



---

# Sare estokastiko baten banaketa optimoa

---

Gradu Amaierako Lana  
Matematikako Gradua

Lore Zumeta Olaskoaga

Urtzi Ayesta Morate  
Inmaculada Arostegui Madariaga  
Irakasleek zuzendutako lana

Leioa, 2016ko ekainaren 28a



# Aurkibidea

<b>Esker onak</b>	<b>v</b>
<b>Laburpena/Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Sarrera</b>	<b>ix</b>
<b>1 Oinarrizko kontzeptuak</b>	<b>1</b>
1.1 Probabilitate banaketak . . . . .	1
1.2 Poisson-en prozesua . . . . .	3
1.3 Markov-en kateen definizioa . . . . .	8
<b>2 Ilaren Teoria</b>	<b>11</b>
2.1 Ilaren ereduak . . . . .	11
2.2 Okupazio-tasa eta egonkortasuna . . . . .	13
2.3 Little-en legea . . . . .	13
2.4 PASTA propietatea . . . . .	15
2.5 Batez besteko balioaren hurbilketa . . . . .	16
<b>3 Ereduaren deskribapena</b>	<b>21</b>
3.1 Zerbitzarien kapazitatea . . . . .	22
3.2 Egonkortasun baldintzak . . . . .	23
3.3 Trantsizio-tasak . . . . .	23
<b>4 Optimizazio estokastikoa</b>	<b>25</b>
4.1 Uniformizazioa . . . . .	26
4.2 Iritsiera eta irteera-tasak. Trantsizio-probabilitateak . . . . .	26
4.3 Value Iteration algoritmoa . . . . .	27
<b>5 Emaitzak, adibideak eta interpretazioa</b>	<b>31</b>
<b>A Matlab-eko kodea</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>49</b>



# Esker onak

Lehendabizikoz, Urtzi Ayesta eskertu nahiko nuke, berarengandik ikasitako guztiagatik, eskainitako laguntzarengatik eta Toulouse-era joateko aukera ezin hobea emateagatik. Inma Arosteguirekin ere oso esker oneko sentitzen naiz, izan dudan edozein zalantzaren aurrean jasotako adeitasun eta prestutasun guztiagatik.

Abagune ederra dut ere, lau urte hauetan klasean ondoan izan ditudan lagun guztiei eskerrak emateko, zuekin guztia askoz alaiagoa eta eramannerrezagoa izan baita. Eskerrik asko ez bakarrik pasa ditugun momentu zoragarri horiek guztiengatik, ez bada klasera egunero joan eta zuen goizeroko irribarreagatik. Hemengo eginak eta ekinak aurrerago fruituak ematea opa dizuet.

Eskerrik asko zuei bihotzez, Maite, aita eta ama, zuengandik jasotako babes guztiagatik. Bukatzeko, beren-beregi eskerrik asko zuri amona, maitasunean hazi eta hezteagatik.



# Laburpena

Lan honetan baliabide esleipenerako zorizko izaera duen problema baten optimizazio estokastikoa aztertzen da. Hori horrela, ilaran epe luzera dagoen batez besteko bezero kopurua minimizatuz, ilara eredu zehatz baten kontrol optimoa lortzea izan da helburua. Lantzen den ilara ereduak zehatz-mehatz bi nodo eta hiru klasetako bezeroak ditu, 0, 1 eta 2 klaseak. 0 klaseko bezeroak bi nodoen zerbitzua behar du aldi berean eta  $i$  klaseko bezero bakoitzak,  $i = 1, 2$ ,  $i$  nodo bakarrarena. Une bakoitzean, bezero bakoitzari zein zerbitzari esleitu erabakitzen da eta horrela, denboran zehar hartzen diren erabakien multzoak politika optimoa zein den zehazten du. Horretarako, *Value Iteration algoritmoa* erabiltzen da. Honen bitartez, zenbakizko zenbait emaitza ateratzen dira eta interpretazio eta alderaketa batzuk egiten dira.

## Abstract

In this work we study the stochastic optimization of resource-sharing systems. The work aim to achieve the optimal control in a queueing model by minimizing the long run number of users present or the so-called holding cost. The queueing model that we focus on, consists of two nodes and three classes of users, 0, 1 and 2 classes. Class 0 users require the same amount of capacity of the two nodes simultaneously, while class  $i$  users,  $i = 1, 2$ , require service at node  $i$  only. The evolution of the queueing model is determined by the employed scheduling policy, which specifies at each moment in time how the capacity of the servers is shared among all users contending for it. For this purpose, the *Value Iteration algorithm* is used. Some numerical results are obtained and some comparisons are made.





# Sarrera

Gaurkotasun handiko eta interes bereziko gaia dugu Ilaren Teoria. Beronek, bizitzako esperientzia desatseginetako bat lantzen du, itxarotea. Ilaren Teoriak, hitzak berak dioen moduan, itxaronaldi ilarak ditu aztergai. Eta egunerokotasunean, nonahi topa ditzakegu ilarak, hala nola, bidesarrietan maiz suertatzen diren auto-ilarak, merkatuko ilarak, telefono deietako operagailuak, ospitaletako itxaron-zerrendak, administrazio kontuak direla eta itxaron beharra, komunikazio sareak (haririk gabe sareak, internet, adibidez) etab. Ilaren Teoriako ereduak XX. mende hasieran sortu ziren, hain zuzen, A. K. Erlang matematikari eta ingeniari danimarkarra telefono-zentraletako sareen diseinuaren arazoa ikertzen hasi zenean.

Denborak gero eta balio handiagoa duen gizarte honetan, guztia eskuragarri eta guztia azkartasun osoz burutzen den gizarte honetan, Ilaren Teoriako ereduak lantzeko interesa ezin da esan txikia denik. Egun aplikazio nabarmenak ditu: zain dauden bezero kopuruaren banaketa aurreikustea, itxaron denborak kalkulatzeko eta erabakiak hartzeko prozesuan laguntzea, ilara uzten duten bezeroak kontrolatzea, hauen uzteak eragin ekonomiko bat (irabazien galera) baitakar...

Aipatutako egoera bakoitzean, eredu eta mekanismo desberdinek, zerbitzuak bezeroen artean nola banatu arautzen dituzte. Modelizazio guztiek zerbitzuaren itxaronaldia murriztea dute xede, baina, ez da beti erraza izaten hau egiteko biderik “onena” zein den esatea.

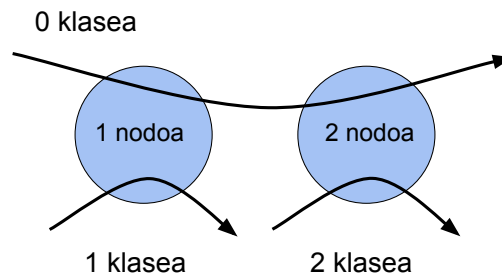
Testuinguru honetan jarriarik arreta, lanean zehar, ilara eredu jakin bat aztertuko da. Bezeroen iritsierak eta hauen zerbitzuak zorizko aldagai bezala hartzen dira eta aldagai hauek denboran zehar bilakaera bat dutenez, prozesu estokastikoak erabiliz deskribatuko dira. Izan ere, bezero baten portaera ez dago aurrez determinaturik, hots, erabat ziurgabea da.

Ilara ereduak kapazitate finitua duten zerbitzariak osatzen dute, non bezero bakoitzari zerbitzari bat edo gehiago eslehi dakioken. Ilara eredu baten bilakaera, berau antolatzeko erabiltzen den politikak zehazten du. Eta politika honek, artez edo moldez, zerbitzarien kapazitatea bezeroen artean nola el-

karbanatu azaltzen du, aldiune bakoitzean. Honela, lan honen helburua, zerbitzari bakoitzean dagoen bezero kopurua minimizatzea da eta horretarako beharko den politika optimoa aurkitzea. Laburbilduz, baliabide esleipenerako zorizko izaera duen problema bat aztertuko da eta kontrol estokastikoko ereduetan oinarrituko gara.

Baliabide esleipen politikak helburu ezberdinak erdiesteko diseina daitezke, adibidez, baloreen kudeaketan salmentak maximizatzeko, heriotzak murrizteko osasun zerbitzuetako *triage* sistemetan edo haririk gabeko sareetan errendimendua maximizatzeko.

Gure ereduak zehazki, bi nodo izango ditu eta 0, 1 eta 2 klasetako bezeroak. 0 klaseko bezeroak bi nodoen zerbitzua beharko du aldi berean eta 1 eta 2 klaseek, bakoitzak, nodo bakarrarena, ikus 1. irudia.



### 1. irudia: Ilara ereduaren irudi grafikoa.

Ilara eredu honetako batez besteko bezero kopurua minimizatzeko eta aldiune bakoitzean zein klasetako bezeroa zerbitzatu erabakitzeke, hurrengo bi efektuak hartu behar ditugu kontuan. Alde batetik, positiboa da lan kantitate gutxi eskatzen duen klaseari zerbitzua ematea, sistematik azkarrago irtengo baitira. Beste aldetik, egonkortasunaren ikuspuntutik, onuragarria da bi zerbitzariak aldi berean erabiltzea, sistema osoan dagoen lana azkarrago amaituko baita. Horrenbestez, bi efektu hauek ikertuko ditugu zerbitzu-denbora aldatu ahala.

Memoria honetan hurrengo egitura jarraitu dugu. Lehen kapitulan, beharrezkoak izango zaizkigun oinarritako kontzeptu batzuk azaldu ditugu. Besteak beste, erabili diren probabilitate banaketak azaldu ditugu, baita Poisson-en prozesua eta Markov-en kateen definizioa eman ere. Bigarren kapitulan, Ilaren Teoriari buruz aritu gara eta bertako zenbait nozio aditzera eman ditugu. Hirugarren kapitulan, landu dugun ilara ereduak deskribatu

dugu. Laugarren kapituluan, ilara eredua lantzeko egin behar izan ditugun hurbilketak azaldu ditugu, esaterako, uniformizazioa, espazioaren mozketak eta Value Iteration algoritmoa. Bosgarren kapituluan, egin ditugun simulazio desberdinak eta hauetatik lortutako emaitzak zein interpretazioak aurkeztu ditugu. Azken buruan, Value Iteration algoritmoa Matlab programazio lengoaiari nola inplementatu dugun gehitu dugu A eranskinean.



# 1. kapitulua

## Oinarrizko kontzeptuak

### 1.1 Probabilitate banaketak

Lanean zehar erabiliko ditugun probabilitate banaketak, banaketa esponentziala eta honen eratorpen bat den banaketa hiperresponentzial degenaratiboa dira.

$\lambda > 0$  parametroko *banaketa esponentziala*,  $X : \varepsilon(\lambda)$ , probabilitate banaketa jarraitu bat da eta hurrengo dentsitate funtzioa du:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Bere banaketa funtzioa:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Gertaera bat jazo den arte iragan den denbora neurtzen du.

**Propietateak 1.** Banaketa esponentzialak hurrengo propietateak betetzen ditu:

(i) Itzaropena:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

(ii) Bariantza:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(iii) Aldakuntza-koefizientea:

$$C_v = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)} = 1.$$

(iv) Memoryless propietatea:

$$\begin{aligned} P(X > t + x \mid X > t) &= \frac{P(X > t+x, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+x)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} = \\ &= e^{-\lambda x} = P(X > x). \end{aligned}$$

Propietate honek esan nahi duena da, azken gertaera jazo deneko denborak ez digula informaziorik ematen hurrengo gertaera jazo arte itxaron beharko dugun denboraren inguruan. Beste era batera esanda, banaketa honetan iraganak ez du oraina baldintzatzen, eta hori dela medio, memoria eza duela esaten da.

Bestetik,  $X$  zorizko aldagai batek *banaketa hiperresponentzial degeneratiboa* duela diogu baldin eta,  $X$ ,  $p$  probabilitatearekin,  $1/p\mu_0$  itxaropeneko banaketa esponentziala duen zorizko aldagai bada edo  $X$ ,  $1-p$  ko probabilitatearekin,  $0$  itxaropeneko banaketa esponentziala bada. Hau da,

$$\begin{cases} P(X : \varepsilon(\mu_0 p)) &= p, \\ P(X \equiv 0) &= 1 - p. \end{cases} \quad (1.1)$$

**Propietateak 2.** (i) Itxaropena:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = p \int_0^{\infty} x (p\mu_0) e^{-(p\mu_0)x} dx + (1-p) \cdot 0 = \frac{1}{\mu_0}.$$

(ii) Bariantza:

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p \frac{2}{(\mu_0 p)^2} - \frac{1}{\mu_0^2} = \frac{2-p}{\mu_0^2 p}.$$

(iii) Aldakuntza-koefizientea:

$$C_v = \frac{\sqrt{\text{Var}(X)}}{E(X)} = \frac{\sqrt{2-p}}{\sqrt{p}} \Rightarrow C_v^2 = \frac{2}{p} - 1,$$

$$p \in [0, 1] \Rightarrow C_v \in [1, \infty).$$

Jarraian, Poisson-en prozesuaren definizioa eta prozesu honetako zenbait emaitza azalduko ditugu. Tijms (2003) liburuan oinarritu gara bereziki, ikus [1].

## 1.2 Poisson-en prozesua

Poisson-en\* prozesua denboran zehar jazotzen diren gertaerak zenbatzea helburu duen teknika bat da. Esate baterako, eskualde batean jazotzen diren lurrikarak, lehiatila batera iristen diren bezeroak, sorgailu elektriko baten matxurak etab.

Izan bitez  $X_1, X_2, \dots$  zorizko aldagai positiboak, askeak eta berdinki banatuak.

$X_n \equiv$  “ $(n - 1)$ . eta  $n$ . gertaeren artean igaro den denbora.”

Izan bitez baita ere,

$$S_0 = 0 \quad \text{eta} \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

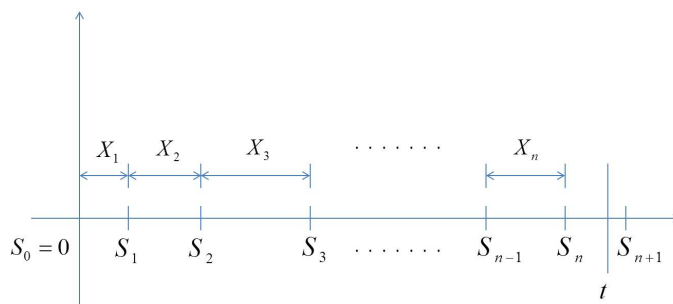
Orduan,

$S_n \equiv$  “ $n$ . gertaera jazo den denbora aldia.”

Eta  $t \geq 0$  bakoitzerako,  $N(t)$  zorizko aldagai hau definitzen dugu:

$N(t) \equiv$  “ $n \geq 0$ ,  $S_n \leq t$  betetzen duen zenbaki osorik handiena.”

Horrela,  $N(t)$  aldagaiak adierazten duena,  $t$  unera arte jazo diren gertaera kopurua da, ikus 1.1. irudia.



