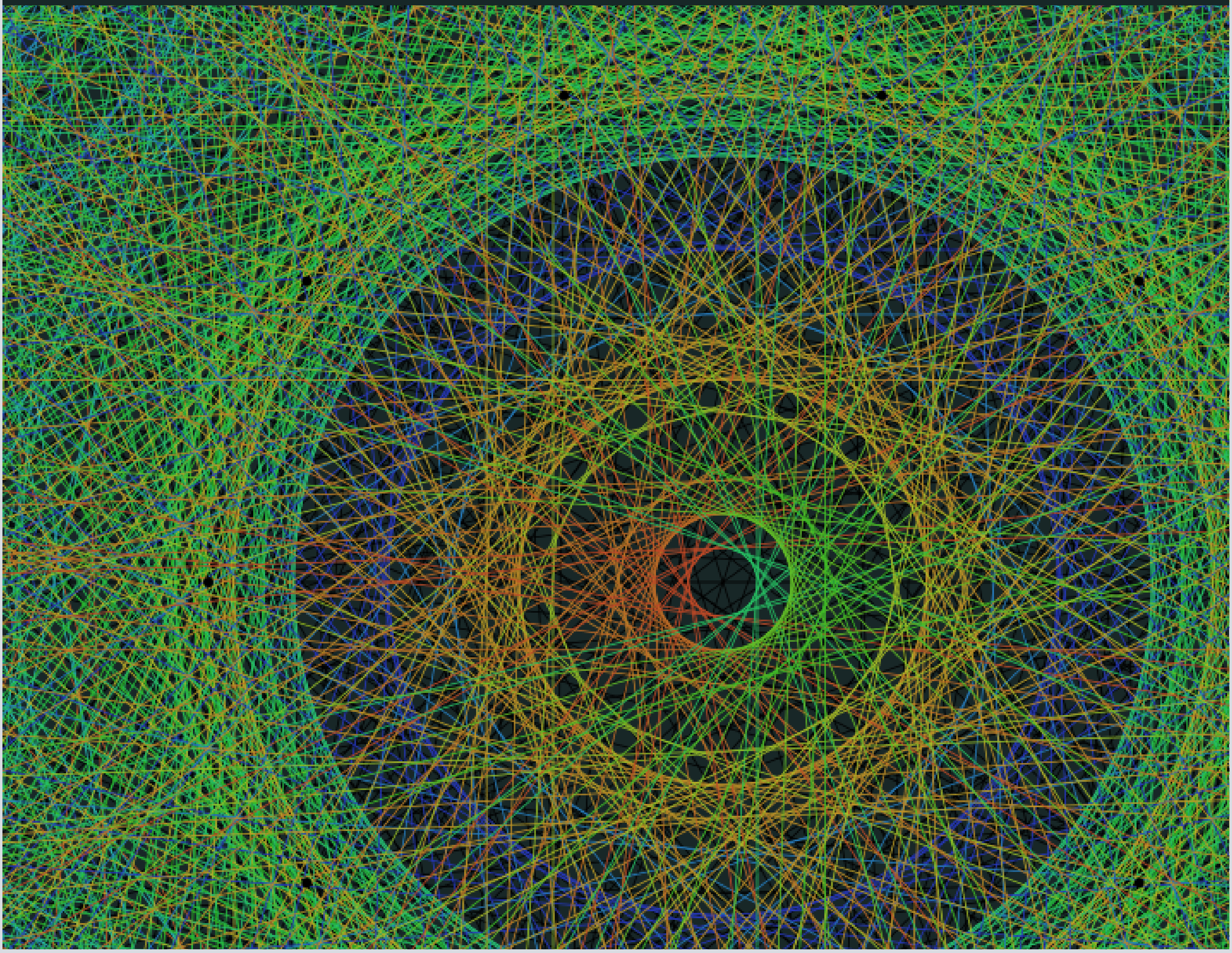
MATEMATIKA DISKRETUA

María Merino Maestre



UNIBERTSITATEKO ESKULIBURUAK
MANUALES UNIVERSITARIOS

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMATIKA DISKRETUA

María Merino Maestre

María Merino Maestre
Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa
Zientzia eta Teknologia Fakultatea
maria.merino@ehu.es
http://www.ehu.es/mae/html/prof/Maria.html

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Merino Maestre, María

Matematika diskretua [Recurso electrónico] / María Merino Maestre. – Datos. - Bilbao : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2016]. – 1 recurso en línea : PDF.
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-9082-438-2.

1. Análisis combinatorio. 2. Grafos, Teoría de.
519.1(0.034)

UPV/EHUko Euskararen Arloko Errektoreordetzak sustatutako argitalpena

ISBN: 978-84-9082-438-2

Jesús de la Cal Aguadoren omenez

Estos textos quieren contribuir humildemente a mantener vivo el recuerdo del catedráico Jesús de la Cal Aguado, tristemente fallecido el 25 de agosto de 2011.

En el curso 2010-11 comenzaron los nuevos planes de titulación en la Facultad de Ciencia y Tecnología de la UPV/EHU y por tanto, un curso después nos enfrentamos al reto de impartir por primera vez la asignatura *Matemática Discreta* de segundo curso del Grado en Matemáticas. Las últimas conversaciones con Jesús y los apuntes de la asignatura *Combinatoria* del plan académico anterior fueron realmente útiles para facilitar dicho trabajo.

Por medio de estos textos queremos rendirle un pequeño homenaje. Jesús fue sin duda un profesor e investigador sobresaliente, pero además fue una persona cercana, generosa, muy humana y con un gran sentido del humor. Por lo que sin duda, ha dejado un recuerdo imborrable a quienes tuvimos la suerte de poder conocerle.

Ikasmaterial honen bidez, apalki lagundu nahi dugu, Jesús de la Cal Aguado katedradunaren, tamalez 2011ko abuztuaren 25ean zendua, oroimenari bizirik eustera.

2010-11 ikasturtean, UPV/EHUko Zientzia eta Teknologia Fakultateko titulazio plan berriak hasi ziren. Beraz, ikasturte bete bat geroago, Matematika Graduko bigarren mailako *Matematika Diskretua* izeneko irakasgaia lehenengo aldiz emateko erronka izan genuen. Lana errazteko izugarri baliagarriak izan ziren Jesusekin izandako azken elkarrizketak eta aurreko irakaskuntza-planaren *Konbinatoria* izeneko irakasgaiaren apunteak.

Ikasmaterial honen bidez, berari omenaldi txiki bat egin nahi diogu. Jesús, irakasle eta ikertzaile bikaina izateaz gain, oso pertsona hurbila, eskuzabala, bihozbera eta umore-sen handikoa izan zen. Hori dela eta, zalantza barik, oroigarri ezabaezina utzi digu bera ezagutzeko zortea izan genuen guztioi.

Larraitz Aranburu, Silvia Marcaida, María Merino eta Eduardo Sáinz de la Maza

Matematika Diskretuaren irakasleak

Aurkibidea

Irudien zerrenda

Taulen zerrenda

Hitzaurrea

Ikasmaterial honen bidez, Jesús de la Cal Aguado katedradunari omenaldi txiki bat egin nahi diot. Matematikako ikasketetako 3. mailan ezagutu nuen Jesús, Probabilitate Kalkuluko irakasle moduan, eta 4. mailan, Probabilitate-Teoria hautazko irakasgaia hartzea erabaki nuenean. Esan beharra daukat, irakasle hobezina izan zela eta hein handian berari esker hautatu nuen tituluaren espezialitatean. Geroago, tesia defendatu nuenean, nire epaimahaiaren zuzendaria izateko ohorea izan nuen, eta, 2002tik aurrera, sail berean lankide izateko aukera izan nuen; han, beraren ikerkuntza-mailaz jabetu ahal izan nintzen. 2012ko maiatzaren 2an, Fakultateak bere oroimenerako ekitaldi bat egin zuen, eta haren izena duen plaka bat jarri zen informatikako AI6 gelan.

2010-11 ikasturtean, Matematikako titulazio berria hasi zen Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Matematika Diskretua 2. mailako nahitaezko irakasgaia da eta 6 kreditu ECTS ditu. Irakasgai horren helburuak honako hauek dira: zerrendatze-konbinatoriaren teknika nagusiak aurkeztea, esanahi konbinatorioa duten zenbaki-familia garrantzitsuenak ikastea eta grafoak eta haien aplikazioak erakustea.

Ikasleak lortu behar dituen gaitasun espezifikoak honako hauek dira:

- Funtsezko frogapen matematikoen motak eta problemen ebazpen-teknikak (behaketa-aierua-frogapena) ezagutzea.
- Multzo-teoriaren oinarrizko osagaiak ezagutzea eta erabiltzea.
- Problema konbinatorioak ebazten jakitea, oinarrizko teknikak, funtzio sortzaileak eta errepikapenak erabiliz.
- Identitate konbinatorioak eta esanahi konbinatorioa duten zenbaki-familia garrantzitsuenak ezagutzea.
- Grafo teoriaren oinarrizko kontzeptuak, teknikak eta emaitzak ezagutzea eta haren aplikazio askotarikoetako batzuez jabetzea.

Ikasmateriala hiru ataletan banatuta dago; lehenengoan, Konbinatoria arloa agertzen da, eta lau kapitulu ditu; bigarrenean, Grafo-Teoria azaltzen da; hirugarrenean, hamabi ariketa-zerrenden zenbakizko emaitzak eta zenbait problemaren garapenak agertzen dira, aipatzekoa da ariketa batzuk bibliografiako liburuetatik aterata daudela; gomendatutako bibliografia eta estekak amaieran kontsulta daitezke.

Lehenengo atala: KONBINATORIA

1. gaia: Oinarrizko konbinatoria. Kapitulu horretan, oinarrizko baliabideak konbinazio arrazoibidean, partekotasun-baztertze printzipioa (inklusio-esklusio printzipioa) eta usategiaren printzipioa lantzen dira, besteak beste. Lau ariketa-zerrenda agertzen dira: lur- eta sabai- funtzioei buruzkoak, oinarrizko problemei buruzko bi zerrenda eta olinpiada matematikoetako problema batzuk, ikusi [12].

2. gaia: Konbinazio-identitateak. Koefiziente binomialak eta multinomialak, binomioaren eta multinomioaren formulak eta erlazionatutako identitateak aurkeztea da gai horren helburua. Hiru ariketa-zerrenda agertzen dira: zenbaki konbinatorioak, Newtonen binomioa eta koefiziente multinomialak lantzeko problemak.

3. gaia: Funtzio sortzaileak eta errepikapenak. Zenbakizko segida baten funtzio sortzailea, konbinazio-problemen erabilerak, errepikapenak eta konbinazio-problemak, errepikapenak eta funtzio sortzaileak eta osagai orokorra lortzean datza gaia. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrenda agertzen da.

4. gaia: Zenbait zenbaki-familia garrantzitsu. Fibonacciren, Catalanen, Bellen eta Stirlingen zenbakiak azaltzeaz gain, zenbaki arrunten eta multzoen partiketak agertzen dira. Hiru ariketa-zerrenda agertzen dira: Fibonacciren zenbakiak, zenbaki-partiketak eta Stirlingen eta Catalanen zenbakien problemak..

Bigarren atala: GRAFO-TEORIA

5. gaia: Grafo-teoria. Azken kapituluaren edukiak oinarrizko kontzeptuak, bideak, zuhaitzak, planotasuna eta koloratzea dira. Grafo-teoriaren ariketa-zerrenda gehitzen da.

Hirugarren atala: ARIKETAK

A eranskina: Hamabi ariketa-zerrendetako problema batzuen ebazpenak azaltzen dira; guztira, gai guztietako berrogei ariketa inguru garatzen dira.

B eranskina: Bost gaietako ariketa guztien zenbakizko soluzioak agertzen dira; ehun ariketa baino gehiago dira.

Azkenik, eskerrak eman nahi dizkiet UPV/EHUko Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboaren saileko Matematika Diskretuko irakasleei, irakasgaia koordinatzeko giro onagatik; Agueda Madozi eta Amaia Zugadiri, bere gaztelaniazko Konbinatoriako apunteak uzteagatik, eta, Euskara eta Eleaniztasuneko Errektoreordetzari, emandako laguntzagatik ikasmaterialgintzako proiektu honen hizkuntza egokitzeko.

Edozein akats egilearen ardura da, zuzenketak eta komentarioak haren posta eletronikoaren bidez helaraztea eskertuko da.

María Merino Maestre

Leioan, 2015eko uztailean.

KONBINATORIA

Sarrera

(Jesús de la Cal Aguado)

1995-96 ikasturteaz geroztik, Matematika lizentziako plan berri bat hasi zen UPV/EHUko Zientzia eta Teknologia Fakultatean. Irakaskuntza plan horretan, Jesús de la Cal Aguadok *Combinatoria* irakasgaia eman zuen hainbat urtetan zehar, 1997-98 eta 2010-11 ikasturteen artean, hain zuzen. Konbinatoria lehen zikloko eta 7.5 kredituko hautazko irakasgaia zen, 21 gaitan antolatua. Jarraian, aurkeztuko dugu berak bere ikasleentzat prestatutako sarrera.

¿De qué trata?

Los problemas de los que se ocupa la Combinatoria son problemas de recuento. ¿De cuántas maneras se puede realizar tal tarea? ¿Cuántos objetos hay que tengan tales y cuales características? Usando una formulación un poco abstracta: se trata de encontrar el número de elementos de un conjunto finito definido por comprensión, y hacer, si es posible, un listado de tales elementos.

Zertan datza?

Konbinatoriak lantzen dituen problemak zenbatzeari lotuta daude. Zenbat eratara egin daiteke zeregin bat? Zenbat objektu daude horrelako edo halako ezaugarriekin? Formulazio bat abstraktuxeagoa erabiliz: ulermenaren bidez definitutako multzo finitu baten elementu kopurua aurkitzean datza, eta posible bada, elementu horien zerrenda egitean datza.

¿Puede mencionar algunos ejemplos más concretos?

¿De cuántas maneras se pueden colocar 20 *bolas distinguibles en* 10 *cajas numeradas, de forma que ninguna caja quede vacía? ¿Cuántas sucesiones de* 15 *términos se pueden formar con ceros y unos, de forma que no haya dos ceros seguidos? ¿Cuántas soluciones en números enteros no negativos tiene la ecuación* $x_1 + \ldots + x_{10} = 35$*? ¿Cuántas soluciones tiene esa misma ecuación, si las variables solo pueden tomar valores enteros comprendidos ente* 1 *y* 6*? ¿Cuántas regiones determinan en el plano* 19 *rectas que se cortan dos a dos, pero no hay tres que pasen por el mismo punto? ¿En cuántos ceros termina el número* 1000!*? ¿Cuántas particiones distintas admite un conjunto de* 30 *e-*

Adibide zehatzagoren bat aipa dezakezu?

Zenbat eratara koka daitezke 10 zenbakidun kutxatan 20 bola bereizgarri, kutxa hutsik gera ez dadin? Zero eta bat zenbakiak erabiliz, 15 elementudun zenbat segida sor daitezke, bi zero jarraian egon ez daitezen? Zenbaki ez-negatiboen zenbat soluzio ditu $x_1+\ldots+x_{10} = 35$ ekuazioak? Zenbat soluzio ditu aurreko ekuazioak baldin eta aldagaiek 1en eta 6ren arteko zenbaki osoak izan behar badute? Zenbat eskualde osatzen dituzte binaka moztutako 19 zuzenek, hiru leku beretik ez pasatuz? Zenbat zerotan amaitzen da 1000! zenbakia? 30 elementudun multzo baten zenbat partiketa egin daitezke? Zenbat eratara deskonposa daiteke 50 zenbakia zenbaki arrunten batura moduan? Dantzaldi batera 20 senar-

lementos? ¿De cuántas maneras se puede descomponer el número 50 *en suma de números naturales? En un baile, al que asisten* 20 *matrimonios, ¿de cuántas maneras se puede emparejar, para bailar, a los hombres con las mujeres, de forma que ninguno de los hombres baile con su propia esposa? Y un largo etcétera. Y, naturalmente, están también las correspondientes generalizaciones que resultan al sustituir los números concretos* $(10, 20, 19)$ *por cantidades abstractas* (m, n, k)*.*

emazte joan dira, zenbat eratara pareka daitezke gizonak emakumeekin, gizon bat bera ere bere emaztearekin ez egoteko? Eta abar luze bat. Eta, noski, $(10, 20, 19)$ zenbakiak ordezkatzerakoan
(m, n, k) kantitate abstraktuen bidez sortzen diren orokorpenak.

¿Dónde surgen tales problemas?

Por todas partes. Lo que resulta difícil es señalar algún área de la vida práctica o del ámbito científico, donde no afloren de manera natural problemas o cuestiones de tipo combinatorio, ya sean sencillos o complicados. Por supuesto, dentro de las matemáticas mismas, surgen a cada paso.

Non sortzen dira problema horiek?

Edonon. Zaila dena zera da, eguneroko bizitzan edo arlo zientifikoan konbinatoria motako problemak edo galderak, bai sinpleak bai konplexuak, era naturalean azaltzen ez diren lekuren bat aipatzea. Matematikan bertan, etengabean agertzen dira, noski.

¿Se refiere al Cálculo de Probabilidades?

Es cierto que se suele asociar la Combinatoria con el Cálculo de Probabilidades, por aquello de que muchos problemas de esta materia se reducen a recuentos de casos favorables y casos posibles. Tal asociación se ve reforzada por el hecho de que, en el Bachillerato, ambas materias se enseñan juntas (cuando se enseñan, pero ésta es otra historia). Podría parecer, entonces, que la Combinatoria no es más que una disciplina auxiliar del Cálculo de Probabilidades. Nada más lejos de la realidad. Y no solo porque recientemente se esté produciendo el fenómeno, en apariencia bastante paradójico, de que se estén empleando métodos probabilísticos para investigar problemas combinatorios. Es que no se puede olvidar el enorme papel de la Combinatoria en multitud de problemas genuinamente matemáticos relativos a números naturales, configuraciones topológico-geométricas (grafos, poliedros), grupos finitos, criptografía, computación, etc. Todo esto ha hecho de la Combinatoria lo que actualmente es.

Probabilitate-Kalkuluari buruz ari zara?

Egia da Konbinatoria Probabilitate-Kalkuluarekin erlazionatu ohi dela, irakasgai horren problema asko aldeko emaitzen kopurua eta emaitza posibleen zenbaketari lotuta daude eta. Erlazio hori sendoagoa da, Batxilergoan bi arloak elkarrekin irakasten direlako (irakasten direnean, baina hori beste kontu bat da). Orduan, pentsa zitekeen Konbinatoria Probabilitate-Kalkuluaren gai laguntzailea besterik ez dela. Errealitatetik urrunago ezin. Eta ez bakarrik orain dela gutxi itxuraz nahiko paradoxikoa den fenomenoa hau gertatzen ari delako; konbinatoriazko problemak ikertzeko metodo probabilistikoak erabiltzen ari dira. Ezin da ahaztu honako arlo hauekin lotutako problema matematikoetan Konbinatoriako itzelezko eginkizuna duela: zenbaki arruntak, konfigurazio topologiko-geometrikoak (grafoak, poliedroak), talde finituak, kriptografia, konputazioari lotutakoak. Horrek guztiak gaurko Konbinatoria eraldatu du.

Ya que estamos aquí, ¿cuál es la situación relativa de la Combinatoria dentro del conjunto de las matemáticas, y de sus grandes ramas: Análisis, Álgebra, Geometría, etc.?

Yo suelo comparar las matemáticas con una gran ciudad en la que se pueden distinguir barriadas, edificios, monumentos, parques, etc., que están interconectados por una compleja red de callejuelas, calles, paseos y avenidas. En esta imagen, en la que las grandes ramas corresponderían a las grandes barriadas (sin que se sepa muy bien dónde acaba una y empieza la otra), la Combinatoria sería una parte del Casco Viejo. Está ahí desde el principio, formando parte del núcleo originario. Pero la imagen no es estática. Con el transcurrir del tiempo, el aspecto de la ciudad cambia cuando surgen nuevas urbanizaciones, y cuando zonas ya presentes adquieren renovada pujanza o, por el contrario, entran en ruinosa decadencia y son finalmente demolidas para ser sustituidas por nuevas construcciones. Pues bien, la Combinatoria es uno de esos campos que, habiendo presentado históricamente un aspecto modesto, oscuro y subordinado, se está destacando desde hace unas décadas por su vigorosa modernización y excepcional vitalidad.

