

Tesis Doctoral

Análisis y Síntesis Estructural de Manipuladores Paralelos de Baja Movilidad con Múltiples Modos de Operación

Presentada por:

José Ignacio Ibarreche Mendía

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica

Perteneciente a la

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

Para la obtención del título de

Doctor Ingeniero Industrial

Dirigida por

Dr. D. Alfonso Hernández Frías

Bilbao, Marzo de 2017

A Maria, Ainhoa y la tía Paz

RESUMEN

Los manipuladores paralelos de baja movilidad son, sin duda, un tipo de robots que presentan importantes ventajas, en ciertos aspectos, sobre los denominados manipuladores serie, especialmente cuando se requiere mayor rigidez, aún a costa de una reducción del espacio de trabajo del manipulador paralelo.

El desarrollo de nuevas arquitecturas de este tipo de manipuladores ha recibido notable impulso desde la segunda mitad del siglo XX, si bien su implantación industrial tiene notables resistencias debido a la complejidad de la cinemática y a la dificultad de control en tiempo real y limitaciones de espacio de trabajo.

Esta Tesis Doctoral se centra en el desarrollo de una sistemática de generación de diferentes arquitecturas de manipuladores paralelos de baja movilidad, es decir, de menos de seis grados de libertad. A partir de ella, se estudiarán diferentes configuraciones de manipuladores reconfigurables, capaces de adaptarse a diferentes tareas, es decir, manipuladores con capacidad de multioperacionalidad.

Este trabajo comenzará con una breve descripción de los principales métodos de síntesis estructural o morfológica de manipuladores paralelos, la teoría de Grupos de Desplazamientos de J. Hervé, [HER1978], la Teoría de Torsores, [BAL1900], y la Teoría de las Transformaciones Lineales, [GOG2004].

A continuación se realizará el estudio de todas las posibles arquitecturas de manipuladores paralelos de 3 grados de libertad con tres cadenas cinemáticas idénticas y preferentemente dispuestas de forma simétrica. Se recogerán posibles materializaciones de cada tipología, referenciándose aquellos autores que ya han descrito el manipulador concreto correspondiente. También se recogerán algunas arquitecturas que no se han encontrado en las referencias estudiadas y pueden servir para futuros desarrollos. Asimismo se resumirá el procedimiento utilizado, y el conjunto de premisas, para el desarrollo del estudio de las familias de manipuladores paralelos de 3 grados de libertad.

Posteriormente se desarrollará un procedimiento general para el estudio y generación estructural (Síntesis estructural o morfológica) de manipuladores paralelos de baja movilidad con múltiples modos de operación a partir de combinaciones de cadenas cinemáticas de seis grados de libertad. Una vez definida esta metodología, se aplicará al análisis cinemático de la plataforma de Gough-Stewart. A continuación se aplicará a un determinado manipulador paralelo, seleccionado teniendo en cuenta determinados criterios y requisitos constructivos recogidos en el apartado 6.1. El manipulador paralelo seleccionado es el 3 – \underline{C} PCR, de seis grados de libertad. Restringiendo algunos grados de libertad y actuando sobre el resto de las variables de entrada de este manipulador, se obtienen manipuladores paralelos de baja movilidad con un determinado modo de operación o movimiento requerido (Schönflies, 2 traslaciones y una rotación o 2T1R, 3T0R, 0T3R,...) definido por la función objetivo para la aplicación en estudio. En concreto, a partir del 3- \underline{C} PCR se obtiene, restringiendo dos de las variables angulares de entrada, una configuración que permite desarrollar un manipulador paralelo con movimiento Schönflies, de eje de rotación variable en función de la posición de las dos variables angulares de entrada mencionadas.

Adicionalmente, a partir del procedimiento desarrollado para los manipuladores paralelos de 6 grados de libertad, se definirá una metodología específica para el planteamiento de las ecuaciones del problema de velocidad de manipuladores paralelos de baja movilidad, de aplicación general a cualquier configuración. Esta metodología está basada en la desarrollada en los capítulos anteriores.

Por último se expondrán las posibles líneas futuras de estudio a partir de los análisis y metodologías desarrollados en la presente Tesis Doctoral. En ese sentido es de destacar la posibilidad de obtener un vademécum de manipuladores paralelos de baja movilidad a partir de combinaciones de todas las cadenas posibles de 6 grados de libertad recogidas en el capítulo 4.4 del presente trabajo.

En los Anexos 1 y 2 se calculan las expresiones analíticas de los términos de la matriz inversa de la matriz jacobiana del problema directo de velocidades de la plataforma Gough-Stewart y del manipulador 3- \underline{C} PCR respectivamente. El objetivo es obtener de

forma explícita las expresiones de la velocidad lineal de un punto, $\overrightarrow{v_p}$, y la velocidad angular, $\overrightarrow{\omega}$, de la plataforma móvil de la plataforma Gough-Stewart y del manipulador 3-CPCR en función de las variables de entrada.

Todas las arquitecturas de manipuladores paralelos mostradas en este documento, han sido analizadas utilizando el programa informático GIM, [PET2011], desarrollado por el grupo COMPMECH del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU).

José Ignacio Ibarreche Mendía

Ingeniero Industrial Mecánico

Bilbao, Marzo 2017

Agradecimientos

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer en primer lugar a mi Director de Tesis Dr. Alfonso Hernandez Frías su dedicación y paciencia durante estos años. También me gustaría agradecer su apoyo al grupo COMPMECH del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Bilbao y en especial al Dr. Victor Petuya, Dr. Mónica Urizar y Dr. Erik Macho.

Tampoco puedo olvidar mencionar a mi familia que durante estos años han soportado mis sesiones de trabajo los sábados y domingos y también a mi cuadrilla de amigos.

Sinceramente, gracias.

José Ignacio Ibarreche Mendía

Bilbao, Marzo de 2017

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN.....	V
AGRADECIMIENTOS.....	IX
ÍNDICE GENERAL.....	XI
ÍNDICE DE FIGURAS	XV
ÍNDICE DE TABLAS	XVII
NOMENCLATURA.....	XIX
1. INTRODUCCIÓN	1
2. SÍNTESIS MORFOLÓGICA DE MANIPULADORES PARALELOS DE BAJA MOVILIDAD.7	
2.1. Definición y Conceptos	7
2.2. Síntesis Morfológica de Manipuladores Paralelos	11
2.2.1. Teoría de Torsores.....	14
2.2.2. Teoría de los Grupos de Desplazamientos	16
2.2.3. Teoría de las Transformaciones Lineales	21
2.3. Premisas de la Síntesis de MP de Baja Movilidad.....	24
3. SÍNTESIS DE FAMILIAS DE MANIPULADORES PARALELOS DE 3 GDL.....	27
3.1. Procedimiento Propuesto.....	27
3.2. Ligaduras Cinemáticas	31
3.2.1. Ligaduras Cinemáticas de Dimensión 3.....	31
3.2.2. Ligaduras Cinemáticas de Dimensión 4.....	33
3.2.3. Ligaduras cinemáticas de Dimensión 5	37
3.3. Generación de MP de 3 GDL.....	42

3.3.1.	MP de 3 GDL: Desplazamientos 3T0R.....	42
3.3.2.	MP de 3 GDL: Desplazamientos 2T1R.....	50
3.3.3.	MP de 3 GDL: Desplazamientos 1T2R.....	58
3.3.4.	MP de 3 GDL: Desplazamientos 0T3R.....	64
4.	METODOLOGÍA GENERAL DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE MANIPULADORES PARALELOS.....	75
4.1.	Conceptos Generales	75
4.2.	Modelización de la Cadena Cinemática Genérica.....	78
4.3.	Determinación de los Vectores Unitarios de Movimiento	84
4.4.	Síntesis Estructural de Cadenas Cinemáticas de 6 GDL	88
4.4.1.	Cadenas Cinemáticas PPPRRR.....	91
4.4.2.	Cadenas Cinemáticas PPRRRR	93
4.4.3.	Cadenas Cinemáticas PRRRRR	98
4.4.4.	Cadenas Cinemáticas RRRRRR	104
4.4.5.	Resumen de Cadenas Cinemáticas de 6 GDL.....	110
4.5.	Resolución del Problema de Velocidades del MP de 6 GDL	115
4.6.	Análisis de la Multioperacionalidad y del Acoplamiento de Desplazamientos del MP	116
5.	ANÁLISIS DE LA PLATAFORMA GOUGH-STEWART	121
5.1.	Planteamiento del Problema de Velocidades.....	122
5.2.	Resolución del Problema de Velocidades	128
5.3.	Análisis de la Multioperacionalidad	129
5.4.	Problema de Velocidades con Variables Angulares de Entrada	134
5.5.	Problema de Velocidades con Variables de Traslación y Angulares de Entrada	136
6.	ANÁLISIS DEL MANIPULADOR PARALELO 3-CPCR	139

6.1.	Definición Geométrica del MP 3-CPCR	139
6.2.	Planteamiento del Problema de Velocidades.....	141
6.3.	Resolución del Problema de Velocidades.....	148
6.4.	Análisis de la Multioperacionalidad.....	155
6.4.1.	Resumen de la Multioperacionalidad del MP 3-CPCR	163
7.	ANÁLISIS DE MP DE BAJA MOVILIDAD	167
7.1.	Metodología General.....	167
7.2.	Aplicación al Problema de Velocidades del MP 3-RPS	167
8.	CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN	175
8.1.	Conclusiones	175
8.2.	Líneas Futuras de Investigación.....	179
9.	BIBLIOGRAFÍA	181
10.	ANEXOS.....	193
10.1.	ANEXO 1: INVERSA DE LA MATRIZ J_G^D DEL MP 6-SPU	193
10.2.	ANEXO 2: INVERSA DE LA MATRIZ , J_{CPCR}^D DEL MP 3-CPCR	209

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 3.1: Generadores de desplazamiento de traslación de 1 y 2 dimensiones.....	30
Figura 3.2: Generadores de desplazamientos 3TOR con ligaduras de dimensión 4	45
Figura 3.3: Generadores de desplazamientos 3TOR con ligaduras de dimensión 5 (3- <u>P</u> PCR)	47
Figura 3.4: Patrón de movimiento del cuadrilátero articulado 4-S.....	48
Figura 3.5: Robot Delta. Cortesía de ABB Flexible Automation	48
Figura 3.6: Generadores de desplazamientos 3TOR con ligaduras de dimensión 5 (3- <u>R</u> RRRR).....	49
Figura 3.7: Generadores de desplazamientos 2T1R con ligaduras de dimensión 3	53
Figura 3.8: Generadores de desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 4	55
Figura 3.9: Generadores de desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 5	57
Figura 3.10: Generadores de desplazamientos 1T2R con ligaduras de dimensión 4	60
Figura 3.11: Generadores de desplazamientos 1T2R con ligaduras de dimensión 5	62
Figura 3.12: MP 3- <u>R</u> R(RRR) generador de desplazamientos 1T3R.....	63
Figura 3.13: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (2 pares prismáticos o equivalentes).....	69
Figura 3.14: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (1 par prismático o equivalente)	71
Figura 3.15: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (0 pares prismáticos o equivalentes).....	72
Figura 4.1: Cadena Cinemática Genérica con todas las posibilidades de vectores de pares de traslación y rotación	79
Figura 4.2: Cadena Cinemática Genérica con todas las posibilidades de movimientos de traslación y rotación	81
Figura 4.3: Vector Unitario de Traslación \vec{b}_i en posición paralela y perpendicular a \vec{a}_i y \vec{p}_i	85

Figura 4.4: Vector Unitario de Rotación \vec{s}_i en posición paralela y perpendicular a \vec{r}_i y \vec{d}_i	86
Figura 5.1: Plataforma Gough-Stewart y vectores unitarios de la cadena i	121
Figura 5.2: Vectores Unitarios de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart	122
Figura 5.3: Magnitudes de Movimiento de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart	123
Figura 5.4: Plataforma Gough-Stewart. Análisis geométrico restricciones de GDL de traslación.....	131
Figura 5.5: Manipulador Paralelo 6- <u>SPU</u>	132
Figura 5.6: Manipulador Paralelo 5-SU 1- <u>SPU</u>	132
Figura 5.7: Manipulador Paralelo 3-SU 3- <u>SPU</u>	133
Figura 5.8: Vectores Unitarios de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart con variable de entrada α_i	134
Figura 6.1: Manipulador Paralelo 3- <u>CPCR</u>	141
Figura 6.2: Manipulador Paralelo 3- <u>CPCR</u> y vectores unitarios de la cadena i	142
Figura 6.3: Vectores Unitarios de la cadena i del MP 3- <u>CPCR</u>	143
Figura 6.4: Magnitudes de Movimiento de la cadena i del MP 3- <u>CPCR</u>	143
Figura 6.5: Numeración Cadenas Cinemáticas MP 3- <u>CPCR</u>	145
Figura 7.1: Manipulador Paralelo 3- <u>RPS</u>	168
Figura 7.2: Manipulador Paralelo 3- <u>UPS</u> teórico	169
Figura 7.3: Vectores Unitarios del MP 3- <u>UPS</u>	170
Figura 7.4: Magnitudes de Movimiento del MP 3- <u>UPS</u>	170

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1: Ligaduras cinemáticas de dimensión 3	32
Tabla 3.2: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 3	32
Tabla 3.3: Ligaduras cinemáticas de dimensión 4 con un generador de traslación $\{\mathcal{T}_{\vec{q}}\}$	34
Tabla 3.4: Ligaduras cinemáticas de dimensión 4 con un generador de rotación $\{\mathcal{R}_{D, \vec{a}}\}$	34
Tabla 3.5: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 4	35
Tabla 3.6: Ligaduras cinemáticas de dimensión 5 con un generador de traslación $\{\mathcal{T}_{\vec{s}}\}$	37
Tabla 3.7: Ligaduras cinemáticas de dimensión 5 con un generador de rotación $\{\mathcal{R}_{E, \vec{e}}\}$	38
Tabla 3.8: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5, primer grupo	39
Tabla 3.9: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5, segundo grupo	40
Tabla 3.10: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 3T0R (y permutaciones).....	50
Tabla 3.11: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 2T1R (y permutaciones).....	57
Tabla 3.12: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 1T2R (y permutaciones).....	64
Tabla 3.13: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 0T3R (y permutaciones).....	73
Tabla 4.1: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPPRRR	92
Tabla 4.2: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPRRRR (primer grupo)	96
Tabla 4.3: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPRRRR (segundo grupo)..	97
Tabla 4.4: Permutaciones de <u>RRRRR</u>	100
Tabla 4.5: Resumen de permutaciones de <u>RRRRR</u>	100
Tabla 4.6: Cadenas posibles a partir de las permutaciones <u>PRRRRR</u> (primer grupo) ..	101
Tabla 4.7: Cadenas posibles a partir de las permutaciones <u>PRRRRR</u> (segundo grupo)	102
Tabla 4.8: Cadenas posibles a partir de las permutaciones <u>PRRRRR</u> (primer grupo) ..	103

Tabla 4.9: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PRRRRR (segundo grupo) 104

Tabla 4.10: Permutaciones de **RRRRRR** 106

Tabla 4.11: Resumen de permutaciones de **RRRRRR** 107

Tabla 4.12: Permutaciones de RRRRRR 108

Tabla 4.13: Resumen de permutaciones de RRRRRR (excluidas las contempladas en 4.11) 108

Tabla 4.14: Combinaciones posibles de cadenas cinemáticas **RRRRRR** 109

Tabla 4.15: Combinaciones posibles de cadenas cinemáticas RRRRRR 110

Tabla 4.16: Cadenas con par R conectado a la plataforma fija 112

Tabla 4.17: Cadenas con par P o C conectado a la plataforma fija..... 113

Tabla 4.18: Cadenas con par U o S conectado a la plataforma fija 114

NOMENCLATURA

MP	Manipulador paralelo
TPM	Manipulador paralelo traslacional, 3 GDL de traslación (3T0R)
SPM	Manipulador paralelo esférico (0T3R)
GDL	Grados de libertad
T	Grado de libertad de Traslación
R	Grado de libertad de rotación o par de rotación
P	Par prismático o de traslación
C	Par cilíndrico
U	Junta cardan o universal
S	Par esférico
$\{I\}$	Movimiento de dimensión 0 o par rígido. Matriz identidad
$\{T_{\vec{u}}\}$	Movimiento de Traslación Rectilíneo de dimensión 1
$\{\mathcal{R}_A, \vec{r}_A\}$	Movimiento Rotacional de dimensión 1
$\{\mathcal{H}_A, h, \vec{r}_A\}$	Movimiento Helicoidal de dimensión 1
$\{T_{\vec{u}, \vec{v}}\}$	Movimiento de Traslación Plano de dimensión 2
$\{CA\}$	Movimiento Cilíndrico de dimensión 2
$\{T_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}\}$ ó $\{T_3\}$	Movimiento de Traslación Espacial de dimensión 3
$\{F_{\vec{u}, \vec{v}}\}$	Movimiento Plano de dimensión 3
$\{S_0\}$	Movimiento Esférico de dimensión 3
$\{\mathcal{Y}_{\vec{u}, h}\}$	Movimiento de Traslación Helicoidal de dimensión 3
$\{\mathcal{X}_e\}$	Movimiento Schönflies de dimensión 4
$\{\mathcal{D}\}$	Desplazamiento general de dimensión 6
$L(i, j)$	Ligadura cinemática entre dos elementos i y j
Pa	Paralelogramo plano con un 1 GDL de traslación
PaPa	Dos paralelogramos articulados planos en serie
Pa^2	Paralelogramo articulado espacial doble
$\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i, \vec{d}_i, \vec{e}_i, \vec{f}_i$	Vectores unitarios según la dirección de los pares prismáticos de la cadena cinemática i

$\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{r}_i, \vec{s}_i, \vec{t}_i, \vec{u}_i$	Vectores unitarios de los ejes de los pares de rotación de la cadena cinemática i
$g_i, h_i, k_i, l_i, m_i, n_i$	Magnitudes de los desplazamientos de los pares de traslación de la cadena i
$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varphi_i, \psi_i, \theta_i$	Ángulos girados por los pares de rotación de la cadena i
$\dot{g}_i, \dot{h}_i, \dot{k}_i, \dot{l}_i, \dot{m}_i, \dot{n}_i$	Módulos de las velocidades lineales asociadas a los desplazamientos de los pares de traslación de la cadena i
$\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\varphi}_i, \dot{\psi}_i, \dot{\theta}_i$	Módulos de las velocidades angulares asociadas a los ángulos girados por los pares de rotación de la cadena i
\vec{v}_p	Velocidad lineal del punto P de la plataforma móvil
\vec{v}_{Pd}	Velocidad de deslizamiento del punto P de la plataforma móvil
$\vec{\omega}$	Velocidad angular de la plataforma móvil
$\vec{\sigma}_i, \vec{\tau}_i, \vec{\varepsilon}_i, \vec{\eta}_i, \vec{\mu}_i$	Velocidades angulares de los diferentes elementos de la cadena i
$H_i, A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$	Nudos de la cadena cinemática i
$R_{\alpha X}, R_{\varphi Y}, R_{\theta Z}$	Matrices básicas de Rotación alrededor de los ejes X,Y,Z
J_G^D	Matriz Jacobiana del problema directo de velocidades del MP 6-S <u>P</u> U
J_G^I	Matriz Jacobiana del problema inverso de velocidades del MP 6-S <u>P</u> U
J_{CPCR}^D	Matriz Jacobiana del problema directo de velocidades del MP 3-C <u>P</u> CR
J_{CPCR}^I	Matriz Jacobiana del problema inverso de velocidades del MP 3-C <u>P</u> CR
J_{RPS}^D	Matriz Jacobiana del problema directo de velocidades del MP 3-R <u>P</u> S
J_{RPS}^I	Matriz Jacobiana del problema inverso de velocidades del MP 3-R <u>P</u> S
C, D, E, F	Submatrices de la matriz Jacobiana del problema directo de velocidades
$DETJ$	Determinante de la matriz Jacobiana J

1. INTRODUCCIÓN

La síntesis estructural (también denominada morfológica) tiene por objeto determinar la topología del manipulador paralelo, es decir las cadenas cinemáticas que lo constituyen, de forma que su plataforma móvil siga un determinado patrón de movimiento. A menudo dicha topología se obtiene de forma intuitiva a partir de unas teorías y criterios genéricos.

Los robots, también denominados manipuladores, son en esencia un mecanismo formado por una o varias cadenas cinemáticas que conectan al elemento terminal o plataforma móvil con una base o elemento fijo. Cada cadena cinemática está formada por un conjunto de elementos mecánicos rígidos conectados entre sí por medio de diferentes tipos de uniones denominadas pares cinemáticos. Dichos pares cinemáticos permiten la transmisión de movimientos y esfuerzos entre los elementos rígidos de cada cadena cinemática.

En un principio se pensaron para realizar tareas repetitivas de manipulación de objetos pero actualmente se diseñan robots para realizar cualquier tipo de tareas que suponga un incremento de la eficiencia tanto técnica como social y económica. En este sentido, actualmente se han desarrollado muchos tipos de robots que realizan actividades de exploración espacial, acuáticas, áreas, médicas,..., incrementando la fiabilidad y repetitividad de las operaciones y reduciendo el riesgo de las personas y el error humano.

Dentro del grupo de robots o manipuladores se pueden destacar dos grandes grupos: serie y paralelos.

Los manipuladores o robots serie son mecanismos formados por una única cadena cinemática que conecta la plataforma móvil a la base o elemento fijo. Dado que su topología es similar a la del brazo humano, reciben el nombre de manipuladores (o

robots) antropomórficos. Es el tipo de robot más extendido en aplicaciones industriales.

Se considera que el primer robot serie de aplicación industrial fue el Unimate, creado por G.C. Devol y J. F Engelberger en 1956. Durante los años sesenta y setenta del pasado siglo, se desarrollaron otros robots antropomórficos como el Puma, de 6 grados de libertad, para aplicaciones de soldadura por puntos.

Hoy en día existe un gran espectro de manipuladores serie con diferentes grados de libertad, comercializados por grandes compañías como Fanuc, Kuka, ABB, Kawasaki y otras. Son utilizados en operaciones de manipulación (pick and place), carga y descarga, soldadura, embalaje, máquina-herramienta, etc.

Aunque el concepto de manipulador paralelo se encuentra muy ligado a la plataforma de Gough-Stewart, desde principios del siglo pasado existían propuestas de manipuladores de arquitectura paralela como la de J.E. Gwinett (US Patent No. 1,789,680 de 1928) y la propuesta de W. Pollard (US Patent No. 2,286,571 de 1942). En concreto, la plataforma de Gough-Stewart está compuesta por 6 cadenas cinemáticas que unen la plataforma móvil con el elemento fijo, permitiendo 6 grados de libertad a dicha plataforma móvil.

En principio se puede pensar que resulta más sencillo realizar una tarea cuanto mayor sea el número de grados de libertad del manipulador paralelo, pero esto incrementa la complejidad mecánica, complica la programación y control y reducen el espacio de trabajo del manipulador. Dependiendo de la tipología de las cadenas cinemáticas que forman el manipulador, un movimiento puede ser sencillo de realizar, actuando sobre un único grado de libertad, o requerir el accionamiento sincronizado de todos sus grados de libertad. Por ejemplo, un movimiento de traslación en un manipulador paralelo con cadenas cinemáticas de estructura cartesiana se consigue bloqueando los actuadores no necesarios y accionando únicamente el actuador correspondiente al movimiento requerido. Sin embargo, realizar el mismo movimiento de traslación con la plataforma Gough-Stewart requiere el accionamiento sincronizado de los seis actuadores, al tener las cadenas cinemáticas una cinemática muy acoplada.

Por tanto, se hace necesario limitar el número de grados de libertad del manipulador al estrictamente necesario en la aplicación correspondiente. Dentro de estas aplicaciones se establece el concepto de Manipulador Paralelo de Baja Movilidad, como el conjunto de todos los manipuladores paralelos de movilidad inferior a 6 grados de libertad (2 a 5).

A fin de diseñar un Manipulador Paralelo (MP de aquí en adelante) para una aplicación concreta, el primer paso consiste en identificar los requisitos de funcionamiento a partir de las especificaciones del cliente. Dentro de estos requisitos se encuentra el denominado patrón de movimiento de la plataforma móvil o elemento terminal [ALT2009]. Por tal se entiende el número y tipo de grados de libertad (GDL de aquí en adelante) de dicha plataforma, esto es, si son de rotación (R) o de traslación (T), así como sus correspondientes direcciones. A partir de aquí, ya puede realizarse la síntesis estructural, la cual tiene por objeto determinar la topología del MP de forma que su plataforma móvil se ajuste a un determinado patrón de movimiento.

En general el diseño de manipuladores paralelos de baja movilidad es bastante complejo. El hecho de tener menos de 6 GDL exige determinar su movilidad en cada instante y comprobar que se adecúe a las necesidades definidas, ya que la movilidad del manipulador es función de la posición y orientación relativa de sus elementos.

Hay dos métodos principales en los que se apoya la síntesis morfológica de MP de baja movilidad, la Teoría de Torsos (Screw Theory) [DAV2004] y [KON2007-1] y la Teoría de Grupos de Desplazamientos, [HER1978]. También se puede citar que G. Gogu ha propuesto otro método para la síntesis morfológica de MPs, denominada Teoría de las Transformaciones lineales [GOG2008].

El método que se va a utilizar en la presente tesis es la Teoría de Grupos de Desplazamientos. Dicha teoría emplea las propiedades matemáticas de Grupo de Lie que poseen los desplazamientos de sólido rígido. Estos conceptos matemáticos no fueron introducidos en el ámbito de la síntesis estructural de mecanismos hasta los primeros trabajos de J. Hervé [HER1978]. De esta manera, la cinemática de la plataforma móvil del manipulador en estudio se plantea a partir del grupo general de desplazamientos de sólido rígido de dimensión 6 y de sus 12 Subgrupos, como se verá

más adelante. Cada una de las cadenas cinemáticas o patas del MP genera en su elemento terminal o plataforma móvil un desplazamiento que debe ser compatible con el patrón de movimiento requerido. El desarrollo de las diferentes ligaduras cinemáticas, que definen el desplazamiento relativo entre la plataforma fija y la móvil de MP, así como la definición de sus posibles materializaciones mediante juntas cinemáticas y elementos, es un aspecto fundamental en la síntesis estructural. El concepto de ligadura cinemática, como más adelante se verá, se define como el desplazamiento relativo entre La plataforma fija y la plataforma móvil o elemento terminal del MP en estudio.

Hoy en día existen numerosos trabajos que proponen manipuladores paralelos de baja movilidad capaces de realizar un determinado tipo de patrón de movimiento de la plataforma móvil, tales como 1T2R, 3T1R,... e incluso varios patrones de movimiento o modos de operación. A finales del siglo pasado se desarrolló la idea de conseguir manipuladores paralelos capaces de adaptarse a diferentes tareas, capaces de variar su configuración y ofrecer mayor versatilidad y flexibilidad. Surge así el concepto de robots o manipuladores multioperacionales y ligado a este concepto, el de reconfigurabilidad. Se denominan reconfigurables aquellos robots o manipuladores que poseen la capacidad de la multioperacionalidad.

Dentro de los sistemas multioperacionales podemos distinguir tres grandes grupos: los robots autoreconfigurables, los robots modulares y los robots reconfigurables.

Los robots autoreconfigurables están formados por una serie de módulos conectados entre sí y con capacidad de cambiar su morfología de manera autónoma, adaptándose a la tarea a desarrollar, [BOJ2002], [WAN2008]. Son especialmente útiles en aplicaciones espaciales y entornos no accesibles para el ser humano.

Los robots modulares están formados por un conjunto de módulos básicos (barras, actuadores, juntas cinemáticas, plataformas móviles,..) que permiten un ensamblaje rápido obteniéndose manipuladores o robots con diferentes geometrías y movimientos grados de libertad, [CHE2001].

El tercer grupo es el de los robots reconfigurables. Dentro de este grupo podemos citar los MP de cadenas cinemáticas desacoplables, donde los GDL de la plataforma móvil varían en función de número de cadenas cinemáticas conectadas a dicha plataforma móvil, [XI2006]. Las cadenas que no se encuentran conectadas a la plataforma móvil pueden colaborar, como manipulador serie, con el MP resultante, [FIN2008]. De esta forma resulta un sistema híbrido de un MP trabajando con uno o varios manipuladores serie. Otro subgrupo es el de parámetros geométricos variables, modificando las longitudes de las barras o la posición de los pares cinemáticos. De esta forma se cambia la forma del espacio de trabajo o se eliminan singularidades, [BI2010], [MER2003]. También forman parte de este grupo los mecanismos cinemotrópicos, cuya movilidad cambia cuando atraviesa determinadas posiciones singulares y los mecanismos de topología variable, que pueden cambiar su movilidad mediante cambios de su topología. Esto se puede conseguir por medio de juntas cinemáticas variables o adaptables, [SLA2014], [GAN2013]. También bloqueando uno o varios actuadores por medio de juntas cinemáticas bloqueables, [TSE2015].

En esta tesis se va a desarrollar una metodología que permita de una forma sistemática obtener todas las posibles combinaciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL, para, combinando dichas cadenas cinemáticas obtener los diferentes MP de 6 GDL. A continuación se desarrolla una metodología para estudiar la multioperacionalidad de dichos MP de 6 GDL, consistente en restringir diferentes actuadores de entrada, obteniéndose diferentes MPs de baja movilidad capaces realizar tareas distintas. De esta forma, se obtienen las características de multioperacionalidad del MP de 6 GDL.

2. SÍNTESIS MORFOLÓGICA DE MANIPULADORES PARALELOS DE BAJA MOVILIDAD

2.1. Definición y Conceptos

Se define Manipulador Paralelo (MP) como aquel que tiene una plataforma móvil o elemento terminal unido a la base o elemento fijo por medio de varias cadenas cinemáticas independientes.

Esta arquitectura de lazo cerrado hace que los manipuladores paralelos (MP) presenten una serie de ventajas respecto de los manipuladores serie, tales como:

- Mayor rigidez y menor inercia.
- Mejor relación carga/peso propio.
- Mayores velocidades y aceleraciones de manipulación.
- Mayor precisión de movimiento y repetitividad.

Por otro lado, los MP presentan también algunos inconvenientes respecto de los manipuladores serie, como son:

- Espacio de trabajo más reducido.
- Acoplamiento posición/orientación. En general los diferentes GDL de un MP están acoplados. Esto supone que situar la plataforma móvil de un MP en una determinada posición y orientación requiere seguir una determinada secuencia de movimientos.
- Mayor complejidad del sistema de control.
- Mayor complejidad mecánica y de mantenimiento.

Por las razones mencionadas, la industria se decantó en el siglo pasado por la aplicación de manipuladores serie, más simples mecánicamente y desde el punto de vista de programación y control que los MP, a pesar de sus ventajas.

Como ya se ha mencionado en el capítulo 1, aunque en principio resulta más sencillo realizar una tarea cuanto mayor sea el número de grados de libertad del MP, esto incrementa la complejidad del mismo, y en consecuencia su coste económico. Por tanto es necesario limitar el número de grados de libertad del MP al estrictamente necesario en la aplicación correspondiente. Dentro de estas aplicaciones es donde se define el concepto de *Manipulador Paralelo de Baja movilidad* como el conjunto de todos los MP cuya plataforma móvil posee una movilidad inferior a 6 GDL, agrupando por tanto a todos los MP de 2 a 5 GDL.

A fin de simplificar la construcción del MP y su programación, se define como *Manipulador Completamente Paralelo* a aquel que posee un número de cadenas cinemáticas igual al número de GDL de su plataforma móvil, aunque dicho nombre se aplique también en la práctica a los MP con todas sus cadenas cinemáticas iguales y colocadas de forma simétrica. Este hecho simplifica el control del MP al poder actuar sobre un único actuador por cadena cinemática.

El problema que se plantea a la hora de definir un MP para una aplicación concreta es la falta de una metodología a seguir. Se han hecho grandes esfuerzos para sistematizar el diseño de mecanismos. Sin embargo, todavía se trata de una disciplina a caballo entre la ingeniería y el arte, no existiendo un procedimiento que paso a paso permita obtener un mecanismo concreto que cumpla los requisitos exigidos. Sin embargo, se pueden mencionar una serie de pasos o etapas para la obtención del MP más adecuado a la aplicación en estudio, tal y como se recoge en [H-F2004] y [H-F2012].

El primer paso consiste en definir los requisitos de funcionamiento y las especificaciones del cliente.

A partir de las especificaciones se determinan las características geométricas, cinemáticas y dinámicas del MP, tales como espacio de trabajo, capacidad de carga, tipo de movimientos, aceleraciones y velocidades máximas, precisión y repetividad,... Con ellas se determina la *Función Objetivo* o conjunto de acciones y movimientos que debe realizar la plataforma móvil o elemento terminal del MP.

Una vez definida la *Función Objetivo* que debe realizar la plataforma móvil del manipulador paralelo en estudio, el siguiente paso es la *Definición o Síntesis Morfológica del Manipulador*.

La *Síntesis Estructural o Morfológica del Manipulador Paralelo* en estudio, consiste en determinar el número y arquitectura de las cadenas cinemáticas que lo constituyen, con el objetivo que la plataforma móvil del MP sea capaz de generar el movimiento requerido por la Función Objetivo. Esto supone, a su vez, que para cada cadena cinemática del MP es necesario realizar la correspondiente *Síntesis Estructural*, es decir, cuántos elementos y cuántos pares cinemáticos y de qué tipo componen cada cadena cinemática o “pata” del MP en estudio.

Para ello es necesario, en primer lugar, determinar el tipo (estructura cinemática) de cadena cinemática que se considera más adecuado para cumplir la función objetivo. Es necesario tener en cuenta la capacidad de movimiento de la cadena así como otros factores como facilidad de mantenimiento, fiabilidad, proceso de fabricación, etc.

A continuación es necesario obtener todas las posibles combinaciones de los elementos y pares cinemáticos que componen las cadenas cinemáticas del MP, seleccionados anteriormente. De esta forma se obtienen todos los mecanismos posibles que pueden constituirse con un determinado número de elementos.

Una vez definidas todas las posibles arquitecturas que resuelven el problema planteado por la Función Objetivo, se procede a realizar la *Síntesis Dimensional* del MP que consiste en determinar las dimensiones principales óptimas de las cadenas cinemáticas y del MP para realizar la tarea especificada en la Función Objetivo de la plataforma móvil del MP.

En el proceso de síntesis dimensional del MP no se trata únicamente de maximizar el espacio de trabajo, siendo necesario tener en cuenta otras características tales como la destreza del MP o el consumo energético de los actuadores de entrada. Por tanto, se trata de optimizar una función multiobjetivo formada a su vez por varias funciones. Se ha de tener en cuenta que en muchos casos dichas funciones tienen objetivos contrapuestos y es necesario alcanzar un equilibrio entre ellas que proporcione un

resultado óptimo. Para ello se pueden seguir diferentes estrategias, como fijar unos requisitos mínimos en cada función o aplicar el criterio de Pareto. Como ejemplo se puede citar el trabajo recogido en la referencia [H-F2012], donde se propone una metodología para la síntesis de MPs con varios requisitos cinemáticos y dinámicos a cumplir, aplicándose a la obtención de MPs con movimiento Schönflies para aplicaciones “pick and place”. En dicho artículo, los autores proponen una metodología de diseño de MPs que incluye los siguientes pasos:

- Definición de las especificaciones técnicas.
- Determinación de la topología del MP: síntesis estructural.
- Análisis cinemático.
- Optimización del diseño: determinación de las variables de diseño y funciones objetivo.
- Análisis dinámico.
- Diseño del prototipo: materiales, holguras, tolerancias, mecatrónica y control.

Una vez determinadas las principales dimensiones de MP, es necesario realizar el correspondiente Análisis Cinemático que supone:

- Resolver el problema de posición directo e inverso.
- Realizar el análisis de velocidades y estudio de singularidades.
- Determinar el espacio de trabajo del MP.

El análisis de interferencias entre los distintos elementos del MP es fundamental para determinar el espacio de trabajo real del MP. Con el análisis cinemático se comprueba el grado de cumplimiento de los requisitos cinemáticos definidos en la Función Objetivo.

Finalmente se realiza el Análisis Estático, Dinámico y Vibratorio, obteniéndose las reacciones en los pares cinemáticos y las fuerzas necesarias para mover el MP, a fin de dimensionar los accionamientos y juntas cinemáticas y definir espesores y secciones de los elementos del MP. Esto supone la realización de:

- Mapas de rigidez.
- Mapas de modos y frecuencias naturales.

- Análisis del equilibrado estático y dinámico del MP.
- Calibración y ensayos experimentales.
- Correlación del modelo teórico con los resultados experimentales.
- Análisis y corrección de la influencia de juegos, holguras y rozamientos en los pares cinemáticos del MP.
- Durabilidad y requisitos de mantenimiento.

El análisis dinámico inverso permite dimensionar los accionamientos, los elementos y las juntas o pares cinemáticos. Esto requiere conocer las fuerzas de inercia de los elementos, fuerzas que a su vez dependen de las aceleraciones obtenidas en el análisis cinemático. Por tanto, se trata de un proceso iterativo en el que se definen las dimensiones de detalle del MP y se comprueban los requisitos dinámicos y resistentes de MP.

Finalmente se definen como *Manipuladores Multioperacionales* aquellos capaces de variar su configuración para que su plataforma móvil pueda realizar varios tipos de patrón de movimiento dentro de su Función Objetivo. Este concepto introduce a su vez el de los *Manipuladores Reconfigurables*, o manipuladores capaces de cambiar su morfología de forma autónoma (autoreconfigurables) o dirigida (modulares y reconfigurables) con el objetivo de realizar varios patrones de movimiento, tal y como se describe en el capítulo 1.

2.2. Síntesis Morfológica de Manipuladores Paralelos

Tal y como se ha comentado en el capítulo 1, el número de grados de libertad del MP que se diseñe se ha de ajustar a las necesidades de la aplicación concreta. Un MP de 6 GDL permite situar la plataforma móvil en cualquier posición y orientación dentro de su espacio de trabajo, pero supone mayor complejidad mecánica y de control del MP, al tener un mayor número de variables de entrada del requerido. Por tanto, como regla general, el número de GDL ha de ajustarse a los estrictamente necesarios para la aplicación correspondiente.

Los MP de baja movilidad tienen la dificultad añadida de que no es posible desplazar su elemento terminal o plataforma móvil en cualquier dirección y orientación, siendo necesario conocer en todo momento y en cada posición cuál es su patrón de

movimiento a fin de determinar su adecuación a los requerimientos de la aplicación en estudio.

Por esta razón se ha realizado en los últimos tiempos un gran esfuerzo para el desarrollo de la síntesis morfológica de manipuladores paralelos de baja movilidad, habiéndose desarrollado diferentes herramientas matemáticas a fin de sistematizar el proceso de síntesis morfológica del MP, con objeto de que su plataforma móvil o elemento terminal sea capaz de realizar el movimiento deseado en las condiciones requeridas para la aplicación en estudio (Función Objetivo).

Ejemplos de estos conceptos son los manipuladores paralelos traslacionales o TPM (Traslational Parallel Manipulators), capaces de realizar los tres movimientos de traslación espacial requiriendo únicamente 3 GDL, como los propuestos por G. Gogu, [GOG2004]. También se pueden mencionar los MPs de movimiento Schönflies con movimiento 3T1R y 4 GDL, como el propuesto por J. Angeles y A. Morozov en [ANG2006], o los manipuladores paralelos esféricos o SPM (Spherical Parallel Manipulators), como el Agile Eye de la Universidad de Labal de 3 GDL, [GOS1996].

Existen diferentes trabajos que estudian de una forma general la síntesis de manipuladores paralelos de baja movilidad. Por ejemplo, J. M. McCarthy y L. Joskowic estudian cómo aplicar los conceptos de espacio de trabajo y ventaja mecánica en la síntesis cinemática de mecanismos, [MCC2001]. Para ello utilizan el principio de los trabajos virtuales para relacionar los ratios de velocidades de entrada y salida del sistema con la ventaja mecánica del mismo, aplicando estos conceptos al diseño de robots serie y paralelos, a fin de satisfacer las restricciones impuestas por el espacio de trabajo.

También merece la pena citar el trabajo desarrollado por Q. Jin y T.-L. Yang, [JIN2004-1], en el que estudian la síntesis de MP del tipo 2R1T que son los únicos del grupo de 3 GDL que pueden tener movimientos parásitos en direcciones no deseadas, vinculados a los desplazamientos independientes. Dichos movimientos parásitos consisten en movimientos de los GDL restringidos que acompañan al movimiento principal. Dichos autores estudian la cinemática de MP con movimientos desacoplados, es decir independientes entre sí, y desarrollan una familia de MP de 3 GDL con movimientos

total o parcialmente desacoplados. Para ello utilizan el concepto de Basic Kinematic Chain (BKC), equivalente a la cadena cinemática serie.

Asimismo, se puede citar el trabajo realizado por V. Krobi, G. K. Ananthasuresh y V. Kumar, [KRO1998-2]. Analizan la síntesis de cadenas cinemáticas serie de 1 GDL con dos pares de rotación accionados por cables y poleas. Utilizan el principio de los Trabajos Virtuales para determinar las ecuaciones de equilibrio estático de fuerzas y las combinan con las ecuaciones cinemáticas para resolver el problema de síntesis cinemática por puntos de precisión y minimizar el par motor de entrada. Utilizan muelles de torsión en los pares de rotación a fin de reducir el par motor, realizando su optimización con Matlab.

También es apropiado reseñar los trabajos realizados por Xianwen Kon, [KON2013], donde propone un procedimiento de síntesis de MP de 3 GDL compuestos únicamente por pares cinemáticos de rotación y capaces de operar en dos modos de operación, el Movimiento de Traslación Espacial $\{T_3\}$ y el Movimiento Plano $\{F_{\vec{u}, \vec{v}}\}$.

De una forma global, se puede decir que las herramientas matemáticas en las que se basan la mayor parte de los trabajos realizados y los métodos de síntesis más utilizados son:

- La Teoría de Torsos Cinemáticos (Screw Theory), [BAL1900]
- La Teoría de los Grupos de Desplazamientos, [HER1978]
- La Teoría de las Transformaciones Lineales, [GOG2004]

Tanto la Teoría de Torsos como la Teoría de los Grupos de Desplazamientos son ampliamente utilizadas en la síntesis morfológica de manipuladores paralelos de baja movilidad. La teoría de las Transformaciones Lineales es de más reciente aplicación, habiendo sido propuesta por el profesor G. Gogu.

Existen otros enfoques pero se han considerado como más relevantes los citados anteriormente. En el desarrollo de los siguientes capítulos del presente documento se va a utilizar la Teoría de los Grupos de Desplazamientos. Previamente se va a realizar una breve descripción de las tres teorías anteriormente citadas que, se puede decir, constituyen la base de la síntesis morfológica de MPs moderna.

2.2.1. Teoría de Torsores

Este método supone aplicar las herramientas del cálculo vectorial al estudio del movimiento de los sistemas mecánicos. Para ello considera que las coordenadas de un vector se pueden representar por el propio vector y su momento respecto a un punto determinado. Un *Torsor o Screw*, [BAL1900], es un vector de 6 componentes que permite representar fácilmente un campo de velocidades o fuerzas. Para definir el eje del torsor, el sistema de coordenadas más empleado es el de las coordenadas de *Plücker*, aplicando en su definición el concepto de coordenadas proyectivas, capaces de definir la posición de puntos situados en el infinito.

Los movimientos de rotación y traslación pueden ser representados por medio de los *torsores cinemáticos elementales* llamados *deslizante* y *par* respectivamente, equivalentes a sus homólogos matemáticos. Los pares cinemáticos pueden ser representados por medio de sistemas de torsores. La representación del campo de velocidades por medio de un torsor cinemático permite componer movimientos de sistemas de n sólidos con n sistemas de coordenadas. Dado que las cadenas cinemáticas son sistemas constituidos por un conjunto de sólidos rígidos unidos entre sí por pares cinemáticos, se puede realizar el estudio del movimiento absoluto de cualquier sólido de la cadena cinemática.

De igual forma, una fuerza aplicada sobre un sólido puede ser representada por medio del *torsor dinámico elemental* llamado *deslizante* y un par de fuerzas puede ser representado por medio del torsor dinámico elemental llamado *par*. Por tanto, se pueden componer los trabajos realizados por las fuerzas exteriores y, aplicando el método de las *Potencias Virtuales*, calcular los esfuerzos y momentos sobre cualquier sólido que constituye la cadena cinemática.

El método se basa en, una vez conocido el movimiento requerido de la plataforma móvil del MP, definir las restricciones (Fuerzas y momentos) que se han de aplicar a las diferentes cadenas cinemáticas del MP para limitar el movimiento de la plataforma móvil exclusivamente al requerido. El campo de velocidades de un sólido puede ser representado por un torsor, reducido el movimiento a un punto del eje instantáneo de rotación y deslizamiento, que recibe el nombre de *torsor cinemático central o twist*. A

su vez, el campo de momentos generado por las fuerzas que actúan sobre dicho sólido puede ser representado también por un torsor, reducido el sistema de vectores a un punto del eje central, llamado *torsor dinámico central o wrench*.

Existen numerosos trabajos que describen los fundamentos matemáticos y la aplicación de la Teoría de Torsores tales como el documento de J. K. Davidson y K. H. Hunt describen en [DAV2004], proporcionando numerosos ejemplos.

Asimismo, A. Bilbao, O. Altuzarra, A. Hernández Frias y E. Amezua recogen en su trabajo presentado en 2012, [BIL2012], los fundamentos matemáticos de esta teoría y su aplicación al estudio del problema de velocidades y aceleraciones mediante torsores. Utilizando la notación de Denavit-Hartenberg se puede sistematizar la construcción del Jacobiano a partir del estudio del problema de velocidades aplicando la Teoría de Torsores, estudiando su aplicación en mecanismos de cadena abierta. Aunque las aceleraciones no cumplen las propiedades del campo de vectores, en dicho trabajo se muestra la utilidad del estudio integrado de las velocidades y aceleraciones mediante la aplicación de la citada teoría.

X. Kong y C. M. Gosselin recopilaron en su libro “Type Synthesis of Parallel Mechanisms”, [KON2007-1], un resumen de sus trabajos relativos a la síntesis de MP. En él proponen el concepto de *Cadena Virtual*, basado en determinar una cadena cinemática que realice el movimiento que se desea realice el MP, concepto desarrollado a partir de la Teoría de Torsores como método de síntesis de MP. Dicho concepto lo aplican a la síntesis de diferentes manipuladores serie y paralelos. Otros trabajos de estos autores vienen recogidos en artículos anteriores, ver referencias [KON2004-1], [KON2004-3], [KON2005] y [KON2006].

Para finalizar este capítulo, entre otros muchos ejemplos de aplicación de la Teoría de Torsores también se puede citar el trabajo de N. Kumar, O. Piccin y B. Bayle, [KUM2014], en el que desarrollan una metodología para la síntesis de MP de baja movilidad basada en la citada teoría, obteniendo una nueva familia de MPs con movimiento 2T2R. El interés de dicho trabajo radica en que se definen una serie de reglas preferentes para la composición de las cadenas cinemáticas del MP buscado y,

a partir de su aplicación, un procedimiento de generación de dicho MP basado en la Teoría de Torsos.

2.2.2. Teoría de los Grupos de Desplazamientos

Este es el método en el que se va a basar el presente trabajo para desarrollar la síntesis de mecanismos de 3 GDL y posteriormente de MP de baja movilidad de una forma genérica.

Esta teoría permite disociar el movimiento que cada cadena cinemática aporta al movimiento de la plataforma móvil y su descomposición en movimientos más simples materializados por pares cinemáticos.

Los fundamentos básicos de la representación matricial de los Desplazamientos de Sólido Rígido están basados en el Teorema de Chasles (1832), [SAL2008] y [ALT2010], que podemos expresar de la forma siguiente:

“Dadas dos posiciones distintas de un sólido, siempre se puede pasar de una a otra aplicando una traslación seguida de un giro de infinitas formas posibles. Entre todas hay una en la que el eje de rotación es paralelo a la traslación, por lo que el desplazamiento resultante es de tipo helicoidal (Screw axis)”

Todos los puntos del sólido rígido han de tener, en la posición original y en la posición desplazada, las mismas coordenadas en el sistema de referencia ligado al sólido rígido. De este modo, un desplazamiento de sólido rígido se puede definir describiendo la transformación de coordenadas que sufre un sistema de referencia ligado a dicho sólido.

La Teoría de Grupos de Desplazamientos se basa en la aplicación del álgebra de grupos de Lie a los desplazamientos de sólido rígido para expresar la cinemática del sólido rígido de forma finita.

Estructura de Grupo de Lie: matemáticamente es una variedad analítica diferenciable, real o compleja, que posee la estructura de grupo.

Una variedad queda definida como el objeto geométrico estándar que, en terminología matemática, generaliza el concepto de superficie a cualquier dimensión,

tanto en números reales como números complejos. El concepto diferenciable supone que las superficies son lisas sin puntos angulosos, permitiendo definir en cada punto un único vector (o plano) tangente.

Se demuestra que el conjunto de desplazamientos del sólido rígido, denominado \mathcal{D} , representado por la matriz de transformación homogénea T , posee las características de grupo de Lie continuo, de 6 parámetros o variables. Dichos parámetros son los necesarios para definir cualquier desplazamiento de sólido rígido, es decir los 6 GDL del sólido rígido (tres desplazamientos y tres rotaciones independientes).

Sean \mathcal{D}_1 , \mathcal{D}_2 y \mathcal{D}_3 tres desplazamientos cualesquiera pertenecientes al conjunto de desplazamientos del sólido rígido, $\{\mathcal{D}\}$, de 6 GDL. Asimismo, T_1 y T_2 representan las matrices homogéneas de transformación asociadas a cada desplazamiento \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 , respectivamente. Entonces, el espacio o conjunto de desplazamientos de sólido rígido $\{\mathcal{D}\}$, representado por medio del grupo matricial especial euclídeo $SE(3)$, es necesario que cumpla las siguientes propiedades para tener estructura de grupo:

- Operación interna (Producto): $\forall \mathcal{D}_1(T_1), \mathcal{D}_2(T_2); (\mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}_1)(T_2 \cdot T_1) \in \{\mathcal{D}\}$
- Propiedad asociativa: $\forall \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3 \in \{\mathcal{D}\}; \mathcal{D}_3 \cdot (\mathcal{D}_2 \cdot \mathcal{D}_1) = (\mathcal{D}_3 \cdot \mathcal{D}_2) \cdot \mathcal{D}_1$
- Elemento neutro (Único): $\forall \mathcal{D}, I \in \{\mathcal{D}\}; I \cdot \mathcal{D} = \mathcal{D} \cdot I = \mathcal{D}$
- Elemento inverso (Único): $\forall \mathcal{D}, \mathcal{D}^{-1} \in \{\mathcal{D}\}; \mathcal{D} \cdot \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^{-1} \cdot \mathcal{D} = I$

Para ser considerado Grupo de Lie se debe verificar además que las operaciones sean diferenciables, lo que cumple el grupo de desplazamientos de sólido rígido $\{\mathcal{D}\}$. Dentro de este grupo, únicamente hay doce tipos de desplazamientos que tienen estructura de grupo:

- Dimensión 0: Identidad $\{I\}$. físicamente viene representado por un par rígido que no permite movimiento relativo entre los dos sólidos rígidos que conecta.
- Dimensión 1: Movimiento de Traslación Rectilíneo $\{T_{\vec{u}}\}$, Movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\}$ y Movimiento Helicoidal $\{\mathcal{H}_{A, h, \vec{r}_a}\}$, representados físicamente por un par prismático, un par de rotación y un par helicoidal, respectivamente.

- Dimensión 2: Movimiento Traslación Plano $\{\mathcal{T}_{\vec{u}, \vec{v}}\}$ y Movimiento Cilíndrico $\{CA\}$, representados físicamente por dos pares prismáticos independientes y un par cilíndrico, respectivamente.
- Dimensión 3: Movimiento Traslación Espacial $\{\mathcal{T}_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}\}$ normalmente denominado $\{\mathcal{T}_3\}$, Movimiento Plano $\{\mathcal{F}_{\vec{u}, \vec{v}}\}$, Movimiento Esférico $\{S_0\}$ y Movimiento de Traslación Helicoidal $\{\mathcal{Y}_{\vec{u}, h}\}$. Físicamente, $\{\mathcal{T}_3\}$ se representa por tres pares de traslación independientes, $\{\mathcal{F}_{\vec{u}, \vec{v}}\}$ por un par plano, $\{S_0\}$ por un par esférico y finalmente, $\{\mathcal{Y}_{\vec{u}, h}\}$ por dos pares de traslación linealmente independientes en direcciones ortogonales a \vec{u} junto con un desplazamiento helicoidal en la dirección \vec{u} de paso h .
- Dimensión 4: Movimiento Schönflies $\{\mathcal{X}_e\}$. Representado por tres desplazamientos de traslación en direcciones linealmente independientes y un desplazamiento de rotación según un eje fijo e .
- Dimensión 6: Desplazamiento general $\{\mathcal{D}\}$. Todo grupo es subgrupo de sí mismo. Cada elemento de este subgrupo queda caracterizado por tres traslaciones y tres rotaciones independientes entre sí.

Existen otros subgrupos de desplazamientos que no cumplen la operación interna o producto, por ejemplo el desplazamiento genérico formado por tres traslaciones independientes y dos rotaciones independientes, 3T2R. Al no tener estructura de subgrupo de Lie provoca que la definición de los movimientos no sea sencilla. En el caso del desplazamiento 3T2R los desplazamientos de traslación se pueden definir empleando tres coordenadas lineales pero los ejes de rotación cambian de orientación conforme el MP experimenta un movimiento general. Sin embargo, desde el punto de vista práctico esto no supone ningún problema.

La aplicación de la Teoría de Grupos de Desplazamientos a la síntesis de MP fue presentada por primera vez por Hervé en 1978, [HER1978]. En dicho trabajo, la cinemática del sólido rígido se plantea a partir del grupo general de desplazamientos de sólido rígido de dimensión 6 y de sus 12 Subgrupos. Uno de los conceptos utilizados es el de ligadura cinemática $L(i, j)$ entre dos elementos i y j que se define como el desplazamiento relativo entre dichos elementos, donde el elemento i es la plataforma fija y el elemento j representa a la plataforma móvil o elemento terminal.

Una ligadura cinemática puede materializarse por un conjunto de elementos y pares cinemáticos conectados entre sí, constituyendo una cadena cinemática o pata del MP. Cada pata es un generador de desplazamiento ya que producen un determinado desplazamiento en el elemento terminal. Además, los pares cinemáticos que la componen son, al mismo tiempo, generadores de desplazamiento.

Los generadores de desplazamiento siguen las reglas del álgebra de grupos relativas a las operaciones de unión (producto) e intersección.

En cada cadena cinemática o pata del MP, la combinación de desplazamientos para obtener el desplazamiento deseado en el elemento terminal se realiza por medio del producto de los generadores de desplazamiento necesarios para su obtención. Así es como se combinan los desplazamientos de los diferentes pares cinemáticos que componen cada cadena cinemática del MP. Consiste en aplicar la operación de Unión de Desplazamientos correspondientes a generadores dispuestos en serie. La combinación de desplazamientos necesaria para obtener el desplazamiento objetivo $\{\mathcal{D}_k\}$ se realiza por medio de la operación de producto de los diferentes desplazamientos elementales necesarios para su obtención, es decir,

$$\{\mathcal{D}_k\} = \{\mathcal{D}_i\} \cdot \{\mathcal{D}_j\}$$

Donde $\{\mathcal{D}_i\}$ y $\{\mathcal{D}_j\}$ son dos desplazamientos genéricos de sólido rígido. La dimensión del desplazamiento $\{\mathcal{D}_k\}$ obtenido es igual a la suma de las dimensiones de los desplazamientos iniciales menos la dimensión del desplazamiento intersección de ambos,

$$\dim \{\mathcal{D}_k\} = \dim \{\mathcal{D}_i\} + \dim \{\mathcal{D}_j\} - \dim \{\mathcal{D}_i\} \cap \{\mathcal{D}_j\}$$

Se ha de tener en cuenta que el caso general de producto de dos desplazamientos cualesquiera no es conmutativo. Mediante la operación producto o unión de desplazamientos se puede determinar la movilidad de cualquier mecanismo formado por cadenas cinemáticas definidas por generadores de desplazamientos dispuestos en serie.