**1.1. irudia:**  $X_i, S_i$  eta  $N(t)$  aldagaien irudi eskematikoa.

Aldagai hauek definiturik, Poisson-en prozesuaren definizioa emateko prest gaude. Definizio hau ordea, ez da bakarra. Nahiz eta, literaturan hainbat definizio baliokide topatu, guk hurrengo hau emango dugu.

\**Siméon Denis Poisson*, Pithiviers, 1781-1840.

**Definizioa 1.2.1.**  $\{N(t), t \geq 0\}$  zorizko aldagaien multzoa  $\lambda$  *tasako Poisson-en prozesua* deitzen da, baldin eta  $X_1, X_2, \dots$  aldagaiek (gertaera batetik bestera igaro den denbora aldiak),  $\lambda$  parametroko banaketa esponentzial komuna badute.

$$P(X_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Badirudi nahiko baldintza gogorra dela, gertaera bat jazo denetik beste bat jazotzen den arteko denbora aldiak banaketa esponentziala jarraitu behar izatea. Bada kontrara, Poisson-en prozesua mundu errealeko fenomenoak deskribatzeko eredu egokia da, ikus [2]. Demagun, prozesu estokastiko askeen kopuru handi bat dugula mikro maila batean, non mikroprozesu bakoitzak inoiz gutxitan sortzen duen gertaera bat. Orduan, makro maila batean mikroprozesu hauek guztiak gainjartzeak, Poisson-en prozesu baten antzera jokatzen du gutxi gorabehera. Analogoki, ezaguna den beste emaitza hau dugu: arrakastarako probabilitate oso txikia duen Bernoulli-ren banaketa badugu,  $Ber(1, p)$ , eta elkarrekiko askeak diren saiakera asko egiten baditugu, orduan,

$$Bin(n, p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\lambda),$$

saiakera hauen guztien arrakasta kopuruak  $\lambda$  parametroko Poisson-en banaketarantz jotzen du. Izan ere,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} &\stackrel{np=\lambda}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \\ &= \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-x+1)}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}. \end{aligned}$$

- $\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-x+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$
- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} : \mathcal{P}(\lambda).$$

Adibidez, telefono zentral handi batean jasotzen dituzten dei kopurua, noiz-behinka, oso maiztasun gutxirekin, deitzen duten pertsonen deien gainjartzea bezala uler daiteke. Eta beraz, espero daiteke, prozesu hau (guztira jasotzen diren telefono deien kopurua) Poisson-en prozesu batetik hurbil egotea.

Bestalde, matematika ikuspuntutik, Poisson-en prozesua oso erabilgarria da hurrengo azpiatalean aurkezten den bere “*memoryless*” propietatea dela eta.



### Memoryless propietatea

Hemendik aurrera, Poisson-en prozesuei buruz aritzean “iritsiera” hitza erabiliko dugu “gertaera” hitzaren orde. Lehenik eta behin,  $N(t)$  aldagaiaren banaketa karakterizatuko dugu. Hasteko, badakigu

$$P(S_n \leq t) = P\left(\sum_{k=1}^n X_k \leq t\right).$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  askeak eta berdinki banatuak badira, guztiek  $\varepsilon(\lambda)$  banaketa jarraitzen dutelarik, orduan  $X_1 + X_2 + \dots + X_n : \text{Gamma}(\lambda, n)$  banaketa jarraitzen duela. Eta kontuan harturik  $X : \text{Gamma}(a, n)$  orokor baten banaketa funtzioa hurrengo dela:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-ax} \frac{(ax)^j}{j!}.$$

Ordez, tuz,

$$P(S_n \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Banaketa mota honek, sarreran aipatu dugun Erlang\* matematikariaren izena darama,  $\text{Erlang}(n, \lambda)$ , eta  $\text{Gamma}(a, n)$  banaketaren kasu berezi bat da  $a \geq 0$  zenbaki oso bat denean.

**Teorema 1.2.1.** *Edozein  $t \geq 0$  baliotarako,*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

*Hau da,  $N(t)$  zorizko aldagaia  $\lambda t$  itzaropeneko Poisson-en banaketari darrario.*

*Froga.* Hasteko, ohar gaitezen hurrengo erlazioaz,

$$(N(t) \geq n) \iff (S_n \leq t).$$

Beraz,

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Ondorioz,

---

\* Agner Krarup Erlang, Lønborg, 1878-1929.

$$\begin{aligned}
P(N(t) = n) &= P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) = \\
&= 1 - \sum_{j=0}^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} - 1 + \sum_{j=0}^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

Jarraian, Poisson-en prozesuaren *Memoryless* propietatea frogatuko dugu.

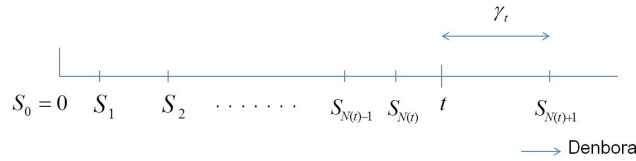
**Teorema 1.2.2.** *Izan bedi  $t \geq 0$  bakoitzera,  $\gamma_t$  hurrengo zorizko aldagaia,*

$$\gamma_t \equiv \text{“itxarote denbora } t \text{ unetik hurrengo iritsiera arte.”}$$

Orduan,  $\gamma_t$  zorizko aldagaiak  $1/\lambda$  itxaropeneko banaketa esponentziala du. Hau da,

$$P(\gamma_t \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

$t$ -rekiko independentea, ikus 1.2. irudia.



**1.2. irudia:**  $\gamma_t$  aldagaiaren irudikapena.

*Froga.* Finka dezagun  $t_0 \geq 0$ .

Orduan,  $(\gamma_{t_0} > x)$  gertaera jazoko da baldin eta hurrengo elkar baztertzaileak diren gertaerak

$$\begin{aligned}
&(X_1 > t_0 + x), (X_1 \leq t_0, X_1 + X_2 > t_0 + x), \\
&(X_1 + X_2 \leq t_0, X_1 + X_2 + X_3 > t_0 + x), \dots
\end{aligned}$$

jazotzen badira. Hortaz,

$$P(\gamma_{t_0} > x) = P(X_1 > t_0 + x) + \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leq t_0, S_{n+1} > t_0 + x).$$

Batukariaren barruko probabilitatea kalkulatzeko, Probabilitate Osoaren teorema erabiltzen badugu,

$$\begin{aligned}
P(S_n \leq t_0, S_{n+1} > t_0 + x) &= \int_0^{t_0} P(S_{n+1} > t_0 + x \mid S_n = y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \\
&= \int_0^{t_0} P(X_{n+1} > t_0 + x - y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy.
\end{aligned}$$

Horrenbestez,

$$P(\gamma_{t_0} > x) = e^{-\lambda(t_0+x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{t_0} e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy.$$

Integrala eta batukaria elkar truka daitezke beraien barneko terminoak ez-negatiboak baitira. Horrela, batukaria integralaren aurrera pasatuz,

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda \left( \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \right) e^{-\lambda y} &= e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{y^n}{n!} \right) e^{-\lambda y} = \\
e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda e^{\lambda y} e^{-\lambda y} &= e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda.
\end{aligned}$$

Beraz,

$$\begin{aligned}
P(\gamma_{t_0} > x) &= e^{-\lambda(t_0+x)} + \int_0^{t_0} e^{-\lambda(t_0+x-y)} \lambda dy = \\
&= e^{-\lambda(t_0+x)} + e^{-\lambda(t_0+x)} (e^{\lambda t_0} - 1) = e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

□

*Memoryless* propietatea Poisson-en prozesuak duen bereizgarrietako bat da. Teoremaren arabera, aldiune bakoitzean, hurrengo iritsiera jazo arteko itxaron beharreko denbora, independentea da, azken iritsiera duela zenbat jazo den informazioarekiko.

Bestetik, propietate honen ondorio bezala hurrengo bi lema ditugu.

**Lema 1.2.3.**  $N(t+s) - N(s)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\lambda$  parametroko Poisson-en prozesua da eta  $N(r)$ -rekiko independentea da,  $0 \leq r \leq s$ .

*Froga.* Demagun  $N(s) = n$  dela eta  $n$ . iritsiera  $S_n$  unean jazo dela.

Jakin badakigu, hurrengo iritsiera jazoateko denbora tartearik,  $X_{n+1} > s - S_n$  bete behar duela. Baina, banaketa esponentzialaren memoria gabetia dela eta,

$$P(X_{n+1} > s - S_n + t \mid X_{n+1} > s - S_n) = P(X_{n+1} > t) = e^{-\lambda t}.$$

Lehen iritsiera jazo arte, itxaron beharreko denboraren banaketa,  $s$  denbora eta gero,  $\lambda$  parametroko esponentziala da eta  $X_i$ -rekiko,  $1 \leq i \leq n$  independentea da. Bestalde,  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ , aldagaiak  $X_i$ -rekiko independenteak dira,  $1 \leq i \leq n$  eta baita  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ -rekiko ere.

Ondorioz,  $s$  eta geroagoko iritsieren arteko denbora tarteak, zorizko aldagai aske eta berdinki banatuak dira  $\lambda$  parametroko banaketa esponentzialarekin eta hortaz,  $N(t+s) - N(s)$ ,  $t \geq 0$ , Poisson-en prozesu bat da.  $\square$

**Lema 1.2.4.**  $N(t)$ -k gehikuntza askeak ditu. Baldin eta  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  badira, orduan,

$$N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}),$$

askeak dira.

*Froga.* Aurreko 1.2.3 lema erabiliz,  $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ ,  $N(r)$ -rekiko independentea da  $r \leq t_{n-1}$  izanik. Halaber,  $N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}), \dots, N(t_1) - N(t_0)$ -rekiko ere independentea da, aldagai hauek bi aldagai askeren arteko konposaketak baitira, konposizioako bi funtzioak neurgarriak izanik.  $\square$

Kapitulu honekin amaitzeko, lanean aurrerago Markov-en\* kateen aipamen xehe bat egingo dugunez, bere definizioa emango dugu. Esan beharra dago, 1.2 ataleko emaitzei esker, eredu baten aldagaiek Poisson-en prozesu bat jarraitzen badute, ereduaren egoera Markov-en kate baten bitartez analiza daitekeela.

### 1.3 Markov-en kateen definizioa

**Definizioa 1.3.1.** Prozesu estokastiko diskretu bat,  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , denbora diskretuan dagoen Markov-en katea dela esango dugu baldin eta, Markov-en propietatea betetzen badu.

$\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$  zorizko aldagaien segida izanik, beraien irudien eremua, egoeren espazioa da,  $S$  espazio diskretua;  $X_n$ -ren balioa, prozesuak  $n$  unean hartzen duen egoera da. Orduan, prozesu estokastiko horrek Markov-en propietatea betetzen du,  $X_n$  eta aurreko egoerak,  $X_1, \dots, X_{n-1}$  ezagunak izaki, etorkizuneko  $X_{n+1}$  egoeraren probabilitatea ez badago  $X_1, \dots, X_{n-1}$  egoeren menpe, baizik eta  $X_n$  egoeraren menpe soilik. Hau da,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) \\ = P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n), \end{aligned}$$

betetzen bada,  $n = 1, 2, \dots$  eta edozein  $s_0, \dots, s_{n+1}$  egoeren segidetarako.

\* *Andrei A. Markov*, Ryazan, 1856-1922.

Markov-en kateetan, sistema baten historia ezagutzen bada, bere azken egoerak etorkizuneko egoera baten probabilitatea deskribatzeko beharrezkoa den informazio guztia duela esaten da.

Hemen, egoeren arteko trantsizioak, finkatutako denbora une batean jartzotzen direla kontsideratu dugu. Orain, prozesuaren egoera edozein  $t$  unetan alda daitekeela suposatuz, beste definizio hau dugu:

**Definizioa 1.3.2.** Izan bedi  $S$  egoeren espazio diskretua. Orduan, denboran jarraitua den  $\{X(t), t \geq 0\}$  prozesu estokastikoa, *denbora jarraituan dagoen Markov-en katea* dela esaten da, baldin eta

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_0) = s_0, X(t_1) = s_1, \dots, X(t_n) = s_n) \\ = P(X(t_{n+1}) = s_{n+1} \mid X(t_n) = s_n), \end{aligned}$$

betetzen bada,  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$  guztietarako eta edozein  $s_0, \dots, s_{n+1} \in S$  egoeretarako.



## 2. kapitulua

# Ilaren Teoria

Landuko dugun sare mota aurkezten hasi aurretik, Ilaren Teoriako kontzeptu oinarrikoenak definitzen hasiko gara. Aldez aurretik ordea, ohar semantiko bat nahiko genuke aditzera eman. *Bezero* hitza hainbat kontu adierazteko erabiliko da lanean zehar, adibidez, *item* baten eskaria, eginkizunak, paziente edo erabiltzaileak. *Zerbitzari* hitza, berriz, prozesatze ahalmena duten entitateak adierazteko erabiliko da, adibidez, makinak, sendagileak edo operadoreak. Bigarren kapitulu hau egiteko [1, 3, 4] liburuetan oinarritu gara.

### 2.1 Ilaren ereduak

Ilaren ereduak hurrengo ezaugarriek karakterizatzen dituzte:

- Bezeroen iritsiera prozesua:  
Bezeroak ilarara zein maiztasunekin iristen diren ezagutzea ezinbestekoa da. Guk kontsideratuko dugun eremuan, bezeroak Poisson-en prozesu baten arabera iritsiko dira. Hau da, bezeroen iritsieren arteko denbora tartekak banaketa esponenziala jarraitzen duela eta iritsierak elkarrekiko independenteak direla onartuko dugu.
- Zerbitzu denbora edo bezeroen irteera prozesua:  
Bezeroak zerbitzatu izaten igaro duen denbora tartea deskribatzen duen aldagaia da. Zerbitzu denborak elkarrekiko independenteak, berdinki banatuak eta iritsieren arteko denborekiko independenteak direla onartuko dugu.
- Zerbitzu politika:  
Bezeroak modu desberdinetara zerbitza daitezke. Banan-banan, taldeka edo iritsi diren ordenaren arabera hurrengoak aipa ditzakegu:
  - Aurrena iritsi aurrena zerbitzatu, hau da, iritsi diren hurrenkeran. FIFO (First In First Out).

- Ausazko ordenean.
  - Azkena iritsi lehena zerbitzatu, ordenagailutako pilen kasuan bezala. LIFO (Last In First Out).
  - Lehentasunen arabera. Esaterako, urgentzian premia eta larrialdi handiena duenaren arabera, edo zeregin batean lanaren tamainaren eta eskatzen duen denboraren arabera eta abar.
  - Prozesadoreen partekatzea. Ordenagailu askoren funtzionamenduan adibidez.
- Zerbitzarien kapazitatea:  
Zerbitzari bakoitzak kapazitate (finitu) bat izango du eta kapazitate hau ahalik eta hobekien erabiltzen eta bezeroen artean banatzen saiatu behar gara.

Jarraian, Ilaren Teorian ohikoa den notazio bat definituko dugu. Notazio hau, D. G. Kendall-ek\* proposatu zuen eta ilara mota desberdinak modu laburtuan adieraztea ditu helburu.

