$ σ-lokalki finitua da.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) Izan bedi $\mathcal{U}$, X-ren estalki irekia. Hipotesiz, σ-lokalki finitua den $\mathcal{A}$ finketa irekia existitzen da. Hau da, $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ non $\mathcal{A}_n = \{A_{n_j} \in \mathcal{A} : j \in J_n\}$ lokalki finituak diren. Multzo hauetatik abiatuz, eraiki dezagun $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako $W_n = \bigcup_{j\in J_n} A_{n_j}$ multzo irekia. Orduan, $\mathcal{W} = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ X multzoaren estalkia da, irekia gainera.

Lehenik eta behin, $\mathcal{W}$ estalkiaren finketa lokalki finitua eraikiko dugu: defini ditzagun $V_n = W_n - \bigcup_{i<n} W_i$ multzoak. Egiazta dezagun $\mathcal{V} = \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{W}$ familiaren finketa lokalki finitua dela. Ezer baino lehen, estalkia dela egiaztatuko dugu: $x \in X$ guztietarako, $n_0 \in \mathbb{N}$ eta $j_0 \in J_{n_0}$ existitzen dira non $x \in A_{{n_0}_{j_0}}$ den, n_0 bat baino gehiago dauden kasuan txikiena hartuko dugu. Hala ba, $x \in W_{n_0}$ beteko da eta ondorioz, $x \in V_{n_0}$. Jarraian, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$-ren finketa dela egiaztatuko dugu: $V_{n_0} \in \{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpimultzo guztietarako, $V_{n_0} \subseteq W_{n_0}$ betetzen dela berehalakoa da. Azkenik, lokalki finitua dela frogatuko dugu: esan bezala, $\mathcal{W}$ estalki irekia da. Beraz, $x \in X$ guztietarako, $n_0 \in \mathbb{N}$ topatu dezakegu non $x \in W_{n_0}$ betetzen den, hau da, W_{n_0} puntuaren ingurune irekia da. Gainera, $W_{n_0} \cap V_i = \emptyset$ da $i > n_0$ arrunt guztietarako, eta beraz, W_{n_0} inguruneak $\mathcal{V}$ familiako multzo kopuru finitua ebakiko du, hain zuzen ere.

Artean, $\mathcal{W}$ estalkiaren finketa eraiki dugu, baina $\mathcal{U}$ estalkiarena behar dugu. Horretarako, $\mathcal{F} = \{V_n \cap A_{n_j} \ : \ n \in \mathbb{N} \ , \ j \in J_n\}$ eraiki eta $\mathcal{A}$ familiaren finketa dela egiaztatuko dugu lehenengo. Estalkia da: $x \in X$ guztietarako, batetik, $\mathcal{A}$ estalkia denez $n_0 \in \mathbb{N}$ eta $j_0 \in J_{n_0}$ topatu ditzakegu non $x \in A_{{n_0}_{j_0}}$ betetzen den, oraingoan ere, n_0 bat baino gehiago existitzen badira, txikiena hartuko dugu. Honela ba, $x \in W_{n_0}$ eta $x \in V_{n_0}$ betetzen dira eta $x \in V_{n_0} \cap A_{{n_0}_{j_0}}$ ere, noski. $\mathcal{A}$ familiaren finketa dela ordea, berehalakoa da: $n \in \mathbb{N}$ eta $j \in J_n$ bakoitzerako, $V_n \cap A_{n_j} \subseteq A_{n_j}$ baita.

Amaitzeko, $\mathcal{F}, \mathcal{U}$ estalkiaren finketa lokalki finitua dela egiaztatuko dugu.

- $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ estalkiaren finketa irekia da: aipatu berri dugun moduan $\mathcal{F}, \mathcal{A}$ estalkiaren finketa irekia da, orduan, 2.2.12 proposizioaren ondorioz, $\mathcal{F}$, $\mathcal{U}$ estalkiaren finketa irekia ere bada.

- $\mathcal{F}$ lokalki finitua da: arestian, $\mathcal{V}$ lokalki finitua dela frogatu dugunean, $x \in X$ guztietarako, $W_{n_0} \in \mathcal{N}_x$ ingurunea topatu dugu non $W_{n_0} \cap V_i = \emptyset$ zen, $i \leq n_0$ kopuru finiturako izan ezik. $\mathcal{F}$ familiako elementuak $V_n \cap A_{n_j}$ motakoak direnez, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, $V_n \cap A_{n_j} \subseteq V_n$ betetzen da, orduan, $W_{n_0} \cap (V_i \cap A_{i_j}) = \emptyset$ beteko da $i > n_0$ denean. Era berean, $i \leq n_0$ aztertzea dagokigu. Kontuan izan n finkatuz, J_n azpifamiliak ditugula. Hipotesiz $\mathcal{A}$ familia σ-lokalki finitua da, orduan, J_n bakoitzaren atzean dagoen azpifamilia lokalki finitua da. Ondorioz, $n \in \mathbb{N}$ bakoitzerako, $x \in X$ guztietarako, $N_n \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existituko da zeinak $\{A_{n_j} : j \in J_n\}$ azpifamiliako kopuru finitua ebakiko duen. Bereziki, $i \leq n_0$ denean ere beteko da. Amaitzeko, $x \in X$ bakoitzerako har dezagun $W_{n_0} \cap (\cap_{k \leq n_0} N_k)$ ingurunea. Orduan, $(W_{n_0} \cap (\cap_{k \leq n_0} N_k)) \cap (V_i \cap A_{i_j}) = \emptyset$ beteko da $i > n_0$ den kasuetan. Gainontzeko $i \leq n_0$ kasuetan ordea, i bakoitzerako $j \in J_i$ kopuru finitu baterako izan ezik ebakidura hutsa izango da, $(W_{n_0} \cap (\cap_{k \leq n_0} N_k)) \subseteq N_i$ delako. Hortaz, orokorrean, ingurune horrek $\mathcal{F}$ familiako elementu kopuru finitua ebakiko du, hau da, $\mathcal{F}$ lokalki finitua da.

Honenbestez, $\mathcal{F}, \mathcal{U}$ estalkiaren finketa ireki lokalki finitua da.

(iii)$\Longrightarrow$(iv) Izan bedi $\mathcal{U}$, X-ren estalki irekia. $x \in X$ guztietarako, har dezagun $U_x \in \mathcal{U}$, non $x \in U_x$ betetzen den. Espazio erregularra denez, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $V_x \in \tau$ irekia existitzen da, non $x \in V_x \subseteq \overline{V_x} \subseteq U_x$ betetzen den. Honela, $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$, X espazioaren estalki irekia da. Hipotesiz, finketa lokalki finitua du, $\mathcal{A} = \{A_\lambda : \lambda \in \Gamma\}$ hain zuzen ere. 2.2.14 Lema aplikatuz, $\mathcal{A}' = \{\overline{A_\lambda} : \lambda \in \Gamma\}$ ere lokalki finitua da. Are gehiago, $\mathcal{U}$ estalkiaren finketa itxia da, izan ere, $\lambda \in \Gamma$ bakoitzerako, $\mathcal{A}$, $\mathcal{V}$-ren finketa denez, $V \in \mathcal{V}$ existitzen da non $A_\lambda \subseteq V$ betetzen den. Ondorioz, $\overline{A_\lambda} \subseteq \overline{V} \subseteq U$ dugu, $U \in \mathcal{U}$ baterako. Beraz, $\mathcal{A}', \mathcal{U}$ estalkiaren finketa itxi lokalki finitua da.

(iv)$\Longrightarrow$(i) Izan bedi $\mathcal{U}$, X-ren estalki irekia, eta $\mathcal{V}$ honen finketa itxi lokalki finitua. Bertatik, eraiki dezagun $\mathcal{U}$-ren finketa ireki lokalki finitua.

Ezer baino lehen, X estaltzen duen familia eraikiko dugu: $x \in X$ guztietarako, har dezagun $W_x \in \tau$, x puntuaren ingurune irekia, zeinak $\mathcal{V}$ multzoko elementu kopuru finitua ebakitzen duen. Orduan, $\{W_x : x \in X\}$ estalki irekia da eta hipotesiz $\mathcal{A}$ finketa lokalki itxia du. Berehalakoa da $\mathcal{A}$ familiako elementu bakoitzak $\mathcal{V}$ familiako kopuru finitua ebakitzen duela.

Jarraian, X espazioaren estalki ireki lokalki finitua eraikiko dugu, $\mathcal{F}$. Horretarako, $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako, hurrengo elementua hartuko dugu: $V^* = X - \bigcup\{A \in \mathcal{A} \ : \ A \cap V = \emptyset\}$. Irekiak dira, 2.2.14 lemaren ondorioz $A \in \mathcal{A}$ itxiak direnez $\bigcup\{A \in \mathcal{A} \ : \ A \cap V = \emptyset\}$ itxia baita. Ohartu, $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako $\{A \in \mathcal{A} \ : \ A \cap V = \emptyset\}$ multzoan ez dagoela V multzoko punturik, beraz, $V \subseteq V^*$ betetzen da. Finka dezagun $\mathcal{F} = \{V^* \ : \ V \in \mathcal{V}\}$ eta hau estalki ireki lokalki finitua dela egiaztatuko dugu. Estalkia dela berehalakoa da, $X \subseteq \cup_{V \in \mathcal{V}} V \subseteq \cup_{V^* \in \mathcal{F}} V^*$ delako. Bestetik, froga dezagun $\mathcal{F}$ lokalki finitua dela: $\mathcal{A}$ lokalki finitua denez, $x \in X$ guztietarako, $N \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existitzen da non $N \cap A_\lambda = \emptyset$ betetzen den, λ kopuru finitu baterako izan ezik, demagun hauek $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ direla. Orain, $N \cap V^*$ aztertuko dugu: $N \cap V^* \neq \emptyset$ betetzen da baldin eta $x \in N \in \mathcal{N}_x$ eta $x \in X - \bigcup\{A \in \mathcal{A} \ : \ A \cap V = \emptyset\}$ betetzen badira. Honela, $x \notin \bigcup\{A \in \mathcal{A} \ : \ A \cap V = \emptyset\}$ dugu. $\mathcal{A}$ estalkia denez, $A_0 \in \mathcal{A}$ existitzen da non $x \in A_0$ betetzen den. Hortaz, $A_0 \cap V^* \neq \emptyset$ eta $A_0 \cap V \neq \emptyset$ dira. Gainera, $x \in N \cap A_0$ betetzen da eta hortaz, $N \cap A_0 \neq \emptyset$ da. Baina badakigu N inguruneak $A_1, \ldots, A_n$ soilik ebakitzen dituela. Egoera honetan, gutxienez $k \in \{1, \ldots, n\}$ bat topatuko dugu zeinak $A_0 = A_k$ betetzen duen. Laburbilduz, $V^* \in \mathcal{F}$ elementuak $N \cap V^* \neq \emptyset$ betetzen badu, orduan, $A_k \cap V^* \neq \emptyset$ eta $A_k \cap V \neq \emptyset$ dira non $k \in \{1, \ldots, n\}$ den. Gogoratu $\mathcal{A}$ familiako elementu bakoitzak $\mathcal{V}$-ko kopuru finitua ebakitzen duela. Bereziki, A_k bakoitzak $\mathcal{V}$-ko kopuru finitua ebakiko du. Halaber, $k \in \{1, \ldots, n\}$ denez gero, $A_1, \ldots, A_n$ multzo guztien artean $\mathcal{V}$-ren elementu kopuru finitua ebakiko dute oraindik ere. Beraz, $A_1, \ldots, A_n$ multzo guztien artean, $\mathcal{F}$ familiako V^* elementu kopuru finitua ebakiko dute. Azkenean, $N \cap V^* \neq \emptyset$ beteko da $V^* \in \mathcal{F}$ kopuru finitu baterako. Horrenbestez, $\mathcal{F}$ lokalki finitua da.

Amaitzeko, $\mathcal{U}$ estalkiaren finketa ireki lokalki finitua eraikiko dugu, $\mathcal{D}$. Horretarako, $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako, $U_V \in \mathcal{U}$ bakarra har dezagun non $V \subseteq U$ den eta $U_V \cap V^*$ irekia eraiki. $\mathcal{D} = \{U_V \cap V^* \ : \ V \in \mathcal{V}, U_V \in \mathcal{U} \text{ eta } V \subseteq U_V\}$ familia, $\mathcal{U}$ estalkiaren finketa lokalki finitua izango da:

- $\mathcal{D}$ estalki irekia da. Batetik, estalkia da: $x \in X$ guztietarako, $\mathcal{V}$ estalkia denez, $V_0 \in \mathcal{V}$ existitzen da non $x \in V_0$ betetzen den. Honela, $U_{V_0} \in \mathcal{U}$ dugu non $V_0 \subseteq U_{V_0}$ den, eta ondorioz, $x \in U_0$. Halaber, $x \in V_0$ denez, $x \in V_0^*$ beteko da, $V_0 \subseteq V_0^*$ baita. Orduan, $x \in U_{V_0} \cap V_0^* \in \mathcal{D}$ beteko da. Bestetik, $\mathcal{D}$ estalki irekia da, elementu irekiez osatuta baitago.