A fin de obtener el desplazamiento correspondiente al elemento terminal del MP es necesario determinar el desplazamiento compatible con cada una de las cadenas cinemáticas que lo conectan al elemento fijo. Matemáticamente este concepto viene representado por la operación Intersección de Desplazamientos:

$$\mathcal{D}_e = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$$

Por tanto, cada una de las cadenas cinemáticas genera en el elemento terminal un desplazamiento, que debe ser compatible con el patrón de movimiento requerido del elemento terminal. Para obtener el desplazamiento deseado en el elemento terminal o plataforma móvil del MP, a los generadores de desplazamiento de todas las cadenas cinemáticas se les aplicará la operación de Intersección de Desplazamientos. De esta forma, únicamente los GDL comunes a las diferentes cadenas cinemáticas permanecerán en el patrón de movimiento de la plataforma móvil. Por tanto se pone de manifiesto que la determinación de las diferentes ligaduras cinemáticas, así como la definición de sus posibles materializaciones mediante juntas cinemáticas, es un aspecto fundamental en la síntesis estructural de los MP de baja movilidad.

A partir de las operaciones unión (producto) o intersección de los generadores de desplazamiento que componen el MP, se definen en el apartado 2.3 del presente trabajo, una serie de premisas de carácter general con el objetivo de sistematizar el estudio y generación de MPs de baja movilidad.

El procedimiento de síntesis que se va a seguir consta de los siguientes pasos:

1. Determinar los desplazamientos del elemento terminal requeridos por la aplicación en estudio.
2. Selección de la arquitectura básica del manipulador: Número de cadenas cinemáticas, número y posición de los accionamientos.
3. Determinación de todas las ligaduras cinemáticas que producen el movimiento necesario.
4. Obtención de todas las posibles materializaciones de las ligaduras cinemáticas, obteniendo las diferentes cadenas cinemáticas combinando elementos y pares cinemáticos.

5. Obtención del desplazamiento deseado mediante la operación de intersección y definición de la configuración final del MP.

Durante el desarrollo del presente trabajo aparecerán dos conceptos adicionales: restricción redundante y grado de libertad redundante (o par cinemático redundante) en la cadena cinemática.

Desde un punto de vista cinemático, un mecanismo es un conjunto de restricciones geométricas entre los elementos que lo componen. A veces, las particularidades geométricas de un mecanismo pueden hacer que dos partes diferentes del mismo den lugar a la misma restricción. En este caso se trata de una restricción redundante. La fórmula Grübler no funciona en mecanismos con restricciones redundantes. Algunas extremidades o arquitecturas completas utilizadas en este trabajo incluirán restricciones redundantes, por lo que se tendrá que tener especial cuidado de comprobar el número y el tipo de GDL en estos casos.

Se dice que una cadena cinemática (o un mecanismo en general) tiene GDL (o pares) redundantes cuando el elemento terminal tiene menos movilidad ó número de GDL que la cadena cinemática (o el mecanismo). En esta circunstancia, se podría decir que el mecanismo posee más movilidad de la necesaria para que el elemento terminal realice su función. En ese sentido podría calificarse el diseño de ineficiente. Sin embargo, hay aplicaciones en las que mecanismos con GDL redundantes están justificados como, por ejemplo, para moverse en un entorno con obstáculos.

Hervé ha continuado desarrollando esta teoría en diferentes trabajos, [HER1982], [HER1994], [HER1999], [HER2009]. También otros autores han continuado el trabajo de Hervé, como J. Angeles, [ANG2004], Q. Li, Z. Huang y J.M. Hervé, [LI2004-2] y J. Meng, G. Liu y Z. Li, [MEN2007].

2.2.3. Teoría de las Transformaciones Lineales

La aplicación de la Teoría de las Transformaciones Lineales a la generación de manipuladores paralelos fue propuesta, por primera vez, por G. Gogu, P. Coiffet y A. Barraco en su trabajo “Mathématiques pour la Robotique: Représentation des Déplacements des Robots” publicado en 1997, [GOG1997].

De una forma general, en el álgebra de transformaciones lineales, dados dos espacios vectoriales U y W , una transformación lineal T de U en W es una función que asigna a cada vector $\vec{u}, \vec{v} \in U$ un vector único $T\vec{u}, T\vec{v} \in W$ tales que satisfacen para cada vector \vec{u}, \vec{v} y un escalar α ,

$$T(\vec{u} + \vec{v}) = T\vec{u} + T\vec{v}$$

$$T(\alpha\vec{u}) = \alpha T\vec{u}$$

G. Gogu, P. Coiffet y A. Barraco aplican el álgebra de transformaciones lineales al análisis y estudio de manipuladores paralelos. Para una cadena cinemática cualquiera existe una transformación lineal T que relaciona el espacio vectorial de velocidades de entrada U con el espacio vectorial de velocidades de salida W , donde la matriz de la transformación lineal es la matriz jacobiana J de la cadena. La aplicación del álgebra a la síntesis de MPs es similar al tratamiento realizado por la teoría de grupos de desplazamientos, ya que, a fin de obtener el vector de velocidades correspondiente al elemento terminal del MP es necesario determinar el desplazamiento compatible con cada una de las cadenas cinemáticas que lo conectan al elemento fijo. Matemáticamente este concepto viene representado por la operación Intersección de los vectores de velocidades de cada una de las cadenas que componen el MPs, consideradas de forma individual.

G. Gogu aplica esta teoría a generación de diferentes tipos de manipuladores paralelos, tales como MPs de traslación (Translational Parallel Manipulator o TPM) con tres desplazamientos independientes de traslación en su plataforma móvil, [GOG2004], MPs con movimiento Schönflies de 4 GDL, [GOG2006-1], o MPs con 3 traslaciones y dos rotaciones (3T2R), [GOG2006-2].

En su libro "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 1: Methodology", referencia [GOG2008], G. Gogu estudia la síntesis de MP de 2 a 6 GDL de una forma sistemática, planteando un nuevo procedimiento de síntesis de MP denominado "*Evolutionary Morphology*", basado en la teoría de las Transformaciones Lineales (Matriz Jacobiana), en los algoritmos evolutivos basados en la evolución biológica y en el método de

Análisis Morfológico, también conocido como modelo de “la caja morfológica”, propuesto por el astrónomo y físico Fritz Zwicky en la década de 1940.

La operativa del método propuesto por Zwicky es muy sencilla. Tras el análisis inicial del problema en estudio, éste se descompone en sus elementos esenciales denominados parámetros o atributos. Identificados estos parámetros se construye una matriz (caja morfológica) que permitirá combinarlos y multiplicar así las relaciones entre ellos, obteniéndose todas las combinaciones posibles.

Para ello, en el procedimiento “*Evolutionary Morphology*”, EM, se definen un conjunto de objetivos de diseño, $\Phi = (\phi_i)$, un conjunto de elementos constituyentes, $E = (\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}, \varepsilon_{3i}, \varepsilon_{4i})$ correspondientes a la tipología de los pares cinemáticos y de los elementos conectados, un conjunto de criterios evolutivos $T_t = (\tau_1, \tau_2)$ para analizar el proceso evolutivo de la generación t a la generación $t + 1$, un conjunto de operadores morfológicos $O_t = (o_1, o_2, o_3, o_4)$ de combinación, selección, mutación y migración. Finalmente se obtiene para cada generación t un conjunto de soluciones $\Sigma_t = ((\sigma_1, \dots, \sigma_n))$ que se denomina morfología en la generación t . El conjunto de soluciones que cumple los objetivos de diseño se denomina producto morfológico y representa el resultado del procedimiento EM descrito.

Gogu propone también, [GOG2008], basándose en la teoría de las Transformaciones Lineales, una nueva formulación para el cálculo de la movilidad, conectividad, redundancia y grado de redundancia de los manipuladores paralelos. En el citado libro analiza también todas las posibles cadenas cinemáticas de 2 a 6 GDL y propone diferentes tipos de MP de baja movilidad.

El procedimiento de síntesis de MP denominado “*Evolutionary Morphology*” propuesto por G. Gogu, [GOG2008], es utilizado por dicho autor en el estudio de posibles topologías de MP de traslación de dos y tres GDL, [GOG2009], topologías con movimiento plano, [GOG2010], otras topologías de dos GDL (1T1R y 0T2R) y tres (2T1R y 1T2R) GDL [GOG2012], así como diferentes topologías con movimiento Schönflies, [GOG2014].

2.3. Premisas de la Síntesis de MP de Baja Movilidad

Teniendo en cuenta las ideas expuestas anteriormente en torno a la síntesis estructural, el autor va a proponer una serie de premisas con el objeto de ayudar a la sistematización del diseño estructural de MPs. Estas premisas recogen aspectos relativos a la nomenclatura de las cadenas, condicionantes geométricos, limitaciones respecto del tipo de pares a utilizar y a la propia estructura, así como reglas para la obtención del patrón de movimiento de la plataforma. En concreto, se establecen las siguientes premisas:

1. Cada cadena cinemática ha de tener como mínimo el mismo número y tipo de GDL que el elemento terminal del MP. Si las cadenas cinemáticas tienen 6 GDL, la intersección de sus patrones de movimiento seguirá definiendo un movimiento de 6 GDL, con lo que nunca se conseguirá ningún MP de baja movilidad. Por lo tanto, el número de GDL de las cadenas cinemáticas a considerar será un mínimo de 2 y un máximo de 5 para poder construir, obviamente, MPs de baja movilidad.
2. La estructura de las cadenas cinemáticas se obtendrá combinando los pares cinemáticos necesarios para obtener el número y tipo de GDL requerido. Concretamente, los pares cinemáticos a utilizar serán: de 1 GDL (Rotación R, Prismático P y Paralelogramo plano Pa), de 2 GDL (Cilíndrico C, Junta Universal U, Paralelogramos PaPa en serie y Paralelogramo espacial Pa²) y de 3 GDL (Esférico S). El movimiento de traslación del elemento terminal, o plataforma móvil, con cadenas cinemáticas que contienen pares cinemáticos Pa, PaPa y Pa² dependen de la posición geométrica del manipulador. En la figura 3.1 se muestran algunas configuraciones de los generadores de desplazamiento de traslación Pa, PaPa y Pa².
3. El patrón de movimiento que resulta en el elemento terminal de la cadena es el producto de los subgrupos de desplazamiento que componen la ligadura cinemática de dicha cadena. Dicho de otra manera, el producto de las matrices de transformación que los representan. Si no hay pares cinemáticos redundantes en la cadena, el número de GDL del elemento terminal es la suma de los GDL de los pares que componen la cadena cinemática.

4. Aspectos geométricos y nomenclatura. Es necesario tener en cuenta la geometría de las cadenas cinemáticas anteriores. Por ejemplo, si la cadena RRR tiene los tres ejes paralelos el desplazamiento generado es 2T1R, si únicamente son dos, el desplazamiento será 1T2R. Una cadena RRRRR con todos sus ejes paralelos genera en el elemento terminal únicamente 3GDL con un desplazamiento 2T1R. Sin embargo, si 3 pares R son paralelos entre sí y los otros dos también lo son entre sí e independientes de los anteriores, el desplazamiento es 3T2R. Por ello, al denominar la cadena por sus pares, si los ejes de los pares que la componen son paralelos se indicarán subrayados o con cursiva (por ejemplo RRRRR para el caso anterior). Para indicar que los ejes se cortan en un punto se pondrán entre paréntesis (por ejemplo RR(RRR) para el caso 2T3R). Finalmente, el par actuado también se subraya (doble subrayado en caso de coincidencia con otro subrayado).
5. En este trabajo únicamente se van a considerar cadenas cinemáticas con la misma dimensión que su correspondiente ligadura cinemática. Es decir, no se considerarán pares redundantes como, por ejemplo, el caso de la cadena RRRR correspondiente al patrón de movimiento 2T1R.
6. La operación de intersección entre los desplazamientos que cada cadena cinemática genera en la plataforma móvil provoca, en ocasiones, restricciones redundantes. Ello es debido a que restringen el mismo tipo de GDL de la plataforma móvil. Sencillas operaciones, considerando el número de GDL de las cadenas cinemáticas y de la plataforma móvil, permiten obtener el número de restricciones redundantes del MP. Un análisis más profundo de las movilidads permitirán conocer el tipo de restricciones redundantes.

Estas premisas de carácter general serán aplicadas en la síntesis de familias de manipuladores paralelos de 3 GDL que se estudian en el capítulo siguiente.

3. SÍNTESIS DE FAMILIAS DE MANIPULADORES PARALELOS DE 3 GDL

3.1. Procedimiento Propuesto

A partir de los conceptos anteriores, se pretende obtener de una forma sistemática todas las familias de manipuladores paralelos de 3 patas y 3 grados de libertad. Sólo se considerarán manipuladores completamente paralelos, aquellos cuyas patas sean estructuralmente iguales, estando preferentemente ubicadas de forma simétrica. Todos los patrones de movimiento del elemento terminal a estudiar son 3T0R, 2T1R, 1T2R y 0T3R, donde T y R hacen referencia al carácter de traslación y rotación de los grados de libertad. Como se ha indicado anteriormente, la metodología que se va a seguir para la obtención de las ligaduras cinemáticas de dimensión 3, 4 y 5 así como los desplazamientos generados correspondientes, es la expuesta en la referencia [SAL2008].

Las arquitecturas resultantes del análisis serán identificadas como existentes en caso de que hayan sido referenciadas en trabajos previos de otros autores, o como novedosas en caso contrario. De esta manera, estas últimas podrían constituir una fuente de nuevos diseños.

En resumen, el procedimiento está basado en las premisas de carácter general para la síntesis de MP de baja movilidad, expuestas en el apartado 2.3. Se obtienen todas las posibles cadenas cinemáticas generadoras de desplazamientos de 3, 4 y 5 GDL que pueden ser empleadas. A continuación se combinan de forma que se obtenga el patrón de movimiento deseado en el MP de 3GDL. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. Determinación del patrón de movimiento o función objetivo del elemento terminal o plataforma móvil del MP objeto de estudio. Los posibles patrones

de movimiento a considerar en la síntesis estructural de MP de 3 GDL son los siguientes: 3TOR, 2T1R, 1T2R y OT3R.

2. Obtención de todas las cadenas cinemáticas de 3, 4 ó 5 GDL posibles de acuerdo a los patrones de movimiento identificados en el punto anterior.
3. Selección de las cadenas cinemáticas que incluyan como mínimo el patrón de movimiento a estudiar.
4. Se van realizando configuraciones de 3 cadenas cinemáticas idénticas con tal disposición geométrica que la intersección de los patrones de movimiento de las 3 cadenas resulte ser desplazamiento de la plataforma móvil buscado.

Las posibles cadenas cinemáticas se obtienen combinando los diferentes pares cinemáticos citados en el punto 2 del apartado 2.3. Utilizando los pares cinemáticos R, P, C, U y S se obtienen las siguientes combinaciones de cadenas cinemáticas de 3 a 5 GDL:

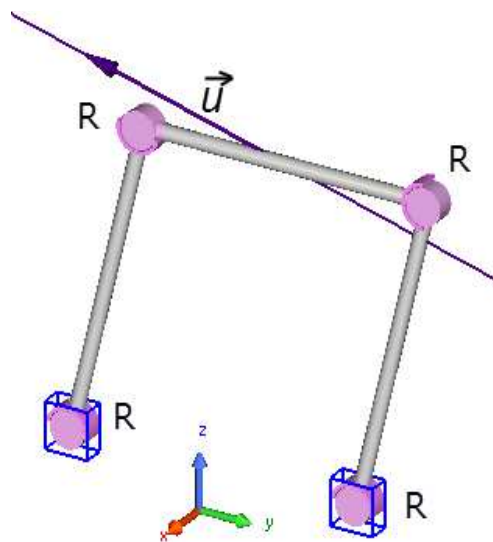
1. Cadenas de 3 GDL: RRR, RRP, RPP, PPP; CR, CP, UR, UP, S y sus permutaciones.
2. Cadenas de 4 GDL: RRRR, RRRP, RRPP, RPPP, CRR, CRP, CPP, CC, URR, URP, UPP, UC, UU, RS, PS y sus permutaciones.
3. Cadenas de 5 GDL: RRRRR, RRRRP, RRRPP, RRPPP, RRRC, RRRU, RRPC, RRPU, RPPC, RPPU, PPPC, PPPU, RCC, RUU, PCC, PUU, RCU, PCU, RRS, PPS, RPS, CS, US y sus permutaciones.

A fin de obtener variaciones de las cadenas cinemáticas descritas, se proponen diferentes técnicas tales como:

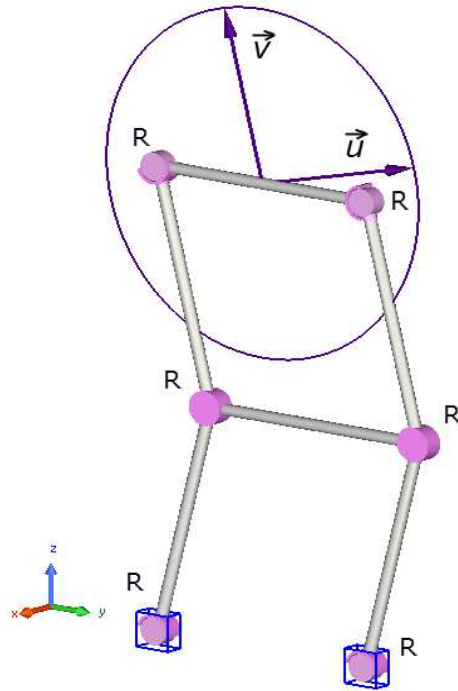
1. Substituir la combinación de un par R y un par P de ejes paralelos por un par cilíndrico.
2. Substituir dos pares R de ejes no paralelos por un par U.
3. Substituir la combinación de tres pares cinemáticos R consecutivos y de ejes concurrentes en un punto, por un par S.
4. Substituir un par P por un paralelogramo plano Pa (Figura 3.1a).
5. Substituir dos pares prismáticos P consecutivos por dos paralelogramos planos contenidos en el mismo plano PaPa (Figura 3.1b) o un paralelogramo espacial doble Pa² (Figura 3.1c).

El par Pa permite una traslación de dirección variable (Figura 3.1a), dependiendo de la posición del par. El par PaPa está formado por dos paralelogramos Pa en serie contenidos en el mismo plano (plano en el que se mueven los elementos) y conectados por un elemento común, tal y como se muestra en la figura 3.1b. Dicho plano es perpendicular a los ejes de los pares de rotación que lo componen. Por tanto, la orientación del plano de las traslaciones es paralela a dicho plano y en consecuencia constante. En el caso del paralelogramo espacial Pa^2 , el plano definido por las dos direcciones de traslación es variable y depende de la posición del par Pa^2 .

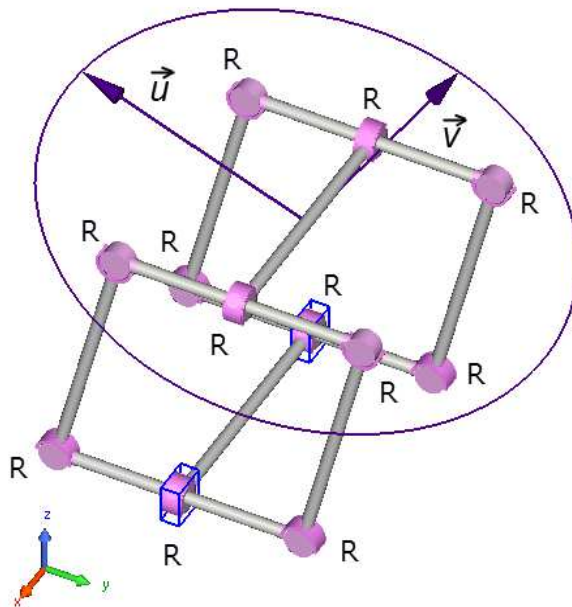
Dado que tanto el par PaPa como el Pa^2 definen dos desplazamientos de traslación independientes con direcciones variables en función de las posiciones de los cuadriláteros, a lo largo de este capítulo se hará referencia en las diferentes configuraciones de cadenas cinemáticas bien al par PaPa o al par Pa^2 , pudiendo aplicarse tanto uno como otro dependiendo del diseño funcional en cada caso.



(a) Par Pa: dirección de traslación en esta posición



(b) Par PaPa: orientación del plano de las traslaciones constante



(c) Par Pa²: orientación del plano de las traslaciones variable

Figura 3.1: Generadores de desplazamiento de traslación de 1 y 2 dimensiones

En las figuras que se muestran en el presente trabajo aparecen dibujados los patrones de movimiento de la plataforma móvil según el siguiente criterio: los ejes con doble flecha representan las direcciones de los ejes de los GDL de rotación y con una única flecha las direcciones de traslación (los desplazamientos mostrados en la figura 3.1 son de traslación únicamente). Las elipses que circunscriben dos flechas representan los planos donde el movimiento de rotación o de traslación es posible.

3.2. Ligaduras Cinemáticas

Tal y como se ha indicado anteriormente, mediante las operaciones de unión e intersección de desplazamientos es posible generar nuevos desplazamientos. En la terminología de la Teoría de Grupos de Desplazamientos se utiliza el concepto de ligadura cinemática tal y como se ha descrito en el apartado 2.2.2. A continuación se van a estudiar todas las posibles ligaduras cinemáticas que permiten movimientos de dimensión 3, 4 y 5. A partir de dichas ligaduras cinemáticas se obtendrán las cadenas cinemáticas generadoras de los diferentes desplazamientos y sus posibles materializaciones por medio de los pares cinemáticos citados en el apartado 3.1 (pares R, P, C, U, S y adicionalmente los pares Pa, PaPa y Pa²).

La actuación de las 3 cadenas cinemáticas idénticas sobre la plataforma móvil permite obtener el patrón de movimiento de 3 GDL deseado, mediante la intersección de desplazamientos entre dichas cadenas. De acuerdo con esto, los MPs construidos a partir de tres cadenas cinemáticas con ligaduras de dimensión 3, deben tener 6 restricciones redundantes para garantizar la movilidad deseada en la plataforma móvil (3 GDL). Ello se debe a que si cada cadena resta 3 GDL a la plataforma y, aún así, ésta tiene 3 GDL, necesariamente el MP habrá de tener un total de 6 restricciones redundantes. Razonando de la misma manera, los MPs construidos a partir de tres cadenas con ligaduras de dimensión 4 tendrán 3 restricciones redundantes. Finalmente, los MPs construidos a partir de tres cadenas con ligaduras de dimensión 5 no tendrán restricciones redundantes.

3.2.1. Ligaduras Cinemáticas de Dimensión 3

En la tabla 3.1, se recogen todas las ligaduras cinemáticas generadoras de desplazamientos de dimensión 3, obtenidas a partir de las ligaduras cinemáticas de

dimensión 2. Los desplazamientos generados por estas ligaduras se recogen en la tabla 3.2.

Ligadura cinemática de dimensión 2	$\{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\}$	$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$

Tabla 3.1: Ligaduras cinemáticas de dimensión 3

Ligadura cinemática de dimensión 3	Desplazamientos generados
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	3TOR, 2TOR, 1TOR
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$	2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$	1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	2T1R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$	1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A,\vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B,\vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C,\vec{r}_c}\}$	OT3R, 1T2R, OT2R, 2T1R, 1T1R, OT1R

Tabla 3.2: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 3

Las cadenas cinemáticas generadoras de los desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 3 y que tienen 3 desplazamientos (no degenerados), son:

Desplazamientos 3TOR:

- Cadenas PPP, PPPa, PPaPa, PaPaPa y sus permutaciones. Las tres direcciones de traslación han de ser linealmente independientes.

Desplazamientos 2T1R:

- Cadenas PPR, PaPR, PaPaR, PC, PaC y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes.

- Cadenas PRR, PaRR, CR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la traslación ha de ser linealmente independiente.
- Cadena RRR. Los tres ejes de rotación han de ser paralelos pero no deben estar contenidos en el mismo plano (Desplazamiento degenerado 1T1R).

Un caso particular es el de MPs cuyos desplazamientos pertenecen al subgrupo de desplazamientos $\{F \vec{u}, \vec{v}\}$, de dimensión 3 y denominado Movimiento Plano, apartado 2.2.2. Este subgrupo está formado por dos desplazamientos de traslación en direcciones de dos vectores \vec{u} y \vec{v} linealmente independientes y una rotación alrededor de un eje ortogonal al plano definido por \vec{u} y \vec{v} . Por tanto, las ligaduras cinemáticas posibles son aquellas que generan desplazamientos 2T1R, siendo el desplazamiento de rotación normal al plano definido por \vec{u} y \vec{v} .

Desplazamientos 1T2R:

- Cadenas PRR, PaRR, PU, PaU, CR y sus permutaciones. Los ejes de los pares de rotación se cortan o se cruzan.
- Cadenas RRR, RU y sus permutaciones. Dos de los ejes han de ser paralelos entre sí o bien los tres ejes están contenidos en un mismo plano cortándose dos a dos.

Desplazamientos 0T3R:

- Cadenas RRR, RU, S y permutaciones. Los tres ejes se cruzan o se cortan en el espacio y no están contenidos en un mismo plano.

Téngase en cuenta que el par PaPa puede ser sustituido por el par Pa² y viceversa, como se ha indicado en el apartado 3.1. Esto es aplicable también a las cadenas cinemáticas generadoras de los desplazamientos generados por las ligaduras cinemáticas de dimensión 4 y 5, descritas a continuación.

3.2.2. Ligaduras Cinemáticas de Dimensión 4

En las tablas 3.3 y 3.4, se muestran las ligaduras cinemáticas generadoras de desplazamientos de dimensión 4, generadas a partir de las ligaduras de dimensión 3. En la tabla 3.5 se recogen los desplazamientos generados por dichas ligaduras de dimensión 4.

Ligadura cinemática de dimensión 3	$\{T_{\vec{q}}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$

Tabla 3.3: Ligaduras cinemáticas de dimensión 4 con un generador de traslación $\{T_{\vec{q}}\}$

Ligadura cinemática de dimensión 3	$\{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$

Tabla 3.4: Ligaduras cinemáticas de dimensión 4 con un generador de rotación $\{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$

Ligadura cinemática de dimensión 4	Desplazamientos generados
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	3TOR, 2TOR, 1TOR
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	1T3R, 2T2R, 3T1R, 1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	1T3R, 2T2R, 3T1R, 1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	2T2R, 3T1R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	1T3R, 2T2R, 3T1R, 1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\}$	1T3R, 2T2R, 3T1R, 1T2R, 2T1R, 1T1R
$\{R_{A, \vec{ra}}\} \cdot \{R_{B, \vec{rb}}\} \cdot \{R_{C, \vec{rc}}\} \cdot \{R_{D, \vec{rd}}\}$	1T3R, 2T2R, 0T3R, 1T2R, 2T1R, 1T1R, 0T1R

Tabla 3.5: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 4

Los desplazamientos generados de dimensión 4 (no degenerados) son:

- Desplazamientos 3T1R. También se denominan desplazamientos Schönflies o SCARA y se representan por el subgrupo de desplazamientos $\{\mathcal{X}_e\}$. Son capaces de realizar un movimiento de traslación en cualquiera de las tres direcciones del espacio y una rotación alrededor de un eje de dirección fija.
- Desplazamientos 2T2R. No poseen estructura de grupo. Simplemente, constituyen un subconjunto de desplazamientos de dimensión 4 del grupo de desplazamientos general $\{\mathcal{D}\}$. Son capaces de generar un movimiento de traslación paralelo a un plano determinado y una rotación alrededor de cualquier dirección paralela a otro plano.
- Desplazamientos 1T3R. Tampoco poseen estructura de grupo. Constituyen un subconjunto de desplazamientos de dimensión 4 del grupo de desplazamientos general $\{\mathcal{D}\}$. Generan un movimiento de traslación en una dirección dada y una rotación en cualquier dirección.

Las cadenas cinemáticas generadoras de los desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 4 y que tienen 4 desplazamientos (no degenerados) son:

Desplazamientos 3T1R (Schönflies o SCARA):

- Cadenas PPPR, PPPaR, PPaPaR, PaPaPaR, PPC, PPaC, PaPaC y sus permutaciones. Las tres direcciones de traslación han de ser linealmente independientes.
- Cadenas PPRR, PPaRR, PaPaRR, PCR, PaCR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la traslación generada ha de ser linealmente independiente con las direcciones de los otros generadores de traslación y estos entre sí. Nótese que no es posible la combinación CC ya que en ese caso las dos direcciones de traslación serían paralelas (no linealmente independientes), al tener que serlo los ejes de rotación.
- Cadenas PRRR, PaRRR, CRR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la dirección de traslación ha de ser linealmente independiente.

Desplazamientos 2T2R:

- Cadenas PPRR, PaPRR, PaPaRR, PPU, PaPU, PaPaU, PCR, PaCR, CC y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y las dos rotaciones también, es decir, que no sean paralelas.
- Cadenas PRRR, PaRRR, PRU, PaRU, CRR, CU y sus permutaciones. Dos de los tres ejes de rotación han de ser paralelos y la traslación generada por ellos ha de ser independiente de la dirección de traslación.
- Cadenas RRRR, RRU, UU y sus permutaciones. Tres de los cuatro ejes de rotación han de ser paralelos sin estar los tres contenidos en el mismo plano.

Desplazamientos 1T3R:

- Cadenas PRRR, PaRRR, PUR, PaUR, PS, PaS, CRR, CU y sus permutaciones. Los ejes de los generadores de rotación han de ser linealmente independientes.
- Cadenas RRRR, RRU, RS, UU y sus permutaciones. Los ejes de los cuatro generadores de rotación han de definir tres direcciones independientes.

3.2.3. Ligaduras cinemáticas de Dimensión 5

Las ligaduras cinemáticas de dimensión 5 se obtienen añadiendo una ligadura cinemática de dimensión 1 a las de dimensión 4 (Tablas 3.3 y 3.4), como se puede apreciar en las tablas 3.6 y 3.7 adjuntas.

Ligadura cinemática de dimensión 4	$\{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{T_u^{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{T_v^{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{T_w^{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{T_q^{\vec{q}}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$
$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\}$	$\{R_{A,r_a}\} \cdot \{R_{B,r_b}\} \cdot \{R_{C,r_c}\} \cdot \{R_{D,r_d}\} \cdot \{T_s^{\vec{s}}\}$

Tabla 3.6: Ligaduras cinemáticas de dimensión 5 con un generador de traslación $\{T_s^{\vec{s}}\}$

Ligadura cinemática de dimensión 4	$\{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\vec{T}_u\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\vec{T}_v\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\vec{T}_w\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\vec{T}_q\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\}$	$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$

Tabla 3.7: Ligaduras cinemáticas de dimensión 5 con un generador de rotación $\{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$

En las tablas 3.8 y 3.9 se recogen los desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5. Por razones de espacio ha sido necesario dividir la tabla en dos partes.

Ligadura cinemática de dimensión 5	Desplazamientos generados
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T0R, 2T0R, 1T0R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{T_{\vec{u}}\} \cdot \{R_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{R_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{R_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{R_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T3R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R

Tabla 3.8: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5, primer grupo

Ligadura cinemática de dimensión 5	Desplazamientos generados
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T1R, 2T1R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{T_{\vec{v}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T3R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{T_{\vec{w}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T3R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	2T3R, 3T2R, 3T1R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{T_{\vec{q}}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	3T2R, 3T1R, 2T3R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{T_{\vec{s}}\}$	3T2R, 3T1R, 2T3R, 2T2R, 2T1R, 1T3R, 1T2R, 1T1R
$\{\mathcal{R}_{A, \vec{r}_a}\} \cdot \{\mathcal{R}_{B, \vec{r}_b}\} \cdot \{\mathcal{R}_{C, \vec{r}_c}\} \cdot \{\mathcal{R}_{D, \vec{r}_d}\} \cdot \{\mathcal{R}_{E, \vec{r}_e}\}$	2T3R, 1T3R, 0T3R, 3T2R, 2T2R, 1T2R, 0T2R, 2T1R, 1T1R, 0T1R

Tabla 3.9: Desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5, segundo grupo

Los desplazamientos de dimensión 5 (no degenerados) generados por estas ligaduras son:

- Desplazamientos 3T2R, capaz de realizar un movimiento de traslación en cualquiera de las tres direcciones del espacio y rotar alrededor de cualquier dirección paralela a un plano determinado.
- Desplazamientos 2T3R, capaz de rotar alrededor de cualquier dirección del espacio y de trasladarse en cualquier dirección paralela a un plano determinado.

Las cadenas cinemáticas generadoras de los desplazamientos generados por las ligaduras de dimensión 5 y que tienen 5 desplazamientos (no degenerados), tal y como se cita en [SAL2008] son:

Desplazamientos 3T2R:

- Cadenas PPPRR, PPPaRR, PPaPaRR, PaPaPaRR, PPCR, PPaCR, PaPaCR, PPPU, PPPaU, PPaPaU, PaPaPaU, PCC, PaCC y sus permutaciones. Las tres direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los ejes de los dos generadores de rotación han de tener diferente dirección.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PaPaRRR, PPUR, PaPUR, PaPaUR, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes, dos de los ejes de rotación han de ser paralelos no coincidentes y linealmente independientes de las dos traslaciones y del tercer eje de rotación.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PRRU, PaRRU, PUU, PaUU, CRRR, CRU y sus permutaciones. Tres de los ejes de rotación han de ser paralelos no coincidentes y linealmente independientes de la dirección de traslación y del eje de la cuarta rotación o bien que los ejes de rotación sean paralelos no coincidentes dos a dos y linealmente independientes entre ellos y con el eje de traslación.
- Cadenas RRRRR, RRRU, RUU y sus permutaciones. Tres ejes de rotación han de ser paralelos entre sí no coincidentes y los otros dos también han de ser paralelos entre sí no coincidentes. Ambos grupos de ejes han de ser linealmente independientes uno con otro.

Desplazamientos 2T3R:

- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PaPaRRR, PPRU, PaPRU, PaPaRU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, PaPaS y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los ejes de rotación también.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS y sus permutaciones. Todas las combinaciones en grupos de tres de los pares de rotación han de ser de direcciones linealmente independientes entre sí.

- Cadena RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US y sus permutaciones. Todas las combinaciones en grupos de tres de los pares de rotación han de ser de direcciones linealmente independientes entre sí.

3.3. Generación de MP de 3 GDL

En este capítulo se pretende obtener de una forma sistemática todas las familias de manipuladores paralelos de 3 grados de libertad. Sólo se considerarán manipuladores completamente paralelos cuyas patas sean estructuralmente iguales, estando ubicadas de forma simétrica preferentemente. Los patrones de movimiento del elemento terminal a estudiar son 3T0R, 2T1R, 1T2R y 0T3R.

Por claridad en las construcciones de las figuras y por limitar la gran cantidad de posibilidades, se ha preferido utilizar pares prismáticos y cilíndricos, en lugar de pares Pa, PaPa o Pa². Además, se ha de tener en cuenta que el par PaPa puede ser sustituido por el par Pa² y viceversa, como se ha indicado en el apartado 3.1.

3.3.1. MP de 3 GDL: Desplazamientos 3T0R

Este tipo de MP se conoce en la literatura especializada por su acrónimo en inglés, TPM (Translational Parallel Manipulator). Únicamente las ligaduras cinemáticas con desplazamientos que contengan como mínimo tres traslaciones independientes permitirán obtener este tipo de MP.

Como referencia interesante se puede citar el trabajo desarrollado por C.C. Lee y J.M. Hervé, [LEE2007], donde estudian los generadores del movimiento denominado por los autores como Movimiento Pseudo-Plano Y (Desplazamiento plano y un movimiento helicoidal perpendicular a ese plano), que tiene estructura de grupo de Lie. A partir de ellos proponen TPM del tipo 3-PHHH, 3-PPHH, 3-PRRR Y 3-PPRR. Cuando el paso del movimiento helicoidal es nulo, el movimiento se transforma en el subgrupo de desplazamientos de Movimiento Plano.

También es interesante mencionar el trabajo de G. Gogu, [GOG2004], donde, aplicando la Teoría de las Transformaciones Lineales, estudia la síntesis de TPM totalmente isotrópicos (a partir de ligaduras cinemáticas de dimensión 3, 4 y 5) del tipo 3-PPP, 3-PPRR, 3-PPRR y sus permutaciones. Recoge también las diferentes

ligaduras constituidas por varios pares de rotación y/o traslación montados en lazo o bucle cerrado, teniendo de 1 a 3 GDL.

En este sentido, también Q. Jin y T.-L. Yang, [JIN2004-2], han estudiado de forma extensa este tipo de TMP con cadenas de 3, 4 y 5 GDL. En el trabajo citado proponen una nueva fórmula para el cálculo de la movilidad de los MP y proponen un concepto de “Single Opened Chain (SOC)” y “Hybrid Single Opened Chain” para la síntesis de MP y la aplican al caso de los TPM.

Dentro del campo de la industria micro-electromecánica, donde los pares cinemáticos convencionales no encuentran aplicación, podemos citar el trabajo de X. Tang y I-Ming Chen, [TAN2006]. Este trabajo, en el que se utilizan juntas prismáticas flexibles, se presentan manipuladores paralelos flexibles (FPM por sus siglas en inglés) de traslación 3T con desplazamientos desacoplados superiores a 2mm y de alta precisión. En [YLI2009] se propone un tipo de FPM con movimiento de traslación plana aplicable para micro y nano manipuladores.

Desplazamientos 3T0R con Ligaduras de Dimensión 3

En este caso las cadenas cinemáticas son PPP, PPPa, PPa², Pa²Pa y sus permutaciones, requiriéndose que las tres direcciones de traslación sean linealmente independientes. En general, cualquier configuración geométrica de tres cadenas cinemáticas con tres pares prismáticos independientes genera seis restricciones redundantes (por ejemplo el MP 3-PPP estudiado en [GOG2004], citado anteriormente).

Desplazamientos 3T0R con Ligaduras de Dimensión 4

La única ligadura de dimensión 4 que incluye tres traslaciones es el grupo generador de los desplazamientos 3T1R. Un caso particular de este generador es el movimiento Schönflies o SCARA cuando la dirección del desplazamiento de rotación R permanece constante a lo largo del movimiento. Las cadenas cinemáticas que materializan esta ligadura son:

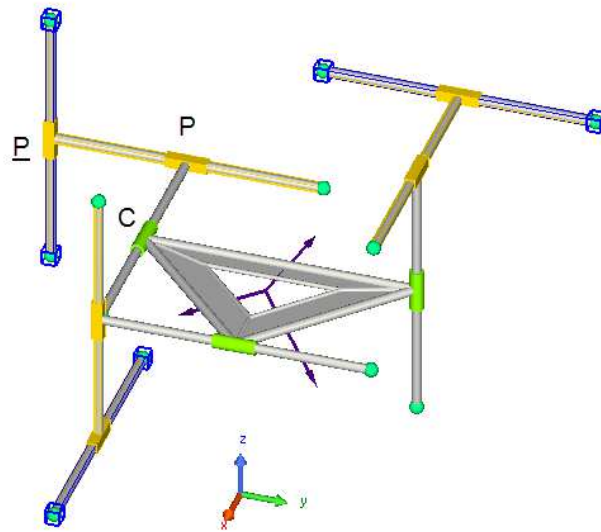
- Cadenas PPPR, PPPaR, PPa²R, Pa²PaR, PPC, PPaC, Pa²C y sus permutaciones. Las tres direcciones de traslación han de ser linealmente independientes.

- Cadenas PRRR, PPaRR, Pa²RR, PCR, PaCR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la traslación generada ha de ser linealmente independiente de las direcciones de los otros generadores de traslación y estos han de serlo entre sí.
- Cadenas PRRR, PaRRR, CRR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la dirección de traslación del par P, Pa ó C no puede ser paralela al plano perpendicular a los ejes de los pares R.

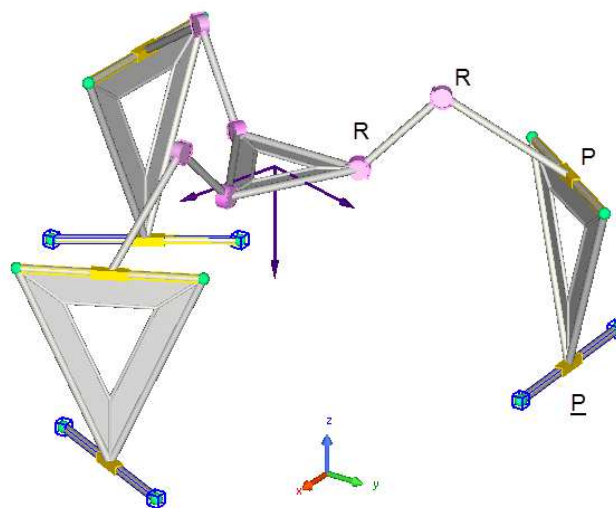
Los MP provenientes de cadenas con tres generadores de traslación y uno de rotación (PPPR, PPPaR,...) no aportan ninguna ventaja respecto al MP 3-PPP, ya que exigen un mayor número de elementos en cada cadena cinemática, cuatro elementos frente a tres, siendo el movimiento de rotación eliminado por la intersección de movimientos de dichas cadenas cinemáticas. Únicamente el mecanismo 3-PPC y sus combinaciones con pares Pa presentan cierta utilidad (Ver figura 3.2a).

Como configuraciones más interesantes provenientes de cadenas con dos generadores de traslación y dos de rotación se pueden destacar la 3-RPC, [CAL2003], y 3-PRC, [YLI2006], y el MP 3-PPRR mostrado en la figura 3.2b. Otra configuración es el Prism-robot de configuración 3-CPR, propuesto por Hervé en 1995, referenciado por Q. Jin y T.-L. Yang en [JIN2004-2]. En dicho trabajo proponen también la configuración 3-RRC, de la que se hablará más adelante, siendo todos ellos MP de movimientos desacoplados.

Con cadenas que tienen un generador de traslación y tres de rotación se puede señalar el robot de la Universidad de Maryland con una configuración 3-RRPaR desarrollado por Tsai y Stamper, [TSA1996], variante posterior del conocido manipulador paralelo Delta, [CLA1991]. También cabe mencionar el robot 3-CRR desarrollado casi simultáneamente por las Universidades de Laval (Kong y Gosselin), [KON2002], y California Riverside (Kim y Tsai).



(a) 3-PPC



(b) 3-PPRR

Figura 3.2: Generadores de desplazamientos 3T0R con ligaduras de dimensión 4

Para finalizar este apartado, se mencionará que, en la referencia [LEE2009-2], C.C. Lee y J.M. Hervé, realizan una descripción de las principales aplicaciones industriales de robots y manipuladores paralelos de traslación diseñados a partir de generadores de desplazamientos tipo Schönflies, entre los cuales citan:

- Robot Delta: Configuración 3-RRPaR (En realidad esta configuración corresponde al robot de la Universidad de Maryland, siendo la del robot Delta 3-RR4-SR).
- Robot Star: Configuración 3-RHPaR
- Robot H: Configuración 3-PRPaR
- Orthoglide: Configuración 3-PRPaR
- MEL micro-finger: Configuración 3-RPaPaR
- Tripteron: Configuración 3-CRR
- Robot Prism: Configuración 3-CPR
- Robot McGill: Configuración 3-RPaRPa

Desplazamientos 3TOR con Ligaduras de Dimensión 5

La única ligadura de dimensión 5 que incluye tres traslaciones es el grupo generador de los desplazamientos 3T2R. Las cadenas cinemáticas a considerar son:

- Cadenas PPPRR, PPPaRR, PPa²RR, Pa²PaRR, PPCR, PPaCR, Pa²CR, PPPU, PPPaU, PPa²U, Pa²PaU, PCC, PaCC y sus permutaciones. Las tres direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los ejes de los dos generadores de rotación también han de ser de independientes.
- Cadenas PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPUR, PaPUR, Pa²UR, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR y sus permutaciones. Las dos traslaciones han de ser linealmente independientes, dos de los ejes de rotación han de ser paralelos no coincidentes e independientes de las dos traslaciones y de la tercera rotación.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PRRU, PaRRU, PUU, PaUU, CRRR, CRU y sus permutaciones. Tres de los ejes de rotación han de ser paralelos no coincidentes y linealmente independientes de la dirección de traslación y del eje de la cuarta rotación; o bien que los ejes de rotación sean paralelos no coincidentes dos a dos y linealmente independientes entre ellos y con el eje de traslación.
- Cadenas RRRRR, RRRU, RUU y sus permutaciones. Tres ejes de rotación han de ser paralelos entre sí no coincidentes y los otros dos también, siendo ambos grupos linealmente independientes uno respecto del otro.

El uso de cadenas cinemáticas de 5 GDL para la generación de MPs de 3 GDL supone, en principio, una arquitectura más compleja, es decir, un mayor número de pares

cinemáticos y elementos. Sin embargo, al no tener restricciones redundantes, es de esperar un mejor funcionamiento práctico del manipulador, dado que un mecanismo con restricciones redundantes requiere una gran precisión de fabricación a fin de evitar bloqueos del mismo durante su funcionamiento.

Así pues, las cadenas cinemáticas con tres generadores de traslación y dos de rotación del tipo PPPRR, PPPaRR, etc., en principio no aportan nada respecto del MP 3-PPP, excepto la ya mencionada cuestión de las restricciones redundantes. Para conseguir únicamente tres traslaciones hay que posicionar las tres cadenas cinemáticas iguales de manera que se anulen las dos rotaciones, como en el MP 3-P \underline{P} CR de la figura 3.3.

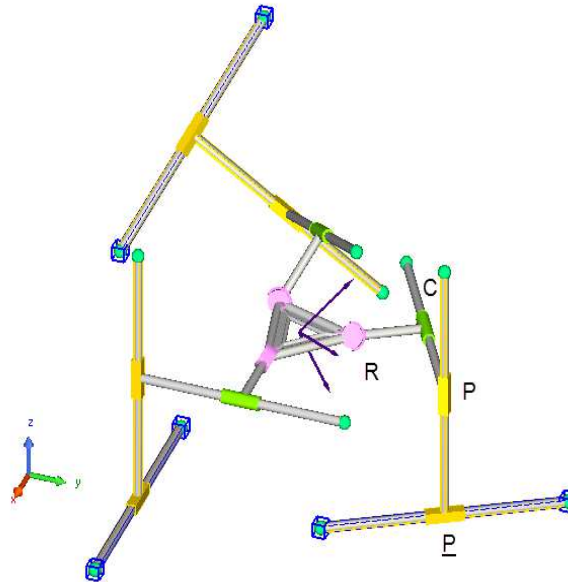


Figura 3.3: Generadores de desplazamientos 3TOR con ligaduras de dimensión 5 (3-P \underline{P} CR)

Lo mismo puede decirse de las cadenas cinemáticas con dos generadores de traslación y tres de rotación. Todavía más, la complejidad de su arquitectura es mayor al incrementarse el número de pares y de elementos.

Dentro del grupo de cadenas con un generador de traslación es obligado citar el robot Delta de 3GDL de traslación (Patente de Clavel, 1990), [CLA1991], cuya configuración es de tres cadenas cinemáticas accionadas por 3 motores rotativos, cada una de las cuales permite cinco desplazamientos 3T2R. La configuración del robot Delta es 3-RR4-SR, donde 4-S representa un cuadrilátero articulado formado por 4 pares esféricos, ver

figura 3.4. Este robot es uno de los de mayor éxito comercial y con aplicación tanto en la industria alimentaria como en otros campos como el de la cirugía. Ver figura 3.5.

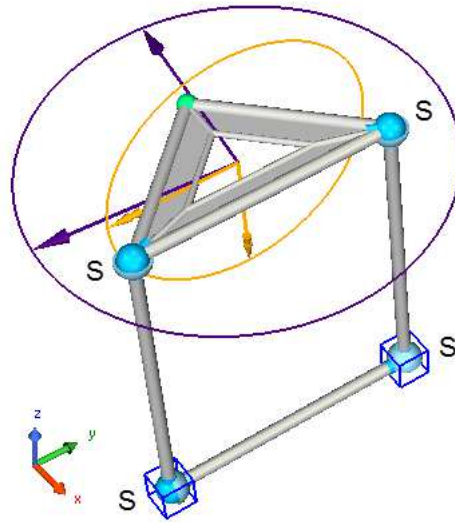


Figura 3.4: Patrón de movimiento del cuadrilátero articulado 4-S.



Figura 3.5: Robot Delta. Cortesía de ABB Flexible Automation

Dentro del grupo de cadenas con un generador de traslación también se puede citar la configuración 3-UPU, estudiada en [TSA2000], [PAC2000], [WAL2009] y [WAL2011].

Mención aparte merecen las configuraciones de cinco generadores de rotación, como RRRRR, RRRU, etc. En este caso se simplifican los problemas constructivos y de mantenimiento del MP (desgaste, gripado,...) y ofrecen una buena alternativa al uso de pares prismáticos para desarrollar MP con desplazamientos 3TOR. Estas configuraciones han sido estudiadas por C.C. Lee y J.M. Hervé, [LEE2006], Q. Jin y T.-L. Yang, [JIN2004-2] y por Z. Huang y Q.C. Li, [HUA2004], [LI2004-1], [HUA2003] y [HUA2002]. Por ejemplo, en el MP 3-RRRRR, cada cadena cinemática está formada por cinco pares de rotación, tres de ellos tienen ejes paralelos entre sí y no coincidentes, generando un movimiento 2T1R, y los otros dos ejes son también paralelos no coincidentes e independientes linealmente del primer grupo, generando a su vez un desplazamiento de traslación y uno de rotación, ambos independientes de los anteriores. Al combinar los desplazamientos de las tres cadenas cinemáticas por medio de la operación de intersección de desplazamientos, se anulan las rotaciones, quedando únicamente los tres desplazamientos de traslación, tal y como se muestra en la figura 3.6.

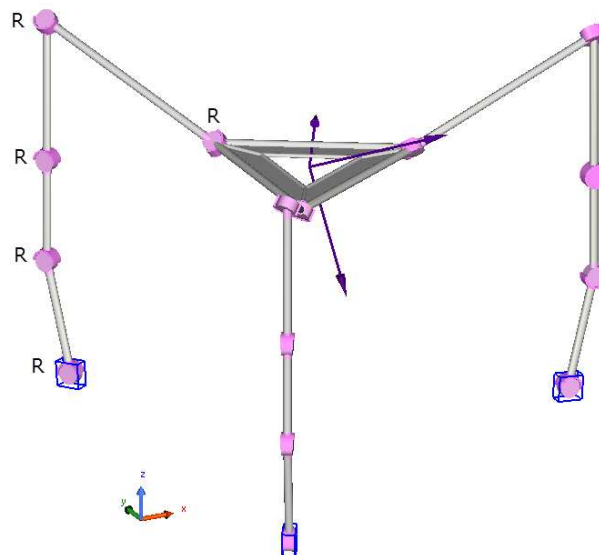


Figura 3.6: Generadores de desplazamientos 3TOR con ligaduras de dimensión 5 (3-RRRRR)

Como resumen, en la tabla 3.10 se recogen las diferentes cadenas cinemáticas de 3, 4 y 5 dimensiones citadas anteriormente. Los requisitos geométricos han sido descritos anteriormente.

	Desplazamientos 3T0R
Cadenas cinemáticas de 3 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPP, PPPa, PPa², Pa²Pa.
Cadenas cinemáticas de 4 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPPR, PPPaR, PPa²R, Pa²PaR, PPC, PPaC, Pa²C. • PPRR, PPaRR, Pa²RR, PCR, PaCR. • PRRR, PaRRR, CRR.
Cadenas cinemáticas de 5 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPPRR, PPPaRR, PPa²RR, Pa²PaRR, PPCR, PPaCR, Pa²CR, PPPU, PPPaU, PPa²U, Pa²PaU, PCC, PaCC. • PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPUR, PaPUR, Pa²UR, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR. • PRRRR, PaRRRR, PRRU, PaRRU, PUU, PaUU, CRRR, CRU. • RRRRR, RRRU, RUU.

Tabla 3.10: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 3T0R (y permutaciones)

3.3.2. MP de 3 GDL: Desplazamientos 2T1R

Siguiendo la metodología aplicada en la síntesis de MP de desplazamientos 3T0R, es necesario tener en cuenta que únicamente las ligaduras cinemáticas con desplazamientos que contengan al menos dos traslaciones y una rotación permitirán obtener manipuladores paralelos con desplazamientos 2T1R. Si el eje de rotación es perpendicular al plano definido por las dos traslaciones, este desplazamiento se conoce como Movimiento Plano y la cadena cinemática que lo produce se denomina Par Plano.

En el caso de cadenas cinemáticas que contengan tres desplazamientos de traslación no es posible anular ninguno de ellos. Es decir, la intersección de los desplazamientos de las tres patas no anularía ninguna de las traslaciones. Esto es muy importante ya que supone que, no se pueden utilizar cadenas cinemáticas que contengan tres desplazamientos de traslación, si el MP en estudio requiere menos de tres traslaciones.

Teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, se van a estudiar las posibles configuraciones que se pueden obtener utilizando las diferentes cadenas cinemáticas obtenidas en el apartado 3.2. Concretamente, dentro de las ligaduras cinemáticas de dimensión 3, apartado 3.2.1, se estudiarán las cadenas generadoras de desplazamientos 2T1R; dentro de las ligaduras de dimensión 4, apartado 3.2.2, se estudiarán las cadenas generadoras de desplazamientos 2T2R; y finalmente, dentro de las ligaduras de dimensión 5, apartado 3.2.3, se estudiarán las cadenas generadoras de desplazamientos 2T3R. De acuerdo con lo dicho en el párrafo anterior, las cadenas cinemáticas generadoras de desplazamientos 3T2R y 3T3R no son válidas para obtener MPs con desplazamientos 2T1R.

Finalmente, se observa que, dado que los MPs en estudio tienen las tres cadenas cinemáticas idénticas, el plano de los desplazamientos de traslación es el mismo para todas las cadenas y la rotación no puede sacar a la plataforma de ese plano, con lo que se deduce que el desplazamiento de la plataforma pertenece en todos los casos al grupo de Movimiento Plano, $\{F \vec{u}, \vec{v}\}$.

Como referencia se puede citar el trabajo desarrollado por X. Kong y C.M. Gosselin, [KON2005], donde, basándose en la Teoría de Torsores y el concepto de Cadena Virtual Equivalente tipo PPR, desarrollan la síntesis de la familia de MPs 2T1R con tres cadenas cinemáticas distintas.

También se puede citar el trabajo de G. Gogu, [GOG2011], donde este autor estudia los MPs del tipo 2T1R con tres cadenas cinemáticas distintas, obteniendo una familia de MPs en la que el movimiento de rotación está contenido en el plano de los desplazamientos de traslación y en el que el eje de rotación cambia entre dos posiciones ortogonales al pasar por una singularidad.

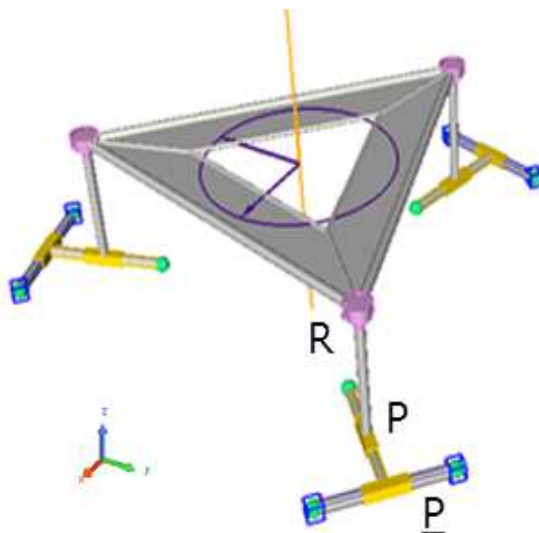
Desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 3

Se han de considerar únicamente las cadenas cinemáticas generadoras de desplazamientos que contengan dos traslaciones y una rotación, por lo que con dimensión 3 se encuentra únicamente el generador de desplazamientos 2T1R. Las cadenas cinemáticas a considerar serán:

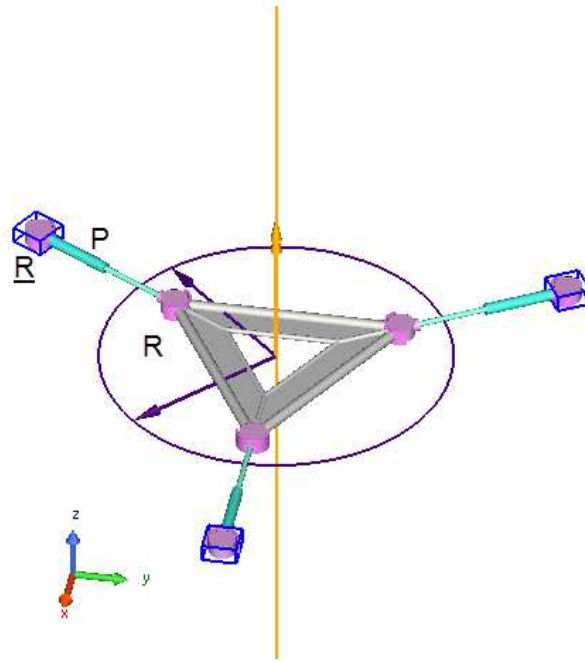
- Cadenas PPR, PaPR, Pa²R, PC, PaC y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes.
- Cadenas PRR, PaRR, CR y sus permutaciones. Los pares de rotación han de ser de ejes paralelos no coincidentes y la traslación ha de ser linealmente independiente de la generada por los citados pares de rotación.
- Cadena RRR. Los tres ejes de rotación han de ser paralelos.