Horrela bada, hurrengo hirukotea dugu:  $a/b/c$ .  $a$  hizkiak bezeroen iritsieren arteko denboraren banaketa zehazten du.  $b$  hizkiak bezeroa zerbitzatu izan deneko denboraren banaketa eta  $c$  hizkiak, berriz, zerbitzari kopurua adierazten du. Kodea osatzen duten hirukote honi beste hizki bat gehi dakioke,  $d$ , beste ilara eredu mota bat deskribatzeko. Esate baterako, zerbitzu bateko itxaron gelan bezero kopuru mugatu bat bakarrik onartzen bada,  $N$ ,  $a/b/c/N$  bezala idazten da.

Notazio berri honetako lehen bi hizkiak probabilitate banaketa bati dagozkie. Banaketa orokor bati erreferentzia egin nahi diogunean  $G$  hizkia erabiltzen da, iraupen deterministak dituzten banaketak adierazi nahi ditugunean, aldiz,  $D$  hizkia erabiltzen da eta bereziki, probabilitate banaketa hori esponentziala denean  $M$  (Markovian edo Memoryless) hizkia erabiltzen da.

Ilaren teoriako eredu batzuk Kendall-en notazioaz aipatzearren, hurrengoak ditugu:

- $M/M/1$ : Bezeroeren iritsieren arteko denbora zein hauek zerbitzatuak izan direneko denboraren banaketa esponentziala den eta zerbitzari bakarra duen ereduak dugu hau.
- $M/M/c$ : Berezeroen iritsieren arteko denboraren banaketa eta bezeroak zerbitzatuak izan direneko denboraren banaketa esponentziala da hemen ere. Oraingoan ordea, zerbitzari bakarra eduki beharrean  $c$  ditugu.

---

\*David G. Kendall, Ripon, 1918-2007.



- $D/G/c$ : Bezeroen iritsieren arteko denbora banaketa determinista, zerbitzuen denbora banaketa orokor bat eta  $c$  zerbitzari dituen eredu da.
- $D/M/1/N$ : Bezeroen iritsieren arteko denbora banaketa determinista, bezeroak zerbitzatuak izan diren bitarteko denbora banaketa esponentziala, zerbitzari bakarra eta itxaron gelan  $N$  bezero gehienez jaso ditzakeen sistema deskribatzen du.

## 2.2 Okupazio-tasa eta egonkortasuna

**Definizioa 2.2.1** (Okupazio-tasa). Izan bitez, zerbitzari bakarra duen sistema orokor bat,  $G/G/1$ , bezeroak zerbitzura iristen diren abiadura-tasa  $\lambda$  eta  $E(S)$  batez besteko zerbitzu denbora. Orduan, zerbitzura denbora unitateko iristen den lan kopurua *okupazio-tasa* da eta  $\rho$  hizkiaz adieraziko dugu.

$$\rho = \lambda E(S). \quad (2.1)$$

Zerbitzari batek lan unitate bat egin dezake denbora unitateko, eta gainera, lehen aipatu bezala, zerbitzariak kapazitate mugatu bat du. Hau dela eta, gure ilarak infiniturantz haz ez daitezen egonkorak izatea eskatu beharko diegu.

**Definizioa 2.2.2** (Egonkortasuna). Zerbitzari bakarreko ilara eredu orokor bat,  $G/G/1$ ,  $\lambda$  bezeroen iritsierako abiadura-tasa duena, *egonkorra* dela esango dugu,

$$\rho = \lambda E(S) < 1, \quad (2.2)$$

betzen bada.

Horrenbestez, ilara baten egonkortasunak bermatzen diguna da, sisteman dauden zerbitzarien kopurua ez dela mugagabe hazten; sistema zerbitzariak eskatutako lan gutzia egiteko edo kudeatzeko gai dela alegia.

Bestalde,  $\rho = \lambda E(S) \geq 1$  bada ilara infiniturantz doa,  $\rho = 1$  eta ilara eredu  $D/D/1$  den kasuan izan ezik. Zerbitzari bat baino gehiagoko ereduetan,  $G/G/c$ , egonkortasun baldintza  $\lambda E(S) < c$  da eta zerbitzari bakoitzeko okupazio-tasa, berriz,  $\rho = \lambda p_i E(S)/c$ ,  $p_i$  bezero bat  $i$ . zerbitzarira joateko probabilitatea izanik.

## 2.3 Little-en legea

Little-en\* legeak ilaran batez beste dauden bezero kopurua eta bezero bakoitzak ilaran pasako duen batez besteko denbora, bezeroaren egonaldi denbora, er-

---

\* *John D. C. Little*, Boston, 1928.

lazionatzen ditu.

Onar dezagun ilararen (sistemaren) kapazitatea nahikoa dela ilarako bezeroen lan kantitatetarako, hau da, sistema egonkorra dela. Defini ditzagun hurrengo zorizko aldagaiak:

$L_q(t) \equiv$  “ $t$  unean ilaran dauden bezero kopurua (zerbitzua jasotzen ari direnak kenduta).”

$L(t) \equiv$  “ $t$  unean sisteman dauden bezero kopurua (zerbitzua jasotzen ari direnak barne).”

$D_n \equiv$  “ $n$ . bezeroak ilaran pasatako denbora (zerbitzu denbora kenduta).”

$U_n \equiv$  “ $n$ . bezeroak sisteman pasatako denbora, egonaldi osoaren denbora (zerbitzu denbora barne).”

Suposa dezagun prozesu estokastiko bakoitza  $\{L_q(t)\}$ ,  $\{L(t)\}$ ,  $\{D_n\}$ ,  $\{U_n\}$  birsorgarria\* dela eta ziklo bakoitzaren luzeraren itxaropena finitua dela. Orduan,  $E(L_q)$ ,  $E(L)$ ,  $E(W_q)$  eta  $E(W)$  itxaropenak existitzen dira.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L_q(u) du = E(L_q) \quad (\text{ilaran batez beste dagoen bezero kopurua}) \quad (2.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t L(u) du = E(L) \quad (\text{sisteman batez beste dagoen bezero kopurua}) \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_k = E(W_q) \quad (\text{bezero bakoitzeko ilarako batez besteko atzerapena}) \quad (2.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k = E(W) \quad (\text{bezero bakoitzaren egonaldiaren batez bestekoa}) \quad (2.6)$$

---

\*Birsorgarria: berriztatu/birsortu egiten da. Berriztatze honen ondoren, prozesuak duen portaera, hasierako aldiunean prozesuak izan duen portaera probabilistikoki bera da.

Defini dezagun,

$$A(t) \equiv \text{“}t \text{ unean iritsitako bezero kopurua.”}$$

Jakintzat hartzen da,

$$P \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda \right) = 1, \quad \text{hau da,} \quad \frac{A(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{konb. ia ziur}} \lambda,$$

$\lambda$  konstanteak bezeroen batez besteko iritsiera-tasa adierazten du.  $\lambda$  limitea existitzen da, bezeroak Renewal\* prozesu baten arabera iristen badira.

Aurreko (2.3), (2.4), (2.5) eta (2.6) limiteen existentzia nahikoa da hurrengoa frogatzeko:

**Teorema 2.3.1** (Little-en legea). *Izan bitez  $\lambda > 0$  sistemara batez denbora unitateko batez beste iristen den bezero kopurua eta,  $E(L_q)$ ,  $E(W_q)$ ,  $E(L)$  eta  $E(W)$  aurretik definitu ditugun itzaropenak. Orduan,*

$$E(L_q) = \lambda E(W_q) \tag{2.7}$$

eta

$$E(L) = \lambda E(W). \tag{2.8}$$

Beraz,  $E(L)/E(W)$  irteera-tasa, sistematik irtengo den bezero kopurua denbora unitateko alegia, iritsiera-tasaren,  $\lambda$ -ren, berdina da.

Gehiago argitze aldera, demagun bezero bakoitzak 1 € ordaintzen duela ilaran daroan denbora unitate bakoitzeko. Alde batetik, euro hau denbora unitate bakoitzeko momentuan ordain dezake eta orduan, ilarak denbora unitate batean batez beste  $E(L)$  euro jasoko ditu, ilaran batez beste  $E(L)$  bezero daudenez gero. Beste alde batetik ikusita, bezero batek ilaratik irteteen ordain dezake ilaran igaro duen denbora. Ilara egonkorra denez, batez beste sistematik irteten den bezero kopurua eta batez beste sisteman sartzen den bezero kopurua berdinak dira. Ondorioz, sistemak batez beste  $\lambda E(W)$  euro jasoko ditu denbora unitateko. Bi eratara ere, sistemak diru kantitate bera jasotzen du.

## 2.4 PASTA propietatea

Poisson-en probabilitate banaketa jarraitzen duten bezeroen iritsiera prozesuek,  $M/\cdot/\cdot$  motako ilara sistemek, PASTA izeneko propietatea betetzen dute, Poisson Arrivals See Time Averages. Propietate honen arabera, une batean, A egoera batean, ilaran dauden bezeroen frakzioa eta sistema A

---

\*Poisson-en prozesuen orokorpena da. Prozesu estokastiko batean, denboraren mende jazotzen diren gertaeren kopurua zenbatzeaz arduratzen da.

egoeran egoteko denboraren frakzioa berdina dira, ikus [1, 5]. Hau da, egoera baten probabilitatea, ilaratik kanpoko behatzaile baten ikuspuntutik eta ilarara iritsi berria den bezero baten ikuspuntutik, probabilitate bera da. Ondorioz, ilarako edozein parametroren itxaropena Poissonen iritsierako une batean, parametro horren epe luzeko itxaropena da.

Esan beharra dago beste ilara orokor baterako propietate honek ez duela zertan egiazkoa izan. Esate baterako,  $D/D/1$  motako ilara sistema batean  $t = 0$  aldiunean hutsa dagoena, bezeroen iritsierak  $1, 3, 5, \dots$  unetan dituen eta bezero bat zerbitzateko unitate denbora bat beharko duen erudian, PASTA propietatea ez da betetzen. Izan ere, ilarara iristen den bezero orok ilara bera hutsa aurkituko du, bezerorik gabe, baina ilara hutsa dagoen denbora frakzioa  $1/2$  da.

Segidan, PASTA propietate hau eta Little-en legea erabiliz,  $E(W)$  eta  $E(L)$  kalkulatzeko bide bat ikusiko dugu. Beste bide honek, batez beste sisteman espero dugun bezero kopurua,  $E(L)$ , eta sisteman batez beste espero dugun egonaldi denbora,  $E(W)$ , lortzea ahalbidetuko digu, beraien probabilitate banaketak ezagutu gabe.

## 2.5 Batez besteko balioaren hurbilketa

Kontsidera dezagun  $M/G/1$  motako ilara sistema bat. Sisteman dagoen bezero kopuruak,  $L(t)$ -k, ez du Markov-en kate bat osatzen. Izan ere, denbora unitateko  $\{L = n\}$  egoeratik,  $\{L = n - 1\}$  egoerara igarotzeko probabilitatea (bezero baten irteera arte, adibidez), zerbitzuan dauden bezeroek zerbitzu horretan igaroko duten denboraren menpe dago baita ere. Informazio hau ez du  $L(t)$  zorizko aldagaiak biltzen. Zerbitzu denbora esponentziala deneko kasuetan soilik ez du eraginik ( $G$  hizkia  $M$  denean), bezero batek zerbitzuan igarotako denborak.

Dena dela,  $M/G/1$  motako ilaratan, ilararen batez besteko luzera, itxarote denbora eta egonaldi denbora aurki daitezke.

Lehenik eta behin, bezero bakoitzeko ilarako batez besteko atzerapena,  $E(W_q)$ , modu honetara idatz dezakegu:

$$E(W_q) = \underbrace{E(L_q)}_{\substack{\text{ilaran batez beste} \\ \text{dagoen bezero kopu-} \\ \text{rura}}} \cdot \underbrace{E(S)}_{\substack{\text{zerbitzu denboraren} \\ \text{itxaropena}}} + \underbrace{E(R)}_{\substack{\text{zerbitzuan dagoen} \\ \text{bukatu gabeko lana}}} \quad (2.9)$$

$R$ , prozesuko hondar denbora bezala izendatzen dugun zorizko aldagaia da. Zerbitzatua izaten ari den bezeroak, bere zerbitzua amaitzeko falta duen denbora horri deituko diogu *prozesuko hondar denbora*. Agerikoa denez,

zerbitzaria hutsa badago, orduan  $R = 0$  da.

Eta (2.9) adierazpenaren harira, badakigu ilarara iristen den bezero berri batek zenbat itxaron behar duen: zerbitzaturia izaten ari den bezero batek zerbitzua amaitzeko falta duen denbora beste eta bere aurretik dauden bezeroak ilaratik atera denbora beste.

Orain,  $E(W_q)$  kalkulatzeko behar-beharrezkoa zaigu bezero baten iriste u-nean ilaran batez beste dagoen bezero kopurua,  $E(L_q)$ , ezagutzea. PASTA propietatea dela eta (ilara  $M/G/1$  motakoa da), iritsi berria den bezeroak ikusten dituen banaketak, une arbitrario batean dauden banaketa berak dira.

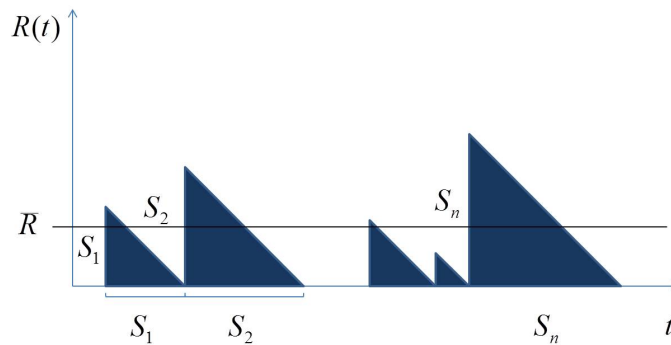
Bezeroen iritsiera-tasa  $\lambda$  bada, (2.9)-ri Little-en legea,  $E(L_q) = \lambda E(W_q)$ , aplikatuz eta bi adierazpenak uztartuz,

$$E(W_q) = \lambda E(W_q)E(S) + E(R).$$

Sistemaren okupazio-tasa  $\rho$  bada,  $\rho = \lambda E(S)$  dugu, eta

$$E(W_q) = \rho E(W_q) + E(R) \quad \implies \quad E(W_q) = \frac{E(R)}{1 - \rho}. \quad (2.10)$$

Prozesuko hondar denboraren itxaropenaren kalkulua era grafikoan arrazoituko dugu, ikus 2.1. irudia.



**2.1. irudia:** Zerbitzuan dagoen bukatu gabeko lanaren,  $R(t)$ -ren, eboluzioa denboran zehar.

Denbora tarte zabal bat hartuz, kurbaren batez besteko balioa, hirukiaren azaleraren batura denbora tartearen luzeraz zatituz lor daiteke.

- Hirukiak bereizita ager daitezke, ilara hutsa egon den tarteak adieraziz.