- $\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$-ren finketa da: $D \in \mathcal{D}$ guztietarako $D = U_{V_0} \cap V_0^*$ bada, bereziki $U_{V_0} \in \mathcal{U}$ da hortaz, $D \subseteq U_{V_0}$ betetzen da.

- $\mathcal{D}$ lokalki finitua da: $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako, $U_V \cap V^*$ elementuak eraiki ditugu eta $U_V \cap V^* \subseteq V^*$ dugu. Orduan, $\mathcal{F}$ lokalki finitua denez, $x \in X$ guztietarako, $N \in \mathcal{N}_x$ ingurunea existitzen da non $N \cap V^* = \emptyset$ den $\mathcal{F}$ familiako kopuru finitu baterako izan ezik, demagun $V_1^*, \ldots, V_n^*$

elementuak direla hauek. Orduan, $N \cap (U_{V_i} \cap V_i^*) = \emptyset$ izango da $U_{V_1} \cap V_1^*, \ldots, U_{V_n} \cap V_n^*$ kopuru finitu horretarako izan ezik gehienez ere. Oraingoan ziurta dezakegu kopurua finitua dela, $V \in \mathcal{V}$ bakoitzerako, $U_V \in \mathcal{U}$ elementu bakarra hartu baitugu $U_V \cap V^*$ elementua eraikitzeko. Beraz, $\mathcal{D}$ familia lokalki finitua da.

□

Espazio mota berri honi erreparatuz gero, paratrinkotasuna, orokorrean propietate heredagarria eta biderkagarria ez dela ohartuko gara. Lanaren hedapena mugatua denez, ez dugu hauetan sakonduko.

2.3 Inplikazio eta kontradibideak

Hasteko, espazio mota berri hauen arteko erlazioak aztertuko ditugu. Oraingo honetan banantze-axiomak izango dira zeregin honetan giltza. Ikus dezagun nola banantze-axiomei esker, Lindelof espazioen eta paratrinkoak diren espazioen arteko lotura eraiki daiteken.

Teorema 2.3.1. *Lindelof eta erregularrak diren espazioak, paratrinkoak dira.*

Frogapena. Lindelof diren espazioetan, edozein estalki irekik azpiestalki ireki zenbakigarria du. 2.2.19 Lemaz baliatuz, azpiestalkia finketa σ-lokalki finitua dela erakutsiko dugu, eta honela espazioa paratrinkoa izango da. Demagun $\{U_i\}_{i\in I}$ estalki irekia dela eta $\mathcal{V} = \{U_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ azpiestalki zenbakigarria duela. Bereziki, X-ren estalkia da. Finketa dela frogatzea berehalakoa da. Azkenik, $\mathcal{V}$ σ-lokalki finitua da, izan ere, $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{U_{i_n}\}$ idatziz, n bakoitzerako, $\{U_{i_n}\}$ azpifamilia lokalki finitua da, finitua baita. □

Jarraian, gure zereginera bueltatuz, aztertu berri ditugun espazioek, banantze-axiomen arteko zubiak eraikitzeko gaitasuna aztertuko ditugu. Hasteko, lokalki trinkoak diren espazioek, Hausdorff eta espazio guztiz erregularren arteko zubia eraikiko dute.

Teorema 2.3.2. *Izan bedi (X, τ) Hausdorff eta lokalki trinkoa den espazioa. Orduan, espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ da.*

Frogapena. Hausdorff eta lokalki trinkoa den espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ dela egiaztatuko dugu. Izan bitez $G \in \mathcal{C}$ itxia eta $y \notin G$. Orduan, y eta honen $X - G$ ingurune irekirako, 2.2.5 teoremaren ondorioz, $V \in \tau$ irekia existitzen da, non $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq X - G$ eta $\overline{V}$ trinkoa diren. Gainera, $\overline{V}$ trinkoa denez eta $X - G$ honen ingurune irekia 2.2.5 teoremaren ondorioz, W irekia existitzen da, non $\overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq X - G$ eta $\overline{W}$ trinkoa diren. Ondorioz, $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq X - G$ betetzen da.

Har dezagun orain $(\overline{W}, \tau_{\overline{W}})$ azpiespazio topologikoa. Hau trinkoa eta Hausdorff da, eta 1.4.11 korolarioaren ondorioz, normala. Bertan 1.3.3 Urysohn-en lema aplikatzeko egoeran gaude; $\{x\}$ eta $\overline{W} - V$ multzo itxietarako $f : \overline{W} \to [0,1]$ funtzio jarraitua existitzen da non $f|_{\{y\}} = 1$ eta $f|_{\overline{W}-V} = 0$ diren. Orain, defini dezagun $F : X \to [0,1]$ funtzioa:

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \overline{W} \\ 0, & x \in X - V \end{cases}$$

Ikus dezagun F jarraitua dela: batetik, $F|_{\overline{W}} = f$ jarraitua dela badakigu. Bestetik, $F|_{X-V} = 0$ konstantea denez, F jarraitua da $X - V$ azpimultzoan. Gainera, $X = \overline{W} \cup (X - V)$ dugu non bi azpimultzoak itxiak diren. Halaber, ebakidurako puntuetan, $\overline{W} - V$ puntuetan, hain zuzen, $F|_{\overline{W}} = 0 = F|_{X-V}$ dira. Orduan, F aplikazio konbinatua jarraitua dela ondorioztatzen dugu. Gainera, $G \subseteq X - V$ denez, F, $\{y\}$ eta G itxiei dagokien Urysohn-en funtzio jarraitua da, beraz, X espazioa $T_{3\frac{1}{2}}$ da. $\square$

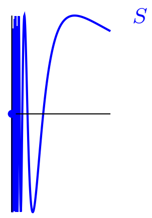
Korolarioa 2.3.3. *Hausdorff eta lokalki trinkoak diren espazioak guztiz erregularrak dira.*

Jarraian, teorema honen atzerako inplikazioari so egingo diogu. Esan bezala, trinkotasun lokala banantze-axiomen arteko zubiak eraikitzeko euskarria da. Ondoren datorren kontradibidean, guztiz normala den espazioa aztertuko dugu, baina, hau ez da lokalki trinkoa izango. Honela jabetuko gara, espazioa guztiz erregularra izateko espazioa lokalki trinkoa eta Hausdorff izatea baldintza nahikoa izan arren, ez dela baldintza beharrezkoa.

Kontradibidea 2.3.4. Izan bedi Sinu topologikoaren kurba:

$$S = \{(x, sin(\frac{1}{x})) \ : \ 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$$

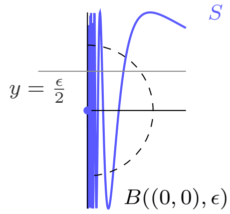
S, $\mathbb{R}^2$ espazio euklidearraren azpiespazio gisa hartuko dugu:



- Topologia euklidearra guztiz erregularra da, beraz, propietate hau heredagarria denez, (S, τ_u^S) ere guztiz erregularra da.

- Ez da lokalki trinkoa. Horretarako, ikus dezagun $(0,0)$ punturen ingurune trinkorik ez dela existitzen. $(0,0)$ puntuaren edozein $N \in \mathcal{N}^S_{(0,0)}$ ingurunerako, existitzen da $B((0,0),\epsilon) \in \mathcal{B}^u_{(0,0)}$ non $B((0,0),\epsilon) \cap S \subseteq N$

den. Ikus dezagun N ezin dela trinkoa izan. Har dezagun $y = \frac{\epsilon}{2}$ zuzen konstantea. Honek $B((0,0),\epsilon) \cap S$ ebakiko du $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puntu sekuentzia infinitua eraikiz (N, τ_N) azpiespazioan. N $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazioa da, beraz metrizagarria da, orduan, zentzua dauka segida baten limitea eta konbergentzia aztertzea. Eraiki berri dugun segidaren limitea $(0, \frac{\epsilon}{2})$ puntua da eta hau ez dago N azpiespazioan, $(0, \frac{\epsilon}{2}) \notin S$ baita. Hortaz, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq N$ izan arren, limitea ez dagoenez N azpimultzoan, N ez da itxia $(\mathbb{R}^2, \tau_u)$ espazioan. Ondorioz, N ez da trinkoa $\mathbb{R}^2$-n, ezta S espazioan ere.



$\square$

Oraingo honetan, Hausdorff espaziotik abiatu eta paratrinkotasunari esker normalak diren espazioak lortuko ditugu. Paratrinkotasunak, banantze-axiomen inplikazio katean, trinkotasun lokalak baino maila bat gehiago igotzen laguntzen du.

Teorema 2.3.5. *Izan bedi (X, τ) Hausdorff eta paratrinkoa den espazioa. Orduan, espazioa T_4 da.*

Frogapena. Hausdorff eta paratrinkoa den X espazioa T_4 dela frogatzeko lehenik eta behin T_3 dela egiaztatuko dugu.

Izan bitez $F \in \mathcal{C}$ itxia eta $a \notin F$. Hipotesiz espazioa Hausdorff denez, a eta $b \in F$ puntu ezberdinetarako, U_b eta V_b ireki disjuntuak existitzen dira, non $a \in U_b$ eta $b \in V_b$ diren. Bereziki, U_b, a puntuaren ingurune irekia da, V_b multzoarekin disjuntua, orduan a ez dago V_b-ren itxituran. F multzoko puntu guztiek betetzen duten baldintza da hau, orduan, $a \notin \cup_{b\in F}\overline{V_b}$ da.

Har dezagun orain X-ren ondoko estalki irekia: $\{X - F\} \cup \{V_b \;\; b \in F\}$. Hipotesiz, estalkiak finketa ireki lokalki finitua du, $\mathcal{J}$. Hauetatik, F ebakitzen duten multzoak hartuko ditugu eta F-ren estalki irekia eraiki: $\mathcal{D} = \{J \in \mathcal{J} \;:\; J \cap F \neq \emptyset\}$. Finketaren definizioz, badakigu, $D \in \mathcal{D}$ bakoitzerako, V_b bat dagoela, non $D \subseteq V_b$ den, hortaz, $a \notin \overline{D}$ beteko da. Orduan, $V = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$ irekia hartuz gero, batetik, $F \subseteq V$ beteko da, $\mathcal{D}$ F-ren estalkia baita. Bestetik, $\mathcal{D}$, J familiako elementuez osatuta dagoenez, lokalki finitua da, eta 2.2.14 lemaren ondorioz, $\overline{V} = \overline{\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} \overline{D}$ dugu. Hortaz, $a \notin \overline{V}$ betetzen da. Beraz, $U' = X - \overline{V} \in \mathcal{N}_a$ ingurune irekia existitzen da, non $a \in U'$ eta $U' \cap V = \emptyset$ diren. Ondorioz, espazioa erregularra da.

Azken urratsa espazioa T_4 dela egiaztatzea da, horretarako 1.2.12 teoremako (iv) karakterizazioa betetzen dela frogatuko dugu. Demagun $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak direla. Espazioa T_3 denez, 1.2.6 teoremako karakterizazioa aplikatuz, $a \in F$ guztietarako, $X - G$ puntuaren ingurune irekia da eta $V_a \in \tau$ irekia existitzen da non $a \in V_a \subseteq \overline{V}_a \subseteq X - G$ den. Ondorioz, $\overline{V_a} \cap G = \emptyset$ betetzen da $a \in F$ guztietarako. Aurreko atalean erabilitako prozesua jarraituz, $\{X - F\} \cup \{V_a \ : \ a \in F\}$ X espazioaren estalki irekia da, hipotesiz $\mathcal{U}$ finketa ireki lokalki finitua du. F-ren estalkia honela eraikiko dugu: $\mathcal{D}' = \{U \in \mathcal{U} \ : \ U \cap A \neq \emptyset\}$. Finketaren definizioz, badakigu, $D' \in \mathcal{D}'$ bakoitzerako, $\overline{V_a}$ bat dagoela non $D' \subseteq V_a$ den, hortaz, $\overline{D'} \cap G = \emptyset$ betetzen da. Gainera, hau ere lokalki finitua da, $\mathcal{U}$ lokalki finitua den familiako elementuez osatuta dagoelako. Amaitzeko, har dezagun $W = \cup_{D' \in \mathcal{D}'} D'$, W irekia da eta $F \subseteq W$ betetzen da. Gainera, 2.2.14 lemaren ondorioz, $\overline{W} \cap G = \overline{\cup_{D' \in \mathcal{D}'} D'} \cap G = \cup_{D' \in \mathcal{D}'} \overline{D'} \cap G = \emptyset$ ere betetzen da. Beraz, espazioa T_4 da. $\square$

Korolarioa 2.3.6. *Hausdorff eta paratrinkoa diren espazioak normalak dira.*

Hasieran aipatu dugun moduan, paratrinkotasuna banantze-axiomen arteko zubiak eraikitzeko erreminta da. Atzerako inplikazioan pentsatuz gero, espazio paratrinkoen klasearen barnean, normalak diren espazioen klasea dagoen pentsatu beharko da. Ez da erraza normala den baina paratrinkoa ez den espazioa bilatzea; *Counterexamples in Topology* [5] liburuko 42.*Open Ordinal Space* (68 orria) espazioa honelako da. Hortaz, espazio honek erakusten du, normalak diren espazioak ez dutela zertan paratrinkoak izan.