La disposición geométrica de las tres patas idénticas habrá de ser tal que garantice en todo momento que sus planos de traslación sean paralelos, al igual que la direcciones de rotación. En la figura 3.7 adjunta se muestran algunas configuraciones de MPs que cumplen estos requerimientos.

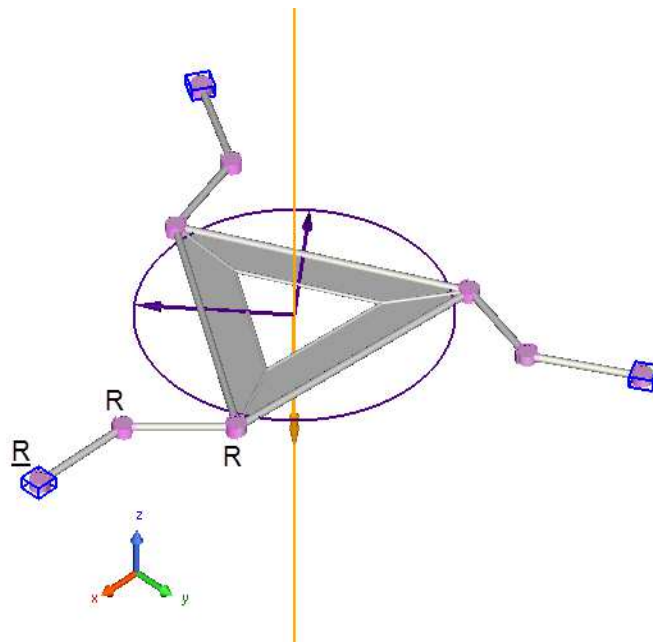
En la figura 3.7a se representa el MP 3-PPR, cuya plataforma móvil se desplaza con Movimiento Plano $\{F \vec{u}, \vec{v}\}$. En la figura 3.7b se representa el MP 3-RPR y en la figura 3.7c el MP 3-RRR, en ambos el movimiento de la plataforma móvil también corresponde al Movimiento Plano.



(a) 3-PPR



(b) 3-RPR



(c) 3-RRR

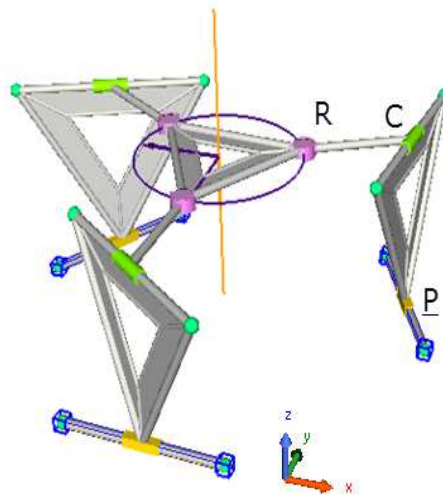
Figura 3.7: Generadores de desplazamientos 2T1R con ligaduras de dimensión 3

Desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 4

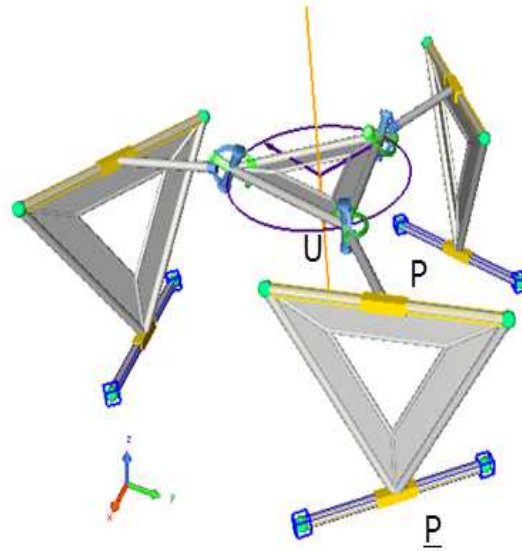
De nuevo y de acuerdo con lo anteriormente dicho, los generadores de desplazamientos 3T1R no son válidos para este tipo de desplazamientos. Las cadenas cinemáticas a considerar serán las correspondientes a los desplazamientos 2T2R únicamente:

- Cadenas PPRR, PaPRR, Pa²RR, PPU, PaPU, Pa²U, PCR, PaCR, CC y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y las dos rotaciones también.
- Cadenas PRRR, PaRRR, PRU, PaRU, CRR, CU y sus permutaciones. Dos de los tres ejes de rotación han de ser paralelos, y la traslación generada por ellos ha de ser independiente de la dirección de traslación restante.
- Cadenas RRRR, RRU, UU y sus permutaciones. Tres de los cuatro ejes de rotación han de ser paralelos.

En las figuras 3.8a y 3.8b se muestran dos MPs, 3-PCR y 3-PPU, generados ambos a partir de ligaduras cinemáticas de desplazamientos 2T2R. En ambos casos se observa que la intersección de desplazamientos 2T2R de cada una de las patas genera en la plataforma móvil un desplazamiento 2T1R perteneciente al grupo de Movimiento Plano $\{T \vec{u}, \vec{v}\}$.



(a) 3-PCR



(b) 3-PPU

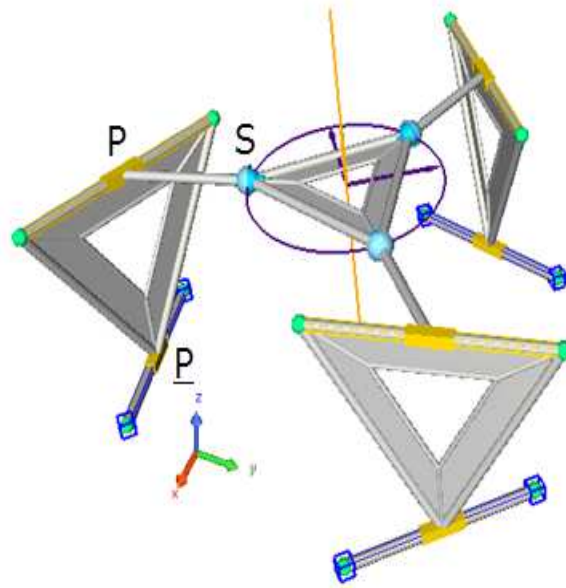
Figura 3.8: Generadores de desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 4

Desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 5

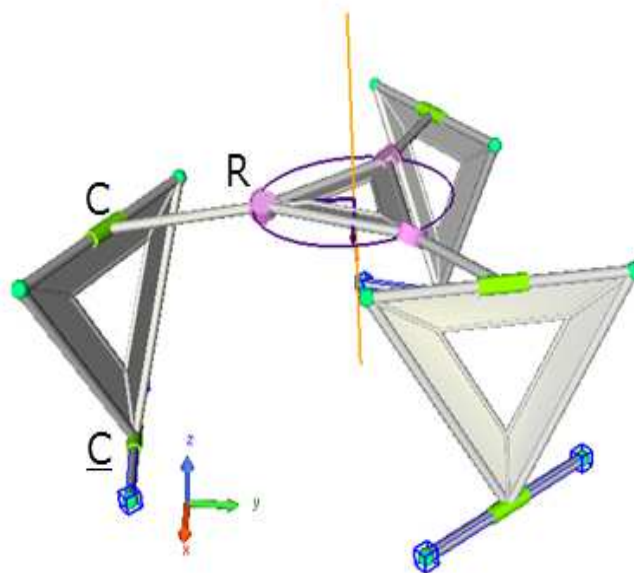
Por las razones anteriormente citadas, se desechan las ligaduras con desplazamientos 3T2R y se estudiarán únicamente las ligaduras con desplazamientos 2T3R:

- Cadenas PRRRR, PaRRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los ejes de rotación también han de serlo.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS y sus permutaciones. Todas las combinaciones en grupos de tres de los pares de rotación han de ser linealmente independientes entre sí.
- Cadena RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US y sus permutaciones. Todas las combinaciones en grupos de tres de los pares de rotación han de ser linealmente independientes entre sí.

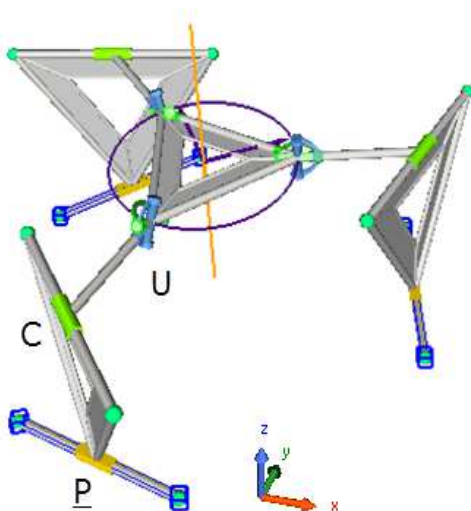
En las figuras 3.9a, 3.9b y 3.9c se muestran tres MP, 3-PPS, 3-CCR y 3-PCU, representativos del grupo de cadenas formadas por dos generadores de traslación y tres de rotación. En todos los casos los desplazamientos de la plataforma móvil también corresponden al grupo de desplazamientos de Movimiento Plano $\{F_{\vec{u}, \vec{v}}\}$, tal y como se ha mencionado anteriormente.



(a) 3-PPS



(b) 3-CCR



(c) 3-PCU

Figura 3.9: Generadores de desplazamientos 2T1R con Ligaduras de Dimensión 5

Como resumen, en la tabla 3.11 se recogen las diferentes cadenas cinemáticas de 3, 4 y 5 dimensiones citadas anteriormente. Los requisitos geométricos han sido descritos anteriormente.

	Desplazamientos 2T1R
Cadenas cinemáticas de 3 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPR, PaPR, Pa²R, PC, PaC. • PRR, PaRR, CR. • RRR.
Cadenas cinemáticas de 4 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPRR, PaPRR, Pa²RR, PPU, PaPU, Pa²U, PCR, PaCR, CC. • PRRR, PaRRR, PRU, PaRU, CRR, CU. • RRRR, RRU, UU.
Cadenas cinemáticas de 5 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S. • PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS. • RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US.

Tabla 3.11: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 2T1R (y permutaciones)

Se observa que en todos los MPs propuestos, con tres cadenas cinemáticas idénticas, los planos de traslación de la tres cadenas cinemáticas son paralelos y la rotación

restante es perpendicular a dichos planos. Por ello el movimiento de la plataforma, en todo los casos, es el conocido Movimiento Plano $\{F \vec{u}, \vec{v}\}$, tal y como se ha demostrado al principio de este apartado.

3.3.3. MP de 3 GDL: Desplazamientos 1T2R

Siguiendo la metodología aplicada, se comprende que únicamente las ligaduras cinemáticas con desplazamientos que contengan al menos una traslación y dos rotaciones permitirán obtener manipuladores paralelos con desplazamientos 1T2R. De acuerdo con el razonamiento expuesto en el apartado 3.3.2, también aquí hay que desechar las ligaduras que contengan tres generadores de traslación.

Desplazamientos 1T2R con Ligaduras de Dimensión 3

En este caso las únicas ligaduras a considerar son las que tienen desplazamiento 1T2R:

- Cadenas PRR, PaRR, PU, PaU, CR y sus permutaciones. Los ejes de los pares de rotación se cortan o se cruzan.
- Cadenas RRR, RU y sus permutaciones. Dos de los ejes han de ser paralelos entre sí o bien los tres ejes están contenidos en un mismo plano cortándose dos a dos.

Los desplazamientos impuestos por cada cadena cinemática a la plataforma móvil han de ser idénticos para mantener el patrón de movimiento 1T2R de la plataforma móvil. Por tanto, a fin de evitar que los desplazamientos de rotación sean anulados, es necesario que los ejes de los pares de rotación sean coincidentes en las tres cadenas, con lo que el MP tendrá dos desplazamientos de rotación y uno de traslación. Por esta razón, con estas cadenas no ha sido posible realizar ninguna construcción de utilidad.

Desplazamientos 1T2R con Ligaduras de Dimensión 4

En este caso, las ligaduras a considerar son las correspondientes a los desplazamientos 2T2R y 1T3R.

Desplazamientos 2T2R:

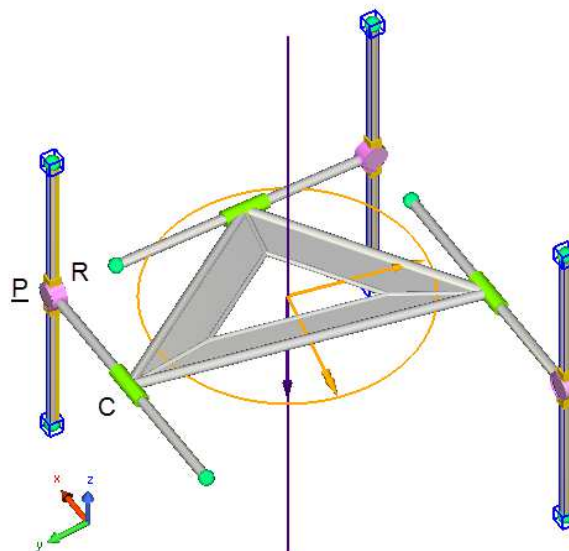
- Cadenas PRRR, PaRRR, Pa²RR, PPU, PaPU, Pa²U, PCR, PaCR, CC y permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes, así como las dos rotaciones.

- Cadenas PRRR, PaRRR, PRU, PaRU, CRR, CU y permutaciones. Dos de los tres ejes de rotación han de ser paralelos, y la traslación generada por ellos ha de ser independiente de la traslación restante.
- Cadenas RRRR, RRU, UU y permutaciones. Tres de las cuatro rotaciones tienen que ser paralelas, por lo tanto queda descartada la cadena UU.

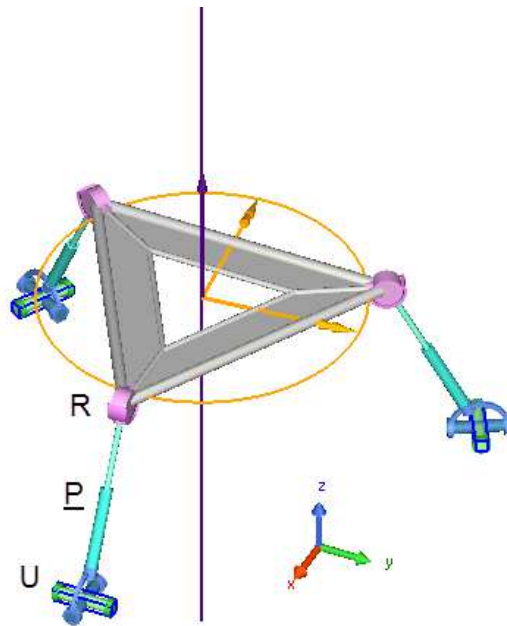
Desplazamientos 1T3R:

- Cadenas PRRR, PaRRR, PUR, PaUR, PS, PaS, CRR, CU y sus permutaciones. Los ejes de los generadores de rotación han de ser linealmente independientes.
- Cadenas RRRR, RRU, RS, UU y sus permutaciones. Los ejes de los cuatro generadores de rotación han de definir tres direcciones independientes.

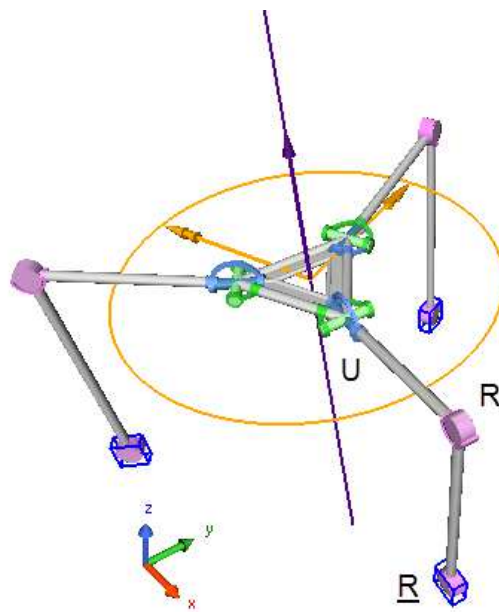
Algunas arquitecturas de plataformas con desplazamientos 2T2R son: el MP 3-PRC (figura 3.10a), el MP 3-UPR (figura 3.10b), y el MP 3-RRU (figura 3.10c). Todos estos MP presentan únicamente una movilidad 1T2R instantánea, pudiéndose conseguir una movilidad permanente 1T1R forzando una dependencia lineal en el movimiento de los accionamientos del MP. Con cadenas 1T3R no ha sido posible realizar ninguna construcción de utilidad.



(a) 3-PRC



(b) 3-UPR



(c) 3-RRU

Figura 3.10: Generadores de desplazamientos 1T2R con ligaduras de dimensión 4

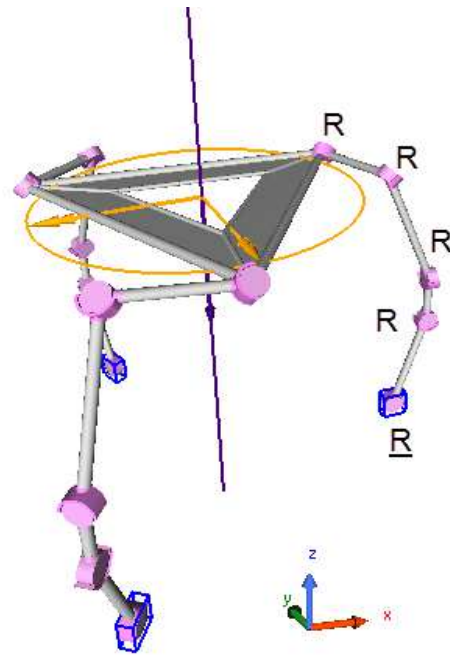
Desplazamientos 1T2R con Ligaduras de Dimensión 5

Por la razón indicada anteriormente, se desechan las ligaduras de desplazamientos 3T2R y se estudiarán únicamente las ligaduras de desplazamientos 2T3R:

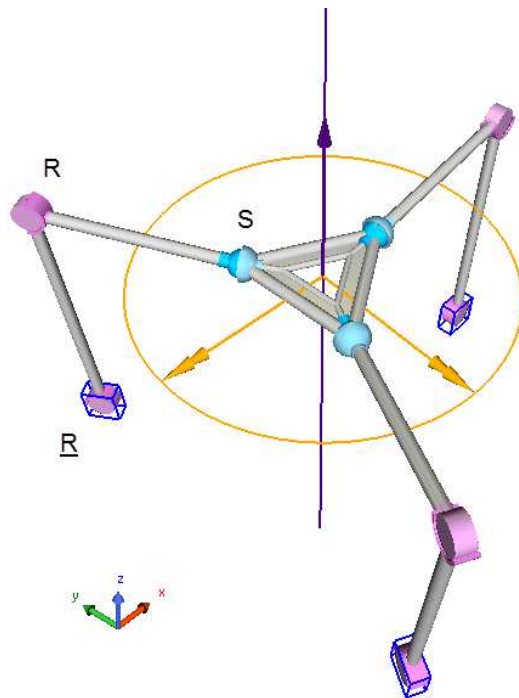
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los tres ejes de rotación también.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS y permutaciones. Las direcciones de tres pares de rotación han de ser linealmente independientes entre sí. El cuarto par de rotación puede ser o no paralelo a cualquiera de los tres. En caso de que lo fuera, la traslación resultante debe de ser independiente de la dirección de traslación del par prismático.
- Cadenas RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US y sus permutaciones. Igual que en caso anterior, las direcciones de al menos tres pares de rotación han de ser linealmente independientes entre sí. Las otras dos rotaciones de la cadena ya no pueden generar más rotaciones en el elemento terminal, por lo tanto lo que resultan son las dos restantes traslaciones.

A este grupo pertenece el conocido MP 3-RPS, estudiado por ejemplo en las referencias [KIM2002], [HUA2003], [HAN2003] y [HUY2005]. Otros manipuladores como el MP 3-RRPU o el MP 3-PRRU han sido estudiados por Q. Li y J.M. Hervé [LI2010].

Los manipuladores 3-RR(RRR) y 3-RRS representados en las figuras 3.11a y 3.11b respectivamente, incluyen cadenas cinemáticas con cinco ejes de rotación. Aunque en este caso no hay necesidad de buscar restricciones redundantes para que la plataforma tenga 3 GDL, dado que las ligaduras son de dimensión 5, sí que hay que imponer alguna condición geométrica para conseguir convertir alguno de los 3 GDL de rotación en una traslación. Hay que tener en cuenta que la operación de intersección de movimientos elimina en la plataforma, en primer lugar, las traslaciones, excepto en dos casos. El primero se da cuando las patas tienen tres traslaciones con lo que no se elimina ninguna traslación. El segundo se da cuando se impone alguna característica geométrica que fuerza la eliminación de un desplazamiento de rotación antes que una traslación, como sucede en los MP de la figura 3.11, donde cada pata tiene los dos desplazamientos de traslación contenidos en un plano vertical, cuya intersección con el de las otras dos patas define un desplazamiento de traslación de la plataforma móvil según el eje vertical.



(a) 3-RR(RRR)



(b) 3-RRS

Figura 3.11: Generadores de desplazamientos 1T2R con ligaduras de dimensión 5

Ahora bien, si la unión de las cadenas cinemáticas a la plataforma móvil es tal que los centros geométricos del movimiento esférico de cada pata del MP $3\text{-}\underline{RR}(RRR)$ coinciden en un mismo punto, los 3 GDL de rotación se mantienen, obteniéndose un MP con desplazamientos $1T3R$, como el mostrado en la figura 3.12.

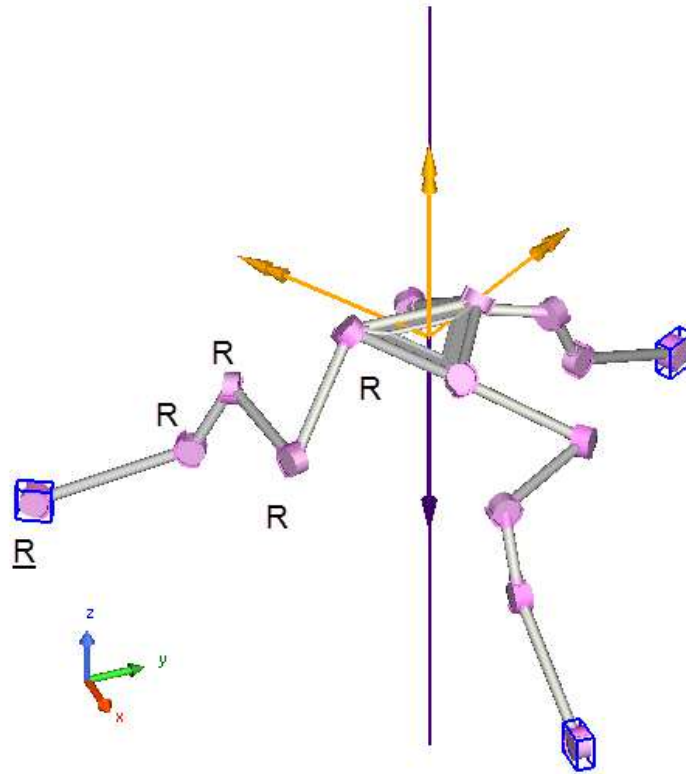


Figura 3.12: MP $3\text{-}\underline{RR}(RRR)$ generador de desplazamientos $1T3R$

Como resumen, en la tabla 3.12 se recogen las diferentes cadenas cinemáticas de 3, 4 y 5 dimensiones citadas anteriormente. Los requisitos geométricos han sido descritos anteriormente.

	Desplazamientos 1T2R
Cadenas cinemáticas de 3 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • MPs sin uso práctico
Cadenas cinemáticas de 4 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • Únicamente MPs con movilidad instantánea
Cadenas cinemáticas de 5 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S. • PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS. • RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US.

Tabla 3.12: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 1T2R (y permutaciones)

3.3.4. MP de 3 GDL: Desplazamientos 0T3R

Únicamente las ligaduras cinemáticas que contengan al menos tres rotaciones permitirán obtener MP con desplazamientos 0T3R.

Dentro del grupo de MP de 0T3R se ha de referenciar un tipo de mecanismos que se conoce en la literatura especializada por su acrónimo en inglés, SPM (Spherical Parallel Manipulator), caracterizados porque todos los puntos de la plataforma móvil se desplazan sobre superficies esféricas concéntricas. A continuación se citan algunos trabajos que estudian los MP esféricos (SPM).

Un ejemplo de SPM de dimensión 3, 3-(RRR) esférico, lo constituye el Agile Eye, [GOS1996], pensado para orientar de forma rápida una cámara situada en el elemento terminal dentro de un cono de visión de 140° con una torsión de ±30°, pudiendo alcanzar velocidades angulares superiores a las que el ojo humano es capaz de desarrollar.

También como referencia interesante de SPM es necesario mencionar el trabajo desarrollado por X. Kong y C.M.Gosselin, [KON2004-1]. Basándose en la teoría de torsores estudian la síntesis de tipo de MP esféricos de 3 GDL, introduciendo el concepto de "Spherical Parallel Kinematic Chain", que consiste en determinar los requisitos geométricos que han de cumplir las cadenas cinemáticas para realizar un movimiento esférico de 3GDL.

Estos mismos autores, X. Kong y C.M: Gosselin, en otro trabajo, ver referencia [KON2004-2], proponen un método específico de síntesis de MP esféricos, basado en el método propuesto por Bennett a principios del siglo XX, que consiste en combinar cadenas cinemáticas esféricas 3-RRR con 3 cadenas de Delassus de 4 barras y 1 GDL denominadas RXXX (X representa una unión R, P ó H). Eliminando las uniones R comunes a una cadena RRR y una RXXX se obtiene un nuevo mecanismo esférico de 3 cadenas y 3 GDL.

También es interesante el trabajo de T.A. Hess-Coelho, [HESS2006], donde desarrolla un método cualitativo para la síntesis de MP esféricos y define los requisitos de selección de la arquitectura óptima.

Por último, merece la pena citar el trabajo de C.W. Wampler, [WAM2004], en el que realiza el análisis del desplazamiento de mecanismos esféricos de 1 a 3 lazos, planteando las matrices de rotación y los cuaterniones, utilizando el método de eliminación de Sylvester.

Desplazamientos 0T3R con Ligaduras de Dimensión 3

En este caso solo caben ligaduras cinemáticas de desplazamientos 0T3R. Por lo tanto, las cadenas cinemáticas a estudiar serán RRR, RU, S y permutaciones. Las direcciones de los tres ejes de rotación deben de ser linealmente independientes.

Dentro de este grupo se observa que la única forma de conseguir un MP de 0T3R consiste en construir las cadenas de forma que los ejes de los pares cinemáticos se corten permanentemente en un punto en el espacio, siendo este punto el mismo para las tres cadenas. Dado que las cadenas cinemáticas RU y S no cumplen este requisito geométrico, únicamente se pueden construir arquitecturas con cadenas RRR. En este último caso, si se cumplen las condiciones geométricas citadas, todos los puntos de la plataforma se moverán en superficies esféricas concéntricas con centro en dicho punto. Esta es la solución que da el manipulador 3-(RRR) esférico, siendo el Agile Eye citado anteriormente, [GOS1996], una materialización industrial de esta configuración.

Desplazamientos 0T3R con Ligaduras de Dimensión 4

Dado que las ligaduras cinemáticas a estudiar han de contener al menos tres desplazamientos de rotación, sólo se estudiarán aquellas de desplazamientos 1T3R.

Las cadenas cinemáticas que se pueden generar son:

- Cadenas PRRR, PaRRR, PUR, PaUR, PS, PaS, CRR, CU y sus permutaciones. Los ejes de los generadores de rotación han de ser linealmente independientes.
- Cadenas RRRR, RRU, RS, UU y sus permutaciones. Los ejes de los cuatro generadores de rotación han de definir una base de dimensión 3.

En el primer grupo de cadenas, asumiendo que el par prismático está situado en el extremo final de cada cadena cinemática y una vez cancelada la traslación de cada pata como consecuencia de la intersección de desplazamientos en la plataforma móvil, resulta que la única posibilidad de movimiento es la parte esférica del MP 3-(RRR). Lo mismo ocurre si el par prismático está situado en algún elemento intermedio de cada cadena cinemática. Cuando el par prismático está al comienzo de cada cadena cinemática, unido al elemento fijo, la traslación de cada pata también se cancelará como consecuencia de la intersección de desplazamientos en la plataforma móvil, obteniéndose el movimiento esférico de la plataforma. Únicamente si los tres pares prismáticos unidos al elemento fijo tienen sus ejes paralelos, se mantendrá un cuarto desplazamiento de traslación adicional al movimiento esférico.

El segundo grupo de cadenas conduce al mismo resultado, es decir, que la única posibilidad de movimiento es el movimiento esférico, sólo que ahora se tendrá que bloquear permanentemente una de las rotaciones de cada pata para tener un mecanismo esférico. Como es evidente, es más interesante utilizar cadenas de dimensión 3 para obtener un SPM.

Desplazamientos 0T3R con Ligaduras de Dimensión 5

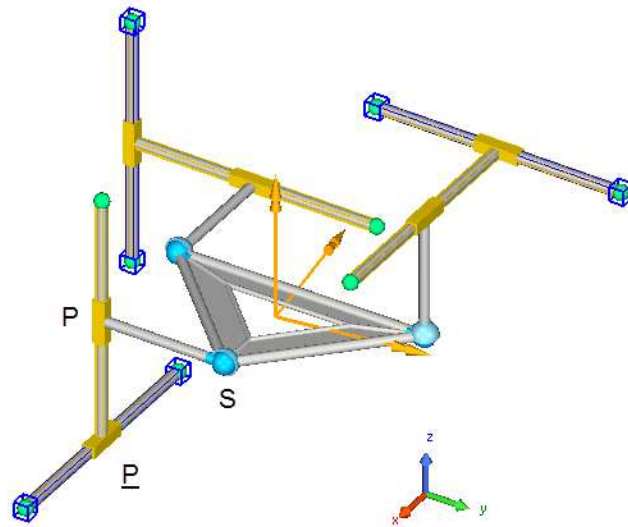
Dado que las ligaduras cinemáticas a estudiar han de contener al menos tres rotaciones, se considerarán únicamente las ligaduras de desplazamientos 2T3R. Las cadenas cinemáticas que se pueden generar son:

- Cadenas PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S y sus permutaciones. Las dos direcciones de traslación han de ser linealmente independientes y los ejes de rotación también.
- Cadenas PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS y sus permutaciones. Los ejes de los cuatro generadores de rotación han de definir tres direcciones independientes.
- Cadenas RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US y sus permutaciones. Los ejes de los cinco generadores de rotación han de definir tres direcciones independientes.

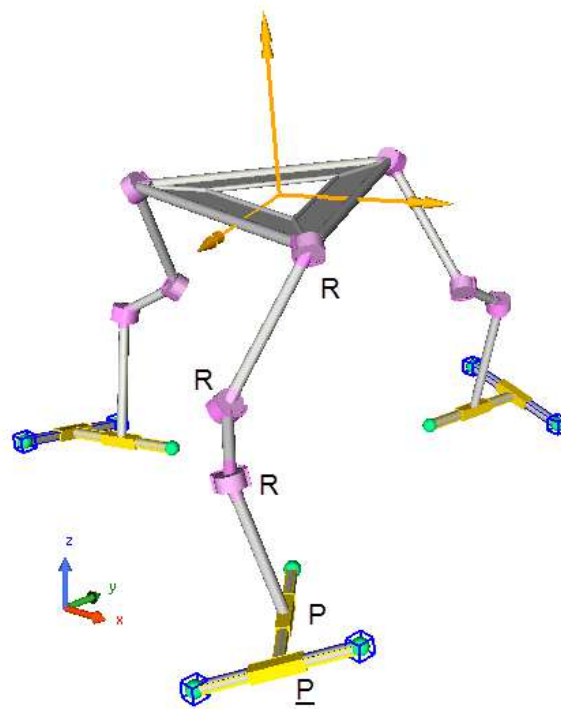
Con todas estas cadenas se pueden generar una gran cantidad de manipuladores. Todos ellos no tienen ninguna particularidad geométrica, dado que con ligaduras de dimensión 5 no hay restricciones redundantes, y además, al aplicar la operación de intersección de desplazamientos de las cadenas cinemáticas, lo primero que se elimina son las traslaciones, consiguiéndose el movimiento OT3R de la plataforma móvil.

Este tipo de manipuladores paralelos se caracterizan porque las tolerancias de fabricación y los desalineamientos de montaje no son tan críticos como en otros MP con restricciones redundantes.

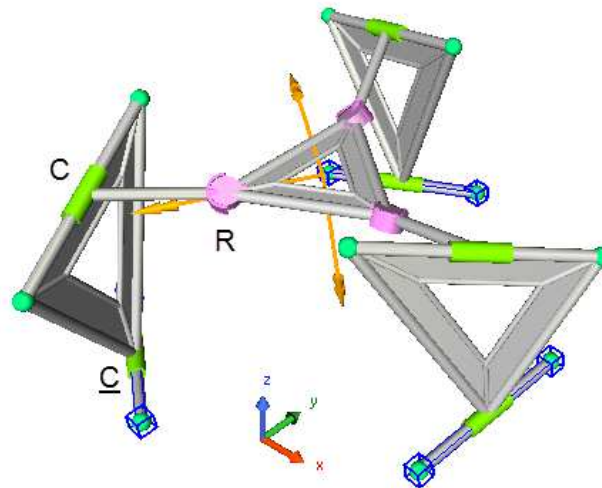
En concreto, usando cadenas con dos pares prismáticos (o equivalentes) se obtienen manipuladores paralelos como los mostrados en la figura 3.13: 3-PPS (figura 3.13a), 3-PPRRR (figura 3.13b), 3-CCR (figura 3.13c), 3-PCU (figura 3.13d). En las figuras 3.9a, 3.9b y 3.9c se proponen también manipuladores paralelos 3-PPS, 3-CCR y 3-PCU, con la misma configuración morfológica en sus cadenas cinemáticas que los de las figuras 3.13a, 3.13c y 3.13d, siendo las diferencias de carácter geométrico. Los MP mostrados en las figuras 3.9 pertenecen al grupo de MP con desplazamientos de movimiento plano 2T1R, mientras que los de las figuras 3.13 son del grupo OT3R.



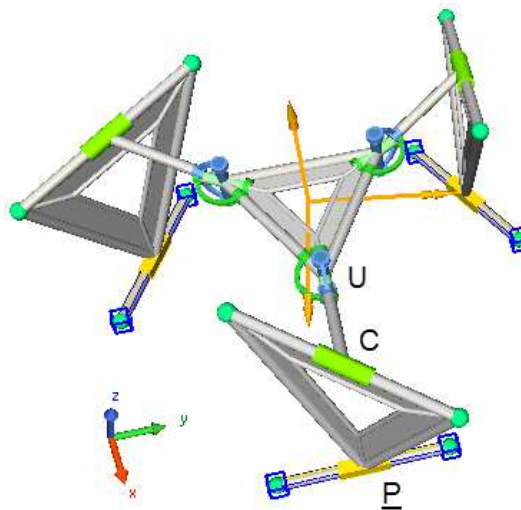
(a) 3-PPS



(b) 3-P \overline{P} RRR



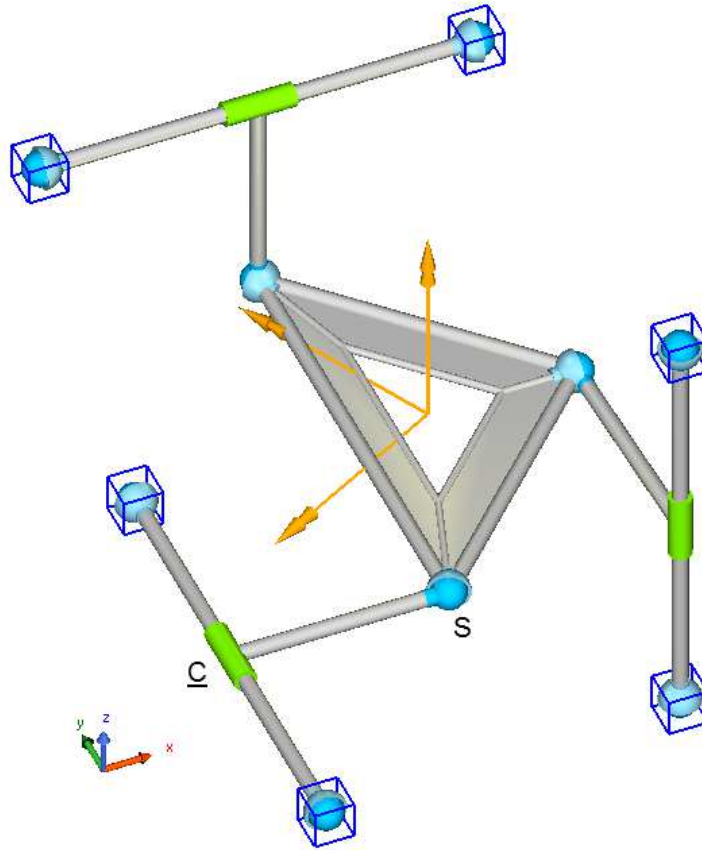
(c) 3-CCR



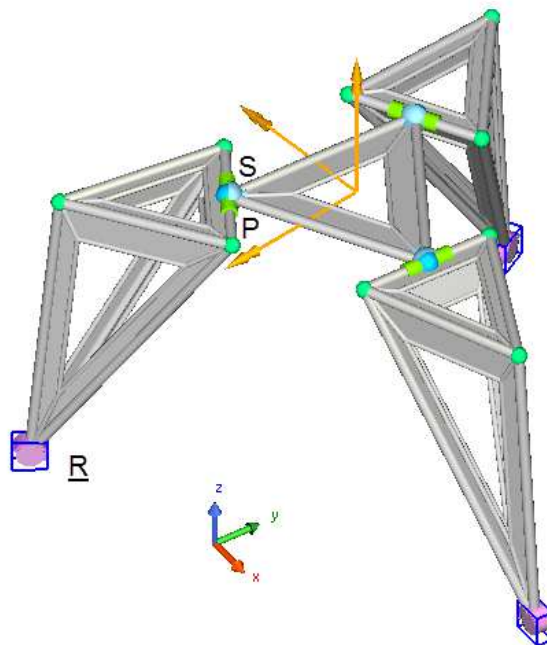
(d) 3-PCU

Figura 3.13: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (2 pares prismáticos o equivalentes)

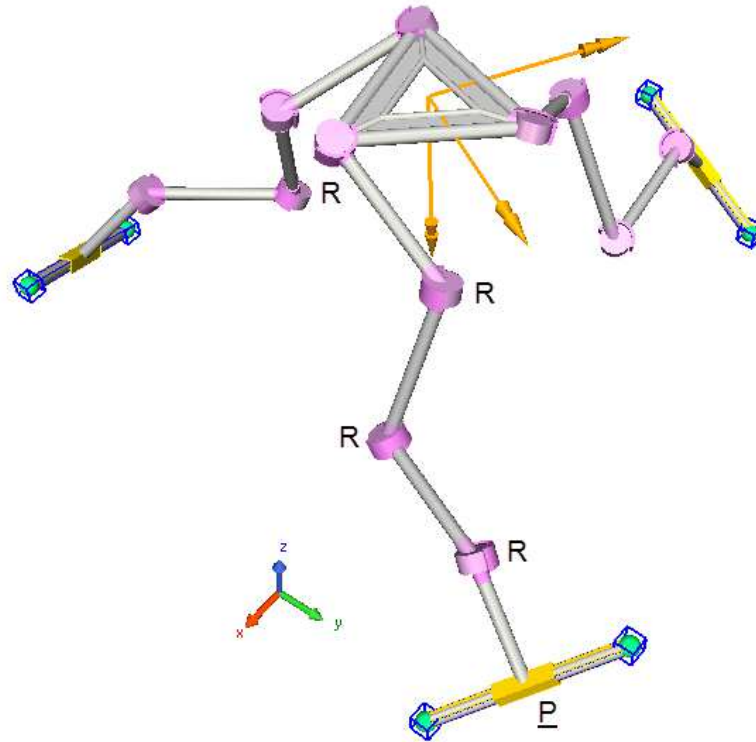
Con cadenas con un par prismático (o equivalente) se obtienen manipuladores paralelos como los mostrados en la figura 3.14: 3-CS (figura 3.14a), 3-RPS (figura 3.14b), 3-PRRRR (figura 3.14c).



(a) 3-CS



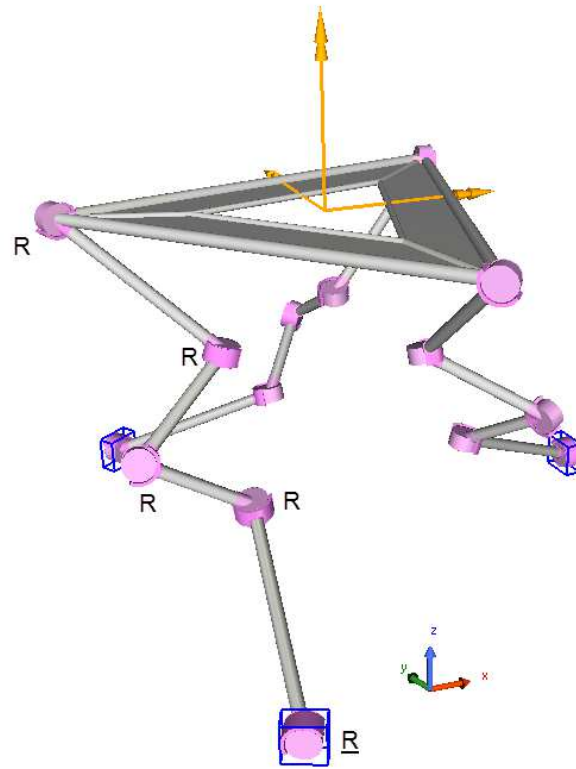
(b) 3-RPS



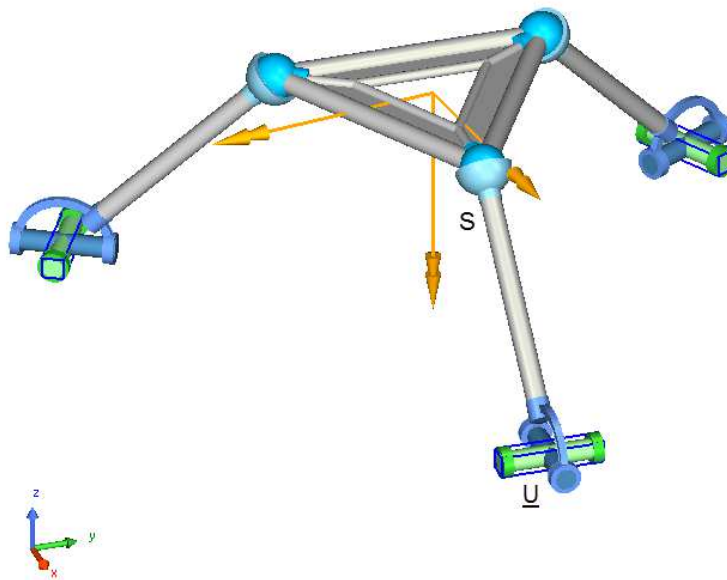
(c) 3-PRRRR

Figura 3.14: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (1 par prismático o equivalente)

Con cadenas sin pares prismáticos (o equivalentes) se obtienen manipuladores paralelos como los mostrados en la figura 3.15: 3-RRRRR (figura 3.15a), 3-US (figura 3.15b).



(a) 3-RRRRR



(b) 3-US

Figura 3.15: Generadores de desplazamientos 0T3R con ligaduras de dimensión 5 (0 pares prismáticos o equivalentes)

Otras configuraciones posibles son 3-RRS y 3-RUU, referenciadas por T.A. Hess-Coelho, [HES2006], y la configuración 3-URU optimizada por Huda, Takeda y Hanagasaki, [HUD2011].

En [ZLA2002] D. Zlatanov, I. Bonev y C. Gosselin proponen una configuración del MP 3-URU, denominada DYMO (Double Y Multi-Operational), que permite que la plataforma móvil realice diferentes modos de movimiento. La transición de un modo a otro se realiza a través de una singularidad, denominada “constraint singularity”, que proporciona a la plataforma móvil grados de libertad instantáneos adicionales.

Como resumen, en la tabla 3.13 se recogen las diferentes cadenas cinemáticas de 3, 4 y 5 dimensiones citadas anteriormente. Los requisitos geométricos han sido descritos anteriormente.

	Desplazamientos 0T3R
Cadenas cinemáticas de 3 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • RRR. Movimiento esférico.
Cadenas cinemáticas de 4 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PRRR, PaRRR, PUR, PaUR, PS, PaS, CRR, CU. • RRRR, RRU, RS, UU.
Cadenas cinemáticas de 5 dimensiones	<ul style="list-style-type: none"> • PPRRR, PaPRRR, Pa²RRR, PPRU, PaPRU, Pa²RU, PCRR, PaCRR, PCU, PaCU, CCR, PPS, PaPS, Pa²S. • PRRRR, PaRRRR, PURR, PaURR, PUU, PaUU, CRRR, CRU, PRS, PaRS. • RRRRR, RRRU, RUU, RRS, US.

Tabla 3.13: Cadenas cinemáticas con desplazamientos 0T3R (y permutaciones)

4. METODOLOGÍA GENERAL DE ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE MANIPULADORES PARALELOS

4.1. Conceptos Generales

Con el objetivo de generar un MP de baja movilidad que realice un movimiento determinado se va a desarrollar una metodología de carácter general que permita analizar todo el abanico de posibilidades. Para ello se generarán todos los posibles MP compuestos de cadenas cinemáticas de seis grados de libertad (GDL) para, a continuación, restringir determinados grados de libertad con el fin de obtener el MP de baja movilidad adecuado para el movimiento deseado.

Ha habido diferentes estudios que, de forma específica, han desarrollado diferentes configuraciones de MP con cadenas de 6 GDL, en los que, restringiendo algunas entradas, es posible obtener diferentes MP de baja movilidad. A continuación se comentan aquellos que parecen más interesantes por estar en línea con el contenido del presente documento.

Merece la pena comentar la propuesta realizada por Y. Jin, I-M. Chen y G. Yang, [YJI2004], de un MP simétrico de tres cadenas cinemáticas, de 6 GDL cada una, con actuación selectiva (SA-PM) de forma que el elemento terminal puede realizar un movimiento esférico de 3 GDL, 3GDL de traslación, un movimiento híbrido de 3 GDL o bien el movimiento completo de 6 GDL, de forma tal que dichos movimientos están desacoplados. Para ello proponen un actuador de 2 GDL, con un movimiento de rotación y otro de traslación con el mismo eje.

Estos mismos autores proponen, referencia [YJI2007], siguiendo la idea del artículo anterior, dos familias de MP de 6 GDL y 3 cadenas cinemáticas, que pueden proporcionar a la plataforma móvil bien el movimiento general de 6 GDL o dos movimientos diferentes de 3 GDL. Actuando en los accionamientos, en el caso de una de las familias se consigue el movimiento de traslación espacial (3 GDL) o de rotación

esférico (3 GDL) y con la otra familia se consigue el movimiento plano (dos traslaciones y una rotación perpendicular al plano de las traslaciones) o un movimiento espacial de 3 GDL constituido por dos rotaciones y una traslación perpendicular al plano definido por los ejes de las rotaciones.

En la referencia [YJI2009], los autores anteriormente citados proponen una metodología para la síntesis de MP de 6 GDL parcialmente desacoplados, (DPM, Decoupled Parallel Manipulator), formados por tres cadenas cinemáticas, realizando el estudio cinemático y de singularidades de los MP generados.

En la referencia [PFA2006], P. Fanghella, C. Galletti y E. Giannotti, (University of Genoa, Italy), describen una metodología utilizando cadenas cinematotrópicas para sintetizar manipuladores paralelos que son capaces de cambiar su grupo de desplazamientos (alterando o no su número de grados de libertad, GDL) a lo largo de un movimiento continuo, al pasar por una posición singular. En dicho trabajo presentan 3 MPs donde se pueden cambiar el grupo de desplazamientos y el número de GDL de la plataforma móvil y 2 MPs donde se cambia el grupo de desplazamientos de la plataforma móvil manteniendo su número de GDL. También permite cambiar en determinados casos las características del grupo de desplazamientos de la plataforma móvil. Por ejemplo, muestran un MP de 4 grados de libertad y movimiento Schönflies (3 traslaciones independientes y 1 rotación alrededor de un eje fijo), cuyo eje de rotación cambia entre dos orientaciones determinadas, manteniendo inalterado el grupo de desplazamientos de la plataforma móvil.

X. Kong, C. M. Gosselin y P-L. Richard del Département de Génie Mécanique, Université Laval, Québec, Canadá, en un artículo, [KON2007-2], describen una metodología para la síntesis de MP de un determinado número de GDL y con diferentes modos de operación. En particular desarrollan diversos MP de 3 GDL que puede realizar tanto el movimiento esférico como de traslación espacial de la plataforma móvil.

A. D. Finistauri, F. Xi y B. Petz (Department of Aerospace Engineering, Ryerson University, Canadá) en su artículo de referenciado en [FIN2008], desde un enfoque modular estudian un mecanismo reconfigurable que puede trabajar en el rango 3-6

GDL. Describen una metodología para generar MP reconfigurables, obteniendo una familia de MPs de 6 GDL y 6 cadenas cinemáticas conectadas a una plataforma fija y otra móvil. Dichos MPs están formados por dos módulos constituidos cada uno por un MP 3 cadenas cinemáticas de 6 GDL, conectados ambos a las plataformas fija y móvil citadas. El primero de dichos módulos tiene conectadas sus 3 cadenas de forma permanente a la plataforma móvil, siendo posible desconectar de la plataforma móvil las 3 cadenas del segundo módulo. Conforme se van restringiendo grados de libertad del primer módulo de 3 cadenas (bloqueando una rotación o una traslación de sus cadenas cinemáticas), se irán desconectando de la plataforma móvil las cadenas del segundo módulo, una por cada GDL eliminado en el primer módulo. De esta forma el número de cadenas cinemáticas del MP integral variará entre 3 y 6 y coincidirá con el número de GDL de la plataforma móvil.

Asimismo, A. D. Finistauri y F. Xi en el artículo referenciado en [FIN2013], describen un método para la reconfiguración de MP de 6 GDL bloqueando alguno de los pares cinemáticos a fin de obtener un MP de baja movilidad con un patrón de movimiento determinado en su plataforma móvil. En este sentido estudian las posibilidades del MP de Gough-Stewart de 6 GDL (6-UPS).

A diferencia de los trabajos citados, en esta tesis se pretende afrontar de una forma general y sistemática el análisis y síntesis de todos los posibles MP de baja movilidad a partir de todas las posibles combinaciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL, tanto en la topología de cada cadena como en el número de cadenas que componen el MP.

Para analizar todas las posibles combinaciones, inicialmente se considerarán únicamente pares prismáticos y de rotación. Cualquier par de orden superior (Junta cardan, par cilíndrico, par plano, par esférico) se obtiene por combinación de ellos.

Como ya se ha indicado, el número máximo de grados de libertad (GDL) de cada cadena cinemática del MP de 6 GDL será también 6 GDL, siendo tres el número máximo de pares prismáticos independientes (no paralelos entre sí ni contenidos en un mismo plano) ya que cualquier par prismático adicional define un movimiento redundante. Asimismo el número máximo de pares de rotación será de seis, en el caso de no haber pares de traslación, siendo un máximo de tres el número de pares de ejes

paralelos entre sí (definen dos GDL de traslación y uno de rotación), otros dos ejes paralelos entre sí y no coincidentes con los anteriores (definen un GDL de traslación y otro de rotación adicionales) y un sexto GDL de rotación no coincidente con los anteriores. En la medida que se incrementa el número de pares de traslación, hasta un máximo de tres, se reducen los pares de rotación desde seis hasta un mínimo de tres pares independientes entre sí. Además, los pares prismáticos y de rotación pueden colocarse en cualquier posición de la cadena cinemática.

4.2. Modelización de la Cadena Cinemática Genérica

A fin de sistematizar el análisis, se va a considerar una cadena cinemática serie como la mostrada en la Figura 4.1, formada por seis pares de rotación, conectados cada uno de ellos a dos elementos barra que forman 90° ó 0° con el eje de rotación de los pares a los que están conectados. Asimismo, cada elemento tiene la posibilidad de contener un par prismático, con la salvedad que el número máximo de pares prismáticos en la cadena cinemática sea tres, siendo los otros tres elementos de longitud fija. Los vectores \vec{a}_i , \vec{b}_i , \vec{c}_i , \vec{d}_i , \vec{e}_i y \vec{f}_i representan las direcciones de los diferentes pares de traslación o elementos barra en su caso. Por su parte, los vectores \vec{p}_i , \vec{q}_i , \vec{r}_i , \vec{s}_i , \vec{t}_i y \vec{u}_i representan las diferentes posibles direcciones de los pares de rotación, cuyo número máximo será de seis, tal y como se ha indicado anteriormente, reduciéndose su número en la medida que aumenta el número de pares de traslación o prismáticos.

El hecho de que los ejes de los pares de rotación formen 90° ó 0° con los elementos a los que están vinculados, y por tanto con la dirección de traslación del par prismático en su caso, no limita el número de posibilidades de patrones de movimiento del elemento terminal y simplifica el análisis y la síntesis de MPs.

En la figura 4.1 se muestran dichos vectores unitarios en una configuración determinada a título de ejemplo.

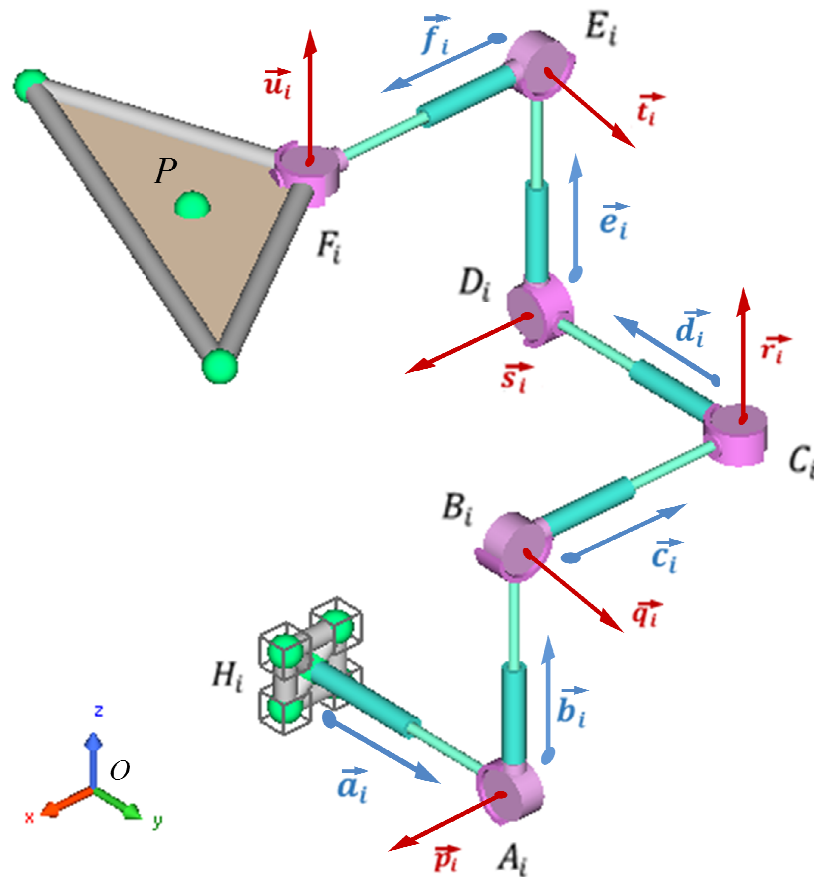


Figura 4.1: Cadena Cinemática Genérica con todas las posibilidades de vectores de pares de traslación y rotación

A fin de generar todas las posibles combinaciones de MP de 6 GDL que posteriormente permitirán conseguir las posibles arquitecturas de MP de baja movilidad que realicen el movimiento de la plataforma móvil deseado, [H-F2015], se proponen los siguientes pasos:

1. Se elige una cadena cinemática formada por una secuencia de seis pares de rotación que al menos contengan las tres direcciones espaciales de rotación. Los ejes de rotación formarán 90° ó 0° entre sí.
2. Cada par de rotación se conecta con los adyacentes a través de elementos barra cuyo eje forma 90° ó 0° con el eje de rotación de dicho par. El primer par de la cadena cinemática estará conectado a un elemento cuyo otro extremo estará conectado al elemento fijo. El último par de la cadena se conecta a la plataforma móvil del MP, formando su eje de rotación un ángulo de 90° ó 0° con el plano de dicha plataforma móvil (caso de ser plana).