- Hiruki kopurua,  $n$ , iritsiera-tasaren,  $\lambda$ -ren, arabera da, batezbestekoa  $\lambda t$  izanik.

Beraz,

$$E(R) = \frac{1}{t} \int_0^t R(t') dt' = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2 = \frac{n}{t} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2.$$

$\downarrow$   
 $\lambda$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{2}E(S^2)}$

(2.10)-n ordeztuz,

$$E(W_q) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)}. \quad (2.11)$$

(2.11)-ri *Pollackzek-Khintchine formula* esaten zaio.

Hemendik, sistemako egonaldi denboraren itxaropena lortzen dugu:

$$E(W) = E(S) + E(W_q).$$

Kontuan hartuz,  $S$  aldagiaren aldakuntza-koefizientea karratura,  $C_v^2 = \frac{Var(S)}{E(S)^2}$  dela, eta

$$E(S^2) = Var(S) + E(S)^2 = (C_v^2 + 1)E(S)^2.$$

Batez besteko itxarote eta egonaldi denborak hurrengoak dira:

$$\begin{cases} E(W_q) = \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} = \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \cdot E(S), \\ E(W) = E(S) + \frac{\lambda E(S^2)}{2(1-\rho)} = \left(1 + \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho}{1-\rho}\right) \cdot E(S). \end{cases}$$

Batez besteko bezero kopurua hala ilaran nola sisteman:

$$\begin{cases} E(L_q) = \lambda E(W_q) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)} = \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}, \\ E(L) = \lambda E(W) = \lambda E(S) + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{1+C_v^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho}. \end{cases}$$

Ondorioz, batez besteko balio hauek, zerbitzu denboraren itxaropenaren,  $E(S)$ , eta bariantzaren,  $Var(S)$  menpe daude. Era berean,

- Batez besteko balio hauek  $Var(S)$ -rekin batera linealki hazten dira.
- $\rho$  okupazio-tasa handitu ahala,  $E(L_q)$  eta  $E(L)$  ez-linealki hazten dira.

- $E(W_q)$   $\rho$ -ren funtzioan deribatuz,  $E(W_q)$ -ren hazkundera,  $\rho$ -ren funtzioan,  $(1 - \rho)^{-2}$ -rekiko proportzionala dela ikus daiteke.

**Adibidea 2.5.1.**  $M/M/1$  motako ilara batean, zerbitzu denbora esponentziala da. Hortaz,

$$C_v^2 = \frac{\text{Var}(S)}{E(S)^2} = 1.$$

Orduan,

$$\begin{cases} E(L) &= \rho + \frac{\rho^2}{1 - \rho} &= \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ E(W) &= \left(1 + \frac{\rho}{1 - \rho}\right) \cdot E(S) &= \frac{1}{1 - \rho} \cdot E(S). \end{cases}$$

**Adibidea 2.5.2.**  $M/D/1$  motako ilara batean, zerbitzu denbora konstantea da. Hortaz,

$$\text{Var}(S) = 0 \quad \implies \quad C_v^2 = 0.$$

Orduan,

$$\begin{cases} E(L) &= \rho + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \\ E(W) &= \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{1 - \rho}\right) \cdot E(S). \end{cases}$$





### 3. kapitulua

## Ereduaren deskribapena

Demagun 3 motatako (klasetako) erabiltzaileak edo bezeroak ditugula: 0 klasea, 1 klasea eta 2 klasea. Halaber, eman dezagun bi zerbitzari (nodo) ditugula: 0 klaseak bi zerbitzarien (nodoen) zerbitzua behar du aldi berean eta 1 eta 2 klaseek, bakoitzak, zerbitzari (nodo) bakarrarena, 1 eta 2 zerbitzariena (nodoena), hurrenez hurren. Ikus bedi sarrerako 1. irudia.

Nodo bakoitzean dagoen bezero kopurua,  $L_i$  adieraziko dugu,  $i = 0, 1, 2$ . Nola edo hala, bi zerbitzariak bezero klase hauei esleitzen eta hau, modurik hoberenean egiten duen politika bilatzen, saiatu behar gara.

$i$  klaseko bezero bakoitza  $\lambda_i$  tasako Poisson-en prozesu baten arabera iritsiko da ilarara, hau da,  $i$  klaseko bezero bat iritsi denetik hurrengo  $i$  klaseko bezeroa iritsi arteko denborak banaketa esponentziala jarraituko du,  $i = 0, 1, 2$ . Bestetik, 0, 1 eta 2 klasetako bezeroek  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  eta  $\mu_2$  tasako irteera prozesua dute. Hemen,  $i$  klaseko bezero bakoitzak, ilaran igaroko duen denbora, esponentziala edo hiperresponentzial degeneratiboa izan daiteke, ikus (1.1). Hau da,  $i$  klaseko bezero bat, banaketa esponentzialeko denbora tarte baten ostean irten daiteke sistematik; edo,  $i$  klaseko bezeroek,  $\mu_i p$  tasako irteera prozesua izan dezakete eta orduan,  $i$  klaseko bezero bakoitza ilaratik irteteko denbora tarte, probabilitate banaketa hiperresponentzial degeneratiboari darraio.

Edozein  $t$  unetan, politika batek zerbitzarien kapazitatea klaseen artean nola banatu erabakitzen du. Zerbitzariak klaseei esleitzeko erabakia, bezeroak ilaran mantentzeak dakarren kostuaren araberrako izango da. Horrela,  $(c_0 L_0 + c_1 L_1 + c_2 L_2)$  aldagaia minimizatzea eta aldagai hau minimo egiten duen politika zehaztea izango dugu helburu. Beraz, *batez besteko kostuaren irizpidea* bezala ezagutzen den hurrengo adierazpenean ipini behar dugu arreta eta hau minimizatzen saiatu:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E \left( \int_0^m (c_0 L_0(t) + c_1 L_1(t) + c_2 L_2(t)) dt \right). \quad (3.1)$$

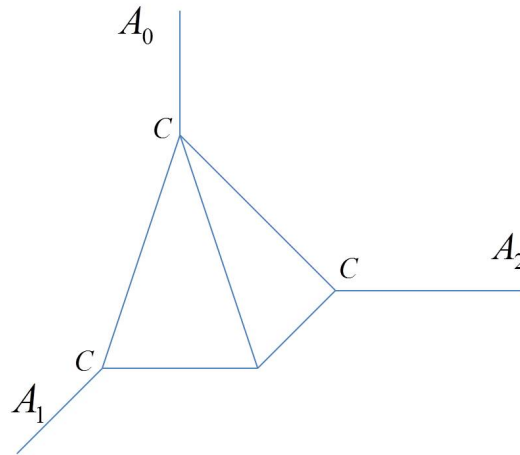
Non  $c_i$ ,  $i$  klaseari dagokion kostua den,  $i = 0, 1, 2$  guztietarako.

Bestetik, Little-en legea erabiliz, batez besteko bezero kopurua minimizatzea, batez besteko egonaldi denbora minimizatzearen baliokidea dela esan dezakegu.

### 3.1 Zerbitzarien kapazitatea

Zerbitzari bakoitzean klase ezberdinen arteko interakzioa dagoela eta, kapazitatearen erabilpen ez eraginkor bat gerta daiteke. Esaterako, 0 klasea zerbitzatu izaten ari denean, honek bi zerbitzarien kapazitatea eskatzen du aldi berean, eta suerta liteke zerbitzari baten kapazitatea dagoeneko xahututa egotea eta bestearena ez. Orduan, azken zerbitzari honen kapazitatea ez dugu erabat aprobetxatzen.

0 klaseko bezeroak zerbitzari guztietako kapazitate kopuru bera behar du aldi berean. 1 eta 2 klaseko bezeroek, berriz, 1 eta 2 zerbitzarietako zerbitzua behar dute soilik. Horrela, adieraz dezagun  $i$  zerbitzariko kapazitatea (finitua),  $C_i$ ,  $i = 1, 2$ . Eta har dezagun,  $C_1 = C_2 = C$  dela. Ikus 3.1. irudia.



**3.1. irudia:** Bi nodoko ilara lineal baten kapazitatearen eskualdea.

Ilara sare lineal hau matrize honen bidez adieraz dezakegu:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad j \text{ klasea } i \text{ nodoa erabiltzen ari bada,} \\ 0 & , \quad j \text{ klasea ez bada } i \text{ nodoa erabiltzen ari.} \end{cases}$$

Ondorioz,  $a_j$ ,  $j$  erabiltzaileari egokitzen zaion kapazitate-tasa bada, orduan  $a_0 + a_i \leq C_i$ ,  $i = 1, 2$ -rako.

Bestalde,  $j$  zerbitzarian erabiltzen den kapazitate totala  $\sum_{j=1}^3 B_{ij}a_j$  da eta zerbitzari bateko zerbitzua bideragarria izango da, baldin eta

$$\sum_{j=1}^3 B_{ij}a_j \leq C_j, \quad i = 1, 2 \text{ nodo guztietarako.}$$

### 3.2 Egonkortasun baldintzak

Bestetik, sare baten egonkortasun baldintzak honakoak dira, ikus [6]:

$$\sum_{j=1}^3 B_{ij}\rho_j < C, \quad i = 1, 2 \text{ guztietarako.}$$

Hau da, nodo bakoitzera doan lan kargak, nodo horrek eskura duen kapazitatea baino hertsiki txikiagoa izan behar du. Orokorrean, politika zehatz bati dagozkion egonkortasun baldintzak, lehen aipatutakoak baino zorrotzagoak izan daitezke. Bereziki, kapazitatea 1-ekoa duten zerbitzarien sare lineal batean,  $C = 1$ , 0 klaseko bezeroei lehenasuna ematen dien politika egonkorra da,  $\rho_0 + \rho_i < 1$  betezen bada,  $i = 1, 2$  guztietarako, ikus [6, 3. kapitulua, 56. or].

### 3.3 Trantsizio-tasak

Ilara eredu honetako  $\vec{L} = (L_0(t), L_1(t), L_2(t))$  prozesu estokastikoak Markov-en propietatea betezen du, ikus 1.3.2 definizioa. Izan ere aldagai hauen balioa  $t_n$  unean, beraien  $t_n - t_{n-1}$  uneko balioaren menpekota da,  $t_{n-1} < t_n$  izanik. Gainera, trantsizioen arteko denborek banaketa esponontziala jarraitzen dute. Beraz, denbora jarraituan dagoen Markov-en kate bat da.

Horrela, denbora tarte infinitesimal bat hartuz,  $(t, t + dt)$ , Markov-en kate jarraitu honetako trantsizio-tasak kontsidera ditzakegu. Izan bedi  $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2)$ ,  $(L_0, L_1, L_2)$  aldagaiaren balioa  $t$  une batean eta  $\vec{y} = (y_0, y_1, y_2)$ , zorizko bektoreak har dezaken beste egoera posible bat. Defini dezagun  $q(\vec{x}, \vec{a}, \vec{y})$  trantsizio-tasa. Orduan  $q(\vec{x}, \vec{a}, \vec{y})dt$ -k,  $(t, t + dt)$

denbora tarte infinitesimal horretan  $\vec{a}$  ekintza hartuta,  $\vec{x}$  egoeratik  $\vec{y}$  egoerara igarotzeko probabilitatea ematen digu. Beraz,

$$q(\vec{x}, \vec{a}, \vec{y}) = \begin{cases} \lambda_i, & \vec{y} = \vec{x} + e_i, \quad i = 0, 1, 2 \\ \mu_0 \cdot a_0, & \vec{y} = \vec{x} - e_0, \\ \mu_1 \cdot a_1, & \vec{y} = \vec{x} - e_1, \\ \mu_2 \cdot a_2, & \vec{y} = \vec{x} - e_2. \end{cases}$$

non  $q(\vec{x}, \vec{a}, \vec{x}) = 1 - \sum_{\vec{x} \neq \vec{y}} q(\vec{x}, \vec{a}, \vec{y})$  hartzten den eta  $e_0 = (1, 0, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 0, 1)$  unitate bektoreak diren.

0 1 edo 2 klaseko bezero bakoitza ilaratik irteteko denbora tarteak probabilitate banaketa hiperresponentzial degeneratiboa jarraitzen badu,  $\mu_i = p\tilde{\mu}_i$  da,  $i = 0, 1, 2$ , non  $\tilde{\mu}_i$  banaketa hiperresponentzial degeneratiboaren parametroa den.

Laburbilduz, planteatzen dugun problema hurrengoa da:

$$\begin{aligned} \min_{\vec{a}} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E_{\vec{a}} \left( \int_0^m (c_0 L_0(t) + c_1 L_1(t) + c_2 L_2(t)) dt \right) \\ \text{eta } \sum_{j=1}^3 B_{ij} a_j \leq 1, \quad i = 1, 2 \text{ nodo guztietarako.} \end{aligned} \quad (3.2)$$

## 4. kapitulua

# Optimizazio estokastikoa

Zenbakizko emaitzak lortzeko, Bellman-en\* printzipio optimoetan oinarritzen den programazio dinamikoko teknikak erabili ditugu [6]. Honen berri ematen da kapitulu honetan, baita egingo ditugun hurbilketen berri ere. Horretarako, Markov-en Erabaki Prozesuak hartu ditugu kontuan.

Markov-en Erabaki Prozesuek hurrengoa deskribatzen digute labur-labur:  $t = 0, 1, \dots$  denbora unetan (denbora puntu ekidistanteak), erabaki hartzaileak sistemaren egoera aztertzen du,  $x$ -z adierazten dena, eta  $a$  ekintza bat aukeratzen du,  $\mathcal{A}(x)$  ekintzen espaziotik. Hurrengo erabaki unean, sistemaren egoera,  $y$ -z adierazten dena,  $p(x, a, y)$  trantsizio-probabilitateen bidez deskribatzen da. Trantsizio-probabilitate hauek hurrengo  $y$  egoeraren eta aukeratzen den  $a$  ekintzaren menpe daude. Gainera,  $x$  egoera bisitatzen den bakoitzean  $C(x)$  kostu bat dago. Beraz, Markov-en erabaki katea,  $\{X_t, A_t\}_t$  adieraz dezakegu, non  $X_t$  eta  $A_t$ -k  $t$  uneko egoera eta ekintza azaltzen dituzten, hurrenez hurren.

Helburua epe luzerako batez besteko kostuaren (bezero kopuruaren) itxaropena minimizatzea da, hau da, (3.1) minimizatzea. Hau egiten hasi aurretik, hurrengo arazoa azaleratzen zaigu.

Planteatzen ari garen ereduari, denbora jarraitua da eta egoeren espazioa, berriz, diskretua. Horrelako eredu batekin matematikoki lan egin badaiteke ere, konputazionalki ez da zeregin erraza beronekin tratatzea. Horregatik, hurrengo teknika erabiltzen dugu: erabakiak trantsizio denboratan hartzen direla suposatuko dugu. Orduan, trantsizioen arteko denborek banaketa esponontziala jarraitzen dutenez, denbora jarraian dagoen MEP (Markov-en Erabaki Prozesu) bat da. Honi Uniformizazio teknika aplikatuz gero, denbora diskretuan dagoen MEP baliokide bat lortuko dugu. [7] liburuan oinarritu gara.