¿En qué se nota? ¿Y a qué se debe?

Se nota, sobre todo, en la cantidad y calidad de la investigación actual sobre temas combinatorios, en la existencia de escuelas muy potentes, como la de Cambridge (inspirada por el genio de Gian-Carlo Rota), en el número de excelentes libros publicados por especialista de alto nivel, y en la presencia, cada vez más frecuente, de asignaturas de Combinatoria en los curricula de estudios superiores de Matemáticas, Informática, etc. Las causas son seguramente muy diversas, pero sospecho que una de las principales es el papel que juega en el desarrollo de las tecnologías digitales y de la computación, y es patente la tremenda importancia que tienen tales tecnologías en el mundo moderno.

Hemen gaudenez, zein da Konbinatoriaren egoera erlatiboa Matematikako arloan eta, bereiziki haren adar nagusien artean: Analisia, Aljebra, Geometria eta abar?

Matematika hiri handi batekin alderatu ohi dut, non auzoak, erakinak, monumentuak, parkeak eta abar bereizten baitira eta kalezuloak, kaleak, pasealekuak eta etorbideen sare konplexu baten bidez elkarri lotuta baitaude. Irudi horretan, non adar nagusiak auzo handiei esleitzen baitzaie (oso ondo jakin gabe non amaitzen den bat eta non hasten den bestea), Konbinatoria Alde Zaharreko atal bat litzateke. Hasieratik dago hor, jatorrizko erdigunetik parte izanik. Baina irudia ez dago geldirik. Denbora pasa den neurrian, hiriaren itxura aldatuz doa, urbanizazio berriak sortzen diren heinean, eta jadanik existitzen diren gune batzuek indar berriak lortzen dituzte edo, alderantziz, gainbehera hondagarrian jasaten dute eta azkenean, lurreratzen dira erakin berriekin bidez ordezkatzeko. Konbinatoriak, historikoki tankera apala, iluna eta menderatua azaldu arren, orain dela hamarkada batzuk berritze kementsua eta bizkortasuna aparta jasan ditu.

Zertan susmatzen da? Zer dela eta?

Batez ere gaur egungo konbinatoriako gaiei buruzko ikerkuntzaren kalitatearengatik eta kantiteagatik nabaritzen da; garrantzia handiko unibertsitateak badaude, adibidez Cambridgekoa (Gian-Carlo Rota talentuak inspiratua); badago maila handiko espezialistek argitaratutako liburu bikain asko, eta gero eta maizago agertzen dira Matematikako, eta Informatikako, goi-mailako ikasketen curriculumean Konbinatoriako irakasgaiak. Segur aski, kausak oso desberdinak izango dira, baina susmatzen dut nagusienetariko bat konputazio eta teknologia digitalen arloei lotuta dagoela, eta nabaria da gaur egun teknologia horiek garrantzi handia dutela.

Volvamos a la asignatura que nos ocupa. ¿Cómo es y cómo se desarrolla?

Se trata de un curso breve (un cuatrimestre, a razón de cuatro horas por semana) e introductorio. Se empieza prácticamente de cero, asentando los recursos básicos del razonamiento combinatorio a través de ejemplos y problemas concretos y sencillos. Progresivamente se incrementa la complejidad de los problemas y se introducen recursos más técnicos, como las funciones generatrices y las recurrencias. A lo largo del camino aparecen números especiales, números que cuentan algo, como los números combinatorios, los de Fibonacci, los de Catalan, etc., y se exploran las relaciones entre ellos, que se expresan a través de fórmulas o identidades.

Itzul gaitezen irakasgaiaren ardurara. Nolakoa da eta nola garatuko da?

Ikastaro labur bat da (lauhileko batekoa, astean 4 ordukoa), sarrera modukoa. Gutxigorabehera hutsetik hasita, arrazonamendu konbinatorioaren oinarrizko baliabideak finkatuko dira, adibide eta problema konkretu eta sinpleen bidez. Problemen zailtasuna mailaka handitze da eta baliabide teknikoagoak sartzen dira, funtzio sortzaileak eta errepikapenak, besteak beste. Bidetik zehar, zenbaki bereziak agertzen dira, zerbait kontatzeko zenbakiak, esate baterako, zenbaki konbinatorioak, Fibonaccirenak, Catalanenak, eta abar, eta haien arteko erlazioak lantzen dira, formula edo identitatearen bidez adieraziz.

¿Hay muchos teoremas?

Como dice Halmos en uno de sus escritos, un teorema es una idea matemática que, por ser de uso o aplicación frecuente, merece ser destacada y retenida en la memoria. Ideas de éstas hay desde luego unas cuantas en la asignatura, aunque bastante menos abstractas que las de otras partes de las matemáticas. En todo caso, el material no está organizado como una sucesión rígida e implacable de definiciones y teoremas, sino de una forma más flexible, casi como si de una ciencia experimental se tratara, haciendo de la resolución de problemas el elemento clave del aprendizaje y del desarrollo de los demás aspectos formativos.

Teorema asko daude?

Halmosek bere idazki batean esaten duenez, teorema bat ideia matematiko bat da, maizko baliatze edo erabilerakoa izateagatik buruan gorde eta azpimarratzekoa dena. Noski, mota horretako hainbat ideia daude irakasgaian, nahiz eta matematikako beste atal batzuekiko hain abstraktuak ez izan. Edozein kasutan, materiala ez dago antolatuta definizio eta teoremen segida zurrun eta bihozgabe baten moduan, baizik eta era malguago batean, ia-ia zientzia esperimentala izango balitz moduan, eta, hala, problemen ebazpena da ikasketa-prozesurako eta gainontzeko prestakuntzazko aldeen gakoa.

¿Cuáles son esos aspectos formativos?

Es un asignatura muy apropiada para desarrollar facetas fundamentales del pensamiento matemático: intuición y creatividad en el abordaje de problemas, rigor en la deducción, experimentación con casos particulares, percepción de ideas generales bajo un ropaje concreto ('the best is the general embodied in the concrete', decía Feller, y no pretendía hacer un eslogan antimilitarista), manipulación inteligente de

Zein dira prestakuntzazko alde horiek?

Irakasgai hau pentsamendu matematikoko funtsezko aldeak garatzeko oso egokia da: problemei heltzeko behar den intuizioa eta sormena; ondorioztatzeko zorroztasun: saiakuntza kasu bereziekin, jantzi zehatz baten azpiko ideia orokorrak hautematea (*'the best is the general embodied in the concrete'*, esaten zuen Fellerrek, eta ez zuen nahi eslogan antimilitarista egin nahi); formula eta adierazpen matem-

fórmulas y expresiones matemáticas, etc. Desde el principio, el estudiante tiene muy claro que tan importante o más que el resultado de un problema es el método con el que ha sido alcanzado, y que puede haber varios métodos, y que esto es muy interesante, porque cada método ilumina el problema desde un ángulo distinto. Y que si este método es más rápido y directo, ese otro permite ver la solución de un problema más general, o que existe una estrecha e inesperada relación entre dos problemas que parecían no tener nada que ver el uno con el otro. Y que, en esta búsqueda y experimentación con distintos métodos, puede y debe poner en juego todos los recursos y herramientas que tenga a mano o sea capaz de inventar.

atikoak modu adimenduntsuan erabiltzea, eta abar. Hasieratik, ikasleak argi du problema baten soluzioa bezain garrantzitsu edo garrantzitsuagoa dela lortzeko erabilitako metodoa, eta hainbat metodo egon daitezke, eta hori oso interesgarria da, metodo bakoitzak ikuspegi desberdin batetik argitzen baitu problema. Metodo bat arinagoa eta zuzenagoa izan daiteke; beste batek problema orokorrago baten soluzioa ikusteko aukera ematen du, edo bi problemaren artean estua eta ustekabeko erlazioa dago batak bestearekin zerikusirik ez omen zutenean. Eta bilaketa eta saiakera horietan metodo diferente batzuk erabiliz, eskura dituen edo asma ditzakeen baliabide eta tresna guztiez baliatu behar da.

¿Qué conocimientos previos se requieren del alumno?

Los que proporcionan los dos primeros cursos de la licenciatura son, desde luego, más que suficientes. Pero es muy importante que el estudiante tenga iniciativa para buscar y estudiar por su cuenta, sin esperar a cada paso a que le señalen el camino. Al comenzar el curso cada alumno recibe un material que contiene, entre otras cosas, más de doscientos problemas, junto con el consejo de que los trabaje intensamente, y no se limite a coleccionar las soluciones como si de cromos se tratara. También se le anima a recurrir a la Biblioteca o a Internet en búsqueda de nuevos materiales o ideas. Siempre se aprende algo viendo lo que han pensado los demás, pero solo se aprende de verdad cuando uno piensa por sí mismo, detecta y corrige sus propios errores y supera los bloqueos mentales que le impiden avanzar.

También es importante que el estudiante tenga y desarrolle un cierto gusto estético por la armonía de las matemáticas.

Zein jakintza izan behar ditu ikasleak aldez aurretik?

Lizentzian emandako lehenengo bi mailak nahikoa eta sobera dira. Baina garrantzitsua da ikaslea bere kabuz bilatzeko eta ikasteko ekimena izatea, pauso bakoitzean zer bide seinalatzen zaio itxaron gabe. Ikastaroa hasi bezain pronto, ikasleak jasotzen duen materialak, besteak beste, berrehun problema baino gehiago ditu, eta lantzeko biziki aholkatzen zaio, eta ez bakarrik soluzioak biltzeko, kromoak izango balira bezala. Gainera, material edo ideia berrien bila liburutegira edo internetera joatea sustatzen da. Beti ikasten da zer edo zer besteek pentsatu dutena ikusiz, baina soilik ikasten da benetan gutako bakoitzak gure kabuz pentsatzen dugunean, gure erroreak aurkitu eta zuzentzen ditugunean eta aurreratzeko ditugun buruko blokeoak gainditzen ditugunean.

Ikasleak matematikaren harmoniaren aldeko gozamen estetikoa izatea eta garatzea ere premia handikoa da.

Háblenos de la bibliografía recomendada.

Desgraciadamente no conozco buenos libros en

Hitz egin dezagun gomendatutako bibliografiaz.

castellano que se adapten a los objetivos de la asignatura, aunque confío en que pronto se ponga remedio a esta situación. El programa está inspirado, sobre todo, en el libro de Cohen, que me parece excelente, pero tanto éste como el de Vilenkin (también en inglés, y muy divertido, por cierto) están descatalogados desde hace tiempo. No obstante, los ejemplares que tengo en mi biblioteca particular están permamentemente a disposición de los alumnos que quieran consultarlos. Los libros de Marcus y Balakrishnan son más recientes y también muy útiles para que el alumno estudie por su cuenta. El libro de Wilf, como el de Bose y Manvel, contiene materiales más avanzados. Finalmente, los dos[1] *libros restantes no son específicos de Combinatoria, pero contienen capítulos sobre la misma, además de otras cosas interesantes. El de Graham, Knuth y Patashnik me parece especialmente recomendable por su contenido y sus aciertos pedagógicos.*

Zoritzarrez ez dut ezagutzen gaztelaniazko liburu onik irakasgaiaren helburuetarako egokituta, baina espero dut egoera hori laster konpontzea. Egitaraua, batez ere, Cohenen liburuan dago inspiratuta, bikaina iruditzen baizait, baina hori zein Vilenkinena (ingelesez hori ere, eta bide batez, oso dibertigarria) katalogotik kanpo daude orain dela asko. Hala ere, nire liburutegian ditudan aleak kontsultatu nahi duten ikasleen eskueran daude beti. Marcusen eta Balakrishnanen liburuak berriagoak dira eta oso erabilgarriak ere, bere kabuz ikasi nahi duenarentzat. Wilfen liburuak, Boserenak eta Manvelenak bezala, gai aurreratuagoak dituzte. Azkenik, beste bi[1] liburuak ez dira Konbinatoriarako espezifikoak, baina horri buruzko kapituluak dituzte, eta beste zenbait gauza interesgarri. Graham, Knuth eta Patashnikena bereziki gomendagarria iruditzen zait edukia eta egokitasun pedagogikoengatik.

¿Hay prácticas de ordenador?

Como prácticas programadas, no. Pero aquellos alumnos que manejen `Mathematica` *o* `Maple`*, por ejemplo, pueden aprovechar las utilidades de estos programas para hacer interesantes exploraciones sobre problemas combinatorios relativos a particiones de conjuntos, de números, etc.*

Ordenagailu-praktikarik ba al dago?

Eratutako praktikarik ez. Baina, adibidez `Mathematica` edo `Maple`, erabiltzen dutenek programa horien abantailei onura atera diezaiekete esplorazio interesgarriak egiteko, multzoen edo zenbakien partiketei lotutako problema konbinatorioen inguruan, besteak beste.

¿Cómo se evaluá al alumno?

Mediante un examen que consiste en la resolución de un cierto número de problemas. Además, a lo largo del curso, se proponen trabajos de profundización o ampliación de algunas de las cuestiones tratadas. Son voluntarios y se tienen en cuenta para la calificación final.

Nola ebaluatzen da ikaslea?

Azterketa baten bidez; problema batzuk ebatzi beharko dituzte ikasleek. Gainera, ikasturtean zehar, landutako gai batzuk zabaltzeko edo sakontzeko lanak proposatzen dira. Borondatezkoak dira eta amaierako kalifikazioan kontuan hartuko dira.

Entrevista realizada según el método Juan Palomo, yo me lo guiso, yo me lo como. Entrevistador y entrevistado: Jesús de la Cal, Profesor de la asignatura.

Aurreko elkarrizketa, *neuk egin eta neuk jan*, metodoaren bidez egina da. Elkarrizketatzailea eta elkarriketatua: Jesús de la Cal, *Konbinatoria* irakasgaiaren irakaslea.

[1]Nota de la traductora: Los libros que se mencionan son [5] y [6].

[1]Itzultzailearen oharra: Aipatutako beste liburuak [5] eta [6] dira.

1. gaia

Oinarrizko konbinatoria

1.1. Konbinatoria

Helburua:

A multzo finitua izanik, $A = \{x : x\text{-k } P \text{ propietatea betetzen du}\}$, kalkula ezazu $c(A)$.

Problema batzuk:

1. Zenbat elementu dago?
   - $x + y = n$ ekuazioaren soluzioak, non $x, y \in \mathbb{N}$ baitira.
   - 137 tenis-jokalari badago, zenbat partidu egin daiteke?
   - Zenbat batugai dago honako batuketa hauetan?

   $$\sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \quad \text{eta} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}$$

   - Zenbat 5 zifradun zenbaki dago sistema hamartarrean, non posizio bikoitietan zenbaki bakoitiak baitaude?
2. Zenbat eratara egin daiteke?
   - Zenbat eratara joan daiteke $\mathbb{R}^2$ planoan $(0,0)$ puntutik $(3,2)$ puntura, unitate bat eskuinalderantz edo gorantz mugitzen bagara?
   - Zenbat eratara egin daiteke eragiketa hau?

   $$\frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} f(x,y)$$
3. Zenbat eratara jaso daiteke gertaera?
   - Dado bat 4 aldiz botatzen bada, zenbat eratara lor daiteke 15 puntu?

1.2. Zenbaketa

Erabiliko dugun notazioa: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ eta $[n] = \{1,\ 2, \ldots,\ n\},\ n \in \mathbb{N}$.

Elementuen zerrenda egitea: $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\} \Rightarrow c(A) = n$.

Oharrak:

- Zerrenda egitea erraza, ez hain erraza edo eginezina izan daiteke.
- Zerrenda egiteko, errepikapen eta falta gabeko eraikitze-printzipioa behar da.
- Problema zail bat badugu -interesgarria liteke lehenik- kasu partikular bat aztertzea.

Adibideak:

1. Ekuazio baten soluzioak
   (a) A multzoa, $x + y = 5$ ekuazioaren zenbaki arrunt ez-negatiboen soluzioen multzoa da, $A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ :\ x + y = 5\}$. $c(A) = 6$
   (b) (Orokorpena)$A = \{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ :\ x + y = n\}$. $c(A) = n + 1$
   (c) (Aldaera)$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ :\ x + y = 5,\ x \geq -3,\ y \geq 1\}$. $c(A) = 8$
   (d) (Orokorpena)$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ :\ x + y = n,\ x \geq -5,\ y \geq 2\}$. $c(A) = n + 4$
   (e) (Aldaera)$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ :\ x + y + z = 5\}$. $c(A) = 21$
   (f) (Orokorpena)$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ :\ x + y + z = n\}$. $c(A) = (n + 1)(n + 2)/2$
   (g) (Aldaera)$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ :\ x + y + z = n,\ x \geq -3, y \geq 1, z \geq -1\}$. $c(A) = (n + 4)(n + 5)/2$
   (h) (Orokorpena)$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^* \ :\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n\}$.
2. Zenbaki oso baten multiploak.
   (a) 1 eta 30 balioen arteko 7ren multiplo kopurua. $c(A) = 4$
   (b) (Aldaera) 1 eta 16234 balioen arteko 7ren multiplo kopurua. $c(A) = 2319$
   (c) (Orokorpena) 1 eta n balioen arteko 7ren multiplo kopurua. $c(A) = \lfloor n/7 \rfloor$
   (d) (Orokorpena) 1 eta n balioen arteko $a-$ren multiplo kopurua. $c(A) = \lfloor n/a \rfloor$
3. Zenbaki arrunten eta multzoen partiketak

   1. definizioa: *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$.* **$n-$ren partiketa** *zenbaki arrunten bidezko $n-$ren batura da.*

   2. definizioa: *Izan bedi Ω multzoa.* **$\Omega-$ren partiketa** *ez-huts eta binaka bateraezinak direnen azpimultzoen multzoa da, eta horien bildura Ω da, hots, $\Omega-$ren elementu bakoitza, behin, azpimultzo batean dago.*

   - Kalkula itzazu n zenbakien partiketak, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
   - Kalkula itzazu $[n]$ multzoen partiketak, $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

1.3. Lurra eta sabaia izeneko funtzioak

3. definizioa: *Izan bedi $x \in \mathbb{R}$,*

$$\lfloor x \rfloor = max\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \leq x\}, \ x\text{−}ren \ \textbf{lurra} \ edo \ \textbf{zati osoa} \ da.$$

$$\lceil x \rceil = min\{k \in \mathbb{Z} \ : \ k \geq x\}, \ x\text{−}ren \ \textbf{sabaia} \ da.$$

Oinarrizko propietateak:

- Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$, orduan, $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$
- Baldin eta $x \notin \mathbb{Z}$, orduan, $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil$ eta $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$
- $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow x \in [n, n+1) \Leftrightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow x-1 < n \leq x$
- $\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow x \in (n-1, n] \Leftrightarrow n-1 < x \leq n \Leftrightarrow x \leq n < x+1$
- $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$ eta $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

4. definizioa: *Izan bedi $x \in \mathbb{R}$,*

$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1), \ x\text{−}ren \ \textbf{zatikizko atala} \ da.$$

$$< x >= \lceil x \rceil - x \in [0,1), \ x\text{−}ren \ \textbf{atal osagarria} \ da.$$

Oinarrizko propietateak:

- $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ eta $x = \lceil x \rceil - < x >$
- $\{-x\} =< x >$ eta $< -x >= \{x\}$
- $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$. Oro har, $\lfloor x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rfloor \geq \lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor + \ldots \lfloor x_n \rfloor$
- $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$. Oro har, $\lceil x_1 + x_2 + \ldots + x_n \rceil \leq \lceil x_2 \rceil + \lceil x_2 \rceil + \ldots + \lceil x_n \rceil$

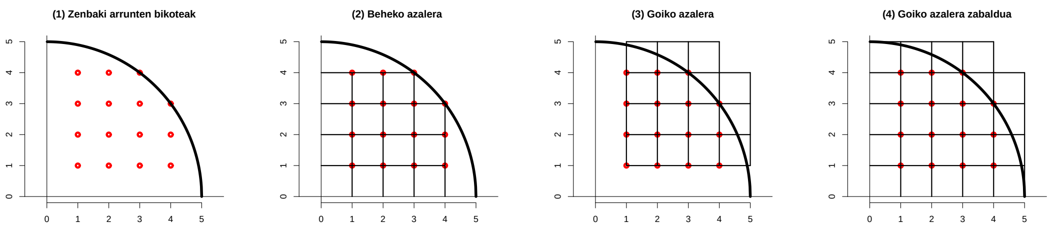
Adibideak:

1. Zein da 1 eta n balioen arteko a−ren multiplo kopurua? $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.
   $[n]$ multzotik zenbaki bat zoriz hautatzen bada, zein da a−ren multiploa izateko probabilitatea? $\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\{\frac{n}{a}\}$. Eta $n \to \infty$ jotzen duenean, nora joaten da aipatutako probabilitatea? $\frac{1}{a}$.
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \ : \ x+y=n, \ x \leq y\}$. $c(A) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

3. Zein da b oinarrian n−ren digitu kopurua, $d_b(n)$? $d_b(n) = \lfloor \log_b(n) \rfloor + 1 = \lfloor \log(n)/log(b) \rfloor + 1$. (ikusi A.1..)