3. Tanto el elemento que une el primer par de rotación con el elemento fijo como el resto de elementos de la cadena cinemática son susceptibles de tener un par prismático, tal y como se muestra en la figura 4.1.
4. La ecuación vectorial de la cadena cinemática i cualquiera será:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_iA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{C_iD_i} + \overrightarrow{D_iE_i} + \overrightarrow{E_iF_i} + \overrightarrow{F_iP} \quad [4.1]$$

A partir de esta ecuación estudiaremos el problema de posición de la plataforma móvil del manipulador paralelo objeto de análisis.

Para ello se denominarán g_i, h_i, k_i, l_i, m_i y n_i a las magnitudes de los desplazamientos asociadas a los posibles pares de traslación de la cadena cinemática representados por los vectores $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i, \vec{d}_i, \vec{e}_i$ y \vec{f}_i respectivamente (figura 4.1). En la figura 4.2 se muestran dichas magnitudes en una determinada orientación, coincidente con la de los vectores unitarios de la figura 4.1.

Por tanto los términos de dicha ecuación serán:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OH_i} &= \overrightarrow{OH_i}; \overrightarrow{H_iA_i} = g_i \vec{a}_i; \overrightarrow{A_iB_i} = h_i \vec{b}_i; \overrightarrow{B_iC_i} = k_i \vec{c}_i; \\ \overrightarrow{C_iD_i} &= l_i \vec{d}_i; \overrightarrow{D_iE_i} = m_i \vec{e}_i; \overrightarrow{E_iF_i} = n_i \vec{f}_i; \overrightarrow{F_iP} = \overrightarrow{F_iP} \end{aligned} \right\} \quad [4.2]$$

Asimismo, se denominarán $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varphi_i, \psi_i$ y θ_i a la magnitud del ángulo girado por cada uno de las posibles pares de rotación de la cadena cinemática representados por los vectores $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{r}_i, \vec{s}_i, \vec{t}_i$ y \vec{u}_i respectivamente (figura 4.1). En la figura 4.2 se muestran también dichas magnitudes en una determinada orientación, coincidente con la de los vectores unitarios de la figura 4.1. Estos giros son relativos entre los elementos que se conectan al par de rotación correspondiente.

Nótese que, en la figura 4.2, las líneas de nacimiento de los ángulos girados por los correspondientes elementos son solidarias con los elementos anteriores respectivos, definiendo por tanto movimientos de giro relativos entre elementos. Esta representación se mantendrá también en los capítulos posteriores donde se estudiarán diferentes MPs.

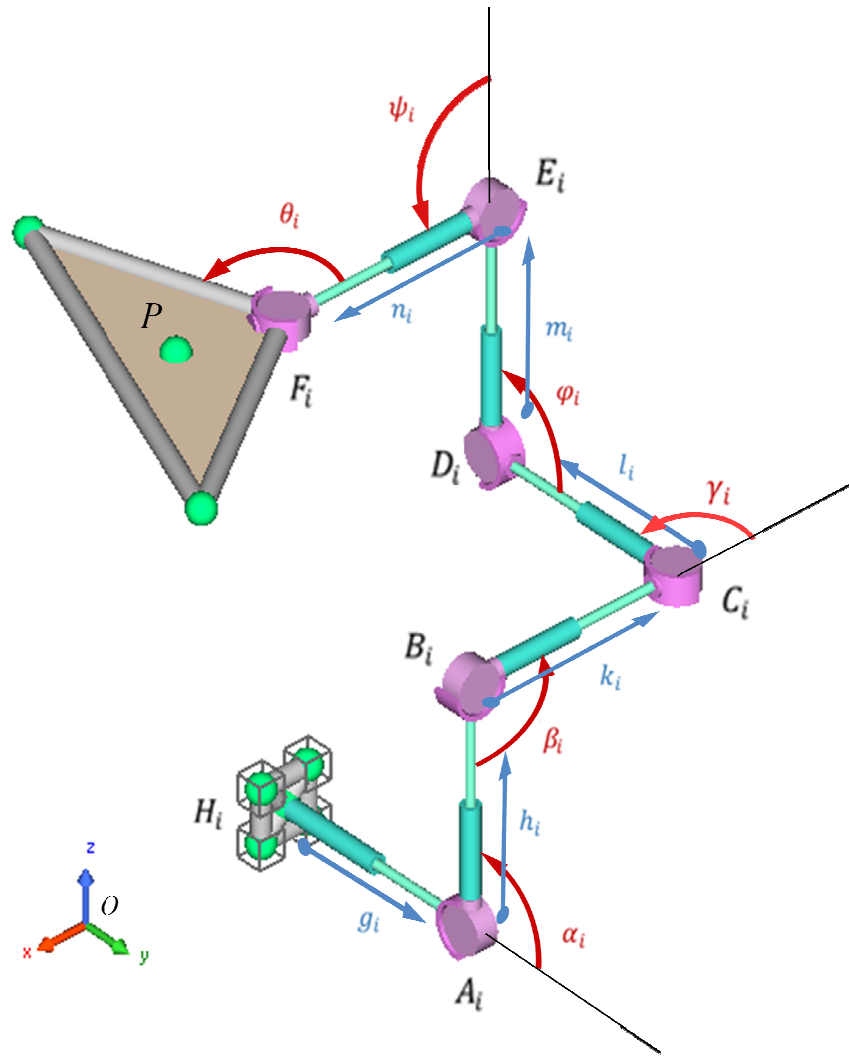


Figura 4.2: Cadena Cinemática Genérica con todas las posibilidades de movimientos de traslación y rotación

5. A continuación se estudiará el problema de velocidades del manipulador paralelo en análisis. A partir de la ecuación vectorial de la cadena cinemática, [4.1], se determinará la velocidad lineal del punto P , \vec{v}_P , de la plataforma móvil. Para ello se aplicará la ley de derivación de vectores en bases móviles a dicha ecuación vectorial, obteniendo:

$$\vec{v}_P = \dot{g}_i \vec{a}_i + \dot{h}_i \vec{b}_i + \vec{\sigma}_i \times \overline{A_i B_i} + \dot{k}_i \vec{c}_i + \vec{\tau}_i \times \overline{B_i C_i} + \dot{l}_i \vec{d}_i + \vec{\varepsilon}_i \times \overline{C_i D_i} + \dot{m}_i \vec{e}_i + \vec{\eta}_i \times \overline{D_i E_i} + \dot{n}_i \vec{f}_i + \vec{\mu}_i \times \overline{E_i F_i} + \vec{\omega} \times \overline{F_i P} \quad [4.3]$$

En esta ecuación $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular de la plataforma móvil y tiene las componentes $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Las velocidades angulares de los diferentes elementos tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned}
 \vec{\sigma}_i &= \alpha_i \vec{p}_i \\
 \vec{\tau}_i &= \alpha_i \vec{p}_i + \beta_i \vec{q}_i \\
 \vec{\varepsilon}_i &= \alpha_i \vec{p}_i + \beta_i \vec{q}_i + \gamma_i \vec{r}_i \\
 \vec{\eta}_i &= \alpha_i \vec{p}_i + \beta_i \vec{q}_i + \gamma_i \vec{r}_i + \phi_i \vec{s}_i \\
 \vec{\mu}_i &= \alpha_i \vec{p}_i + \beta_i \vec{q}_i + \gamma_i \vec{r}_i + \phi_i \vec{s}_i + \psi_i \vec{t}_i \\
 \vec{\omega} &= \alpha_i \vec{p}_i + \beta_i \vec{q}_i + \gamma_i \vec{r}_i + \phi_i \vec{s}_i + \psi_i \vec{t}_i + \theta_i \vec{u}_i
 \end{aligned} \right\} [4.4]$$

6. A partir de este momento se ha de decidir el número de cadenas cinemáticas del manipulador, así como el número de pares de rotación y de traslación de cada cadena cinemática de 6 GDL, dependiendo del número y tipo de GDL del elemento terminal del MP a obtener (2T2R, 3T2R, 3T1R,...). En cualquier caso, como reglas generales se han de tener en cuenta:

- a) El número máximo de cadenas cinemáticas a considerar en la construcción del manipulador paralelo será de seis ya que cadenas adicionales serían pasivas. En la práctica, el número de cadenas cinemáticas del MP será como mínimo tres cadenas, no situadas en un mismo plano, para que tenga rigidez estructural en las tres direcciones. Es recomendable que el número de cadenas cinemáticas del MP de baja movilidad que se desea obtener coincida con el número de GDL del MP y que cada accionamiento esté unido a la plataforma fija, evitando así el movimiento de pesos elevados.
- b) El número máximo de pares cinemáticos en cada cadena cinemática será de seis, ya que debidamente orientados proporcionan los 6 GDL que se necesitan. Un mayor número de pares cinemáticos complican la estructura del manipulador y son redundantes, sin proporcionar ninguna ventaja adicional. Los pares prismáticos pueden ser sustituidos por pares de rotación adecuadamente orientados para obtener los GDL de traslación en la plataforma móvil.
- c) El número máximo de pares de traslación o prismáticos a utilizar en cada cadena cinemática será de tres, orientados de forma que proporcionen los tres GDL de traslación. Esto significa que de las magnitudes de traslación definidas inicialmente, g_i , h_i , k_i , l_i , m_i y n_i , al menos tres han de ser constantes.

- d) El número de pares de rotación en cada cadena cinemática puede llegar a ser seis como máximo, orientados de tal forma que al menos tres pares de rotación sean independientes entre sí, es decir, no paralelos ni contenidos en un mismo plano. Los restantes pares de rotación, hasta un máximo de tres, se orientarán respecto de los ejes anteriores de forma que la cadena contenga como máximo tres ejes de rotación paralelos entre sí. Téngase en cuenta que dos pares de rotación con ejes paralelos proporcionan un grado de libertad de rotación y otro de traslación en el plano perpendicular al eje de rotación, sustituyendo por tanto a uno de los pares prismáticos. Tres pares de rotación con ejes paralelos proporcionan un grado de libertad de rotación y dos de traslación (movimiento plano), sustituyendo por tanto a dos pares prismáticos.
7. Una vez definido el número y morfología de las cadenas cinemáticas que conforman el manipulador se ha de definir la posición y orientación de los pares cinemáticos que la componen, tanto entre sí como respecto de la plataforma móvil. La posición relativa de los ejes de los pares de las cadenas cinemáticas que se unen a la plataforma móvil será paralela o perpendicular entre sí (por ejemplo, en caso de que la plataforma móvil sea plana, el eje del par de unión a la plataforma móvil será perpendicular al plano de ésta o estará contenido en dicho plano).
8. A continuación se resuelve el problema de velocidades del manipulador paralelo de 6 GDL, obteniendo las variables de salida v_{Px} , v_{Py} , v_{Pz} , ω_x , ω_y y ω_z , correspondientes a las componentes a la velocidad lineal del punto P , \vec{v}_P , de la plataforma móvil y a la velocidad angular, $\vec{\omega}$, de dicha plataforma móvil en función de las seis variables de entrada que se definan. Para ello se planteará la matriz Jacobiana del problema directo y del problema inverso en función de las variables de salida y de entrada deseadas. A fin de eliminar las variables intermedias en las ecuaciones de posición y de velocidad de la plataforma móvil, se multiplicará escalarmente la ecuación correspondiente por el vector unitario del par cinemático que interese conservar. De esta forma, al haber construido las cadenas cinemáticas con sus elementos y pares

formando 0° ó 90° , se eliminarán aquellas variables intermedias cuyo vector unitario forme 90° con dicho vector unitario del par a conservar.

9. Una vez obtenida la solución del problema de velocidades, se despejarán las velocidades de salida de la plataforma móvil, en función de las variables de entrada y se procederá a analizar la multioperacionalidad del MP de 6 GDL con el objetivo de obtener el MP de baja movilidad deseado.

4.3. Determinación de los Vectores Unitarios de Movimiento

El siguiente paso consiste en determinar las componentes de los vectores unitarios de traslación $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{c}_i, \vec{d}_i, \vec{e}_i$ y \vec{f}_i y de los vectores unitarios de rotación $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{r}_i, \vec{s}_i, \vec{t}_i$ y \vec{u}_i de la cadena cinemática i . Para ello se ha de considerar su posición relativa en la cadena. Teniendo en cuenta lo indicado en el apartado 4.2, se estudiarán únicamente las posibilidades en las que el vector unitario del par considerado sea paralelo o perpendicular a los vectores unitarios de los dos pares cinemáticos anteriores.

En la figura 4.3 se recogen las distintas posibles combinaciones que permiten obtener el vector unitario de traslación \vec{b}_i a partir de los vectores de rotación \vec{p}_i y de traslación \vec{a}_i correspondientes a los dos pares anteriores. Se puede observar que, en el caso de que el vector de traslación \vec{a}_i y el de rotación \vec{p}_i sean paralelos entre sí, el vector de traslación \vec{b}_i únicamente se puede orientar de manera tal que sea perpendicular al par de rotación \vec{p}_i , ya que si \vec{b}_i es paralelo a \vec{p}_i lo será también a \vec{a}_i y, por tanto, dichos movimientos de traslación serán redundantes, desechándose esta opción (indicada en la figura con el símbolo de prohibición). En la figura 4.3 se indica el sistema de ecuaciones que permite obtener las componentes del vector unitario de traslación \vec{b}_i en función de su posición relativa con \vec{a}_i y \vec{p}_i .

Asimismo, en la figura 4.4 se recogen las distintas posibles combinaciones que permiten obtener el vector unitario de rotación \vec{s}_i a partir de los vectores de traslación \vec{d}_i y de rotación \vec{r}_i correspondientes a los dos pares anteriores. Se puede observar que, en el caso de que el vector de rotación \vec{r}_i y el de traslación \vec{d}_i sean paralelos entre sí, el vector de rotación \vec{s}_i únicamente se puede orientar de manera que sea perpendicular al par de traslación \vec{d}_i , ya que si \vec{s}_i es paralelo a \vec{d}_i lo será también a \vec{r}_i .

y, por tanto, dichos movimientos de rotación serán redundantes, desechándose esta opción (indicada en la figura con el símbolo de prohibición). En la figura 4.4 también se indica el sistema de ecuaciones que permite obtener las componentes del vector unitario de rotación \vec{s}_i en función de su posición relativa con \vec{r}_i y \vec{d}_i .

Nótese que, en las figuras 4.3 y 4.4, las líneas de nacimiento de los ángulos girados por los correspondientes elementos son solidarias con los elementos anteriores respectivos, definiendo por tanto movimientos de giro relativos entre elementos.

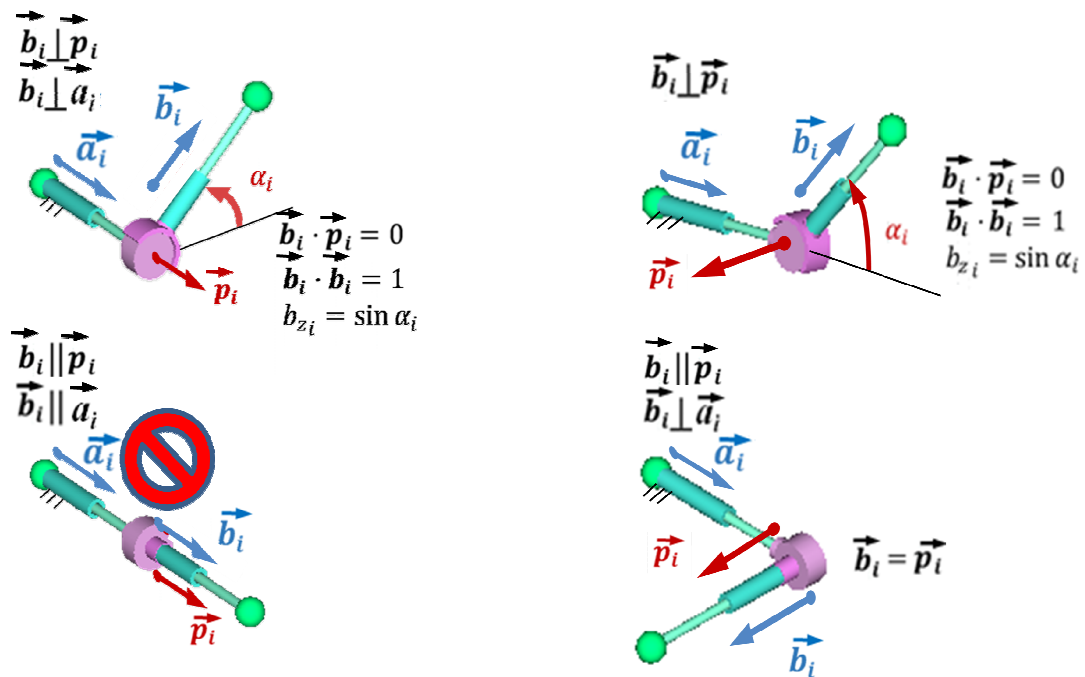


Figura 4.3: Vector Unitario de Traslación \vec{b}_i en posición paralela y perpendicular a \vec{a}_i y \vec{p}_i

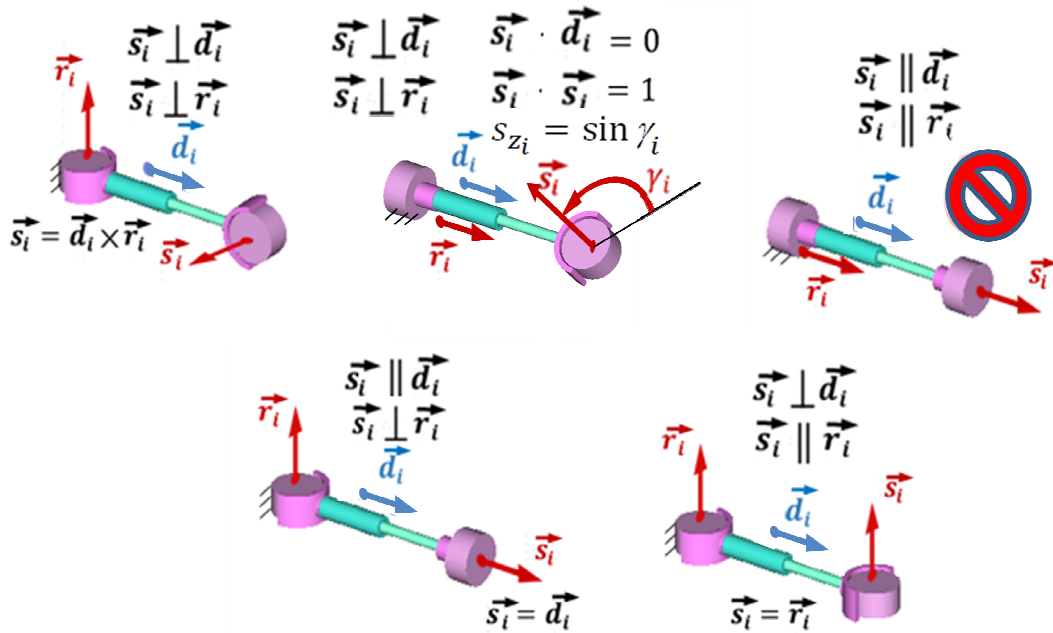


Figura 4.4: Vector Unitario de Rotación \vec{s}_i en posición paralela y perpendicular a \vec{r}_i y \vec{d}_i

Realizando todas las combinaciones posibles de vectores unitarios de traslación y rotación a partir del vector \vec{d}_i se obtiene un gran número de posibilidades. No se van a obtener las componentes de los vectores unitarios correspondientes a todas las combinaciones, pero vamos a definir unas reglas que permiten simplificar su obtención, tales como las siguientes:

1. Como es obvio, dos pares cinemáticos, prismáticos o de rotación, de ejes paralelos tienen vectores unitarios de idénticas componentes.
2. Todo par prismático de vector unitario perpendicular al del par de rotación anterior tiene su vector unitario contenido en un plano perpendicular al vector unitario de dicho par de rotación anterior. Por tanto el producto escalar de ambos vectores será nulo. La segunda ecuación se obtiene considerando que la longitud del vector es la unidad y la tercera se obtiene teniendo en cuenta el valor del ángulo girado por los pares de rotación de los elementos anteriores. Por ejemplo, las ecuaciones que permiten determinar las componentes del vector unitario \vec{b}_i de traslación, vector perpendicular al vector \vec{p}_i de rotación, tal y como se muestra en la figura 4.3 son:

$$\begin{cases} b_{xi}p_{xi} + b_{yi}p_{yi} + b_{zi}p_{zi} = 0 \\ b_{xi}^2 + b_{yi}^2 + b_{zi}^2 = 1 \\ b_{zi} = \sin \alpha_i \end{cases} \quad [4.5]$$

Donde α_i es el ángulo mostrado en la figura 4.3 que define el ángulo girado por el par de rotación de vector unitario \vec{p}_i .

3. Todo par de rotación de vector unitario perpendicular al del par prismático anterior tiene su vector unitario contenido en un plano perpendicular al vector unitario de dicho par prismático, siendo el producto escalar de ambos nulo. La segunda ecuación, como en el caso anterior, se obtiene considerando que la longitud del vector es la unidad. Para la tercera ecuación, se ha de tener en cuenta que el vector unitario del par de rotación puede ocupar dos posiciones perpendiculares entre sí, dependiendo de si es paralelo o perpendicular al par de rotación inmediatamente anterior. A su vez, dicho par de rotación anterior puede ser paralelo o perpendicular al par prismático citado.

Si el par de rotación anterior y el par prismático son perpendiculares y, a su vez, los dos pares de rotación son paralelos, los dos vectores unitarios de rotación serán idénticos. Si los dos pares de rotación son perpendiculares, la tercera ecuación se obtendrá a partir del producto escalar de los vectores unitarios de ambos pares de rotación. En este caso, al ser los tres vectores perpendiculares también se puede obtener el vector unitario de rotación a partir del producto vectorial de los vectores unitarios del par prismático y del par de rotación anterior. Por tanto las ecuaciones que definen las componentes del vector unitario \vec{s}_i de rotación, vector perpendicular al vector \vec{d}_i de traslación, mostrado en la figura 4.4 serán:

$$\text{Si } \vec{s}_i \text{ es perpendicular a } \vec{r}_i \begin{cases} s_{xi}d_{xi} + s_{yi}d_{yi} + s_{zi}d_{zi} = 0 \\ s_{xi}^2 + s_{yi}^2 + s_{zi}^2 = 1 \\ s_{xi}r_{xi} + s_{yi}r_{yi} + s_{zi}r_{zi} = 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad [4.6]$$

$$\vec{s}_i = \vec{d}_i \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_{ix} & d_{iy} & d_{iz} \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \end{vmatrix}$$

$$\text{Si } \vec{s}_i \text{ es paralelo a } \vec{r}_i \quad \vec{s}_i = \vec{r}_i \quad [4.7]$$

En el caso de que el vector unitario del par de rotación anterior y el de traslación fueran paralelos, en el ejemplo que \vec{r}_i y \vec{d}_i sean paralelos, la tercera ecuación habrá de obtenerse a partir del ángulo girado por los pares de rotación de los elementos anteriores, tal y como se muestra en la figura 4.4.

$$\begin{cases} s_{xi}d_{xi} + s_{yi}d_{yi} + s_{zi}d_{zi} = 0 \\ s_{xi}^2 + s_{yi}^2 + s_{zi}^2 = 1 \\ s_{zi} = \sin \gamma_i \end{cases} \quad [4.8]$$

Donde γ_i es el ángulo mostrado en la figura 4.4 que define el ángulo girado por el par de rotación de vector unitario \vec{r}_i . Téngase en cuenta que en este caso, necesariamente el vector unitario \vec{s}_i será perpendicular a los vectores \vec{r}_i y \vec{d}_i .

A continuación se van a estudiar las posibles combinaciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL.

4.4. Síntesis Estructural de Cadenas Cinemáticas de 6 GDL

A fin de generar todos los posibles MP de 6 GDL de acuerdo con las condiciones del punto 4.2, es necesario tener en cuenta, en primer lugar, todas las posibles combinaciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL. Para ello, inicialmente se van a considerar únicamente todas las combinaciones posibles de pares prismáticos y de rotación, ya que, cualquier par de orden superior como el par cilíndrico, junta cardan, par plano o esférico se puede obtener combinando pares prismáticos y de rotación.

Teniendo en cuenta las premisas citadas en el punto anterior, existen cuatro posibles agrupaciones de pares prismáticos y de rotación, a partir de las cuales se obtienen todas las posibles morfologías de cadenas cinemáticas de 6 GDL. Estas agrupaciones de pares prismáticos y de rotación son las siguientes: PPPRRR, PPRRRR, PRRRRR y RRRRRR.

A partir de estas cuatro cadenas cinemáticas de 6 pares cinemáticos, se puede generar una gama inmanejable de cadenas cinemáticas de 6 GDL actuando sobre los aspectos geométricos de la cadena cinemática, permutando la posición de los pares cinemáticos y de sus variantes geométricas. Dada la ingente cantidad de MPs que se pueden generar con dichas cadenas, es necesario introducir ciertos criterios restrictivos. Estos criterios buscan simplificar los aspectos constructivos del

manipulador y sus aspectos geométricos para obtener unas matrices Jacobianas del MP, representativas del problema directo e inverso de velocidades, lo más sencillas posible, para el estudio de la multioperacionalidad y del acoplamiento de desplazamientos de dicho MP. Dichos criterios se aplican a los siguientes elementos geométricos:

1. La longitud de los elementos que unen un par prismático y un par de rotación de ejes paralelos, es decir, la distancia entre la guía del par P y el eje del par R. Para simplificar el análisis, se considerará que dicho elemento tiene longitud nula, con lo que los pares PR ó RP conforman un par cilíndrico C.
2. La longitud de los elementos que unen pares de rotación de ejes no paralelos entre sí, es decir, la distancia entre los ejes. Para simplificar el análisis se considerará que dichos elementos tienen longitud nula, con lo que los pares RR conforman una junta cardan U y los pares RRR conforman un par esférico S. Como excepción, en el caso de que la cadena cinemática quede constituida por dos pares esféricos SS, el número de GDL del elemento terminal es cinco únicamente, tres de rotación y dos de traslación ya que el sexto es redundante. Por ello, es necesario que el elemento que une dos de los pares de rotación sea de longitud no nula con el fin de generar un tercer GDL de traslación (por ejemplo: considerar cadenas SUR, URS, RUS,... en lugar de SS).
3. Los ángulos de orientación entre elementos adyacentes de la cadena cinemática y entre pares cinemáticos de un mismo elemento. Tal y como se ha indicado al principio del presente capítulo, se considerarán únicamente ángulos de 90° y 0° ya que esto no limita el número de posibilidades de patrones de movimiento del elemento terminal y simplifica el análisis y síntesis de MPs.
4. Las orientaciones de los ejes de los pares de traslación y rotación situados en los extremos de un mismo elemento de la cadena cinemática. Teniendo en cuenta el punto anterior, todos han de formar 0° ó 90° . Como resumen, se pueden dar los siguientes casos:

- a) En caso de ser dos pares de traslación situados en los extremos de un mismo elemento, estos formarán necesariamente 90° entre sí, ya que en caso contrario definen un movimiento redundante.
 - b) En caso de ser dos pares de rotación situados en los extremos de un mismo elemento, podrán formar 0° , siempre que sus ejes no sean colineales (elemento de longitud no nula), en cuyo caso definen un grado de libertad de rotación y otro de traslación. Si forman 90° constituirán una junta cardan, tal y como se indica en el punto 2, siendo nula la longitud del elemento que los une.
 - c) En caso de ser un par de traslación y otro de rotación también situados en los dos extremos de un mismo elemento, estos pueden formar 0° entre sí con lo que constituirán un par cilíndrico C, tal y como se indica en el punto 1 al considerar de longitud nula el elemento que los une. Si forman 90° proporcionan un grado de libertad de traslación y otro de rotación.
5. Teniendo en cuenta los aspectos geométricos y de nomenclatura propuestos en el apartado 2.3, y con el fin de distinguir estas características geométricas, aquellos pares de rotación que tengan ejes paralelos se indicarán con un subrayado o con cursiva (por ejemplo: RRRRRR para el caso de seis pares R y desplazamientos 3T3R, los tres primeros pares de rotación son de ejes paralelos entre sí generando dos grados de libertad de traslación y uno de rotación, los siguientes dos pares de rotación son de ejes paralelos entre sí y forman 90° con los anteriores generando otro grado de libertad adicional de traslación y otro de rotación y el eje del último par de rotación forma 90° con los ejes del grupo anterior y define el tercer grado de libertad de rotación). En caso de haber tres grupos de pares de rotación con ejes paralelos entre sí, el tercer grupo se indicará en negrita (por ejemplo: RRRRRR). Como se verá más adelante es necesario tener en cuenta estas notaciones al estudiar todas las posibles combinaciones de grupos de pares de rotación. Finalmente, para indicar el par actuado se subrayará (Doble subrayado en caso de coincidencia con otro subrayado).
6. Como pares de accionamiento o activos, los más interesantes desde el punto de vista constructivo son el prismático y el par de rotación. Aunque de menor

interés, también puede incluirse en este grupo el par cilíndrico ya que consiste en un par de rotación montado sobre un par prismático y, por tanto, el accionamiento puede actuar sobre el par prismático o el de rotación de forma independiente. Los pares esférico y la junta universal presentan dificultades prácticas para trabajar como pares activos, utilizándose normalmente como pares pasivos. En general, es mejor evitar la utilización de pares prismáticos y cilíndricos pasivos por problemas de funcionamiento (desgaste, gripado). Sin embargo será necesario utilizarlos cuando los movimientos de traslación requeridos sean grandes.

7. Para finalizar, únicamente se van a considerar aquellas cadenas cinemáticas que generan desplazamientos de la misma dimensión que la ligadura cinemática correspondiente, en este caso 6 GDL, desechando la generación de desplazamientos de orden inferior (por ejemplo, una cadena cinemática con cuatro ejes de rotación paralelos. En este caso los desplazamientos son 2T1R ya que el cuarto par de rotación es redundante), ya que supone una complicación constructiva del mecanismo sin un beneficio adicional.

A continuación se procede a estudiar todas las combinaciones de cadenas cinemáticas posibles.

4.4.1. Cadenas Cinemáticas PPPRRR

Permutando todas las posibles posiciones relativas de los diferentes pares prismáticos y de rotación de la cadena cinemática PPPRRR, se obtienen las siguientes 20 combinaciones: PPPRRR, PPRRRR, PRRRPR, PRRRRP, PRPPRR, PRPRPR, PRPRRP, PRRPPR, PRRPRP, PRRRPP, RPPRRR, RPPRPR, RPPRRP, RPRPPR, RPRPRP, RPRRPP, RRPPRR, RRPPRP, RRPRPP y RRRPPP.

En este caso, al ser tres el número de pares de rotación, cada par de rotación tendrá su eje perpendicular al eje de los pares de rotación anterior y posterior en la cadena cinemática, para obtener los tres GDL de rotación. Teniendo en cuenta los criterios geométricos que se han definido en el apartado 4.4 se pueden obtener variantes adicionales. Por ejemplo, la cadena cinemática PPPRRR puede dar lugar a una cadena PPS ó una cadena PCU según que los ejes de los pares centrales PR sean

perpendiculares entre sí, dando lugar a una cadena PPPS, o paralelos entre sí, y definiendo una cadena PPCU.

En la tabla 4.1 adjunta se recogen todas las posibles permutaciones de pares P y R citadas anteriormente y las 63 cadenas posibles utilizando pares P, R, C, U y S que se obtienen al aplicar las simplificaciones geométricas definidas en el apartado 4.4, mostrándose en rojo y tachadas las cadenas que se repiten en dicha tabla.

Permutación	Cadena Cinemática	Cadenas posibles
1	PPRRR	PPPS,PPCU
2	PPRPR	PPRPU,PCPU,PCCR, PPCU ,PPRCR
3	PPRRPR	PPUPR,PCRPR, PCCR ,PCRC, PPRCR ,PPUC
4	PPRRRP	PPSP,PCUP, PCRC , PPUC
5	PRPPRR	PRPPU,CPPU,CPCR, PCPU , PCCR ,PRPCR
6	PRRPR	PRRPR,CPRPR, CPCR ,CCPR,CPRC,CCC, PCRPR , PCCR , PCRC ,PRCPR,PRCC, PRPCR ,PRPRC
7	PRRRRP	PRPUP,CPUP,CCRP, CCC , CPRC , PCUP , PCRC ,PRCRP, PRCC , PRPRC
8	RPPRR	RPPPU, CPPU , CPCR ,RPPCR
9	RPPRPR	RPPRPR, CPRPR , CPCR , CPRC , CCPR , CCC ,RPCPR, RPCC,RPPRC
10	RPPRRP	RPPUP, CPUP , CCRP , CCC , CPRC ,RPCRP, RPCC , RPPRC
11	PRRPPR	PUPPR,CRPPR,CRPC,PUPC, PRCPR , PRCC , CCC , CCPR
12	PRRRPR	PUPRP,CRPRP, PRCRP , PUPC , CCRP , CRPC ,CRCP, PRCC , CCC
13	PRRRPP	PSPP,CUPP,PUCP, CRCP
14	RPRPPR	RPRPPR, CRPPR , RPCPR ,RPRPC, CCPR , CRPC , RPCC , CCC , RCPPR,RCPC
15	RPRRPR	RPRRPR, CRPPR , RPCRP ,RCPRP,RPRCP, RPRPC , CCRP , CRCP , CRPC , CCC , RPCC ,RCCP, RCPC
16	RPRRPP	RPUPP, CUPP ,RCRPP, RPRCP , CRCP , RCCP
17	RRPPPR	UPPPR, RCPPR ,UPPC, RCPC
18	RRRPRP	UPPRP, RCPRP ,UPCP, UPPC , RCCP , RCPC
19	RRRPRP	UPRPP, RCRPP ,UCPP, UPCP , RCCP
20	RRRPPP	SPPP, UCPP

Tabla 4.1: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPPRRR

Obsérvese en la tabla 4.1 que, por ejemplo, la permutación 1 da lugar a las cadenas PPPS PPCU, aplicando las simplificaciones geométricas número 1 y 2 recogidas en el apartado 4.4. Si no se aplicaran dichas simplificaciones, el total de cadenas sería PPPRRR, PPCRR, PPCU, PPPUR, PPPRU y PPPS.

4.4.2. Cadenas Cinemáticas PPRRRR

Permutando todas las posibles posiciones relativas de los diferentes pares prismáticos y de rotación de la cadena cinemática PPRRRR, se obtienen las siguientes 15 combinaciones: PPRRRR, PRPRRR, PRRPRR, PRRRPR, PRRRRP, RPPRRR, RPRPRR, RPRRPR, RPRRRP, RRPPRR, RRPRPR, RRPRRP, RRRPPR, RRRPRP y RRRRPP.

En este caso, al tener la cadena cinemática cuatro pares de rotación, como máximo dos de ellos tendrán ejes paralelos entre sí y perpendiculares a los otros dos pares de rotación que, a su vez, serán perpendiculares entre sí, de acuerdo a las simplificaciones recogidas en el apartado 4.4. Utilizando la notación indicada, dichos pares de rotación paralelos irán subrayados. Teniendo en cuenta los criterios geométricos que se han definido en el apartado 4.4 se pueden obtener combinaciones adicionales tales como:

1. Tres pares de rotación consecutivos. Si dos de ellos son de ejes paralelos, RRR (lo que da lugar a 1 GDL de traslación y 2 GDL de rotación), la combinación de los mismos no formará un par S (3 GDL de rotación) sino que se representará como la combinación de un par de rotación y una junta cardan, RU, en el que el eje del par R y el primer eje de la junta cardan son paralelos, lo que se indica subrayando ambos pares.
2. Secuencia de pares PRR donde el eje de traslación del par prismático es paralelo al eje de los pares de rotación. La notación será CR, es decir un par cilíndrico y un par de rotación de ejes paralelos.
3. Dos pares prismáticos unidos cada uno de ellos a dos pares de rotación de ejes paralelos. Únicamente uno de dichos pares prismáticos tendrá necesariamente su eje paralelo al eje de dichos pares de rotación y, por tanto, formará un par cilíndrico C (por ejemplo, la combinación PRRP tendrá una notación CRP ó PRC según sea el par prismático de eje paralelo al de los de rotación, no pudiendo darse en ningún caso la combinación CC ya que los dos pares prismáticos forman 90° entre sí).
4. Con cuatro pares de rotación tales que RRRR, la simplificación geométrica final será en dos juntas cardan, UU ó UU, ya que en este caso los grados de libertad generados son 3 GDL de rotación y 1 GDL de traslación, sean o no paralelos

entre sí los ejes de las juntas cardan que están unidos al elemento de conexión de ambas juntas. Es necesario que el elemento que une las dos juntas cardan, UU, tenga una longitud no nula a fin de obtener el grado de libertad de traslación.

5. Dos pares de rotación de ejes paralelos unidos a un mismo par prismático intermedio. En ese caso, ambos pares R mantienen sus ejes paralelos en toda circunstancia.
6. Si los dos pares de rotación de ejes paralelos están unidos por un par de rotación con su eje perpendicular a los ejes de esos pares de rotación, es obvio que no es posible que dichos pares de rotación mantengan sus ejes paralelos en cualquier circunstancia y por tanto su funcionamiento es como pares de rotación de ejes no paralelos. Utilizando la notación definida en el punto 5 del apartado 4.4, dicha situación se puede expresar como $\underline{RRR}=RRR$. Por tanto, se tendrá el caso general de dos pares prismáticos perpendiculares entre sí y cuatro pares de rotación no paralelos. Los ejes de estos cuatro pares R serán perpendiculares con sus pares de rotación adyacentes, dando lugar al tercer grado de libertad de traslación y los tres de rotación.

En las tablas 4.2 y 4.3 adjuntas se recogen todas las posibles permutaciones de pares P y R citadas anteriormente y las 151 cadenas posibles utilizando pares P, R, C, U y S que se obtienen al aplicar las simplificaciones geométricas definidas en el apartado 4.4, mostrándose en rojo y tachadas aquellas cadenas que ya han sido utilizadas en una combinación anterior contenida en dichas tablas.

Para realizar este estudio a partir de una cadena genérica dada, se han obtenido las cuatro posibles variantes con pares RR de ejes paralelos. Por ejemplo, para la cadena genérica PPRRRR se obtienen cuatro posibles variantes: \underline{PPRRRR} , \underline{PPRRRR} , \underline{PPRRRR} y \underline{PPRRRR} . A continuación se obtienen las cadenas posibles aplicando las simplificaciones geométricas del apartado 4.4. Finalmente se ha clasificado cada cadena obtenida en función de la tipología de los pares de rotación que la componen para comprobar que se han tenido en cuenta todas las permutaciones posibles. Por ejemplo, la combinación CRCR tiene las siguientes posibilidades, \underline{CRCR} , \underline{CRCR} , \underline{CRCR} y \underline{CRCR} , como se puede deducir estudiando las diferentes posibilidades de permutación

con dos pares de rotación de ejes paralelos, como máximo. Todas ellas están recogidas en las tablas 4.2 y 4.3. En el caso de la combinación CRRC únicamente es posible la CRRC ya que cualquier otra combinación como la CRRC se transforma en CUC teniendo en cuenta las simplificaciones del apartado 4.4. Lo mismo ocurre con la combinación CRRC y CRRC que se corresponden con CUC y CUC respectivamente. Esta metodología se aplicará en los apartados siguientes.

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RR</u>	Cadenas posibles
1	PPRRRR	<u>PPRRRR</u>	PPRS,PCS
		<u>PPRRRR</u>	PPUU,PCRU
		<u>PPRRRR</u>	PPSR,PCUR
		<u>PPRRRR</u>	PPRS,PPSR,PCS ,PPUU
2	PRPRRR	<u>PRPRRR</u>	CPS, PCS ,PRCU
		<u>PRPRRR</u>	PRPRU,CPRU,PRCU,CCU, PCRU
		<u>PRPRRR</u>	PRPUR,CPUR,PRCRR,CCRR, PCUR
		<u>PRPRRR</u>	CPS,PCS ,PRPS,PRCU,CCU
3	RPPRRR	<u>RPPRRR</u>	RPPS, CPS ,RPCU
		<u>RPPRRR</u>	RPPRU, CPRU ,RPCU, CCU
		<u>RPPRRR</u>	RPPUR, CPUR ,RPCRR, CCRR
		<u>RPPRRR</u>	CPS ,RPCU, RPPS ,CCU
4	PRRPRR	<u>PRRPRR</u>	PRRPU, <u>CRPU</u> , PRCU ,PRRCR, <u>CRCR</u>
		<u>PRRPRR</u>	PU <u>PU</u> , <u>CRPU</u> , PRCU ,PU <u>CR</u> , CCU , <u>CRCR</u>
		<u>PRRPRR</u>	PUPRR, <u>CRPR</u> , PRCRR ,PU <u>CR</u> , <u>CRCR</u> , CCRR
		<u>PRRPRR</u>	PUPU,PU <u>CR</u> , PRCU , <u>CRPU</u> , CCU , <u>CRCR</u>
5	PRRRPR	<u>PRRRPR</u>	PRUPR, PRRCR , CRCR ,CUPR,CUC,PRUC
		<u>PRRRPR</u>	PURPR, <u>PU<u>CR</u></u> ,PU <u>RC</u> ,CRRPR, CR<u>CR</u> ,CRRC
		<u>PRRRPR</u>	PSPR,PSC,CUPR,CUC, CR<u>CR</u> , PU<u>CR</u>
		<u>PRRRPR</u>	PSPR ,PSC,CUPR,CUC, CR<u>CR</u> , <u>PU<u>CR</u></u>
6	PRRRRP	<u>PRRRRP</u>	PRSP,CSP, PR<u>UC</u> , <u>CUC</u>
		<u>PRRRRP</u>	PUUP, <u>PU<u>RC</u></u> ,CRUP, CR<u>RC</u>
		<u>PRRRRP</u>	PSRP, P<u>SC</u> ,CURP, <u>CUC</u>
		<u>PRRRRP</u>	PSRP , PRSP ,PSC,CSP, <u>CUC</u> ,PUUP
7	RPRRPR	<u>RPRRPR</u>	RPUPR,RPUC, <u>CUPR</u> , <u>CUC</u> ,RCRPR, <u>RCCR</u> , <u>RCRC</u>
		<u>RPRRPR</u>	RPRRPR,RPRRC,RPRCR, CR<u>RR</u> ,RCRPR, CR<u>RC</u> , CR<u>CR</u> , <u>RCRC</u>
		<u>RPRRPR</u>	RPUPR,RPUC,RPRCR, <u>CUPR</u> , <u>CUC</u> , CR<u>CR</u> , RCCR,RCRC
		<u>RPRRPR</u>	RPUPR, <u>CUPR</u> ,RPUC, C<u>UC</u> ,RCRPR,RCRC, RCCR,RPRCR
8	RRPPRR	<u>RRPPRR</u>	RRPPU,RRPCR,RCPU, RC<u>CR</u>
		<u>RRPPRR</u>	UPPU,UPCR,RCPRR,RCPU, <u>RCCR</u>
		<u>RRPPRR</u>	UPPRR,UPCR,RCPRR, RC<u>CR</u>
		<u>RRPPRR</u>	UPPU,UPCR,RCPU, RC<u>CR</u>

Tabla 4.2: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPRRRR (primer grupo)

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RR</u>	Cadenas posibles
9	RPRPRR	<u>RPRPRR</u>	<u>RPRPU</u> , <u>RPRCR</u> , <u>RCPU</u> , <u>RCCR</u> , <u>RPCU</u> , <u>CRPU</u> , <u>CRCR</u>
		RPR <u>PRR</u>	RPR <u>PU</u> , <u>RPRCR</u> , <u>RPCU</u> , <u>RCPU</u> , <u>RCCR</u> , <u>CCU</u> , <u>CRPU</u> , <u>CRCR</u>
		RPR <u>RRP</u>	RPR <u>RR</u> , <u>RPRCR</u> , <u>RCPRR</u> , <u>RCCR</u> , <u>CRPRR</u> , <u>CRCR</u> , <u>CCRR</u> , <u>RPCRR</u>
		RPRPRR	RPR <u>PU</u> , <u>RPRCR</u> , <u>RPCU</u> , <u>RCPU</u> , <u>RCCR</u> , <u>CCU</u> , <u>CRCR</u> , <u>CRPU</u>
10	RRRRPP	<u>RRRRPP</u>	RSPP, <u>RUCP</u>
		RRRR <u>PP</u>	<u>UUPP</u> , <u>URCP</u>
		RRRR <u>RP</u>	SRPP, SCP
		RRRRPP	<u>SRPP</u> , <u>SCP</u> , <u>RSPP</u> , <u>UUPP</u>
11	RRRPRP	<u>RRRPRP</u>	<u>RRCRP</u> , <u>RRCC</u> , <u>RUPRP</u> , <u>RUPC</u> , <u><u>RUCP</u></u>
		RRR <u>PRP</u>	<u>URPRP</u> , <u>URPC</u> , <u><u>URCP</u></u> , <u>UCRP</u> , <u>UCC</u>
		RRR <u>PRP</u>	SPC, <u>SCP</u> , <u>UCRP</u>
		RRRPRP	SPRP, <u>SPC</u> , <u>SCP</u> , <u>UCRP</u> , <u>UCC</u>
12	RRRPPR	<u>RRRPPR</u>	<u>RUPPR</u> , <u>RUPC</u> , <u>RRCPR</u> , <u>RRCC</u>
		RRR <u>PPR</u>	<u>URPPR</u> , <u>URPC</u> , <u>UCPR</u> , <u>UCC</u>
		RRR <u>PPR</u>	SPPR, <u>SPC</u> , <u>UCPR</u>
		RRRPPR	<u>SPPR</u> , <u>SPC</u> , <u>UCPR</u> , <u>UCC</u>
13	RRPRRP	<u>RRPRRP</u>	<u>RRPUP</u> , <u>RRPRC</u> , <u><u>RRCRP</u></u> , <u>RRCC</u> , <u>RCUP</u> , <u>RCRC</u>
		RR <u>PRRP</u>	<u>UPUP</u> , <u>UPRC</u> , <u>RCUP</u> , <u>RCRC</u> , <u>UCC</u> , <u>UCRP</u>
		RR <u>PRRP</u>	UPRRP, <u>UPRC</u> , <u>UCRP</u> , <u>RCRRP</u> , <u>RCRC</u>
		RRPRRP	UPUP, <u>UPRC</u> , <u>RCUP</u> , <u>RCRC</u> , <u>UCC</u> , <u>UCRP</u>
14	RPRRRP	<u>RPRRRP</u>	<u>RPUC</u> , <u>RPSP</u> , <u>RCRC</u> , <u>RCUP</u> , <u>CUC</u> , <u>CSP</u>
		R <u>P</u> RRRP	R <u>P</u> RU <u>P</u> , <u>RPRRC</u> , <u>CRUP</u> , <u>CRRC</u> , <u>RCUP</u> , <u>RCRC</u>
		R <u>P</u> RRRP	<u>RCRC</u> , <u>RPUC</u> , <u>RPURP</u> , <u>CUC</u> , <u>RCRRP</u> , <u>CURP</u>
		RPRRRP	<u>RPSP</u> , <u>CSP</u> , <u>RCRC</u> , <u>RCUP</u> , <u>CUC</u> , <u>RPUC</u>
15	RRPRPR	<u>RRPRPR</u>	<u>RRPRPR</u> , <u>RCRPR</u> , <u>RRCPR</u> , <u>RRPRC</u> , <u>RRCC</u> , <u>RCCR</u> , <u>RRPCR</u> , <u>RCRC</u>
		RR <u>PRPR</u>	<u>UPRPR</u> , <u>UPRC</u> , <u>UPCR</u> , <u>UCC</u> , <u>RCRPR</u> , <u>RCCR</u> , <u>RCRC</u> , <u>UCPR</u>
		RR <u>PRPR</u>	<u>RCRC</u> , <u>RCRPR</u> , <u>UPRPR</u> , <u>UPRC</u> , <u>UCPR</u> , <u>RCCR</u> , <u>UPCR</u>
		RRPRPR	UPRPR, <u>UCPR</u> , <u>UPRC</u> , <u>UPCR</u> , <u>UCC</u> , <u>RCRPR</u> , <u>RCRC</u> , <u>RCCR</u>

Tabla 4.3: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PPRRRR (segundo grupo)

4.4.3. Cadenas Cinemáticas PRRRRR

Permutando todas las posibles posiciones relativas de los diferentes pares prismáticos y de rotación de la cadena cinemática PRRRRR, se obtienen las siguientes 6 combinaciones: PRRRRR, RPRRRR, RRPRRR, RRRPRR, RRRRPR y RRRRRP.

Dado que la cadena cinemática tiene cinco pares de rotación, es necesario que estos se combinen de tal forma que proporcionen los otros dos grados de libertad de traslación (únicamente disponemos de un par prismático) y los tres de rotación. Teniendo en cuenta que todos los pares de rotación adyacentes forman 0° ó 90° entre sí, únicamente pueden darse dos situaciones con un máximo de ejes de rotación paralelos:

- Tres pares de rotación con ejes de paralelos entre sí y los otros dos pares con ejes perpendiculares a los anteriores y entre sí.
- Dos pares de rotación con ejes paralelos entre sí y otros dos pares con ejes también paralelos entre sí y perpendiculares a los anteriores. El eje del quinto par de rotación será perpendicular a los ejes del grupo de pares al que está conectado.

Cualquier otra combinación con menor número de pares de rotación de ejes paralelos se obtiene al realizar todas las permutaciones de las dos combinaciones anteriores, tal y como se verá a continuación.

Utilizando la notación indicada en el apartado 4.4, el primer grupo de pares de rotación paralelos se indicará con un subrayado y el segundo grupo con cursiva. Teniendo en cuenta los criterios geométricos que se han definido en dicho apartado, además de las combinaciones definidas en los apartados 4.4.1 y 4.4.2, se pueden obtener variantes adicionales tales como:

1. Dos pares de rotación unidos a otro intermedio cuyo eje forma 90° con los primeros es obvio que nunca podrán mantener de forma permanente sus ejes paralelos, tal y como se indicó en el apartado 4.4.2, es decir RRR=RRR. Por tanto se obtendrán permutaciones de pares de rotación con menor número de pares de ejes paralelos a los inicialmente definidos. Es decir, realizando todas las permutaciones posibles de las configuraciones citadas, PRRRRR y

PRRRRR, se obtienen todas las posibles combinaciones con un número inferior de pares de rotación de ejes paralelos, incluyendo el caso de los cinco pares de rotación no paralelos.

2. Tres pares de rotación con ejes paralelos entre sí (por ejemplo, PRRRRR). La combinación de cualquiera de ellos con el par prismático siempre definirá un par cilíndrico al tener ambos, el par prismático y el de rotación, ejes paralelos (por ejemplo, PRRR se convertirá en CRR). Realizando todas las permutaciones posibles del grupo de pares de rotación RRRRR se obtienen 8 permutaciones posibles, RRRRR, RRRRR, RRRRR, RRRRR, RRRRR, RRRRR, RRRRR y RRRRR. Combinando dichas permutaciones de los pares de rotación con un par prismático se obtendrán todas las posibles variantes de las seis cadenas cinemáticas obtenidas permutando la cadena cinemática genérica PRRRRR.
3. Dos grupos de pares de rotación con ejes paralelos en cada grupo y perpendiculares entre ellos (PRRRRR). En la tabla 4.4 se recogen todas las permutaciones de cinco pares de rotación RRRRR, donde se muestran en rojo y tachadas las permutaciones repetidas. En la tabla 4.5 se recogen únicamente las permutaciones diferentes, a modo de resumen. Combinando dichas permutaciones de los pares de rotación con un par prismático se obtendrán todas las posibles variantes de la cadena cinemática PRRRRR.

Permutaciones de <u>RRRR</u> y equivalencias			
<u>RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>	RRRR-RRRR	<u>RRRR=RRRR</u>
RRRR=RRRR	RRRR-RRRR	<u>RRRR=RRRR=RRRR</u>	—
RRRR-RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	—	—
RRRR-RRRR	—	—	—
RRRR-RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	<u>RRRR=RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>
RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	—
RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	—	—
RRRR-RRRR	—	—	—
RRRR-RRRR	<u>RRRR</u>	RRRR-RRRR	RRRR-RRRR
RRRR-RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	RRRR-RRRR	—
RRRR-RRRR	RRRR-RRRR-RRRR	—	—
RRRR-RRRR-RRRR	—	—	—

Tabla 4.4: Permutaciones de RRRR

Resumen de permutaciones de <u>RRRR</u> y equivalencias			
<u>RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>	<u>RRRR</u>	—
<u>RRRR=RRRR=RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>	<u>RRRR=RRRR</u>
<u>RRRR=RRRR</u>	—	—	—

Tabla 4.5: Resumen de permutaciones de RRRR

En las tablas 4.6 y 4.7 se recogen todas las posibles variantes de la configuración PRRRR y las 69 cadenas posibles utilizando pares P, R, C, U y S que se obtienen al aplicar las simplificaciones geométricas definidas en el apartado 4.4, mostrándose en rojo y tachadas las cadenas obtenidas anteriormente en dichas tablas. Se ha seguido una metodología idéntica a la descrita en el apartado 4.4.2 para comprobar que se han analizado todas las posibles combinaciones.

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RRR</u>	Cadenas posibles
1	PRRRRR	<u>PRRRRR</u>	<u>CRS</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PURU,CRRU</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PSRR,CURR</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>CUU,CSR,CRS,PRSR,PRRS,PRUU</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PUS,CRS</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PSU,CUU</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PSRR,CSR,PUUR,CURR,PRSR</u>
		<u>PRRRRR</u>	<u>PSU,CUU,CSR,PUS,CRS</u>
2	RPRRRR	<u>RPRRRR</u>	<u>CRS</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>RCRU</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>RPURR,CURR,RCRRR</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>CRS,RCS,CUU,CSR</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>RCS,CRS</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>CUU,RCRU</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>CSR,CURR,RCUR,RPSR</u>
		<u>RPRRRR</u>	<u>CSR,RCS,CUU,CRS</u>
3	RRPRRR	<u>RRPRRR</u>	<u>RCS,RRCU</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UCU,RCRU</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UCRR</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>RCS,RRCU</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UPS,UCU,RCS</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UCU,RCRU</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UPUR,RCUR,UCRR</u>
		<u>RRPRRR</u>	<u>UPS,UCU,RCS</u>

Tabla 4.6: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PRRRRR (primer grupo)

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RRR</u>	Cadenas posibles
4	RRRPRR	<u>RRR</u> PRR	RRCU
		<u>RRR</u> PRR	UCU ,URCR
		<u>RRR</u> PRR	SCR, UCRR
		<u>RRR</u> PRR	RUPU, RRCU ,RUCR
		<u>RRR</u> PRR	UCU ,URPU,URCR
		<u>RRR</u> PRR	SPU, UCU ,SCR
		<u>RRR</u> PRR	SCR , UCRR
		<u>RRR</u> PRR	SPU , UCU , SCR
5	RRRRPR	<u>RRRR</u> PR	RRUPR, RRRCR ,RRUC
		<u>RRRR</u> PR	URCR
		<u>RRRR</u> PR	SCR ,SRC
		<u>RRRR</u> PR	RSC,RSPR, RU CR
		<u>RRRR</u> PR	UUC, UR CR
		<u>RRRR</u> PR	SCR ,SRC,SRPR
		<u>RRRR</u> PR	UUC, SRC , SCR ,UUPR,SRPR, RSC , RSPR
		<u>RRRR</u> PR	SRC ,UUC, RSC , SRPR ,UUPR, RSPR
6	RRRRRP	<u>RRRR</u> RP	RRSP, RRUC
		<u>RRRR</u> RP	URUP,URRC
		<u>RRRR</u> RP	SRC
		<u>RRRR</u> RP	RSC , RRSP ,RUUP,RRUC,RSRP
		<u>RRRR</u> RP	UUC ,USP
		<u>RRRR</u> RP	SUP,RUUP, SRC
		<u>RRRR</u> RP	SRC , UUC , RSC , SRRP ,UURP, RSRP
		<u>RRRR</u> RP	SUP , USP , UUC , SRC , RSC , RSRP

Tabla 4.7: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PRRRRR (segundo grupo)

En las tablas 4.8 y 4.9 se recogen todas las posibles variantes de la configuración PRRRRR y las 40 nuevas cadenas posibles utilizando pares P, R, C, U y S que se obtienen al aplicar las simplificaciones geométricas definidas en el apartado 4.4, mostrándose en rojo y tachadas las cadenas obtenidas anteriormente en dichas tablas. Asimismo, se muestran en color verde y tachado las cadenas ya contempladas en las tablas 4.6 y 4.7 (combinaciones posibles de cadenas cinemáticas PRRRRR).

Adicionalmente, se ha seguido una metodología idéntica a la descrita en el apartado 4.4.2 para comprobar que se han analizado todas las posibles combinaciones.