---

\* *Richard E. Bellman*, New York, 1920-1984.

## 4.1 Uniformizazioa

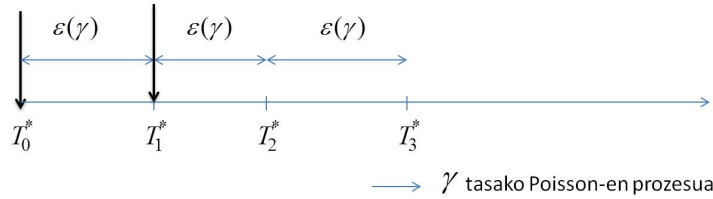
Demagun Markov-en kate jarraitu bat dugula eta trantsizio-tasa  $\mu_{ij}$  dela edozein trantsizio posibletarako.  $i$  egoera bateko egonaldi denborak,  $\mu(i) = \sum_{j \neq i} \mu_{ij}$  tasako banaketa esponentziala bada, hau da,  $E(T_i) = \frac{1}{\mu(i)}$  bada, orduan,  $\gamma$  uniformizazio-tasa egoki bat hartuz,

$$\gamma \geq \max\{\mu(i)\}.$$

Markov-en kate uniforme bat dugu non trantsizioak,  $\gamma$  tasako Poisson-en prozesu batek sortutako unetan soilik gertatzen diren eta trantsizio-probabilitateak hurrengoak diren:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \frac{\mu_{ij}}{\gamma}, \\ p_{ii} &= 1 - \frac{\mu(i)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Uniformizazio honen ondoren, erabaki denborak diskretuak dituen  $T_1^*, T_2^*, \dots$  segida bat eraiki da non  $T_{k-1}^* - T_k^* = \varepsilon(\gamma)$  den, ikus 4.1. irudia.



**4.1. irudia:** Uniformizazio metodoaren irudi grafikoa.  $\gamma$  parametro egokia hartuz,  $\gamma$  tasako Poisson-en prozesua eraikitzen da.

## 4.2 Iritsiera eta irteera-tasak. Trantsizio-probabilitateak

Gure kasuan, uniformizazioko  $\gamma$  parametroak hurrengoak bete beharko du:

$$\gamma \geq \sum_{i=1}^3 \lambda_i + \sum_{i=1}^2 \mu_i + \mu_0 p.$$

Modu honetan, hurrengo trantsizio-probabilitateak definitzen ditugu,

$$p(\vec{x}, a, \vec{y}) = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\gamma}, & \vec{y} = \vec{x} + e_i \text{ bada, } i = 0, 1, 2 \\ \frac{\mu_0(1-a)}{\gamma}, & \vec{y} = \vec{x} - e_0 \text{ bada,} \\ \frac{\mu_1 a}{\gamma}, & \vec{y} = \vec{x} - e_1 \text{ bada,} \\ \frac{\mu_2 a}{\gamma}, & \vec{y} = \vec{x} - e_2 \text{ bada,} \\ 1 - \frac{1}{\gamma}(\mu_0(1-a) + \mu_1 a + \mu_2 a), & \vec{y} = \vec{x} \text{ bada.} \end{cases}$$

Trantsizio-probabilitate hauetan azaltzen den  $a$ , ekintzen espaziotik aukeratzeko da. Ekintzen espazioa,  $\mathcal{A}(x) = \{0, 1\}$  (3.1. irudiko mugetako puntuak\*) izango da eta  $a \in \mathcal{A}(x)$ . Hortaz,  $a = 0$  ekintza aukeratzeko dugunean, zerbitzua 0 klaseari ematen diogula esan nahi da eta  $a = 1$  aukeratzeko, berriz, 1 eta 2 klaseei. Horrela, (3.1) minimizatzen duen politika, optimoa den politika, denboran zehar aukeratzeko diren ekintzen multzo bat izango da. Orduan,  $t$  unean  $a_t$  ekintza aukeratzeko bada, ondorengo  $\pi$  ekintzen multzoak erabili den politika zehazten du:  $\pi = \{a_0, a_1, \dots, a_t, \dots\}$ .

### 4.3 Value Iteration algoritmoa

Bellman-en optimotasunerako printzipioetan oinarrituz, politika optimo bat existitzeko baldintza nahikoak lor daitezke [6]. Politika optimo bat bermatu daitekeen baldintza horietan, baldin eta  $(g, V(\cdot))$  batez besteko kostuaren ekuazioaren soluzioa bada,

$$g + V(\vec{x}) = C(\vec{x}) + \min_{a \in A(\vec{x})} \sum_{\vec{y}} p(\vec{x}, a, \vec{y}) V(\vec{y}), \quad \vec{x} \text{ egoera guztietarako.} \quad (4.1)$$

orduan  $g$  batez besteko kostu minimoaren berdina da eta (4.1) minimoa egiten duen politika optimoa egon badago.  $V(\cdot)$  funtzioari, *Balio Funtzio* esaten zaio. Hau da hurrengo teoreman esaten dena, [8]:

**Teorema 4.3.1.**  $V(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \geq \vec{0}$ , funtzio bornatu bat existitzen bada eta  $g$  konstante bat halakoak non

$$g + V(\vec{x}) = \min_{a \in \{0,1\}} \left\{ c_0 L_0 + c_1 L_1 + c_2 L_2 + \sum_{\vec{y}} p(\vec{x}, a, \vec{y}) V(\vec{y}) \right\}, \quad \vec{x} \geq \vec{0}. \quad (4.2)$$

orduan  $\pi^*$  politika existitzen da non ondorengo betetzen duen

$$\begin{aligned} g &= \min_{\pi} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E_{\pi} \left( \int_0^m (c_0 L_0(t) + c_1 L_1(t) + c_2 L_2(t)) dt \right) = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E_{\pi^*} \left( \int_0^m (c_0 L_0(t) + c_1 L_1(t) + c_2 L_2(t)) dt \right). \end{aligned}$$

$\pi^*$  politika,  $\vec{x}$  bakoitzerako (4.2) ekuazioaren eskuinaldea minimizatzen duen ekintza aukeratzeko duen politika bat da.

---

\*a frakzio bat izatea ez dugu kontsideratu.

Hortaz,  $(g, V(\cdot))$  bilatzeko hurrengo algoritmoa erabili dugu, *Value Iteration* izenaz ezaguna dena,

$$\begin{cases} V_0(\vec{x}) = \vec{0}, \\ V_{m+1}(\vec{x}) = C(\vec{x}) + \min_{a \in A(\vec{x})} \left\{ \sum_y p(\vec{x}, a, \vec{y}) V_m(\vec{y}) \right\}, \quad m = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.3)$$

non  $C(\vec{x}) = c_0 L_{0,\vec{x}}(t) + c_1 L_{1,\vec{x}}(t) + c_2 L_{2,\vec{x}}(t)$  kostua den.

Argi ikus daiteke, algoritmo hau hasiera batean, errekurtsibitatea erabiliz implementa daitekeela. Hala ere, algoritmo iteratibo moduan tratatzea eraginkorragoa da.

Azken batean, hurrengo pausuak jarraitzen ditu algoritmoak:

*0 pausua (hasieratzea).* Aukeratu

$$V_0(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \text{ egoera guztietarako.}$$

*1 pausua.*  $x$  egoera bakoitzerako definitu

$$V_m(\vec{x}) = C(\vec{x}) + \min_{a \in A(\vec{x})} \left\{ \sum_{\vec{y}} p(\vec{x}, a, \vec{y}) V_{m-1}(\vec{y}) \right\}.$$

*2 pausua.*  $\max_{\vec{x}}(V_m(\vec{x}) - V_{m-1}(\vec{x}))$ -ren eta  $\min_{\vec{x}}(V_m(\vec{x}) - V_{m-1}(\vec{x}))$ -ren arteko diferentzia guk nahi bezain txikia izan arte, joan *1 pausura*.

*3 pausua.*

$$\text{politika}(m) = \arg \min_{a \in A(\vec{x})} \left\{ \sum_{\vec{y}} p(\vec{x}, a, \vec{y}) V_{m-1}(\vec{y}) \right\}.$$

Baldintza batzuen menpean [1], algoritmoak lehen esandako balioetara konbergitzen du, hau da,  $m \rightarrow \infty$  doanean,

$$V_m(\cdot) - mg \rightarrow V(\cdot) \quad \text{eta} \quad V_{m+1}(\cdot) - V_m(\cdot) \rightarrow g.$$

Azken kapituluan, Verloop-en (2009) tesian agertzen diren emaitza batzuetan oinarritu gara eta ondoren, gure kasuan zer pasatzen den aztertu dugu eszenario desberdinen bidez, [6].

Beraz, [6, 4.kapitulua]-ren arabera, 1. irudia bezalako sare bat badugu, 0, 1 eta 2 klasetako bezeroak  $\lambda_i$  tasako Poisson-en prozesu baten arabera iristen badira eta bakoitzak zerbitzatua izaten igaroko duen denborak,  $1/\mu_i$  itxaropeneko banaketa esponentziala jarraitzen badu,  $i = 0, 1, 2$  izanik, orduan bi politika mota definitzen ditugu:



- $\Pi^*$ :  $\pi^* \in \Pi^*$ ,  $\pi^*$ -k 0 klaseari ematen dio lehentasuna, 0 klaseko bezero bat gutxienez dagoen aldiro. Bestela, 1 eta 2 klasetako bezeroei ematen zaie zerbitzua aldi berean.
- $\Pi^{**}$ :  $\pi^{**} \in \Pi^{**}$ ,  $\pi^{**}$ -k 1 eta 2 klaseei ematen die zerbitzua aldi berean, klase bakoitzeko bezero bat baldin badago sisteman gutxienez. Bestela, 0 klasea zerbitzatzten da. 0 klasea hutsa dagoenean, beste edozein klaseari ematen zaio zerbitzua, klase horretan bezero bat baldin badago bederen.

$\Pi^*$  eta  $\Pi^{**}$  politikek ziurtatzen digute bi zerbitzariak beraien kapazitate totalan egiten dutela lan, betiere hutsik ez badaude. Gainera,  $\rho_0 + \rho_1 < 1$  eta  $\rho_0 + \rho_2 < 1$  baldintzen menpean, bi politikek sistema egonkor bat lor dezakete.

Verloop-en (2009) lanean batez besteko kostua minimizatzen duten ondorengo bi emaitzak frogatzen dira, [6]:

**Proposizioa 4.3.2.** *Izan bitez  $\Pi$  politika guztiak barne hartzen dituen familia,  $\pi \in \Pi$  eta  $\pi^* \in \Pi^*$ , eta kontsideratu zerbitzu-denborak banaketa esponentziala jarraitzen duela.*

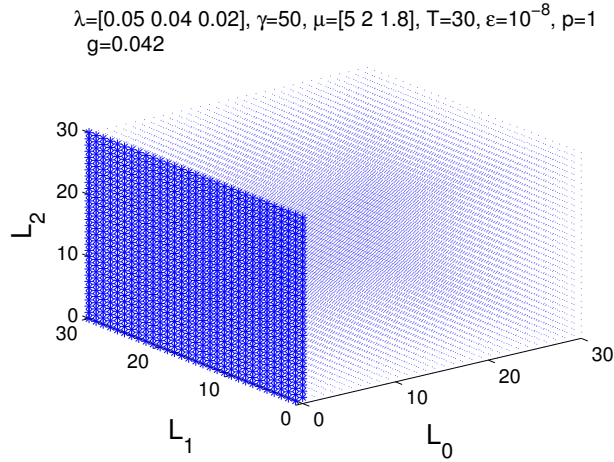
(i) *Baldin eta  $c_1\mu_1 + c_2\mu_2 \leq c_0\mu_0$  bada, orduan*

$$E \left( \sum_{j=0}^2 c_j L_j^{\pi^*}(t) \right) \leq E \left( \sum_{j=0}^2 c_j L_j^{\pi}(t) \right) \text{ da, } t \geq 0 \text{ guztietarako.}$$

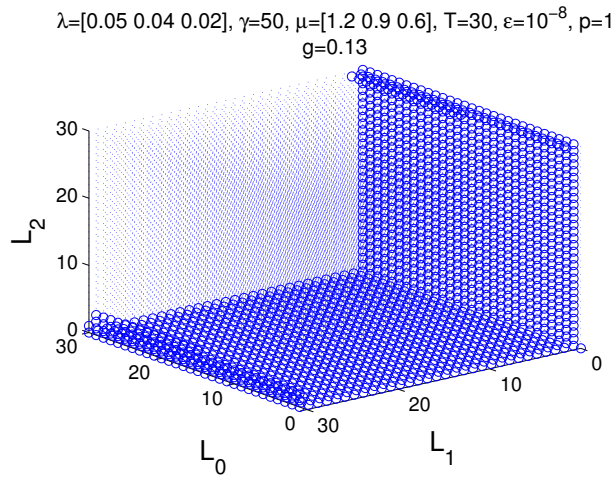
(ii) *Baldin eta,  $c_0\mu_0 \leq c_1\mu_1 + c_2\mu_2$  eta  $c_1\mu_1 \leq c_0\mu_0$ ,  $c_2\mu_2 \leq c_0\mu_0$  bada, orduan  $E \left( \sum_{j=0}^2 c_j L_j^{\pi^{**}}(t) \right) \leq E \left( \sum_{j=0}^2 c_j L_j^{\pi}(t) \right)$  da,  $t \geq 0$  guztietarako.*

Gure kasuan, banaketa hiperresponenzialean  $p = 1$  hartuko bagenu, proposizioko kasuetan geundeke. Beraz, hasiera batean programa ondo dabilela ziurtatzeko proposizioko bi kasuak aztertu ditugu.

Programak bi balio itzultzen ditu (bi *output* ditu): batetik, *politika* izeneko matrize handi bat,  $(T+1) \times (T+1) \times (T+1)$  tamainakoa 0 eta 1-ez osatua,  $T$  espazioaren mozketak izanik. Bestetik, *em* izeneko 2 tamainako bektore bat,  $V$  funtzioek konbergituko duten  $g$  balioa ematen duena. Ikus A eranskina.



**4.2. irudia:** *politika*-ren irudikapena  $\mu_1 + \mu_2 < \mu_0$  denean. Izarrak zerbitzua 1 eta 2 klaseei, aldi berean, ematen zaiela esan nahi du.



**4.3. irudia:** *politika*-ren irudikapena  $\mu_1 < \mu_0$ ,  $\mu_2 < \mu_0$  eta  $\mu_1 + \mu_2 > \mu_0$ . Borobilak zerbitzua 0 klaseari ematen zaiola esan nahi du.

Hau ikusita, lan honen helburuetako bat zein politika den optimoa aztertzea izan da, klasetako batek banaketa hiperresponentzial degeneratiboa denean. Izan ere, banaketa hiperresponentzial degeneratiboaren itzaropena esponentzialaren berdina da baina, aldakuntza-koefizientea ez. Beraz,  $p$  probabilitatearen balioa aldatzeak zer eragin duen ikertuko dugu hurrengo kapituluan.