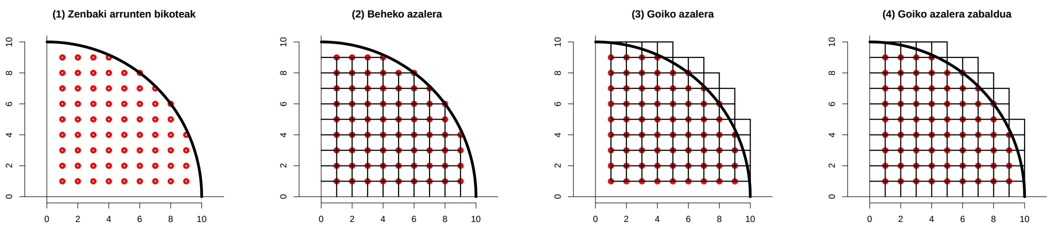
4. Izan bedi A_n, $(0,0)$ zentrodun eta n erradiodun zirkuluaren barruan dauden (x,y) puntu arrunten multzoa, $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ x^2 + y^2 \leq n^2\}$. Zein da $c(A_n)$? Muga daiteke?

$$c(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \sqrt{n^2 - k^2} \right\rfloor \qquad \text{eta} \qquad \left\lceil \frac{\pi n^2}{4} - (2n-1) \right\rceil \leq c(A_n) \leq \left\lfloor \frac{\pi n^2}{4} \right\rfloor$$



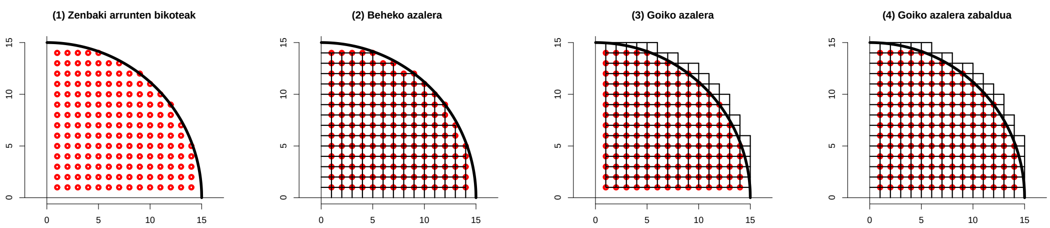
$$n = 5, \quad 11 \leq c(A_5) \leq 19, \quad c(A_5) = 15$$

1.1. irudia: 5 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak



$$n = 10, \quad 60 \leq c(A_{10}) \leq 78, \quad c(A_{10}) = 69$$

1.2. irudia: 10 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak



$$n = 15, \quad 148 \leq c(A_{15}) \leq 176, \quad c(A_{15}) = 162$$

1.3. irudia: 15 erradiodun zirkulu-laurdenerako bikote arruntak

5. Izan bedi $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, muga daiteke? $\log(n+1) \leq s_n \leq 1 + \log(n)$.

6. A_1 eta A_2 multzoak, hurrenez hurren, $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}$ eta $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}$ adierazpenen batugaien multzoak dira. Zein da $c(A_1)$ eta $c(A_2)$? $c(A_1) = \frac{n(n-1)}{2}$ eta $c(A_2) = \frac{n(n+1)}{2}$.

1.4. Zuhaitz-diagramak

Zuhaitz erregular batean, enborretik 1. belaunaldiko r_1 adar ateratzen dira, horietako adar bakoitzetik, 2. belaunaldiko r_2 adar (2. belaunaldikoak), eta, horrela, hurrenez hurren. Oro har, $(n-1)$. belaunaldiko adar bakoitzetik, r_n adar (n. belaunaldikoak) ateratzen dira. Orduan, n. belaunaldiko adar kopuru osoa

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n.$$

Zuhaitzaren bidez, zenbaketa arin egin daiteke zehaztutako zerrenda egin gabe. Zerrenda behar bada, zuhaitzaren bidez ere egin daiteke.

5. definizioa: **Multzoa** *osagai desberdinen bilduma da.* **Multimultzoa** *osagaien bilduma da, osagaiek ez dute zertan derbedinak izan. Osagaiak* **elementuak** *deitzen dira. Multzoak adierazteko giltzak erabiltzen dira.*

6. definizioa: **Segida** *osagai ordenatuen bilduma da, osagaiek ez dute zertan derbedinak izan. Segida adierazteko parentesiak erabiliko ditugu.*

Adibidez, 1, 2 eta 3 elementuen multzoa $\{1,2,3\}$ adierazten da. Osagaiak ordenatuta ez daudenez, $\{2,3,1\}$ multzoa berdin-berdina da. Hala ere, $(1,1,2)$ segida da eta osagaiak ordenatuta daudenez, $(1,2,1)$ segidarekiko diferentea da. Eta $\{1,1,2\}$ multimultzoa da, $\{1,2,1\}$ multimultzoarekiko berdina dena.

Adibideak:

1. (Biderkaduraren erregela)
   Baldin eta $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$; orduan,
   $$c(\Omega) = c(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n) = c(\Omega_1) \cdot c(\Omega_2) \cdot \ldots \cdot c(\Omega_n).$$

2. (Menuak) Taberna batean 2 lehenengo plater, 3 bigarren plater eta 2 postre agertzen badira, zenbat menu diferente dago?

3. (Testa) Test batean, n kutxatila daude. 1. kutxatila betetzeko, r_1 aukera dago; 2. kutxatila bete daiteke r_2 eratan, eta, horrela, hurrenez hurren. Zenbat eratara bete daiteke testa?

4. (Errepikatuzko aldakuntzak)
   7. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako*

n elementuren **errepikatuzko aldakuntzak**, *Ω-tik ateratako k luzeradun-segida posibleak dira, osagaiak errepika baitaitezke.*

$$VR_{n,k} = n \cdot \ldots \cdot n = n^k.$$

Adibidez, $VR_{3,2} = c(\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}) = 3^2 = 9$.

5. (Aldakuntza arruntak)
   8. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako n elementuen* **aldakuntza arruntak**, *Ω-tik ateratako k luzeradun segida posibleak dira, osagaiak errepikatu ezin badira.*

   $$V_{n,k} = n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = n^{\underline{k}}.$$

   Adibidez, $V_{3,2} = c(\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}) = 3 \cdot 2 = 6$.

6. (Permutazioak)
   9. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Ω-tik ateratako elementuen* **permutazioak**, *n-naka hartutako n elementuren aldakuntza arruntak dira, hots, $\Omega-$ren elementuen ordenazioak.*

   $$P_n = V_{n,n} = n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

   Adibidez, $P_3 = c(\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}) = 3! = 6$.

   - $[n]-$tik $[n]-$ra doazen zenbat bijekzio posible dago? $P_n = n!$.

7. (Konbinazio arruntak)
   10. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako n elementuen* **konbinazio arruntak**, *Ω-tik ateratako k osagaidun azpimultzoak dira.*

   $$V_{n,k} = C_{n,k} \cdot P_k$$

   $$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n \cdot n-1 \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k \cdot k-1 \cdot \ldots \cdot 1} = \binom{n}{k}.$$

   Adibidez, $C_{3,2} = c(\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}) = \binom{3}{2} = 3$.

   - Zenbat segida osa daiteke p zero eta q bat erabiliz? $C_{p+q,p}$

8. (Errepikatuzko permutazioak)
   11. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ eta $r_1+r_2+...+r_k = n$ betetzen duten $r_1, r_2, ..., r_k$ zenbakiak, $\forall i = 1,2,\ldots,k, \quad 0 \le r_i \le n$. r_1 aldiz ω_1, r_2 aldiz ω_2, $\ldots$, r_k aldiz ω_k errepikatuz osatzen den n luzeradun segidaren ordenazioak, n elementu horien* **errepikatuzko permutazioak** *deitzen dira.*

   $$PR_n^{r_1,r_2,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}.$$

   Adibidez, $PR_3^{2,1} = c(\{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}) = 3!/2! = 3$.

a) Zenbat segida osa daiteke p zero eta q bat erabiliz? $C_{p+q,p} = PR^{p,q}_{p+q}$.

b) Zenbat segida osa daiteke p zero, q bat eta r bi erabiliz? $C_{p+q+r,p} \cdot C_{q+r,q} = PR^{p,q,r}_{p+q+r}$.

c) Zenbat segida osa daiteke r_1 aldiz 1, r_2 aldiz 2, ... eta r_k aldiz k erabiliz?

$$C_{r_1+r_2+\ldots+r_k,r_1} \cdot C_{r_2+\ldots+r_k,r_2} \cdot C_{r_3+\ldots+r_k,r_3} \cdots C_{r_{k-1}+r_k,r_{k-1}} = PR^{r_1,r_2,\ldots,r_k}_{r_1+r_2+\ldots+r_k}.$$

9. (Errepikatuzko konbinazioak)
   12. definizioa: *Izan bedi n osagaidun Ω multzoa, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. k-naka hartutako n elementuen* **errepikatuzko konbinazioak** *Ω-tik ateratako k osagaidun multiazpimultzoak (multzoak, baina errepikapenak onartuz) dira.*

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Adibidez, $CR_{3,2} = c(\{\{1,1\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,2\},\{2,3\},\{3,3\}\}) = \binom{4}{2} = 6$.

(a) Zein da $x_1+x_2+\ldots+x_n = k$ ekuazioa betetzen duten zenbaki oso eznegatiboen kopurua? $CR_{n,k}$

Ariketak:

(Alfabetoa) Izan bedi $\Omega = \{a,b,d,0,1,2,3,4\}$ 8 osagaidun alfabetoa.

(a) Zein da 4 ikur duten hitzen kopurua? 8^4

(b) Zein da k ikur duten hitzen kopurua? 8^k

(c) Zein da letraz hasten, zenbakiz amaitzen eta k ikur duten hitzen kopurua? $3 \cdot 8^{k-2} \cdot 5$

(d) Zein da 2 letra eta 3 zenbaki duten 5 ikurreko hitzen kopurua? $\binom{5}{2} \cdot 3^2 \cdot 5^3$

(e) Zein da m letra eta n zenbaki duten $m+n$ ikurreko hitzen kopurua? $\binom{m+n}{n} \cdot 3^m \cdot 5^n$

(f) Aurreko egoerapean, zenbat zenbaki hasten dira letraz eta amaitzen dira zenbakiz? $\binom{m+n-2}{m-1} \cdot 3^m \cdot 5^n$

(g) Zein da n ikurreko hitzen kopurua, alboan dauden ikur guztiak desberdinak izanik? $8 \cdot 7^{n-1}$

(h) Zein da 8 ikurren permutazio kopurua, letrak elkarren jarraian ezin badira egon? $5! \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!$

(Bolak kutxatan kokatzea) Zenbat eratara sar daiteke k bola n zenbakidun kutxatan? Sailkapena: alde batetik, bola bereizezinak eta bereizgarriak (zenbakidunak), eta beste aldetik, kokapenak esklusiorik gabe eta esklusioa erabiliz (ezin dira bi bola kutxa berean egon). (Laburpen zabalago bat 4.2. laukian ikusiko da).

(Laginketa) Zenbat eratara atera daiteke k zenbakidun bola n bola duen kutxa batetik? Sailkapena: alde batetik, itzuleradun estrakzioa erabiliz (ateratako bola bakoitza berriro kutxara itzultzen da) edo estrakzio itzuleragabea erabiliz, eta beste aldetik, laginaren ordena kontuan hartuta edo hartu gabe.

1.1. taula: Konbinatoriaren laburpena

	errepikapenik ez	errepikapenak
ordena	$P_n = n!$ $V_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$	$PR_n^{r_1,\ldots,r_k} = \frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!}$ $VR_n^k = n^k$
ordenarik ez	$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$	$CR_n^k = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$

1.2. taula: k bola n zenbakidun kutxatan

	Esklusioa	Esklusio gabe
Bolak bereizgarriak	$V_n^k = n^{\underline{k}}$	$VR_n^k = n^k$
Bolak bereizezinak	$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$	$CR_n^k = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$

1.3. taula: Laginketa ($n$tik k bola zenbakidunak)

	Itzuleragabea	Itzuleraduna
Lagin ordenatua	$V_n^k = n^{\underline{k}}$	$VR_n^k = n^k$
Lagin ez-ordenatua	$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$	$CR_n^k = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right)$

1.5. Potentzia faktorialak

13. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia arrunta** *honela definitzen da:*

$$a^k = \begin{cases} a \cdot a \cdot \overset{(k)}{\ldots} \cdot a, & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Propietateak:

- Baldin eta $a = n \in \mathbb{N}^*,\ n^k = VR_{n,k}$
- $a^{k+r} = a^k a^r$
- $(-a)^k = (-1)^k a^k$

14. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia faktorial beherakorra** *ondoko moduan definitzen da:*

$$a^{\underline{k}} = \begin{cases} a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1), & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Propietateak:

- Baldin eta $a = n \in \mathbb{N},\ n^{\underline{k}} = V_{n,k}$
- Baldin eta $n = k \in \mathbb{N},\ n^{\underline{n}} = P_n$
- Baldin eta $n < k$, $n^{\underline{k}} = 0$
- Baldin eta $n \geq k$, $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$
- $a^{\underline{k+r}} = a^{\underline{k}}(a-k)^{\underline{r}}$

15. definizioa: *Izan bitez $a \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*$; orduan,* **potentzia faktorial gorakorra** *honela definitzen da:*

$$a^{\overline{k}} = \begin{cases} a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+k-1), & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Propietateak:

- Baldin $a = n \in \mathbb{N},\ n^{\overline{k}} = (n+k-1)!/(n-1)!$
- $a^{\overline{k+r}} = a^{\overline{k}}(a+k)^{\overline{r}}$

- $a^{\overline{k}} = (a+k-1)^{\underline{k}}$ eta $a^{\underline{k}} = (a-k+1)^{\overline{k}}$
- $(-a)^{\underline{k}} = (-1)^k a^{\overline{k}}$ eta $(-a)^{\overline{k}} = (-1)^k a^{\underline{k}}$

Adieraz daitezke potentzia arruntak potentzia faktorialen bidez eta aldrebes? Bai. 4. gaian ikusiko dugu, lehenengo eta bigarren motako Stirlingen zenbakien ataletan.

1.6. Sailkapenak

16. definizioa: $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ *azpimultzoen bilduma* Ω *multzoaren* **partiketa** *da, baldin eta* $\Omega = \cup_{i=1}^k A_i$ *eta* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j,\ i,j \in \{1,\ldots,k\}$. Ω, *azpimultzo bataeraezinen bildura denez,* $\Omega = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$ *adierazten da.*

(Batuketaren erregela) Izan bedi $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ multzoa $\Omega-$ren partiketa, $\Omega = A_1+A_2+\ldots+A_k$. Orduan,

$$c(\Omega) = c(A_1) + c(A_2) + \ldots + c(A_k).$$

Aplikazioak:

- Hasierako egoera konplexu bakar batetik, egoera sinple batzuetara pasatzea.
- Formulak lortzea
- Errepikapen-erlaziorik lortzea

Adibideak:

1. Izan bedi $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ multzotik ateratako azpimultzo kopurua, a_n; orduan,
   - $\{a_0 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}\} \Rightarrow a_n = 2^n$
   - $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.
2. Aintzat har dezagun orain $[n]$tik ateratako k elementudun azpimultzo kopurua; orduan,
   - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
   - $\binom{n}{k} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k-1}$
   - $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \ldots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k-1}{0}$
3. Aintzat har dezagun orain $[n]$tik ateratako k elementudun multiazpimultzo kopurua; orduan,

- $CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1}$
- $CR_{n,k} = CR_{1,k-1} + CR_{2,k-1} + \ldots + CR_{n,k-1}$
- $CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n-1,k-1} + CR_{n-1,k-2} + \ldots + CR_{n-1,0}$

4. Izan bedi a_n zenbakia, n maila duen eskailera igotzeko era kopurua, oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean.

   - $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$
   - $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

5. Izan bedi b_n zenbakia n luzeradun segida kopurua, 0 eta 1 zenbakiek osatutakoa baina bi 1 jarraian ez duena. Orduan, $\{b_0 = 1,\ b_1 = 2,\ b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\}$. Hots, $b_n = a_{n+1}$.

6. **17. definizioa:** *$A \subset \mathbb{N}$ zenbaki arrunten* **multzo sakabanatua** *deitzen da, ondoz ondoko zenbakirik ez badu.* Izan bedi c_n zenbakia, $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzotik ateratako multzo sakabanatuen kopurua. Orduan, $\{c_0 = 1,\ c_1 = 2,\ c_n = c_{n-1} + c_{n-2}\}$. Hots, $c_n = b_n = a_{n+1}$.

7. Izan bedi d_n zenbakia 2×1 tamainako baldosak erabiliz $2 \times n$ tamainako gela betetzeko era kopurua. Orduan, $\{d_0 = 1,\ d_1 = 1,\ d_n = d_{n-1} + d_{n-2}\}$. Hots, $d_n = a_n$.

8. Zenbat eratara koka daitezke $n+1$ bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan, baldin eta kutxa bakar bat hutsik geratu behar bada? $n(n-1)\binom{n+1}{3}(n-2)! + n\binom{n-1}{2}\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}(n-3)! = n!\binom{n+1}{3} + \frac{1}{2}n!\binom{n+1}{2}\binom{n-1}{2}$

1.7. Inklusio-esklusio printzipioa

Ikusiko dugun printzipioa oinarrizko emaitza honen orokorpena da, eta, bi multzorako, inklusio-esklusio printzipioa da. *Izan bitez $A, B \subset \Omega$ azpimultzo finituak. Orduan,*

$$c(A \cup B) = c(A) + c(B) - c(A \cap B)$$

Adibideak:

1. Klase batean, 100 pertsona daude; haien artean, 50 euskaldunak dira eta 30, erdaldunak eta euskaldunak dira. Zenbat dira erdaldunak?

2. $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoan, zenbat 4 edo 6 zenbakien multiplo dago?

3. Zein da zifra berak jarraian ez duen 1.122.345 zenbakiaren permutazio kopurua?

Notazioa: $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ denean, A_I notazioa erabiliko dugu $A_I = \cap_{i \in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \equiv A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$ adierazteko. Bereziki, $I = \emptyset$ denean, $A_\emptyset = \Omega$.