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RRRR</u>	Cadenas posibles
1	PRRRRR	<u>P</u> RRRRR	<u>P</u> RUU, <u>C</u> UU
		PR <u>R</u> RRR	<u>P</u> RSR, <u>C</u> SR
		PRRR <u>R</u>	<u>P</u> UUR, <u>C</u> RUR
		PRRRRR	<u>P</u> RS, <u>C</u> RS, <u>P</u> RSR, <u>C</u> SR, <u>P</u> RUU, <u>C</u> UU
		PRRRRR	<u>P</u> UUR, <u>P</u> US, <u>C</u> RS
		PRRRRR	<u>P</u> SU, <u>C</u> UU
		PRRRRR	<u>P</u> SRR, <u>P</u> RSR, <u>C</u> SR
		PRRRRR	<u>P</u> US, <u>P</u> SU, <u>C</u> UU, <u>C</u> RS, <u>C</u> SR
2	RPRRRR	<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PUU, <u>C</u> UU, <u>R</u> CRU
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PSR, <u>C</u> SR, <u>R</u> CUR
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PUR, <u>C</u> UR, <u>R</u> CUR
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PRS, <u>C</u> RS, <u>R</u> CS, <u>R</u> PSR, <u>C</u> SR, <u>R</u> PUU, <u>C</u> UU
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PRS, <u>R</u> CS, <u>C</u> RS
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PUU, <u>C</u> UU, <u>R</u> CRU
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PSR, <u>C</u> SR, <u>R</u> PSR, <u>R</u> CUR
		<u>R</u> PRRRR	<u>R</u> PUU, <u>R</u> PRS, <u>R</u> PSR, <u>C</u> UU, <u>C</u> RS, <u>C</u> SR, <u>R</u> CS
3	RRPRRR	<u>R</u> RPRRR	<u>R</u> PRU, <u>R</u> CRU, <u>R</u> RCU
		<u>R</u> RPRRR	<u>R</u> PUR, <u>R</u> CUR, <u>R</u> RCCR
		<u>R</u> RPRRR	<u>U</u> PUR, <u>R</u> CUR, <u>U</u> CCR
		<u>R</u> RPRRR	<u>R</u> RPS, <u>R</u> RCU, <u>R</u> CS
		<u>R</u> RPRRR	<u>U</u> PS, <u>R</u> CS, <u>U</u> CU
		<u>R</u> RPRRR	<u>U</u> PRU, <u>U</u> CU, <u>R</u> CRU
		<u>R</u> RPRRR	<u>U</u> PUR, <u>U</u> CCR, <u>R</u> CUR
		<u>R</u> RPRRR	<u>U</u> PS, <u>R</u> CS, <u>U</u> CU

Tabla 4.8: Cadenas posibles a partir de las permutaciones PRRRRR (primer grupo)

Permutación	Cadena cinemática	Variantes con pares <u>RRRR</u>	Cadenas posibles
4	RRRPRR	<u>RRRPRR</u>	<u>RUPU</u> , <u>RUCR</u> , <u>RRCU</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>RUPRR</u> , <u>RUCR</u> , <u>RRCR</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>URPRR</u> , <u>URCR</u> , <u>UCRR</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>RUPU</u> , <u>RUCR</u> , <u>RRCU</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>URPU</u> , <u>URCR</u> , <u>UCU</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>SPU</u> , <u>SCR</u> , <u>UCU</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>SPRR</u> , <u>SCR</u> , <u>UCRR</u>
		<u>RRRPRR</u>	<u>SPU</u> , <u>SCR</u> , <u>UCU</u>
5	RRRRPR	<u>RRRRPR</u>	<u>RURPR</u> , <u>RURC</u> , <u>RUCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>RSPR</u> , <u>RSC</u> , <u>RUCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>UUPR</u> , <u>UUC</u> , <u>URCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>RSPR</u> , <u>RSC</u> , <u>RUCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>UUPR</u> , <u>UUC</u> , <u>URCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>SRPR</u> , <u>SRC</u> , <u>SCR</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>SRPR</u> , <u>RSPR</u> , <u>SRC</u> , <u>RSC</u> , <u>UUPR</u> , <u>UUC</u>
		<u>RRRRPR</u>	<u>RSC</u> , <u>SRC</u> , <u>RSPR</u> , <u>SRPR</u> , <u>UUC</u> , <u>UUPR</u> , <u>SCR</u>
6	RRRRRP	<u>RRRRRP</u>	<u>RUUP</u> , <u>RUUC</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>RUURP</u> , <u>RRURP</u> , <u>RUUC</u> , <u>RRUC</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>UURP</u> , <u>UUC</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>RRSP</u> , <u>RSRP</u> , <u>RSC</u> , <u>RUUP</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>USP</u> , <u>UUC</u> , <u>UURP</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>SUP</u> , <u>SRC</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>SRRP</u> , <u>SRC</u> , <u>RSRP</u> , <u>RSC</u>
		<u>RRRRRP</u>	<u>USP</u> , <u>SUP</u> , <u>RSC</u> , <u>SRC</u> , <u>UUC</u>

Tabla 4.9: Cadenas posibles a partir de las permutaciones RRRRRR (segundo grupo)

4.4.4. Cadenas Cinemáticas RRRRRR

En este caso únicamente existe una posible combinación de pares cinemáticos ya que los seis pares son de rotación. Ahora bien, teniendo en cuenta los criterios geométricos que se han definido en el apartado 4.4, podemos obtener combinaciones adicionales. Dado que la cadena cinemática tiene seis pares de rotación es necesario que dichos pares de rotación se combinen de tal forma que proporcionen los tres grados de libertad de traslación y los tres de rotación. Teniendo en cuenta que todos los pares de rotación adyacentes forman 0° ó 90° entre sí, únicamente pueden darse dos situaciones con un máximo de ejes de rotación paralelos:

- Tres grupos formados cada uno por dos pares de rotación con ejes paralelos entre sí y perpendiculares a los ejes del grupo o grupos adyacentes.
- Tres pares de rotación con ejes de paralelos entre sí, otros dos pares con ejes también paralelos entre sí y perpendiculares al primer grupo de pares y un sexto par de rotación con eje perpendicular a todos los anteriores.

Utilizando la notación indicada en el apartado 4.4, un grupo de pares de rotación de ejes paralelos los indicaremos con un subrayado, otro grupo de ejes paralelos con cursiva y un tercero lo indicaremos con negrita. Teniendo en cuenta los criterios geométricos que se han definido en el apartado 4.4, además de las combinaciones definidas en los apartados 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3 anteriores, podemos obtener combinaciones adicionales tales como:

1. Dos pares de rotación unidos a otro intermedio cuyo eje forma 90° con los primeros es obvio que nunca podrán mantener de forma permanente sus ejes paralelos, tal y como se indicó en el apartado 4.4.2, es decir RRR=RRR. Por tanto se obtendrán permutaciones de pares de rotación con menor número de pares de ejes paralelos a los inicialmente definidos. Es decir, realizando todas las permutaciones posibles de las configuraciones citadas, **RRRRRR** y RRRRRR, se obtienen todas las posibles permutaciones con un número inferior de pares de rotación de ejes paralelos, incluyendo el caso de los seis pares de rotación no paralelos.
2. En caso de que dos pares de rotación unidos por un mismo elemento formen 90° entre sí, de acuerdo a las simplificaciones geométricas del apartado 4.4 constituirán una junta cardan y si son tres pares de rotación con ejes perpendiculares con el adyacente formarán una rótula esférica.

También son de aplicación los comentarios realizados en los apartados 4.4.1, 4.4.2 y 4.4.3 anteriores.

En la tabla 4.10 adjunta se muestran todas las posibles permutaciones de la cadena cinemática **RRRRRR** formada por tres grupos de dos pares de rotación con ejes paralelos entre sí y perpendiculares a los ejes de los grupos adyacentes. Con el fin de obtenerlas, en la columna de la izquierda de dicha tabla se muestran todas las

permutaciones posibles de los grupos de pares de rotación \underline{RRRR} , 6 permutaciones, que quedan reducidas a tres casos, teniendo en cuenta las simplificaciones geométricas comentadas anteriormente. Dichas permutaciones de \underline{RRRR} son a su vez combinadas con el grupo de pares de rotación \underline{RR} . En rojo y tachadas se indican aquellos casos que se repiten en la propia tabla 4.10, quedando finalmente 10 permutaciones diferentes que se analizarán posteriormente. En la tabla 4.11 se recogen dichas 10 permutaciones a modo de resumen.

Permutaciones de \underline{RRRRR} y equivalencias					
	\underline{RRRRR}	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$ $=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$
$\underline{RRRR}=\underline{RRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$ $=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$ $=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$ $=\underline{RRRRR}$	—	—	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$
$\underline{RRRR}=\underline{RRRR}$ $=\underline{RRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$ $=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—	—	—
$\underline{RRRR}=\underline{RRRR}$ $=\underline{RRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—	—
	$\underline{RRRRR}=\underline{RRRRR}$	—	—	—	—

Tabla 4.10: Permutaciones de \underline{RRRRR}

Resumen de permutaciones de $RRRRR$ y equivalencias					
$RRRR=RRRR$	$RRRRR$	$RRRRR=RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR$
	$RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR=RRRRR$	$RRRRR=RRRRR$	—
$RRRR=RRRR=RRRR$	$RRRRR=RRRRR$	—	—	—	—
$RRRR=RRRR=RRRR$	—	—	—	—	—

Tabla 4.11: Resumen de permutaciones de $RRRRR$

Asimismo, en la tabla 4.12 adjunta se muestran todas las posibles permutaciones de la cadena cinemática $RRRRR$ formada por tres pares de rotación con ejes de paralelos entre sí, otros dos pares con ejes también paralelos entre sí y perpendiculares al primer grupo de pares y un sexto par de rotación con eje perpendicular al grupo de pares adyacente. Con el fin de obtenerlas, en la columna de la izquierda de dicha tabla se muestran todas las permutaciones posibles de los grupos de pares de rotación RRR , tres combinaciones, a las que se aplican las simplificaciones geométricas comentadas anteriormente. Dichas permutaciones son a su vez combinadas con el grupo de pares de rotación RRR . En rojo y tachadas se indican aquellas combinaciones que se repiten en la propia tabla 4.12 y en verde y tachadas aquellas permutaciones ya recogidas en la tabla 4.11 anterior, quedando finalmente 16 casos diferentes que se analizarán posteriormente. En la tabla 4.13 se recogen dichas 16 permutaciones a modo de resumen.

Permutaciones de <u>RRRRR</u> y equivalencias					
RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
RRR=RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>

Tabla 4.12: Permutaciones de RRRRR

Resumen de permutaciones de <u>RRRRR</u> y equivalencias					
RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	—
	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	—	—
RRR=RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>	—	—
RRR	<u>RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR=RRRRR</u>	<u>RRRRR</u>
	<u>RRRRR</u>	—	—	—	—

Tabla 4.13: Resumen de permutaciones de RRRRR (excluidas las contempladas en 4.11)

En las tablas 4.14 y 4.15 que se presentan a continuación, se muestran todas las posibles permutaciones de las configuraciones RRRRR y RRRRR estudiadas

anteriormente y las 24 posibles cadenas diferentes de pares R, U y S que se obtienen al aplicar las simplificaciones geométricas definidas en el apartado 4.4, mostrándose en rojo y tachadas aquellas cadenas que ya han aparecido recogida en la misma tabla. Adicionalmente, en la tabla 4.15 aparecen en color verde y tachadas las cadenas ya contempladas en la tabla 4.14. En la tabla 4.14 no aparece la configuración de cadena cinemática SS ya que realmente no proporciona seis GDL, tal y como se ha indicado en el apartado 4.4. Lo mismo sucede con las cadenas cinemáticas RRRR y RRRS que únicamente definen tres GDL de rotación y dos de traslación, por lo que tampoco se recogen en la tabla 4.15.

Cadena cinemática	Variantes de <u>RRRRRR</u>	Cadenas posibles
RRRRRR	<u>RRRRRR</u>	<u>RUUR</u>
	<u>RRRRRR</u>	RSU
	<u>RRRRRR</u>	USR
	<u>RRRRRR</u>	<u>UUU</u>
	<u>RRRRRR</u>	RSU , RUS , RRSR
	<u>RRRRRR</u>	<u>UUU</u> , <u>URS</u> , USR
	<u>RRRRRR</u>	SRU, <u>UUU</u> , RSU
	<u>RRRRRR</u>	<u>SUR</u> , USR , <u>RSRR</u>
	<u>RRRRRR</u>	UUU, SUR, SRU, RUS, URS, USR , RSU
	<u>RRRRRR</u>	SUR , SRU , RUS , URS

Tabla 4.14: Combinaciones posibles de cadenas cinemáticas RRRRRR

Cadena cinemática	Variantes de <u>RRRRRR</u>	Cadenas posibles
RRRRRR	<u>RRRRRR</u>	<u>RRUU</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RURU</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RSRR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>URS</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RUUR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>UUU</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>USR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RRUU, RRSR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>SRU</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>UURR, RSRR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RRSR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>URUR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>UURR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RSRR, RRSR</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>RSU</u>
	<u>RRRRRR</u>	<u>SUR</u>

Tabla 4.15: Combinaciones posibles de cadenas cinemáticas RRRRRR

4.4.5. Resumen de Cadenas Cinemáticas de 6 GDL

Tal y como se recoge en el apartado 4.4, a partir de las 4 agrupaciones de pares prismáticos y de rotación de 6 GDL, PPPRRR, PRRRRR, PRRRRR y RRRRRR, aplicando una serie de criterios y simplificaciones geométricas recogidas en dicho apartado 4.4, se obtienen 347 posibles cadenas, recogidas en los apartados 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 y 4.4.4.

Es evidente que, si se considera necesario incluir en esta selección de cadenas, aquellas que contienen los pares clase I (P y R) desgajados, basta con añadir a la lista de 347 cadenas, todas las cadenas recogidas en la columna “Variantes de...” en las tablas 4.1 a 4.15. Asimismo, se pueden generar cadenas intermedias entre las formadas únicamente por pares P y R y las 347 obtenidas con las simplificaciones del apartado 4.4, aplicando de forma parcial dichas simplificaciones (por ejemplo, la cadena RRRUP, que se transforma en SUP con las simplificaciones del apartado 4.4).

En este apartado se van a clasificar dichas 347 cadenas en función de la tipología del par cinemático de unión a la plataforma fija (R, P, C, U y S) y del número de pares

prismáticos y de rotación de la cadena genérica (3P3R, 2P4R, 1P5R y 6R) a partir de la cual se obtuvieron. Se ha seleccionado este criterio para clasificar las cadenas obtenidas, dado que un elemento de decisión importante en la selección de la cadena a emplear es el accionamiento, y lo recomendable es que dicho accionamiento esté unido a la plataforma fija para minimizar el peso de la estructura móvil.

En las tablas 4.16, 4.17 y 4.18 se recogen las posibles cadenas cinemáticas obtenidas aplicando los criterios y simplificaciones recogidas en los apartados anteriores, clasificadas según el par de unión de la cadena a la plataforma fija. Así, en la tabla 4.16 se recogen todas las cadenas obtenidas que se conectan a la plataforma fija con un par R. En la tabla 4.17 se recogen las cadenas que se conectan a la plataforma fija con un par P o un par C. Finalmente, en la tabla 4.18 se recogen las cadenas con pares U ó S conectados a la plataforma fija.

Par de unión plataforma fija	Cadenas Cinemáticas 3P3R	Cadenas Cinemáticas 2P4R	Cadenas Cinemáticas 1P5R	Cadenas Cinemáticas 6R
Par R	RCCP	<u>R</u> CCR, <u>R</u> CCR, <u>R</u> CCR, <u>R</u> CCR	RCRRR	RRSR
	RCPC	<u>R</u> CU, <u>R</u> CU, <u>R</u> CU	<u>R</u> CU, <u>R</u> CU, <u>R</u> CU	RRUU,RRUU
	RCPPR	<u>R</u> CRC, <u>R</u> CRC, <u>R</u> CRC, <u>R</u> CRC	<u>R</u> CS, <u>R</u> CS	RSRR
	RCPRP	<u>R</u> CPRR, <u>R</u> CPRR	<u>R</u> CU <u>R</u> , <u>R</u> CU <u>R</u> <u>R</u> CU <u>R</u>	RSU
	RCRPP	<u>R</u> CRPR, <u>R</u> CRPR, <u>R</u> CRPR, <u>R</u> CRPR	<u>R</u> PRS, <u>R</u> PRS	<u>R</u> URU
	RPCC	RCRRP	RPRUR	RUS,RUS
	RPCPR	<u>R</u> CUP, <u>R</u> CUP, <u>R</u> CUP	RPSR	RUUR,RUUR
	RPCRP	RPCRR	RPURR	
	RPPCR	<u>R</u> PCU, <u>R</u> PCU, <u>R</u> PCU	<u>R</u> PUU, <u>R</u> PUU, <u>R</u> PUU, <u>R</u> PUU	
	RPPPU	RPPRU	RRCRR	
	RPPRC	RPPS	<u>R</u> RCU, <u>R</u> RCU, <u>R</u> RCU	
	RPPRPR	RPPUR	RRPRU	
	RPPUP	<u>R</u> PRCR, <u>R</u> PRCR, <u>R</u> PRCR, <u>R</u> PRCR	RRPS	
	RPRCP	RPRPRR	RRPUR	
	RPRPC	<u>R</u> PRPU, <u>R</u> PRPU, <u>R</u> PRPU	RRRCR	
	RPRPPR	RPRRC	RRSP	
	RPRPRP	RPRRPR	<u>R</u> RUC, <u>R</u> RUC, <u>R</u> RUC	
	RPUPP	<u>R</u> PURP	RRUPR	
		RPSP	RRURP	
		<u>R</u> PUC, <u>R</u> PUC, <u>R</u> PUC	RSC	
		<u>R</u> PUPR, <u>R</u> PUPR, <u>R</u> PUPR	RSPR	
		RPURP	RSRP	
		RRCC	<u>R</u> UCR, <u>R</u> UCR, <u>R</u> UCR	
		RRCPR	RUPRR	
		RRCRP	<u>R</u> UPU, <u>R</u> UPU	
		RRPCR	<u>R</u> URC	
		RRPPU	<u>R</u> URPR	
		RRPRC	<u>R</u> URRP	
		RRPRPR	<u>R</u> UUP, <u>R</u> UUP, <u>R</u> UUP, <u>R</u> UUP	
		RRPUP		
		RSPP		
		<u>R</u> UCP		
	<u>R</u> UPC			
	<u>R</u> UPPR			
	<u>R</u> UPRP			

Tabla 4.16: Cadenas con par R conectado a la plataforma fija

Par de unión plataforma fija	Cadenas Cinemáticas 3P3R	Cadenas Cinemáticas 2P4R	Cadenas Cinemáticas 1P5R
Par P	PCCR	<u>PCR</u> <u>U</u>	<u>PRR</u> <u>S</u>
	PCPU	PCS	PRSR
	PCRC	<u>PCUR</u>	<u>PRUU</u> , <u>PRUU</u>
	PCRPR	PPRS	<u>PSRR</u>
	PCUP	PPSR	PSU
	PCCU	<u>PPUU</u> , PPUU	<u>PURU</u>
	PPPS	<u>PRCRR</u>	PUS
	PPRCR	<u>PRCU</u> , <u>PRCU</u> , PRCU	<u>PUUR</u> , <u>PUUR</u> , <u>PUUR</u>
	PPRPU	<u>PRPRU</u>	
	PPSP	PRPS	
	PPUC	<u>PRPUR</u>	
	PPUPR	<u>PRRCR</u>	
	PRCC	<u>PRRPU</u>	
	PRCPR	PRSP	
	PRCRP	<u>PRUC</u>	
	PRPCR	<u>PRUPR</u>	
	PRPPU	PSC	
	PRPRC	PSPR	
	PRRPR	PSRP	
	PRPUP	<u>PUCR</u> , <u>PUCR</u> ,PUCR	
	PUCP	<u>PUPRR</u>	
	PUPC	<u>PUPU</u> ,PUPU	
	PUPPR	<u>PURC</u>	
	PUPRP	<u>PURPR</u>	
PSPP	<u>PUUP</u> ,PUUP		
Par C	CCC	<u>CCRR</u>	<u>CRRU</u>
	CCPR	<u>CCU</u> , <u>CCU</u>	<u>CRS</u> , <u>CRS</u>
	CCRP	<u>CPRU</u>	<u>CRUR</u>
	CPCR	CPS	CSR
	CPPU	<u>CPUR</u>	<u>CURR</u> , <u>CURR</u>
	CPRC	<u>CRCR</u> , <u>CRCR</u> , <u>CRCR</u> , <u>CRCR</u>	<u>CUU</u> , <u>CUU</u> , <u>CUU</u> , <u>CUU</u>
	CPRPR	<u>CRPU</u> , <u>CRPU</u> , <u>CRPU</u>	
	CPUP	<u>CRPRR</u>	
	CRCP	<u>CRRPR</u>	
	CRPC	<u>CRRC</u>	
	CRPPR	<u>CRUP</u>	
	CRPRP	CSP	
	CUPP	<u>CUC</u> , <u>CUC</u> , <u>CUC</u>	
		<u>CUPR</u> , <u>CUPR</u> , <u>CUPR</u>	
		<u>CURP</u>	

Tabla 4.17: Cadenas con par P o C conectado a la plataforma fija

Par de unión plataforma fija	Cadenas Cinemáticas 3P3R	Cadenas Cinemáticas 2P4R	Cadenas Cinemáticas 1P5R	Cadenas Cinemáticas 6R
Par U	UCPP	<u>UCC</u> ,UCC	<u>UCRR</u> , <u>UCRR</u> , <u>UCRR</u>	<u>URS</u> , URS
	UPCP	<u>UCPR</u> , <u>UCPR</u> , <u>UCPR</u>	<u>UCU</u> , <u>UCU</u> , <u>UCU</u> , <u>UCU</u>	<u>URUR</u>
	UPPC	<u>UCRP</u> , <u>UCRP</u> , <u>UCRP</u>	<u>UPRU</u>	USR
	UPPPR	<u>UPCR</u> , <u>UPCR</u> , <u>UPCR</u>	UPS	<u>UURR</u> , <u>UURR</u>
	UPPRP	<u>UPRR</u>	<u>UPUR</u> , <u>UPUR</u>	<u>UUU</u> , <u>UUU</u> , <u>UUU</u> , <u>UUU</u>
	UPRPP	<u>UPPU</u> , <u>UPPU</u>	<u>URCR</u> , <u>URCR</u> , <u>URCR</u>	
		<u>UPRC</u> , <u>UPRC</u> , <u>UPRC</u>	<u>URPRR</u>	
		<u>UPRPR</u> , <u>UPRPR</u> , <u>UPRPR</u>	<u>URPU</u>	
		<u>UPRRP</u>	<u>URRC</u>	
		<u>UPUP</u> , <u>UPUP</u>	<u>URUP</u>	
		<u>URCP</u>	USP	
		<u>URPC</u>	<u>UUC</u> , <u>UUC</u> , <u>UUC</u> , <u>UUC</u>	
		<u>URPPR</u>	<u>UUPR</u> , <u>UUPR</u> , <u>UUPR</u> , UUPR	
		<u>URPRP</u>	<u>UURP</u> , <u>UURP</u>	
		<u>UUPP</u> , <u>UUPP</u>		
Par S	SPPP	SCP	<u>SCR</u> , <u>SCR</u>	<u>SRU</u> , <u>SRU</u>
		SPC	<u>SPRR</u>	<u>SUR</u> , <u>SUR</u>
		SPPR	SPU	
		SPRP	<u>SRC</u> , <u>SRC</u>	
		SRPP	<u>SRPR</u> , <u>SRPR</u>	
			<u>SRRP</u>	
			SUP	

Tabla 4.18: Cadenas con par U o S conectado a la plataforma fija

Dentro de estas 347 configuraciones de cadenas cinemáticas existen un grupo de cadenas que contienen grupos UU formados por dos juntas cardan, que en algunos casos están conectadas de forma que los ejes de los pares de rotación intermedios son paralelos como es el caso de la secuencia RRRR y que, por tanto, constituyen un grupo UU. Sin embargo el hecho de que sea un grupo UU ó UU es irrelevante desde el punto de vista de la síntesis estructural ya que, en ambos casos, se generan tres movimientos independientes de rotación y uno de traslación (1T3R), lo que permitiría reducir el número de cadenas a estudiar.

Una vez seleccionada la cadena cinemática o cadenas de 6 GDL que se consideran más adecuadas, y determinado el número de cadenas cinemáticas que van a componer el

MP, se resolverá el problema de velocidades y se analizarán las velocidades de salida de la plataforma móvil en función de las variables de entrada. A continuación se procederá a analizar la multioperacionalidad y el acoplamiento de velocidades del MP de 6 GDL con el objetivo de obtener el MP de baja movilidad objeto del estudio.

4.5. Resolución del Problema de Velocidades del MP de 6 GDL

A continuación se plantea el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema directo e inverso de velocidades del MP de 6 GDL objeto de estudio. Es decir, se obtendrá el sistema de ecuaciones que permite expresar las velocidades de la plataforma móvil a partir de las velocidades de entrada seleccionadas. A continuación, se van a definir los pasos necesarios para plantear el sistema de ecuaciones:

1. Determinar la velocidad lineal del punto P , \vec{v}_P , de la plataforma móvil y de su velocidad angular $\vec{\omega}$ a partir de la ecuación vectorial de cada una de las cadenas cinemáticas que constituyen el MP objeto de estudio. Dichas ecuaciones, que se muestran en el apartado 4.2, son función de las velocidades angulares y lineales de los pares del MP y de los vectores unitarios de rotación y traslación de dichos pares cinemáticos. Por tanto, es necesario determinar las componentes de dichos vectores para todas las cadenas cinemáticas.
2. Obtener las componentes de los vectores unitarios de los pares cinemáticos de la cadena i utilizando los criterios y reglas indicados en el apartado 4.3. En el caso de que todas las cadenas cinemáticas sean iguales, las componentes de los vectores unitarios del resto de cadenas cinemáticas que componen el MP se obtendrán aplicando la Matriz de Rotación asociada a cada cadena respecto de la cadena i . A continuación se muestran las tres Matrices básicas de Rotación $R_{\alpha X}$, $R_{\varphi Y}$ y $R_{\theta Z}$ alrededor de cada uno de los ejes X,Y,Z del sistema de referencia, siendo α , φ y θ los ángulos girados por la cadena respecto de los ejes X,Y,Z respectivamente:

$$R_{\alpha X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad [4.9]$$

$$R_{\varphi Y} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad [4.10]$$

$$\mathbf{R}_{\theta Z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [4.11]$$

3. A continuación se plantearán las ecuaciones que representan la conexión de la plataforma móvil a las diferentes cadenas cinemáticas. Estas ecuaciones representan la posición relativa de los pares cinemáticos de las diferentes cadenas que están unidos a la plataforma móvil, que se mantiene invariable. De esta forma se consiguen las ecuaciones necesarias para resolver el problema de velocidades.
4. Finalmente se multiplican escalarmente las ecuaciones vectoriales correspondientes a cada cadena por el vector unitario de la variable de entrada que se desee conservar, lo que permite eliminar las variables de velocidad intermedias, tal y como se indica en el apartado 4.2.

4.6. Análisis de la Multioperacionalidad y del Acoplamiento de Desplazamientos del MP

A partir de las ecuaciones de velocidad se pueden estudiar las relaciones y vínculos que permiten determinados movimientos de la plataforma móvil restringiendo ciertos grados de libertad. En concreto se va a estudiar la posibilidad de, restringiendo alguna de las variables de entrada del MP de 6 GDL, se obtengan MPs de baja movilidad cuya plataforma móvil realice alguno de los desplazamientos con estructura de grupo de Lie definidos por la teoría de Grupos de Desplazamiento, tal y como se describe en el apartado 2.2.2.

Una vez resuelto el problema de velocidades del MP de 6 GDL y obtenido de forma explícita la expresión de las variables de salida, \vec{v}_p y $\vec{\omega}$, en función de las variables de entrada, tal y como se indica en el apartado 4.5, se estudiarán dichas expresiones con el objetivo de ver el grado de acoplamiento o desacoplamiento entre los movimientos de traslación y de rotación de la plataforma móvil.

Como se verá en los capítulos siguientes, la metodología descrita permite, partiendo de un MP de 6 GDL, obtener familias de MPs de baja movilidad que realicen movimientos específicos. Si los movimientos de la plataforma móvil están

desacoplados entre sí, restringiendo una u otra variable de entrada, se conseguirá un MP de baja movilidad con diferentes desplazamientos. A fin de introducir y orientar este análisis, se van a dar a continuación algunas directrices y criterios necesarios para obtener los diferentes grupos de desplazamiento con estructura de grupo de Lie.

En primer lugar, es obvio que, bloqueando todas las variables de entrada, se consigue el subgrupo de desplazamiento nulo, $\{I\}$, de dimensión 0.

Además, si se consigue controlar cada movimiento de traslación en una dirección constante, actuando sobre una única variable de entrada de forma independiente y habiendo bloqueado el resto de entradas, se habrá obtenido una familia de MP de baja movilidad capaz de cumplir los desplazamientos de Traslación $\{T_{\vec{u}}\}$, $\{T_{\vec{u}, \vec{v}}\}$ y/o $\{T_{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}}\}$, subgrupos de dimensión 1, 2 y 3 respectivamente.

Si se consigue que el movimiento de rotación de la plataforma móvil alrededor de un eje determinado, dependa exclusivamente de una de las variables de entrada con el resto de entradas bloqueadas, tendremos un MP con desplazamiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{ra}\}$ de su plataforma, subgrupo de dimensión 1. En ese caso, es necesario que el eje de rotación sea fijo, y por tanto, bloqueando el resto de las variables de entrada, las componentes de la velocidad angular $\vec{\omega}$ de la plataforma móvil han de cumplir,

$$\omega_x / \omega_z = K1 ; \omega_y / \omega_z = K2 \quad \text{ó} \quad \omega_x / \omega_y = K3 \quad \text{para} \quad \omega_z = 0 \quad [4.12]$$

Donde K1, K2 y K3 son constantes e independientes de la variable de entrada activa. Como es obvio, en el caso del movimiento Rotacional las velocidades \vec{v}_P y $\vec{\omega}$ son perpendiculares entre sí.

En el caso del movimiento Helicoidal $\{\mathcal{H}_A, h, \vec{ra}\}$, subgrupo de dimensión 1, es necesario que los puntos de la plataforma móvil experimenten un movimiento combinado de traslación y rotación alrededor de un mismo eje unitario y gobernado por una única variable de entrada. Para ello, bloqueando el resto de variables de entrada, la velocidad \vec{v}_P de un punto P cualquiera de la plataforma móvil ha de ser tal que,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{Pd} + \vec{\omega} \times \vec{R} \quad [4.13]$$

Donde \vec{v}_{Pd} es la velocidad de deslizamiento, paralela al eje del movimiento helicoidal y \vec{R} es el vector que une el punto P con el punto más próximo del eje A del movimiento helicoidal. La velocidad de deslizamiento es paralela a la velocidad angular y con una proporcionalidad constante tal que,

$$\vec{v}_{Pd} = (h/2\pi) \vec{\omega} \quad [4.14]$$

Donde h representa el paso de la hélice del movimiento. Adicionalmente, dado que el eje A del movimiento helicoidal ha de ser fijo, se han de cumplir las ecuaciones [4.12]. Además, teniendo en cuenta la ecuación [4.14], las componentes de la velocidad de deslizamiento han de cumplir:

$$v_{Pdx} / v_{Pdz} = \omega_x / \omega_z = K1 ; v_{Pdy} / v_{Pdz} = \omega_y / \omega_z = K2$$

$$\text{ó } v_{Pdx} / v_{Pdy} = \omega_x / \omega_y = K3 \text{ para } \omega_z = 0 \quad [4.15]$$

Donde $K1$, $K2$ y $K3$ son constantes e independientes de la variable de entrada activa, como sucede en las ecuaciones [4.12].

Si el movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{ra}\}$ citado se combina con uno o varios movimientos de Traslación controlados cada uno por una única variable de entrada de forma independiente, se conseguirán familias de MPs de baja movilidad con desplazamientos $\{C_A\}$, $\{F_{\vec{u}, \vec{v}}\}$ y $\{X_e\}$, de dimensión 2, 3 y 4 respectivamente.

En el caso del movimiento Esférico $\{S_O\}$, subgrupo de dimensión 3, es necesario que además de tener la posibilidad de rotación en las tres direcciones, todos los puntos de la plataforma móvil giren alrededor de diferentes ejes que pasen por un mismo punto fijo.

El movimiento de Traslación Helicoidal $\{\mathcal{Y}_{\vec{u}, h}\}$, de dimensión 3, se obtiene cuando se consigue un subgrupo que contiene dos desplazamientos de traslación linealmente independientes y ortogonales a un desplazamiento helicoidal de paso h (movimiento helicoidal que cumplirá las condiciones recogidas en las ecuaciones [4.15]).

Por último, los desplazamientos de todo MP de 6 GDL tienen estructura de grupo (subgrupo) de dimensión 6, $\{\mathcal{D}\}$.

En los capítulos 5 y 6 siguientes se estudiarán varias aplicaciones prácticas del procedimiento descrito. En particular, en el capítulo 6 se estudiará el manipulador de 6 GDL denominado 3-CPCR, comprobándose la posibilidad de obtener un MP de baja movilidad, el MP $1\underline{C}PCR\ 2\underline{P}PCR$ con movimiento Schönflies $\{\mathcal{X}_e\}$.

5. ANÁLISIS DE LA PLATAFORMA GOUGH-STEWART

En el presente capítulo se realizará el análisis de la plataforma Gough-Stewart 6-SPU de 6 GDL, mostrada en la figura 5.1, siguiendo la metodología descrita en el capítulo 4. A continuación se procederá a realizar el análisis de la multioperacionalidad y del acoplamiento de los desplazamientos de la plataforma móvil de dicho MP. Se comprobarán los posibles desplazamientos con estructura de grupo de Lie que se pueden obtener restringiendo alguna de las variables de entrada del MP 6-SPU, definiendo con ello un MP de baja movilidad.

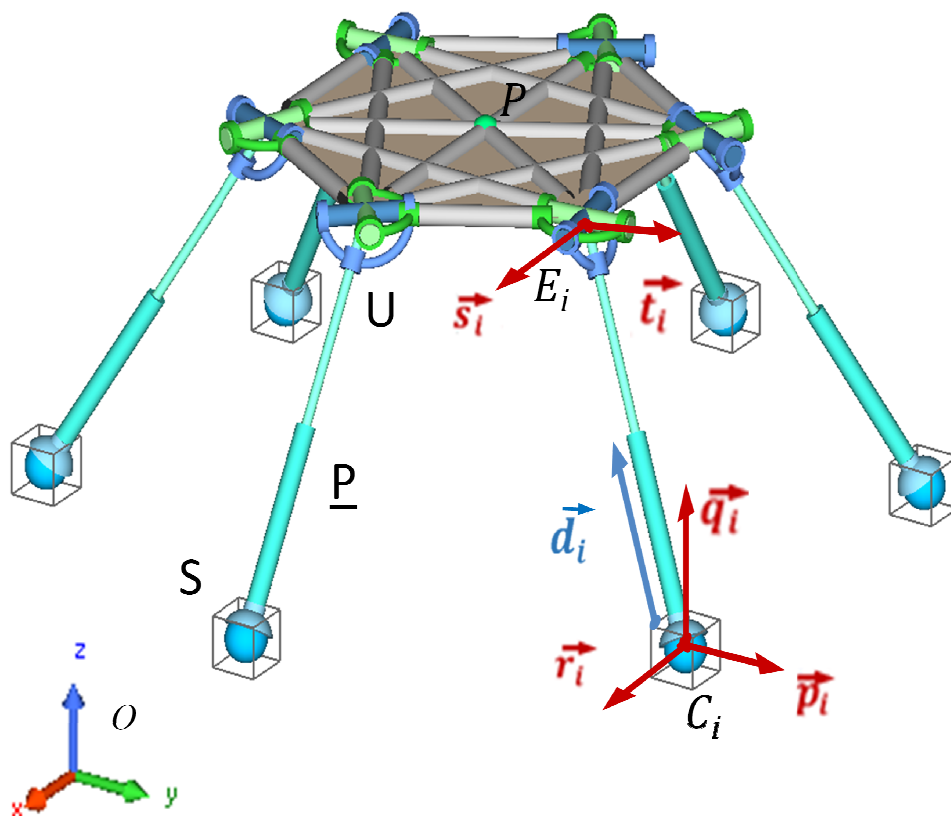


Figura 5.1: Plataforma Gough-Stewart y vectores unitarios de la cadena i

5.1. Planteamiento del Problema de Velocidades

En primer lugar vamos a determinar la ecuación vectorial de una cadena cinemática cualquiera i del MP de acuerdo con la metodología desarrollada en el capítulo 4. La cadena genérica de la figura 4.1 se ha adaptado al caso de la cadena SPU de la plataforma Gough-Stewart, tal y como se muestra en la figura 5.2. En dicha figura se muestra como la rótula esférica situada en el nudo C_i (los nudos H_i , A_i , B_i y C_i de la figura 4.1 son coincidentes) tiene sus tres movimientos de rotación representados por los vectores unitarios \vec{p}_i , \vec{q}_i y \vec{r}_i . Lo mismo sucede con los nudos D_i y E_i que representan la junta cardan (de vectores unitarios de rotación \vec{s}_i y \vec{t}_i) y son coincidentes por lo que se les denominará como E_i únicamente. El nudo E_i se une directamente a la plataforma móvil no siendo necesario considerar un nudo F_i .

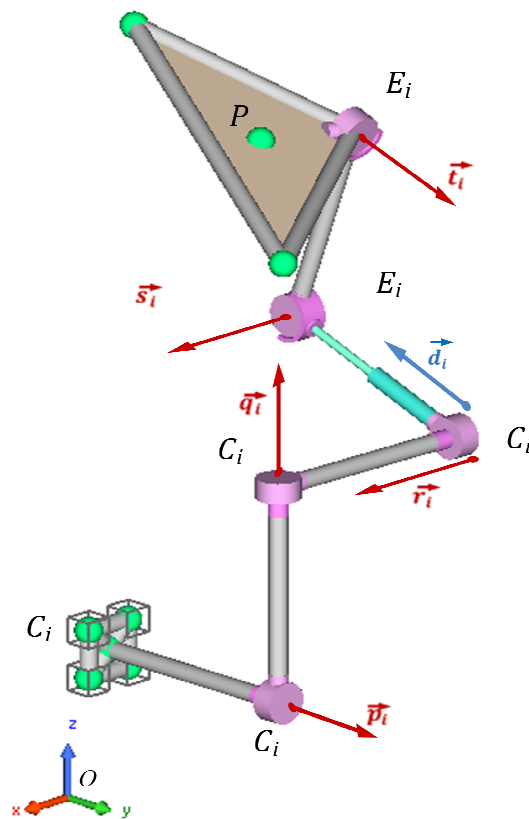


Figura 5.2: Vectores Unitarios de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart

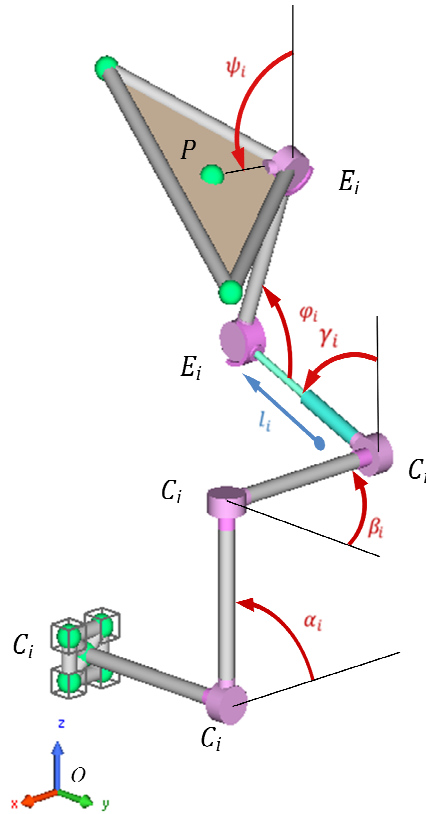


Figura 5.3: Magnitudes de Movimiento de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart

La ecuación vectorial [4.1] del apartado 4.1 quedará en este caso:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC_i} + \overrightarrow{C_iE_i} + \overrightarrow{E_iP} \quad [5.1]$$

Siendo en esta ecuación:

$$\overrightarrow{C_iE_i} = l_i \vec{d}_i \quad [5.2]$$

En la ecuación [5.2], l_i representa la magnitud del desplazamiento del par prismático y \vec{d}_i es el vector unitario que indica su dirección tal y como se muestra en las figuras 5.1, 5.2 y 5.3. Asimismo en dichas figuras 5.1 y 5.2 se muestran los vectores unitarios de rotación $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{r}_i, \vec{s}_i$ y \vec{t}_i , representativos de los cinco pares de rotación representados en la figura 5.2 y que constituyen la rótula esférica y la junta cardan. Dichos vectores llevan asociados los ángulos correspondientes de la figura 5.3, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varphi_i$ y ψ_i , que representan la magnitud del ángulo girado por cada uno de los pares de rotación de la cadena cinemática representados por los vectores unitarios de rotación citados. Estos giros son relativos entre los elementos que se conectan al par de rotación.

Como ya se indicó en el capítulo 4, nótese que, en la figura 5.2, las líneas de nacimiento de los ángulos girados por los correspondientes elementos son solidarias con los elementos anteriores respectivos, definiendo por tanto movimientos de giro relativos entre elementos.

A continuación se estudiará el problema de velocidades del manipulador paralelo en análisis. A partir de la ecuación vectorial de la cadena cinemática se determinará la velocidad lineal del punto P , \vec{v}_P , de la plataforma móvil. Para ello se aplicará la ley de derivación de vectores en bases móviles a dicha ecuación vectorial, tal y como se explica en el apartado 4.2 (ecuación [4.3]), obteniéndose en este caso:

$$\vec{v}_P = \dot{l}_i \vec{d}_i + \vec{\varepsilon}_i \times \overline{C_i E_i} + \vec{\omega} \times \overline{E_i P} \quad [5.3]$$

En esta ecuación $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular de la plataforma móvil y tiene las componentes $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Las velocidades angulares de los diferentes elementos tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\varepsilon}_i &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i \\ \vec{\omega} &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i + \dot{\phi}_i \vec{s}_i + \dot{\psi}_i \vec{t}_i \end{aligned} \right\} \quad [5.4]$$

A continuación se van a determinar las componentes de los vectores unitarios de rotación y desplazamiento de la cadena número 1. Para ello se aplicarán las reglas propuestas en el apartado 4.3 anterior (Ver figuras 4.3 y 4.4). A continuación, aplicando los pasos definidos en el apartado 4.5 obtendremos los vectores unitarios correspondientes al resto de cadenas cinemáticas del MP.

La cadena cinemática 1 se orientará respecto del sistema de referencia fijo de forma tal que su vector unitario de rotación \vec{p}_1 sea paralelo al eje Y y de sentido positivo. De acuerdo con las figuras 5.2 y 5.3 definiremos los restantes vectores de la cadena cinemática 1:

$$\vec{p}_1 = (0,1,0) \quad [5.5]$$

Dado que el vector \vec{q}_1 es perpendicular al vector \vec{p}_1 , siguiendo los pasos del apartado 4.3 (ecuación [4.5]), se obtiene:

$$\begin{cases} q_{x1}p_{x1} + q_{y1}p_{y1} + q_{z1}p_{z1} = 0 \\ q_{x1}^2 + q_{y1}^2 + q_{z1}^2 = 1 \\ q_{z1} = \sin \alpha_1 \end{cases} \quad [5.6]$$

Cogiendo la raíz correspondiente a la orientación de \vec{q}_1 en la figura 5.2 se obtiene,

$$\vec{q}_1 = (-\cos \alpha_1, 0, \sin \alpha_1) \quad [5.7]$$

En la figura 5.2 los vectores \vec{q}_i y \vec{r}_i son perpendiculares entre sí. Observando la figura 5.3 se deduce que la componente según el eje Y del vector \vec{r}_1 depende únicamente del ángulo β_1 , al ser \vec{p}_1 paralelo al eje Y. Por tanto, el sistema de ecuaciones (ecuación [4.5]) queda:

$$\begin{cases} q_{x1}r_{x1} + q_{y1}r_{y1} + q_{z1}r_{z1} = 0 \\ r_{x1}^2 + r_{y1}^2 + r_{z1}^2 = 1 \\ r_{y1} = -\cos \beta_1 \end{cases} \quad [5.8]$$

A partir de [5.7] y [5.8] y tomando la raíz correspondiente a la orientación de \vec{r}_1 en la figura 5.2 se obtiene,

$$\vec{r}_1 = (\sin \alpha_1 \sin \beta_1, -\cos \beta_1, \cos \alpha_1 \sin \beta_1) \quad [5.9]$$

A continuación se van a determinar las componentes del vector \vec{d}_1 . El vector \vec{d}_1 es un vector unitario perpendicular al vector \vec{r}_1 , lo que permite plantear dos de las tres ecuaciones necesarias. La tercera ecuación está basada en la geometría de la figuras 5.2 y 5.3, tal y como se ha realizado en la ecuación [4.5]. Observando la figura 5.3 se deduce que la componente según el eje Y del vector \vec{d}_1 no depende del ángulo α_1 , al ser \vec{p}_1 paralelo al eje Y. Finalmente, el sistema de ecuaciones queda,

$$\begin{cases} r_{x1}d_{x1} + r_{y1}d_{y1} + r_{z1}d_{z1} = 0 \\ d_{x1}^2 + d_{y1}^2 + d_{z1}^2 = 1 \\ d_{y1} = \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \end{cases} \quad [5.10]$$

Cogiendo la raíz correspondiente a la orientación de \vec{d}_1 en la figura 5.2 se obtiene,

$$\begin{cases} d_{x1} = -\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \\ d_{y1} = \sin \beta_1 \sin \gamma_1 \\ d_{z1} = \sin \alpha_1 \cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \end{cases} \quad [5.11]$$

Con estos vectores es suficiente para analizar el problema de velocidades. Los vectores \vec{s}_1 y \vec{t}_1 se pueden obtener de forma similar a la utilizada anteriormente. A continuación se han de obtener los vectores de las cadenas cinemáticas 2, 3, 4, 5 y 6. Para ello aplicaremos las matrices básicas de rotación recogidas en el apartado 4.5. En el caso de la plataforma Gough-Stewart mostrada en la figura 5.1, las cadenas cinemáticas están dispuestas de manera uniforme alrededor del eje Z, formando $\pi/3$ entre sí. Por tanto la matriz de transformación, (ecuación [4.11]), a aplicar a los vectores de la cadena 1 para obtener las otras cadenas será:

$$\mathbf{R}_{\theta Z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [5.12]$$

Donde $\theta = \pi/3$ para la cadena 2, $\theta = 2\pi/3$ para la cadena 3, $\theta = \pi$ para la cadena 4, $\theta = 4\pi/3$ para la cadena 5 y $\theta = 5\pi/3$ para la cadena 6.

Los vectores \vec{p}_i , \vec{q}_i , \vec{r}_i y \vec{d}_i para las cadenas cinemáticas 2 a 6 se obtienen aplicando a los vectores de la cadena cinemática 1 ([5.5], [5.7], [5.9] y [5.11]) las transformaciones de la ecuación [5.12]. Por tanto, los vectores de cada cadena cinemática serán,

$$\vec{p}_1 = (0,1,0)$$

$$\vec{p}_2 = \left(-\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{p}_3 = \left(-\sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{p}_4 = (0, -1, 0)$$

$$\vec{p}_5 = \left(-\sin \frac{4\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{p}_6 = \left(-\sin \frac{5\pi}{3}, \cos \frac{5\pi}{3}, 0 \right)$$

$$\vec{q}_1 = (-\cos \alpha_1, 0, \sin \alpha_1)$$

$$\vec{q}_2 = \left(-\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha_2, -\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha_2, \sin \alpha_2 \right)$$

$$\vec{q}_3 = \left(-\cos \frac{2\pi}{3} \cos \alpha_3, -\sin \frac{2\pi}{3} \cos \alpha_3, \sin \alpha_3 \right)$$

$$\vec{q}_4 = (\cos \alpha_4, 0, \sin \alpha_4)$$

$$\vec{q}_5 = \left(-\cos \frac{4\pi}{3} \cos \alpha_5, -\sin \frac{4\pi}{3} \cos \alpha_5, \sin \alpha_5 \right)$$

$$\vec{q}_6 = \left(-\cos \frac{5\pi}{3} \cos \alpha_6, -\sin \frac{5\pi}{3} \cos \alpha_6, \sin \alpha_6 \right)$$

$$\vec{r}_1 = (\sin \alpha_1 \sin \beta_1, -\cos \beta_1, \cos \alpha_1 \sin \beta_1)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + \sin \frac{\pi}{3} \cos \beta_2 \\ \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha_2 \sin \beta_2 - \cos \frac{\pi}{3} \cos \beta_2 \\ \cos \alpha_2 \sin \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} \sin \alpha_3 \sin \beta_3 + \sin \frac{2\pi}{3} \cos \beta_3 \\ \sin \frac{2\pi}{3} \sin \alpha_3 \sin \beta_3 - \cos \frac{2\pi}{3} \cos \beta_3 \\ \cos \alpha_3 \sin \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_4 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_4 \sin \beta_4 \\ \cos \beta_4 \\ \cos \alpha_4 \sin \beta_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_5 = \begin{pmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} \sin \alpha_5 \sin \beta_5 + \sin \frac{4\pi}{3} \cos \beta_5 \\ \sin \frac{4\pi}{3} \sin \alpha_5 \sin \beta_5 - \cos \frac{4\pi}{3} \cos \beta_5 \\ \cos \alpha_5 \sin \beta_5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_6 = \begin{pmatrix} \cos \frac{5\pi}{3} \sin \alpha_6 \sin \beta_6 + \sin \frac{5\pi}{3} \cos \beta_6 \\ \sin \frac{5\pi}{3} \sin \alpha_6 \sin \beta_6 - \cos \frac{5\pi}{3} \cos \beta_6 \\ \cos \alpha_6 \sin \beta_6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \\ -\sin \beta_1 \sin \gamma_1 \\ \sin \alpha_1 \cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha_2\cos\gamma_2 - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha_2\cos\beta_2\sin\gamma_2 + \sin\frac{\pi}{3}\sin\beta_2\sin\gamma_2 \\ -\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha_2\cos\gamma_2 - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha_2\cos\beta_2\sin\gamma_2 - \cos\frac{\pi}{3}\sin\beta_2\sin\gamma_2 \\ \sin\alpha_2\cos\gamma_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_2\sin\gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} -\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha_3\cos\gamma_3 - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\alpha_3\cos\beta_3\sin\gamma_3 + \sin\frac{2\pi}{3}\sin\beta_3\sin\gamma_3 \\ -\sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha_3\cos\gamma_3 - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\alpha_3\cos\beta_3\sin\gamma_3 - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\beta_3\sin\gamma_3 \\ \sin\alpha_3\cos\gamma_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_3\sin\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_4 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_4\cos\gamma_4 + \sin\alpha_4\cos\beta_4\sin\gamma_4 \\ \cos\frac{\pi}{3}\sin\beta_4\sin\gamma_4 \\ \sin\alpha_4\cos\gamma_4 - \cos\alpha_4\cos\beta_4\sin\gamma_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_5 = \begin{pmatrix} -\cos\frac{4\pi}{3}\cos\alpha_5\cos\gamma_5 - \cos\frac{4\pi}{3}\sin\alpha_5\cos\beta_5\sin\gamma_5 + \sin\frac{4\pi}{3}\sin\beta_5\sin\gamma_5 \\ -\sin\frac{4\pi}{3}\cos\alpha_5\cos\gamma_5 - \sin\frac{4\pi}{3}\sin\alpha_5\cos\beta_5\sin\gamma_5 - \cos\frac{4\pi}{3}\sin\beta_5\sin\gamma_5 \\ \sin\alpha_5\cos\gamma_5 - \cos\alpha_5\cos\beta_5\sin\gamma_5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_6 = \begin{pmatrix} -\cos\frac{5\pi}{3}\cos\alpha_6\cos\gamma_6 - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\alpha_6\cos\beta_6\sin\gamma_6 + \sin\frac{5\pi}{3}\sin\beta_6\sin\gamma_6 \\ -\sin\frac{5\pi}{3}\cos\alpha_6\cos\gamma_6 - \sin\frac{5\pi}{3}\sin\alpha_6\cos\beta_6\sin\gamma_6 - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\beta_6\sin\gamma_6 \\ \sin\alpha_6\cos\gamma_6 - \cos\alpha_6\cos\beta_6\sin\gamma_6 \end{pmatrix}$$

5.2. Resolución del Problema de Velocidades

A continuación se van a determinar las matrices Jacobianas del problema de velocidades de la plataforma 6-SPU donde el par prismático P es el par actuado. Por tanto, las variables de entrada a considerar son las l_i que miden el desplazamiento asociado al par prismático $\overline{C_iE_i} = l_i\vec{d}_i$ mostrado en las figuras 5.1 y 5.2.

Multiplicando la ecuación vectorial de $\overline{v_P}$, ecuación [5.3] definida en el apartado 5.1, escalarmente por el vector \vec{d}_i , se obtiene,

$$\vec{d}_i \cdot \overline{v_P} = \dot{l}_i(\vec{d}_i \cdot \vec{d}_i) + \vec{d}_i \cdot (\vec{\varepsilon}_i \times \overline{C_iE_i}) + \vec{d}_i \cdot (\vec{\omega} \times \overline{E_iP}) \quad [5.13]$$

Donde $\vec{\varepsilon}_i$ y $\vec{\omega}$ son las velocidades angulares de los diferentes elementos mostradas en [5.4].

Reordenando los productos mixtos y eliminando los términos nulos las ecuaciones quedan,

$$\vec{d}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{d}_i \times \overline{E_i P}) \cdot \vec{\omega} = \dot{l}_i \quad [5.14]$$

El sistema de ecuaciones queda,

$$\begin{bmatrix} (\vec{d}_1)^T & (\vec{d}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{d}_2)^T & (\vec{d}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{d}_3)^T & (\vec{d}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{d}_4)^T & (\vec{d}_4 \times \overline{E_4 P})^T \\ (\vec{d}_5)^T & (\vec{d}_5 \times \overline{E_5 P})^T \\ (\vec{d}_6)^T & (\vec{d}_6 \times \overline{E_6 P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = [I] \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \\ \dot{l}_4 \\ \dot{l}_5 \\ \dot{l}_6 \end{bmatrix} \quad [5.15]$$

Donde la matriz Jacobiana del problema directo es,

$$J_G^D = \begin{bmatrix} (\vec{d}_1)^T & (\vec{d}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{d}_2)^T & (\vec{d}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{d}_3)^T & (\vec{d}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{d}_4)^T & (\vec{d}_4 \times \overline{E_4 P})^T \\ (\vec{d}_5)^T & (\vec{d}_5 \times \overline{E_5 P})^T \\ (\vec{d}_6)^T & (\vec{d}_6 \times \overline{E_6 P})^T \end{bmatrix} \quad [5.16]$$

Y la matriz Jacobiana del problema inverso es la matriz unidad,

$$J_G^I = [I] \quad [5.17]$$

5.3. Análisis de la Multioperacionalidad

En el Anexo 1 se recoge el cálculo de la matriz inversa de la matriz Jacobiana J_G^D , con el fin de obtener de forma explícita la expresión de las velocidades de la plataforma móvil, \vec{v}_P y $\vec{\omega}$, en función de las variables de entrada, \dot{l}_i . Por tanto,

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\vec{d}_1)^T & (\vec{d}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{d}_2)^T & (\vec{d}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{d}_3)^T & (\vec{d}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{d}_4)^T & (\vec{d}_4 \times \overline{E_4 P})^T \\ (\vec{d}_5)^T & (\vec{d}_5 \times \overline{E_5 P})^T \\ (\vec{d}_6)^T & (\vec{d}_6 \times \overline{E_6 P})^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \\ \dot{l}_4 \\ \dot{l}_5 \\ \dot{l}_6 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_G^D)^{-1} \begin{bmatrix} \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \\ \dot{l}_4 \\ \dot{l}_5 \\ \dot{l}_6 \end{bmatrix} \quad [5.18]$$

Observando que los términos de $(\mathbf{J}_G^D)^{-1}$, mostrados en el anexo 1, son de forma general distintos de cero se concluye que todos los movimientos de traslación y rotación de la plataforma están acoplados entre sí. El elevado grado de acoplamiento dificulta el análisis de multioperabilidad del MP en estudio.