## 5. kapitulua

# Emaitzak, adibideak eta interpretazioa

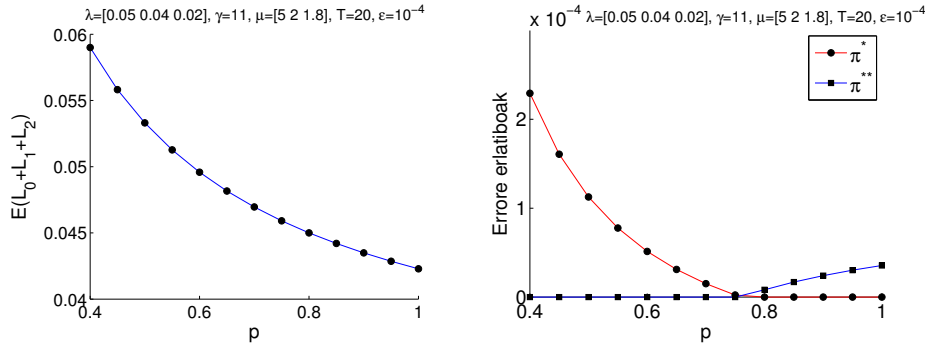
Azken kapitulu honetan, gure ereduaren simulazioa eszenario desberdinen bidez aztertu dugu. Zenbakizko emaitza hauek lortzeko baina, ordenagailu baten laguntza behar dugu. Horregatik, eredu honetako egoeren espazioa infinitua denez, azterketa guztietan egoeren espazioa moztu (*trunkatu*) egin dugu eta ondoren, Value Iteration algoritmoa aplikatu dugu. Gainera, klase bakoitzari dagokion kostua  $c_0 = c_1 = c_2 = 1$  dela hartu dugu eta beraz,  $(L_0 + L_1 + L_2)$  aldagaia minimizatu dugu.

Guztira, lau eszenario hartu ditugu kontuan. Eszenario bakoitzean  $p$  banaketa hiperresponentzialeko probabilitatearen balioak aldatzean pasatzen dena ikusi nahi izan dugu. Horretarako, 4.3.2 proposizioa ataletako batean oinarritu gara eta gure kasuan ateratako emaitzak interpretatu ditugu. Hona labur-labur aintzat hartu ditugun eszenarioak:

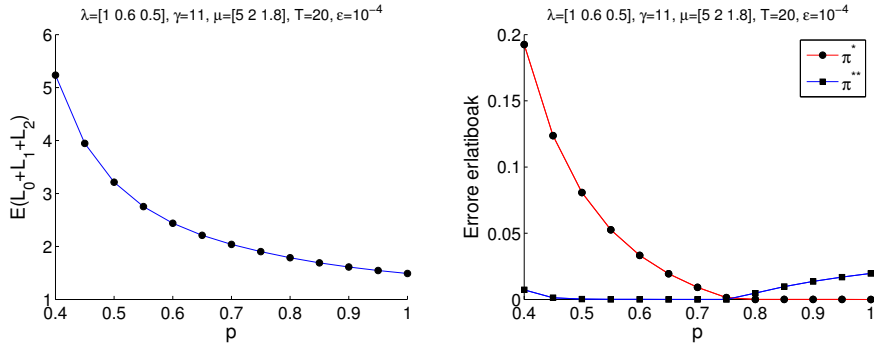
	0 klasea	1 klasea	2 klasea	4.3.2 proposizioa ( $p = 1$ )
1. eszenarioa	$h\varepsilon(\mu_0p)$	$\varepsilon(\mu_1)$	$\varepsilon(\mu_2)$	(i)
2. eszenarioa	$h\varepsilon(\mu_0p)$	$\varepsilon(\mu_1)$	$\varepsilon(\mu_2)$	(ii)
3. eszenarioa	$\varepsilon(\mu_0)$	$h\varepsilon(\mu_1p)$	$\varepsilon(\mu_2)$	(i)
4. eszenarioa	$\varepsilon(\mu_0)$	$h\varepsilon(\mu_1p)$	$\varepsilon(\mu_2)$	(ii)

### 1. eszenarioa:

Grafiko hauetatik hainbat ondorio atera ditzakegu. Lehenik eta behin, batez besteko kostu (bezero kopuru) minimoak agertzen diren 5.1. 5.2. 5.3. eta 5.4. irudietako ezkerreko grafikoei erreparaturaz, orokorki esan dezakeguna da  $p$  probabilitatearen balioa txikitu ahala,  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  itzaropena handitu egiten dela. Hazkuntza hau ordea, lau grafikoetan ez da berdina. Eta gainera, 5.1. nahiz 5.2. grafikoei,  $\rho_0 + \rho_i \leq 0.5$  betetzen dutenek,  $i = 1, 2$ ,



5.1. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.03$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.0212$ .

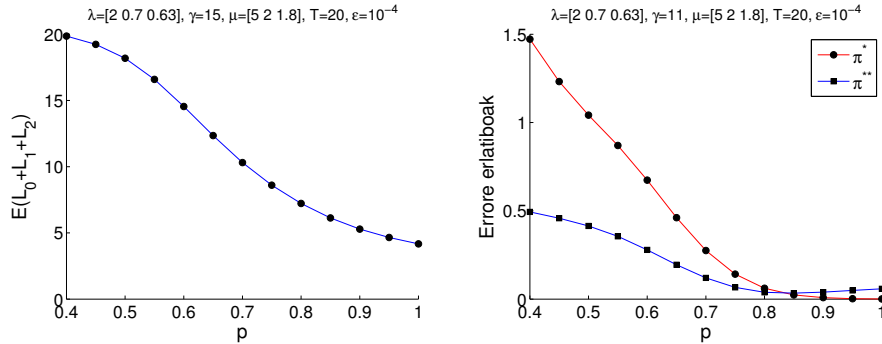


5.2. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.5$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.477$ .

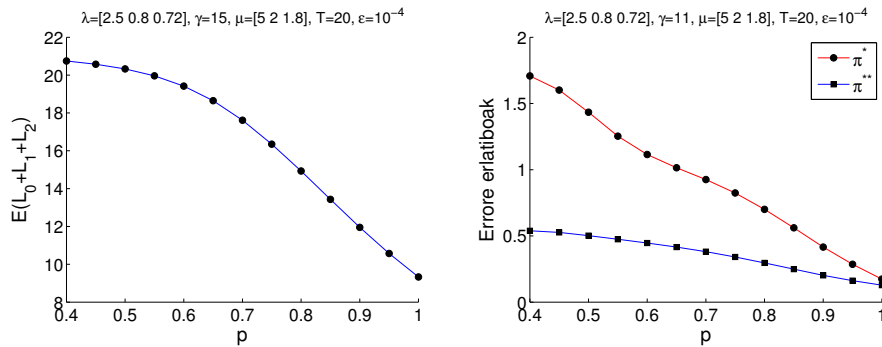
forma ahurra duten bezala, 5.3. eta 5.4. grafikoek forma ganbila dute. Ohar gaitzen  $p$  probabilitatearen balio txikiekin hauxe dugula: alde batetik, oso oso lan gutxi eskatzen duten bezero asko ditugu, azkar zerbitzatuak izango direnak eta beste alde batetik, gutxi batzuk izango ditugu zerbitzuan denbora asko igaro beharko dutenak, beraien zerbitzu denbora  $\frac{1}{\mu_0 p}$  itxaropeneko banaketa esponentziala izango delako. Hortaz, bezero gutxi horiek ez dute baimentzen  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  hain txikia egiten.

Bestalde,  $\rho_0 + \rho_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ , egonkortasun baldintza 1-etik zenbat eta hurbilago egon, orduan eta handiago da ilaran epe luzera espero den batez besteko bezero kopurua. Nahikoa da esaterako, 5.1. eta 5.4. irudiko ordenatu ardatzei begiratzea bien arteko aldea ikusteko. Honen arrazoietakoa bat, bigarren kapituluan aitatutako (2.11) formula da, nolabait  $\rho$  eta  $S$  (zerbitzu-denbora) aldagaiarekin lotuta dagoena. Horrela,  $\lambda$  parametroa aldatu eta handitu dugun neurrian,  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  ere handitu egin da.

Orain, errore erlatiboek grafikoetatik, 5.1. 5.2. 5.3. eta 5.4. irudietako es-



5.3. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.75$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.75$ .



5.4. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.9$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.9$ .

kuineko grafikoetaik, beste ondorioztatze hauek egin ditzakegu. Lehenik eta behin, guk hartutako parametroekin Verloop-en (2009) tesiko emaitza berresuak lortu ditugula esan dezakegu [6].

Banaketa hiperresponentzialeko  $p$  probabilitatea aldatzean

$$\tilde{\mu}_0 p > \mu_1 + \mu_2$$

ezberdintza ere aldatu egiten da. Beraz, hasiera batean,  $p = 1$  denean (eskuinetik ezkerreara begiratuta),  $\tilde{\mu}_0 p > \mu_1 + \mu_2$  bete egiten da eta 5.1. eta 5.2. irudietako grafikoei erreparatuz ikus dezakegu  $\pi^*$  politika (marra gorria), politika optimoa izatetik oso oso gertu dagoela.  $\pi^{**}$  politikak, berriz,  $p$ -ren balio handietan,  $p \gtrsim 0.76$ , errore erlatibo handiagoak ditu. Bestetik, aipatu ezberdintza  $p = 0.76$  denean aldatu egiten da, guk hartu ditugun parametroak kontuan hartuz. Hortik aurrera, 5.1. eta 5.2. irudietan ikus daiteke bi marra elkar gurutzatu eta  $\pi^{**}$  politikaren errore erlatiboak 0-rantz jotzen hasten direla, hau da, politika optimotik oso oso hurbil egoten.  $\pi^*$  politika, berriz, gurutzaketa horretatik aurrera, nabarmen urruntzen da

politika optimotik.

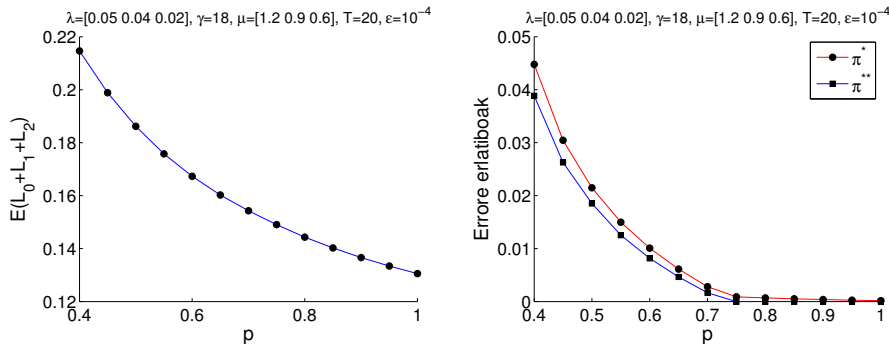
Beraz, 5.1. eta 5.2. irudietako grafikoak kontuan hartuz,  $\rho_0 + \rho_i \lesssim 0.5$ ,  $i = 1, 2$ , eta  $p \gtrsim 0.76$  denean, 0 klaseko bezeroren bat dagoen bitartean, hauei zerbitzua ematea hobea dela esan dezakegu, kontsideratutako  $\lambda$  eta  $\mu$  parametroen kasuan.  $p$  gutxi gorabehera 0.76 baino txikiagoa bada, aldiz, 1 eta 2 klaseei zerbitzua ematea da onena, bi klase hauetako bakoitzean bezero bat gutxienez baldin badago.

Bestalde, azken bi grafikoetan, 5.3. eta 5.4. irudikoetan, emaitzak ezberdigoak direla ikus dezakegu eta hemen gogoan izan behar dugu  $\rho_0 + \rho_i < 1$  egonkortasun baldintzak,  $i = 1, 2$ , 1-etik gertuago daudela. 5.3. irudiko grafikoan bi politiken arteko gurutzaketa ikus daiteke baina,  $p = 0.76$  balitotik aldenduago,  $p \approx 0.84$ -ean gutxi gorabehra. Gurutzaketa horretatik aurrera, nahiz eta  $\pi^{**}$  optimotik hurbilago egon, errore erlatiboak ez dira txikiak. Beraz, algoritmoak bilatutako politika optimoak seguraski kasu gehienetan 1 eta 2 klaseei emango die lehentasuna, bi hauetako bezeroak daudenean, baina egongo dira kasuak ere 0-ri ematen diona zerbitzua, 1 eta 2 klaseko bezeroen gainera.

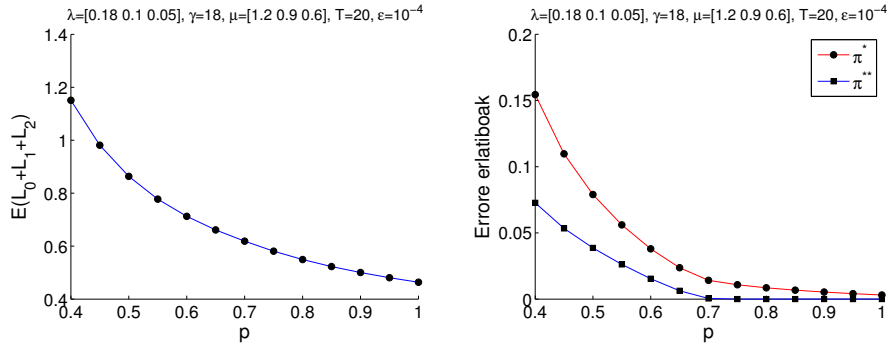
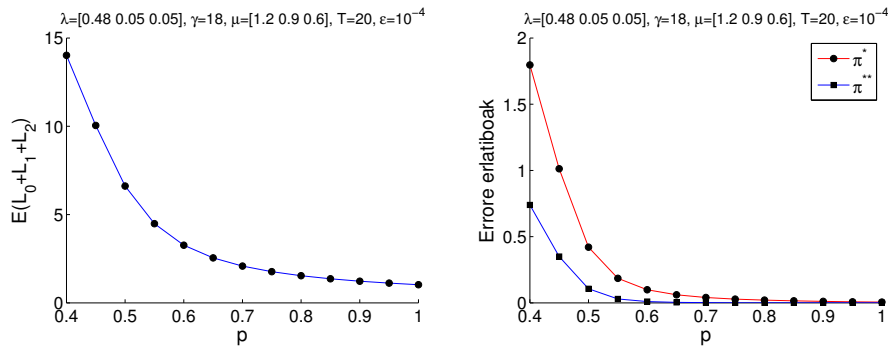
Azkenik, 5.4. irudiko grafikoan algoritmoak bilatu duen politika optimoa zein den zehaztea ez da erraza.  $\rho_0 + \rho_i = 0.9$ ,  $i = 1, 2$ , nahiko altua da eta algoritmoa berari ere konbergitzea gehiago kostatzen zaio.  $\varepsilon = 10^{-4}$ -ko zehaztasunarekin, esan dezakegu politika optimoak  $\pi^{**}$  politikaren antza gehiago izango duela  $\pi^*$  politikarena baino.