1.1. teorema: (Inklusio-esklusio printzipioa): *Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ azpimultzo finituak, $n \geq 2$. Orduan,*

$$c(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{c(I)-1} c(A_I)$$

Hots,

$$c(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$= \sum_{1 \leq i \leq n} c(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} c(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} c(A_i A_j A_k) - \ldots +$$
$$+(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} c(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}) + \ldots + (-1)^{n-1} c(A_1 A_2 \ldots A_n)$$

Frogapena: *Frogatu dezagun n gaineko indukzioz:*

$n = 1$ denean, berehalakoa da, $c(A_1) = c(A_1)$.

$n = 2$ denean, argi dago. Izan ere,

$c(A_1 \cup A_2) = c(A_1 \cup (A_2 - A_1 A_2)) =^{baterazinak} c(A_1) + c(A_2 - A_1 A_2) =^{A_1 A_2 \subseteq A_2} c(A_1) + c(A_2) - c(A_1 A_2)$.

Har dezagun indukzio-hipotesia [IH] egiazkoa dela $n-1$ kasurako, hau da,

$$c(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,2,\ldots,n-1\}} (-1)^{c(I)-1} c(A_I)$$

Frogatu dezagun n kasurako:

$$\begin{aligned}
c(\cup_{i=1}^n A_i) &= = c(\cup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) =^{(n=2)} \\
&= c(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) + c(A_n) - c\big((\cup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n\big) =^{[IH]} \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n-1} c(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} c(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} c(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) + \\
&\quad + c(A_n) - c(\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)) =^{[IH]} \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n-1} c(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} c(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-2} c(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) + \\
&\quad + c(A_n) - \sum_{1 \leq i \leq n-1} c(A_i A_n) + \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} c(A_i A_j A_n) - \ldots - (-1)^{n-2} c(A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n) = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} c(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} c(A_i A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} c(A_1 A_2 \ldots A_n)
\end{aligned}$$

1.2. korolarioa:

$$c(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{c(I)} c(A_I)$$

Aplikazioak:

1. Eulerren funtzioa

   18. definizioa: *Izan bedi* $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$ **faktore lehenetan n−ren deskonposizioa**. *Baldin eta* $p_1 \not| k$, $p_2 \not| k, \ldots, p_s \not| k$ *betetzen bada,* k **n−rekiko lehena** *dela esaten da. Izan bedi* A_n *ondoko multzoa,* $A_n = \{k \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ k$ *lehena n-rekiko*$\}$*; orduan,* $\phi(n) = c(A_n)$ **Eulerren funtzioa** *deitzen da.*

   $$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

   Frogapena A.3.. atalean kontsulta daiteke, hirugarren ariketa-zerrendako (III-15. ariketari baitagokio.

   Leonhard Euler (1707 Suitza-1783 Errusia) matematikariaren biografia[1] oin-oharretan aipatutako webgunean kontsulta daiteke.

2. Nahasketak

   19. definizioa: *Elementu finkorik uzten ez duen* $\{1, 2, \ldots, n\}$*ren* f *bijekzioari* $\{1, 2, \ldots, n\}$*−ren* **nahasketa** *deitzen zaio, hots,* $f(i) \neq i, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

   Propietateak:

   - Izan bedi $\{1, 2, \ldots, n\}$−ren nahasketen multzoa, D_n.

     $$c(D_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

   - $\{1, 2, \ldots, n\}$−ren bijekzio bat zoriz hautatzen bada, zein da nahasketa izateko probabilitatea? $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
   - Eta n infiniturantz jotzen duenean, nora joaten da probabilitatea? e^{-1}

   Adibideak:

   (a) n senar-emazte dantzaldi batera doaz, zenbat eratara egin daitezke bikoteak emazte bakoitza bere senarrarekin egon ez dadin?

   (b) n gutun eta n gutun-azal badago, zenbat eratara sar daitezke gutunak helbide zuzenik egon ez dadin?

3. Beste batzuk. Adibidez, ikusi hirugarren ariketa-zerrendako (III-4. ariketa eta hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-7. ariketa.

[1] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html`

1.8. Itzulpenak

20. definizioa: *Problema* **itzultzea** *baliokidea den beste problema bat formulatzean datza.*

- Itxuraz diferenteak diren problemak baliokideak izan daitezke.
- Itzultzeko irudimena eta esperientzia behar da.
- Problema itzultzea ez da ebaztea, baina lagungarria izan daiteke.

Adibideak:

1. Azpimultzoak $\rightleftharpoons$ 0 eta 1 zenbakien segidak
2. n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriren kokapena

   2.1 Kokapena $\rightleftharpoons$ Aplikazioak $\rightleftharpoons$ Segidak (VR_n^k)

   2.2 Kokapena, esklusio erabiliz $\rightleftharpoons$ Aplikazio injektiboa $\rightleftharpoons$ Segidak (V_n^k)

   2.3 Kokapena, kutxa hutsik geratu gabe $\rightleftharpoons$ Aplikazio suprajektiboa $\rightleftharpoons$ Segidak $(n!\left\{ {k \atop n} \right\})$

   2.4 Kokapena, kutxa hutsik ez eta esklusio bai $\rightleftharpoons$ Aplikazio bijektiboa $\rightleftharpoons$ Segidak (P_n)

1.4. taula: n zenbakidun kutxatan k bola bereizgarriren kokapena

Kokapenak	**Segidak**	**Aplikazioak**	**Kopurua**
esklusio gabe	$[n]$tik k elementudunak	$f : [k] \to [n]$	VR_n^k
esklusioa (≤ 1)	elementu errepikaturik ez	injektiboak	V_n^k
esklusio gabe eta ez-hutsak (≥ 1)	elementuak gutxienez behin	suprajektiboak	$n!\left\{ {k \atop n} \right\}$
esklusioa eta ez-hutsak ($= 1$)	elementuak zehatz-mehatz behin	bijektiboak	P_n

3. n zenbakidun kutxatan k bola bereizezinen kokapena

   3.1 Kokapena $\rightleftharpoons$ 0 eta 1en segidak $\rightleftharpoons$ Ekuazioen soluzioak $\rightleftharpoons$ Azpimultzoak (CR_n^k)

   3.2 Kokapena, esklusioa erabiliz $\rightleftharpoons \ldots$ (C_n^k)

   3.3 Kokapena, kutxa hutsik geratu gabe $\rightleftharpoons \ldots$ (CR_n^{k-n})

1.5. taula: n zenbakidun kutxatan k bola bereizezinen kokapena

Kokapenak k bola $=$ n kutxa $\neq$	**$0-1$ segidak** k aldiz 0 $n-1$ aldiz 1	**Ekuazioen soluzioak** $x_1+\ldots+x_n=k$	**Multzoak** k elementu $[n]$ multzotik	**Kopurua**
esklusio gabe	$0-1$ segidak	$x_i \in \mathbb{N}^*$	Multiazpimultzoak	CR_n^k
esklusioa (≤ 1)	0ak jarraian ez	$x_i \in \{0,1\}$	Azpimultzoak	C_n^k
esklusio gabe eta ez-hutsak (≥ 1)	1ak jarraian ez eta hasiera=amaiera= 0	$x_i \in \mathbb{N}$	Multiazpimultzoak eta elementu guztiak	CR_n^{k-n} $= C_{k-1,n-1}$

4. Ibilbideak

   4.1 Horizontal-bertikal ibilbideak $\rightleftharpoons$ h eta v letren segidak

   21. definizioa: *Izan bitez $M(a,b)$, $N(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $a \leq c$. M-tik N-ra doan* **horizontal-bertikal ibilbidea** *M-n hasten den eta N-n amaitzen den lerro jarraitua da, $h:(x,y)\to(x+1,y)$ atal horizontalak eta $v:(x,y)\to(x,y+1)$ atal bertikalak dituena.*

   - $(0,0)$-tik (p,q)-rainoko *horizontal-bertikal* zenbat ibilbide osa daiteke $(p,q>0)$? $C_{p+q,p}$ edo $PR_{p+q}^{p,q}$.

   4.2 Gora-behera ibilbideak $\rightleftharpoons$ g eta b letren segidak

   22. definizioa: *Izan bitez $M(a,b)$, $N(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $a \leq c$. M-tik N-ra doan* **gorabehera ibilbidea** *M-n hasten den eta N-n amaitzen den lerro jarraitua da, $g:(x,y)\to(x+1,y+1)$ atal gorakorrak eta $b:(x,y)\to(x+1,y-1)$ atal beherakorrak dituena.*

   - $(0,0)$-tik (p,q)-rainoko *gorabehera* zenbat ibilbide osa daiteke $(p,q \in \mathbb{N},\ p \geq q)$? $C_{p,(p+q)/2}$.

   4.3 Gora-behera ibilbideak $\rightleftharpoons$ Gora-behera ibilbide bereziak

   23. definizioa: *M-tik N-ra doan gorabehera ibilbidea* **berezia** *dela esaten da baldin eta OX ardatza zeharkatzen ez badu. Hots, $y=-1$ zuzena ukitzen ez badu; alegia, $y \geq 0$ erdiplanoaren barruan badago.*

   - $(0,0)$-tik (p,q)-rainoko *gorabehera* zenbat ibilbide ez-berezi osa daiteke? $C_{p,(p+q+2)/2}$.

   Ikusi 3. ariketa-zerrendako 18. eta 19. ariketak.

Formula baten frogapen konbinatorioa. Esate baterako, tenis-txapelketa,

$$n-1=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{2}\left\lceil\frac{1}{2}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right\rceil\right\rfloor+\ldots$$

1.9. Usategia eta agurrak

Usategiaren printzipioa

1.3. printzipioa: (Dirichleten usategiaren printzipioa): *Usategi batean uso kopurua horma-habiarena baino handiagoa bada, orduan existitzen da gutxienez bi uso dituen hobi bat.*

Beste era batean esanda, $k > n$ bada, $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, ezin da injektiboa izan. Baliokideki, n kutxatan k bola kokatzen baditugu eta $k > n$ bada, orduan, badago gutxienez bi bola dituen kutxa bat.

Izan bedi x_i zenbakia i. kutxan dagoen bola kopurua, $i = 1, 2, \ldots, n$; orduan, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$.

i) $\exists i \ : \ x_i \geq \frac{k}{n}$, *hots,* $x_i \geq \lceil \frac{k}{n} \rceil$.

Partikularki, $k > n$ *bada, orduan,* $\exists i \ : \ x_i \geq 2$.

ii) $\exists j \ : \ x_j \leq \frac{k}{n}$, *hots,* $x_j \leq \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.

Ikusi 1.10.. ariketa-zerrenden lehenengo zerrendako (I-12. ariketa eta laugarren ariketa-zerrendako (IV-2. eta (IV-4 ariketak.

Bikoititasuna

A multzo finitua izanik, $c(A)$ bakoitia edo bikoitia den jakiteko ez da beharrezkoa kopuru osoa kalkulatzea.

Adibideak:

1. Izan bedi $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$; zein da $\mathcal{P}(\Omega)$ parteen multzoaren bikoititasuna? Bikoitia

2. Izan bedi D_n, $n-$ren zatitzaileen multzoa; bikoitia ala bakoitia da? Bakoitia $\Leftrightarrow n = d^2$

1.4. lema: (Agurren lema): *Bilera batera n pertsona joan dira. Gonbidatu kopuru bakoitia agurtzen duten pertsona kopuruari m deitzen badiogu, $m \leq n$, zenbaki hori bikoitia da.*

Ikusi 1.10.. ariketa-zerrendako (IV-8. ariketa.

1.10. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrendak

Lehenengo ariketa-zerrenda: lur- eta sabai-funtzioak

(I-1) x eta y edozein zenbaki errealetarako, frogatu itzazu honako emaitza hauek:

a) $\lfloor x+y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ (Lur-funtzioaren goibatukortasun-propietatea)

b) $\lceil x+y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ (Sabai-funtzioaren azpibatukortasun-propietatea)

Noiz egiaztatzen dira berdintzak? Aurkitu (a) eta (b) atalen adierazpen orokorrak.

(I-2) (*A*.1.) Izan bedi $b \geq 2$ zenbaki osoa. Zenbaki-sistemaren oinarritzat b hartuta, edozein zenbaki arrunt n, $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ multzoko zifrak erabiliz adierabakarrean idatz daiteke. Erabil dezagun $d_b(n)$ notazioa b oinarrian n zenbakiaren zifra-kopurua adierazteko. Adibidez,

$$d_{10}(357) = 3 \quad \text{eta} \quad d_2(8) = d_2((1000)_2) = 4.$$

Aurkitu $log_b(n)$-ren menpeko $d_b(n)$ adierazpena.

(I-3) (*A*.1.) Egiaztatu edo gezurtatu honako baieztapen hauek:

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \ \forall x \geq 0$

b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \ \forall x \geq 0$

(I-4) (*A*.1.) Izan bitez D zuzen erreala edo $[0, \infty)$ tartea, eta $f : D \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, gorakorra eta honako propietate hau betetzen duena:

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Frogatu:

a) $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$

b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

(I-5) Izan bitez $m \in \mathbb{Z}$ eta $n \in \mathbb{N}$. Frogatu edozein x errealetarako:

a) $\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor$

b) $\left\lceil \frac{x+m}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil x \rceil + m}{n} \right\rceil$

(I-6) Egiaztatu edo gezurtatu:

a) $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \ \forall x \geq 0$

b) $\left\lfloor \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor, \ \forall x \geq 0$

(I-7) (*A*.1.) Aurkitu baldintza nahiko eta beharrezkoa, honako hau bete dadin:

$$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil, \ \forall x \geq 0$$

(I-8) Izan bitez $a, b \in \mathbb{Z},\ a \leq b$. Kalkula ezazu zenbaki osoen kopurua tarte bakoitzaren barruan:

$$(a, b], \quad [a, b), \quad (a, b), \quad [a, b]$$

(I-9) Ebatz ezazu aurreko ariketa a eta b zenbaki errealetarako.

(I-10) Edozein zenbaki oso positibo n adieraz daiteke (adierabakarra) $n = 2^m + l$ erarekin, non m eta l zenbaki oso ez-negatibo baitira, $0 \leq l < 2^m$ izanik. Adibidez,

$$17 = 2^4 + 1, \quad 83 = 2^6 + 19.$$

Erabil ezazu lur $\lfloor\cdot\rfloor$ edota sabai $\lceil\cdot\rceil$ funtzioak, n-ren menpeko m eta l adierazpenak emateko.

(I-11) Edozein x errealetarako, mutur osoak dituen tarte baten erdipuntua ez denerako, hurkoen zenbaki osoari $\epsilon(x)$ deituko diogu. Aurkitu $\lfloor\cdot\rfloor$ edota $\lceil\cdot\rceil$ funtzioen menpeko $\epsilon(x)$ adierazpena.

(I-12) (*A*.1.) (*Dirichleten usategiaren printzipioa*:) Baldin eta n uso m horma-zulotan banatzen badira, hobiren batean, gutxienez, $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ uso daude, eta, hobiren batean, gehienez, $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ uso daude.

Bigarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako problemak

(II-1) 52 eta 311 balioen artean, zenbat 3ren multiplo daude?

(II-2) Zenbat 6ren multiplo dago, 3 zifrarekin, hasiera 4 izanik?

(II-3) Zenbat hitz osa daiteke, 7 letra desberdinekin, A, I, R, S, T , U, V, W letrak erabiliz eta bigarren posizioan kontsonante bat egonda?

(II-4) Zenbat hitz osa daiteke, 6 letra (desberdinekin edo ez), E, F, G, H, I, J, K, L letrak erabiliz eta amaiera bokala izanik?

(II-5) Zenbat hitz osa daiteke, 4 letra desberdinekin, A, B, C, D, E , F letrak erabiliz, lehenengoa kontsonante eta azkena bokala izanik?

(II-6) 6 letra (desberdinekin edo ez) dituzten zenbat hitz osa daiteke, A, B, C, D, E , F letrak erabiliz, bi posizio zentraletan bi kontsonante desberdin egonda?

(II-7) Zenbat 4 letra (desberdinekin edo ez) dituen hitz osa daiteke, A, B, C, D, E letrak erabiliz, hasiera bokala izanik eta bigarren letra eta azkena desberdinak izanik?

(II-8) Zenbat zenbaki bakoiti osa daiteke 5 zifra desberdinekin eta 1,2,3,4,5 eta 6 digituak erabiliz? Eta zifrek ez badute zertan desberdinak izan?

(II-9) Zenbat 5en multiplo dago, 2.000 baino handiagoak eta 4 zifrarekin, 0,1,2,3,4,5,6 eta 7 digituak erabiliz? Eta zifra guztiak desberdinak izan behar badira?

(II-10) Zenbat 5 zifradun zenbaki palindromo (kapikua) dago? Zenbat dira bakoitiak?

(II-11) (*A*.2.) Casanova jaunak zazpi neskalagun ditu eta egun bakoitzean batekin paseatzeko ohitura du. Igande batean erabaki zuen hurrengo astean zehar neska berarekin bi egun jarraian egongo ez zela. Zenbat eratara egin dezake aste horretako hitzorduen egutegia?

(II-12) Zenbat hitz osa daiteke ABRACADABRA hitzaren letra guztiekin?

(II-13) Lasterketa batean, 7 atletak parte hartu dute. Zenbat eratara hel daitezke helmugara? Baldin eta 3 ingeles, 2 frantses, 1 suediar eta 1 errusiar badaude, zenbat eratara koka daitezke parte-hartzaileen banderak?

(II-14) Zenbat emaitza desberdin, lor daiteke 40 kartadun karta-sorta bat nahastean?

(II-15) Zenbat emaitza desberdin, lor daiteke 40 kartadun 2 karta-sorta berdin elkarrekin nahastean?

(II-16) 2000. urtean, turista batek Europar Batasuneko 15 hiriburuetatik 4 bisitatzea erabaki zuen. Zenbat ibilbide antolatzeko aukera izan zuen?

(II-17) Kutxa gotor baten *konbinazioak* 5 zifra desberdin ditu. Gehienez, zenbat konbinazio probatu beharko dira kutxa irekitzeko ziurtasuna izateko? Eta zifra bakoitzak aurrekoarekiko soilik desberdina izan behar badu?

(II-18) Itsasontzi batean, 12 bandera desberdin daude, eta, gehienez, 3 altxa daitezke, seinale-mastan ontziaren egoeraz ohartarazteko. Zenbat egoera desberdin adieraz daiteke? Eta itsasontziak berdinak diren hiru banderen sortak baditu?

(II-19) Zenbat eratara bana daitezke 40 tamainako karta-sorta bateko kartak, bi multzo berdinetan, multzo bakoitzean bi bateko egonda? Eta multzo batean 10 karta eta bestean 30 karta badaude?

(II-20) 6 txanpon jarraian botatzen badira, zenbat kasutan lor daiteke 4 aurpegi eta 2 gurutze?

(II-21) Zenbat apustu desberdin egin daiteke *bonoloto* jokoan? Eta lehenengo 10 zenbakien artean soilik apustua eginez?

(II-22) (*A*.2.) 52 tamainako karta-sorta batekin pokerrean jokatuz, zenbat eratara lor daiteke *full* bat (hirukote bat eta bikote bat)? Eta *pokerra* (4 karta berdinak)? Eta *bi bikote*? Eta *hirukote* bat?

(II-23) Zenbat kiniela desberdin osa daiteke?

(II-24) Neska bati bere mutil-lagunaren telefonoaren azken 3 zifra ahaztu zaizkio. Gehienez, zenbat dei egin beharko ditu berarekin hitz egin ahal izateko? Eta gogoratzen badu 3 zifra desberdin direla, azkena bakoitia izanik?

(II-25) Zenbat hitz osa daiteke, 5 letra desberdinekin, A, B, C, D, E eta F letrak erabiliz, lehenengo biak kontsonanteak eta hirugarrena bokala izanik? Eta letrak errepikatu ahal badira?

(II-26) Aire-konpainia baten hegaldiaren erreserba-kodeek 3 zifra eta 2 bokal dituzte, edozein ordenatan, baina guztiak desberdinak dira. Zenbat kode eraiki daiteke?

(II-27) 2 kontsonante eta 2 bokal dituzten zenbat hitz osa daiteke A, B, C, D, E eta I letrak erabiliz? Eta letrak errepikatu ezin badira?