Por ello, para determinar la tipología de movimientos de la plataforma móvil que es posible conseguir restringiendo las variables de entrada, l_i , se va a recurrir a un análisis de carácter geométrico a partir de la figura 5.1. Si se bloquea la entrada por el par prismático, l_i , se elimina un grado de libertad de traslación de la plataforma, el correspondiente a la dirección \vec{d}_i . Es decir, el elemento terminal de la cadena cinemática SU tiene tres grados de libertad de rotación y dos de traslación. Restringiendo el movimiento del par prismático de otra cadena se restringe otro grado de libertad de traslación y por tanto la plataforma móvil tendrá restringidos los dos grados de libertad de traslación contenidos en el plano definido por los dos vectores unitarios de traslación, \vec{d}_i , de ambas cadenas cinemáticas. Si se restringe el movimiento del par prismático de una tercera cadena, la plataforma móvil tendrá únicamente tres grados de libertad de rotación. Este análisis geométrico se muestra gráficamente en la figura 5.4 adjunta. En dicha figura se han restringido los pares prismáticos de las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3. Los vectores de traslación \vec{d}_1 y \vec{d}_2 , correspondientes a las cadenas cinemáticas 1 y 2, definen el plano, en el que quedan impedidos dos movimientos de traslación y los vectores \vec{d}_2 y \vec{d}_3 definen otro plano en el que también está impedido el tercer movimiento de traslación, con lo que quedan impedidos los tres grados de libertad de traslación de la plataforma.

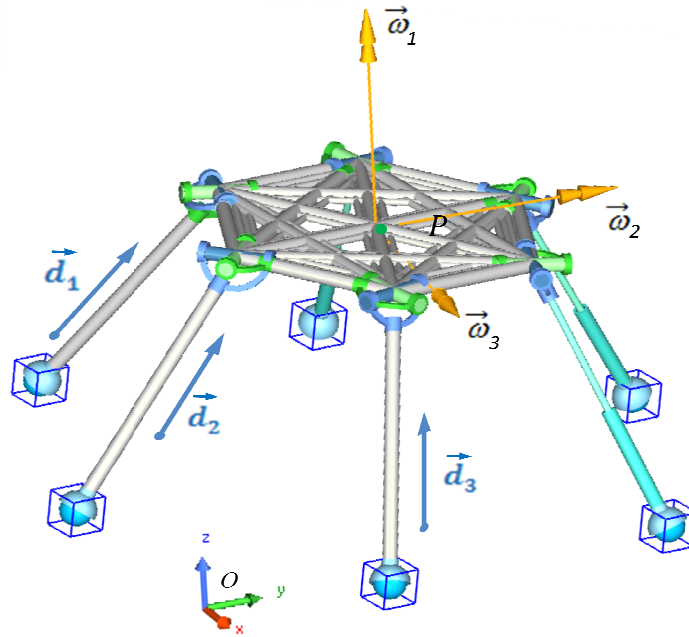


Figura 5.4: Plataforma Gough-Stewart. Análisis geométrico restricciones de GDL de traslación

A continuación se analizarán los desplazamientos con estructura de grupo de Lie (ver apartado 2.2.2) que es posible conseguir restringiendo alguna variable de entrada de la plataforma de Gough-Stewart, definiendo un MP de baja movilidad.

Descontando la trivialidad de que para conseguir el grupo de desplazamiento nulo, $\{I\}$ de dimensión 0, hay que restringir las seis entradas; y teniendo en cuenta que al restringir las variables de entrada, en primer lugar desaparecen los movimientos de traslación, el único desplazamiento de dimensión 1 con estructura de grupo que se puede conseguir es el Movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{r}_a\}$ con el MP 5-SU 1-SPU. Ahora bien, es necesario señalar que el Movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{r}_a\}$ ha de tener como eje de rotación un eje que permanezca constante con la variación de la variable de entrada (ecuaciones [4.12]). Este movimiento no se consigue con las construcciones tradicionales de la plataforma Gough-Stewart como la mostrada en la figura 5.1, sino que es necesario arquitecturas específicas del MP 6-SPU. En la figura 5.5, se muestra una construcción del MP 6-SPU donde el punto de corte de los ejes de las juntas cardan de unión a la plataforma móvil de cinco de las cadenas cinemáticas están alineados.

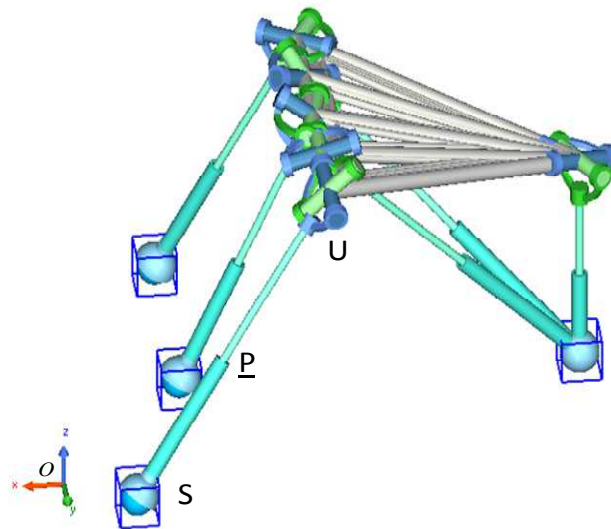


Figura 5.5: Manipulador Paralelo 6-SPU

Esto permite que, bloqueando los actuadores de dichas cinco cadenas cinemáticas con juntas cardan alineadas del MP de la figura 5.5, la plataforma móvil gire alrededor del eje A al actuar el actuador de la sexta cadena, tal y como se muestra en la figura 5.6. Dicho eje A mantiene su posición y orientación constante. De esta forma, se consigue el movimiento de dimensión 1 correspondiente al Movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{r}_a\}$, materializado por el MP 5-SU 1-SPU de la figura 5.6.

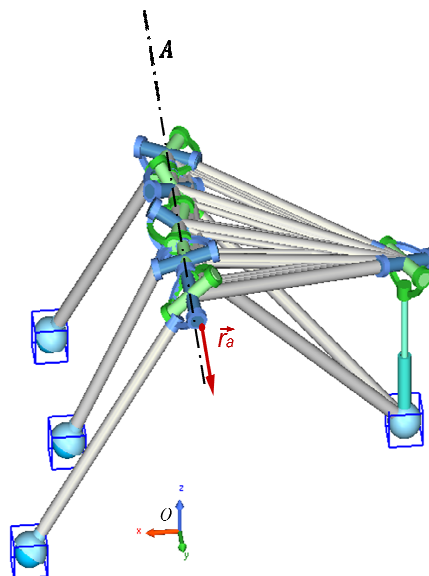


Figura 5.6: Manipulador Paralelo 5-SU 1-SPU

Dado que no hay desplazamientos con estructura de grupo de dimensión 2 con dos rotaciones, el siguiente a considerar es el desplazamiento de dimensión 3 correspondiente al Movimiento Esférico $\{S_O\}$, con el MP 3-SU 3-SPU. Adicionalmente, el Movimiento Esférico $\{S_O\}$ requiere que, además de tener tres GDL de rotación, el movimiento de la plataforma móvil se desarrolle sobre una superficie esférica con un centro fijo. Este movimiento tampoco se consigue con las construcciones tradicionales de la plataforma Gough-Stewart como la mostrada en la figura 5.1, sino que es necesario arquitecturas específicas del MP 6-SPU. Por ejemplo, en la figura 5.7 se muestra el manipulador MP 3-SU 3-SPU, en el que ya se han bloqueado los actuadores correspondientes a tres cadenas cinemáticas. Este MP es equivalente al MP de orientación espacial, 3-SPU 1S. Actuando sobre los tres actuadores restantes, la plataforma móvil gira alrededor de tres ejes linealmente independientes pasantes por el punto O .

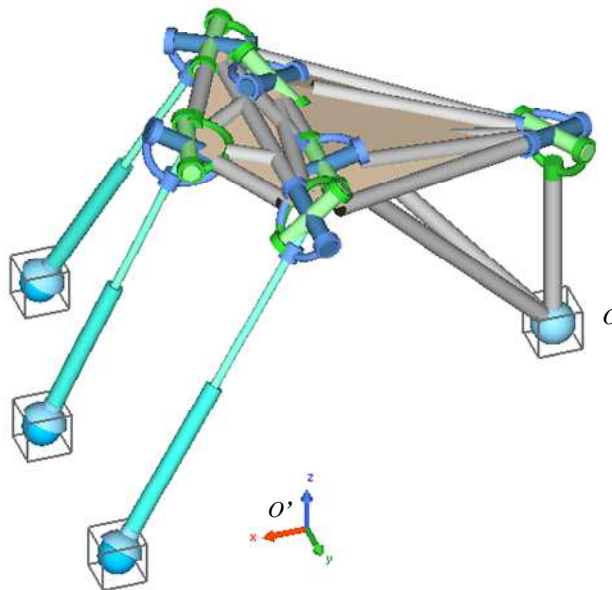


Figura 5.7: Manipulador Paralelo 3-SU 3-SPU

Finalmente se tiene el grupo de desplazamiento de dimensión 6 correspondiente al Desplazamiento general $\{D\}$ de 6 GDL, con el MP 6-SPU.

5.4. Problema de Velocidades con Variables Angulares de Entrada

Como un ejercicio teórico y con el objetivo de mostrar la versatilidad del procedimiento propuesto, se va a analizar el problema de velocidades del MP 6-SPU considerando como variable de entrada el ángulo α_i correspondiente al par de rotación de vector unitario \vec{p}_i . Dicho par de rotación es ficticio no es una variable real, ya que en el nudo C_i hay una rótula esférica. Pero a efectos del presente ejercicio, se considerará que, en el nudo C_i , hay tres pares de rotación linealmente independientes cuyos ejes se cortan en un mismo punto coincidente con dicho nudo C_i , representados por \vec{p}_i , \vec{q}_i y \vec{r}_i . Para facilitar las operaciones con vectores, se van a cambiar las orientaciones de los vectores \vec{q}_i y \vec{r}_i de las figuras 5.1 y 5.2 de forma que \vec{r}_i sea paralelo al vector \vec{d}_i . Esta configuración es la recogida en la figura 5.8.

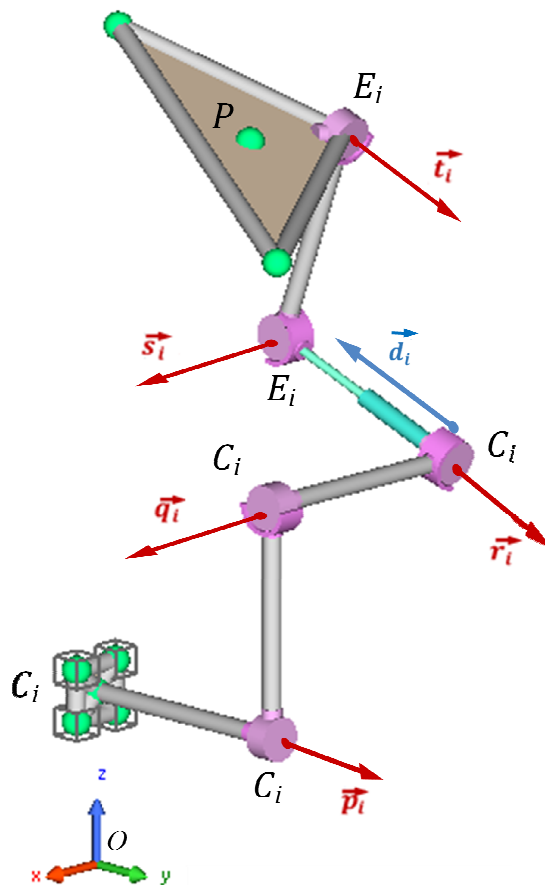


Figura 5.8: Vectores Unitarios de la cadena i de la plataforma Gough-Stewart con variable de entrada α_i

En la ecuación vectorial de \vec{v}_P , [5.3], sustituyendo \vec{e}_i por su valor en [5.4], se obtiene,

$$\vec{v}_P = l_i \vec{d}_i + (\dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i) \times \vec{C}_i E_i + \vec{\omega} \times \vec{E}_i P \quad [5.19]$$

En dicha ecuación el término $\dot{\gamma}_i \vec{r}_i \times \vec{C}_i E_i = 0$ ya que el vector \vec{r}_i y el vector $\vec{C}_i E_i = l_i \vec{d}_i$ son paralelos, con lo que su producto vectorial es nulo. Además, multiplicando escalarmente dicha ecuación por el vector \vec{q}_i , se eliminan los términos $l_i \vec{d}_i$ y $\dot{\beta}_i \vec{q}_i \times \vec{C}_i E_i$ por ser ambos perpendiculares a \vec{q}_i . Finalmente despejando \vec{v}_P y $\vec{\omega}$ se obtiene,

$$\vec{q}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{q}_i \times \vec{E}_i P) \cdot \vec{\omega} = \dot{\alpha}_i l_i \vec{q}_i \cdot (\vec{p}_i \times \vec{d}_i) \quad [5.20]$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones queda,

$$\begin{bmatrix} (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \vec{E}_1 P)^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \vec{E}_2 P)^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \vec{E}_3 P)^T \\ (\vec{q}_4)^T & (\vec{q}_4 \times \vec{E}_4 P)^T \\ (\vec{q}_5)^T & (\vec{q}_5 \times \vec{E}_5 P)^T \\ (\vec{q}_6)^T & (\vec{q}_6 \times \vec{E}_6 P)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 l_1 \vec{q}_1 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{d}_1) \\ \dot{\alpha}_2 l_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{d}_2) \\ \dot{\alpha}_3 l_3 \vec{q}_3 \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{d}_3) \\ \dot{\alpha}_4 l_4 \vec{q}_4 \cdot (\vec{p}_4 \times \vec{d}_4) \\ \dot{\alpha}_5 l_5 \vec{q}_5 \cdot (\vec{p}_5 \times \vec{d}_5) \\ \dot{\alpha}_6 l_6 \vec{q}_6 \cdot (\vec{p}_6 \times \vec{d}_6) \end{bmatrix} = J_\alpha^I \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \\ \dot{\alpha}_4 \\ \dot{\alpha}_5 \\ \dot{\alpha}_6 \end{bmatrix} \quad [5.21]$$

La matriz Jacobiana del problema directo es,

$$J_\alpha^D = \begin{bmatrix} (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \vec{E}_1 P)^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \vec{E}_2 P)^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \vec{E}_3 P)^T \\ (\vec{q}_4)^T & (\vec{q}_4 \times \vec{E}_4 P)^T \\ (\vec{q}_5)^T & (\vec{q}_5 \times \vec{E}_5 P)^T \\ (\vec{q}_6)^T & (\vec{q}_6 \times \vec{E}_6 P)^T \end{bmatrix} \quad [5.22]$$

Y la matriz Jacobiana del problema inverso es,

$$J_\alpha^I = \begin{bmatrix} l_1 \vec{q}_1 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{d}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_i \vec{q}_i \cdot (\vec{p}_i \times \vec{d}_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_6 \vec{q}_6 \cdot (\vec{p}_6 \times \vec{d}_6) \end{bmatrix} \quad [5.23]$$

Es obvio que las componentes de los vectores \vec{p}_i , \vec{q}_i y \vec{d}_i definidos en la figura 5.8, son diferentes que las componentes de esos mismos vectores, calculadas en el apartado

5.1 para la configuración mostrada en las figuras 5.1 y 5.2. El enfoque aquí planteado permite seleccionar una configuración u otra en función de las necesidades y requerimientos del análisis.

5.5. Problema de Velocidades con Variables de Traslación y Angulares de Entrada

Otro planteamiento teórico puede ser tener tres cadenas cinemáticas cuya variable de entrada sea l_i que mide el desplazamiento asociado al par prismático $\overline{C_i E_i} = l_i \vec{d}_i$, por ejemplo la 1, 3 y la 5, y otras tres cadenas, 2, 4 y 6, cuya variable de entrada sea el ángulo α_i correspondiente al par de rotación de vector unitario \vec{p}_i . En este caso, dependiendo de la variable de entrada de cada cadena, se planteará una configuración de vectores unitarios como la mostrada en la figura 5.2 o en la figura 5.8.

Por tanto el sistema de ecuaciones será,

$$\begin{bmatrix} (\vec{d}_1)^T & (\vec{d}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{d}_3)^T & (\vec{d}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{q}_4)^T & (\vec{q}_4 \times \overline{E_4 P})^T \\ (\vec{d}_5)^T & (\vec{d}_5 \times \overline{E_5 P})^T \\ (\vec{q}_6)^T & (\vec{q}_6 \times \overline{E_6 P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \alpha_2 l_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{d}_2) \\ l_3 \\ \alpha_4 l_4 \vec{q}_4 \cdot (\vec{p}_4 \times \vec{d}_4) \\ l_5 \\ \alpha_6 l_6 \vec{q}_6 \cdot (\vec{p}_6 \times \vec{d}_6) \end{bmatrix} = J_{l,\alpha}^I \begin{bmatrix} l_1 \\ \alpha_2 \\ l_3 \\ \alpha_4 \\ l_5 \\ \alpha_6 \end{bmatrix} \quad [5.24]$$

También se puede realizar cualquier otra combinación de variables de entrada.

En este caso la matriz Jacobiana del problema directo es,

$$J_{l,\alpha}^D = \begin{bmatrix} (\vec{d}_1)^T & (\vec{d}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{d}_3)^T & (\vec{d}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{q}_4)^T & (\vec{q}_4 \times \overline{E_4 P})^T \\ (\vec{d}_5)^T & (\vec{d}_5 \times \overline{E_5 P})^T \\ (\vec{q}_6)^T & (\vec{q}_6 \times \overline{E_6 P})^T \end{bmatrix} \quad [5.25]$$

Y la matriz Jacobiana del problema inverso,

$$J_{l,\alpha}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{d}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \vec{q}_4 \cdot (\vec{p}_4 \times \vec{d}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_6 \vec{q}_6 \cdot (\vec{p}_6 \times \vec{d}_6) \end{bmatrix} \quad [5.26]$$

6. ANÁLISIS DEL MANIPULADOR PARALELO 3-CPCR

6.1. Definición Geométrica del MP 3-CPCR

En este capítulo se va a aplicar la metodología general desarrollada en el capítulo 4 al análisis del MP 3-CPCR de 6 GDL para, a continuación, proceder a realizar el análisis de la multioperacionalidad y del acoplamiento de los desplazamientos de la plataforma de dicho MP.

Las razones que han determinado la elección del 3-CPCR son:

1. Número de cadenas cinemáticas: Para que tenga rigidez espacial el número de cadenas ha de estar entre tres y seis. Se elige el número mínimo de tres ya que se pretende desarrollar manipuladores de baja movilidad a partir del de 6 GDL. Adicionalmente se pretende obtener un MP de construcción lo más sencilla posible. Finalmente, se decide que las cadenas cinemáticas sean iguales, es decir, formadas por los mismos pares cinemáticos en la misma posición relativa.
2. Tipología de la cadena cinemática:
 - a) Es importante que los accionamientos estén unidos a la plataforma fija para minimizar el efecto de la inercia del peso en el movimiento del MP. Dado que además se quieren estudiar los diferentes posibles MP de baja movilidad que resultan de eliminar grados de libertad del MP de 6 GDL, interesa que el par de unión a la plataforma fija sea un par cilíndrico C. El par C permite restringir tanto un grado de libertad de traslación como de rotación y minimiza el efecto del peso del accionamiento.
 - b) Dado que se quiere obtener una familia de MP de baja movilidad lo más amplia posible, es conveniente seleccionar una cadena cinemática formada por tres pares de rotación y tres de traslación (Ver capítulo 4, tabla 4.16, 4.17 y 4.18). En las cadenas cinemáticas formadas por dos pares prismáticos y cuatro de rotación, las formadas por un par prismático

y cinco de rotación y las de seis pares de rotación, uno o varios desplazamientos de traslación de la plataforma móvil se generan a partir de los pares de rotación de la cadena, con lo que al menos dichos desplazamientos de traslación de la plataforma móvil están acoplados con sus desplazamientos de rotación. Este hecho complica el análisis de la multioperacionalidad del MP y restringe las posibilidades de obtener MP de baja movilidad con diferente tipología de desplazamientos.

- c) A fin de simplificar el diseño de la plataforma móvil se considera conveniente que el par cinemático que une la cadena cinemática a la plataforma móvil sea el par de rotación, ya que es el más sencillo de ejecución material.

En la tabla 4.17 del apartado 4.4.5 se muestran las diferentes configuraciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL que cumplen los requisitos anteriores. Hay cuatro configuraciones diferentes: CCPR, CPCR, CPRPR y CRPPR.

De estas cuatro combinaciones se selecciona la configuración CPCR para ser objeto de estudio. Cada cadena cinemática del MP 3-CPCR tendrá el par C actuado conectado a la plataforma fija. El eje de dicho par C estará orientado con la dirección de uno de los ejes de coordenadas (cada cadena según un eje de coordenadas diferente). Asimismo los pares unidos a un mismo elemento de la cadena cinemática estarán orientados de forma que sus ejes formen 0° ó 90° tal y como se describe en el capítulo 4 (Ver apartado 4.1). El MP descrito aparece representado en la figura 6.1.

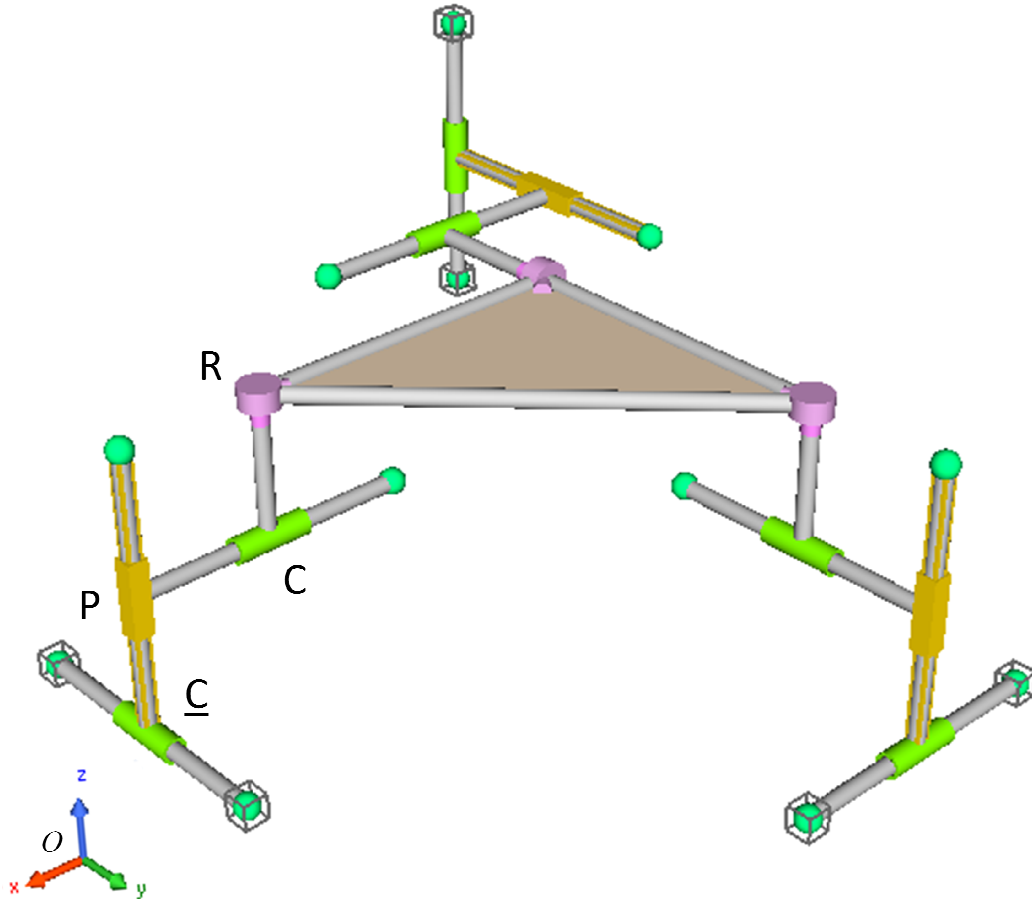


Figura 6.1: Manipulador Paralelo 3-CPCR

6.2. Planteamiento del Problema de Velocidades

En la figura 6.2 se muestra el MP 3-CPCR de la figura 6.1 con los vectores unitarios de movimiento representados en la figura 4.1 del capítulo 4, modificados para adaptarlos al MP objeto de estudio. Los vectores \vec{a}_i , \vec{b}_i y \vec{c}_i de traslación representan el desplazamiento de traslación de los pares cilíndricos de los elementos H_iA_i y B_iC_i y del par prismático del elemento A_iB_i . Los vectores unitarios \vec{p}_i , \vec{q}_i y \vec{r}_i tienen la dirección de los ejes rotación de los pares cilíndricos correspondientes a los elementos H_iA_i y B_iC_i y del par de rotación situado en el nudo D_i . El nudo D_i se une directamente a la plataforma móvil, no siendo necesario considerar los nudos E_i y F_i de la figura 4.1.

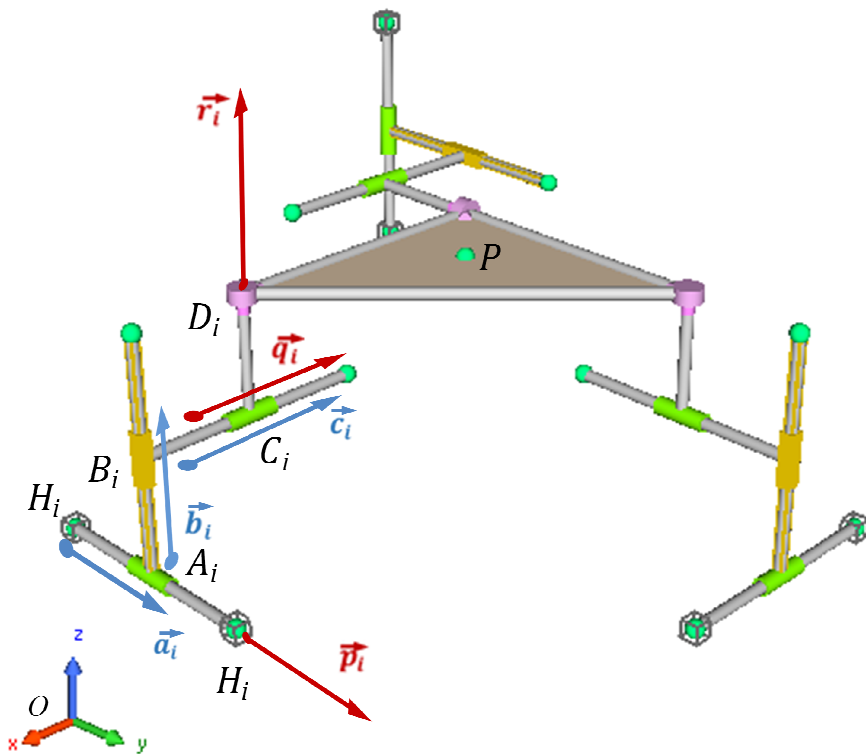


Figura 6.2: Manipulador Paralelo 3- \underline{C} PCR y vectores unitarios de la cadena i

En las figuras 6.3 y 6.4 se representa la cadena cinemática i del MP en estudio con la formulación recogida en la figura 4.1, adaptada a la cadena objeto de estudio y con la notación definida en la figura 6.2. En la figura 6.3 se muestran los vectores unitarios de traslación \vec{a}_i , \vec{b}_i y \vec{c}_i y los vectores unitarios de rotación \vec{p}_i , \vec{q}_i y \vec{r}_i . En la figura 6.4 se muestran las magnitudes lineales de traslación g_i , h_i y k_i y las magnitudes angulares α_i , β_i y γ_i correspondientes. Como ya se indicó en el capítulo 4, nótese que, en la figura 6.4, las líneas de nacimiento de los ángulos girados por los correspondientes elementos son solidarias a los elementos anteriores respectivos, definiendo por tanto movimientos de giro relativos entre elementos. Asimismo, es necesario mencionar que, en las figuras 6.3 y 6.4, el nudo B_i está formado por un codo rígido a 90° .

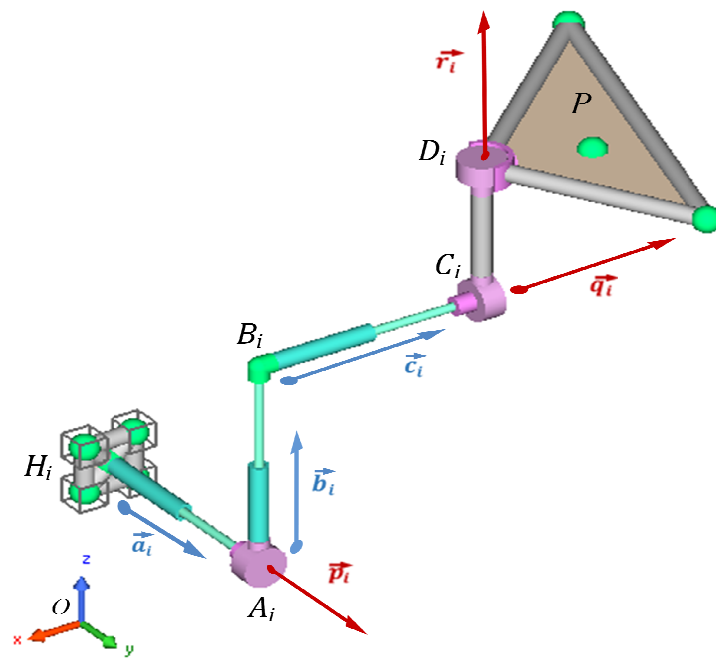


Figura 6.3: Vectores Unitarios de la cadena i del MP 3-CPCR

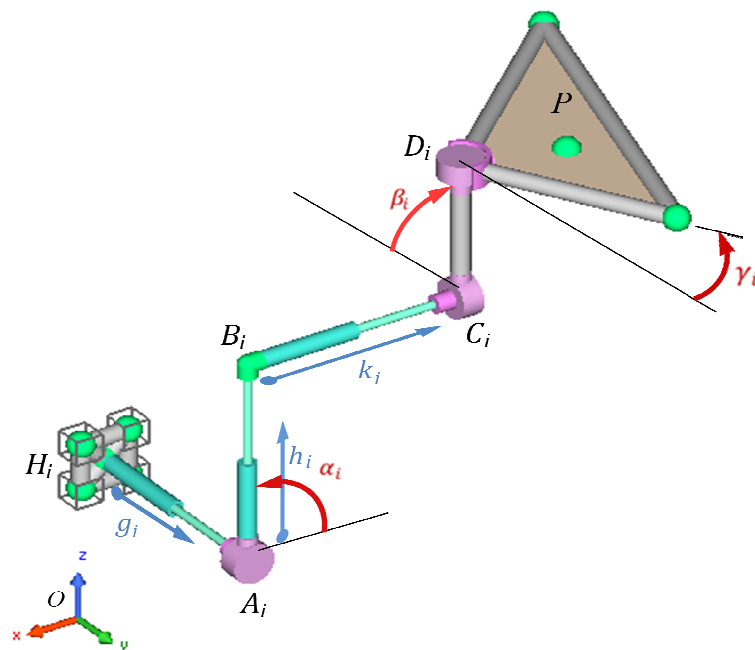


Figura 6.4: Magnitudes de Movimiento de la cadena i del MP 3-CPCR

La ecuación vectorial del apartado 4.1 (ecuación [4.1]) que define la posición del punto P será por tanto en este caso,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH_i} + \overrightarrow{H_iA_i} + \overrightarrow{A_iB_i} + \overrightarrow{B_iC_i} + \overrightarrow{C_iD_i} + \overrightarrow{D_iP} \quad [6.1]$$

Tal y como se muestra en la figura 6.4, los términos de dicha ecuación serán:

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{OH_i} &= \overrightarrow{OH_i}; \quad \overrightarrow{H_iA_i} = g_i \vec{a}_i; \quad \overrightarrow{A_iB_i} = h_i \vec{b}_i; \\ \overrightarrow{B_iC_i} &= k_i \vec{c}_i; \quad \overrightarrow{C_iD_i} = \overrightarrow{C_iD_i}; \quad \overrightarrow{D_iP} = \overrightarrow{D_iP} \end{aligned} \right\} \quad [6.2]$$

A continuación se va a estudiar el problema de velocidades de este manipulador. A partir de la ecuación vectorial de la cadena cinemática [6.1], sustituyendo sus términos por los valores indicados en [6.2], se determina la velocidad lineal del punto P, \vec{v}_P , de la plataforma móvil. Para ello se aplica la ley de derivación de vectores en bases móviles a dicha ecuación vectorial, tal y como se explica en el apartado 4.2 (ecuación [4.3]), obteniéndose en este caso:

$$\vec{v}_P = \dot{g}_i \vec{a}_i + \vec{\sigma}_i \times \overrightarrow{A_iB_i} + \dot{h}_i \vec{b}_i + \dot{k}_i \vec{c}_i + \vec{\tau}_i \times \overrightarrow{B_iC_i} + \vec{\varepsilon}_i \times \overrightarrow{C_iD_i} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{D_iP} \quad [6.3]$$

En la ecuación [6.3] $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular de la plataforma móvil y tiene las componentes $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Las velocidades angulares de los diferentes elementos tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\sigma}_i &= \vec{\tau}_i = \dot{\alpha}_i \vec{p}_i \\ \vec{\varepsilon}_i &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i \\ \vec{\omega} &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i \end{aligned} \right\} \quad [6.4]$$

A continuación se van a determinar las componentes de los vectores unitarios. Para ello se aplicarán las reglas propuestas en el apartado 4.3 (ver figuras 4.3 y 4.4) para determinar los vectores unitarios de la cadena número 1. A continuación, aplicando los pasos definidos en el apartado 4.5 se obtendrán los vectores unitarios correspondientes al resto de cadenas cinemáticas.

Tal y como se muestra en la figura 6.5, se denominará cadena cinemática 1 a aquella en la que el elemento que contiene el par cilíndrico actuado, H_1A_1 , es paralelo al eje Z. La cadena cinemática 2 será aquella en la que el elemento H_2A_2 es paralelo al eje Y

y finalmente, la cadena cinemática 3 tendrá su elemento H_3A_3 orientado paralelamente al eje X.

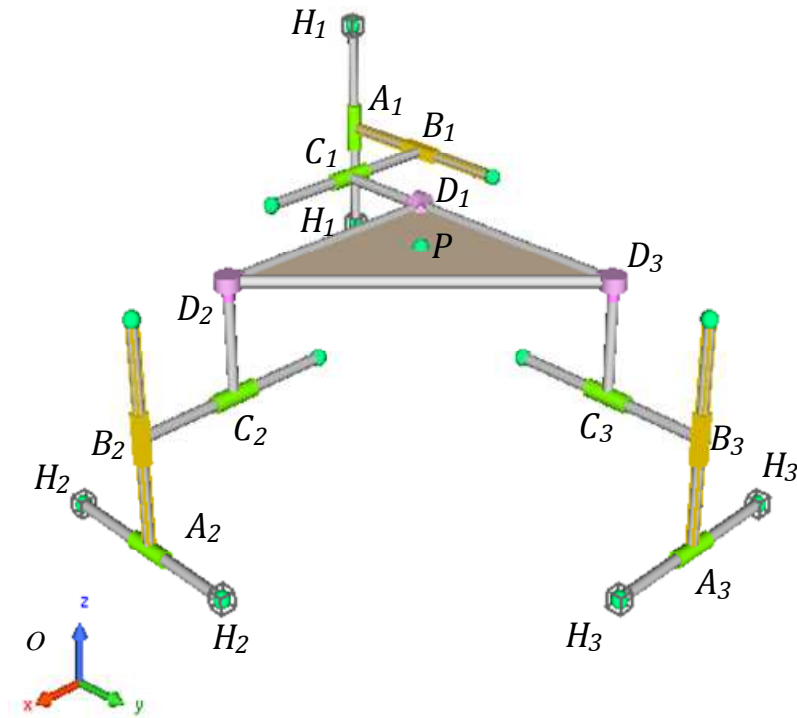


Figura 6.5: Numeración Cadenas Cinemáticas MP 3-CPCR

De acuerdo con las figuras 6.2, 6.3 y 6.4, se definirán los vectores de traslación y rotación de la cadena cinemática 1:

$$\vec{a}_1 = \vec{p}_1 = (0,0,1) \quad [6.5]$$

Siguiendo los pasos del apartado 4.3 (ecuación [4.5]), el vector \vec{b}_1 es perpendicular al vector \vec{p}_1 . Por tanto:

$$\begin{cases} b_{x1}p_{x1} + b_{y1}p_{y1} + b_{z1}p_{z1} = 0 \\ b_{x1}^2 + b_{y1}^2 + b_{z1}^2 = 1 \\ b_{y1} = \sin \alpha_1 \end{cases} \quad [6.6]$$

Tomando la raíz correspondiente a la orientación de \vec{b}_1 en las figuras 6.2 y 6.3 se obtiene,

$$\vec{b}_1 = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1, 0) \quad [6.7]$$

Asimismo, para obtener las componentes de los vectores \vec{c}_1 y \vec{q}_1 se aplicarán las reglas del apartado 4.3 teniendo en cuenta que, de acuerdo con la geometría mostrada en las figuras 6.2 y 6.3, son paralelos entre sí y perpendiculares al vector de traslación \vec{b}_1 y al de rotación \vec{p}_1 (ecuación [4.6]). Por tanto,

$$\begin{cases} q_{x1}b_{x1} + q_{y1}b_{y1} + q_{z1}b_{z1} = 0 \\ q_{x1}^2 + q_{y1}^2 + q_{z1}^2 = 1 \\ q_{x1}p_{x1} + q_{y1}p_{y1} + q_{z1}p_{z1} = 0 \end{cases} \quad [6.8]$$

El mismo resultado que resolviendo el sistema de ecuaciones [6.8] se obtiene, tal y como se indica en el apartado 4.3 (ecuación [4.6]), realizando el producto vectorial:

$$\vec{c}_1 = \vec{q}_1 = \vec{b}_1 \times \vec{p}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sin \alpha_1, -\cos \alpha_1, 0) \quad [6.9]$$

A continuación se van a determinar las componentes del vector \vec{r}_1 . Dicho vector \vec{r}_1 es perpendicular a los vectores \vec{q}_1 y \vec{c}_1 . Dado que estos vectores son paralelos entre sí, una de las ecuaciones es idéntica a la otra, disponiéndose únicamente de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} r_{x1}c_{x1} + r_{y1}c_{y1} + r_{z1}c_{z1} = 0 \\ r_{x1}^2 + r_{y1}^2 + r_{z1}^2 = 1 \end{cases} \quad [6.10]$$

Por ello es necesario introducir una ecuación adicional. En este caso, como se muestra en la figura 6.5, la componente según el eje Z del vector unitario \vec{r}_1 depende únicamente del valor del ángulo β_1 , por lo que la ecuación adicional será,

$$r_{z1} = -\cos \beta_1 \quad [6.11]$$

Completando el sistema de ecuaciones [6.10] con [6.11] y tomando la raíz correspondiente a la orientación de \vec{r}_1 en las figuras 6.2 y 6.3 se obtiene,

$$\vec{r}_1 = (\cos \alpha_1 \sin \beta_1, \sin \alpha_1 \sin \beta_1, -\cos \beta_1) \quad [6.12]$$

Con estos vectores es suficiente para analizar el problema de velocidades. A continuación se han de obtener los vectores de las cadenas cinemáticas 2, y 3. Para ello se aplicarán las matrices básicas de rotación recogidas en el apartado 4.5 (ecuaciones [4.9], [4.10] y [4.11]). En el caso del MP 3-CPCR mostrado en la figura 6.5, la cadena cinemática número 1 está orientada de forma que el vector \vec{a}_1 es paralelo al eje Z. La cadena cinemática 2 se obtiene girando la cadena 1, en primer lugar, 180° alrededor del eje Z en sentido positivo y, a continuación, girando 90° alrededor del eje X en sentido negativo. Por tanto la matriz de transformación a aplicar a los vectores de la cadena 1 para obtener los vectores de la cadena 2, con $\theta = \pi$ y $\alpha = 3\pi/2$, será,

$$\mathbf{R}_{\alpha X} \mathbf{R}_{\theta Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} [6.13]$$

La cadena 3 se obtiene girando la cadena 2 alrededor del eje Z un ángulo de 90° en sentido positivo. Por tanto, la matriz de transformación para la cadena 3 con respecto de la posición de la cadena 2, con $\theta = \pi/2$, será:

$$\mathbf{R}_{\theta Z} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [6.14]$$

Los vectores \vec{a}_i , \vec{p}_i , \vec{b}_i , \vec{c}_i , \vec{q}_i , y \vec{r}_i para las cadenas cinemáticas 2 y 3 se obtienen aplicando a los vectores de la cadena cinemática 1 ([6.5], [6.7], [6.9] y [6.12]) las transformaciones recogidas en [6.13] y en [6.14] respectivamente. Por tanto,

$$\vec{a}_1 = \vec{p}_1 = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a}_2 = \vec{p}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{a}_3 = \vec{p}_3 = (-1, 0, 0)$$

$$\vec{b}_1 = (\cos \alpha_1, \sin \alpha_1, 0)$$

$$\vec{b}_2 = (-\cos \alpha_2, 0, \sin \alpha_2)$$

$$\vec{b}_3 = (0, -\cos \alpha_3, \sin \alpha_3)$$

$$\vec{c}_1 = \vec{q}_1 = (\sin \alpha_1, -\cos \alpha_1, 0)$$

$$\vec{c}_2 = \vec{q}_2 = (-\sin \alpha_2, 0, -\cos \alpha_2)$$

$$\vec{c}_3 = \vec{q}_3 = (0, -\sin \alpha_3, -\cos \alpha_3)$$

$$\vec{r}_1 = (\cos \alpha_1 \sin \beta_1, \sin \alpha_1 \sin \beta_1, -\cos \beta_1)$$

$$\vec{r}_2 = (-\cos \alpha_2 \sin \beta_2, -\cos \beta_2, \sin \alpha_2 \sin \beta_2)$$

$$\vec{r}_3 = (\cos \beta_3, -\cos \alpha_3 \sin \beta_3, \sin \alpha_3 \sin \beta_3)$$

6.3. Resolución del Problema de Velocidades

A continuación se va a obtener la matriz Jacobiana del problema de velocidades de la plataforma 3-CPCR, donde el par cilíndrico C unido a la plataforma fija es el par actuado. Por tanto, las variables de entrada a considerar son las de traslación g_i y las de rotación α_i mostradas en las figuras 6.3 y 6.4. La variable g_i mide el desplazamiento lineal asociado al par cilíndrico del elemento H_iA_i y la variable α_i mide el ángulo girado por dicho par cilíndrico.

Multiplicando la ecuación la ecuación vectorial de \vec{v}_P , ecuación [6.3] mostrada en el apartado anterior, escalarmente por el vector \vec{a}_i , se obtiene,

$$\begin{aligned} \vec{a}_i \cdot \vec{v}_P = & \dot{g}_i(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) + \vec{a}_i \cdot (\vec{\sigma}_i \times \overline{A_iB_i}) + \dot{h}_i(\vec{a}_i \cdot \vec{b}_i) + k_i(\vec{a}_i \cdot \vec{c}_i) + \vec{a}_i \cdot \\ & (\vec{\tau}_i \times \overline{B_iC_i}) + \vec{a}_i \cdot (\vec{\varepsilon}_i \times \overline{C_iD_i}) + \vec{a}_i \cdot (\vec{\omega} \times \overline{D_iP}) \end{aligned} \quad [6.15]$$

Donde $\vec{\sigma}_i$, $\vec{\tau}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ y $\vec{\omega}$ son las velocidades angulares de los diferentes elementos y cuyo valor viene recogido en [6.4].

Como se observa en la figura 6.2, el vector \vec{a}_i es paralelo al vector unitario \vec{p}_i y perpendicular a los vectores unitarios \vec{b}_i , \vec{c}_i , \vec{q}_i y a los vectores $\overline{A_iB_i}$ y $\overline{B_iC_i}$. Además los vectores \vec{q}_i y $\overline{B_iC_i}$ son paralelos. Reordenando los productos en la ecuación [6.15] y eliminando los términos nulos queda,

$$\vec{a}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{a}_i \times \overline{D_iP}) \cdot \vec{\omega} = \dot{g}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i \cdot (\overline{C_iD_i} \times \vec{a}_i) \quad [6.16]$$

Por otro lado, la velocidad angular $\vec{\omega}$ de la plataforma móvil se puede expresar a partir de cada cadena cinemática (ver [6.4]), es decir,

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i \quad [6.17]$$

Multiplicando escalarmente ambos términos de la ecuación [6.17] por el vector \vec{q}_i , dado que dicho vector es perpendicular a los vectores \vec{p}_i y \vec{r}_i , se obtiene,

$$\vec{q}_i \cdot \vec{\omega} = \dot{\beta}_i \quad [6.18]$$

Aplicando a cada cadena cinemática las ecuaciones [6.16] y [6.18], el sistema de ecuaciones del campo de velocidades de la plataforma móvil en función de las velocidades de entrada de traslación \dot{g}_1, \dot{g}_2 y \dot{g}_3 y de las velocidades de entrada de rotación $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ y $\dot{\beta}_3$ queda,

$$\begin{bmatrix} (\vec{a}_1)^T & (\vec{a}_1 \times \overline{D_1 P})^T \\ (\vec{a}_2)^T & (\vec{a}_2 \times \overline{D_2 P})^T \\ (\vec{a}_3)^T & (\vec{a}_3 \times \overline{D_3 P})^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_1)^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_2)^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_3)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vec{q}_1 \cdot (\overline{C_1 D_1} \times \vec{a}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vec{q}_2 \cdot (\overline{C_2 D_2} \times \vec{a}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vec{q}_3 \cdot (\overline{C_3 D_3} \times \vec{a}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} \quad [6.19]$$

Donde la matriz Jacobiana del problema directo es,

$$J_{CPCR}^D = \begin{bmatrix} (\vec{a}_1)^T & (\vec{a}_1 \times \overline{D_1 P})^T \\ (\vec{a}_2)^T & (\vec{a}_2 \times \overline{D_2 P})^T \\ (\vec{a}_3)^T & (\vec{a}_3 \times \overline{D_3 P})^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_1)^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_2)^T \\ (\vec{0})^T & (\vec{q}_3)^T \end{bmatrix} \quad [6.20]$$

Y la matriz Jacobiana del problema inverso es,

$$J_{CPCR\beta}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vec{q}_1 \cdot (\overline{C_1 D_1} \times \vec{a}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vec{q}_2 \cdot (\overline{C_2 D_2} \times \vec{a}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vec{q}_3 \cdot (\overline{C_3 D_3} \times \vec{a}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6.21]$$

Obsérvese que el subíndice β en la denominación de la matriz Jacobiana del problema inverso, $J_{CPCR\beta}^I$, hace referencia a las velocidades de entrada de rotación $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ y $\dot{\beta}_3$.

En ambas matrices, los vectores $\overline{C_1 D_1}$, $\overline{C_2 D_2}$ y $\overline{C_3 D_3}$ se pueden expresar en función de su módulo, de valor constante,

$$\overline{C_1 D_1} = |C_1 D_1| \vec{r}_1; \overline{C_2 D_2} = |C_2 D_2| \vec{r}_2; \overline{C_3 D_3} = |C_3 D_3| \vec{r}_3$$

Siendo,

$$\vec{r}_1 = (\cos \alpha_1 \sin \beta_1, \sin \alpha_1 \sin \beta_1, -\cos \beta_1)$$

$$\vec{r}_2 = (-\cos \alpha_2 \sin \beta_2, -\cos \beta_2, \sin \alpha_2 \sin \beta_2)$$

$$\vec{r}_3 = (\cos \beta_3, -\cos \alpha_3 \sin \beta_3, \sin \alpha_3 \sin \beta_3)$$

A continuación se resuelven los productos escalares y vectoriales de los términos de las matrices Jacobianas mostrados en [6.20] y [6.21].

$$(\vec{a}_1 \times \overline{D_1 P}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ (D_1 P)_x & (D_1 P)_y & (D_1 P)_z \end{vmatrix} = (D_1 P)_x \vec{j} - (D_1 P)_y \vec{i}$$

$$(\vec{a}_2 \times \overline{D_2 P}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ (D_2 P)_x & (D_2 P)_y & (D_2 P)_z \end{vmatrix} = (D_2 P)_z \vec{i} - (D_2 P)_x \vec{k}$$

$$(\vec{a}_3 \times \overline{D_3 P}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ (D_3 P)_x & (D_3 P)_y & (D_3 P)_z \end{vmatrix} = (D_3 P)_z \vec{j} - (D_3 P)_y \vec{k}$$

$$\begin{aligned} (\overline{C_1 D_1} \times \vec{a}_1) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (C_1 D_1)_x & (C_1 D_1)_y & (C_1 D_1)_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= |C_1 D_1| [(\sin \alpha_1 \sin \beta_1) \vec{i} - (\cos \alpha_1 \sin \beta_1) \vec{j}] \end{aligned}$$

$$\vec{q}_1 \cdot (\overline{C_1 D_1} \times \vec{a}_1) = |C_1 D_1| [(\sin^2 \alpha_1 \sin \beta_1) + (\cos^2 \alpha_1 \sin \beta_1)] = |C_1 D_1| \sin \beta_1$$

$$\begin{aligned} (\overline{C_2 D_2} \times \vec{a}_2) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (C_2 D_2)_x & (C_2 D_2)_y & (C_2 D_2)_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= |C_2 D_2| [-(\sin \alpha_2 \sin \beta_2) \vec{i} - (\cos \alpha_2 \sin \beta_2) \vec{k}] \end{aligned}$$

$$\vec{q}_2 \cdot (\overline{C_2 D_2} \times \vec{a}_2) = |C_2 D_2| [(\sin^2 \alpha_2 \sin \beta_2) + (\cos^2 \alpha_2 \sin \beta_2)] = |C_2 D_2| \sin \beta_2$$

$$\begin{aligned} (\overline{C_3 D_3} \times \vec{a}_3) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (C_3 D_3)_x & (C_3 D_3)_y & (C_3 D_3)_z \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= |C_3 D_3| [-(\sin \alpha_3 \sin \beta_3) \vec{j} + (-\cos \alpha_3 \sin \beta_3) \vec{k}] \end{aligned}$$

$$\vec{q}_3 \cdot (\overline{C_3 D_3} \times \vec{a}_3) = |C_3 D_3| [(\sin^2 \alpha_3 \sin \beta_3) + (\cos^2 \alpha_3 \sin \beta_3)] = |C_3 D_3| \sin \beta_3$$

Sustituyendo los productos escalares y vectoriales anteriores en [6.20], se obtiene la matriz Jacobiana del problema directo J_{CPCR}^D ,

$$J_{CPCR}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -(D_1 P)_y & (D_1 P)_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (D_2 P)_z & 0 & -(D_2 P)_x \\ -1 & 0 & 0 & 0 & (D_3 P)_z & -(D_3 P)_y \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & 0 & -\cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & -\cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad [6.22]$$

Asimismo, sustituyendo dichos productos escalares y vectoriales en [6.21], se obtiene la matriz Jacobiana del problema inverso $J_{CPCR\beta}^I$,

$$J_{CPCR\beta}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & |C_1D_1| \sin \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & |C_2D_2| \sin \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & |C_3D_3| \sin \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [6.23]$$

Sustituyendo J_{CPCR}^D y $J_{CPCR\beta}^I$ por sus expresiones según [6.22] y [6.23], se obtiene el sistema de ecuaciones del campo de velocidades de la plataforma móvil en función de las velocidades de entrada de traslación \dot{g}_1, \dot{g}_2 y \dot{g}_3 y de las velocidades de entrada de rotación $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ y $\dot{\beta}_3$. Ahora bien, el objetivo de presente análisis es expresar el campo de velocidades de la plataforma móvil en función de las velocidades de entrada de traslación \dot{g}_1, \dot{g}_2 y \dot{g}_3 y de las velocidades de entrada de rotación $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$, asociadas a los pares cilíndricos unidos a la plataforma fija. Para ello se ha de buscar una relación entre las variables $\dot{\alpha}_i$ y $\dot{\beta}_i$ y a partir de dicha relación obtener la matriz Jacobiana del problema inverso $J_{CPCR\alpha}^I$ en función de las velocidades de entrada $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$. Como se indicó anteriormente, el subíndice α en la denominación de la matriz Jacobiana $J_{CPCR\alpha}^I$ hace referencia, en este caso, a las velocidades de entrada de rotación $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$.