Amaitzeko, azken korolario hau eta 2.3.1 teorema konbinatuz, jarraian datorren korolarioa lortuko dugu.

Korolarioa 2.3.7. *Lindelof eta erregularrak diren espazioak normalak dira.*

Arestian, paratrinkotasuna aurkezterakoan, honek metrizagarritasunarekin duen lotura nabarmendu da. Nahiz eta metrizagarritasuna oraindik sakonean landu gabeko gaia den, lehen bi kapituluetan aipamen ezberdinak egin zaizkio, hortaz, hau izango da hurrengo kapitulurako motibazioa.

3. Kapitulua

Metrizagarritasuna eta banantze-axiomak

3.1 Motibazioa

Kapitulu honetan metrizagarritasunak banantze-axiomekin eta orain arte landu ditugun kontzeptuekin duen zerikusi estua aztertuko dugu. Metrizagarritasuna propietate indartsua da eta egoera batzuetan metrizagarritasuna, eta metrizagarritasun eza ere, frogatzea lan astuna izango da. Egoera honi aurre egiteko, batetik, metrizagarriak diren espazioetan zein inplikazio gertatzen diren aztertuko dugu eta bestetik, metrizagarritasun teorema batzuk landuko ditugu.

Lortzen ditugun emaitzetatik, metrizagarritasuna banantze-axiomen artean zubiak eraikitzeko erreminta ez dela ohartuko gara. Are gehiego, metrizagarriak diren espazioetan, landu ditugun banantze-axioma guztiak betetzen direla ikusiko dugu. Horrenbestez, atal honetan ezingo dira banantze-axiomen eta metrizagarritasunaren arteko erlazioak finkatzen dituzten kontradibideak garatu.

3.2 Espazio metrikoak

Atal honetan metrizagarriak diren espazioek zer nolako berezitasunak dituzten aztertuko dugu. Propietate garrantzitsua da hau eta jabetuko gara gure espazioetan emaitza oso interesgarriak ondorioztatzen dituela.

Ezer baino lehen, finka dezagun d metrika batek sortutako (X, τ) espazioetan egingo dugula lan eta $x \in X$ puntu bakoitzerako $\mathcal{B}_x = \{B_d(x, r) \ : \ x \in X, \ r > 0\}$ ingurune-oinarri irekia izango dugula.

Lehenengo eta behin, metrizagarritasuna banantze-axiomekin erlazionatuko dugu. Ekimen honetarako G_δ multzoekin egingo dugu lan, hortaz, askotan joko dugu eranskineko A.4 atalera.

Teorema 3.2.1. *Metrizagarriak diren espazioak perfektuki normalak dira.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) metrizagarria den espazio topologikoa. Espazioa perfektuki normala dela frogatzeko, multzo itxiak G_δ-multzoak direla egiaztatu behar dugu soilik, izan ere, espazio metrikoak T_1 eta T_4 direla jada badakigu.

Izan bedi $F \in \mathcal{C}$ azpimultzo itxia. Hau G_δ-multzoa dela egiaztatzeko, eranskineko A.4.4 teoremaz baliatuko gara. d metrikatik abiatuz, $g : X \longrightarrow [0, +\infty)$ funtzioa non $g(x) = d(x, F) = \inf\{d(x, a) \ : \ a \in F\}$ hartuko dugu. Funtzioa jarraitua da, are gehiago, uniformeki jarraitua da $|g(x) - g(y)| \leq d(x, y)$ delako. Helburua Urysohn-en funtzio bat eraikitzea da, hortaz, eraiki dezagun $f : X \longrightarrow [0, 1]$ non $f(x) = \inf\{g(x), 1\}$ den. Hau ere jarraitua da, funtzio jarraituen infimoa jarraitua baita. Ikus dezagun $f^{-1}(0) = F$ dela: $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ da. Azkena $x \in \overline{F} \Leftrightarrow \forall B(x, r) \in \mathcal{N}_x, \ F \cap B(x, r) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall r > 0, \ \exists a_r \in F \ : \ d(x, a_r) < r \Leftrightarrow d(x, F) = 0$ honela betetzen da.

Amaitzeko, $G = f^{-1}(1) \in \mathcal{C}$ hartuz, F eta G disjuntuak dira eta f, F eta G itxi disjuntuei dagokien Urysohn-en funtzioa da. Gainera, $F = f^{-1}(0)$ denez, F, G_δ-multzoa da. □

Lehen aipatu dugun moduan emaitza hau oso garrantzitsua da, izan ere, metrizagarriak diren espazioek banantze-axioma guztiak betetzen dituzte. Gainera, metrizagarritasuna propietate heredagarria eta biderkagarria da. Orduan, batetik, metrizagarriak diren espazioen azpiespazioak metrizagarriak izango dira eta ondorioz, banantze-axioma guztiak beteko dituzte. Antzera gertatzen da metrizagarriak diren espazioen biderkadura finituekin.

Jarraian, metrizagarritasuna lehen kapituluko zenbakigarritasun axiomekin erlazionatuko dugu.

Teorema 3.2.2. *Metrizagarriak diren espazioak C_I dira.*

Frogapena. (X, τ) espazio metrikoan, $x \in X$ guztietarako, $\mathcal{B}_x = \{B_d(x, r) \ : \ x \in X, \ r \in \mathbb{Q}\}$ ingurune-oinarria dela berehalakoa da. Gainera, $\mathcal{B}_x$ familia zenbakigarria da. Beraz, espazioa C_I da. □

C_I propietatea ingurune-oinarriei dagokion propietatea da eta bere baitan ezin du espazioa metrizagarria izatea ondorioztatu, beroren adibide erreza Kolmogorov-en zuzenak islatzen du, $(\mathbb{R}, \tau_{Kol})$ non $\tau_{Kol} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ den. Are gehiago, topologia hau C_{II} da. Orduan, C_{II} diren espazioak ere, orokorrean, ez dira metrizagarriak izango.

Teoremara bueltatuz, metrizagarriak diren espazioak C_I direla ondorioztatu dugu. Axioma hau C_{II} axioma baino ahulagoa da, hortaz, susma dezakegu metrizagarriak diren espazioak ez direla zertan C_{II} izan. X espazio ez-zenbakigarriaren gainean definitutako topologia diskretua honen adibide da; metrizagarria den arren, ez da C_{II}. Hortaz, ikusi berri dugu metrizagarritasunaren eta C_{II} axiomaren artean ez dagoela inongo erlazio zuzenik.

Baina, metrizagarriak diren espazioetan C_{II} propietateari dagokion emaitza garrantzitsu bat lortuko dugu. Lehen kapituluan ikusi dugun moduan, C_{II} diren espazioak Lindelof dira, orokorrean, atzerako inplikazioa faltsua izanik. Ikus dezagun kasu berezi honetan nolako portaera duten bi propietateek:

Teorema 3.2.3. *Metrizagarriak diren espazioetan, C_{II} izatea eta Lindelof izatea baliokideak dira.*

Frogapena. Aipatu bezala, C_{II} diren espazioak Lindelof dira. Metrizagarriak diren espazioetan, Lindelof diren espazioak C_{II} direla egiaztatu behar dugu soilik.

Izan bedi (X,τ) Lindelof den espazioa. Finka dezagun, $x \in X$ puntu bakoitzerako $\mathcal{B}_x = \{B_d(x, \frac{1}{n}) \ : \ x \in X, \ n \in \mathbb{N}\}$ ingurune-oinarri irekia. Har dezagun $n \in \mathbb{N}$ eta $x \in X$ bakoitzerako $U_n^x = B_d(x, \frac{1}{n})$ irekia. Orduan, n bakoitzerako $\mathcal{U}_n = \{U_n^x\}_{x \in X}$ familia X espazioaren estalki irekia da. Hipotesiz, espazioa Lindelof denez, n bakoitzerako, $\mathcal{U}_n^*$ azpiestalki zenbakigarria existitzen da. Hortaz, ikus dezagun $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}_1^* \cup \mathcal{U}_2^* \cup \dots$ familia espazioaren ireki-oinarria dela: batetik, berehalakoa da $\mathcal{U}^* \subseteq \tau$ dela. Bestetik, $V \in \tau$ eta $x \in V$ guztietarako, $B_d(x, \frac{1}{n_0})$ ingurune-oinarriko elementua existitzen da non $x \in B_d(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq B$ den. Are gehiago, $\mathcal{U}_{2n_0}^*$ azpiestalki irekia denez, $y \in X$ topatuko dugu non $x \in B_d(y, \frac{1}{2n_0})$ den. Ikus dezagun $B_d(y, \frac{1}{2n_0}) \subseteq B_d(x, \frac{1}{n_0})$ betetzen dela: $z \in B_d(y, \frac{1}{2n_0})$ guztietarako, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0}$ denez, $z \in B_d(x, \frac{1}{n_0})$ dugu. Beraz, topatu dugu, $B_d(y, \frac{1}{2n_0}) \in \mathcal{U}$ non $x \in B_d(y, \frac{1}{2n_0}) \subseteq B_d(x, \frac{1}{n_0}) \subseteq V$ den. Honela, $\mathcal{U}^*$ ireki-oinarri zenbakigarria dela egiaztatu dugu.

□

Metrizagarriak diren espazioetan C_{II} eta Lindelof kontzeptuak baliokideak direla frogatu berri dugu.

Atal honi amaiera emateko, metrizagarritasunak trinkotasunarekin duen harremana aztertuko dugu. Orokorrean, metrizagarriak diren espazioak ez dira trinkoak. Hala ere, paratrinkotasuna aurkeztu dugunean esan dugun moduan, klase hau espazio metrizagarriak eta trinkoak barnean dituen ezagutzen den klaserik txikiena da. Froga dezagun aipatu berri duguna, hau da, metrizagarriak diren espazioak paratrinkoak direla.

Teorema 3.2.4. *Metrizagarriak diren espazioak paratrinkoak dira.*

Frogapena. Ezer baino lehen, aipamen bat egin beharra dago orden onaren teoremaren inguruan. * Hipotesiz, espazioa metrizagarria da, beraz 3.2.1 teoremaren ondorioz perfektuki normala da eta hortaz, erregularra ere bada. Edozein estalki irekik, σ-lokalki finitua den finketa irekia duela frogatu eta 2.2.19 lema aplikatuz, espazioa paratrinkoa dela ondorioztatuko dugu.

Izan bitez (X, τ_d) espazio topologiko metrizagarria eta $\mathcal{A}$ espazioaren estalki irekia. Orden onaren teorema aplikatuz $\mathcal{A}$ irekien familian $\leq$ ordena erlazioa ezarri dezakegu. Halaber, $<$ ikurrak ondokoa adieraziko du: $U < V$ izango da, $U \leq V$ eta $U \neq V$ betetzen direnean. Hurrengo prozesuan $\mathcal{E}$ finketarako egokiak izango diren irekiak eraikiko ditugu. Ezer baino lehen, $n \in \mathbb{N}$ finkatuko dugu.

Hasteko, $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $S_n(U) = \{x \in U \ : \ B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq U\}$ elementuak eraikiko ditugu. Berehalakoa da $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $S_n(U) \subseteq U$ dela. Orain, $\leq$ ordena erlazioa erabili eta azpimultzo txikiagoak eraikiko ditugu:

$$T_n(U) = S_n(U) - \cup_{V<U} V$$

Aipatu bezala, berehalakoa da $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $T_n(U) \subseteq S_n(U)$ dela. Gainera, $V, W \in \mathcal{A}$ ezberdinak badira, $x \in T_n(V)$ eta $y \in T_n(W)$ guztietarako, $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$ betetzen da: demagun, orokortasuna galdu gabe $V < W$ dela. Orduan, $x \in T_n(V)$ eta $y \in T_n(W)$ badira, batetik, $x \in S_n(V)$ da eta hortaz, $B_d(x, \frac{1}{n}) \subseteq V$. Bestetik, $y \notin V$ ere bada, eta hortaz, $y \notin B_d(x, \frac{1}{n})$ da. Ondorioz, $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$ dugu. Azken finean, $d(T_n(V), T_n(W)) \geq \frac{1}{n}$ lortu dugu.

Esan bezala, finketa irekia behar dugu, horrenbestez eraiki berri ditugun elementuak zertxobait zabalduko ditugu irekiak izan daitezen. Defini ditzagun:

$$E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B_d(x, \frac{1}{3n})$$

Multzo hauek irekiak dira. Multzo hauen egitura aztertuz, berehalakoa da $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $T_n(U) \subseteq E_n(U)$ dela. Antzera, $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $E_n(U) \subseteq U$ betetzen da. Izan ere, $x \in E_n(U)$ guztietarako, $a \in T_n(U)$

---

*Orden onaren teorema Zarmelo matematikariak 1904 urtean frogatu zuen. Garrantzia handiko teorema izan arren, hasiera batean ez zuen gainontzeko matematikarien begirunea jaso, froga zalantzagarria baitzen, prozesuan egiten ziren ausazko hainbat aukeraketen ondorioz. Ezer baino lehen ondo ordenatutako multzoa definituko dugu:

Definizioa 3.2.5. Izan bedi X ordena osoa duen multzoa. X *ondo ordenatutako* multzoa dela esaten da baldin eta edozein azpimultzo ez-hutsek elementu minimoa badu.