(II-28) A, B, C eta D letren ordenazioen artean, zenbatetan daude A eta B elkarrekin? Zenbatetan daude banatuta?

(II-29) Zenbat eratara ordenatu daitezke A, B, C, D eta E letrak, A eta B letren artean (zehatz-mehatz) letra bat egonda?

(II-30) Zenbat eratara koka daitezke 8 dorre xake-taula batean, elkarrekiko arriskuan jarri gabe?

(II-31) 4 poker-jokalarien artean, zenbat eratara banatu daitezke kartak?

(II-32) Jatetxe bateko menuan, 5 lehenengo plater, 7 bigarren plater eta 4 postre agertzen dira. Bezero batek zenbat eratara hauta dezake hiru plater desberdin dituen menu bat?

a) Ohikoa den bezala

b) Ohikoa ez den bezala, baina plater bat bestearen jarraian hartzen.

c) Ohikoa ez den bezala, baina hiru platerak batera hartzen.

(II-33) Saskibaloi talde batean, 11 jokalari daude, titularrak eta ordezkoak kontuan hartuz. Entrenatzaileak zenbat eratara aukeratu dezake hasierako partidarako boskotea? Baldin eta 4 pibot, 2 antolatzaile (base) eta 5 hegaleko badaude, eta antolatzaile bat eta pibot bat edo bi soilik sartu behar baditu, zenbat eratara egin dezake?

(II-34) (*A.*2.) Kakulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 6 karta aukeratzeko kopurua,

a) Erregeren bat egonda.

b) Bastoirik ez egonda.

c) Erregeren bat baina bastoirik ez egonda.

(II-35) Kakulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 7 karta aukeratzeko kopurua, haien artean 3 ezpata eta 2 zaldun egonda.

(II-36) Talde batean, 7 neska eta 11 mutil daude; zenbat eratara aukeratu daitezke 5 bikote (neska-mutil) dantzatzeko aldi berean txapelketa batean?

(II-37) Kalkula ezazu 6 letra desberdinekin osa daitekeen pasahitz-kopurua, baldin eta 3 bokal badituzte eta kontsonanteak B, C, D eta F letren artean aukeratzen badira. Eta letra desberdinen murrizketarik ez badago?

(II-38) Bizi naizen etxebizitzan beste 23 auzokide daude eta 11 hautatuko dira futbol-partida jokatzeko. Zenbat eratara egin daiteke hautaketa? Zenbatetan egongo naiz barne? Zenbatetan ez?

Hirugarren ariketa-zerrenda: oinarrizko konbinatoriako beste zenbait problema

(III-1) Kalkula ezazu 9 pertsona 3 pertsonako 3 multzotan banatzeko aukera kopurua (taldeen ordenak eta pertsonen ordenak ez du garrantzirik).

(III-2) Kalkula ezazu 3 mutil eta 6 neska 3 pertsonako 3 taldetan banatzeko era kopurua, talde bakoitzean mutil bat egonda (taldeen ordenak eta pertsonen ordenak ez du garrantzirik).

(III-3) Izan bitez Ω multzo finituaren A, B eta C azpimultzoak. Frogatu ezazu honako datu hauek funtsik gabekoak direla:

$$c(A \cup B \cup C) = 1000, \quad c(A) = 510, \quad c(B) = 490, \quad c(C) = 427,$$

$$c(A \cap B) = 189, \quad c(A \cap C) = 140, \quad c(B \cap C) = 85.$$

(III-4) (*A*.3.) 100 kuboren bilduma baten 100 kuboren aurpegiak gorriak, urdinak edo berdeak dira. 80 kubok, gutxienez, aurpegi gorri bat dute, 85ek, gutxienez, aurpegi urdin bat eta 75ek, gutxienez, aurpegi berde bat dute. Datu horietan oinarrituta ezin da esan hiru koloretako aurpegiak dituen x kubo-kopurua, baina zerbait esan daiteke. Zer da?

(III-5) Zenbat eratara koka daiteke ilara batean n mutil eta n neska, baldin eta sexu bereko bi pertsona ezin badira elkarrekin egon?

(III-6) n tamainako talde batean A, B eta C izeneko pertsonak hartzen dira aintzat. Zenbat eratara koka daitezke ilara batean n gizabanakoak, A, B eta C pertsonak elkarrekin eta ordena horretan egon dadin?

(III-7) Zenbat segida ($m + n$ osagairekin) osa daiteke m zero eta n bat erabiliz, bi bateko jarraian ez egonda?

(III-8) Kalkula ezazu n bola bereiziak n zenbakidun kutxatan sartzeko era kopurua,

a) kutxa hutsik geratu gabe.
b) zehatz-mehatz kutxa bat hutsik geratuz.
c) zehatz-mehatz bi kutxa hutsik geratuz.

(III-9) (*A*.3.) Kalkula ezazu berarekiko $\{1, 2, \dots, n\}$ multzoaren bijekzio-kopurua, zehazki $k(\leq n)$ elementu finko mantenduz. Azal itzazu itzulpen batzuk, esate baterako, adieraz itzazu bolak kutxatan kokatzearen problema eta dantza-bikoteak osatzearen problema baliokideak.

(III-10) Zenbat azpimultzo atera daitezke $\{a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n\}$ multzotik gutxienez a elementuren bat eta gutxienez b elementuren bat izanik?

(III-11) Zenbat zenbaki palindromo dago b oinarria duen zenbaki-sisteman $n \geq 2$ zifra esanguratsua izanik?

(III-12) Jai bateko gonbidatuen artean, izan bedi n zenbakia gonbidatu kopuru bakoitia agurtu dutenen kopurua. Frogatu ezazu n bikoitia dela.

(III-13) Izan bedi n zenbaki arrunta. Frogatu ezazu n karratu perfektua dela baldin eta soilik baldin zatitzaile-kopuru bakoitia badu (1 eta n barne).

(III-14) (*A*.3.) Zenbat zatitzaile ditu $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ faktore lehenetako deskonposizioa duen zenbakiak? Zenbat da zatitzaile guztien batura?

(III-15) $(A.3.)$ (Eulerren ϕ funtzioa) n zenbaki arrunt guztietarako defini dezagun $\phi(n) := c(A_n)$, non

$$A_n := \{k \in \{1, 2, \dots, n\} \ : \ k \text{ lehena } n\text{-rekiko}\}.$$

Frogatu honako hau: baldin eta $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$ faktore lehenetako n-ren deskonposizioa bada, orduan

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

(III-16) $(A.3.)$ (Legendre) Izan bitez p zenbaki lehena eta n zenbaki arrunta. Kalkula ezazu p zenbakiak zenbat aldiz zatitzen duen $n!$. (Oharra: esaten da p zenbakiak hiru aldiz zatitzen duela m, baldin eta m zenbakia p^3 zenbakiaz zatigarria bada, baina p^4 zenbakiaz zatigarria ez bada; hau da, p^3 zenbakiak m zatitzen duen p-ren berredura handiena bada; beste era batean esanda, faktore lehenetako n-ren deskonposizioan p biderkatzailean p^3 agertzen bada.)

(III-17) 10! zenbakiaren bukaeran, 2 zero daude, izan ere, $10! = 3.628.800$. Zenbat zero daude 1.000! zenbakiaren amaieran?

(III-18) Izan bitez p eta q zenbaki arruntak, $p \geq q$. $(0,0)$tik (p,q)rainoko *gorabehera* zenbat ibilbide osa daiteke, OX ardatza gurutzatuz (hots, $y = -1$ zuzeneraino helduz)? (Laguntza: simetria-argudio bat erabiliz, $(0,-2)$tik (p,q)rainoko eta murrizketa gabeko *gorabehera* ibilbide batera itzul daiteke.)

(III-19) $(A.3.)$ Zinema-areto baten sarrerak 5 eurokoak dira. Sarrerak saltzen hastean, kutxan ez dago kanbiorik. Zinema-aretoaren aurrean, m pertsona daude, bakoitzak 5 euroko billetea duena, eta beste n pertsona, bakoitzak 10 euroko billetea duena, $n \leq m$. Zenbat eratara ordena daitezke $m + n$ pertsonak ilara batean kutxa kanbiorik gabe gera ez dadin? Ariketa honen eta aurrekoaren artean erlaziorik ba al dago?

(III-20) $(A.3.)$ $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ gorputzaren gaineko hiru dimentsiotako $\mathcal{E}_3$ espazio afinean, kalkula itzazu:

a) puntuen kopuru osoa,
b) zuzenen kopuru osoa,
c) planoen kopuru osoa,
d) zuzen bakoitzean dagoen puntu kopurua,
e) puntu bakoitzetik pasatzen den zuzen kopurua,
f) plano bakoitzean dagoen puntu kopurua,
g) puntu bakoitzetik pasatzen den plano kopurua,
h) plano bakoitzean dagoen zuzen kopurua,
i) zehaztutako zuzen batetik pasatzen den plano kopurua,
j) zehaztutako plano batekiko paraleloa den plano kopurua,
k) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den zuzen kopurua,
l) zehaztutako plano batekiko paraleloa den zuzen kopurua,
m) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den plano kopurua,
n) zehaztutako zuzen batekin gurutzatzen den zuzen kopurua.

Laugarren ariketa-zerrenda: olinpiada matematikoetako problemak

(IV-1) (A.4.) Alderdi politiko baten kongresu batean, 2.000 bazkide daude. Kazetari baten arabera, bilera batean, $\%12,\overset{\frown}{12}$ emakumezkoak dira, eta $\%23,4\overset{\frown}{23}$ sektore kritikoan daude. Zenbat bazkide ez dira joan bilerara?

(IV-2) (A.4.) Izan bedi 3 zifradun 14 zenbaki arrunt desberdin dituen Ω multzoa. Frogatu ezazu existitzen direla bi azpimultzo $A \subset \Omega$ eta $B \subset \Omega$ ez-hutsak eta bateraezinak direnak non honako hau betetzen baita:

$$A\text{-ren elementuen batura } = B\text{-ren elementuen batura}$$

(IV-3) (A.4.) Dantzaldi batera, 8 neska eta 8 mutil joan dira. Ilaran, neskak eta mutilak txandaka daude eserita, lehenengoa mutila izanik. Zenbat eratara osa daiteke 5 bikote dituen multzoa, baldin eta bikote guztiak hasieran jarraian zeuden neskek eta mutilek osatzen badituzte?

(IV-4) (A.4.) Bilera batean, 5 nazionalitate desberdineko 201 pertsona daude. 6 pertsonako talde bakoitzean, gutxienez, 2 adin berekoak dira. Frogatu ezazu bileran nazionalitate bereko, adin bereko eta sexu bereko gutxienez 5 pertsona daudela.

(IV-5) Izan bedi $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Kalkula ezazu $f : A \to A$ aplikazio-kopurua, non:

a) $(f \circ f)(x) = x,\ \forall x \in A$
b) $(f \circ f \circ f)(x) = x,\ \forall x \in A$

(IV-6) Izan bedi $A \subset M := \{1, 2, \ldots, 10, 11\}$. Esaten da A *azpimultzo jatorra* dela honako propietate hau betetzen badu:

$$2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A \text{ eta } 2k + 1 \in A.$$

Multzo hutsa eta M jatorrak dira. Zenbat dira M-ren azpimultzo jatorrak?

(IV-7) (A.4.) Izan bedi

$$q(n) := \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor,\ n = 1, 2, \ldots$$

a) Kalkula itzazu $q(n)$ balioak, $1 \leq n \leq 25$. Balioei begiratuz, zein uste duzu direla n balioak non $q(n) > q(n + 1)$?
b) Frogatu aurreko aierua, hots, kalkula itzazu $q(n) > q(n + 1)$ betetzen duten zenbaki arrunt guztiak.

(IV-8) (A.4.) Marraztu daitezke planoan 2.003 zuzenki, non bakoitzak zehazki beste hiru zuzenki mozten baititu?

(IV-9) Dama-jokoaren 8×8 taulan, 24 fitxak jarri dira goiko hiru ilarak betetzen. Fitxen kokapena alda daiteke honako arau honi jarraituz: edozein fitxak hutsik dagoen leku batera beste baten gainetik salto egin dezake, horizontalki (ezkerretara edo eskuinetara), bertikalki (gora edo behera) edo diagonalki. Posible da fitxa guztiak beheko hiru ilaretan kokatzea?

(IV-10) Zein da bete behar dugun kiniela kopuru minimoa, kinielaren batean gutxienez 5 emaitza asmatuko ditugula ziurtatzeko?

Oharra: zenbakizko soluzioak B.1. eranskinean aurki daitezke.

2. gaia

Konbinazio-identitateak

2.1. Konbinazio-identitateak

Zenbaki konbinatorioen oinarrizko propietateak

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}, \; n, k \geq 0$$

i) $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

ii) Baldin eta $k > n$ bada, $\binom{n}{k} = 0$

iii) Baldin eta $0 \leq k \leq n$ bada, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

iv) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

v) Baldin eta $1 \leq k \leq n$ bada, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

vi) Baldin eta $1 \leq k \leq n$ bada, $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

vii) Baldin eta $0 \leq r \leq k \leq n$ bada, $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}$

Tartaglia-Pascalen triangelua

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7} \\
\binom{8}{0} \quad \binom{8}{1} \quad \binom{8}{2} \quad \binom{8}{3} \quad \binom{8}{4} \quad \binom{8}{5} \quad \binom{8}{6} \quad \binom{8}{7} \quad \binom{8}{8}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

2.1. irudia: Zenbaki konbinatorioen triangelua, $n \leq 8$

Zenbaki konbinatorioen identitateak

1) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n, \quad n \geq 0$

2) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad n \geq 1$

3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}, \quad n \geq 1$

4) $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ segida gorakorra da bere maximoraino eta gero beherakorra. Baldin n bikoitia bada, maximoa $\binom{n}{n/2}$ da; bestela, maximoak $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ eta $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ dira.

5) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-2} + \ldots + \binom{n-(k+1)}{0}$

6) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1}$

7) **Vandermonderen identitatea**: izan bitez $m, n, r \geq 0$,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{r-2} + \ldots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

8) (Ondorioa)

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Estrategiak:

- Adierazpena aldatu, problema ezagunekin erlazionatzeko,
- n balio batzuekin kalkulatu, aierua egin eta frogatu.

Zenbaki konbinatorioen beste formula batzuk

1) 1.1 Baldin eta $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$

1.2 Baldin eta $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

1.r (Propietate orokorra) Baldin eta $n \geq r \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} k^{\underline{r}}\binom{n}{k} = n^{\underline{r}}2^{n-r}$

2) 2.1 Baldin eta $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$

2.2 Baldin eta $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-2}k(k-1)\binom{n}{k} = \begin{cases} 2, & n = 2 \\ 0, & n > 2 \end{cases}$

2.r (Propietate orokorra) Baldin eta $n \geq r \geq 0$, $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r}k^{\underline{r}}\binom{n}{k} = \begin{cases} r!, & n = r \\ 0, & n > r \end{cases}$

3) 3.1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}^2 = n^2\tbinom{2(n-1)}{n-1}$

3.2 $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k^2(k-1)^2\binom{n}{k}^2 = n^2(n-1)^2\tbinom{2(n-2)}{n-2}$

3.r (Propietate orokorra) $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} (k^{\underline{r}})^2\binom{n}{k}^2 = (n^{\underline{r}})^2\tbinom{2(n-r)}{n-r}$

4) 4.1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \tfrac{1}{n+1}$

4.2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+2}$

4.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}\binom{n}{k} = \frac{1}{2}\frac{1}{n+3}$

5) 5.1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

5.2 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(2^{n+2}-(n+3))$

5.3 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^3}\binom{n}{k} = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(2^{n+3}-(n+4)-\frac{(n+2)(n+3)}{2}\right)$

2.2. Binomioaren formula

2.1. teorema: (Newtonen binomioaren formula): *Izan bitez* $n \in \mathbb{N}^*, x, y, \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

Kasu bereziak

1) $\displaystyle(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n.$

2) $\displaystyle(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}x^n.$

Aplikazioak (Binomioaren konbinazio-identitateak)

1) $(1+x)^n$ binomioaren formulan x ordezkatuz,

- Baldin eta $x = 1$ bada, $\displaystyle 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$
- Baldin eta $x = -1$ bada, $\displaystyle 0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

2) $(1+x)^n \cdot (1+x)^m$ binomioaren formulen biderkadura aintzat hartuz,

- Vandermonderen formula $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$

3) $(1+x)^n + (1+x)^{n+1} + \ldots + (1+x)^{n+r}$ batura aintzat hartuz,

- $\binom{n+r+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k}$

4) $(1+x)^n$ binomioaren formula r aldiz deribatuz,

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k^{\underline{r}} x^{k-r} = n^{\underline{r}} (1+x)^{n-r}$$

- Baldin eta $x = 1$ bada, $\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} k^{\underline{r}} = n^{\underline{r}} 2^{n-r}$
- Baldin eta $x = -1$ bada, $\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-r} k^{\underline{r}} = \begin{cases} r!, & n = r \\ 0, & n > r \end{cases}$

5) $(1+x)^n$ binomioaren formula (a, b) tartean integratuz,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+b)^{n+1} - (1+a)^{n+1}}{n+1}$$

- Baldin eta $(a, b) = (0, 1)$ bada, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$
- Baldin eta $(a, b) = (-1, 0)$ bada, $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$
- Baldin eta $(a, b) = (-1, 1)$ bada, $\sum_{k=0,2,4,\ldots} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^n}{n+1}$

6) $\int_0^b \int_0^t (1+x)^n \, dx \, dt$ garatuz,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b^{k+2}}{(k+1)(k+2)} = \frac{(1+b)^{n+2} - 1 - b(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

- Baldin eta $b = 1$ bada, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+2} - (n+3)}{(n+1)(n+2)}$
- Baldin eta $b = -1$ bada, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(k+1)(k+2)} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+2}$

2.3. Koefiziente multinomialak

24. definizioa: *Izan bitez* $n, r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}^*$, *non* $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$ *betetzen baita;* **koefiziente multinomiala** *honela definitzen da:*

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

Esanahiak:

- n luzeradun segida kopurua, x_1 balioa r_1 aldiz, x_2 balioa r_2 aldiz, ..., x_k balioa r_k aldiz agertzen direlarik.
- k zenbakidun kutxatan n zenbakidun bola kokatzea, 1. kutxan r_1 bola, 2. kutxan r_2 bola, ..., k. kutxan r_k bola daudelarik.

Oinarrizko propietateak

i) $k = 1$ denean, $\binom{n}{r_1} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $k = 2$ denean, $\binom{n}{r_1, r_2} = \binom{n}{r_1, n - r_1} = \frac{n!}{r_1! \cdot (n - r_1)!} = \binom{n}{r_1}$ zenbaki konbinatoriak dira.

iii) $\binom{n}{n, 0, \ldots, 0} = \binom{n}{0, n, \ldots, 0} = \ldots = \binom{n}{0, 0, \ldots, n} = 1$

iv) $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \binom{n}{r_1}\binom{n - r_1}{r_2}\binom{n - r_1 - r_2}{r_3} \cdots \binom{n - r_1 - \ldots - r_{k-2}}{r_{k-1}}$

v) Baldin eta $r_i \geq 1$ bada, $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \frac{n}{r_i}\binom{n-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_k}$

vi) Baldin eta $r_i \geq 1$ bada, $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \sum_{i=1}^{k}\binom{n-1}{r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_k}$

25. definizioa: $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ *ekuazioaren zenbaki oso ez-negatiboak dituzten soluzioen multzoari* $\mathcal{S}_{k,n}$ *notazioa ematen zaio.*

$$c(\mathcal{S}_{k,n}) = CR_{k,n} = \binom{k + n - 1}{n}$$

2.2. teorema: (Multinomioaren formula): *Izan bitez* $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$,

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{(r_1, r_2, \ldots, r_k) \in \mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

Aplikazioak

1) Baldin eta $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$ bada, $\quad k^n = \displaystyle\sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_k)\in\mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k}$

2) Baldin eta $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\lfloor k/2 \rfloor} = -1$ eta $x_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} = \ldots = x_k = 1$ badira,

   - k bikoitia denean, $\quad 0 = \displaystyle\sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_k)\in\mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} (-1)^{r_1+r_2+\ldots+r_{k/2}}$

   - k bakoitia denean, $\quad 1 = \displaystyle\sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_k)\in\mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} (-1)^{r_1+r_2+\ldots+r_{\lfloor k/2 \rfloor}}$

3) x_1-ekiko deribatuz, $\quad nk^{n-1} = \displaystyle\sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_k)\in\mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} r_1$

4) x_1-ekiko integratuz, $\quad \dfrac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{n+1} = \displaystyle\sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_k)\in\mathcal{S}_{k,n}} \binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} \frac{1}{r_1+1}$

5) Koefiziente multinomialak eta zatigarritasuna

   - $(r_1!r_2!\cdots r_k!)$ kantitateak $n!$ zatitzen du.
   - Partikularki, $(r!)^k$ kantitateak $(kr)!$ zatitzen du.
   - Horren ondorioz, $[((k-1)!)!]^k$ kantitateak $(k!)!$ zatitzen du.