En las figuras 6.2 y 6.3 se observa que el vector unitario de rotación \vec{r}_i de cada cadena cinemática es solidario a la plataforma móvil. Por otro lado, los vectores \vec{r}_2 y \vec{r}_3 son paralelos entre sí. Asimismo, el vector \vec{r}_1 es perpendicular a los vectores \vec{r}_2 y \vec{r}_3 . Por tanto,

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_3 \quad [6.24]$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0 \quad [6.25]$$

Sustituyendo en [6.24] los vectores \vec{r}_2 y \vec{r}_3 por sus componentes, se obtiene,

$$-\cos \alpha_2 \sin \beta_2 = \cos \beta_3 \Rightarrow \sin \beta_2 = -\cos \beta_3 / \cos \alpha_2 \quad [6.26]$$

$$-\cos \beta_2 = -\cos \alpha_3 \sin \beta_3 \Rightarrow \sin \beta_3 = \cos \beta_2 / \cos \alpha_3 \quad [6.27]$$

$$\sin \alpha_2 \sin \beta_2 = \sin \alpha_3 \sin \beta_3 \Rightarrow \sin \beta_2 = \sin \alpha_3 \sin \beta_3 / \sin \alpha_2 \quad [6.28]$$

Combinando las ecuaciones [6.26] y [6.28],

$$\tan \beta_3 = -\tan \alpha_2 / \sin \alpha_3 \quad [6.29]$$

Combinando [6.27] y [6.28],

$$\tan \beta_2 = \tan \alpha_3 / \sin \alpha_2 \quad [6.30]$$

A partir de [6.25], se obtiene,

$$-\cos \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \alpha_2 \sin \beta_2 - \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \beta_2 - \cos \beta_1 \sin \alpha_2 \sin \beta_2 = 0 \quad [6.31]$$

Llevando a [6.31] la ecuación [6.30] se obtiene,

$$\tan \beta_1 = -(\cos \alpha_1 / \tan \alpha_2 + \sin \alpha_1 / \tan \alpha_3)^{-1} \quad [6.32]$$

Derivando las ecuaciones [6.29], [6.30] y [6.32] respecto del tiempo y despejando las variables $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ y $\dot{\beta}_3$,

$$\dot{\beta}_1 = (\dot{\alpha}_1(\cos \alpha_1 / \tan \alpha_3 - \sin \alpha_1 / \tan \alpha_2) - \dot{\alpha}_2 \cos \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_2) / \tan^2 \alpha_2 - \dot{\alpha}_3 \sin \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_3) / \tan^2 \alpha_3) / DIV$$

Siendo: $DIV = (1 + \tan^2 \beta_1) (\cos \alpha_1 / \tan \alpha_2 + \sin \alpha_1 / \tan \alpha_3)^2 \quad [6.33]$

$$\dot{\beta}_2 = (-\dot{\alpha}_2 \tan \alpha_3 / \tan \alpha_2 + \dot{\alpha}_3 (1 + \tan^2 \alpha_3)) / ((1 + \tan^2 \beta_2) \sin \alpha_2) \quad [6.34]$$

$$\dot{\beta}_3 = (-\dot{\alpha}_2 (1 + \tan^2 \alpha_2) + \dot{\alpha}_3 \tan \alpha_2 / \tan \alpha_3) / ((1 + \tan^2 \beta_3) \sin \alpha_3) \quad [6.35]$$

Sustituyendo en la ecuación [6.19] las velocidades $\dot{\beta}_1, \dot{\beta}_2$ y $\dot{\beta}_3$ por su expresión en función de $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$ recogidas en las ecuaciones [6.33], [6.34] y [6.35], el sistema de ecuaciones del campo de velocidades de la plataforma móvil en función de las velocidades de entrada de traslación \dot{g}_1, \dot{g}_2 y \dot{g}_3 y de rotación $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$ queda,

$$J_{CPCR}^D \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = J_{CPCR\alpha}^I \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad [6.36]$$

En la ecuación [6.36] la matriz Jacobiana del problema directo J_{CPCR}^D es la mostrada en [6.22]. La matriz Jacobiana $J_{CPCR\alpha}^I$ del problema inverso será,

$$J_{CPCR\alpha}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J_{CPCR\alpha14}^I & J_{CPCR\alpha15}^I & J_{CPCR\alpha16}^I \\ 0 & 1 & 0 & 0 & J_{CPCR\alpha25}^I & J_{CPCR\alpha26}^I \\ 0 & 0 & 1 & 0 & J_{CPCR\alpha35}^I & J_{CPCR\alpha36}^I \\ 0 & 0 & 0 & J_{CPCR\alpha44}^I & J_{CPCR\alpha45}^I & J_{CPCR\alpha46}^I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{CPCR\alpha55}^I & J_{CPCR\alpha56}^I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{CPCR\alpha65}^I & J_{CPCR\alpha66}^I \end{bmatrix} \quad [6.37]$$

Siendo sus elementos,

$$J_{CPCR\alpha14}^I = |C_1 D_1| \sin \beta_1 (\cos \alpha_1 / \tan \alpha_3 - \sin \alpha_1 / \tan \alpha_2) / DIV \quad [6.38]$$

$$J_{CPCR\alpha15}^I = -|C_1 D_1| \sin \beta_1 \cos \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_2) / \tan^2 \alpha_2 DIV \quad [6.39]$$

$$J_{CPCR\alpha16}^I = -|C_1 D_1| \sin \beta_1 \sin \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_3) / \tan^2 \alpha_3 DIV \quad [6.40]$$

$$J_{CPCR\alpha24}^I = 0 \quad [6.41]$$

$$J_{CPCR\alpha25}^I = -|C_2 D_2| \sin \beta_2 \tan \alpha_3 / \tan \alpha_2 (1 + \tan^2 \beta_2) \sin \alpha_2 \quad [6.42]$$

$$J_{CPCR\alpha26}^I = |C_2 D_2| \sin \beta_2 (1 + \tan^2 \alpha_3) / (1 + \tan^2 \beta_2) \sin \alpha_2 \quad [6.43]$$

$$J_{CPCR\alpha34}^I = 0 \quad [6.44]$$

$$J_{CPCR\alpha35}^I = -|C_3 D_3| \sin \beta_3 (1 + \tan^2 \alpha_2) / (1 + \tan^2 \beta_3) \sin \alpha_3 \quad [6.45]$$

$$J_{CPCR\alpha36}^I = |C_3 D_3| \sin \beta_3 \tan \alpha_2 / \tan \alpha_3 (1 + \tan^2 \beta_3) \sin \alpha_3 \quad [6.46]$$

$$J_{CPCR\alpha44}^I = (\cos \alpha_1 / \tan \alpha_3 - \sin \alpha_1 / \tan \alpha_2) / DIV \quad [6.47]$$

$$J_{CPCR\alpha45}^I = -\cos \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_2) / \tan^2 \alpha_2 DIV \quad [6.48]$$

$$J_{CPCR\alpha46}^I = -\sin \alpha_1 (1 + \tan^2 \alpha_3) / \tan^2 \alpha_3 DIV \quad [6.49]$$

$$J_{CPCR\alpha54}^I = 0 \quad [6.50]$$

$$J_{CPCR\alpha55}^I = -\tan \alpha_3 / \tan \alpha_2 (1 + \tan^2 \beta_2) \sin \alpha_2 \quad [6.51]$$

$$J_{CPCR\alpha56}^I = (1 + \tan^2 \alpha_3) / (1 + \tan^2 \beta_2) \sin \alpha_2 \quad [6.52]$$

$$J_{CPCR\alpha64}^I = 0 \quad [6.53]$$

$$J_{CPCR\alpha65}^I = -(1 + \tan^2 \alpha_2) / (1 + \tan^2 \beta_3) \sin \alpha_3 \quad [6.54]$$

$$J_{CPCR\alpha66}^I = \tan\alpha_2/\tan\alpha_3(1 + \tan^2\beta_3) \sin\alpha_3 \quad [6.55]$$

6.4. Análisis de la Multioperacionalidad

Con el fin de obtener de forma explícita la expresión de las velocidades de la plataforma móvil, \vec{v}_P y $\vec{\omega}$, en función de las velocidades de las variables de entrada de traslación \dot{g}_i y de rotación $\dot{\alpha}_i$, se despejan dichas velocidades en la ecuación [6.36] obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{PX} \\ v_{PY} \\ v_{PZ} \\ \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = (J_{CPCR}^D)^{-1} J_{CPCR\alpha}^I \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad [6.56]$$

En el Anexo 2 se recoge el cálculo de la matriz inversa de la matriz Jacobiana J_{CPCR}^D ([A2.10]). Se denominará:

$$S_{CPCR\alpha} = (J_{CPCR}^D)^{-1} J_{CPCR\alpha}^I \quad [6.57]$$

Siendo,

$$S_{CPCR\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & S_{CPCR\alpha14} & S_{CPCR\alpha15} & S_{CPCR\alpha16} \\ 0 & 1 & 0 & S_{CPCR\alpha24} & S_{CPCR\alpha25} & S_{CPCR\alpha26} \\ 1 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha34} & S_{CPCR\alpha35} & S_{CPCR\alpha36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha44} & S_{CPCR\alpha45} & S_{CPCR\alpha46} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha54} & S_{CPCR\alpha55} & S_{CPCR\alpha56} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha64} & S_{CPCR\alpha65} & S_{CPCR\alpha66} \end{bmatrix} \quad [6.58]$$

Sus términos serán,

$$S_{CPCR\alpha14} = -J_{CPCR\alpha34}^I + G_{11}J_{CPCR\alpha44}^I + G_{12}J_{CPCR\alpha54}^I + G_{13}J_{CPCR\alpha64}^I$$

$$S_{CPCR\alpha15} = -J_{CPCR\alpha35}^I + G_{11}J_{CPCR\alpha45}^I + G_{12}J_{CPCR\alpha55}^I + G_{13}J_{CPCR\alpha65}^I$$

$$S_{CPCR\alpha16} = -J_{CPCR\alpha36}^I + G_{11}J_{CPCR\alpha46}^I + G_{12}J_{CPCR\alpha56}^I + G_{13}J_{CPCR\alpha66}^I$$

$$S_{CPCR\alpha24} = J_{CPCR\alpha24}^I + G_{21}J_{CPCR\alpha44}^I + G_{22}J_{CPCR\alpha54}^I + G_{23}J_{CPCR\alpha64}^I$$

$$S_{CPCR\alpha25} = J_{CPCR\alpha25}^I + G_{21}J_{CPCR\alpha45}^I + G_{22}J_{CPCR\alpha55}^I + G_{23}J_{CPCR\alpha65}^I$$

$$S_{CPCR\alpha26} = J_{CPCR\alpha26}^I + G_{21}J_{CPCR\alpha46}^I + G_{22}J_{CPCR\alpha56}^I + G_{23}J_{CPCR\alpha66}^I$$

$$S_{CPCR\alpha34} = J_{CPCR\alpha14}^I + G_{31}J_{CPCR\alpha44}^I + G_{32}J_{CPCR\alpha54}^I + G_{33}J_{CPCR\alpha64}^I$$

$$S_{CPCR\alpha35} = J_{CPCR\alpha15}^I + G_{31}J_{CPCR\alpha45}^I + G_{32}J_{CPCR\alpha55}^I + G_{33}J_{CPCR\alpha65}^I$$

$$S_{CPCR\alpha36} = J_{CPCR\alpha16}^I + G_{31}J_{CPCR\alpha46}^I + G_{32}J_{CPCR\alpha56}^I + G_{33}J_{CPCR\alpha66}^I$$

$$S_{CPCR\alpha44} = (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha54}^I + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha64}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha45} = (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha46} = (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha54} = (-\sin\alpha_2 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha54}^I + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha64}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha55} = (-\sin\alpha_2 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha56} = (-\sin\alpha_2 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha64} = (\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha54}^I - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 J_{CPCR\alpha64}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha65} = (\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

$$S_{CPCR\alpha66} = (\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D$$

Donde el valor de los términos G_{ij} viene recogido en el anexo 2 y los términos $J_{CPCR\alpha ij}^I$ en el apartado 6.3. Combinando las ecuaciones [6.56] y [6.58] el sistema de ecuaciones se puede escribir,

$$\begin{bmatrix} v_{Px} \\ v_{Py} \\ v_{Pz} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & S_{CPCR\alpha 14} & S_{CPCR\alpha 15} & S_{CPCR\alpha 16} \\ 0 & 1 & 0 & S_{CPCR\alpha 24} & S_{CPCR\alpha 25} & S_{CPCR\alpha 26} \\ 1 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha 34} & S_{CPCR\alpha 35} & S_{CPCR\alpha 36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha 44} & S_{CPCR\alpha 45} & S_{CPCR\alpha 46} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha 54} & S_{CPCR\alpha 55} & S_{CPCR\alpha 56} \\ 0 & 0 & 0 & S_{CPCR\alpha 64} & S_{CPCR\alpha 65} & S_{CPCR\alpha 66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad [6.59]$$

De la ecuación [6.59] se deduce que cada una de las componentes de la velocidad de traslación de la plataforma, v_{Px} , v_{Py} y v_{Pz} , dependen de una única y diferente velocidad de las variables de entrada de traslación \dot{g}_i . Además, el movimiento de un punto P cualquiera de la plataforma móvil está afectado por la rotación provocada por las variables de rotación de entrada α_i . En caso de que las velocidades de las variables de entrada, $\dot{\alpha}_i$, sean nulas, las componentes de la velocidad de dicho punto P dependerán exclusivamente de la velocidad de las variables de entrada de traslación.

Por tanto, los movimientos de traslación pura de la plataforma móvil ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$) están totalmente desacoplados entre sí, siempre y cuando $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_3 = 0$. Asimismo, cada componente de \vec{v}_P es gobernada desde una única cadena cinemática:

$$v_{Px} = -\dot{g}_3 ; v_{Py} = \dot{g}_2 ; v_{Pz} = \dot{g}_1 \quad [6.60]$$

Analizando los movimientos de rotación en [6.59] se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \omega_x = & ((-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha 44}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha 54}^I + \\ & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha 64}^I) \dot{\alpha}_1 + (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha 45}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha 55}^I + \\ & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha 65}^I) \dot{\alpha}_2 + (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha 46}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha 56}^I + \\ & \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha 66}^I) \dot{\alpha}_3) / DET J_{CPCR22}^D \end{aligned} \quad [6.61]$$

$$\begin{aligned}
 \omega_y = & ((-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha54}^I + \\
 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 J_{CPCR\alpha64}^I) \dot{\alpha}_1 + (-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I + \\
 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) \dot{\alpha}_2 + (-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I + \\
 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) \dot{\alpha}_3) / DET J_{CPCR22}^D \quad [6.62]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_z = & ((\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha54}^I - \\
 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 J_{CPCR\alpha64}^I) \dot{\alpha}_1 + (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I - \\
 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) \dot{\alpha}_2 + (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I - \\
 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) \dot{\alpha}_3) / DET J_{CPCR22}^D \quad [6.63]
 \end{aligned}$$

Analizando el caso en el que únicamente la velocidad de una variable de entrada de rotación sea distinta de cero, por ejemplo $\dot{\alpha}_1$, y teniendo en cuenta las ecuaciones [6.50] y [6.53] se obtiene:

$$\omega_x = (-\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I / DET J_{CPCR22}^D) \dot{\alpha}_1 \quad [6.64]$$

$$\omega_y = (-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I / DET J_{CPCR22}^D) \dot{\alpha}_1 \quad [6.65]$$

$$\omega_z = (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha44}^I / DET J_{CPCR22}^D) \dot{\alpha}_1 \quad [6.66]$$

Expresiones que se pueden representar de forma similar a las mostradas en la ecuación [4.12] del apartado 4.6,

$$\omega_x = -\omega_z / \tan \alpha_2; \omega_y = -\omega_z / \tan \alpha_3; \vec{\omega} = (-\omega_z / \tan \alpha_2, -\omega_z / \tan \alpha_3, \omega_z) \quad [6.67]$$

De las ecuaciones recogidas en [6.67] se deduce que, en el caso de que únicamente la velocidad angular de entrada $\dot{\alpha}_1$ sea distinta de cero, la plataforma móvil girará alrededor de un eje de orientación fija en el espacio.

Esto es debido a que, como se muestra en [6.29] y [6.30], los ángulos β_2 y β_3 dependen únicamente de α_2 y α_3 , siendo los vectores unitarios \vec{r}_2 y \vec{r}_3 paralelos entre sí (ecuación [6.24]). Es decir, que la vinculación geométrica entre la plataforma móvil y las cadenas 2 y 3 es determinante en este caso. Dado que,

$$\vec{r}_2 = (-\cos \alpha_2 \sin \beta_2, -\cos \beta_2, \sin \alpha_2 \sin \beta_2)$$

$$\vec{r}_3 = (\cos \beta_3, -\cos \alpha_3 \sin \beta_3, \sin \alpha_3 \sin \beta_3)$$

Aplicando las ecuaciones [6.29] y [6.30] en \vec{r}_2 y \vec{r}_3 se obtiene,

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_3 = (-\text{CTE}/\tan \alpha_2, -\text{CTE}/\tan \alpha_3, \text{CTE})$$

Donde CTE es un valor constante dependiente de los valores de α_2 y α_3 . Es decir, la velocidad de rotación de la plataforma móvil, $\vec{\omega}$, es paralela a los vectores unitarios \vec{r}_2 y \vec{r}_3 , como cabía esperar.

Siguiendo en este caso, para que este movimiento de rotación tenga estructura de grupo de Lie de dimensión 1 es necesario, además, que el eje de rotación permanezca fijo en el espacio. Para ello, se analizará la velocidad del punto P de la plataforma móvil, \vec{v}_P . Las componentes de \vec{v}_P serán:

$$v_{Px} = S_{CPCR\alpha_{14}} \dot{\alpha}_1 = G_{11} J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 \quad [6.68]$$

$$v_{Py} = S_{CPCR\alpha_{24}} \dot{\alpha}_1 = G_{21} J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 \quad [6.69]$$

$$v_{Pz} = S_{CPCR\alpha_{34}} \dot{\alpha}_1 = J_{CPCR\alpha_{14}}^I \dot{\alpha}_1 + G_{31} J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 \quad [6.70]$$

En estas expresiones se han sustituido los valores recogidos en las ecuaciones [6.38] a [6.55]. Sustituyendo en [6.68], [6.69] y [6.70] los valores de los componentes de la matriz G recogida en [A2.9], se obtiene,

$$v_{Px} = -((D_3P)_z \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + (D_3P)_y \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 / \text{DET} J_{CPCR22}^D \quad [6.71]$$

$$v_{Py} = ((D_2P)_z \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + (D_2P)_x \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 / \text{DET} J_{CPCR22}^D \quad [6.72]$$

$$v_{Pz} = J_{CPCR\alpha_{14}}^I \dot{\alpha}_1 - ((D_1P)_y \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - (D_1P)_x \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) J_{CPCR\alpha_{44}}^I \dot{\alpha}_1 / \text{DET} J_{CPCR22}^D \quad [6.73]$$

Del análisis de dichas ecuaciones y del estudio geométrico del movimiento del MP, se deduce que, en general, el eje de rotación no permanece fijo en el espacio, sino que se desplaza paralelamente a sí mismo. Tanto el axoide fijo como el móvil son, por tanto, dos superficies cilíndricas de generatriz paralela a los vectores \vec{r}_2 y \vec{r}_3 . Además,

de forma general se observa que los puntos de la plataforma móvil se mueven de forma paralela al eje del movimiento de rotación. Es decir, tienen una velocidad de deslizamiento, \vec{v}_{Pd} , variable y no nula. En el caso en que además se cumpla que $\alpha_2 = \alpha_3 = \pi / 2$, aplicando las ecuaciones [6.29], [6.30], [6.32] y descartando las soluciones geoméricamente no posibles (ver figura 6.5), se obtiene,

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \pi / 2 ; \vec{r}_2 = \vec{r}_3 = (0,0,1) ; \vec{\omega} = (0, 0, \omega_z)$$

En este último caso, no hay deslizamiento de la plataforma móvil en la dirección de eje de rotación, paralelo al eje Z, únicamente hay un desplazamiento del eje de rotación paralelo al plano XY, dado que $v_{Pz} = \dot{g}_1 = 0$ (ver figura 6.5). Esto es importante ya que, como se verá más adelante, nos permite definir el movimiento Plano de dimensión 3.

Continuando el análisis del caso en el que únicamente una velocidad de rotación de entrada es distinta de cero, siendo $\dot{g}_i = 0$, si esta es $\dot{\alpha}_2$ las componentes de $\vec{\omega}$ son,

$$\omega_x = (-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D \dot{\alpha}_2 \quad [6.74]$$

$$\omega_y = (-\sin\alpha_2 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D \dot{\alpha}_2 \quad [6.75]$$

$$\omega_z = (\sin\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha45}^I + \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha55}^I - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 J_{CPCR\alpha65}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D \dot{\alpha}_2 \quad [6.76]$$

Finalmente en el análisis del caso en el que únicamente una velocidad de rotación de entrada es distinta de cero, siendo $\dot{g}_i = 0$, si esta es $\dot{\alpha}_3$, la expresión de las componentes de $\vec{\omega}$ es,

$$\omega_x = ((-\cos\alpha_2 \sin\alpha_3 J_{CPCR\alpha46}^I - \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 J_{CPCR\alpha56}^I + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 J_{CPCR\alpha66}^I) / \text{DET} J_{CPCR22}^D \dot{\alpha}_3 \quad [6.77]$$

$$\omega_y = ((-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha 46}^I - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 J_{CPCR\alpha 56}^I + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 J_{CPCR\alpha 66}^I) / DET J_{CPCR22}^D) \dot{\alpha}_3 \quad [6.78]$$

$$\omega_z = ((\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha 46}^I + \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 J_{CPCR\alpha 56}^I - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 J_{CPCR\alpha 66}^I) / DET J_{CPCR22}^D) \dot{\alpha}_3 \quad [6.79]$$

Por lo tanto, y en general, para estos dos últimos casos analizados (únicamente $\dot{\alpha}_2 \neq 0$ y únicamente $\dot{\alpha}_3 \neq 0$), se deduce que el movimiento de rotación tiene un eje de orientación variable en función del valor de la variable de entrada correspondiente. Esto es debido a que las componentes de $\vec{\omega}$, en el caso de que la única velocidad de entrada sea $\dot{\alpha}_2$, son función de $\dot{\alpha}_2$ y α_2 . Esto mismo sucede con las componentes de $\vec{\omega}$ cuando la única velocidad de entrada es $\dot{\alpha}_3$, siendo también función de $\dot{\alpha}_3$ y α_3 .

Sin embargo, del caso en que únicamente la velocidad de entrada $\dot{\alpha}_2$ es distinta de cero, se extrae una situación particular cuando se cumple que $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi / 2$. Aplicando las ecuaciones [6.29], [6.30], [6.32] y descartando las soluciones geoméricamente no posibles (ver figura 6.5), se obtiene,

$$\beta_1 = \beta_2 = \pi / 2 ; \beta_3 = \pi - \alpha_2 ; \vec{r}_1 = (0, 1, 0) ; \vec{\omega} = (0, \omega_y, 0)$$

En este caso el eje de rotación mantiene su orientación fija y paralela al eje Y, con un desplazamiento del eje de rotación paralelo al plano XZ. La velocidad de deslizamiento de la plataforma móvil es nula dado que $v_{Py} = \dot{g}_2 = 0$ (ver figura 6.5). Esta circunstancia permite el movimiento Plano.

Adicionalmente, y siguiendo con el caso en que únicamente la velocidad de entrada $\dot{\alpha}_2$ es distinta de cero, siendo las otras dos variables de entrada: $\alpha_1 = \pi / 2$ y $\alpha_3 = cte \neq \pi / 2$, aplicando las ecuaciones [6.29], [6.30], [6.32] y descartando las soluciones geoméricamente no posibles (ver figura 6.5), se obtiene,

$$\beta_1 = \pi - \alpha_3 ; \tan \beta_2 = \tan \alpha_3 / \sin \alpha_2 ; \tan \beta_3 = -\tan \alpha_2 / \sin \alpha_3 ;$$

$$\vec{r}_1 = (0, \sin \alpha_3, \cos \alpha_3)$$

Con estos datos y dado que el vector \vec{r}_1 es constante, analizando desde el punto de vista geométrico (ver figura 6.5) se deduce que la velocidad angular de la plataforma móvil ha de tener la misma orientación que el vector \vec{r}_1 . Por tanto, en este caso el eje de rotación mantiene su orientación fija y paralela al vector \vec{r}_1 , desplazándose dicho eje de rotación paralelamente a sí mismo. En este caso, la velocidad de deslizamiento de la plataforma móvil no es nula.

Finalmente, en el caso que, siendo únicamente la velocidad de entrada $\dot{\alpha}_3$ distinta de cero, además se cumpla que $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$, aplicando las ecuaciones [6.29], [6.30], [6.32] y descartando las soluciones geoméricamente no posibles (ver figura 6.5), se obtiene,

$$\beta_1 = \pi - \alpha_3 ; \beta_2 = \alpha_3 ; \beta_3 = \pi/2 ; \vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = (1,0,0) ; \vec{\omega} = (\omega_x, 0, 0)$$

También en este caso el eje de rotación mantiene su orientación fija y paralela al eje X, con un desplazamiento del eje de rotación paralelo al plano YZ. La velocidad de deslizamiento de la plataforma móvil es nula dado que $v_{Px} = -\dot{g}_3 = 0$ (ver figura 6.5). De nuevo esta circunstancia permitirá el movimiento Plano.

Respecto del movimiento esférico, como se indica en el apartado 4.6, se requiere que los ejes de tres desplazamientos de rotación linealmente independientes se corten en un mismo punto fijo. Dado que, conforme varíen los ángulos α_2 ó α_3 los desplazamientos de rotación asociados a estas variables de entrada varían en dirección, en general no se puede conseguir el movimiento esférico con este MP.

Finalmente, combinando los tres movimientos de traslación, \dot{g}_i , citados anteriormente, con uno de los movimientos de rotación de dimensión mencionados que mantienen su eje de rotación con una orientación fija, se obtiene un manipulador paralelo que realiza el movimiento de dimensión 4 denominado movimiento Schönflies $\{\mathcal{X}_e\}$. En particular, si el movimiento de rotación está controlado únicamente por la variable de entrada α_1 , estando α_2 y α_3 bloqueados, se puede orientar el eje de rotación en el espacio en función del valor de α_2 y α_3 . Esta característica se muestra en la ecuación [6.67] donde las componentes de la velocidad angular de la plataforma móvil son,

$$\vec{\omega} = (-\omega_z/\tan\alpha_2, -\omega_z/\tan\alpha_3, \omega_z)$$

También se puede obtener un MP con movimiento Schönflies $\{X_e\}$ cuyo eje de rotación sea orientable, combinando los tres movimientos de traslación, \dot{g}_i , con el movimiento de rotación en que únicamente la velocidad de entrada $\dot{\alpha}_2$ es distinta de cero, siendo las otras dos variables de entrada: $\alpha_1 = \pi/2$ y $\alpha_3 = cte$. En este caso, como se indica anteriormente, la velocidad angular de la plataforma móvil, $\vec{\omega}$, es paralela al vector \vec{r}_1 de componentes,

$$\vec{r}_1 = (0, \sin \alpha_3, \cos \alpha_3)$$

Por tanto, la dirección de $\vec{\omega}$ depende únicamente del valor de α_3 y es paralela al plano YZ.

Todas las conclusiones anteriormente detalladas han sido comprobadas con el programa informático GIM, [PET2011].

6.4.1. Resumen de la Multioperacionalidad del MP 3-CPCR

En este apartado se van a aplicar los análisis realizados en el apartado anterior en relación con los doce desplazamientos que tienen estructura de grupo:

1. Desplazamientos de dimensión 0:
 - Identidad $\{I\}$, de desplazamiento nulo; se obtiene bloqueando las seis variables de entrada, g_i y α_i .
2. Desplazamientos de dimensión 1:
 - Movimiento de Traslación rectilíneo $\{T_{\vec{u}}\}$; se consigue bloqueando todas las variables de entrada excepto una de las variables de entrada de traslación, g_i ; o también, bloqueando las entradas de rotación, y ligando las tres variables de entrada de traslación de forma que sólo una sea independiente. En el caso de que se desee una traslación orientada según un vector de componentes (s, t, v) , es necesario vincular las tres velocidades de entrada de traslación entre sí. Teniendo en cuenta [6.60], se obtiene la siguiente relación entre las velocidades de entrada,

$$\dot{g}_1/v = \dot{g}_2/t = -\dot{g}_3/s$$

- Movimiento Rotacional $\{\mathcal{R}_A, \vec{ra}\}$. Este movimiento no es posible ya que el eje de rotación se desplaza en todos los casos paralelamente a sí mismo, como se ha visto en el apartado anterior.
- Movimiento Helicoidal $\{\mathcal{H}_A, h, \vec{ra}\}$. Este movimiento tampoco es posible ya que el eje de rotación se desplaza en todos los casos paralelamente a sí mismo, con alguna componente de traslación en un plano perpendicular al eje de rotación.

3. Desplazamientos de dimensión 2:

- Movimiento Traslación Plano $\{\mathcal{T}_{\vec{u}, \vec{v}}\}$; se consigue bloqueando todas las variables de entrada excepto dos de las variables de entrada de traslación, g_i ; o también, bloqueando las variables de entrada de rotación, y ligando las tres variables de entrada de traslación mediante una ecuación lineal. De forma similar al movimiento de Traslación rectilíneo, en el caso de que se desee un movimiento de Traslación Plano contenido en un plano perpendicular a un vector de componentes (s, t, v) , es necesario vincular las tres velocidades de entrada de traslación entre sí. Teniendo en cuenta [6.60], se obtiene la siguiente relación entre las velocidades de entrada,

$$\dot{g}_1 v + \dot{g}_2 t - \dot{g}_3 s = 0$$

- Movimiento Cilíndrico $\{\mathcal{C}_A\}$. Este movimiento no es posible ya que el eje de rotación se desplaza en todos los casos paralelamente a sí mismo, con alguna componente de traslación en un plano perpendicular al eje de rotación.

4. Desplazamientos de dimensión 3:

- Movimiento Traslación Espacial $\{\mathcal{T}_3\}$; se consigue bloqueando todas las variables de entrada de rotación, α_i , y actuando sobre las tres variables de entrada de traslación, g_i . El manipulador paralelo que lo materializa es 3-PPCR. Las direcciones de traslación vienen dadas por las ecuaciones [6.60].
- Movimiento Plano $\{\mathcal{F}_{\vec{u}, \vec{v}}\}$. Como se ha citado anteriormente, únicamente las configuraciones en las que una de las variables angulares de

entrada, α_i , es accionada y las otras dos variables angulares se mantienen bloqueadas e iguales a $\pi/2$, el eje de rotación de la plataforma móvil se desplaza paralelamente a sí mismo según una dirección perpendicular a dicho eje (la velocidad de deslizamiento de dicha plataforma móvil es nula). Seleccionando adecuadamente las dos variables de entrada de traslación, g_i , de forma que definan dos movimientos de traslación contenidos en un plano perpendicular al eje de rotación citado, se consigue el Movimiento Plano. El manipulador paralelo que lo materializa es 2-PPCR 1-RPCR. Únicamente se obtienen las siguientes posibilidades,

- a) Variables actuadas α_1, g_2 y g_3 : $\alpha_2 = \alpha_3 = \pi/2, g_1 = \text{cte}$;

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z); \text{Plano Traslación XY}$$

- b) Variables actuadas α_2, g_1 y g_3 : $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/2, g_2 = \text{cte}$;

$$\vec{\omega} = (0, \omega_y, 0); \text{Plano Traslación XZ}$$

- c) Variables actuadas α_3, g_1 y g_2 : $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2, g_3 = \text{cte}$;

$$\vec{\omega} = (\omega_x, 0, 0); \text{Plano Traslación YZ}$$

En las tres posibilidades citadas, la variable de entrada de rotación actuada implica que la variable de entrada de traslación correspondiente a su cadena cinemática esté bloqueada, actuándose sobre las variables de entrada de traslación de las otras dos cadenas cinemáticas.

- Movimiento Esférico $\{S_O\}$. Como se ha explicado en el apartado anterior, en general no se puede conseguir el movimiento esférico con este MP.
- Movimiento de Traslación Helicoidal $\{Y_{\vec{u}, h}\}$. En todos los casos estudiados con una variable de entrada de rotación actuada, α_i , la velocidad de deslizamiento de la plataforma móvil es de valor variable con la variable de entrada de rotación o nula, por lo que se concluye que no es posible conseguir este movimiento con el MP estudiado.

5. Desplazamientos de dimensión 4:

- Movimiento Schönflies $\{X_e\}$; se consigue actuando sobre las tres variables de entrada de traslación, g_i , en combinación con una única variable de

entrada de rotación, α_i . El manipulador paralelo que lo materializa es 2-PPCR 1-CPCR. Disponemos de tres posibilidades para el movimiento de rotación, donde (s, t, v) son las componentes del vector en cuya dirección se desea orientar el eje de rotación,

a) Variable de rotación actuada α_1 ; $\alpha_2 = \alpha_3 = \text{cte}$,

$$s = -1/\tan\alpha_2, t = -1/\tan\alpha_3, v = 1$$

b) Variable de rotación actuada α_2 ; $\alpha_1 = \pi/2, \alpha_3 = \text{cte}$,

$$s = 0, t = \sin \alpha_3, v = \cos \alpha_3$$

c) Variable de rotación actuada α_3 ; $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$,

$$s = 1, t = 0, v = 0$$

Por tanto, si se desea orientar el eje de rotación en la dirección de un vector de componentes (s, t, v) , únicamente es posible en los casos en los que la variable de entrada de rotación sea α_1 ó α_2 . En el caso de que la variable de entrada sea α_2 , la dirección de $\vec{\omega}$ depende únicamente del valor de α_3 y es paralela al plano YZ.

6. Desplazamientos de dimensión 6:

- Desplazamiento general $\{\mathcal{D}\}$. El manipulador paralelo que lo materializa es 3-CPCR.

7. ANÁLISIS DE MP DE BAJA MOVILIDAD

7.1. Metodología General

El planteamiento general desarrollado en el capítulo 4 para el análisis de velocidad de manipuladores paralelos de 6 GDL es perfectamente aplicable a un MP de baja movilidad previamente determinado. Para ello se seguirán los siguientes pasos:

1. Se genera un MP de 6 GDL, liberando algunos de los GDL restringidos del MP de baja movilidad objeto de análisis. Las variables actuadas del MP de partida junto con las variables liberadas, constituirán los 6 GDL del nuevo manipulador generado.
2. Se obtienen las matrices Jacobianas del problema directo e inverso de velocidades del MP de 6 GDL.
3. A continuación se obtiene de forma explícita la expresión de las velocidades de la plataforma móvil, \vec{v}_p y $\vec{\omega}$, en función de las velocidades de las variables de entrada del MP de 6 GDL.
4. Finalmente, se hacen nulas las velocidades de las variables de entrada correspondientes a los GDL liberados. De aquí resultan las ecuaciones de restricción en el problema de velocidades del MP de baja movilidad.

El procedimiento descrito se va a aplicar en la resolución del problema de velocidades del MP de 3 GDL 3-RPS.

7.2. Aplicación al Problema de Velocidades del MP 3-RPS

En la figura 7.1 se muestra una representación, realizada con el programa GIM, del MP 3-RPS, con las cadenas dispuestas a 120° respecto del eje Z. De esta forma, los GDL de la plataforma móvil son: dos de rotación y uno de traslación según el eje Z. En dicha figura se muestran las direcciones de las velocidades instantáneas de rotación (Vectores amarillos) y de traslación (Vector azul) de la plataforma móvil, para la

presente configuración del manipulador. También se muestran los vectores unitarios de desplazamiento representados en la figura 4.1 del apartado 4, modificados para adaptarlos al estudio del MP 3-R \underline{P} S. En este caso, el par de rotación situado en el nudo B_i (los nudos H_i , A_i y B_i de la figura 4.1 son coincidentes) tiene su eje de rotación representado por el vector unitario \vec{q}_i . Lo mismo sucede con la rótula esférica situada en el nudo E_i (los nudos C_i , D_i y E_i de la figura 4.1 son coincidentes) que tiene los ejes de sus tres movimientos de rotación representados por los vectores unitarios \vec{r}_i , \vec{s}_i y \vec{t}_i . El vector \vec{c}_i representa la dirección de traslación del par prismático del elemento B_iE_i . El nudo E_i se une directamente a la plataforma móvil, no siendo necesario considerar un nudo F_i como en la figura 4.1.

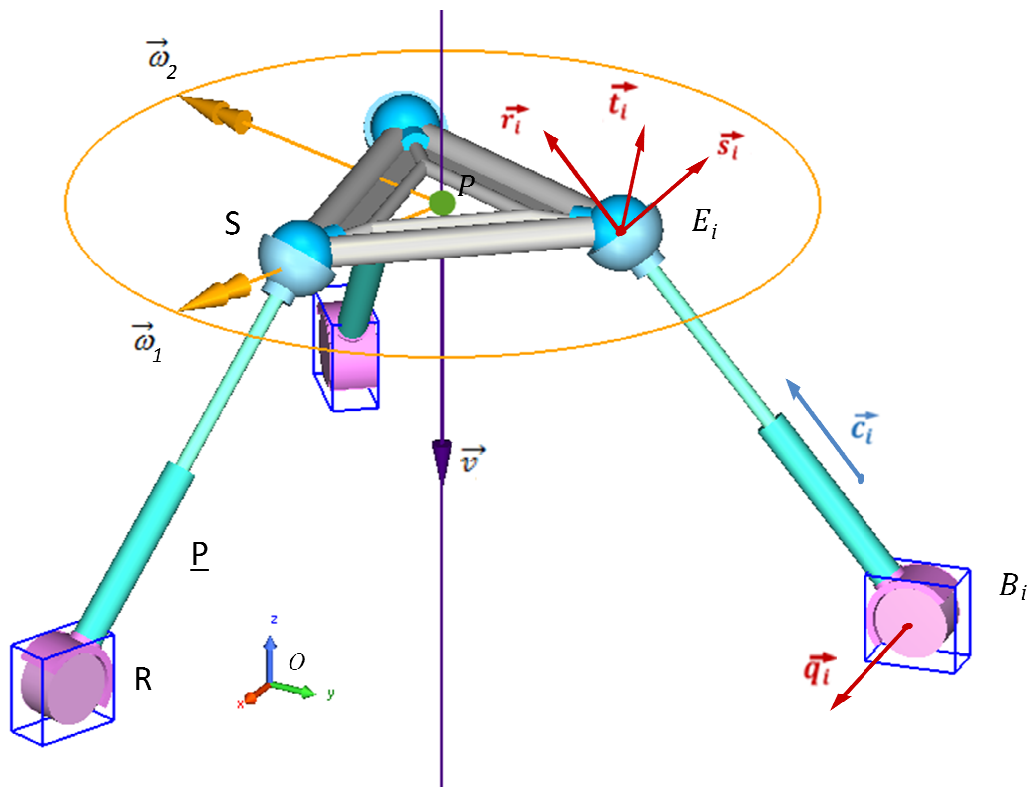


Figura 7.1: Manipulador Paralelo 3-R \underline{P} S

Siguiendo los pasos definidos en el apartado 7.1, a partir del MP de baja movilidad objeto de análisis se libera otro grado de libertad en cada cadena cinemática, obteniéndose el MP de 6 GDL. En el caso del 3-R \underline{P} S se va a adicionar en cada cadena cinemática otro grado de libertad de rotación en el nudo B_i , obteniéndose el MP de 6 GDL del tipo 3- \underline{U} PS mostrado en la figura 7.2. En la figura 7.3 se representan los

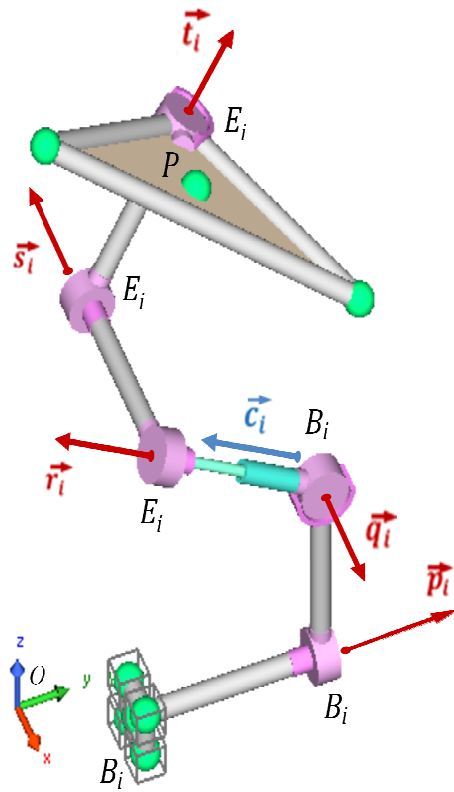


Figura 7.3: Vectores Unitarios del MP 3-UPS

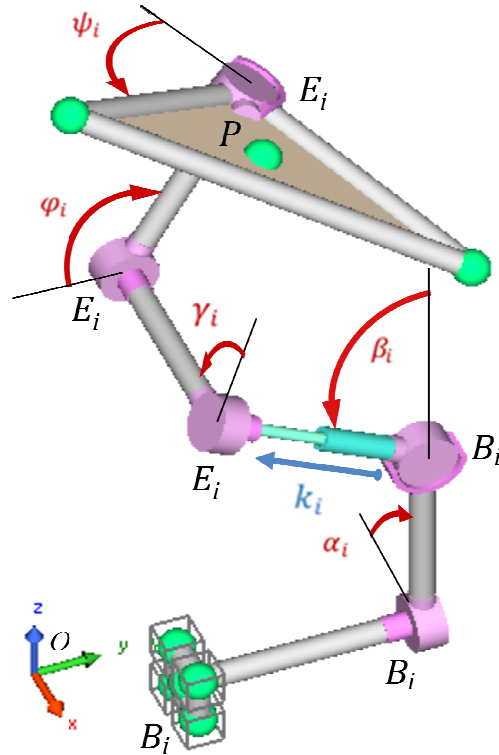


Figura 7.4: Magnitudes de Movimiento del MP 3-UPS

Como ya se indicó en el capítulo 4, las líneas de nacimiento de los ángulos girados por los correspondientes elementos (figura 7.4) son solidarias a los elementos anteriores respectivos, definiendo por tanto movimientos de giro relativos entre elementos.

A continuación se obtienen las matrices Jacobianas del problema directo e inverso de velocidades del MP de 6 GDL 3-UPS. Las variables de entrada serán las reales del MP de baja movilidad así como las correspondientes a los GDL añadidos para conseguir un MP de 6 GDL. Para ello se obtendrá, en primer lugar, la ecuación vectorial de la cadena cinemática i de la figura 7.2. La ecuación vectorial, [4.1], que define la posición del punto P quedará por tanto:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB_i} + \overrightarrow{B_iE_i} + \overrightarrow{E_iP} \quad [7.1]$$

Siendo:

$$\overrightarrow{B_iE_i} = k_i \vec{c}_i \quad [7.2]$$

En dicha ecuación, k_i representa la magnitud del desplazamiento del par prismático y \vec{c}_i es el vector unitario que indica su dirección tal y como se muestra en las figuras 7.1, 7.2 y 7.3. Asimismo en las figuras 7.2 y 7.3 se muestran los vectores unitarios de rotación $\vec{p}_i, \vec{q}_i, \vec{r}_i, \vec{s}_i$ y \vec{t}_i , representativos de los cinco pares de rotación que constituyen la junta cardan y la rótula esférica. Dichos vectores llevan asociados los ángulos correspondientes de la figura 7.4, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varphi_i$ y ψ_i , que representan las magnitudes de los ángulos girados por cada uno de los pares de rotación de la cadena cinemática.

A partir de la ecuación vectorial de la cadena cinemática [7.1], y aplicando [7.2], se determina la velocidad lineal del punto P, \vec{v}_p , de la plataforma móvil. Para ello se aplica la ley de derivación de vectores en bases móviles a dicha ecuación vectorial, tal y como se explica en el apartado 4.2, obteniendo:

$$\vec{v}_p = \dot{k}_i \vec{c}_i + \vec{\tau}_i \times \overrightarrow{B_iE_i} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{E_iP} \quad [7.3]$$

Como en los casos anteriores, en esta ecuación $\vec{\omega}$ representa la velocidad angular de la plataforma móvil de componentes $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Los términos $\vec{\tau}_i$ y $\vec{\omega}$ de la ecuación [7.3] tienen los siguientes valores:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau}_i &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i \\ \vec{\omega} &= \dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i + \dot{\gamma}_i \vec{r}_i + \dot{\phi}_i \vec{s}_i + \dot{\psi}_i \vec{t}_i \end{aligned} \right\} \quad [7.4]$$

Seguidamente se van a determinar las matrices Jacobianas del problema de velocidades de la plataforma 3-UPS, donde el par prismático de vector unitario \vec{c}_i y el par de rotación de vector unitario \vec{p}_i serán los pares actuados. Por tanto las variables de entrada a considerar son k_i , que mide el desplazamiento asociado al par prismático $\overline{B_i E_i} = k_i \vec{c}_i$, y α_i que mide el ángulo girado asociado al par de rotación de vector unitario \vec{p}_i (figuras 7.3 y 7.4).

Multiplicando la ecuación [7.3] escalarmente por el vector \vec{c}_i , se obtiene,

$$\vec{c}_i \cdot \vec{v}_P = \dot{k}_i (\vec{c}_i \cdot \vec{c}_i) + \vec{c}_i \cdot (\vec{\tau}_i \times \overline{B_i E_i}) + \vec{c}_i \cdot (\vec{\omega} \times \overline{E_i P}) \quad [7.5]$$

Teniendo en cuenta que \vec{c}_i y $\overline{B_i E_i}$ son siempre paralelos, reordenando los productos y eliminando los términos nulos resulta:

$$\vec{c}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{c}_i \times \overline{E_i P}) \cdot \vec{\omega} = \dot{k}_i \quad [7.6]$$

El subsistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} (\vec{c}_1)^T & (\vec{c}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{c}_2)^T & (\vec{c}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{c}_3)^T & (\vec{c}_3 \times \overline{E_3 P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{k}_3 \end{bmatrix} \quad [7.7]$$

Las otras tres ecuaciones las obtenemos multiplicando escalarmente la ecuación vectorial de \vec{v}_P , [7.3], por el vector \vec{q}_i . Dado que el vector \vec{q}_i es perpendicular a los vectores \vec{p}_i y \vec{c}_i , eliminando los términos nulos queda,

$$\vec{q}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{q}_i \times \overline{E_i P}) \cdot \vec{\omega} = \vec{q}_i \cdot [(\dot{\alpha}_i \vec{p}_i + \dot{\beta}_i \vec{q}_i) \times \overline{B_i E_i}] = \dot{\alpha}_i k_i \vec{q}_i \cdot (\vec{p}_i \times \vec{c}_i) \quad [7.8]$$

$$\begin{bmatrix} (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \overline{E_3 P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_1 k_1 \vec{q}_1 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{c}_1) \\ \dot{\alpha}_2 k_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{c}_2) \\ \dot{\alpha}_3 k_3 \vec{q}_3 \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{c}_3) \end{bmatrix} \quad [7.9]$$

Englobando las seis ecuaciones en un único sistema se obtiene,

$$\begin{bmatrix} (\vec{c}_1)^T & (\vec{c}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{c}_2)^T & (\vec{c}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{c}_3)^T & (\vec{c}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \overline{E_3 P})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{k}_3 \\ \dot{\alpha}_1 k_1 \vec{q}_1 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{c}_1) \\ \dot{\alpha}_2 k_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{c}_2) \\ \dot{\alpha}_3 k_3 \vec{q}_3 \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{c}_3) \end{bmatrix} \quad [7.10]$$

Donde la matriz Jacobiana del problema directo es,

$$J_{UPS}^D = \begin{bmatrix} (\vec{c}_1)^T & (\vec{c}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{c}_2)^T & (\vec{c}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{c}_3)^T & (\vec{c}_3 \times \overline{E_3 P})^T \\ (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \overline{E_1 P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2 P})^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \overline{E_3 P})^T \end{bmatrix} \quad [7.11]$$

Y la matriz Jacobiana del problema inverso es,

$$J_{UPS}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 \vec{q}_1 \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{c}_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \vec{q}_2 \cdot (\vec{p}_2 \times \vec{c}_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_3 \vec{q}_3 \cdot (\vec{p}_3 \times \vec{c}_3) \end{bmatrix} \quad [7.12]$$

Quedando por tanto el sistema de ecuaciones para el MP 3-UPS de 6 GDL,

$$J_{UPS}^D \begin{bmatrix} v_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = J_{UPS}^I \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{k}_3 \\ \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_3 \end{bmatrix} \quad [7.13]$$

Finalmente se obtendrá el sistema de ecuaciones del MP 3-RPS. Para ello se hacen nulas las velocidades de las variables de entrada correspondientes a los GDL añadidos al MP de baja Movilidad. Las ecuaciones correspondientes a esas variables de entrada

con velocidad nula, representan las ecuaciones de restricción en el problema de velocidades del MP de baja movilidad. En el caso en estudio, las velocidades de las variables de entrada a anular son $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ y $\dot{\alpha}_3$. Por tanto, el sistema de ecuaciones para el MP 3-RPS queda,

$$J_{RPS}^D \begin{bmatrix} \vec{v}_P \\ \vec{\omega} \end{bmatrix} = J_{RPS}^I \begin{bmatrix} \dot{k}_1 \\ \dot{k}_2 \\ \dot{k}_3 \end{bmatrix} \quad [7.14]$$

Donde las matrices Jacobianas del problema directo e inverso del MP 3-RPS son,

$$J_{UPS}^D = \begin{bmatrix} (\vec{c}_1)^T & (\vec{c}_1 \times \overline{E_1P})^T \\ (\vec{c}_2)^T & (\vec{c}_2 \times \overline{E_2P})^T \\ (\vec{c}_3)^T & (\vec{c}_3 \times \overline{E_3P})^T \\ (\vec{q}_1)^T & (\vec{q}_1 \times \overline{E_1P})^T \\ (\vec{q}_2)^T & (\vec{q}_2 \times \overline{E_2P})^T \\ (\vec{q}_3)^T & (\vec{q}_3 \times \overline{E_3P})^T \end{bmatrix}; J_{RPS}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [7.15]$$

Se observa que las matrices Jacobianas del problema directo de los manipuladores 3-UPS y 3-RPS son iguales, y las tres ecuaciones de restricción del MP 3-RPS resultan,

$$\vec{q}_i \cdot \vec{v}_P + (\vec{q}_i \times \overline{E_iP}) \cdot \vec{\omega} = 0 \quad [7.16]$$

Los vectores \vec{c}_i y \vec{q}_i unitarios se obtienen aplicando la metodología descrita en el capítulo 4 (ver apartados 4.3 y 4.5), de forma semejante a como se ha aplicado en los capítulos 5 y 6 para el análisis de la plataforma Gough-Stewart y del MP 3-CPCR.

Siguiendo el procedimiento descrito en este capítulo se puede obtener el sistema de ecuaciones de velocidad de cualquier MP de baja movilidad.

8. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

8.1. Conclusiones

Esta Tesis Doctoral se centra en el desarrollo de una sistemática de generación de diferentes arquitecturas de manipuladores paralelos de baja movilidad, es decir, de menos de seis grados de libertad. A partir de un MP de 6 GDL, restringiendo una o varias variables de entrada, se estudiarán diferentes configuraciones de manipuladores reconfigurables, capaces de adaptarse a diferentes tareas, es decir, manipuladores con capacidad de multioperacionalidad.

Después de una revisión del estado del arte en el desarrollo de MP de baja movilidad, capítulos 1 y 2, en el capítulo 3 se han obtenido una serie de arquitecturas de manipuladores paralelos de 3 GDL con los siguientes patrones de movimiento: 3T0R, 2T1R, 1T2R y 0T3R. Estos MP tendrán tres cadenas cinemáticas idénticas y preferentemente dispuestas de forma simétrica. La metodología utilizada está basada en la teoría de grupos de desplazamientos. Sin embargo, lo relevante del procedimiento ha sido establecer las bases y premisas de la síntesis, que aparecen en el apartado 2.3. Todas ellas constituyen un cuerpo de doctrina jerarquizado en una serie de reglas y condiciones geométricas sobre los elementos y pares de la cadena cinemática, que permiten obtener diferentes estructuras cinemáticas.

El procedimiento pasa por obtener todas las posibles cadenas cinemáticas generadoras de desplazamientos de 3, 4 y 5 GDL que pueden ser empleadas. A continuación se van realizando configuraciones de 3 cadenas cinemáticas idénticas, con tal disposición geométrica que la intersección de los patrones de movimiento de las 3 cadenas resulte ser el desplazamiento buscado para la plataforma móvil.

El resultado del proceso ha sido la generación de una serie de MPs, algunos de los cuales ya estaban referenciados en la literatura, y otros novedosos que podrían ser fuente de nuevos diseños. El procedimiento utilizado en el estudio de las familias de

manipuladores paralelos de 3 GDL, incluyendo el conjunto de premisas para la síntesis, servirá de base para el desarrollo de un nuevo procedimiento de análisis y síntesis de MP de baja movilidad que se desarrollará en el capítulo 4.

En efecto, partiendo de las ideas anteriores se ha detallado un procedimiento para el estudio y generación (análisis y síntesis morfológica) de manipuladores paralelos de 6 GDL y de baja movilidad, de una forma sistemática y generalista. Este procedimiento supone una metodología novedosa para el desarrollo de manipuladores paralelos reconfigurables de topología variable y con múltiples modos de operación, a partir de MP contruidos con combinaciones de cadenas cinemáticas de seis grados de libertad.

Para ello se define el concepto de Cadena Cinemática Genérica, que supone una herramienta muy útil para el análisis sistemático de MPs y supone el elemento base del procedimiento. Consiste en una cadena cinemática serie como la mostrada en la figura 4.1, formada por seis pares de rotación, conectados cada uno de ellos a dos elementos barra que forman 90° ó 0° con el eje de rotación de los pares a los que están conectados. Cada elemento tiene la posibilidad de contener un par prismático, con un máximo de tres pares prismáticos en la cadena cinemática. El número máximo de pares de rotación será de seis, reduciéndose su número en la medida que aumenta el número de pares prismáticos.

Las particularidades o limitaciones geométricas de la cadena, como el hecho de que los ejes de los pares de rotación formen 90° ó 0° con los elementos a los que están vinculados, y por tanto con la dirección de traslación del par prismático en su caso, no limitan el número de posibilidades de patrones de movimiento del elemento terminal y, sin embargo, simplifica enormemente el análisis y la síntesis de MPs.

Este concepto de Cadena Cinemática Genérica permite obtener la ecuación vectorial de una cadena cinemática i cualquiera del MP objeto de estudio de una forma sistemática; y a partir de ella, la correspondiente ecuación de velocidad. Partiendo de las ecuaciones de dicha cadena, es fácil de sistematizar la obtención de las ecuaciones de las otras cadenas del MP. Tomando como base la ecuación vectorial de la cadena cinemática i , aplicando la combinación de Matrices Básicas de Rotación, se obtienen con facilidad los vectores unitarios de los pares de cada cadena cinemática. Las

cadena cinemáticas que constituyen el MP pueden ser de topología diferente, siendo necesario en este caso obtener la ecuación vectorial de cada una de ellas.

Las características del procedimiento desarrollado permiten analizar la multioperacionalidad de un MP de 6 GDL cualquiera mediante el bloqueo de las adecuadas juntas cinemáticas. De esta forma se pueden generar MPs de baja movilidad con diferentes patrones de movimiento con estructura de grupo.

Con el objeto de generar todos los posibles MP de 6 GDL, es necesario en primer lugar, obtener todas las posibles estructuras de cadenas cinemáticas de 6 GDL. Para ello, se ha realizado la síntesis estructural completa de una cadena espacial de 6 GDL. Se han considerado únicamente las combinaciones de pares prismáticos y de rotación, ya que cualquier par de orden superior como el par cilíndrico, junta cardan, par plano o esférico se puede obtener combinando pares prismáticos y de rotación. Existen cuatro posibles agrupaciones de pares prismáticos y de rotación: PPPRRR, PPRRRR, PRRRRR y RRRRRR. De la aplicación de los criterios recogidos en el apartado 4.4, que buscan simplificar los aspectos constructivos del manipulador y sus aspectos geométricos, ha resultado un conjunto de 347 configuraciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL, que potencialmente pueden combinarse entre sí para formar diferentes MPs de 6 GDL (tablas 4.16, 4.17 y 4.18).

Para comprobar la potencialidad de la capacidad de análisis de la metodología desarrollada en el capítulo 4, se ha aplicado dicha metodología al análisis cinemático de la plataforma de Gough-Stewart (capítulo 5). Además, se ha obtenido para dicho MP la inversa de la matriz Jacobiana del problema directo de velocidades, expresando de forma explícita las componentes de las velocidades \vec{v}_p y $\vec{\omega}$ de la plataforma móvil en función de las velocidades de las variables de entrada \dot{l}_i . Es de resaltar este enfoque, dado que lo habitual en la literatura técnica es encontrarse enfoques numéricos. Las expresiones analíticas de los elementos de la matriz Jacobiana pueden encontrarse en el anexo 1.

Otro punto a resaltar en el desarrollo de esta tesis es el siguiente. Del conjunto de 347 configuraciones de cadenas cinemáticas de 6 GDL recogidos en el capítulo 4, se ha seleccionado la cadena CPCR y se ha construido un manipulador de tres cadenas

idénticas, el MP 3-CPCR de 6 GDL, para realizar sobre el mismo un completo estudio de las capacidades de reconfigurabilidad de su elemento terminal. La selección de dicho manipulador se fundamenta en que, disponiendo de un mínimo de cadenas cinemáticas que garantizan una rigidez, tiene los accionamientos de las variables de entrada de traslación y rotación conectadas a la plataforma fija, lo que minimiza las fuerzas de inercia que actúan sobre el mecanismo. Además, las tres cadenas cinemáticas están conectadas a la plataforma móvil por medio de un par de rotación, de sencilla ejecución material.

El análisis de la multioperacionalidad del MP 3-CPCR ha permitido obtener una serie de patrones de movimiento en su plataforma móvil con estructura de grupo. Ello le confiere una gran capacidad de reconfigurabilidad. Por ejemplo, este MP se puede reconfigurar hacia un MP de baja movilidad, el MP 1-CPCR 2-PPCR, con una plataforma móvil que sigue un patrón de movimiento Schönflies y cuyo eje de rotación puede ser orientado en una dirección cualquiera previamente seleccionada. También es posible, bloqueando las variables de entrada adecuadas, que la plataforma móvil siga los siguientes patrones de movimiento: traslación rectilíneo, traslación plano, traslación espacial y también movimiento Plano. Es, por tanto, un MP de 6 GDL reconfigurable, obteniéndose una familia de MPs de baja movilidad con varios patrones de movimiento con estructura de grupo en su plataforma móvil.

Por último, utilizando como base el procedimiento desarrollado para la obtención de las ecuaciones de velocidad de MPs de 6 GDL, se ha ideado una sistemática para obtener tanto las ecuaciones de velocidad como las ecuaciones de restricción de los MPs de baja movilidad. Para ello, se genera un MP de 6 GDL, liberando algunos de los GDL restringidos del MP de baja movilidad objeto de análisis. Las variables actuadas del MP de partida junto con las variables liberadas, constituirán los 6 GDL del nuevo manipulador generado. A continuación se obtienen de forma explícita la expresión de las velocidades de la plataforma móvil, \vec{v}_P y $\vec{\omega}$, en función de las velocidades de las variables de entrada del MP de 6 GDL. Finalmente, se hacen nulas las velocidades de las variables de entrada correspondientes a los GDL liberados, obteniéndose las ecuaciones de restricción en el problema de velocidades del MP de baja movilidad. Por tanto, como puede verse, se han utilizado las ideas de reconfigurabilidad

mediante el bloqueo de variables de entrada para obtener el MP de baja movilidad objeto de estudio.

En resumen, en este trabajo se presenta un método versátil que permite, de una forma sistemática, construir diferentes MP de 6 GDL a partir de una o varias cadenas cinemáticas. Se plantea el problema de velocidades de manera que puedan extraerse con facilidad los diferentes modos de operación y de reconfigurabilidad que presenta. Esta metodología se puede aplicar a cualquier MP obtenido combinando cadenas cinemáticas de 6 GDL de diferente topología, con lo que se pueden realizar estudios de MPs de 6 GDL y de baja movilidad con carácter general.

8.2. Líneas Futuras de Investigación

Los trabajos realizados en esta tesis han cubierto aspectos del análisis y síntesis estructural de MPs tales como: definir una metodología sistemática para la resolución del problema de velocidades; una metodología que ha permitido obtener un grupo de 347 cadenas cinemáticas de 6 GDL con características específicas; y una metodología para el análisis de la multioperacionalidad del MP. Sin embargo, han quedado abiertas diferentes posibilidades de trabajo que se indican a continuación.