Teoremak honela dio:

Teorema 3.2.6. *Izan bitez X multzoa eta $A \subseteq X$ azpimultzoa. Orduan A multzoan ordena erlazio bat existitzen da non A ondo ordenatutako multzoa izango den.*

existitzen da non $x \in B(a, \frac{1}{3n})$ den eta $T_n(U) \subseteq S_n(U)$ denez, $x \in B(a, \frac{1}{3n}) \subseteq B(a, \frac{1}{n}) \subseteq U$ betetzen da.

Bestalde, froga dezagun $V, W \in \mathcal{A}$ ezberdinak badira, $x \in E_n(V)$ eta $y \in E_n(W)$ guztietarako $d(x, y) > \frac{1}{3n}$ betetzen dela. Ezer baino lehen, gogora dezagun $d(T_n(V), T_n(W)) \geq \frac{1}{n}$ dela. Bestetik, $x \in E_n(V)$ guztietarako, $a' \in T_n(V)$ existitzen da non $d(x, a') < \frac{1}{3n}$ den. Bereziki, $x \in T_n(V)$ denean, $a = x$ eta $d(a, x) = 0$ dira. Antzera, $y \in E_n(V)$ guztietarako, $b' \in T_n(W)$ existitzen da non $d(y, b') < \frac{1}{3n}$ den. Bereziki, $y \in T_n(W)$ denean, $b = y$ eta $d(b, y) = 0$ dira. Azkenik, $a' \in T_n(V)$ eta $b' \in T_n(W)$ direnez, $d(a', b') \geq \frac{1}{n}$ betetzen da. Hortaz, $\frac{1}{n} \leq d(a', b') \leq d(a', x) + d(x, b') \leq d(a', x) + d(x, y) + d(y, b')$ dugu. Hurrengo adierazpena erreparatuko dugu: $\frac{1}{n} - d(a', x) - d(y, b') \leq d(x, y)$. Azkenean, $\frac{1}{3n} < d(x, y)$ betetzen da. Bertatik, $d(E_n(V), E_n(W)) \geq \frac{1}{3n}$ dela ondorioztatzen da.

Ikus dezagun $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{E_n(U) \ : \ U \in \mathcal{A}\}$ σ-lokalki finitua den $\mathcal{A}$-ren finketa irekia dela.

- $\mathcal{E}$ estalki irekia da. Batetik, estalkia da: $x \in X$ guztietarako, $\mathcal{A}$ estalkia denez eta bertan $\leq$ erlazioa dugunez, V lehen elementu bat existitzen da non $x \in V$ den. Bereziki, V irekia da, orduan, $m \in \mathbb{N}$ existitzen da non $x \in B_d(x, \frac{1}{m}) \subseteq V$ den. Ondorioz, $x \in S_m(V)$ dugu eta V, x puntua barnean duen lehen elementua denez, $x \in T_m(V)$ ere betetzen da. Azkenean, $x \in E_m(V)$ dugu. Bestetik, berehalakoa da $\mathcal{E}$ irekia dela.

- $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$-ren finketa da: $E \in \mathcal{E}$ guztietarako, $E = E_n(U)$ motakoa da. Ikusi dugu $n \in \mathbb{N}$ eta $U \in \mathcal{A}$ guztietarako, $E_n(U) \subseteq U$ betetzen dela. Hortaz, $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}$-ren finketa da.

- $\mathcal{E}$ σ-lokalki finitua da: n bakoitzerako, $\mathcal{E}_n = \{E_n(U) \ : \ U \in \mathcal{A}\}$ azpifamilia lokalki finitua dela egiaztatuko dugu. Har dezagun $B(x, \frac{1}{6n})$, x puntuaren ingurunea. Gehienez ere $\mathcal{E}_n$ familiako elementu bakarra ebakitzen duela frogatuko dugu: demagun, $E_n(U)$ elementua ebakitzen duela, hortaz, $z \in B(x, \frac{1}{6n}) \cap E_n(U)$ elementua existitzen da. Orduan, $d(x, z) < \frac{1}{6n}$ dugu. Absurdura eramanez, demagun beste $E_n(V)$ elementu bat ebakitzen duela ($V \neq U$). Orduan, $y \in B(x, \frac{1}{6n}) \cap E_n(V)$ existitzen da non $d(x, y) < \frac{1}{6n}$ den. Gainera, $z \in E_n(U)$ eta $y \in E_n(V)$ direnez, $d(y, z) \geq \frac{1}{3n}$ da. Desberdintza triangeluarra erabiliz, $\frac{1}{3n} \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < \frac{1}{3n}$ dugu eta hau absurdua da. Beraz, $B(x, \frac{1}{6n})$ irekiak $\mathcal{E}_n$ azpifamiliako elementu bakarra ebakiko du gehienez ere. Beraz, $\mathcal{E}_n$ lokalki finitua da.

Beraz, frogatu dugu erregularra den espazioan edozein estalki irekik σ-lokalki finitua den finketa irekia duela, espazioa paratrinkoa da hain zuzen. $\square$

3.3 Metrizagarritasun teoremak

Metrizagarriak diren espazioen portaera aztertu berri dugula, orain metrizagarritasun teorema batzuk aztertuko ditugu.

Lehenengo, espazioa metrizagarria izateko baldintza nahikoa aztertuko dugu.

Teorema 3.3.1. (***Urysohn-en metrizagarritasun teorema***) *Izan bedi X espazioa. Hau C_{II} eta erregularra den espazioa bada, orduan metrizagarria da.*

Jarraian enuntziatutako teorema, aldiz, baldintza beharrezkoa eta nahikoa da.

Teorema 3.3.2. (***Nagata-Smirnov-en metrizagarritasun teorema***) *Izan bedi X espazioa. Metrizagarria da baldin eta soilik baldin X espazio erregularra bada eta σ-lokalki finitua den ireki-oinarria badu.*

Oharra 3.3.3. Teorema hauek frogatzeko espazio topologikoen biderkadura infinituekin egin behar da lan eta hau orain arte aztertu gabeko gaia da. Lanaren hedapena mugatua dela eta, ez dugu hauetan sakonduko. Jarraian datorren teorema frogatuko dugu, lan honetan landutako kontzeptu eta teoremak erabiltzen direlako. Funtsean, Nagata-Smirnov-en teoremaren korolarioa besterik ez dela ohartuko gara.

Azken teoremari ekin baino lehen metrizagarritasun lokala definituko dugu.

Definizioa 3.3.4. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazioa *lokalki metrizagarria* dela esaten da baldin eta $x \in X$ guztietarako, $U \in \tau$ x puntuaren ingurune irekia existitzen bada non (U, τ_U) metrizagarria den.

Jarraian datorren proposizioa berehalakoa da.

Proposizioa 3.3.5. *(X, τ) espazioa metrizagarria bada, lokalki metrizagarria da.*

Erraz frogatuko dugu lokalki metrizagarria izatea propietate heredagarria dela.

Proposizioa 3.3.6. *Lokalki metrizagarria izatea heredagarria da.*

Frogapena. Izan bitez (X, τ) lokalki metrizagarria den espazioa eta $A \subseteq X$ azpimultzoa. Izan bedi $x \in A$. Hipotesiz, X lokalki metrizagarria denez, $U \in \tau$ irekia existitzen da non $x \in U$ eta (U, τ_U) metrizagarria den. Orduan, $V = U \cap A \in \tau_A$, x puntuaren ingurune irekia da A azpiespazioan. Gainera, $V \subseteq U$ eta metrizagarritasuna propietate heredagarria denez, (V, τ_V) metrizagarria da. $\square$

Teorema 3.3.7. (***Smirnov-en metrizagarritasun teorema***) *Izan bedi X espazioa. Metrizagarria da baldin eta soilik baldin X Hausdorff, paratrinkoa eta lokalki metrizagarria bada.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa.

$\Longrightarrow$) Berehalakoa da.

$\Longleftarrow$) Helburua X erregularra dela eta σ-lokalki finitua den ireki-oinarria duela frogatzea da, 3.3.2 teorema aplikatzeko. Batetik, erregularra dela berehalakoa da, 2.3.6 korolarioaren ondorioz, Hausdorff eta paratrinkoak diren espazioak normalak baitira. Bestetik, σ-lokalki finitua den ireki-oinarria onartzen duela frogatzeko, metrizagarriak diren elementuez osatutako X-ren estalki irekia eraikiko dugu honela: $x \in X$ guztietarako, U_x puntuaren ingurune irekia existitzen da non (U_x, τ_{U_x}) azpiespazioa metrizagarria den. Honela, $\{U_x \ : \ x \in X\}$ familia X espazioaren estalki irekia da eta hau paratrinkoa denez, $\mathcal{D}$ finketa ireki lokalki finitua du. Gainera, $D \in \mathcal{D}$ bakoitzerako, (D, τ_D) azpiespazioa metrizagarria da. Beraz, D azpiespazioan, $d_D : D \times D \to \mathbb{R}$ metrika dago definituta. Gainera, $x \in D$ guztietarako, $B_{d_D}(x, \epsilon) = \{y \in D \ : \ d_D(x, y) < \epsilon\}$ irekia da D azpiespazio irekian, orduan, irekia da ere X espazioan.

Bola ireki horietatik abiatuz, X espazioaren estalki irekia eraikiko dugu. Finka dezagun $n \in \mathbb{N}$ arrunta. Eraiki dezagun $\mathcal{A}_n$ familia: $\mathcal{A}_n = \{B_{d_D}(x, \frac{1}{n}) \ : \ x \in D, \ D \in \mathcal{D}\}$. Espazioa paratrinkoa denez, $\mathcal{A}_n$ familiak $\mathcal{E}_n$ finketa ireki lokalki finitua du. Honela, $\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$ familia σ-lokalki finitua da.

Azkenik, froga dezagun $\mathcal{E}$ ireki-oinarria dela. Batetik, berehalakoa da $\mathcal{E} \subseteq \tau$ dela. Bestetik, $U \in \tau$ eta $x \in U$ guztietarako, $E \in \mathcal{E}$ irekia behar dugu non $x \in E \subseteq U$ den. Hasteko, $\mathcal{D}$ lokalki finitua denez, $N \in \mathcal{N}_x$ existitzen da zeinak $\mathcal{D}$ familiako elementu kopuru finitua ebakitzen duen. Hortaz, x, familia honen elementu kopuru finituan dago, demagun $D_1, \ldots, D_n$ elementuetan dagoela. Orduan, $i \in \{1, \ldots, n\}$ guztietarako, (D_i, τ_{D_i}) azpiespazio metrizagarrian $U \cap D_i$ puntuaren ingurune irekia da eta $\epsilon_i > 0$ existitzen da non $x \in B_{d_{D_i}}(x, \epsilon_i) \subseteq (U \cap D_i)$ den. Har dezagun $k \in \mathbb{N}$ non $\frac{2}{k} < \min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ den. Batetik, $\mathcal{E}_k$ X espazioaren estalki irekia da, orduan $E \in \mathcal{E}_k$ existitzen da non $x \in E$ den. Halaber, $\mathcal{E}_k$, $\mathcal{A}_k$ familiaren finketa da eta ondorioz, $B_{d_{D_0}}(y, \frac{1}{k}) \in \mathcal{A}_k$ topatuko dugu non $E \subseteq B_{d_{D_0}}(y, \frac{1}{k})$ den, $D_0 \in \mathcal{D}$ eta $y \in D_0$ batzuetarako. Azkenean, $x \in E \subseteq B_{d_{D_0}}(y, \frac{1}{k}) \subseteq D_0$ dugu. Baina, esan bezala x, $D_1, \ldots, D_n$ elementuetan dago soilik, orduan D_0, elementu hauetako bat izango da. Demagun, $D_0 = D_1$ dela. Orduan, $\frac{2}{k} < \epsilon_1$ izateagatik, $x \in E \subseteq B_{d_{D_1}}(y, \frac{1}{k}) \subseteq B_{d_{D_1}}(x, \epsilon_1) \subseteq U$ † da, nahi ge-

† $z \in B_{d_{D_1}}(y, \frac{1}{k})$ guztietarako, $d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \epsilon_1$ da, ondorioz, $z \in B_{d_{D_1}}(x, \epsilon_1)$ da.

nuena. Beraz, $\mathcal{E}$ σ-lokalki finitua den ireki-oinarria da X erregularra den espazioan eta esan bezala, espazioa metrizagarria da. $\square$

Aurresan dugu moduan, landu ditugun kontzeptuekin metrizagarritasun teorema interesgarriak lortu ditugu.

A. Eranskina

Eranskina

A.1 Zenbait adibide eta kontradibide berezi

Lanean zehar, egitura topologiko bat aztertzerakoan, espazio zehatz batzuei egiten zaie erreferentzia. Agian, espazio honek aztertzen ari garen propietateak betetzen dituelako, edota, espazio honek interesgarriak diren hainbat ezaugarri dituelako. Hauek atal honetan kokatuta daude.