## 2. eszenarioa:

Oraingoa 4.3.2 proposizioiko (ii) atala kontuan hartuz,  $p = 1$  deneko kasurako,

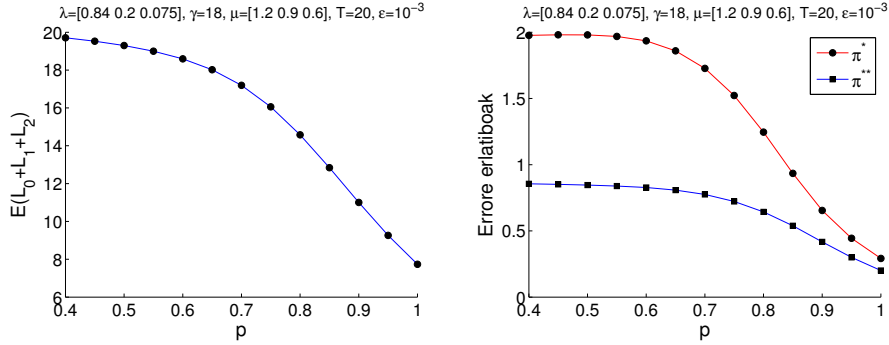


5.5. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.0816$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.0816$ .

5.6. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.25$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.25$ .5.7. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.45$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.5$ .

5.5. 5.6. 5.7. eta 5.8. irudietako ezkerreko lau grafikoei dagokienean, guzti-etan funtzioaren malda gorakorra dela ikus dezakegu (eskuinetik ezkerreara begiratuta). Hau da, orokorki gero eta  $p$  probabilitatearen balio txikiagoak izan, gero eta  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  handiagoa izango dugula. Hemen (2.11)-k eragina du berri ere.  $p$  probabilitatea zenbat eta txikiagoa izan orduan eta handiagoa izango baita  $\frac{2-p}{\mu_0^2 p} = Var(S)$  eta ondorioz, orduan eta handiagoa izango da  $E(L_0 + L_1 + L_2)$ . Honetaz gain,  $\rho_0 + \rho_i$  baturak,  $i = 1, 2$ , balio handiagoak hartu ahala, epe luzerako batez besteko bezero kopurua handitu egiten da. Izan ere beste behin, (2.11)-ren arabera,  $\rho$  okupazio-tasa handitzearekin bat,  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  ere ez-linealki handitzen da.

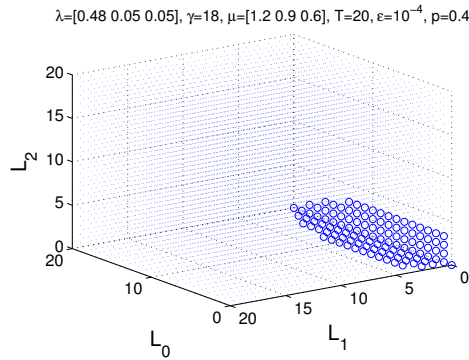
Bestetik, 5.5. 5.6. 5.7. eta 5.8. irudietako eskuineko lau grafikoei dagokieenez,  $p = 1$  denean,  $\pi^{**}$  politikak zein  $\pi^*$  politikak, biek ala biek, oso errore erlatibo txikiak dituzte. Alabaina, errore erlatibo hau handiagoa da  $\rho_0 + \rho_i$  batura,  $i = 1, 2$ , handiagoa den heinean. Gainera, lau grafikoetan ikus daiteke irudia behar adina handituz,  $\pi^{**}$  politikaren errore erlatiboa txikiagoa dela.



**5.8. irudia:**  $\rho_0 + \rho_1 = 0.9$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.85$ .

Aurreko eszenarioarekin alderatuz, hemen ez dugu bi politiken arteko guttzaketarik. Hau da,  $\pi^{**}$  politika beste politikaren azpitik mantentzen da  $p$  probabilitatearen balio guztietan eta lau grafikoetan;  $\pi^{**}$  politika, politika optimotik hurbilago dago  $p$ -ren balio guztietan eta lau egonkortasun baldintza desberdin horietan. Argi ikus daiteke  $p$ -ren balio txikiagoetarako bi politiken arteko errore erlatiboa gero eta desberdinagoa dela.  $\pi^*$  politikaren errore erlatiboa gehiago hazten da, nabarmenen 5.8. irudiko eskuineko grafikoan ikus dezakegu.

$p$ -ren balio txikietan, zerk desberdintzen duen politika optimoa,  $\pi^*$  eta  $\pi^{**}$ -tik ikusteko, 5.7. irudiko  $p = 0.4$  kasua hartu dugu. Horrela, kasu honetako politika optimoaren irudikapena egin dugu:



**5.9. irudia:**  $p = 0.4$  denean *politika*-ren irudikapena. Borobilak zerbitzua 0 klaseari ematen zaiola esan nahi du eta hutsuneak 1 eta 2 klaseei, aldi berean.

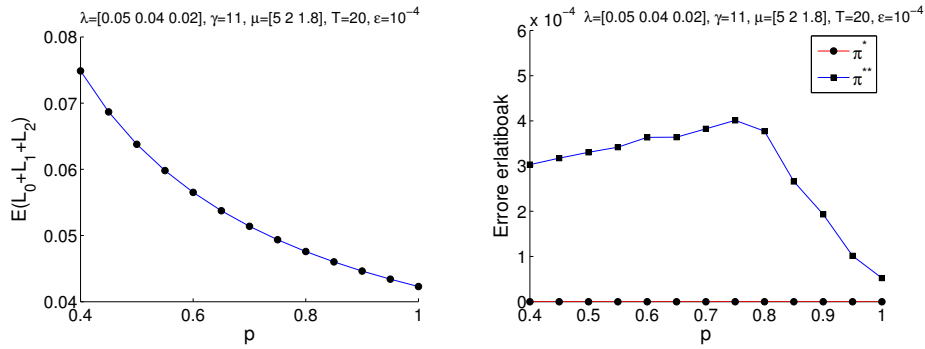
5.9. irudiaren arabera,  $\lambda$ ,  $\gamma$  eta  $\mu$  parametro horien kasuan, 0 klaseari ez zaio



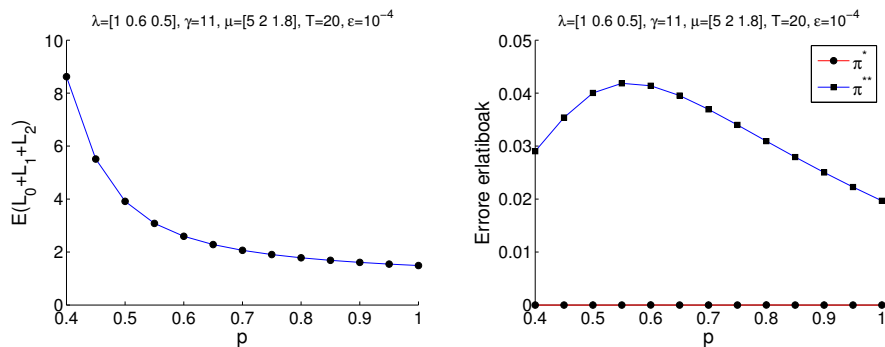
ia inoiz lehentasuna ematen. Irudiko espazioko puntu bakoitzak,  $(l_0, l_1, l_2)$ , ilaran dagoen klase bakoitzeko bezero kopurua adierazten du,  $t$  aldiune batean. Orduan, ia-ia beti 1 eta 2 klaseei ematen zaie zerbitzua, hurrengo kasuan salbu: 1 klaseko bezerorik ez eta 2 klaseko bezero gutxi daudenean, edo alderantziz. Azken bi kasuetan, 0 klaseari ematen zaio zerbitzua. Ondorioz,  $p = 0.4$ -ren eragina handia da. Izan ere, 0 klaseko bezero batzuk,  $\frac{1}{p\mu_0}$  itxaropeneko banaketa esponentziala dutenak, lan eskari handiarekin sartzen dira ilarara.

### 3. eszenarioa:

Banaketa hiperresponentzial degeneratiboa, zeharkako bezero kasetako batek jarraitzen duen kasuan, 1 klaseak esate baterako, beste emaitza batzuk ditugu.



5.10. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.03$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.0212$ .

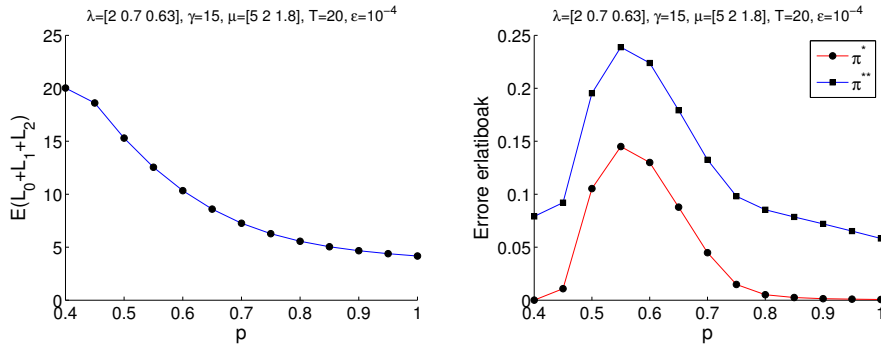


5.11. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.5$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.477$ .

Hasteko, 5.10. 5.11. 5.12. eta 5.13. irudietako ezkerreko grafikoei erreparatuz,  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  itxaropena,  $\rho_0 + \rho_i$ ,  $i = 1, 2$ , baturaren arabera aldatu

egiten da: zenbat eta handiagoa izan aipatu batura, orduan eta handiagoa da  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  itxaropena.

Bestetik, 5.10. 5.11. 5.12. eta 5.13. irudietako eskuineko errore erlatiboen grafikoei erreparatuz, bi bereizketa egingo ditugu interpretazioari dagokionean. Batetik, 5.10. eta 5.11. irudien kasuan, egonkortasun baldintza txiki-etan, ez dago zalantzarik politika optimoa eta  $\pi^*$  parekoak direla. Gainera,  $p\tilde{\mu}_1 + \mu_2 < \mu_0$  betetzen da,  $p$ -ren balio guztietarako. Bezero bakoitzaren okupazio-tasa handitzean ordea, 5.12. eta 5.13. irudietako eskuineko grafikoei bere gorakortasun eta beherakortasun tarteak dituzte. (2.11) formulako zenbakitzaileko bigarren momentu hori handia da, orduan eta handiagoa  $p$  txikituta ahala, eta horregatik, hurrengo bi auzien artean erabakia hartu behar dugu: edo lan kantitate txikia eskatzen duten bezeroei zerbitzua eman (1 klaseko horiei), onuragarria dena, edo bi nodoak beraien kapazitate osoan aprobetxatu eta aldi berean erabili.

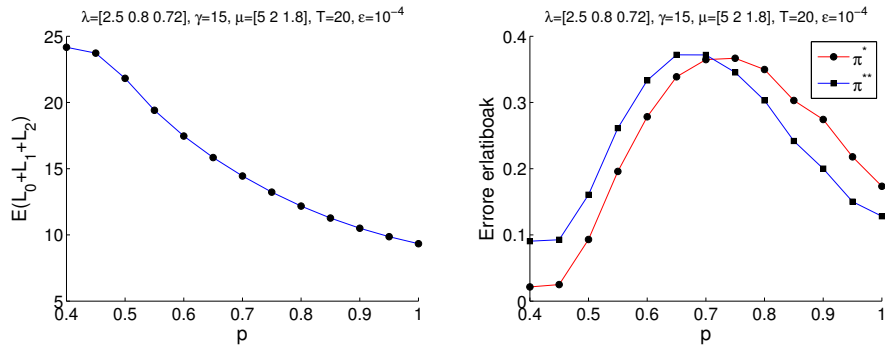


5.12. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.75$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.75$ .

Errore erlatiboek,  $\frac{E(L_0^{\pi^*} + L_1^{\pi^*} + L_2^{\pi^*}) - E(L_0^\pi + L_1^\pi + L_2^\pi)}{E(L_0^\pi + L_1^\pi + L_2^\pi)}$  eta

$\frac{E(L_0^{\pi^{**}} + L_1^{\pi^{**}} + L_2^{\pi^{**}}) - E(L_0^\pi + L_1^\pi + L_2^\pi)}{E(L_0^\pi + L_1^\pi + L_2^\pi)}$ , maximoa hartzen dute 5.12. eta

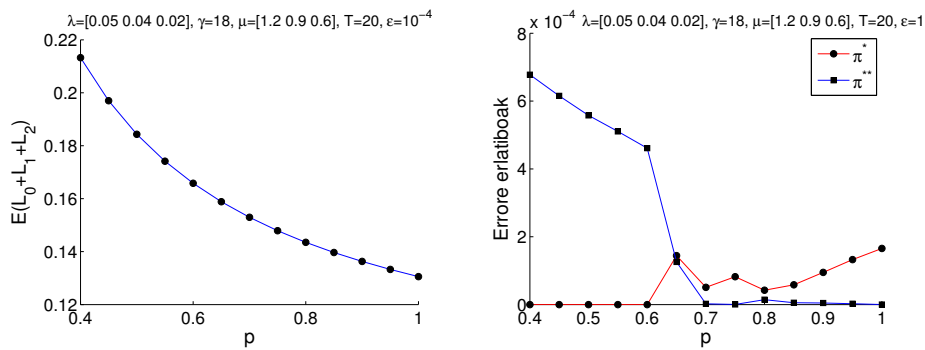
5.13. grafikoetan. Lehenengoan,  $p \approx 0.55$  puntuan gutxi gorabehera eta bigarrenean,  $p \approx 0.69$  puntuan  $\pi^{**}$ -k eta  $p \approx 0.72$   $\pi^*$ -k. Honen zergatia aztertzeko analisi sakonagoko bat egin beharko genuke.



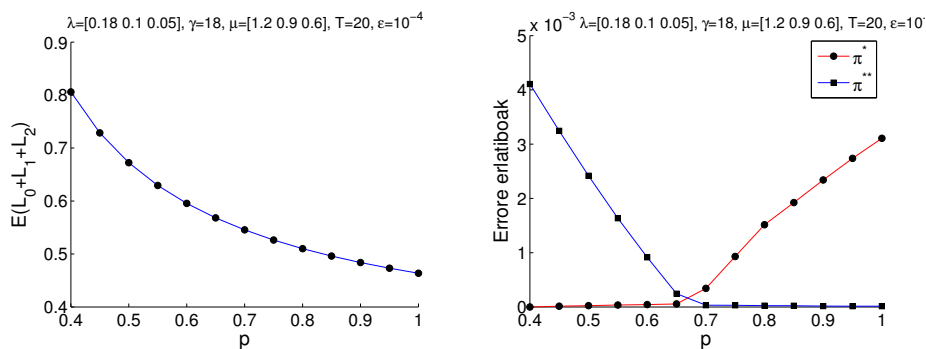
5.13. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.9$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.9$ .