2.4. Binomio orokortuaren formula

26. definizioa: *Izan bitez $\alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^*$; orduan, $\binom{\alpha}{k}$ honela definitzen da*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k \geq 1 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{N}^*$ denean soilik, esanahi konbinatorioa dugu.

Oinarrizko propietateak:

i) $k \geq 1$ bada, $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k}$

ii) $k \geq 1$ bada, $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k}\binom{\alpha-1}{k-1} = \frac{\alpha-k+1}{k}\binom{\alpha}{k-1}$

iii) $\displaystyle\binom{-\alpha}{k} = (-1)^k \binom{\alpha+k-1}{k}$

Kasu bereziak:

- $\alpha = n, \ n \in \mathbb{N}^*$ denean, $\binom{\alpha}{k} = \binom{n}{k} = C_{n,k}$
- $\alpha = -n, \ n \in \mathbb{N}^*$ denean, $\binom{\alpha}{k} = \binom{-n}{k} = (-1)^k CR_{n,k}$

Taylorren garapena

Izan bedi $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, n mailako polinomioa. Orduan,

$P^{(k)}(x) = k^{\underline{k}} a_k + (k+1)^{\underline{k}} a_{k+1} x + \ldots + n^{\underline{k}} a_n x^{n-k}$ *eta*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

0-ren ingurunean, **P(x) polinomioaren Taylorren garapena** *deitzen da.*

Izan bedi infinitu aldiz diferentziagarria den $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ funtzioa. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$. Baldintza batzuenpean, $\exists r > 0$, non $\forall x \in (-r, r)$, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ baita. Eta

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Esaten da 0-ren ingurunean **f(x) funtzioaren Taylorren seriea** *dela. Seriea, $(-r, r)$ tartean, absolutuki konbergentea da, eta $(-r, r)$ tartean f* **funtzio analitikoa** *dela.* Adibidez, $f(x) = e^x$ funtzioaren Taylorren seriea honako hau da: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \ \forall x \in \mathcal{C}$.

Binomio orokortuaren formula

Izan bedi $\alpha \in \mathbb{R}$ eta $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ funtzioa.

- $f_\alpha(x)$ funtzioaren definizio-eremuak beti dauka $(-1, \infty)$ bere barnean.
- Analisi Matematikoan (Kalkulu Diferentzialean) frogatzen da bere Taylorren garapena $x = 0$ puntuaren inguruan honako hau dela:

$$f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} x^k, \quad |x| < 1$$

- Honako adierazpen honi **binomio orokortuaren formula** deitzen zaio:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1$$

Adibideak:

1) Izan bitez $\alpha = n \in \mathbb{N}^*,\ x \in \mathbb{C}$,

- $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\ x^k$
- $(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ C_{n,k}\ x^k$

2) Izan bedi $\alpha = -1$,

- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,\quad (-x)$ arrazoia duen serie geometrikoa da
- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,\quad x$ arrazoia duen serie geometrikoa da

3) Izan bedi $\alpha = -2$,

- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots,\quad (-x)-$rekiko serie aritmetiko-geometrikoa da
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots,\quad x-$rekiko serie aritmetiko-geometrikoa da

4) Izan bedi $\alpha = -n,\ n \in \mathbb{N}$,

- $(1+x)^{-n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\ CR_{n,k}\ x^k$
- $(1-x)^{-n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} CR_{n,k}\ x^k$

5) Izan bedi $\alpha = -1/2$,

- $(1+x)^{-1/2} = \sum \binom{-1/2}{k} x^k = \sum (-1)^k \dfrac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!} = \sum \binom{2k}{k} \left(\dfrac{-x}{2^2}\right)^k$
- $(1-x)^{-1/2} = \sum (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^k = \sum \binom{2k}{k} \left(\dfrac{x}{2^2}\right)^k$

6) Izan bedi $a > 0,\quad (a+bx)^\alpha = \sum \binom{\alpha}{k} b^k a^{\alpha-k} x^k,\ |x| < |a/b|$

Aplikazioak:

1) Izan bitez $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $(1+x)^\alpha (1+x)^\beta = (1+x)^{\alpha+\beta}$ denez, **Vandermonderen formula orokorra**

$$\binom{\alpha+\beta}{r} = \binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{r} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{r-1} + \ldots + \binom{\alpha}{r}\binom{\beta}{0}$$

2) Izan bitez $\alpha \in \mathbb{R},\ r, k \in \mathbb{N}^*$; $(1+x)^\alpha + (1+x)^{\alpha+1} + \ldots + (1+x)^{\alpha+r} = \frac{1}{x}[(1+x)^{\alpha+r+1} - (1+x)^\alpha]$ denez,

$$\binom{\alpha+r+1}{k+1} - \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha+1}{k} + \ldots + \binom{\alpha+r}{k}$$

2.5. Konbinazio-identitateen ariketa-zerrendak

Bosgarren ariketa-zerrenda: zenbaki konbinatorioak

(V-1) Frogatu ezazu honako berdintza hau:

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n-1}{n-1} - \binom{2n-1}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Zer ondoriozta daiteke zatigarritasunari buruz?

(V-2) Frogatu ezazu $\binom{2n}{n}$ beti bikoitia dela.

(V-3) Frogatu ezazu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

aurreko zenbaki konbinatorioen segida hasieran gorakorra eta gero beherakorra dela. Baldin eta n bikoitia bada, erdiko osagaia handiena da; baldin eta n bakoitia bada, bi erdiko osagaiak handienak dira.

(V-4) Beheko formula ezagun honetatik

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} + \ldots + \binom{k+r}{r} = \binom{k+r+1}{r},$$

frogatu itzazu honako beste formula hauek:

a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

d) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

g) Orokor bihurtu a) b) c) formulak.

(V-5) Aurreko ariketaren hasierako formulan oinarrituta,

a) Frogatu ezazu

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

b) Idatz ezazu interpretazio konbinatorioa.

c) Frogatu ezazu berriro a) atalean oinarrituta

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(V-6) Frogapen konbinatorioa erabiliz, egiaztatu honako formula hau

$$k^2 = 2\binom{k}{2} + \binom{k}{1}.$$

Aurreko atala eta aurreko ariketan oinarrituta, frogatu ezazu

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(V-7) Honako berdintza ezagun honetatik hasita

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} - \binom{n}{r},$$

ideia bera eskuinaldeko osagaiei aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\binom{n}{r-1} = \binom{n+2}{r+1} - 2\binom{n+1}{r+1} + \binom{n}{r+1}.$$

Frogatu ezazu prozesu hori $k-2$ aldiz gehiago errepikatzen bada orduan emaitza honako hau dela:

$$\binom{n}{r-1} = \binom{k}{0}\binom{n+k}{r+k-1} - \binom{k}{1}\binom{n+k-1}{r+k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{k}{k}\binom{n}{r+k-1}.$$

(V-8) Frogatu ezazu honako formula hau

$$\binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{0}.$$

(V-9) Frogatu ezazu honako identitate hau

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1} + \ldots + \binom{m}{n}\binom{m-n}{0} = 2^n\binom{m}{n}.$$

(V-10) (*A*.5.) Banatu zatiki sinpletan

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

Aurreko emaitza erabiliz, frogatu ezazu (berriro)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

(V-11) Frogatu ezazu jarraian dauden edozein lau zenbaki konbinatorio

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}, \binom{n}{r+3},$$

ezin direla inoiz egon progresio aritmetikoan.

(V-12) Izan bedi

$$a_n := \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \ldots + \frac{1}{\binom{n}{n}}.$$

Frogatu ezazu

$$a_n = \frac{n+1}{2n} a_{n-1} + 1 \quad \text{eta} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

(V-13) (*A*.5.) Frogatu itzazu

a) $(n!)^2 > n^n, \ \forall n > 2.$

b) $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n, \ \forall n \geq 2.$

c) $\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$

(V-14) $\binom{n}{r}$ notazioa r-naka hartutako n elementuen konbinazioak adieraztekoa denez, erabil dezagun $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ r-naka hartutako n elementuen errepikatuzko konbinazioak adierazteko. Jakin badakigu,

$$\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \binom{n+r-1}{r}.$$

Frogatu itzazu

a) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle + \left\langle {n-1 \atop r} \right\rangle.$

b) $\left\langle {n \atop r} \right\rangle = \frac{n}{r}\left\langle {n+1 \atop r-1} \right\rangle = \frac{n+r-1}{r}\left\langle {n \atop r-1} \right\rangle.$

c) $\left\langle {n+1 \atop r} \right\rangle = \left\langle {n \atop 0} \right\rangle + \left\langle {n \atop 1} \right\rangle + \ldots + \left\langle {n \atop r} \right\rangle.$

d) n finkorako, $\left\langle {n \atop r} \right\rangle$ zenbakiak Pascalen triangeluaren diagonaletan agertzen dira.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

(V-15) (*A*.5.) *Gaussen koefiziente binomialak* $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ honela definitzen dira:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n-1}{q-1} \cdot \frac{q^{n-1}-1}{q^2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1}, \ r = 1, 2, \ldots, n.$$

Adibidez,

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \frac{q^4-1}{q-1}\frac{q^3-1}{q2-1} = \frac{(q^2+1)(q+1)(q-1)(q^2+q+1)(q-1)}{(q-1)(q+1)(q-1)}$$
$$= (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4+q^3+2q^2+q+1.$$

(Beraz, Gaussen koefiziente binomialak ez dira zenbakiak, funtzioak baizik. Baina sinplifikatzeagatik, ez da notazioan adierazten.)

a) Kalkula itzazu $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$.

b) Frogatu ezazu *batuketaren legea*:

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}q^{n+1-r} = \begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}.$$

c) Frogatu ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.

d) Frogatu ezazu

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

e) Frogatu ezazu

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}.$$

f) Frogatu ezazu

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}qx^2 + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}q^3x^3.$$

g) Frogatu ezazu

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^rx) = \sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}q^{1+2+\ldots+(r-1)}x^r.$$

h) Aurreko erabiliz, Newtonen binomioaren formularen frogapen berri bat eman ezazu.

Seigarren ariketa-zerrenda: Newtonen binomioa

(VI-1) Izan bitez $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Kalkula itzazu:

a) $(x^2 - 2x^{-1})^8$ garapenean dagoen x^6-ren koefizientea.

b) $(x^b + x^c)^d$ garapenean dagoen x^a-ren koefizientea.

c) $(x^a + 1 + x^{-a})^b$ garapenean dagoen osagai konstantea.

(VI-2) (*Vandermonde*) Frogatu ezazu

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}.$$

(VI-3) (*Leibniz*) Izan bitez I tartearen gainean n aldiz diferentziagarriak diren f eta g funtzioak. Frogatu ezazu

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(VI-4) Frogatu ezazu edozein x-rako

$$(1+x)^n - \binom{n}{1} x(1+x)^{n-1} + \binom{n}{2} x^2(1+x)^{n-2} - \ldots + (-1)^n x^n = 1.$$

(VI-5) (*Lucas*) Ariketa honetan, *eragiketa egin* aditza erabil dezagun *deribatu eta jarraian x-rekiko biderkatu* adierazteko. Izan bedi honako hasierako identitate hau:

$$-(1-x)^n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} x^r.$$

a) k aldiz *eragiketa* burutuz ($k < n$), lor ezazu honako berdintza honen formula orokorra:

$$\binom{4}{1} 1^3 - \binom{4}{2} 2^3 + \binom{4}{3} 3^3 - \binom{4}{4} 4^3 = 0.$$

b) Zer lortzen da $k = n$ aldiz *eragiketa* egiten bada?

(VI-6) (*A*.6.) Frogatu ezazu honako identitate hau:

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}).$$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, idatz ezazu beste identitate bat zenbaki konbinatorioak erabiliz.

(VI-7) (*A*.6.) Honako identitate hau erabiliz

$$(1+x)^{-n}(1-x)^{-n} = (1-x^2)^{-n},$$

kalkula ezazu honako batura honen emaitza

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \binom{n+m-k-1}{m-k}.$$

(VI-8) (*A*.6.) (*American Mathematical Monthly*) Izan bitez m eta n zenbaki arrunt ez-negatiboak; kalkula ezazu honako adierazpen honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{n+k+1} \binom{m}{k} (1-y)^{n+k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{m+k+1} \binom{n}{k} y^{m+k+1}.$$

Zazpigarren ariketa-zerrenda: koefiziente multinomialak

(VII-1) Zenbat permutazio desberdin egin daiteke MISSISSIPI hitzaren letrekin? Zenbatetan ez dago bi I jarraian?

(VII-2) (*A*.7.) (Bola bereizgarriak kutxatan)

a) Zenbat eratara bana daiteke zenbakidun 3 kutxatan $3n$ bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?
b) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?
c) Zenbat eratara bana daiteke zenbakidun k kutxatan kn bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?
d) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(VII-3) Zenbat eratara bana daitezke sei sagar, madari bat, laranja bat, mertxika bat, banana bat, marrubi bat eta mahats bat, 3 pertsonaren artean?

(VII-4) Frogatu ezazu 2^n zenbakiak $(2n)!$ zatitzen duela, eta $n \geq 2$ denean zatidura bikoitia dela.

(VII-5) (*A*.7.) Frogatu ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $(n^2!)!$ zatitzen duela.

(VII-6) Izan bitez $r_1, r_2, \ldots, r_k \geq 1$; frogatu ezazu honako formula hau:

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} = \binom{n-1}{r_1 - 1, r_2, \ldots, r_k} + \binom{n-1}{r_1, r_2 - 1, \ldots, r_k} + \ldots + \binom{n-1}{r_1, r_2, \ldots, r_k - 1}$$

bi eratara: a) konbinatoria erabiliz, b) aljebran oinarrituz multinomioaren teoremaren bidez.

(VII-7) Frogatu ezazu honako formula hau:

$$\binom{n+s}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \sum \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}\binom{s}{l_1, l_2, \ldots, l_m},$$

non

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n, \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_m = s, \quad k_i + l_i = r_i, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

betetzen baitute eta zenbaki arrunt ez-negatiboak dituzten m-koteak diren $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ eta $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ bikote guztiek batura osatzen baitute.

Zein da formula horren bidez orokortzen den identitate ospetsuaren izena?

(VII-8) Kalkula ezazu honako batura honen emaitza

$$\sum (-1)^{a+b} \binom{n}{a, b, c, d},$$

non $a + b + c + d = n$ betetzen duten eta zenbaki arrunt eznegatiboak dauzkaten (a, b, c, d) laukoteek batura osatzen duten.

(VII-9) Kalkula ezazu $(x + y + z + w)^{11}$ garapenaren x^4yw^6 osagaiaren koefizientea.

(VII-10) Izan bedi $m \in \mathbb{N}$; frogatu ezazu $(1+x+x^2)^m$ garapenaren x^m osagaiaren koefizientea honako hau dela:

$$1 + \frac{m(m-1)}{(1!)^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(2!)^2} + \dots .$$

Zein da aurreko baturaren azken osagaia?

Oharra: zenbakizko soluzioak B.2. eranskinean daude.

3. gaia

Funtzio sortzaileak eta errepikapenak

3.1. Funtzio sortzaileak

Potentzia-seriea

27. definizioa: *Izan bedi a_n osagai orokorra duen $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ zenbaki konplexu edo errealen segida. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x_n + \ldots$* **potentzia-seriea** *deitzen da.*

3.1. teorema: *Izan bedi $\rho = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Orduan,*

- *Baldin eta $|x| < \rho$ bada, seriea absolutuki konbergentea da.*
- *Baldin eta $|x| > \rho$ bada, seriea ez da konbergentea.*
- *Baldin eta $|x| = \rho$ bada, ez dago emaitza orokorrik seriearen konbergentziari buruz.*

  ρ seriearen **konbergentzi erradioa** *deitzen da.*

Gogora ezazu ere honako emaitza hau: $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = l \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l$

Segidaren funtzio sortzailea

28. definizioa: *Izan bedi $a = (a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ segida eta $\rho > 0$ konbergentzia-erradioa duen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ potentzia-seriea. Orduan,* ***a* segidaren funtzio sortzailea** *honako funtzio hau da:*

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \rho$$

Funtzio sortzaileen propietateak:

i) g_a infinitu aldiz diferentziagarria da $(-\rho, \rho)$ tartean. Bere deribatuak ondoko serieak dira $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$g_a^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} (n)^{\underline{k}} a_n x^{n-k} = k^{\underline{k}} a_k + (k+1)^{\underline{k}} a_{k+1} x + \ldots, \qquad |x| < \rho$$

ii) $g_a^{(k)}$ funtzioa $a_n^{(k)} = (k+n)^{\underline{k}} a_{k+n}$ osagai orokorra duen segidaren funtzio-sortzailea da.

iii) g_a funtzioaren Taylorren seriea honako hau da:

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_a^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

iv) Baldin eta $g_a(x) = g_b(x)$, $\forall x < min(\rho_a, \rho_b)$ betetzen bada, orduan $a = b$ segida bera da.

Funtzio sortzaileen arteko eragiketak:

Izan bitez $a = (a_n)_{n \geq 0}$ eta $b = (b_n)_{n \geq 0}$ segidak eta haiei lotutako funtzio sortzaileak $g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < \rho_a$ eta $g_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < \rho_b$.

- (Batura)

$$g_a(x) + g_b(x) = g_{a+b}(x), \quad |x| < min(\rho_a, \rho_b).$$

Hau da, $g_a + g_b$ funtzioa $a + b = (a_n + b_n)_{n \geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da.

- (Eskalar batekiko biderkadura)

$$\lambda \cdot g_a(x) = g_{\lambda a}(x), \quad |x| < \rho_a.$$

Hau da, $\lambda \cdot g_a$ funtzioa $\lambda a = (\lambda \cdot a_n)_{n \geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da.

- (Biderkadura)

$$g_a(x) \cdot g_b(x) = (\sum a_n x^n) \cdot (\sum b_n x^n) = \sum (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n = \sum c_n x^n = g_c(x),$$

$$|x| < min(\rho_a, \rho_b).$$

Hau da, $g_a \cdot g_b$ funtzioa $c = a * b = (c_n)_{n \geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da. $c = a * b$ biderkadurari $a-$ren eta $b-$ren arteko konboluzio-biderkadura deitzen zaio.