$\mathbb{R}^n$ espazioa

Adibidea A.1.1. Ohiko $\mathbb{R}^n$ espazio euklidearra, eta $\mathbb{R}$ espazioa bereziki, oso baliagarriak dira lan honetan lantzen diren kontradibidetan kontzeptu batzuk ondorioztatzeko. Jakina da $\mathbb{R}$ espazioa metrizagarria dela eta gainera, metrizagarritasuna ere propietate heredagarria eta biderkagarria dela. Metrizagarritasuna bi kontzeptu nagusirekin erlazionatu dugu, banantze-axiomekin eta paratrinkotasunarekin hain zuzen. Batetik, lehen kapituluan banantze-axiomen arteko inplikazio kate bat eraiki eta mailarik gorenean perfektuki normalak diren espazioak kokatu ditugu. Gainera, metrizagarriak diren espazioak perfektuki normalak direla frogatu dugu, hortaz, $\mathbb{R}$ espazioa perfektuki normala da eta ondorioz, banante-axioma oro betetzen du. Antzera gertatzen da $\mathbb{R}$ espazioaren azpiespazioekin eta $\mathbb{R}^n$ espazioekin eta hauen azpiespazioekin. Bestetik, metrizagarriak diren espazioak paratrinkoak direnez, $\mathbb{R}$ espazioa ere paratrinkoa da, honen azpiespazioen antzera. Halaber, $\mathbb{R}^n$ espazioak eta hauen azpiespazioak ere paratrinkoak dira. □

Sorgenfrey-ren zuzena

Lanean zehar espazio honi behin eta berriz egiten zaio erreferentzia. Sorgenfreyren zuzena normala dela ezaguna den arren, berriak diren zenbait ezaugarri ere esleitu dizkiogu. Horrenbestez, atal honetan aipatutako ezaugarri hauek frogatuko ditugu: guztiz normala dela eta C_{II} espazioa ez dela hain zuzen.

Adibidea A.1.2. $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ Sorgenfrey-ren zuzena ondoko ireki-oinarriak eraikitzen du:

$$\beta = \{[a,b) \ : \ a,b \in \mathbb{R} \ , \ a<b\}$$

- Guztiz normala da. Batetik, berehalakoa da T_1 dela. Bestetik, T_5 dela erakutsiko dugu. Izan bitez $A, B \subseteq X$ azpimultzo bananduak. Hau da, $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$ betetzen dutenak. Berehalakoa da, $A \subseteq X - \overline{B}$ eta $B \subseteq X - \overline{A}$ direla. A eta B-ren ingurune ireki disjuntuak eraikiko ditugu. Hasteko, A-ren ingurune irekia: $a \in X - \overline{B}$ bakoitzerako, $X - \overline{B} \in \tau$ irekia denez, $[a, x_a) \in \beta$ ireki-oinarriko elementua existitzen da, non $[a, x_a) \subseteq X - \overline{B}$ den. Honela, $U = \cup_{a\in A}[a, x_a) \in \tau$ irekia da eta berehalakoa da $A \subseteq U$ dela. Antzera, V, B-ren ingurune irekia eraikiko dugu: $b \in X - \overline{A}$ bakoitzerako, $X - \overline{A} \in \tau$ irekia denez, $[b, x_b) \in \beta$ ireki-oinarriko elementua existitzen da, non $[b, x_b) \subseteq X - \overline{A}$ den. Beraz, $V = \cup_{b\in B}[b, x_b)$ irekia B-ren ingurunea da. Gainera, erraz frogatzen da U eta V disjuntuak direla. Absurdura eramanez, $U \cap V \neq \emptyset$ bada, existitzen dira $a \in A$ eta $b \in B$ non $[a, x_a) \cap [b, x_b) \neq \emptyset$ den. Demagun, orokortasuna galdu gabe, $a < b$ dela, orduan, $b \in [a, x_a) \subseteq X - \overline{B}$ da eta hau absurdua da. Beraz, U eta V disjuntuak dira.

- Ez da C_{II}. Absurdura eramanez, demagun $\beta' = \{[x_i, y_i) \ : \ i \in \mathbb{Z}^+\}$ ireki-oinarri zenbakigarria dela. $\mathbb{R}$ infinitu ez-zenbakigarria da, orduan, existitzen da $a \in \mathbb{R}$ non $a \neq x_i$ den $i \in \mathbb{Z}^+$ guztietarako. Azkenean, $b \in \mathbb{R}$ hartuz, non $b > a$ den, $[a, b) \in \tau$ irekia da eta ezinezkoa da β' ireki-oinarriko elementuen bildura gisa idaztea. Beraz, espazioak ez du ireki-oinarri zenbakigarririk onartzen. Hau da, espazioa ez da C_{II}.

□

Either-Or topologia

Espazio hau bi helburu ezberdinekin aztertuko dugu. Batetik, T_4 espazioak orokorrean T_3 ez direla frogatuko dugu. Bestetik, T_4 espazioetan, T_0 eta T_1 axiomak baliokideak ez direla egiaztatuko dugu.

Kontradibidea A.1.3. Either-Or topologia honela definitzen da: $X = [-1, 1]$ espazioan irekiak eta itxiak ondorengoak dira.

$$\tau = \{U \subseteq [-1,1] \ : \ 0 \notin U \text{ edo } (-1,1) \subseteq U\}$$

$$\mathcal{C} = \{\{-1\}, \{1\}, \{-1,1\}\} \cup \{F \subseteq [-1,1] \ : \ 0 \in F\}$$

T_4 den, baina T_3 ez den espazioa da.

- Ezer baino lehen T_4 dela aztertuko dugu, horretarako itxi disjuntu bikote ezberdinak hartuko ditugu. Izan bedi $F \in \mathcal{C}$ non $F \subseteq [-1, 1]$ eta $0 \in F$ diren.

(i) $\{-1\}, \{1\} \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak hartuz gero, hauek ireki disjuntuak dira.

(ii) $\{-1, 1\}, F \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak hartuz gero, $\{-1, 1\}, (-1, 1) \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira non $\{-1, 1\} \subseteq \{-1, 1\}$ eta $F \subseteq (-1, 1)$ diren.

(iii) $\{-1\}, F \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak hartuz gero, $\{-1\}, (-1, 1] \in \tau$ ireki disjuntuak existitzen dira non $\{-1\} \subseteq \{-1\}$ eta $F \subseteq (-1, 1]$ diren. Antzera frogatzen da $\{1\}, F \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuen kasuan.

(iv) Ez da $F, G \in \mathcal{C}$ itxi bikoterik existitzen non $F, G \neq \{1\}, \{-1\}, \{1, -1\}$ eta disjuntuak diren.

- Espazioa ez da T_3. Izan ere, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in \mathcal{C}$ itxia da eta $\frac{1}{2} \notin (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ puntua hartuz, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ tartea barnean duen edozein $U \in \tau$ irekik, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \subseteq (-1, 1) \subseteq U$ beteteko du eta $\frac{1}{2} \in U$ da. Hortaz, ezingo dugu U multzoarekin disjuntua den $\frac{1}{2}$ puntuaren ingurune irekirik topatu.

T_4 den espazioan, T_0 eta T_1 ez dira zertan baliokideak izan.

Ikusi berri dugu espazioa T_4 dela. Orain, T_0 izan arren T_1 ez dela egiztatuko dugu.

- Espazioa T_0 da, hau frogatzeko hautatutako puntuen araberako kasuistika aztertuko dugu:

  (i) $a \neq b$ eta $a \in (-1, 1) - \{0\}$ badira, $\{a\} \in \tau$ irekia existitzen da non $a \in \{a\}$ eta $b \notin \{a\}$ betetzen diren. Antzera frogatzen da $a \neq b$ eta $b \in (-1, 1) - \{0\}$ diren kasuan.

  (ii) 0 eta 1 puntuen kasuan, $[-1, 1) \in \tau$ irekia existitzen da non $0 \in [-1, 1)$ eta $1 \notin [-1, 1)$ betetzen diren. Antzera gertatzen da 0 eta -1 puntuen eta -1 eta 1 puntuen kasuan.

  Beraz, espazioa T_0 da.

- Espazioa ez da T_1. 0 eta $\frac{1}{2}$ puntuen kasuan, 0 puntuaren edozein U ingurune irekik $(-1, 1) \subseteq U$ beteko du eta ondorioz $\frac{1}{2} \in U$ da. Hau da, espazioak ez du T_1 axioma betetzen.

□

A.2 Kontradibideak nola eraiki

Banantze-axiomen eremuan, lanari sendotasuna emateko landu ditugun inplikazio faltsuen arteko kontradibideak eraikitzeko teknika ezberdinei erreparatuko diegu atal honetan. Teknika hauek axioma bakoitza propietate biderkagarria den aztertzen oinarritzen dira. Lehen kapituluan aztertu dugun moduan T_0, T_1, Hausdorff, guztiz Hausdorff, T_3, erregularra eta guztiz erregularra izatea propietate biderkagarriak dira. Gure helburua, biderkadura propietatea dela medio, kontradibideak eraikitzeko bi metodoetan sakontzean datza.

(i) T_3 den espazio jakin batetik abiatuz, T_0, T_1 eta T_2 ez den espazioa eraikitzeko prozesua: Metodo honekin, T_3 den baina honen azpian dauden banantze-axiomak betetzen ez dituen espazioa eraikiko dugu.

Alde batetik, har dezagun $(\{0,1\}, \tau_{Indisk})$ espazio topologikoa. Espazio hau T_3 dela berehalakoa da, itxi ez-huts bakarra $\{0,1\}$ denez ezin baitugu puntua eta hau barnean ez duen itxia topatu. Baina ez da T_0 ireki ez-huts bakarra $\{0,1\}$ baita eta honela ezin baititugu 0 eta 1 puntuak elkarrengandik bereizi. Beraz, espazioa ez da T_1 ezta T_2 ere.

Bestetik, har dezagun (X, τ) T_3 den espazio topologikoa. Horrenbestez, $(X \times \{0,1\}, \tau \times \tau_{Indisk})$ espazioa T_3 izango da, hau propietate biderkagarria delako. Hala eta guztiz ere, ez da T_0, T_1 ezta T_2 ere izango arrazoi beragatik.

Adibidez, $(\mathbb{R}, \tau_u)$ espazioa erregularra da eta ondorioz, aipatutako banantze-axiomak betetzen ditu, baina $(\mathbb{R} \times \{0,1\}, \tau_{Tych})$ espazioak, ordea, T_3 den arren ez ditu gainontzeko axiomak betetzen.

(ii) Biderkagarriak ez diren axiometan oinarrituz kontradibideak eraikitzeko prozesua: Oraingoan, inplikazio katearen alde baxuan dauden banantze-axiomak betetzen dituzten, baina alde gorenekoak betetzen ez dituzten espazioak eraikiko ditugu.

Lehen aipatu bezala, banantze-axioma batzuk propietate biderkagarria direla egiaztatu dugu. Oraingo honetan $i \leq 3\frac{1}{2}$ diren T_i axiomak biderkagarriak direnez, hauek betetzen dituzten espazioak hartu eta bere buruarekin bidertuz, biderkadura espazioa eraikiko dugu. Bereziki espazio honek hasierako espazioak betetzen zituen T_i axiomak beteko ditu. Baina biderkadura espazioak ez du zertan T_i axioma, non $i > 3\frac{1}{2}$ den, bete. Kontuan hartu beharreko beste gauza bat da: metrizagarritasuna propietate biderkagarria da eta gainera, metrizagarriak diren espazioak perfektuki normalak dira. Horrenbestez gainontzeko banantze-axiomak betetzen dituzte. Orduan, honelako kontradibideak eraikitzerako garaian metrizagarriak ez diren espazioak hartu beharko ditugu.

Adibidez, demagun helburua T_3 den baina T_4 ez den espazioa eraikitzea dela. Honetarako har dezagun T_3 eta T_4 den, baina metrizagarria ez den (X, τ) espazioa. $(X \times X, \tau_{Tych})$ espazioa landuko dugu. Argi dago espazio berria ere T_3 dela, hau propietate biderkagarria baita.

Sarritan ez da T_4 izango eta hau frogatzeko Jones-en lemak kasu askotan lagunduko gaitu. Gainera, hasierako espazioa T_1 bada, erregularra den baina normala ez den espazioa eraikiko dugu.

Prozesu hau erabiliko dugu hurrengo kontradibidea eraikitzeko:

Kontradibidea A.2.1. Helburua erregularra den baina normala ez den espazioa eraikitzea da. $(\mathbb{R}, \tau_{Sor})$ Sorgenfrey-ren zuzenean egingo dugu lan, gogora dezagun topologia honen ireki-oinarria:

$$\beta = \{[a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \ , \ a < b\}$$

Sorgenfrey-ren zuzena normala dela ezaguna da, beraz, erregularra ere bada. Azken propietate hau biderkagarria denez, Sorgenfrey-ren planoa ere, $(\mathbb{R}^2, \tau_{Tych})$, erregularra da. Ikus dezagun ez dela normala. Horretarako, 1.2.15 Jones-en lema erabiliko dugu: batetik, $\mathbb{Q}^2$ azpimultzo dentsoa da. Bestetik $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = y\}$ itxia da, $\mathbb{R}^2$ irekia baita, eta (L, τ_L) azpiespazioak topologia diskretua du. Gainera, $\mathbb{Q}^2$ zenbakigarria da eta L azpimultzoaren kardinala, c jarraituaren kardinala da. Beraz, $|L| = c = 2^{|\mathbb{Q}^2|}$ da. Orduan, Jones-en lemaren ondorioz espazioa ez da T_4. $\square$

A.3 Beste zenbait banantze-axioma interesgarri

Atal honetan interesgarriak diren beste zenbait banantze-axioma lantzen dira. Lanean, haria ez galtzeko asmoz hemen kokatu ditugu.