Una posible línea de investigación futura podría ser la aplicación del procedimiento desarrollado en el capítulo 3, centrado en el estudio de MPs de 3 GDL, a la obtención de familias de MPs con 4 y 5 GDL. Para ello, podrían seguirse las premisas de la síntesis recogidas en el apartado 2.3. En primer lugar, se obtendrían todas las posibles cadenas cinemáticas generadoras de desplazamientos de 4 y 5 GDL. A continuación se combinarían de forma que se obtenga el patrón de movimiento deseado en el MP de 4 ó 5 GDL.

Otra posible línea de investigación futura podría consistir en el desarrollo de un software orientado al diseño y análisis de MPs reconfigurables. Aprovechando la sistematización de la metodología presentada en esta tesis, podría realizarse un software que permitiera la aplicación de dicha metodología a cada una de las 347 configuraciones de cadena cinemática de 6 GDL (apartado 4.4), con el fin de sistematizar el análisis de cada una de ellas. A partir de estas cadenas se construirían, de una forma sistemática y estructurada, los diferentes manipuladores paralelos (MP)

de 6 GDL formados por un mínimo de 3 y un máximo de 6 cadenas. Para ello, este software podría incluir una librería de cadenas cinemáticas y plataformas móviles predefinidas y de utilidad práctica para el diseño y análisis de manipuladores reconfigurables.

Una vez creados los diferentes MP de 6 GDL, se identificarían todas las posibles combinaciones de pares activos y pasivos. Para cada grupo de variables de entrada, asociado a cada combinación de pares activos, se obtendría la solución del problema directo y del problema inverso de velocidades. Se analizarían las posibilidades de multioperacionalidad de los desplazamientos de la plataforma móvil del MP, obteniéndose el conjunto de MPs de baja movilidad (0 a 6 GDL) que se consiguen mediante el bloqueo o bloqueos de las variables de entrada. Asimismo, se podría realizar el análisis del espacio de trabajo práctico y de las singularidades en los diferentes modos de operación.

Como resultado este software permitiría obtener, de forma sistemática, las familias de MPs de baja movilidad asociados a una o varias cadenas cinemáticas de 6 GDL que permiten realizar una amplia gama de patrones de movimiento de la plataforma móvil.

9. BIBLIOGRAFÍA

- [AGH2006] Fardhad Aghili y Kouros Parsa, "Design of a Reconfigurable Space Robot with Lockable Telescopic Joints", Octubre 2006, IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (Beijing, China), pp. 4608-4614.
- [ALI2004] Rasim Alizade y Cagdas Bayram, "Structural synthesis of parallel manipulators", Enero 2004, Mechanism and Machine Theory, Vol. 39, pp. 857-870.
- [ALT2009] Oscar Altuzarra, Y. San Martín, E. Amezua, "Motion Pattern Analysis of Parallel Kinematic Machines: A Case of Study", 2009, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 25, pp. 432-440.
- [ALT2010] Oscar Altuzarra, B. Sandru, E. Macho y E. Amezua, "Análisis de Indicadores Cinemáticos para el Diseño de Manipuladores Paralelos", Noviembre 2010, XVIII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Asociación Española de Ingeniería Mecánica, Vol. 2, pp. 1238-1247.
- [ANG2004] Jorge Angeles, "The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators", Julio 2004, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 617-624.
- [ANG2006] Jorge Ángeles y Alexei Morozov, Patente No. US 7,127,962 B2, título: "Four-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator for producing Schönflies Motions", Octubre 2006.
- [ANG2010] Jorge Ángeles, "On the Nature of the Cartesian Stiffness Matrix", Abril 2010, Ingeniería Mecánica, Tecnología y Desarrollo, Vol. 3, No. 5, pp. 163-170.
- [ARS2006] Marc Arsenault y Roger Boudreau, "Synthesis of Planar Parallel Mechanisms While Considering Workspace, Dexterity, Stiffness and Singularity Avoidance", Enero 2006, Journal of Mechanical Design, Vol. 128, pp. 69-78.
- [BAL1900] Robert Stawell Ball, "A Treatise on the Theory of Screws", 1900, Cambridge at the University Press.
- [BAM2008] Hagay Bamberger y Alon Wolf, "Assembly Mode Changing in Parallel Mechanisms", Agosto 2008, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 24, No. 4, pp.765-772.
- [BAR2000] Luc Baron, "Synthese geometrique de manipulateurs paralleles de topologie STAR par algorithme genetique", Junio 2000, École Polytechnique de Montréal.

- [BI2010] Bi Z. M. y Kang B., "Enhancement of Adaptability of Parallel Kinematic Machines with an Adjustable Platform", 2010, Journal of Manufacturing Science and Engineering, Vol. 132, 061016 (9 pp.).
- [BIL2012] Armando Bilbao, Oscar Altuzarra, Alfonso Hernandez Frias y Enrique Amezua, "Sobre la Aplicación de la Teoría de Torsores en Cinemática", Noviembre 2012, XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Asociación Española de Ingeniería Mecánica, referencia 02-02, pp. 1-8.
- [BLE2006] Byungwoo Lee y Kazuhiro Saitou, "Three-Dimensional Assembly Synthesis for Robust Dimensional Integrity Based on screw Theory", Enero 2006, Journal of Mechanical Design, Vol. 128, pp. 243-251.
- [BOJ2002] Bojinov H., Casal A. y Hogg T., "Multiagent Control of Self Reconfigurable Robots", 2002, Artificial Intelligence, Vol. 142, pp. 99-120.
- [CAL2003] M. Callegari and M. Tarantini, "Kinematic Analysis of a Novel Translational Platform", Junio 2003, Journal of Mechanical Design, Vol. 125, pp. 308-315.
- [CHE2001] Chen I-M., "Rapid Response Manufacturing through a Rapidly Reconfigurable Robotic Workcell", 2001, Robotics and Computer Integrated Manufacturing, Vol. 17, pp. 199-213.
- [CLA1991] R. Clavel, "Conception d'un robot parallèle rapide à 4 degrés de liberté", 1991, Ph.D. Thesis, EPFL, Lausanne, Switzerland.
- [DAV2004] Joseph K. Davidson y Kenneth H. Hunt, "Robots and Screw Theory: Applications of Kinematics and Statics to Robotics", 2004, Oxford.
- [DIA2002] Antonio Diaz-Calderon, Christiaan J.J. Paredis y Pradeep K. Khosla, "On the Synthesis of the System Graph for 3D Mechanics", Septiembre 2002, Institute for Complex Engineered Systems, Carnegie Mellon University, Painsburgh, PA.
- [DZH2005] Dan Zhang y Sherman Y. T. Lang, "On Conceptual Design of 5-axis Parallel Kinematic Machines using kinetostatic modelling approach", 2005, Integrated Manufacturing Technologies Institute, National Research Council of Canada (London, Ontario, Canada).
- [FAN2002] Yuefa Fang y Lung-Wen Tsai, "Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DoF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures", Septiembre 2002, The International Journal of Robotics Research Vol. 21, No. 9, pp. 799-810.
- [FIN2008] Allan Daniel Finistauri, Fengfeng Xi y Brian Petz, "Architecture Design and Optimization of an On-the-Fly Reconfigurable Parallel Robot", 2008, Parallel Manipulators, Towards New Applications, capítulo 18, pp. 379-404.
- [FIN2013] Allan Daniel Finistauri y Fengfeng Xi, "Reconfiguration Analysis of a Fully Reconfigurable Parallel Robot", Noviembre 2013, Journal of Mechanisms and Robotics, Vol. 5, pp. 041002-1 a 18.

- [FRA2000] Janusz Fraczek, "Kinematical Synthesis and Dynamical Analysis of Multilink Robot using Multi-Body Approach", Noviembre 2000, ADAMS Conference, Roma.
- [GAL2004] J. Gallardo-Alvarado, J.M. Rico-Martinez y H. Orozco-Mendoza, "Un Algoritmo para Resolver la cinemática Directa de Plataformas Gough-Stewart tipo 6-3", Julio 2004, Computación y Sistemas, Vol. 8, No. 2, pp. 132-149.
- [GAN2013] Gan G., Dai J. S., Dias J. y Seneviratne L., "Reconfigurability and unified kinematics modeling of a 3rTPS metamorphic parallel mechanism with perpendicular constraint screws", 2013, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 29, pp. 121-128.
- [GAO2002] Feng Gao, Weimin Li, Xianchao Zhao, Zhenlin Jin y Hui Zhao, "New kinematic structures for 2-, 3-, 4-, and 5-DOF parallel manipulator designs", Abril 2002, de Mechanism and Machine Theory, Vol. 37, pp. 1395-1411.
- [GOG1997] Grigore Gogu, P. Coiffet y A. Barraco, "Mathématiques pour la Robotique: Représentation des Déplacements des Robots", 1997, Ed. Hermès, Paris.
- [GOG2004] Grigore Gogu, "Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations", Agosto 2004, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 23, pp. 1021-1039.
- [GOG2006-1] Grigore Gogu, "Fully-Isotropic Parallel Manipulators with Schönflies Motions and Complex Legs with Rhombus Limbs", Mayo 2006, IEEE International Conference on Robotics and Automation (Orlando, Florida), pp. 1147-1152.
- [GOG2006-2] Grigore Gogu, "Fully-Isotropic Parallel Manipulators with Five Degrees of Freedom", Mayo 2006, IEEE International Conference on Robotics and Automation (Orlando, Florida), pp. 1141-1146.
- [GOG2008] Grigore Gogu, "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 1: Methodology", 2008, Solids Mechanics and Its Applications, Springer, Vol. 149.
- [GOG2009] Grigore Gogu, "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom", 2009, Solids Mechanics and Its Applications, Springer, Vol. 159.
- [GOG2010] Grigore Gogu, "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 3: Topologies with planar motion of the moving platform", 2010, Solids Mechanics and Its Applications, Springer, Vol. 173.
- [GOG2011] Grigore Gogu, "Maximally Regular $T2R1$ -Type Parallel Manipulators with Bifurcated Spatial Motion", Febrero 2011, Journal of Mechanisms and Robotics, Vol. 3, pp. 011010-1 a 011010-8.

- [GOG2012] Grigore Gogu, "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 4: Other Topologies with Two and Three Degrees of Freedom", 2012, Solids Mechanics and Its Applications, Springer, Vol.183.
- [GOG2014] Grigore Gogu, "Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 5: Basic Overconstrained Topologies with Schönflies Motions", 2014, Solids Mechanics and Its Applications, Springer, Vol. 206.
- [GOS1996] C. Gosselin, É. St-Pierre y M. Gagné, "On the development of the Agile Eye: Mechanical design, control issues and experimentation", 1996, IEEE Robotics & Automation Magazine, Vol. 3, pp. 29–37.
- [HAN2003] K. Han y L-W Tsai, "Kinematic Synthesis of a Spatial 3-RPS Parallel Manipulator", 2003, Journal of Mechanical design, Vol. 125, pp. 92-97.
- [HER1978] Jacques Marie Hervé, "Structural-Analysis of Mechanisms by using Set of Displacements", 1978, Mechanism and Machine Theory, Vol. 13 issue 4, pp. 437-450.
- [HER1982] Jacques Marie Hervé, "Intrinsic Formulation of Problems of Geometry and Kinematics of Mechanisms", 1982, Mechanism and Machine Theory, Vol. 17 issue 3, pp. 179-184.
- [HER1994] Jacques Marie Hervé, "The Mathematical Group-Structure of the Set of Displacements", Enero 1994, Mechanism and Machine Theory, Vol. 29 issue 1, pp. 73-81.
- [HER1999] Jacques Marie Hervé, "The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design", 1999, Mechanism and Machine Theory, Vol. 34 issue 5, pp. 719-730.
- [HER2004] Jacques Marie Hervé, "Note about the 3-UPU wrist", Agosto 2004, Mechanism and Machine Theory, Vol. 39 issue 8, pp. 901-904.
- [HER2009] Jacques Marie Hervé, "Conjugation in the Displacement Group and Mobility in Mechanisms", 2009, Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, Vol. 33 issue 2, pp. 3-14.
- [HES2006] Tarcisio A. Hess-Coelho, "Topological Synthesis of a Parallel Wrist Mechanism", Enero 2006, Journal of Mechanical Design, Vol. 128, pp. 230-235.
- [H-F1994] A. Hernández Frías, E. Amezua, M.B. Ajuria y J.I. Llorente, "Multiple Points on the Coupler Curve of Transitional Four-Hinge Planar Linkages", 1994, Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 7, pp. 1015-1032.
- [H-F2004] A. Hernández Frías, "Cinemática de Mecanismos, Análisis y Diseño", 2004, Editorial Síntesis S.A., edición revisada.
- [H-F2008] A. Hernández Frías, O. Altuzarra, Charles Pinto y E. Amezua, "Transitions in the Velocity Pattern of Lower Mobility Parallel Manipulators", 2008, Mechanism and Machine Theory, Vol. 43, pp. 738-753.

- [H-F2012] A. Hernández Frías, O. Altuzarra, O. Salgado, C. Pinto y V. Petuya, "Designing Parallel Manipulators: from Specifications to a Real Prototype", 2012, *Industrial Robots: An International Journal*, Vol. 39 Nº 5, pp. 500-512.
- [H-F2014] Alfonso Hernandez Frias, José I. Ibarreche, Victor Petuya y Oscar Altuzarra, "Structural Synthesis of 3-DoF Spatial Fully Parallel Manipulators", Julio 2014, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, pp. 1-8.
- [H-F2015] Alfonso Hernandez Frias, José I. Ibarreche, Victor Petuya, Mónica Urizar y Erik Macho, "Análisis de la Multi-Operacionalidad de un Manipulador Paralelo", Octubre 2015, 14th World Congress in Mechanism and Machine Science, Taipei Taiwan, pp. 1-6.
- [HUA2002] Zhen Huang, Qinchuan Li, "General Methodology for Type Synthesis of Symmetrical Lower-Mobility Parallel Manipulators and Several Novel Manipulators", Febrero 2002, *The International journal of Robotics Research*, Vol. 21, No. 2, pp.131-145.
- [HUA2004-1] Zhen Huang, Qinchuan Li, "Type Synthesis of Symmetrical Lower Mobility Parallel Mechanisms Using The Constraint Synthesis Method", Abril 2004, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 20 issue 2, pp.173-180.
- [HUA2004-2] Zhen Huang, Qinchuan Li, "On the Type Synthesis of Lower-Mobility Parallel Manipulators", 2004, Robotics Research Center, Yanshan University.
- [HUD2011] S. Huda, Y. Takeda and S. Hanagasaki, "Kinematic Design of 3-URU Pure Rotational Parallel Mechanism to Perform Precise Motion within a Large Workspace", 2011, *Meccanica*, Vol. 46, pp. 89-100.
- [HUY2005] Patrick Hyunh y Jacques Marie Hervé, "Equivalent Kinematic Chains of Three Degree-of-Freedom Tripod Mechanisms With planar-Spherical Bonds", Enero 2005, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 127, pp. 95-102.
- [IBA2012] José I. Ibarreche, Oscar Altuzarra, Victor Petuya y Alfonso Hernandez Frias, "Síntesis Estructural de las Familias de Manipuladores Paralelos de 3 Grados de Libertad", Noviembre 2012, XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica, Asociación Española de Ingeniería Mecánica, referencia 08-04, pp. 1-8.
- [IBA2013] José I. Ibarreche, Oscar Altuzarra, Victor Petuya, Alfonso Hernandez Frias y Charles Pinto, "Structural Synthesis of the Families of Parallel Manipulators with 3 Degrees of Freedom", 2013, *Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control*, pp. 35-42.
- [JIN2004-1] Quiong Jin y Ting-Li Yang publicaron el trabajo "Synthesis and Analysis of a Group of 3-Degree-of-Freedom Partially Decoupled Parallel Manipulators", Marzo 2004, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126 pp. 301-306.

- [JIN2004-2] Qiong Jin y Ting-Li Yang, "Theory for Topology Synthesis of Parallel Manipulators and Its Application to Three-Dimension-Translation Parallel Manipulators", Julio 2004, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 625-639.
- [JUN1993] John L. Junkins y Youdan Kim, "Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures", 1993, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA) Inc., Washington DC.
- [KHA2004] Wisama Khalil y S. Guegan, "Inverse and Direct Dynamic Modeling of Gough-Stewart Robots", Agosto 2004, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 20, No. 4, pp. 754-762.
- [KIM2002] Han Sung Kim y Lung-Wen Tsai, "Kinematic Synthesis of a Spatial 3-RPS Parallel Manipulator", Abril 2002, Department of Mechanical Engineering, Bourns College of Engineering, University of California.
- [KON2002] Xianwen Kong y Clément M. Gosselin, "Kinematics and Singularity Analysis of a Novel Type of 3-CRR 3-DOF Translational Parallel Manipulator", 2002, Int. J. Robotics Research, Vol. 21, pp. 791-798.
- [KON2004-1] Xianwen Kong y Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of 3-DOF Spherical Parallel Manipulators Based on Screw Theory", Enero 2004, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 101-108.
- [KON2004-2] Xianwen Kong y Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of Three-Degree-of-Freedom Spherical Parallel Manipulators", Marzo 2004, The International Journal of Robotics Research, Vol. 23, No. 3, pp. 237-245.
- [KON2004-3] Xianwen Kong y Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory", Agosto 2004, Mechanism and Machine Theory, Vol. 39 issue 8, pp. 901-904.
- [KON2005] Xianwen Kong, Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of 3-DOF PPR-Equivalent Parallel Manipulators Based on Screw Theory and the Concept of Virtual Chain", Noviembre 2005, Journal of Mechanical Design, Vol. 127, pp. 1113-1121.
- [KON2006] Xianwen Kong y Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of 4-DOF SP-equivalent Parallel Manipulators: A Virtual Chain Approach", Abril 2006, Mechanism and Machine Theory, Vol. 41, pp. 1306-1319.
- [KON2007-1] Xianwen Kong, Clément M. Gosselin, "Type Synthesis of Parallel Mechanisms", Febrero 2007, "Springer Tracts in Advanced Robotics", Springer, Vol. 33.
- [KON2007-2] Xianwen Kong, Clément M. Gosselin y Pierre-Luc Richard, "Type Synthesis of Parallel Mechanisms With Multiple Operation Modes", Junio 2007, Journal of Mechanical Design, ASME, Vol. 129, pp. 595-601.

- [KON2013] Xianwen Kong, "Type Synthesis of 3-DOF Parallel Manipulators with Both a Planar Operation Mode and a Spatial Translational Operation Mode", Noviembre 2013, Journal of Mechanisms and Robotics, ASME, Vol. 5, pp. 041015-1 a 8.
- [KRO1998-1] Venkat Krobi, G. K. Ananthasuresh y Vijay Kumar, "Synthesis of Spatial Two-Link Coupled Serial Chains", Septiembre 1998, DETC98/MECH-5890, ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta, Georgia, USA.
- [KRO1998-2] Venkat Krobi, G. K. Ananthasuresh y Vijay Kumar, "Kinetostatic Synthesis of Coupled Serial Chains", Septiembre 1998, DETC98/MECH-5977, ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta, Georgia, USA.
- [KUM2014] Nitish Kumar, Olivier Piccin y Bernard Bayle, "A Task-Based Type Synthesis of Novel 2T2R Parallel Mechanisms", 2014, Mechanism and Machine theory, Vol. 77, pp.59-72.
- [LEE2005] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "Discontinuously seven-link mechanisms via group-algebraic approach", Junio 2005, Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 219 issue 6, pp. 577-587.
- [LEE2006] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "Translational parallel manipulators with doubly planar limbs", Septiembre 2005, Mechanism and Machine Theory, Vol. 41, pp. 433-455.
- [LEE2007] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "Cartesian Parallel Manipulators With Pseudoplanar Limbs", Diciembre 2007, Journal of Mechanical Design, Vol. 129, pp. 1257-1264.
- [LEE2009-1] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "Type synthesis of primitive Schönflies-motion generators", 2009, Mechanism and Machine Theory, Vol. 44 issue 10, pp. 1980-1997.
- [LEE2009-2] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "On some applications of primitive Schönflies-motion generators", Junio 2009, Mechanism and Machine Theory, Vol. 44, pp. 2153-2163.
- [LEE2010] Chung-Ching Lee y Jacques Marie Hervé, "Generators of the product of two Schönflies motion groups", 2010, European Journal of Mechanics A/Solids, Vol. 29 issue 1, pp. 97-108.
- [LI2004-1] Qinchuan Li y Zhen Huang, "Mobility Analysis of a Novel 3 - 5R Parallel Mechanism Family", Enero 2004, Journal of Mechanical Design, Vol. 126, pp. 79-82.
- [LI2004-2] Qinchuan Li, Zhen Huang y Jacques Marie Hervé, "Type Synthesis of 3R2T 5-DOF Parallel Mechanisms Using the Lie Group of Displacements", Abril 2004, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 20, No. 2, pp. 173-180.

- [LI2004-3] Qinchuan Li, Zhen Huang y Jacques Marie Hervé, "Displacement manifold method for type synthesis of lower-mobility parallel mechanisms", Diciembre 2004, Science in China Series E-Engineering & Materials Science, Vol. 47 issue 6, pp.641-650.
- [LI2010] Qinchuan Li y Jacques Marie Hervé, "1T2R Parallel Mechanisms Without Parasitic Motion", Junio 2010, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 26, No. 3, pp. 401-410.
- [LIU2003] Xin-Jun Liu y Jinsong Wang, "Some New Parallel Mechanisms Containing the Planar Four-Bar Parallelogram", Septiembre 2003, The International Journal of Robotics Research, Vol. 22, No. 9, pp 717-732.
- [MCC2001] J. Michel McCarthy y Leo Joskowicz, "Chapter 9: Kinematic Synthesis", libro "Formal Engineering Design Synthesis", Marzo 2001, Cambridge University Press.
- [MEN2007] J. Meng, G. Liu, "A Geometric Theory for Analysis and Synthesis of Sub-6 DoF Parallel Manipulators", Agosto 2007, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 23, No. 4.
- [MER2003] Merlet J. P., "Determination of the Optimal Geometry of Modular Parallel Robots", Septiembre 2003, IEEE Int. Conf. on Robotics & Automation, Taipei (Taiwan).
- [MIC2003] R. C. Michelini, R. M. Molino, D. Cattaneo y M. Callegari, "The Conceptual Design of a Parallel-Kinematics Manipulator for High Speed Assembly Tasks", Marzo 2003, Dpto. Machinery Mechanics and Design – University of Genova and Dpto. Mechanics – University of Ancona.
- [MOO2000] Yong-Mo Moon y Sridhar Kota, "Synthesis of Reconfigurable Machine Tools with Screw Theory", Septiembre 2000, DETC2000/MECH-14066, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland.
- [MOO2002] Yong-Mo Moon y Sridhar Kota, "Automated synthesis of mechanism using dual-vector algebra", 2002, Mechanism and Machine theory, Vol. 37, pp.143-166.
- [PAC2000] V. Parenti-Castelli, R. Di-Gregorio and F. Bubani, "Workspace and Optimal Design of a Pure Translation Manipulator", Mayo 2000, Meccanica, Vol. 35 issue 3, pp. 203-214.
- [PAN2000] Yeow-Wei Pang y Venkat Krobi, "Kinematic Synthesis of Coupled Serial Chain Mechanisms for Planar Path Following Tasks using Fourier Methods", Septiembre 2000, DETC2000/MECH-14188, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland.
- [PAR1993] Christiaan J. J. Paredis y Pradeep K. Khosla, "Synthesis Methodology for Task Based Reconfiguration of Modular Manipulator Systems", Octubre 1993, 6th Symposium on Robotics Research (ISRR'93), Hidden Valley, PA.

- [PET2011] Victor Petuya, E. Macho, O. Altuzarra, C. Pinto y A. Hernandez, "Educational Software Tools for the Kinematic Analysis of Mechanisms", Febrero 2011, Comp. Appl. Eng. Education. DOI: 10.1002 cae.20532. ISSN: 1061-3773.
- [PFA2006] P. Fanghella, C. Galletti y E. Giannotti, (University of Genoa, Italy), "Parallel Robots that Change their Group of Motion", 2006, Advances in Robot Kinematics, Springer, pp. 49-56.
- [SAC2001] E. Sacks, L. Joskowicz, R. Schultheiss y M. Kyung, "Towards robust kinematic synthesis of mechanical systems", Julio 2001, School of Computer Science and Eng., The Hebrew University of Jerusalem, Israel.
- [SAL2008] Oscar Salgado Picón, "Síntesis, Análisis y Diseño de Manipuladores Paralelos de Baja Movilidad", Enero 2008, Tesis Doctoral presentada en la ETSI de Bilbao, Universidad del País Vasco UPV/EHU.
- [SCH2010] J. Schmitt, D. Inkerman, A. Raatz, J. Hesselbach y T. Vietor, "Dynamic Reconfiguration of Parallel Mechanisms", 2010, News Trends in Mechanism Science: Analysis and Design, Springer, pp. 557-565.
- [SHE2005] Huiping Shen, Ting-Li Yang y Lv-zhong Ma, "Synthesis and structure analysis of kinematic structures of 6-dof parallel robotic mechanisms", Diciembre 2004, Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, pp. 1164-1180.
- [SLA2014] Slaboch B. J. y Voglewede P. A., "Profile Synthesis of planar Rotational-Translational Variable Joints", 2014, Journal of Mechanisms and Robotics, Vol. 6, 041012 (9 pp.).
- [TAN2006] Xueyan Tang y I-Ming Chen, "A Large-Displacement 3-DOF Flexure Parallel Mechanism with Decoupled Kinematics Structure", Octubre 2006, International Conference on Intelligent Robots and Systems, Beijing, China, IEEE/RSJ, pp. 1668-1673.
- [TRE1999] Alain Tremblay, "Synthese Geometrique de Manipulateurs Paralleles de Topologie STAR par Algorithme Genetique", Diciembre 1999, École Polytechnique de Montréal.
- [TRE2000] Alain Tremblay y Luc Baron, "Geometrical Synthesis of Parallel Manipulators of Star-Like Topology with a Genetic Algorithm", 2000, École Polytechnique de Montréal.
- [TSA1996] L. W. Tsai y R. Stamper, "A Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of freedom", August 1996, ASME Design Engineering Technical Conferences, , Irvine, CA, USA, 96-DETC-MECH-1152.
- [TSA2000] L. W. Tsai y S. Joshi, "Kinematics and Optimization of a Spatial 3-UPU Parallel Manipulator", Diciembre 2000, Journal of Mechanical Design, Vol. 122, pp. 439-446.

- [TSE2015] T-Y. Tseng, W-C. Hsu, L-F. Lin y C-H. Kuo, "Design and experimental evaluation of a reconfigurable gravity-free muscle training assistive device for lower-limb paralysis patients", Agosto 2015, ASME 2015 Int. Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2015.
- [WAL2009] Dominic R. Walter, Manfred L. Husty y Martin Pfurner, "A Complete Kinematic Analysis of the SNU 3UPU Parallel Robot", 2009, Interactions of Classical and Numerical Algebraic Geometry, Vol. Contemporary Mathematics 496, pp. 331-346.
- [WAL2011] Dominic R. Walter y Manfred L. Husty, "Kinematic Analysis of the TSAI-3UPU Parallel Manipulator using Algebraic Methods", Junio 2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México.
- [WAM2004] Charles W. Wampler, "Displacement Analysis of Spherical Mechanisms Having Three or Fewer Loops", Enero 2004, Journal of Mechanical Design, Vol. 126 pp. 93-100.
- [WAN2008] Wang W., Zhang H., Zong G. y Deng Z., "A Reconfigurable Mobile Robots System Based on Parallel Mechanism", 2008, Parallel Manipulators Towards New Applications (I-Tech Education and Publishing), pp. 347-362.
- [WLI2005] Weimin Li, Feng Gao y Jianjun Zhang, "R-CUBE, a Decoupled Parallel Manipulator only with Revolute Joints", 2005, Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, pp. 467-473.
- [XI2006] Xi F., Xu Y. y Xiong G., "Design and Analysis of a Re-configurable Parallel Robot", 2006, Mechanism and Machine Theory, Vol. 41, pp. 191-211.
- [YAN2001] Ting-Li Yang, Qiong Jin, An-Xin Liu, Fang-Hua Yao y Yu-Feng Luo, "Structure synthesis of 4-DOF (3-translation and 1-rotation) parallel robot mechanisms based on the units of single-opened-chain", Septiembre 2001, DETC2001/DAC-21152, ASME 2001 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Pittsburg, PA.
- [YI2002] Byung-Ju Yi, Heung Yeol Na, Jae Hoon Lee, Yeh-Sun Hong, Sang-Rok Oh, Il Hong Suh y Whee Kuk Kim, "Design of a Parallel-Type Gripper Mechanism", Julio 2002, The International Journal of Robotics Research, Vol. 21, No. 7, pp. 661-676.
- [YJI2004] Yan Jin, I-Ming Chen y Guilin Yang, "Structure Synthesis and Singularity Analysis of a Parallel Manipulator Based on Selective Actuation", Enero 2004, IEEE International Conference on Robotics and Automation, Singapore.
- [YJI2007] Yan Jin, I-Ming Chen y Guilin Yang, "Structure Synthesis of 6-DOF 3-3 Decoupled Parallel Manipulators", Junio 2007, IFToMM World Congress, Besançon.

-
- [YJI2009] Yan Jin, I-Ming Chen y Guilin Yang, "Kinematic Design of a Family of 6-DOF Partially Decoupled Parallel Manipulators", 2009, Mechanism and Machine Theory, Vol. 44, pp. 912-922.
- [YLI2006] Y. Li y Q. Xu, "Kinematic Analysis and Design of a New 3-DOF Translational Parallel Manipulator", Julio 2006, Journal of Mechanical Design, Vol. 128, pp. 729-737.
- [YLI2009] Yangmin Li y Qingsong Xu, "Design and Analysis of a Totally Decoupled Flexure-Based XY Parallel Micromanipulator", Junio 2009, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 25, No. 3, pp. 645-657.
- [ZHA2002] T.S. Zhao, J.S. Dai y Z. Huang, "Geometric synthesis of spatial parallel manipulators with fewer than six degrees of freedom", Septiembre 2002, Institution of Mechanical Engineers, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 216, pp. 1175-1185.
- [ZLA2002] Dimiter Zlatanov, Ilian Bonev y Clément Gosselin, "Constraint Singularities as C-Space Singularities", Junio 2002, 8th International Symposium on Advances in Robot Kinematics (ARK 2002), Caldes de Malavella, España.

10. ANEXOS

10.1. ANEXO 1: INVERSA DE LA MATRIZ J_G^D DEL MP 6-SPU

En este anexo se va a determinar la inversa de la matriz Jacobiana del problema directo de velocidades, J_G^D [5.16], de la plataforma Gough-Stewart (6-SPU) estudiada en los apartados 5.1 y 5.2. El objetivo es expresar las componentes de las velocidades \vec{v}_p y $\vec{\omega}$ de la plataforma móvil en función de las velocidades de las variables de entrada \dot{l}_i . Como antecedente se puede citar el trabajo de J. Gallardo-Alvarado, J.M. Rico-Martinez y H. Orozco-Mendoza, [GAL2004], donde obtienen un algoritmo que permite realizar el análisis cinemático de la plataforma Gough-Stewart, resolviendo de forma numérica el problema de posición y el de velocidades y aceleraciones. Sin embargo, en el presente trabajo se obtienen los elementos de la matriz inversa de la matriz Jacobiana del problema directo de velocidades de forma explícita.

Primeramente se obtendrán las componentes del vector resultante del producto vectorial $\vec{d}_i \times \overline{E_i P}$.

$$\vec{d}_i \times \overline{E_i P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d_{ix} & d_{iy} & d_{iz} \\ (E_i P)_x & (E_i P)_y & (E_i P)_z \end{vmatrix} \quad [A1.1]$$

Operando se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{d}_i \times \overline{E_i P} = & (d_{iy}(E_i P)_z - d_{iz}(E_i P)_y)\vec{i} + (d_{iz}(E_i P)_x - d_{ix}(E_i P)_z)\vec{j} + \\ & (d_{ix}(E_i P)_y - d_{iy}(E_i P)_x)\vec{k} \end{aligned} \quad [A1.2]$$

A continuación se va a particionar la matriz Jacobiana, J_G^D , para calcular su inversa (ver referencia [JUN1993]). Para ello se define:

$$\mathbf{J}_G^D = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{G11}^D & \mathbf{J}_{G12}^D \\ \mathbf{J}_{G21}^D & \mathbf{J}_{G22}^D \end{bmatrix} \quad [\text{A1.3}]$$

Donde,

$$\mathbf{J}_{G11}^D = \begin{bmatrix} d_{1x} & d_{1y} & d_{1z} \\ d_{2x} & d_{2y} & d_{2z} \\ d_{3x} & d_{3y} & d_{3z} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{G21}^D = \begin{bmatrix} d_{4x} & d_{4y} & d_{4z} \\ d_{5x} & d_{5y} & d_{5z} \\ d_{6x} & d_{6y} & d_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{G12}^D =$$

$$\begin{bmatrix} d_{1y}(E_1P)_z - d_{1z}(E_1P)_y & d_{1z}(E_1P)_x - d_{1x}(E_1P)_z & d_{1x}(E_1P)_y - d_{1y}(E_1P)_x \\ d_{2y}(E_2P)_z - d_{2z}(E_2P)_y & d_{2z}(E_2P)_x - d_{2x}(E_2P)_z & d_{2x}(E_2P)_y - d_{2y}(E_2P)_x \\ d_{3y}(E_3P)_z - d_{3z}(E_3P)_y & d_{3z}(E_3P)_x - d_{3x}(E_3P)_z & d_{3x}(E_3P)_y - d_{3y}(E_3P)_x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{G22}^D =$$

$$\begin{bmatrix} d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y & d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z & d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x \\ d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y & d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z & d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x \\ d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y & d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z & d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x \end{bmatrix} [\text{A1.4}]$$

La matriz inversa del jacobiano \mathbf{J}_G^D será otra matriz particionada tal que,

$$(\mathbf{J}_G^D)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad [\text{A1.5}]$$

Donde,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{J}_{G11}^D - \mathbf{J}_{G12}^D (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{G21}^D \\ \mathbf{D} &= \mathbf{J}_{G12}^D (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} \\ \mathbf{E} &= (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{G21}^D \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} + \mathbf{E}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} \end{aligned} \right\} \quad [\text{A1.6}]$$

Las componentes de los vectores \vec{d}_i son las calculadas en el apartado 5.1 (ecuación [5.11] y siguientes),

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} -\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - \sin \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \\ -\sin \beta_1 \sin \gamma_1 \\ \sin \alpha_1 \cos \gamma_1 - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 \sin \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 - \cos \frac{\pi}{3} \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \gamma_2 + \sin \frac{\pi}{3} \sin \beta_2 \sin \gamma_2 \\ -\sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha_2 \cos \gamma_2 - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \gamma_2 - \cos \frac{\pi}{3} \sin \beta_2 \sin \gamma_2 \\ \sin \alpha_2 \cos \gamma_2 - \cos \alpha_2 \cos \beta_2 \sin \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi}{3} \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 - \cos \frac{2\pi}{3} \sin \alpha_3 \cos \beta_3 \sin \gamma_3 + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \beta_3 \sin \gamma_3 \\ -\sin \frac{2\pi}{3} \cos \alpha_3 \cos \gamma_3 - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \alpha_3 \cos \beta_3 \sin \gamma_3 - \cos \frac{2\pi}{3} \sin \beta_3 \sin \gamma_3 \\ \sin \alpha_3 \cos \gamma_3 - \cos \alpha_3 \cos \beta_3 \sin \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_4 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_4 \cos \gamma_4 + \sin \alpha_4 \cos \beta_4 \sin \gamma_4 \\ \cos \frac{\pi}{3} \sin \beta_4 \sin \gamma_4 \\ \sin \alpha_4 \cos \gamma_4 - \cos \alpha_4 \cos \beta_4 \sin \gamma_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_5 = \begin{pmatrix} -\cos \frac{4\pi}{3} \cos \alpha_5 \cos \gamma_5 - \cos \frac{4\pi}{3} \sin \alpha_5 \cos \beta_5 \sin \gamma_5 + \sin \frac{4\pi}{3} \sin \beta_5 \sin \gamma_5 \\ -\sin \frac{4\pi}{3} \cos \alpha_5 \cos \gamma_5 - \sin \frac{4\pi}{3} \sin \alpha_5 \cos \beta_5 \sin \gamma_5 - \cos \frac{4\pi}{3} \sin \beta_5 \sin \gamma_5 \\ \sin \alpha_5 \cos \gamma_5 - \cos \alpha_5 \cos \beta_5 \sin \gamma_5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d}_6 = \begin{pmatrix} -\cos \frac{5\pi}{3} \cos \alpha_6 \cos \gamma_6 - \cos \frac{5\pi}{3} \sin \alpha_6 \cos \beta_6 \sin \gamma_6 + \sin \frac{5\pi}{3} \sin \beta_6 \sin \gamma_6 \\ -\sin \frac{5\pi}{3} \cos \alpha_6 \cos \gamma_6 - \sin \frac{5\pi}{3} \sin \alpha_6 \cos \beta_6 \sin \gamma_6 - \cos \frac{5\pi}{3} \sin \beta_6 \sin \gamma_6 \\ \sin \alpha_6 \cos \gamma_6 - \cos \alpha_6 \cos \beta_6 \sin \gamma_6 \end{pmatrix}$$

En primer lugar se va a calcular $(J_{G22}^D)^{-1}$ a partir de [A1.4]. Su determinante es,

$$\begin{aligned} DET J_{G22}^D = & (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \\ & d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - \\ & d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - \\ & d_{6y}(E_6P)_x) + (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - \\ & d_{6z}(E_6P)_y) + (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - \\ & d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - \\ & d_{6z}(E_6P)_y) \end{aligned}$$

Cada uno de los términos de las matrices recogidas en este trabajo se denominará con el nombre de la propia matriz y los subíndices correspondientes a la posición que ocupa dicho término en la misma.

A continuación se obtendrán cada uno de los elementos de $(J_{G22}^D)^{-1}$:

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{11} &= \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \right. \\ &\quad \left. - (d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{12} &= \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{13} &= \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{21} &= \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \right. \\ &\quad \left. - (d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{22} &= \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{23} &= \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{31} &= \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \right. \\ &\quad \left. - (d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{32} &= \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_{G22}^D)^{-1}_{33} &= \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \right. \\ &\quad \left. - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \right) (DET J_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

Seguidamente se obtendrán los elementos de la matriz $\mathbf{D} = J_{G12}^D (J_{G22}^D)^{-1}$, como se define en las ecuaciones [A1.6].

$$\begin{aligned}
D_{11} = & (d_{1y}(E_1P)_z - d_{1z}(E_1P)_y) \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \right. \\
& d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{1z}(E_1P)_x - d_{1x}(E_1P)_z) \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - \right. \\
& (d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{1x}(E_1P)_y - \\
& d_{1y}(E_1P)_x) \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12} = & (d_{1y}(E_1P)_z - d_{1z}(E_1P)_y) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - \right. \\
& d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{1z}(E_1P)_x - d_{1x}(E_1P)_z) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - \right. \\
& (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{1x}(E_1P)_y - \\
& d_{1y}(E_1P)_x) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13} = & (d_{1y}(E_1P)_z - d_{1z}(E_1P)_y) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\
& d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{1z}(E_1P)_x - d_{1x}(E_1P)_z) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) - \right. \\
& (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{1x}(E_1P)_y - \\
& d_{1y}(E_1P)_x) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{21} = & (d_{2y}(E_2P)_z - d_{2z}(E_2P)_y) \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \right. \\
& d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{2z}(E_2P)_x - d_{2x}(E_2P)_z) \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - \right. \\
& (d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{2x}(E_2P)_y - \\
& d_{2y}(E_2P)_x) \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{22} = & (d_{2y}(E_2P)_z - d_{2z}(E_2P)_y) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - \right. \\
& d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{2z}(E_2P)_x - d_{2x}(E_2P)_z) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - \right. \\
& (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{2x}(E_2P)_y - \\
& d_{2y}(E_2P)_x) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& \left. d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{23} = & (d_{2y}(E_2P)_z - d_{2z}(E_2P)_y) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\
& d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{2z}(E_2P)_x - d_{2x}(E_2P)_z) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) - \right. \\
& (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{2x}(E_2P)_y - \\
& d_{2y}(E_2P)_x) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& \left. d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{31} = & (d_{3y}(E_3P)_z - d_{3z}(E_3P)_y) \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \right. \\
& d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{3z}(E_3P)_x - d_{3x}(E_3P)_z) \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - \right. \\
& (d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{3x}(E_3P)_y - \\
& d_{3y}(E_3P)_x) \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& \left. d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{32} = & (d_{3y}(E_3P)_z - d_{3z}(E_3P)_y) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - \right. \\
& d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{3z}(E_3P)_x - d_{3x}(E_3P)_z) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - \right. \\
& (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1} + (d_{3x}(E_3P)_y - \\
& d_{3y}(E_3P)_x) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& \left. d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{33} = & (d_{3y}(E_3P)_z - d_{3z}(E_3P)_y) \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\
& d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \Big) (DET J_{G22}^D)^{-1} + \\
& (d_{3z}(E_3P)_x - d_{3x}(E_3P)_z) \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) - \right. \\
& (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) \Big) (DET J_{G22}^D)^{-1} + (d_{3x}(E_3P)_y - \\
& d_{3y}(E_3P)_x) \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \Big) (DET J_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

A continuación se van a determinar los elementos de la matriz $\mathbf{C} = \mathbf{J}_{G11}^D - \mathbf{J}_{G12}^D (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{G21}^D$, como se define en las ecuaciones [A1.6]. Dado que $\mathbf{D} = \mathbf{J}_{G12}^D (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1}$, ecuaciones [A1.6],

$$\mathbf{C} = \mathbf{J}_{G11}^D - \mathbf{D} \mathbf{J}_{G21}^D \quad [\text{A1.7}]$$

Por tanto,

$$C_{11} = d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x})$$

$$C_{12} = d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y})$$

$$C_{13} = d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z})$$

$$C_{21} = d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})$$

$$C_{22} = d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})$$

$$C_{23} = d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})$$

$$C_{31} = d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})$$

$$C_{32} = d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})$$

$$C_{33} = d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})$$

Seguidamente se obtendrá la inversa de la matriz \mathbf{C} . Para ello es necesario calcular su determinante,

$$\begin{aligned}
DETC = & \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \right. \\
& D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + \\
& D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) + (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) + (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + \\
& D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + \\
& D_{13}d_{6z}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) \left. \right)
\end{aligned}$$

Los elementos de \mathbf{C}^{-1} serán por tanto,

$$(C^{-1})_{11} = \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{12} = \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{13} = \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{21} = \left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{22} = \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{23} = \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{31} = \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{32} = \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \right) (DETC)^{-1}$$

$$(C^{-1})_{33} = \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \right) (DETC)^{-1}$$

A continuación se calcularán los elementos de la matriz $\mathbf{E} = (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{G21}^D$, como se define en las ecuaciones [A1.6].

$$\begin{aligned} E_{11} = & \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\ & d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) d_{4x} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - \right. \\ & d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \\ & d_{6y}(E_6P)_x) \Big) d_{5x} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\ & d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \Big) d_{6x} (DETJ_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{12} = & \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\ & d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) \Big) d_{4y} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - \right. \\ & d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \\ & d_{6y}(E_6P)_x) \Big) d_{5y} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\ & d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) \Big) d_{6y} (DETJ_{G22}^D)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{13} = & \left((d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\
& d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) d_{4z}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - \right. \\
& d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6x}(E_6P)_y - \\
& d_{6y}(E_6P)_x) d_{5z}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5x}(E_5P)_y - \right. \\
& d_{5y}(E_5P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5z}(E_5P)_x - d_{5x}(E_5P)_z) d_{6z}(DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{21} = & \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) d_{4x}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - \\
& d_{6z}(E_6P)_y) d_{5x}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) d_{6x}(DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{22} = & \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) d_{4y}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - \\
& d_{6z}(E_6P)_y) d_{5y}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) d_{6y}(DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{23} = & \left((d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) d_{4z}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - \right. \\
& d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6x}(E_6P)_y - d_{6y}(E_6P)_x) - (d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{6y}(E_6P)_z - \\
& d_{6z}(E_6P)_y) d_{5z}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4x}(E_4P)_y - d_{4y}(E_4P)_x)(d_{5y}(E_5P)_z - \right. \\
& d_{5z}(E_5P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5x}(E_5P)_y - d_{5y}(E_5P)_x) d_{6z}(DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{31} = & \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) d_{4x}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - \\
& d_{6x}(E_6P)_z) d_{5x}(DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) d_{6x}(DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{32} = & \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) d_{4y} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - \\
& d_{6x}(E_6P)_z) \Big) d_{5y} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \Big) d_{6y} (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{33} = & \left((d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - d_{6x}(E_6P)_z) - (d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) \Big) d_{4z} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4z}(E_4P)_x - \right. \\
& d_{4x}(E_4P)_z)(d_{6y}(E_6P)_z - d_{6z}(E_6P)_y) - (d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{6z}(E_6P)_x - \\
& d_{6x}(E_6P)_z) \Big) d_{5z} (DETJ_{G22}^D)^{-1} + \left((d_{4y}(E_4P)_z - d_{4z}(E_4P)_y)(d_{5z}(E_5P)_x - \right. \\
& d_{5x}(E_5P)_z) - (d_{4z}(E_4P)_x - d_{4x}(E_4P)_z)(d_{5y}(E_5P)_z - d_{5z}(E_5P)_y) \Big) d_{6z} (DETJ_{G22}^D)^{-1}
\end{aligned}$$

Seguendo con los cálculos, se va a realizar el producto $-C^{-1}D$. Sus elementos son,

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{11} = & - \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \right. \\
& D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} D_{11} - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - \right. \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} D_{21} - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \right. \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + \\
& D_{13}d_{6z})) \Big) (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) (DETC)^{-1} D_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{12} = & - \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \right. \\
& D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} D_{12} - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - \right. \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} D_{22} - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \right. \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + \\
& D_{13}d_{6z})) \Big) (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) (DETC)^{-1} D_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{13} = & -\left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y}))\right)(DETC)^{-1}D_{13} \\
& - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{23} \\
& - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))\right)(DETC)^{-1}D_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{21} = & -\left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{11} \\
& - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x}))\right)(DETC)^{-1}D_{21} \\
& - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{22} = & -\left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{12} \\
& - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x}))\right)(DETC)^{-1}D_{22} \\
& - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{23} = & -\left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{13} \\
& - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x}))\right)(DETC)^{-1}D_{23} \\
& - \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))\right)(DETC)^{-1}D_{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{31} = & - \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) (d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) (d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{11} - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y})) (d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x})) (d_{3y} - \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} D_{21} - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x})) (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y})) (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{32} = & - \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) (d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) (d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{12} - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y})) (d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x})) (d_{3y} - \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} D_{22} - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x})) (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y})) (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-C^{-1}D)_{33} = & - \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) (d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) (d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{13} - \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y})) (d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x})) (d_{3y} - \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} D_{23} - \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x})) (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y})) (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} D_{33}
\end{aligned}$$

A continuación se calcularán los elementos del producto EC^{-1} ,

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{11} = & E_{11} \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \right. \\
& D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{12} \left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{13} \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + \right. \\
& D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \\
& D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{12} = & E_{11} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \\
& D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{12} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - \right. \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{13} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + \right. \\
& D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{13} = & E_{11} \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + \\
& D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{12} \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3y} - \\
& (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{13} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{21} = & E_{21} \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \right. \\
& D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{22} \left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{23} \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + \right. \\
& D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \\
& D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{22} = & E_{21} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \\
& D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{22} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - \right. \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{23} \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \right. \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{23} = & E_{21} \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + \right. \\
& D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \\
& D_{23}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{22} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - \right. \\
& (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - \\
& (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{23} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{31} = & E_{31} \left((d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \right. \\
& D_{33}d_{6z})) - (d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \\
& D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{32} \left((d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z}))(d_{3x} - \right. \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x}))(d_{3z} - \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{33} \left((d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + \right. \\
& D_{23}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) - (d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \\
& D_{23}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{32} = & E_{31} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + \right. \\
& D_{33}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{3z} - (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + \\
& D_{33}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{32} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{3z} - \right. \\
& (D_{31}d_{4z} + D_{32}d_{5z} + D_{33}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{3x} - \\
& (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{33} \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \right. \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{3x} - (D_{31}d_{4x} + D_{32}d_{5x} + D_{33}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{3y} - (D_{31}d_{4y} + D_{32}d_{5y} + D_{33}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(EC^{-1})_{33} = & E_{31} \left((d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + D_{13}d_{6y}))(d_{2z} - (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + \right. \\
& D_{23}d_{6z})) - (d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + \\
& D_{23}d_{6y})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{32} \left((d_{1z} - (D_{11}d_{4z} + D_{12}d_{5z} + D_{13}d_{6z}))(d_{2x} - \right. \\
& (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) - (d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + D_{13}d_{6x}))(d_{2z} - \\
& (D_{21}d_{4z} + D_{22}d_{5z} + D_{23}d_{6z})) \Big) (DETC)^{-1} + E_{33} \left((d_{1x} - (D_{11}d_{4x} + D_{12}d_{5x} + \right. \\
& D_{13}d_{6x}))(d_{2y} - (D_{21}d_{4y} + D_{22}d_{5y} + D_{23}d_{6y})) - (d_{1y} - (D_{11}d_{4y} + D_{12}d_{5y} + \\
& D_{13}d_{6y}))(d_{2x} - (D_{21}d_{4x} + D_{22}d_{5x} + D_{23}d_{6x})) \Big) (DETC)^{-1}
\end{aligned}$$

Finalmente se calcularán los elementos de $\mathbf{F} = (\mathbf{J}_{G22}^D)^{-1} + \mathbf{EC}^{-1}\mathbf{D}$, como se define en las ecuaciones [A1.6],

$$F_{11} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{11} + (EC^{-1})_{11}D_{11} + (EC^{-1})_{12}D_{21} + (EC^{-1})_{13}D_{31}$$

$$F_{12} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{12} + (EC^{-1})_{11}D_{12} + (EC^{-1})_{12}D_{22} + (EC^{-1})_{13}D_{32}$$

$$F_{13} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{13} + (EC^{-1})_{11}D_{13} + (EC^{-1})_{12}D_{23} + (EC^{-1})_{13}D_{33}$$

$$F_{21} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{21} + (EC^{-1})_{21}D_{11} + (EC^{-1})_{22}D_{21} + (EC^{-1})_{23}D_{31}$$

$$F_{22} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{22} + (EC^{-1})_{21}D_{12} + (EC^{-1})_{22}D_{22} + (EC^{-1})_{23}D_{32}$$

$$F_{23} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{23} + (EC^{-1})_{21}D_{13} + (EC^{-1})_{22}D_{23} + (EC^{-1})_{23}D_{33}$$

$$F_{31} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{31} + (EC^{-1})_{31}D_{11} + (EC^{-1})_{32}D_{21} + (EC^{-1})_{33}D_{31}$$

$$F_{32} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{32} + (EC^{-1})_{31}D_{12} + (EC^{-1})_{32}D_{22} + (EC^{-1})_{33}D_{32}$$

$$F_{33} = \left(J_{G22}^D \right)^{-1}_{33} + (EC^{-1})_{31}D_{13} + (EC^{-1})_{32}D_{23} + (EC^{-1})_{33}D_{33}$$

10.2. ANEXO 2: INVERSA DE LA MATRIZ J_{CPCR}^D DEL MP 3-CPCR

En este anexo se va a determinar la inversa de la matriz Jacobiana del problema directo de velocidades, J_{CPCR}^D , del MP 3-CPCR definida en el apartado 6.3. El objetivo es obtener la expresión explícita de las componentes de \vec{v}_P y $\vec{\omega}$ de la plataforma móvil en función de las variables de entrada de traslación \dot{g}_i y de rotación $\dot{\alpha}_i$. Dicha matriz Jacobiana viene recogida en la ecuación [6.22],

$$J_{CPCR}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -(D_1P)_y & (D_1P)_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (D_2P)_z & 0 & -(D_2P)_x \\ -1 & 0 & 0 & 0 & (D_3P)_z & -(D_3P)_y \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & 0 & -\cos \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_3 & -\cos \alpha_3 \end{bmatrix}$$

A continuación vamos a particionar la matriz J_{CPCR}^D para calcular su inversa, [JUN1993]. Para ello definiremos:

$$J_{CPCR}^D = \begin{bmatrix} J_{CPCR11}^D & J_{CPCR12}^D \\ J_{CPCR21}^D & J_{CPCR22}^D \end{bmatrix} \quad [A2.1]$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{CPCR11}^D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{CPCR12}^D = \begin{bmatrix} -(D_1P)_y & (D_1P)_x & 0 \\ (D_2P)_z & 0 & -(D_2P)_x \\ 0 & (D_3P)_z & -(D_3P)_y \end{bmatrix} \\
\mathbf{J}_{CPCR21}^D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{CPCR22}^D = \begin{bmatrix} \sin \alpha_1 & -\cos \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & -\cos \alpha_2 \\ 0 & -\sin \alpha_3 & -\cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad [A2.2]
\end{aligned}$$

La matriz inversa de \mathbf{J}_{CPCR}^D será otra matriz particionada tal que,

$$\mathbf{J}_{CPCR}^{D^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} & -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} \\ -\mathbf{E}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad [A2.3]$$

Donde,

$$\left. \begin{aligned}
\mathbf{C} &= \mathbf{J}_{CPCR11}^D - \mathbf{J}_{CPCR12}^D (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{CPCR21}^D \\
\mathbf{D} &= \mathbf{J}_{CPCR12}^D (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} \\
\mathbf{E} &= (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} \mathbf{J}_{CPCR21}^D \\
\mathbf{F} &= (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} + \mathbf{E}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}
\end{aligned} \right\} \quad [A2.4]$$

En primer lugar se obtendrá $(\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1}$. Su determinante es,

$$DET \mathbf{J}_{CPCR22}^D = \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \quad [A2.5]$$

La matriz inversa de \mathbf{J}_{CPCR22}^D es,

$$(\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} = \frac{1}{DET \mathbf{J}_{CPCR22}^D} \begin{bmatrix} -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ -\sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 & -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{bmatrix} \quad [A2.6]$$

Sustituyendo en [A2.4] los valores recogidos en [A2.2] y [A2.5] se obtiene,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{J}_{CPCR12}^D (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = (\mathbf{J}_{CPCR22}^D)^{-1} \quad [A2.7]$$

La inversa de \mathbf{C} es,

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [A2.8]$$

La matriz \mathbf{D} , [A2.4], tiene los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - (D_1P)_x \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \\
D_{12} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - (D_1P)_x \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \\
D_{13} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - (D_1P)_x \sin \alpha_1 \cos \alpha_2) \\
D_{21} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + (D_2P)_x \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\
D_{22} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + (D_2P)_x \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \\
D_{23} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (D_2P)_x \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) \\
D_{31} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + (D_3P)_y \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\
D_{32} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + (D_3P)_y \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \\
D_{33} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + (D_3P)_y \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)
\end{aligned}$$

El producto $-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$ de la ecuación [A2.3] se le va denominar como matriz \mathbf{G} ,

$$\mathbf{G} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} & D_{33} \\ -D_{21} & -D_{22} & -D_{23} \\ -D_{11} & -D_{12} & -D_{13} \end{bmatrix} \quad [\text{A2.9}]$$

Las componentes de la matriz \mathbf{G} son:

$$\begin{aligned}
G_{11} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + (D_3P)_y \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\
G_{12} &= -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + (D_3P)_y \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \\
G_{13} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_3P)_z \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + (D_3P)_y \cos \alpha_1 \sin \alpha_2) \\
G_{21} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 + (D_2P)_x \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\
G_{22} &= \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + (D_2P)_x \sin \alpha_1 \sin \alpha_3)
\end{aligned}$$

$$G_{23} = -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_2P)_z \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (D_2P)_x \cos \alpha_1 \sin \alpha_2)$$

$$G_{31} = -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 - (D_1P)_x \sin \alpha_2 \cos \alpha_3)$$

$$G_{32} = -\frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - (D_1P)_x \sin \alpha_1 \cos \alpha_3)$$

$$G_{33} = \frac{1}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} ((D_1P)_y \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - (D_1P)_x \sin \alpha_1 \cos \alpha_2)$$

Finalmente, la inversa de la matriz Jacobiana J_{CPCR}^D es:

$$J_{CPCR}^D)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ 0 & 1 & 0 & G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ 1 & 0 & 0 & G_{31} & G_{32} & G_{33} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\cos \alpha_2 \sin \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{-\cos \alpha_1 \cos \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\sin \alpha_2 \cos \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{-\sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_3}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} & \frac{-\cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\text{DET}J_{CPCR22}^D} \end{bmatrix} \quad [\text{A2.10}]$$