I motako problemak: $(a_n)_{n \geq 0}$ *ezaguna izanik, aurkitu ezazu* g_a

a) e^x eta $(1 + x)^{\alpha}$ oinarrizko funtzioei lotutako adibideak

1) $(a_n) = 1,\ 1,\ \frac{1}{2!},\ \frac{1}{3!},\ \ldots$
2) $(a_n) = 1,\ -1,\ \frac{1}{2!},\ \frac{-1}{3!},\ \ldots$
3) $(a_n) = 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{1}{2!},\ 0,\ \frac{1}{3!},\ \ldots$
4) $(a_n) = 1,\ \lambda,\ \frac{\lambda^2}{2!},\ \frac{\lambda^3}{3!},\ \ldots$
5) $(a_n) = \binom{\alpha}{0},\ \binom{\alpha}{1},\ \binom{\alpha}{2},\ \binom{\alpha}{3},\ \ldots$
6) $(a_n) = \binom{\alpha}{0},\ -\binom{\alpha}{1},\ \binom{\alpha}{2},\ -\binom{\alpha}{3},\ \ldots$
7) $(a_n) = \binom{\alpha}{0},\ \lambda\binom{\alpha}{1},\ \lambda^2\binom{\alpha}{2},\ \lambda^3\binom{\alpha}{3},\ \ldots$
8) $(a_n) = 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots$

1) $g_a(x) = e^x$
2) $g_a(x) = e^{-x}$
3) $g_a(x) = e^{x^2}$
4) $g_a(x) = e^{\lambda x}$
5) $g_a(x) = (1+x)^\alpha, \quad |x| < 1$
6) $g_a(x) = (1-x)^\alpha, \quad |x| < 1$
7) $g_a(x) = (1+\lambda x)^\alpha, \quad |x| < 1/|\lambda|$
8) $g_a(x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

b) g_a menpeko funtzio sortzaileak

1) $(b_n) = 0,\ 0,\ 0,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$
2) $(b_n) = a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \ldots$
3) $(b_n) = a_0,\ 0,\ 0,\ a_1,\ 0,\ 0,\ a_2,\ \ldots$
4) $(b_n) = a_0,\ \lambda a_1,\ \lambda^2 a_2,\ \lambda^3 a_3,\ \ldots$
5) $(b_n) = a_0,\ -\lambda a_1,\ \lambda^2 a_2,\ -\lambda^3 a_3,\ \ldots$
6) $(b_n) = a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0,\ \ldots$
7) $(b_n) = 0,\ a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ 0,\ \ldots$

1) $g_b(x) = x^3 g_a(x)$
2) $g_b(x) = \frac{1}{x^3}(g_a(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2)$
3) $g_b(x) = g_a(x^3), \quad |x| < \sqrt[3]{\rho_a}$
4) $g_b(x) = g_a(\lambda x), \quad |x| < \rho_a/|\lambda|$
5) $g_b(x) = g_a(-\lambda x), \quad |x| < \rho_a/|\lambda|$
6) $g_b(x) = \frac{1}{2}(g_a(x) + g_a(-x))$
7) $g_b(x) = \frac{1}{2}(g_a(x) - g_a(-x))$

c) segida ezagunen menpeko segida

1) $c_n = 2^n + \frac{1}{n!}$
2) $c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$
3) $c_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$
4) $c_n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2} + \ldots + \binom{\alpha}{n}$
5) $c_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
6) $c_n = n\binom{\alpha}{n}$

1) $g_c(x) = \frac{1}{1-2x} + e^x, \quad |x| < 1/2$
2) $g_c(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^x, \quad |x| < 1$
3) $g_c(x) = \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}, \quad |x| < 1$
4) $g_c(x) = \frac{(1+x)^\alpha}{1-x}, \quad |x| < 1$
5) $g_c(x) = \frac{1}{1-x}\ g_a(x), \quad |x| < min(1, \rho_a)$
6) $g_c(x) = \alpha\ x\ (1+x)^{\alpha-1}, \quad |x| < \rho_a$

II motako problemak: g_a *ezaguna izanik, aurkitu ezazu* $(a_n)_{n\geq 0}$

a) $g_a^{(n)}$ kalkulatzeko erraza bada, $a_n = \frac{g_a^{(n)}(0)}{n!}$ erabiliz

1) $g_a(x) = e^x$
2) $g_a(x) = (1+x)^\alpha$
3) $g_a(x) = \log(1+x)$
4) $g_a(x) = \sin x$
5) $g_a(x) = \cos x$

1) $a_n = \frac{1}{n!}$
2) $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$
3) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
4) $a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$
5) $a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$

b) Polinomioen zatidurak

1) $g_b(x) = \dfrac{1}{\alpha x+\beta}, \quad \beta \neq 0$
2) $g_b(x) = \dfrac{1}{(\alpha x+\beta)^m}, \quad m \in \mathbb{N},\ \beta \neq 0$
3) $g_b(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$
4) $g_b(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$

1) $b_n = \frac{(-1)^n \alpha^n}{\beta^{n+1}}$
2) $b_n = \binom{-m}{n}\frac{\alpha^n}{\beta^{n+m}}$
3) $b_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$
4) $b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

c) Beste batzuk

1) $g_c(x) = e^{x^4}$
2) $g_c(x) = e^{-x}\cdot(1+x)^{-2}$
3) $g_c(x) = (1+x)^\alpha(1+x)^\beta$
4) $g_c(x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\alpha$

1) $c_{4n} = \frac{1}{n!}$
2) $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\binom{-2}{n-k}$
3) $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$
4) $c_{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{\alpha}{k}\binom{\alpha}{2n-k}(-1)^{2n-k} = \binom{\alpha}{n}(-1)^n$

29. definizioa: $(a_n)_{n\geq 0}$ *segidaren* **funtzio sortzaile esponentziala** $\left(\frac{a_n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea da. Hau da,* $f_a(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}x^n$.

Adibidez, 1, 1, 1, … segidaren funtzio sortzaile esponentziala e^x da.

3.2. Funtzio sortzaileak eta konbinazio-problemen erabilerak

$n-$ren menpeko problema konbinatorioa badugu eta a_n era kopurua kalkulatu behar badugu, funtzio sortzaileak lagungarriak izan daitezke. Batzuetan, errazagoa da $g_a(x)$ f.s. aurkitzea eta, horren ondorioz, a_n kopurua x^n osagaiari lotutako koefizientea bilatzea.

Ekuazioaren soluzioak

3.2. teorema: *Izan bedi a_n kantitatea zenbaki oso eznegatibo dituen $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ ekuazioaren soluzio kopurua.*

$$g(x) = (1 + x + x^2 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) \cdot \overset{(k)}{\ldots} \cdot (1 + x + x^2 + \ldots) = (1 - x)^{-k}, \quad |x| < 1$$

funtzioa $a = (a_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea denez, $g(x)$ seriearen x^n osagaiari lotutako a_n koefizientea $\binom{-k}{n}(-1)^n = \binom{n+k-1}{n}$ da.

Orokortu dezagun aurreko emaitza.

3.3. teorema: (Funtzio sortzaileen teorema orokorra): *Izan bitez $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbb{N}^*$ azpimultzo ez-hutsak, $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$, $\ldots, A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \ldots\}$ eta a_n kantitatea $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_k \in A_k$ dituen $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ ekuazioaren soluzio kopurua.*

$$g(x) = (x^{a_{11}} + x^{a_{12}} + x^{a_{13}} + \ldots) \cdot (x^{a_{21}} + x^{a_{22}} + x^{a_{23}} + \ldots) \cdot \overset{(k)}{\ldots} \cdot (x^{a_{k1}} + x^{a_{k2}} + x^{a_{k3}} + \ldots), \quad |x| < 1$$

funtzioa aurreko $a = (a_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea da.

Aplikazioak

1) Baldin eta 10 dado airera botatzen badira, zenbat eratara lor daiteke 24 puntu?
   $a_{24} = \binom{10}{0}\binom{23}{9} - \binom{10}{1}\binom{17}{9} + \binom{10}{2}\binom{11}{9}$

2) Baldin eta x_1 eta x_2 zenbaki bikoiti eznegatibo eta x_3 eta x_4 zenbaki oso eznegatibo badira, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n$ ekuazioaren zenbat soluzio dago?
   $a_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r (r+1)\binom{n-r+3}{3}$

3) Baldin eta zentimoko 1eko txanponak, 5 zentimoko txanponak eta 20 zentimoko txanponak baditut, zenbat eratara lor daiteke n zentimo?
   $g_a(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{r=0}^{\infty} x^{5r} \sum_{s=0}^{\infty} x^{20s} = \sum_{m+5r+20s=n,\ m,r,s,\geq 0} x^n \Rightarrow m + 5r + 20s = n$ betetzen dutenen a_n soluzio kopurua x^n-ren koefizientea da.

4) Partiketak.

   (a) Zein da 5 edo 5 baino txikiagoak diren osagaiak dituzten $n-$ren partiketa kopurua?
   $g_a(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^4}\frac{1}{1-x^5}$

   (b) Zein da 7 edo 7 baino txikiagoak diren osagaiak eta guztiak diferenteak dituzten $n-$ren partiketa kopurua?
   $g_a(x) = (1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^7)$

   (c) Zein da 7 edo 7 baino txikiagoak diren osagai bakoitiak dituzten $n-$ren partiketa kopurua?
   $g_a(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}$

3.3. Errepikapenak

Errepikapenak aplikazio ugaritan agertzen dira, besteak beste, Biologian, Ekonomian, seinale digitalaren prozesaketan.

Gogora ditzagun sailkapenaren 1.6. atalean ikusitako adibide batzuk.

Adibideak:

1) $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoko azpimultzo kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}\}$

2) $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoko ondoz ondoko zenbakirik ez duen azpimultzo kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$

3) 0 eta 1 zenbakiez osatutako eta bi 1 jarraian ez duen n luzeradun segida kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$

4) Oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean, n maila duen eskailera igotzeko era kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$

5) 2×1 eta 2×2 tamainako baldosak erabiliz $2 \times n$ tamainako gela betetzeko era kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}\}$

Ikus ditzagun adibide berri batzuk. Has gaitezen Lucas[1]en Brahmaren dorrearekin.

1) Hanoiko edo Brahmaren dorrea hiru makila eta n disko dituen joko matematiko bat da, François Edouard Anatole Lucas (1842-1891, Frantzia) matematikariak asmatua. Hasieran, disko guztiak makil batean daude sartuta txikienetik handienera; disko guztiak hasieran dauden moduan beste makil batera pasatzea du helburu. Bi arau ditu: (1) mugimendu bakoitzean disko bakarra mugi daiteke; eta (2) ezin daiteke jarri disko bat bera baino txikiagoa den beste disko baten gainean. Zein da a_n mugimendu kopuru minimoa?. $\{a_0 = 0,\ a_n = 1 + 2a_{n-1}\}$

3.1. irudia: Lucasen dorrea

[1] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lucas.html`

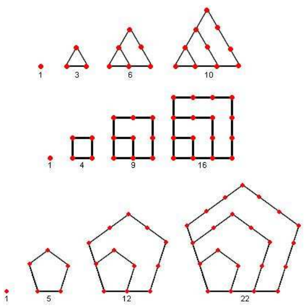
3.1. taula: Dorrearen mugimendu-segida

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
a_n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	...

2) Aintzat har ditzagun n zuzen, binaka elkar ebakitzen dutenak, baina haietatik 3 zuzen, edozein, puntu beretik pasatzen ez direnak. Izan bedi a_n kantitatea aurreko zuzenek mugatutako eskualde kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_n = n + a_{n-1}\}$

3) Izan bedi a_n kantitatea $[n]$ multzoko inboluzio kopurua. $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}\}$ **30. definizioa:** *Izan bedi* Ω *multzoa.* $f : \Omega \to \Omega$ *aplikazioa* **inboluzioa** *da baldin eta* $f \circ f$ *identitatea bada.*

4) Zenbaki poligonalak



3.2. irudia: Zenbait zenbaki poligonal

$(k = 3) \quad T_0 = 0,\ T_n = T_{n-1} + n$

$(k = 4) \quad C_0 = 0,\ C_n = C_{n-1} + 2n - 1$

$(k = 5) \quad P_0 = 0,\ P_n = P_{n-1} + 3n - 2$

Zein da zenbaki poligonalen formula orokorra? $K_0 = 0,\ K_n = K_{n-1} + n + (k-3)(n-1)$

Errepikapen batetik, $a_n$ren formula orokorrera pasa daiteke?

1. mailako errepikapen linealak

3.4. teorema: *Izan bedi ez-homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 1. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0 \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta, & n \geq 1 \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0}{1-\alpha x} + \frac{\beta x}{(1-\alpha x)(1-x)} \quad \textit{funtzio sortzailea da}$$

$$a_n = \alpha^n a_0 + \beta(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1}) = \begin{cases} a_0 + n\beta, & \alpha = 1 \\ \alpha^n a_0 + \beta\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Kasu bereziak:

- $\alpha = 1$ bada, $a_n = a_0 + n\beta$, a_0-n hasten den eta β aldea duen progresio aritmetikoa da.
- $\beta = 0$ bada, $a_n = \alpha^n a_0$, a_0-n hasten den eta α arrazoia duen progresio geometrikoa da.

Adibidez, Brahmaren dorrerako, $a_n = 2^n - 1$.

2. mailako errepikapen linealak

3.5. teorema: *Izan bedi homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 2. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1 \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Orduan,

- $g_a(x) = \dfrac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x}{1 - \alpha x - \beta x^2}$ *funtzio sortzailea da.*
- a_n*-ren adierazpen orokorra emateko, bi kasu desberdindu behar dira:*

i) Baldin eta $1 - \alpha x - \beta x^2$ *polinomioak bi erro desberdin baditu,* $1 - \alpha x - \beta x^2 = (1 - rx)(1 - sx)$ *delarik, orduan,*

$$g_a(x) = \frac{A}{1 - rx} + \frac{B}{1 - sx} \qquad \text{eta} \qquad a_n = Ar^n + Bs^n.$$

Modu baliokidean (metodo aljebraikoa erabiliz), baldin eta r *eta* s *balioak* $x^2 - \alpha x - \beta$ *polinomioaren erro bakunak badira, hots,* $x^2 - \alpha x - \beta = (x - r)(x - s)$ *bada,* $\{a_0 = A + B,\ a_1 = Ar + Bs,\ a_n = Ar^n + Bs^n\}$.

ii) Baldin eta $1 - \alpha x - \beta x^2$ *polinomioak erro bikoitza badu,* $1 - \alpha x - \beta x^2 = (1 - rx)^2$ *delarik, orduan,*

$$g_a(x) = \frac{a_0}{(1 - rx)^2} + \frac{(a_1 - \alpha a_0)x}{(1 - rx)^2} \qquad \text{eta} \qquad a_n = (n + 1)a_0 r^n + n(a_1 - \alpha a_0)r^{n-1}.$$

Mpdi baliokidean (metodo aljebraikoa erabiliz), baldin eta r *balioa* $x^2 - \alpha x - \beta$ *polinomioaren erro bikoitza bada, hots,* $x^2 - \alpha x - \beta = (x - r)^2$*, orduan,* $\{a_0 = A,\ a_1 = (A + B)r,\ a_n = (A + nB)r^n\}$.

Adibideak: kalkula itzazu $g_a(x)$ f.s. eta a_n osagai orokorra honako kasu hauetan:

1) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$ Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

2) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}\}$ Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-3x+2x^2}$, $a_n = 2^n - 1$

3) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}\}$ Sol.: $g_a(x) = \frac{2x}{1-2x+x^2}$, $a_n = 2n$

4) $\{a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}\}$ Sol.: $g_a(x) = \frac{x}{1-4x+4x^2}$, $a_n = n2^{n-1}$

3.6. teorema: *(1. aldaera): Izan bedi ez-homogeneoa eta koefiziente konstanteduna 2. mailako ekuazio lineala den honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1 \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x + \gamma\frac{x^2}{1-x}}{1 - \alpha x - \beta x^2} \qquad \textit{funtzio sortzailea da}$$

3.7. teorema: *(2. aldaera): Izan bedi honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1 \\ a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{a_0 + (a_1 - \alpha a_0)x + \gamma(x)x^2}{1 - \alpha x - \beta x^2} \qquad \textit{funtzio sortzailea da}$$

non $(\gamma_n)_n$*ren funtzio sortzailea* $\gamma(x)$ *baita.*

k. mailako errepikapen linealak

3.8. teorema: *Izan bedi honako errepikapen hau:*

$$\begin{cases} a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1} \\ a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k} + \gamma_{n-k}, \quad n \geq k \end{cases}$$

Orduan,

$$g_a(x) = \frac{P_{k-1}(x) + \gamma(x)x^k}{1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \ldots - \alpha_k x^k} \qquad \textit{funtzio sortzailea da}$$

non $(\gamma_n)_n$*ren funtzio sortzailea* $\gamma(x)$ *den eta* $P_{k-1}(x)$ *polinomioa* $(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{k-1},\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{k-1}, \alpha_k)$ *koefizienteen menpeko* $k-1$*. mailako polinomioa baita.*

Ariketak: kalkula itzazu $g_a(x)$ f.s. eta a_n osagai orokorra honako kasu hauetan:

1) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1\}$
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 - 2x - x^2 + 2x^3} = \frac{-1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} + \frac{1}{1-2x}$, $a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ bikoitia} \\ 2^n - 1, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$

2) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + n - 2\}$
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1 - 2x + x^2 + x^3}{1 - 3x + x^2 + 3x^3 - 2x^4} = \frac{1}{1-2x} + \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/4}{1-x} + \frac{-1/2}{(1-x)^2}$, $a_n = \begin{cases} 2^n - \frac{n}{2}, & n \text{ bikoitia} \\ 2^n - \frac{n+1}{2}, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$

3) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3}\}$
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1+2x-2x^2}{1+x-4x^2-4x^3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1/2}{1-2x} + \frac{-1/2}{1+2x}$, $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ bikoitia} \\ 2^n - 1, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$

4) $\{a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = -a_{n-1} + 4a_{n-2} + 4a_{n-3} + 1\}$
Sol.: $g_a(x) = \dfrac{1+x-4x^2+3x^3}{1-5x^2+4x^4} = \frac{-1/6}{1-x} + \frac{7/6}{1+x} + \frac{7/12}{1-2x} + \frac{-7/12}{1+2x}$, $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ bikoitia} \\ \frac{7}{6}2^n - \frac{4}{3}, & n \text{ bakoitia} \end{cases}$

3.4. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrenda

Zortzigarren ariketa-zerrenda: funtzio sortzaileak eta errepikapenak

(VIII-1) Kalkula itzazu honako segida hauen funtzio sortzaileak:

a) $1,\ 5,\ 5^2,\ 5^3,\ \ldots$
b) $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$
c) $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$
d) $0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ 0,\ 8,\ \ldots$
e) $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$

(VIII-2) Kalkula itzazu honako funtzio hauek sortutako segiden osagai orokorrak:

a) $\left(\dfrac{1}{1-t}\right)^3$
b) $\dfrac{1}{1-t}\dfrac{1}{1+t}$
c) $\dfrac{1}{1+4t}$
d) $\dfrac{2t}{(1-t)(1-2t)}$
e) e^{2t}
f) e^{t^2}
g) $\sin t$
h) $\cos t$

(VIII-3) Demagun $(a_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea $g(t)$ dela ($(-r, r)$ tartean definitua, $r > 0$). Kalkula itzazu honako $(b_n)_{n\geq 0}$ segida hauen funtzio sortzaileak $g(t)$-ren menpe.

a) $b_n := (-1)^n a_n$
b) $b_n := a_{n+1}$
c) $b_n := a_{n-1},\ (a_{-1} = 0)$
d) $b_n := a_n + a_{n+1}$

e) $b_n := a_n - a_{n-1},\ (a_{-1} = 0)$

f) $b_n := a_n$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

g) $b_n := a_n$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

h) $b_n := a_{n/2}$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den kontuan hartuta.

i) $b_n := a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_n a_0$

j) $b_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$

k) $b_n := n a_n$

l) $b_n := n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n$, ($k$ finkorako).

(VIII-4) Kalkula itzazu honako $(a_n)_{n\geq 0}$ segida hauen funtzio sortzaileak:

a) $a_0 := 0,\ a_1 := 1,\ a_n := 2a_{n-1} - a_{n-2},\ n \geq 2$

b) $a_0 := 1,\ a_1 := 1,\ a_n := 3a_{n-1} + 4a_{n-2},\ n \geq 2$

(VIII-5) Kalkula ezazu honako $a_0, a_1, \ldots$ segida honen funtzio sortzailea, non a_n honela definitzen baita:

a)
$$x + y + z + 4u = n$$
ekuazioaren zenbaki arrunt ez-negatiboen multzoko soluzio-kopurua,

b)
$$2x + 2y + 3z + 3u = n$$
ekuazioaren zenbaki arrunt ez-negatiboen multzoko soluzio-kopurua,

(VIII-6) Kalkula itzazu aurreko ariketaren a) atalaren a_{10} balioa eta b) atalaren a_{15} balioa.