Definizioa A.3.1. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. Espazio hau $T_{2\frac{1}{2}}$ edo *guztiz Hausdorff*, dela esaten da baldin eta, $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, $U, V \in \tau$ existitzen badira non $x \in U$, $y \in V$ eta $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ diren.

Arestian jarraitu dugun egituraz baliatuz, hurrengo datorkigun urratsa da guztiz Hausdorff propietatea heredagarria edo/eta biderkagarria den aztertzean datza. Hala betetzen dira eta Hausdorff propietateak betetzen dituela frogatzeko erabiltzen diren antzerako teknikekin egiaztatzen dira:

Proposizioa A.3.2. *Guztiz Hausdorff izatea propietate heredagarria eta biderkagarria da.*

Oraingoan ere, puntuak bereizteko funtzio jarraituak dakartzan espazioa aztertuko dugu.

Definizioa A.3.3. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. X *Urysohn-en espazioa* dela esaten da baldin eta $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, Urysohn-en funtzio bat defini badaiteke.

Espazio mota honi so eginez eta 1.3.8 proposizioa frogatzeko jarraitutako teknikez baliatuz, Urysohn-en espazioa ere heredagarria eta biderkagarria dela frogatzen da.

Proposizioa A.3.4. *Urysohn-en espazioa izatea propietate heredagarria eta biderkagarria da.*

Atal honi amaiera emateko, espazio topologikoetako ireki mota berri batzuk definituko ditugu eta hauen inguruan dauden banantze-axiomekin lan egin.

Definizioa A.3.5. Izan bedi (X, τ) espazio topologikoa. $A \in X$ multzoa *ireki erregularra* dela esaten da baldin eta, $A \in \tau$ eta $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ betetzen bada. Era berean, *itxi erregularra* dela esaten da baldin eta, $A \in \mathcal{C}$ eta $A = \overline{\overset{\circ}{A}}$ bada.

Definizioa A.3.6. Izan bedi (X, τ) T_2 den espazio topologikoa. Orduan, X *erdierregularra* dela esaten da baldin eta bertako edozein ireki, ireki erregularren bildura gisa idatz badaiteke.

Inplikazioak eta kontradibideak

Lehen kapituluan eraiki dugun inplikazio katean espazio hauek nola txertatzen diren aztertuko dugu orain.

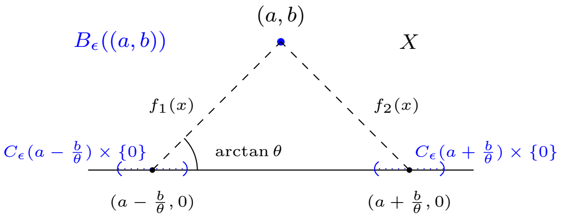
Hasteko, guztiz Hausdorff propietatea, izenak iradokitzen duen moduan, erregularra eta Hausdorff propietateen artean kokatuko dugu. Definizio hutsetan oinarrituz, berehalakoa da guztiz Hausdorff izateak Hausdorff izatea inplikatzen duela. Bistakoa den moduan, bi puntu ezberdin ireki ezberdinetan bereizi badaitezke, non hauen itxiturak disjuntuak diren, ireki hauek ere disjuntuak izango dira.

Teorema A.3.7. *Guztiz Hausdorff diren espazioak, Hausdorff dira.*

Atzerako inplikazioa irudika dezagun: $\mathbb{R}^n$ espazioan definitutako ohiko topologian bi punturen ingurune ireki disjuntuak irudikatu ditzakegu, hauen itxiturak ere disjuntuak izan daitezen. Baina, ohiko topologian honelako irudiak egitea erraza izan arren, topologia arrotzagoetara jotzen badugu argudio honek indarra galtzen du eta honelakorik egitea ezinezkoa izan daiteke. Ondoren datorren kontradibideak atzerako inplikazioaren faltsukeria justifikatzeaz gain, azaldu berri dugun egoera islatzen du. Berehala topatuko ditugu aipatutako ireki disjuntuak. Hala ere, irekien itxitura disjuntuak topatzea ezinezkoa izango da.

Kontradibidea A.3.8. Izan bedi $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \ , \ x, y \in \mathbb{Q}\}$ eta finka dezagun $\theta \in \mathbb{I}$. Malda irrazionalaren τ topologia ondoko ingurune-oinarri irekiek sortzen dute:

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B_\epsilon((x,y)) : \epsilon > 0\} \quad \text{non}$$
$$B_\epsilon((x,y)) = \{(x,y)\} \cup (C_\epsilon(x + \frac{y}{\theta}) \times \{0\}) \cup (C_\epsilon(x - \frac{y}{\theta}) \times \{0\})$$
$$\text{eta} \quad C_\epsilon(t) = (t-\epsilon, t+\epsilon) \cap \mathbb{Q} \quad \text{diren.}$$



$$f_1(x) = y = \theta(x-a) + b$$

$$f_2(x) = y = -\theta(x-a) + b$$

Ezer baino lehen, azter dezagun nolakoa den gure espazioa. Bertan dauden puntuei erreparatuz, edozein bi puntu ezberdinetarako, OX ardatzean puntu hauek dituzten ebaki-puntuak ezberdinak dira. Izan ere, $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{a}' = (a_1', a_2') \in X$ puntu ezberdinak badira, hauek definitzen dituzten zuzenek OX ardatzean ebaki-puntu bera eman dezaten ondokoak bete behar dira:

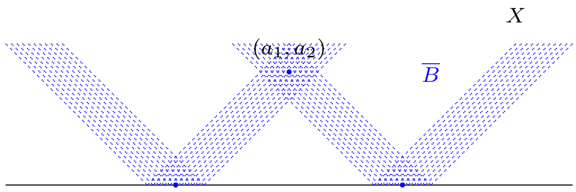
$$\begin{cases} \text{Maldak negatiboak, } -\theta & ; \quad a_1 + \frac{a_2}{\theta} = a_1' + \frac{a_2'}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{(a_2'-a_2)}{(a_1-a_1')} \\ \\ \text{Maldak positiboak, } \theta & ; \quad a_1 - \frac{a_2}{\theta} = a_1' - \frac{a_2'}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{(a_2-a_2')}{(a_1-a_1')} \\ \\ \text{Malda bat positiboa eta bestea negatiboa} & ; \quad a_1 + \frac{a_2}{\theta} = a_1' - \frac{a_2'}{\theta} \Leftrightarrow \theta = \frac{(a_2'+a_2)}{(a_1'-a_1)} \end{cases}$$

Egoerak absurduak dira, izan ere, espazio topologikoaren definizioz, θ zenbaki irrazional finkoa da eta lortu ditugun espresioak arrazionalak dira. Beraz, espazioko edozein bi puntuetarako OX ardatzean ebaki-puntu ezberdinak lortuko ditugu.

- Espazioa Hausdorff da, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ puntu ezberdin bikotetarako, puntuek OX ardatzean dituzten ebaki-puntuak ezberdinak dira. Puntu hauen ingurune irekiak disjuntuak izan daitezen, OX ardatzarekin dituzten ebaki-puntuen arteko distantziak neurtu eta ϵ egoki bat finkatu behar da.

- Ez da guztiz Hausdorff. Bi puntu ezberdinen ingurune irekien itxiturak ez dira inoiz disjuntuak izango: har dezagun $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ puntu bat eta hau barnean duen edozein U ireki. Badakigu, $B = B_{\epsilon_0}((a_1, a_2)) \in \mathcal{B}_{(a_1,a_2)}$ existituko dela, non $B \subseteq U$ den (ϵ_0 finko baterako). Beti gertatuko da ere $\overline{B} \subseteq \overline{U}$ dela. Kalkula dezagun B multzoaren itxitura:

$$\begin{aligned} \overline{B} = \{(x,y) \in X \ : \ y = \theta(x-\alpha) \ , \ \alpha \in (a_1 - \tfrac{a_2}{\theta} - \epsilon, a_1 - \tfrac{a_2}{\theta} + \epsilon)\} \bigcup \\ \bigcup \{(x,y) \in X \ : \ y = \theta(x-\alpha) \ , \ \alpha \in (a_1 + \tfrac{a_2}{\theta} - \epsilon, a_1 + \tfrac{a_2}{\theta} + \epsilon)\} \bigcup \\ \bigcup \{(x,y) \in X \ : \ y = -\theta(x-\alpha) \ , \ \alpha \in (a_1 - \tfrac{a_2}{\theta} - \epsilon, a_1 - \tfrac{a_2}{\theta} + \epsilon)\} \bigcup \\ \bigcup \{(x,y) \in X \ : \ y = -\theta(x-\alpha) \ , \ \alpha \in (a_1 + \tfrac{a_2}{\theta} - \epsilon, a_1 + \tfrac{a_2}{\theta} + \epsilon)\} \end{aligned}$$



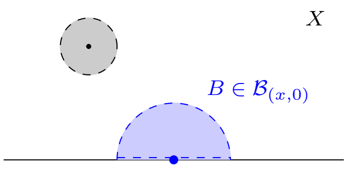
Irudian erraz ikusten da lau “banda arrazional” diagonalez osatuta dagoela. Orduan, espazioko edozein $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ puntu ezberdinetarako, ezingo dugu itxitura disjuntua duten ingurune ireki bikotea topatu. Beraz, espazioa ez da guztiz Hausdorff izango.

□

Bestalde, erregularrak guztiz Hausdorff inplikatzen duela aurreratu dugu. Ondorio zuzena gerora frogatuko dugu. Baina so egin diezaiogun alderantzizko inplikazioari. Bide hau jarraituz gero, badirudi bi puntu ezberdin (multzo itxiak) itxitura disjuntua duten irekietan bereizteko gai izanda, itxi orokor bat eta puntua (itxian ez dagoena) ireki disjuntuetan bereizteko gai izango garela. Baina, puntuak, itxiak eta irekiak honela erlazionatu ahal izateko eskuartean daukagun informazioa ez da nahikoa. Guztiz Hausdorff egitura duen espazio batean, baliabideak falta dira itxiak eta puntuak bereizi ahal izateko. Jarraian, honen ilustrazio bat edukiko dugu kontradibide baten bitartez.

Kontradibidea A.3.9. Disko erdiaren topologia jarraian azaltzen den moduan definitzen da. Izan bitez $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, bi dimentsiotako plano euklidearraren goiko planoerdia eta L, berriz, plano honen OX ardatza. Beraz, $X = P \cup L$ espazioan τ topologia ondoko ingurune-oinarri irekiak eraikitzen du:

$$\mathcal{B}_{(x,y)} = \begin{cases} \{B((x,y), r) : r > 0\} & , \quad (x,y) \in P \\ \{(x,y)\} \cup (P \cap B((x,y), r)) : r > 0 & , \quad (x,y) \in L \end{cases}$$



- Guztiz Hausdorff dela begi bistakoa da ϵ egoki baterako.
- Ez da erregularra; 1.2.6 teoremako karakterizazioaz T_3 axioma betetzen ez duela frogatuko dugu. Izan bitez $(0, 0)$ puntua eta $U \in \mathcal{B}_{(0,0)}$ puntuaren ingurune irekia. Orduan, $(0, 0)$ puntuaren edozein W ingurune hartuz, existitzen da $V_0 = \{(0, 0)\} \cup (P \cap B((0, 0), r_0)) \in \mathcal{B}_{(0,0)}$ non

$V_0 \subseteq W$ den. Gainera, $\{(x,0) \in X \ : \ -r_0 < x < r_0 \ , \ x \neq 0\} \subseteq \overline{V_0} \subseteq \overline{W}$ beteko da. Ondorioz, $(0,0)$ puntuaren edozein W ingurunerako, $\overline{W} \nsubseteq U$ da. Beraz, espazioa ez da T_3.