#### 4. eszenarioa:

Azkenik, 4. eszenarioan, lau emaitza hauek ditugu:

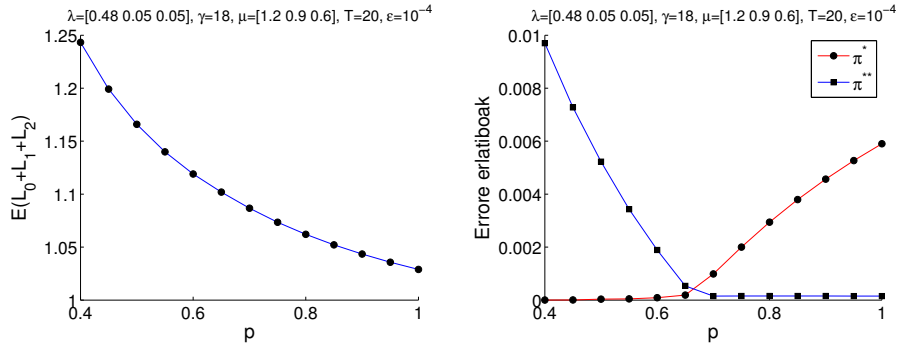


5.14. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.0816$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.0816$ .

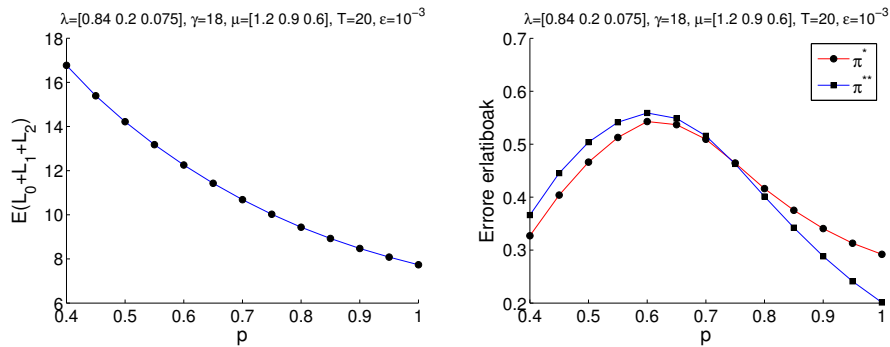


5.15. irudia:  $\rho_0 + \rho_1 = 0.25$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.25$ .

Beste eszenarioetan bezala,  $p$  txikitu ahala  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  itxaropena handitu egiten da hemen ere, ikus 5.14. 5.15. 5.16. eta 5.17. irudietako ezkerreko grafikoak. Dena dela, aurreko eszenarioekin alderatuz, oraingo honetan gutxiago hazten da itxaropena.



**5.16. irudia:**  $\rho_0 + \rho_1 = 0.45$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.5$ .



**5.17. irudia:**  $\rho_0 + \rho_1 = 0.9$  eta  $\rho_0 + \rho_2 = 0.85$ .

Errore erlatiboak dagokienean, 5.14. 5.15. 5.16. eta 5.17. irudietako eskuineko grafiko guztietan hau ikus dezakegu:  $p$ -ren balio handietarako  $\pi^{**}$  politika hobe dela, hau da, 1 eta 2 klaseak biak presente daudenero, onena bi klase hauek bezeroei zerbitzua ematea dela.  $p$ -ren balio txikiarako, berriz, hobe da 0 klaseari zerbitzua ematea.

Bigarrenik, 5.14. eta 5.15. irudietan errore erlatiboak oso oso txikiak direla ikus dezakegu. Bi politiken arteko gurutzaketa nabarmena da baita ere. Bietako bat politika optimotik hurbil dagoenean, bestea asko urruntzen da; gurutzaketaren ondoren, kontrakoa gertatzen da. Bukatzeko, 5.17. irudiko eskuineko grafikoan egon badago gurutzaketa baina, bi politikak ez dira elkarrengandik asko urruntzen, besteetan jazotzen den bezala.

Laburbilduz, hurrengo gogoeta eta ondorioak ditugu:

- $p$  probabilitatearen balio baxuek  $E(L_0 + L_1 + L_2)$  itxaropenaren balioaren hazkundera dakarte.
- Bezeroen okupazio-tasa baxua izateak eta ondorioz,  $\rho_0 + \rho_i$  egonkortasun baldintza baxuak izateak, errore erlatibo txikiagoak sortzen ditu. Hein handi batean normala da hau, gure ilarak kapazitate finitua baitu eta beraz, zenbat eta lan kantitate gehiago egon sisteman orduan eta zailagoa izango da hauek guztiak kudeatzea.
- Okupazio-tasak baxuak diren kasuan baita ere, ikusi dugu Verloop-en (2009) laneko emaitzetatik hurbilago gaudela, banaketa hiperresponentzialeko  $p\tilde{\mu}_0$  parametroa,  $\mu_0 = p\tilde{\mu}_0$  parametroko esponentzial gisa hartzen badugu.
- Banaketa hiperresponentziala 0 klaseak jarraitzen duen kasuan (1. eta 2. eszenarioak),  $p$  probabilitatearen balio baxuetarako algoritmoak itzultzen digun politika optimoa: 1 eta 2 klaseei zerbitzua ematen dien politika da,  $\{(l_0, 0, 0) : l_0 \in [0, T]\}$  zuzenean izan ezik.
- 3. eszenarioko errore erlatiboaren harira, ilararen portaera sakonago aztertzea falta izan zaigu. Etorkizunerako lan modura analisi hori egitea geratzen zaigu.
- Egin dugun *Value iteration algoritmoaren* inplementazioak denbora konplexutasun handia du. Nahiz eta hobekuntza batzuk egiten saiatu, beste arazo bat azaleratu zaigu: ordenagailuko memoria falta. Inplementatutako algoritmo batek denbora konplexutasun handia duen bitartean, besteak espazio konplexutasun handia du.



## A. eranskina

# Matlab-eko kodea

Eranskin honetan, lan osoan zehar erabilitako kodea agertzen da. Kode hau Matlab programazio lengoiaian idatzi dugu. Jarraian, *Value iteration algorithmoa* eta grafikoak egiteko beharrezkoak izan zaizkigun sententziak aurkeztu ditugu:

(a) valueite.m

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Funtzio nagusia: valueite
%Funtzio nagusian erabiltzen dena: batu.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function [politika ,em]=valueite(lambda, gamma, mu, T, eps,p)
politika = zeros(T + 1, T + 1, T + 1);
em =[T 2];
vmat = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vvmat = zeros(T + 1, T + 1, T + 1);
while abs(em(1) - em(2)) > eps %kendura hau <eps izan arte, sartu.
    for x1 = 0:T
        for x2 = 0:T
            for x3 = 0:T %espazioa zeharkatuta.
                m=[batu(0, vmat, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p), batu(1,
                    vmat, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)];
                %v berria kalkulatu.
                vvmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = (x1 + x2 + x3) + min(m);
                if m(1) <= m(2) %minimoa egin digun politika gorde.
                    politika(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = 0;
                else
                    politika(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = 1;
                end
            end
        end
    end
    em(1) = max(max(max((vvmat - vmat))));%em zerrenda eguneratu.
    em(2) = min(min(min((vvmat - vmat))));
    vmat = vvmat; %guztia eginda, v zaharra eguneratu.
end
end

%batu funtzioak, value iteration algoritmoko batukaria garatzen du,
%xb=(x1,x2,x3) puntuko trantsizio-probabilite guztiak aztertuz.
```

```

function [b]=batu(a, vmat, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)
b=0;
if (0<=x1 && x1<=(T-1))
    b=b+lambda(1)/gamma*vmat(x1 + 2, x2 + 1, x3 + 1)-(lambda(1)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (0<=x2 && x2<=(T-1))
    b=b+lambda(2)/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 2, x3 + 1)-(lambda(2)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (0<=x3 && x3<=(T-1))
    b=b+lambda(3)/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 2)-(lambda(3)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x1 && x1<=T)
    b=b+mu(1)*(1-a)*p/gamma*vmat(x1, x2 + 1, x3 + 1)-(mu(1)*(1-a)*p/
        gamma)*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x2 && x2<=T)
    b=b+mu(2)*a/gamma*vmat(x1 + 1, x2, x3 + 1)-(mu(2)*a/gamma)*vmat(x1
        + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x3 && x3<=T)
    b=b+mu(3)*a/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 )-(mu(3)*a/gamma)*vmat(
        x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
b=b+vmat(x1+1,x2+1,x3+1);
end

```

(b) valueite2.m

%% Errore erlatiboak kalkulatzeko erabili den funtzioa %%

```

function [politika ,em1,em2,em3]=valueite2(lambda, gamma, mu, T, eps,p)
politika = zeros(T + 1, T + 1, T + 1);
em1 =[T 2];
em2 =[T 2];
em3 =[T 2];
vmat1 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vvmat1 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vmat2 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vvmat2 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vmat3 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
vvmat3 = zeros (T + 1, T + 1, T + 1);
while abs(em1(1) - em1(2)) > eps
    for x1 = 0:T
        for x2 = 0:T
            for x3 = 0:T
                m=[batu(0, vmat1, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p), batu(1,
                    vmat1, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)];
                vvmat1(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = (x1 + x2 + x3) + min(m);
                if m(1) <= m(2)
                    politika(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = 0;
                else
                    politika(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1) = 1;
                end
                m2=[batu(0, vmat2, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p), batu(1,
                    vmat2, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)];
            end
        end
    end
end

```



```

m3=[batu(0, vmat3, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p), batu(1,
    vmat3, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)];
if x1==0
    vvmat2(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1)=(x1 + x2 + x3) + m2(2);
else
    vvmat2(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1)=(x1 + x2 + x3) + m2(1);
end
if ((x2==0) || (x3==0)) && (x1>0)
    vvmat3(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1)=(x1 + x2 + x3) + m3(1);
else
    vvmat3(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1)=(x1 + x2 + x3) + m3(2);
end
end
end
end
em1(1) = max(max(max((vvmat1 - vmat1))));
em1(2) = min(min(min((vvmat1 - vmat1))));
vmat1 = vvmat1;
em2(1) = max(max(max((vvmat2-vmat2))));
em2(2) = min(min(min((vvmat2-vmat2))));
vmat2=vvmat2;
em3(1) = max(max(max((vvmat3-vmat3))));
em3(2) = min(min(min((vvmat3-vmat3))));
vmat3=vvmat3;
end
end

```

```

function [b]=batu(a, vmat, lambda, gamma, mu, T, x1, x2, x3, p)
b=0;
if (0<=x1) && (x1<=(T-1))
    b=b+lambda(1)/gamma*vmat(x1 + 2, x2 + 1, x3 + 1)-(lambda(1)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (0<=x2) && (x2<=(T-1))
    b=b+lambda(2)/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 2, x3 + 1)-(lambda(2)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (0<=x3) && (x3<=(T-1))
    b=b+lambda(3)/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 2)-(lambda(3)/gamma)
        *vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x1) && (x1<=T)
    b=b+mu(1)*(1-a)*p/gamma*vmat(x1, x2 + 1, x3 + 1)-(mu(1)*(1-a)*p/
        gamma)*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x2) && (x2<=T)
    b=b+mu(2)*a/gamma*vmat(x1 + 1, x2, x3 + 1)-(mu(2)*a/gamma)*vmat(x1
        + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
if (1<=x3) && (x3<=T)
    b=b+mu(3)*a/gamma*vmat(x1 + 1, x2 + 1, x3)-(mu(3)*a/gamma)*vmat(x1
        + 1, x2 + 1, x3 + 1);
end
b=b+vmat(x1+1,x2+1,x3+1);
end

```

(c) marraz1.m

```
clear all
```

```

format long
[politika ,em]=valueite([1 0.6 0.5], 11, [5 2 1.8], 20, 10^-4, 1);
T=20;
for i=1:T+1
    for j=1:T+1
        for k=1:T+1
            if (politika(i,j,k)==1)
                plot3(i-1,j-1,k-1,'*')
                hold on
            elseif (politika(i,j,k)==0)
                plot3(i-1,j-1,k-1,'.')
                hold on
            end
        end
    end
end
xlabel('L_0')
ylabel('L_1')
zlabel('L_2')
title('\lambda=[1 0.6 0.5], \gamma=11, \mu=[5 2 1.8], T=20, \epsilon=10^{-4}, p=1')
fprintf('bi matrizeen kenduraren balio maximo eta minimoenak %5.9f eta %5.9f dira. \n', em(1),em(2))

```

(d) marraz2.m

```

clear all
format long
p=0.4:0.05:1;
y1=zeros(1,length(p));
for i=1:length(p)
    [politika ,em1]=valueite([0.05 0.04 0.02], 18, [1.2 0.9 0.6], 20, 10^-4,p(i));
    y1(i)=em1(1);
end
hold on
plot(p,y1,'Marker','o','MarkerFaceColor','k','MarkerEdgeColor','k')
xlabel('p')
ylabel('E(L_0+L_1+L_2)')
title('\lambda=[0.05 0.04 0.02], \gamma=18, \mu=[1.2 0.9 0.6], T=20, \epsilon=10^{-4}')
hold off

```

(e) marraz3.m

```

clear all
format long
p=0.4:0.05:1;
y1=zeros(1,length(p));
y2=zeros(1,length(p));
y3=zeros(1,length(p));
for i=1:length(p)
    [politika ,em1,em2,em3]=valueite2([0.05 0.04 0.02], 18, [1.2 0.9 0.6], 20, 10^-4,p(i));
    y1(i)=em1(1);
    y2(i)=em2(1);
    y3(i)=em3(1);
end

```

```
hold on
plot(p,(y2-y1)./y1,'r','Marker','o','MarkerFaceColor','k','
      MarkerEdgeColor','k')
plot(p,(y3-y1)./y1,'b','Marker','s','MarkerFaceColor','k','
      MarkerEdgeColor','k')
xlabel('p')
ylabel('Errore erlatiboak')
title('\lambda=[0.48 0.05 0.005], \gamma=18, \mu=[1.2 0.9 0.6], T=20,
       \epsilon=10^{-4}')
legend('\pi^{*}','\pi^{**}')
hold off
```



# Bibliografia

- [1] Tijms H. C. (2003), *A First Course in Stochastic Models*, John Wiley & Sons, Chichester, England.
- [2] Khintchine A. Y. (1969), *Mathematical Methods in the Theory of Queueing*, Hafner, New York.
- [3] Adan I. eta Resing J. (2015), *Queueing Systems*, Eindhoven University of Technology.
- [4] Virtamo J. (2005), *Queueing Theory, The M/G/1 queue*, Helsinki University of Technology Networking Laboratory, (<https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/english.shtml>).
- [5] Wolff R. W. (1982), *Poisson arrivals see time averages*, *Opns. Res.*, 30, pp. 223-231.
- [6] Verloop I. M. (2009), *Scheduling in Stochastic Resource-Sharing Systems*, Thesis, Eindhoven University of Technology.
- [7] Ross S. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2.edizioa, John Wiley & Sons, New York.
- [8] Ross S. M. (1983), *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, Orlando.