□

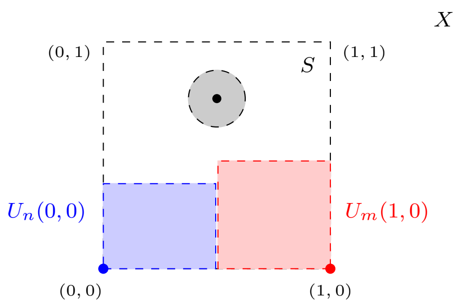
Froga dezagun, azkenik, hasieran aurresandakoa:

Teorema A.3.10. *Erregularrak diren espazioak guztiz Hausdorff dira.*

Frogapena. Izan bedi, (X, τ) espazio topologiko erregularra. Har ditzagun $x, y \in X$ ezberdinak. Espazioa T_1 denez, $\{x\} \in \mathcal{C}$ itxia da. Espazioa T_3 denez, $\{x\} \in \mathcal{C}$ eta $y \notin \{x\}$ bikoterako, W, Z ireki disjuntuak existitzen dira, non $\{x\} \subseteq W$ eta $y \in Z$ diren. Gainera, $w \in W$ guztietarako, W puntu horren ingurune irekia da, Z multzoarekin disjuntua, ondorioz, puntu hauek ez daude Z-ren itxituran, honela, $W \cap \overline{Z} = \emptyset$ dugu. Bestetik, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa erabiliz, badakigu, x eta honen ingurune den $W \in \tau$ irekirako, $V \in \tau$ irekia existitzen dela non, $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ den. Berehalakoa da orduan, $\overline{V} \cap \overline{Z} = \emptyset$ dela. Dagoeneko, topatu ditugu, $V, Z \in \tau$, itxitura disjuntua duten irekiak non $x \in V$ eta $y \in Z$ diren. Beraz, frogatu dugu, espazioa guztiz Hausdorff dela. □

Erdierregularrak diren espazioak kokatuko ditugu orain. Izenagatik intuitiboa da erregularrak diren espazioak, erdierregularrak direla pentsatzea. Baina alderantzizko inplikazioari so egiten badiogu, ikus dezagun zer gertatzen den hurrengo kontradibidean:

Kontradibidea A.3.11. Izan bedi Arens-en karratu sinplifikatua. Izan bedi $X = S \cup \{(0,0),(1,0)\}$, non S karratu unitatearen barruko puntuak diren. S multzoan topologia euklidearra dugu. $(0,0)$ puntuaren ingurune-oinarria $U_n(0,0) = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{n}\}$ da eta $(1,0)$ puntuarena, ordea, $U_m(1,0) = \{(1,0)\} \cup \{(x,y) : \frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \frac{1}{m}\}$ da. Beraz, $\beta = \beta_u^S \cup \{U_n(0,0) \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{U_m(1,0) \ : \ m \in \mathbb{N}\}$ espazioaren ireki-oinarria da.



Froga dezagun, espazio hau erdierregularra dela baina ez erregularra.

- Espazioa erdierregularra dela frogatzeko, ikus dezagun T_2 dela eta β ireki-oinarria, ireki erregularrez osatutako dagoela.

  Espazioa Hausdorff dela berehalakoa da; erradio egoki baterako puntuak erraz bereizten dira ireki disjuntuen bitartez. Ondoren, β ireki erregularrez osatuta dagoela egiaztatuko dugu, hau da, $A = \overset{\circ}{\overline{A}}$ dela $A \in \beta$ guztietarako. Horretarako, hiru egoera aztertu behar dira, ireki-oinarriko elementuen aukeraketaren arabera:

  (i) $B = B((x,y),r) \in \beta$ ireki-oinarriko elementuak, non $r > 0$ den, $(x,y) \in (0,1)^2$ puntuei dagokie. Nabaria denez $((0,0),(1,0) \notin \overline{B}$ delako beti) $B = \overset{\circ}{\overline{B}}$ betetzen da.

  (ii) $U_n(0,0)$ ireki-oinarriko elementua. Honen itxitura kalkulatuko dugu lehenengo: $(0,0)$ puntutik kanpo topologia euklidearra dugu, beraz, $\overline{U_n(0,0)} = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) : 0 < x \leq \frac{1}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{n}\}$ dela berehalakoa da. Gainera, honen barrualdea kalkulatuz gero, argudio bera erabiliz $\overset{\circ}{\overline{U_n(0,0)}} = U_n(0,0)$ betetzen da.

  (iii) $U_m(1,0)$ ireki-oinarriko elementuaren kasua, (ii) kasuaren antzera egiaztatzen da.

  Beraz, $\beta = \beta_u^S \cup \{U_n(0,0), n \in \mathbb{N}\} \cup \{U_m(1,0), n \in \mathbb{N}\}$ ireki erregularrez osatutako ireki-oinarria da. Hortaz, espazioa erdierregularra da.

- Espazioa erregularra ez dela frogatzeko, T_3 espazioen 1.2.6 teoremako karakterizazioa erabiliko dugu. Har dezagun $(0,0)$ puntua eta honen ingurune den $U_{n_0}(0,0)$ ireki-oinarriko elementua. Orduan, $(0,0)$ puntuaren beste W ingurunea hartuz, $V = U_{m_0}(0,0) \in \mathcal{B}_{(0,0)}$ existituko da non $V \subseteq W$ den. Gainera, $\{(x,y) \in X \ : \ x = \frac{1}{2}, 0 < y \leq \frac{1}{m_0}\} \subseteq \overline{V} \subseteq \overline{W}$ beteko da. Ondorioz, $(0,0)$ puntuaren edozein W ingurunek $\overline{W} \nsubseteq U_{n_0}(0,0)$ beteko du. Beraz, espazioa ez da T_3.

$\square$

Hasiera batean aipatu dugunera bueltatuz,

Teorema A.3.12. *Erregularrak diren espazioak erdierregularrak dira.*

Frogapena. Espazio erregularrak T_2 badirenez, ireki erregularrez osatutako ireki-oinarria onartzen dutela egiaztatzea besterik ez da behar. Demagun (X,τ) espazioa erregularra dela, β bertako ireki-oinarria izanik. Har dezagun:

$$\beta' = \{\overset{\circ}{\overline{V}} : V \in \beta\}$$

Froga dezagun β' ireki-oinarria dela: batetik, berehalakoa da $\beta' \subseteq \tau$ dela. Bestetik, $U \in \tau$ eta $x \in U$ guztietarako, T_3 espazioen 1.2.6 karakterizazioa aplikatuz, $V \in \tau$ irekia existitzen da, non $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ den, beraz, $\overset{\circ}{\overline{V}} \subseteq U$.

Azkenik, erraz egiaztatuko dugu, $\overset{\circ}{\overline{V}} \in \beta'$ elementuak, ireki erregularrak direla, $\overset{\circ}{\overline{V}} = \overset{\circ}{\overline{(\overset{\circ}{\overline{V}})}}$ dela hain zuzen. Bi partekotasunak frogatuko ditugu:

$\subseteq$) Har dezagun $B = \overset{\circ}{\overline{V}}$. Orokorrean, $B \subseteq \overline{B}$ betetzen da, ondorioz, $\overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{\overline{B}}$ dugu. Gainera, $B \in \tau$ irekia denez, partekotasuna frogatu dugu.

$\supseteq$) Har dezagun $B = \overline{V}$. Orokorrean, $\overset{\circ}{B} \subseteq \overline{B}$ betetzen da, hortaz, $\overline{\overset{\circ}{B}} \subseteq \overline{B}$ dugu eta ondorioz, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}} \subseteq \overset{\circ}{\overline{B}}$ da. Gainera, $B \in \mathcal{C}$ itxia denez, partekotasuna frogatu dugu. □

Gure zereginarekin amaitzeko, Urysohn-en espazioak kokatzea falta zaigu. Guztiz erregularrak diren espazioak Urysohn-en funtzioen bitartez erlazionatu ditugula, hauek Urysohn-en espazioarekin erlazionatuko ditugu orain:

Teorema A.3.13. *Guztiz erregularrak diren espazioak, Urysohn-en espazioak dira.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) guztiz erregularra den espazio topologikoa. Berehalakoa da, izan ere, $x, y \in X$ ezberdinak badira, $x \notin \{y\} \in \mathcal{C}$ hautatuz, Urysohn-en funtzioa existitzen da. □

Alderantzizko inplikazioa ordea ez da beteko. Arestian azaldutako A.3.9 Disko erdiaren topologia kontradibidera bueltatuz, guztiz erregularra ez dela frogatu dugu. Ikus dezagun Urysohn-en espazioa dela.

Kontradibidea A.3.14. Disko erdiaren topologia: Ikus dezagun guztiz erregularra ez den arren, Urysohn-en espazioa dela. Ezer baino lehen (X, τ_u^X) espazioa kontsideratuko dugu, $\mathbb{R}^2$ espazio euklidearraren azpiespazioa da eta hau Urysohn-en espazioa denez, (X, τ_u^X) ere Urysohn-en espazioa da, A.3.4 proposizioan azaltzen den moduan. Bestetik, $\tau_u^X \subseteq \tau$ denez, (X, τ) espazioa ere Urysohn-en espazioa da, oharrak 1.3.2 (*iii*), Urysohn-en funtzioak finagoak diren espazioetara hedatzen baitira. □

Teorema A.3.15. *Urysohn-en espazioak guztiz Hausdorff dira.*

Frogapena. Izan bedi (X, τ) Urysohn-en espazioa. Bertan, $x, y \in X$ ezberdin guztietarako, f Urysohn-en funtzio jarraitua definiturik dago, non

$$f : (X, \tau) \longrightarrow ([0,1], \tau_u^{[0,1]}) \text{ , } f|_{\{x\}} = 0 \text{ eta } f|_{\{y\}} = 1 \text{ diren.}$$

Har ditzagun $[0, 1/4)$ eta $(3/4, 1]$ irekiak $[0, 1]$ azpiespazioan. Hauen itxiturak $[0, 1/4]$ eta $[3/4, 1]$ dira, hurrenez hurren. f jarraitua denez, $f^{-1}([0, 1/4))$

eta $f^{-1}((3/4,1])$, x eta y barnean dituzten irekiak dira. Froga dezagun hauen itxiturak disjuntuak direla:

$$\overline{f^{-1}([0,1/4))} \cap \overline{f^{-1}((3/4,1])} \subseteq f^{-1}([0,1/4]) \cap f^{-1}([3/4,1]) =$$
$$= f^{-1}([0,1/4] \cap [3/4,1]) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Beraz, topatu ditugu $f^{-1}([0,1/4))$ eta $f^{-1}((3/4,1])$ irekiak espazioa guztiz Hausdorff izan dadin. $\square$

Hurrengo kontradibidean guztiz Hausdorff den espazioa aztertuko dugu. Baina hau ez da Urysohn-en espazioa izango. Kontradibide interesgarria da hau, Urysohn-en funtzioekin lan egiten baita eta gainontzeko kontradibideetan ez bezala, helburua $x, y \in X$ ezberdin bikoterako halako funtziorik existitzen ez dela frogatzea izango baita.

Kontradibidea A.3.16. Arens-en karratua espazioa aztertuko dugu orain. Guztiz Hausdorff den espazioa da baina ez da Urysohn-en espazioa. Honela definitzen da (X,τ) espazio hau: $S = (0,1)^2 \cap \mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2$ espazio euklidearraren azpiespazioa bada,

$$X = S \cup \{(0,0),(1,0)\} \cup \{(\frac{1}{2}, r\sqrt{2}) \ : \ r \in \mathbb{Q},\ 0 < r\sqrt{2} < 1\ \}$$

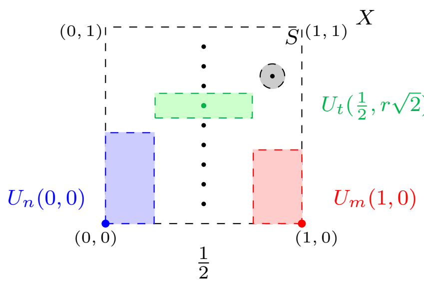
Ingurune-oinarri irekia ondoko multzoek osatzen dute:

$\mathcal{B}_{(x,y)} = \mathcal{B}^u_{(x,y)}, \quad (x,y) \in S$

$\mathcal{B}_{(0,0)} = \{U_n(0,0)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in X \ : \ x \in (0,\frac{1}{4}),\ y \in (0,\frac{1}{n})\}\}_{n\in\mathbb{N}}$

$\mathcal{B}_{(1,0)} = \{U_m(1,0)\}_{m\in\mathbb{N}} = \{\{(1,0)\} \cup \{(x,y) \in X \ : \ x \in (\frac{3}{4},1),\ y \in (0,\frac{1}{m})\}\}_{m\in\mathbb{N}}$

$\mathcal{B}_{(\frac{1}{2},r\sqrt{2})} = \{U_t(\frac{1}{2},r\sqrt{2})\}_{t\in\mathbb{N}} = \{(x,y) \in X : x \in (\frac{1}{4},\frac{3}{4}),\ |y - r\sqrt{2}| < \frac{1}{t}\}\}_{t\in\mathbb{N}}$

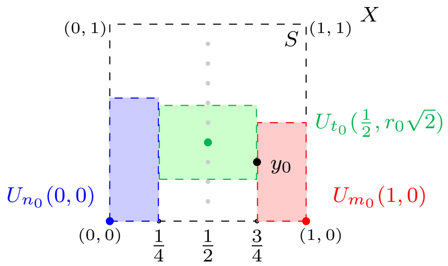


Egiazta dezagun espazioa guztiz Hausdorff dela baina ez Urysohn-en espazioa:

- Espazioa guztiz Hausdorff da. Berehalakoa da, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in X$ puntuen aukeraketaren arabera kasu ezberdinak aztertu eta behar bezalako puntuen inguruneak topatuz.

- Espazioa ez da Urysohn. Absurdura eramanez frogatuko dugu, demagun $(0,0)$ eta $(1,0)$ puntuetarako f Urysohn-en funtzioa existitzen dela. Har ditzagun $[0,\frac{1}{4})$ eta $(\frac{3}{4},1]$, 0 eta 1 puntuen ingurune irekiak hurrenez hurren. Urysohn-en f funtzioa jarraitua denez, $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ arruntak existitzen dira non $U_{n_0}(0,0) \subseteq f^{-1}([0,\frac{1}{4}))$ eta $U_{m_0}(1,0) \subseteq f^{-1}((\frac{3}{4},1])$ diren. Finka dezagun $r_0\sqrt{2} < \min\{\frac{1}{n_0},\frac{1}{m_0}\}$ eta azter dezagun zein den $(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2})$ puntuaren irudia. Helburua puntu honek edozein kasutan ere bi irudi dituela ikustea izango da, honela f ezingo da aplikazioa izan eta absurdu batera iritsiko gara.

  Demagun, orokortasuna galdu gabe, $f(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2})$ puntua ez dagoela $[0,\frac{1}{4})$ tartean. Lehenik eta behin egiazta dezagun $f(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) \neq \frac{1}{4}$ dela. Absurdura eramanez, $f(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$ bada, f jarraitua denez, $N \in \mathcal{N}_{\frac{1}{4}}$ guztietarako, $M \in \mathcal{N}_{(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2})}$ existitzen da non $f(M) \subseteq N$ den. Batetik, $N = (\frac{1}{5},\frac{1}{3})$ denean ere betetzen da. Bestetik, $t_0 \in \mathbb{N}$ existitzen da non $U_{t_0}(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) \subseteq M$ den. Har dezagun $(\frac{3}{4}, y_0) \in \overline{M}$ puntua ($y_0 < \min\{r_0\sqrt{2}+t_0, m_0\}$). Berriro ere f jarraitua dela suposatuz, $f((\frac{3}{4}, y_0)) \in f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{N} = [\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ betetzen da. Baina, $(\frac{3}{4}, y_0) \in \overline{U_{m_0}(1,0)}$ ingurunean ere badago eta orduan, f jarraitua denez gero, $f((\frac{3}{4}, y_0)) \in f(\overline{U_{m_0}(1,0)}) \subseteq \overline{f(U_{m_0}(1,0))} \subseteq [\frac{3}{4},1]$ ere beteko da. Aurrean dugun egoera ezinezkoa da, f aplikazioa bada, $(\frac{3}{4}, y_0)$ puntuak ezingo baititu bi irudi eduki. Beraz, $f(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) \neq \frac{1}{4}$ da.

  Argudio hauetaz baliatuz, $f(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) = a \notin (\frac{1}{4}, 1]$ betetzen dela egiaztatuko dugu. Absurdura eramanez, demagun $a \in (\frac{1}{4}, 1]$ dela. Suposatu dugun moduan f jarraitua denez, $N \in \mathcal{N}_a$ guztietarako, $M \in \mathcal{N}_{(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2})}$ existitzen da non $f(M) \subseteq N$ den. Bereziki, $N = (b,c) \subseteq (\frac{1}{4},1]$, $b \neq \frac{1}{4}$ denean ere betetzen da. Bestetik, $k_0 \in \mathbb{N}$ topatu dezakegu non $U_{k_0}(\frac{1}{2}, r_0\sqrt{2}) \subseteq M$ den. Har dezagun $(\frac{1}{4}, y_0') \in \overline{M}$ puntua ($y_0' < \min\{r_0\sqrt{2}+k_0, n_0\}$). Orduan, f jarraitua denez, $f((\frac{1}{4}, y_0')) \in f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)} \subseteq \overline{N} = [b,c]$ betetzen da. Bestetik, $(\frac{1}{4}, y_0') \in \overline{U_{n_0}(0,0)}$ dugu ere eta f jarraitua denez, $f((\frac{1}{4}, y_0')) \in f(\overline{U_{n_0}(0,0)}) \subseteq \overline{f(U_{n_0}(0,0))} \subseteq [0,\frac{1}{4}]$ dugu. Egoera hau ere absurdua da.

Ondorioz, ezingo dugu Urysohn-en funtziorik topatu $(0,0)$ eta $(1,0)$ puntuetarako. Espazioa ez da Urysohn-en espazioa.

$\square$

Azkenean, hauxe da banantze-axiomen arteko inplikazio katea:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\text{P. norm.} & \Rightarrow & \text{G. norm.} & \Rightarrow & \text{Normala} \Rightarrow & \text{G. erreg.} & \Rightarrow & \text{Urysohn} \\
 & & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & & \text{Erregularra} & \Rightarrow & \text{G. Hausdorff} \\
 & & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & & & & \text{Erdierreg.} & \Rightarrow & \text{Hausdorff} \\
 & & & & & & & \Downarrow \\
 & & & & & & & T_1 \\
 & & & & & & & \Downarrow \\
 & & & & & & & T_0
\end{array}
$$

A.4 G_δ-multzoak eta F_σ-multzoak

Normaltasun perfektua aztertu dugunean, G_δ-multzoak eta F_σ-multzoak izeneko multzoak aurkeztu ditugu. Lanean aurrera joan hala, multzo hauen karakterizazio eta propietate ezberdinak behar ziren eta haria ez galtzeko asmoz, xehetasun hauek atal honetan kokatu dira.

Lehen aipatu bezala, G_δ-multzoak, multzo irekien ebakidura zenbakigarri gisa idatz daitezkeen multzoak dira. F_σ-multzoak ordea, multzo itxien bildura zenbakigarri gisa idatz daitezkeenak dira.

Jarraian datorren proposizioa berehalakoa da.

Proposizioa A.4.1. *A, F_σ-multzoa bada, orduan $X-A$, G_δ-multzoa da. Alderantzizkoa ere betetzen da, A G_δ-multzoa bada, orduan $X-A$, F_σ-multzoa da.*

Proposizioa A.4.2. *F, F_σ-multzoa bada, $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$ multzo itxien segida monotono ez-beherakorra existitzen da non $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ den. Bestalde, G, G_δ-multzoa bada, $G_1 \supseteq G_2 \supseteq G_3 \supseteq \dots$ multzo irekien segida monotono ez-gorakorra existitzen da non $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ den.*

Frogapena. G G_δ-multzoa den kasurako frogatuko dugu, bestea antzera egiten baita. G G_δ-multzoa bada, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ multzo irekien familia existitzen da non $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ den. Multzo hauetatik abiatuz defini ditzagun $G_n = \bigcap_{i\leq n} U_n$ multzo irekiak. Familia hau segida monotono ez-gorakorra da, $G_n \supseteq G_{n+1}$ betetzen baita $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Gainera, $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ da. $\square$

Aurrerago erabiliko dugun Analisiko teorema bat enuntziatuko dugu orain, honen froga *Topology* [1] liburuko $III, 10.5$ atalean aurki daiteke.

Teorema A.4.3. *Izan bedi $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funtzio jarraituen segida non n guztietarako $|f_n| \leq M_n$ den eta $\sum_{n\in\mathbb{N}} M_n$ serie konbergentea den. Orduan, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa non $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ den jarraitua da.*

Teorema A.4.4. *Izan bitez (X, τ) T_4 den espazio topologikoa eta $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak. Orduan, $f^{-1}(0) = F$ betetzen duen F eta G azpimultzoei dagokien Urysohn-en f funtzioa existitzen da, baldin eta soilik baldin F, G_δ-multzoa bada.*

Frogapena. Izan bitez (X, τ) T_4 den espazioa eta $F, G \in \mathcal{C}$ itxi disjuntuak.

$\Longrightarrow$) Har ditzagun $n \in \mathbb{N}$ guztietarako $[0, \frac{1}{n}) \in \tau_u^{[0,1]}$ multzo irekiak. f jarraitua denez, $U_n = f^{-1}([0, \frac{1}{n})) = \{x \in X \ : \ f(x) \in [0, \frac{1}{n})\} \in \tau$ irekia da. Ondorioz,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = f^{-1}(0) = F$$

beteko da eta F, G_δ-multzoa dela egiaztatu dugu.

$\Longleftarrow$) Hipotesiz F, G_δ-multzoa da. A.4.2 proposizioak dioen moduan $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ irekien segida monotono ez-gorakorra existitzen da non $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ den. Bestetik, espazioa T_4 denez, 1.2.12 teoremako (iv) karakterizazioa erabiliz, $U_1 \cap G = \emptyset$ dela onartu dezakegu. Ondorioz, $U_n \cap G = \emptyset$ izango da n guztietarako. Izan ere, bestela, teoremaren ondorioz, $U \in \tau$ existitzen da non $F \subseteq U$ eta $\overline{U} \cap G = \emptyset$ diren. Honela, $\mathcal{V} = \{V_n = U_n \cap U\}_{n\in\mathbb{N}}$ familia eraiki eta aipatu berri diren baldintzak betetzen ditu.

Har dezagun n bakoitzerako F eta $X - U_n$ itxi disjuntuei dagokien f_n Urysohn-en funtzio jarraitua non $f_n(F) = \{0\}$ eta $f_n(X - U_n) = \{1\}$ diren. Ohartu, n guztietarako, $G \subseteq (X - U_n)$ denez, $f_n(G) = \{1\}$ dela. Defini dezagun $f : X \longrightarrow [0, 1]$ funtzioa non $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2^n} f_n(x)$ den. Jarraitua da: batetik, $\frac{1}{2^n} f_n(x)$ funtzioak jarraituak dira $n \in \mathbb{N}$ guztietarako. Bestetik, n bakoitzerako, $|\frac{1}{2^n} f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ betetzen da eta $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ konbergentea da. Beraz, A.4.3 teorema aplikatuz, f jarraitua da. Hau F eta G itxiei dagokien Urysohn-en funtzioa dela egiaztatuko dugu eta $f^{-1}(0) = F$ betetzen duela:

$$f(x) = 0 \iff \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x) = 0 \iff f_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \iff x \in U_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Azken inplikazioan $\Rightarrow$) berehalakoa da. Baina, $\Leftarrow$) betetzen da, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = F$ baita. Horrenbestez, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ lortu dugu. Hau da, $f^{-1}(0) = F$ da. Bestetik,

$$x \in G \text{ denean, } f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1$$

Beraz, frogatu dugu. $\square$

Ondorioak

Lan honetan garatutako kontzeptuen eta horretarako ibilitako prozeduraren sintesia egingo dugu orain. Topologiaren inguruko gai ezberdinak jorratu ditugu eta hasiera batean kontzeptuen artean loturarik ez zegoela zirudien arren, banantze-axiomak izan dira hauen artean euskarria.

Ezer baino lehen, banantze-axiomen azterketa sakona egin dugu. Gai berrietan murgiltzerakoan egiten den moduan, espazio mota hauen propietate eta egoera ezberdinetan duten portaera aztertu dugu; arreta berezia jarriz heredagarritasun eta biderkagarritasunean. Are gehiago, azterketa honetan erreminta tradizionalak ugari izan diren arren, kontradibideak izan dira nagusi. Inplikazio katean noranzko egokia zehazten laguntzeaz gain, espazio batzuen gabeziak ere gailendu dizkigute. Honela, ariketa honekin, espazio bakoitza identifikatu ahal izateko intuizioa ere landu dugu. Orokorrean egindako lanaren ondoren espazio hauen izaera determinatu dugu.

Gainera, gai honen azterketa guztiz osatzeko, T_3 eta T_4 espazioen gabezietan ere erreparatu dugu inplikazio katean txertatzerako garaian. Honetarako, kontradibideen papera ezinbestekoa izan da. Arestian aipatu dugun moduan, bistakoa egiten zaigun erregela baten aurrean argudio faltsuetatik urrundu eta lanaren norabidea zuzentzeko funtsezkoak dira.

Hurrengo urratsa trinkotasunean murgiltzea izan da; trinkotasun lokala eta paratrinkotasuna izan dira gure azterketaren helburua, zentzugabea zirudien arren, banantze-axiomekin duten erlazio estua berehala somatu dugu. Eta ez hori bakarrik, espazio hauek eta banantze-axiomak konbinatuz, metrizagarritasun teorema garrantzitsuak plazaratzeko gai izan gara ere. Atal honetan, kontrabidideek espazio klase ezberdinen arteko erlazio zuzenak finkatzen lagundu gaituzte.

Laburbilduz, topologiaren inguruko gaiak ikertzerakoan kontradibideak erreminta baliagarria direla ohartu gara. Espazioen arteko bereizketa egiteaz gain, lanaren norabide zuzena mantentzen laguntzen baitigute.

Bibliografia

[1] Dugundji, J. *Topology.* Allyn and Bacon. Boston, Mass, 1996.

[2] Engelking, R. *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics; Vol. 6. Heldermann Verlag Berlin. Berlin, 1989.

[3] Munkres, J. R. *Topología.* Pearson Educación, S.A., Madrid, 2002.

[4] Ruiz Hernández, G. *Una topología de los números naturales.* Acta: Taller de los ejemplos y contraejemplos en topología. XXVIII Congreso de la Sociedad Mexicana de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM. Septiembre de 1997.

[5] Steen, L. A. and Seebach, J. A. Jr. *Counterexamples in Topology.* Dover Publications, Inc. New York, 2014.

[6] Willard, S. *General Topology.* Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2004.