(VIII-7) (*A*.8.) Izan bedi a_n, dado bat lau aldiz botatzen denean n puntu lortzeko era kopurua. Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea, eta a_{12} eta a_{20} balioak.

(VIII-8) Izan bedi a_n, ondoz ondoko zenbakirik ez duten $\{1, 2, \ldots, n\}$tik ateratako azpimultzo-kopurua.

a) Kalkula itzazu $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3$.

b) Aurkitu ezazu errepikapen-erlazioa a_n-rako, $n \geq 2$.

c) Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea.

d) Kalkula ezazu a_n.

(VIII-9) Zenbaki arrunten multzo bat *multzo lodia* deitzen da, baldin eta elementu bakoitza multzoaren kardinala baino handiagoa edo berdina bada. Adibidez, $\{6, 10, 11, 20, 33, 34\}$ lodia da, baina $\{2, 200, 300\}$ ez da multzo lodia. Multzo hutsa, $\emptyset$, multzo lodia dela jotzen da. Izan bedi a_n, $\{1, 2, \ldots, n\}$tik ateratako azpimultzo lodien kopurua. Erantzun iezaiezu aurreko ariketaren atalei.

(VIII-10) Domino-pieza bat 1×2 tamainako errektangelua da. Izan bedi a_n, n domino-pieza erabiliz, $n \times 2$ tamainako errektangelua eraikitzeko era kopurua. Erantzun iezaiezu aurreko ariketaren atalei.

(VIII-11) Izan bedi a_n bi 1 jarraian ez duen n luzeradun (hots, n osagai dituen) segida-kopurua. Erantzun iezaiezu aurreko ariketaren atalei.

Oharra: zenbakizko soluzioak B.3. eranskinean daude.

4. gaia

Zenbait zenbaki-familia garrantzitsu

4.1. Fibonacciren zenbakiak

Fibonacciren zenbakiek Leonardo Pisanoren (1170-1250, Italia) goitizena dute (ikusi matematikariaren biografia[1] webgunean).

Fibonacciren F_n zenbakiek propietate ugari dituzte eta hainbat egilek asmatu eta ikertu dituzte. Fibonacci Elkarteak 1963. urtetik hona *The Fibonacci Quarterly*[2] izeneko ikerkuntza-aldizkari matematikoa argitaratzen du.

31. definizioa: *Honako errepikapen honek sortzen duen* $(F_n)_{n\geq 0}$ *segida* **Fibonacciren segida** *deitzen da.*

$$\begin{cases} F_0 = 0, \;\; F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Oinarrizko propietateak:

i) $(F_n)_{n\geq 0}$-ren funtzio sortzailea: $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}, \quad |x| < \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$.

ii) F_n-ren adierazpen orokorra:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Batuketaren propietate batzuk:

[1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Fibonacci.html
[2] http://www.fq.math.ca/

1) $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

2) $(n+1)F_0 + nF_1 + (n-1)F_2 + (n-2)F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3)$

3) $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

4) $F_0 + F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

Biderketaren eta zatigarritasunaren propietate batzuk:

1) $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1$

2) $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

3) $\forall n, k \geq 1, \quad F_n \mid F_{kn}$

4) $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$

5) $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$

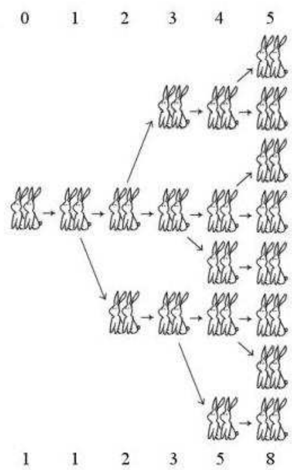
Esanahi konbinatorioak:

a) Honako arau hauei jarraituz,

   - Lehenengo hilabetean untxi-bikote bakarra dago;
   - Hilabete bat bete ondoren, untxi-bikoteak ugal daitezke eta ez dira hiltzen;
   - Hilabete bakoitzean, edozein bikotek beste bat sortzen du (sortutako bikoteak haien artean soilik estaltzen dute elkar).

   Untxi-bikote batengandik, a_n untxi bikote sortuko dira n. hilabete pasatu ondoren. Zenbat da a_n?

$$a_n = F_n$$



4.1. irudia: Fibonacciren untxiak

b) Oinkada bakoitzean maila bat edo bi igotzen direnean, n maila duen eskailera igotzeko era kopurua. $b_n = F_{n+1}$

c) 2×1 tamainako baldosak erabiliz $2 \times n$ tamainako lurra betetzeko era kopurua. $c_n = F_{n+1}$

d) 0 eta 1 zenbakiez osatuta dagoen baina bi 1 jarraian ez duen n luzeradun segida kopurua. $d_n = F_{n+2}$

e) $[n]$ multzotik ateratako eta zenbaki kontsekutiborik ez duen azpimultzo kopurua. $e_n = F_{n+2}$

f) Mezu kodifikatuak irakurtzea. Letra bakoitzak gehienez bi ikur, $\bullet$ eta $-$, dituen alfabetoa erabiliz, zehaztutako n luzeradun segida irakurtzeko era kopurua. $f_n = F_{n+1}$

4.2. Catalanen zenbakiak

Eugène Charles Catalanen (1814-1894, Belgika) biografia[3] webgunean kontsulta daiteke.

32. definizioa: $(C_n)_{n\geq 0}$ *segida hau* **Catalanen segida** *deitzen da:*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Oinarrizko propietateak:

i) $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

ii) $C_n \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ondorioz, $n+1 \mid \binom{2n}{n}$

4.1. teorema: (Catalanen zenbakien esanahi konbinatorioa): *Izan bedi $\mathcal{I}^*_{2n,0}$ multzoa, $(0,0)$-tik $(2n,0)$-ra doazen gorabehera ibilbide berezien*[4] *multzoa. Orduan,*

$$c(\mathcal{I}^*_{2n,0}) = C_n,\ \forall n \geq 0$$

Frogapena:

Izan bedi $\mathcal{I}_{p,q}$, $(0,0)$-tik (p,q)-ra doazen gorabehera ibilbideen multzoa.

Gogora ezazu $c(\mathcal{I}_{p,q}) = \left\{ \begin{array}{rl} \binom{p}{\frac{p+q}{2}}, & \textit{baldin eta } p \geq q \textit{ eta bikoitasuna berdina} \\ 0, & \textit{beste kasuetan} \end{array} \right\} \Rightarrow c(\mathcal{I}_{2n,0}) = \binom{2n}{n}.$

$c(\mathcal{I}_{p,q} - \mathcal{I}^*_{p,q}) = c(\mathcal{I}_{p,q+2}) = \binom{p}{\frac{p+q+2}{2}}$ *denez,* $c(\mathcal{I}_{2n,0} - \mathcal{I}^*_{2n,0}) = \binom{2n}{n+1}$.

Beraz, $c(\mathcal{I}^*_{2n,0}) = c(\mathcal{I}_{2n,0}) - c(\mathcal{I}_{2n,0} - \mathcal{I}^*_{2n,0}) = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = C_n$.

33. definizioa: $(0,0)$*-tik* $(2n,0)$*-ra doan gorabehera ibilbidea* **estraberezia** *dela esaten da baldin eta gorabehera ibilbide berezia bada eta soilik OX ardatza $(0,0)$ eta $(2n,0)$ puntuetan ikutzen baditu. Erabil dezagun $\mathcal{I}^{**}_{2n,0}$ notazioa gorabehera ibilbide estraberezien multzoa adierazteko.*

4.2. korolarioa:

$$c(\mathcal{I}^{**}_{2n,0}) = C_{n-1},\ \forall n \geq 1$$

Frogapena:

Izan ere, $c(\mathcal{I}^{**}_{2n,0}) = c(\mathcal{I}^*_{2n-2,0}) = \binom{2n-2}{n-1} = C_{n-1}$

Propietateak:

[3] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Catalan.html`

[4] Gogora ezazu 1.8. atalean emandako definizioa

1) Catalanen zenbakien errepikapen-erlazioa:

$$\begin{cases} C_0 = 1 \\ C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \ldots + C_{n-1}C_0, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

2) $(C_n)_{n\geq 0}$ segidaren funtzio sortzailea:

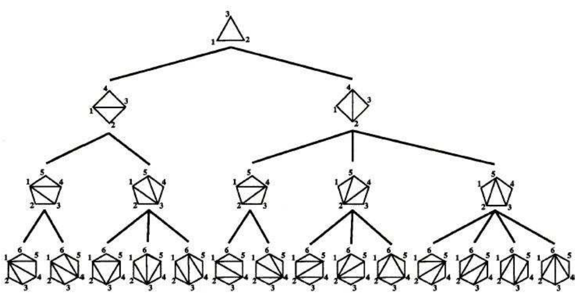
$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \quad |x| \leq \frac{1}{4}$$

Catalanen zenbakien beste bi esanahi konbinatorio

1. Poligono konbexuen triangulazioa

34. definizioa: Poligono konbexuaren triangulazioa *poligonoa triangeluen bidez banatzean datza, non triangeluen barnealdeak binaka bateraezinak baitira eta triangeluen erpinak poligonoaren erpinak baitira (hots, triangeluen aldeak poligonoaren aldeak edo diagonalak dira).*

Har dezagun n aldeko poligono konbexua eta, jarraian, erpin bakoitzari zenbaki bat esleituko diezaiogun, erlojuaren orratzen kontrako noranzkoan. Izan bedi T_n balioa $n+2$ erpin zenbakituak dituen poligono konbexuaren triangulazio kopurua. Adibidez,



4.2. irudia: Poligono konbexuen triangulazioaren zuhaitza, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

$n = 1,$	(3 erpin)	triangeluak	$T_1 = 1$
$n = 2,$	(4 erpin)	karratuak	$T_2 = 2$
$n = 3,$	(5 erpin)	pentagonoak	$T_3 = 5$
$n = 4,$	(6 erpin)	hexagonoak	$T_4 = 14$
$\ldots$			
$n = k,$	($k+2$ erpin)	poligonoak	$T_n = ?$

Oro har,

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_n = T_0T_{n-1} + T_1T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}T_0, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

2. Parentesiak

Izan bedi P_n kantitatea $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}$ biderketa egiteko era kopurua, osagaien ordena mantenduz. Orduan,

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_n = P_0 P_{n-1} + P_1 P_{n-2} + \ldots + P_{n-1} P_0, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$n = 0$	$P_0 = 1$	x_1
$n = 1$	$P_1 = 1$	$x_1 x_2$
$n = 2$	$P_2 = 2$	$x_1(x_2 x_3)$
		$(x_1 x_2) x_3$
$n = 3$	$P_3 = 5$	$x_1(x_2(x_3 x_4))$
		$x_1((x_2 x_3) x_4)$
		$(x_1 x_2)(x_3 x_4)$
		$((x_1 x_2) x_3) x_4$
		$(x_1(x_2 x_3)) x_4$

4.3. Zenbaki arrunten partiketak

35. definizioa: *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$, $n-$ren* **partiketa**

$$n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$$

motako adierazpena da, non $x_1, x_2, \ldots, x_k$ zenbaki arruntak baitira, $1 \leq k \leq n$. x_i batugaiak **zatiak** *deitzen dira eta k batugai kopuruari* **partiketaren tamaina** *esaten zaio. Oro har* **partiketa ez-ordenatuak** *erabiliko ditugu eta ohikoa da $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k$ eran partiketa adieraztea. Hau da, bi partiketa berdinak dira bere diferentzia bakarra batugaien ordena bada. Desberdintzat ematen baditugu,* **partiketa ordenatuak** *izango ditugu.*

4.3. teorema: (Partiketa ordenatuak): *Izan bedi π_n kantitatea $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua eta $\pi_n^{(k)}$, k tamainako $n-$ren partiketa ordenatuen kopurua. Orduan,*

- $\pi_n^{(k)} = \binom{n-1}{k-1}, \quad n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n$
- $\pi_n = 2^{n-1}, \quad n \geq 1$

Itzulpenak edo interpretazio baliokideak:

- $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ ekuazioaren soluzioak, non $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ diren
- $y_1 + y_2 + \ldots + y_k = n - k$ ekuazioaren soluzioak, non $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{N}^*$ diren
- $n - k$ aldiz 0 eta $k - 1$ aldiz 1 zenbakiez osatutako segidak
- n bola bereizezin k zenbakidun kutxatan kokatzeko erak, kutxa hutsiz ez egonik.

4.4. korolarioa: (Partiketa ordenatuak):

- $(\pi_n^{(k)})_{n \geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $\Pi^{(k)}(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^k}, \quad |x| < 1$

- $(\pi_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $\Pi(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-2x}, \quad |x| < \dfrac{1}{2}$

4.5. teorema: (Partiketa ez-ordenatuak): *Izan bedi p_n kantitatea $n-$ren partiketa (ez-ordenatuen) kopurua eta $p_n^{\langle k\rangle}$, k edo txikiagoak diren zatiak baitituzte $n-$ren partiketa (ez-ordenatuen) kopurua. Orduan,*

- $(p_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $P^{\langle k\rangle}(x) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^2}\cdots\dfrac{1}{1-x^k}, \quad |x| < \dfrac{1}{2}$
- $(p_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $P(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^r}, \quad |x| < \frac{1}{2}$

4.6. teorema: (zati desberdineko partiketa ez-ordenatuak) *Izan bedi d_n kantitatea zati guztiak desberdinak dituen $n-$ren partiketa kopurua eta $d_n^{\langle k\rangle}$, k tamaina edo txikiagoa duten $n-$ren zati desberdineko partiketa kopurua. Orduan,*

- $(d_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $D^{\langle k\rangle}(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^k), \quad |x| < \dfrac{1}{2}$
- $(d_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $D(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}(1+x^r), \quad |x| < \frac{1}{2}$

4.7. teorema: (zati bakoitien partiketa ez-ordenatuak) *Izan bedi i_n kantitatea zati guztiak bakoitiak dituen $n-$ren partiketa kopurua eta $i_n^{\langle k\rangle}$, k edo txikiagoak diren zati bakoitien $n-$ren partiketa kopurua. Orduan,*

- $(i_n^{\langle k\rangle})_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $I^{\langle 2k-1\rangle}(x) = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x^3}\cdots\dfrac{1}{1-x^{2k-1}}, \quad |x| < \dfrac{1}{2}$
- $(i_n)_{n\geq 0}$ *segidaren funtzio sortzailea:* $I(x) = \displaystyle\prod_{r=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^{2r-1}}, \quad |x| < \frac{1}{2}$

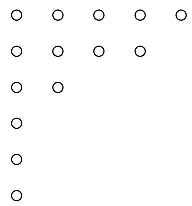
4.8. teorema: (Eulerren teorema)

$$D(x) = I(x) \qquad d_n = i_n, \quad \forall n \geq 0$$

Zati desberdinen kopurua eta zati bakoitien kopurua berdina da.

Ferrerren diagramak

$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k$ betetzen duen $n = x_1+x_2+\ldots+x_k$ partiketa grafikoki adieraz daiteke diagrama baten bidez, errenkada kopurua k -zati kopurua- eta zutabeen kopurua x_1 -zati handiena- izanik, lehenengo ilaran x_1 puntu egonda, bigarren ilaran x_2 puntu, hirugarrenean x_3 puntu eta horrela, hurrenez hurren. Esate baterako, $14 = 5 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1$ partiketaren diagrama honako hau da:

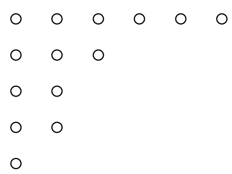


4.3. irudia: Ferreren diagrama $14 = 5 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1$ adibiderako

Diagrama horiek Ferrer izena hartzen dute, Norman Macleod Ferrerek (1829-1903) asmatu zituelako.

36. definizioa: *Izan bedi π partiketa. Bere Ferrer diagraman errenkadak eta zutabeak trukatuz lortzen den partiketari π-ren* **konjugatua** *esaten zaio. Baldin π eta π-ren konjugatua berdinak badira,* **autokonjugatua** *dela esaten da.*

Aurreko diagraman ilarak eta zutabeak trukatzen badira, 14 zenbakiaren beste partiketa baten diagrama lortzen da. Aurreko adibidearen kasuan,



4.4. irudia: Ferreren diagrama $14 = 5 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1$ adibidearen konjugaturako

hots, $14 = 6 + 3 + 2 + 2 + 1$ partiketa lortzen da, aurrekoaren konjugatua.

$5 + 4 + 3 + 2 + 1$ partiketa 15 zenbakiaren autokonjugatua da. Izan ere, diagrama diagonalarekiko simetrikoa da.

4.4. Multzoen partiketak eta Bellen zenbakiak

Eric Temple Bell (1883 Escozia-1960 AEB) matematikariaren biografia[5] webgunean kontsulta daiteke.

37. definizioa: *Izan bedi Ω multzoa. Ω* **multzoaren partiketa** *ez-huts eta binaka bateraezinak direnen azpimultzoen bilduma da, horien bildura Ω da, hots $\Omega-$ren elementu bakoitza zehazki behin azpimultzo batean dago.*

38. definizioa: *$[n]$ multzoaren partiketa kopurua B_n* **Bellen zenbakia** *da.*

Errepikapen-erlazioa:

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_{n+1} = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \ldots + \binom{n}{n} B_n, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Pascalen triangeluaren bidez, oso arin kalkula daitezke. Izan ere, B_{n+1} lortzeko,

$$\left(\binom{n}{0}, \ \binom{n}{1}, \ \ldots, \ \binom{n}{n} \right) \cdot (B_0, \ B_1, \ \ldots, \ B_n)^t$$

Konboluzioaren adierazpena:

$$\left(\frac{B_{n+1}}{n!} \right)_{n \geq 0} = \left(\frac{B_n}{n!} \right)_{n \geq 0} * \left(\frac{1}{n!} \right)_{n \geq 0}$$

4.9. teorema: *$(B_n)_{n \geq 0}$ segidaren* **funtzio sortzaile esponentziala**

$$B(x) = e^{e^x - 1}$$

4.5. Lehen motako Stirlingen zenbakiak

$x^{\overline{n}}$ garapena n mailako polinomioa da, $x^{\overline{n}} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x(x+1)\cdots(x+n-1), & n \geq 1 \end{cases}$

39. definizioa: *Izan bitez $k, n \in \mathbb{N}^*$; $x^{\overline{n}}$ garapenaren x^k-ren koefizientea* **lehen motako Stirlingen zenbakia** *deitzen da eta $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ ikurraren bidez adierazten da.*

[5] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bell.html`

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} x^n$$

Beraz, x ezezagun batekiko koefiziente errealak dituzten polinomioen espazioan, $\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)_{n,k\geq 0}$ matrizea $\{1, x, x^2, \ldots\}$ oinarri kanonikotik $\{1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \ldots\}$ oinarri superkanonikora pasatzen den oinarri-aldaketaren matrizea da.

Propietateak:

i) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, \quad \forall k > n$

ii) $n = 0$ bada, $1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

iii) $n \geq 1$ bada, a) $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, b) $n! = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, d) $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$, e) $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$

iv) $x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$

Errepikapena:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0, & \forall n \geq 1, \\ \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, & \forall n \geq 0, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0, & \forall k > n, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}, & \forall n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Lehen motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua

$$\begin{array}{c}
\left[{0 \atop 0}\right] \\
\left[{1 \atop 0}\right] \quad \left[{1 \atop 1}\right] \\
\left[{2 \atop 0}\right] \quad \left[{2 \atop 1}\right] \quad \left[{2 \atop 2}\right] \\
\left[{3 \atop 0}\right] \quad \left[{3 \atop 1}\right] \quad \left[{3 \atop 2}\right] \quad \left[{3 \atop 3}\right] \\
\left[{4 \atop 0}\right] \quad \left[{4 \atop 1}\right] \quad \left[{4 \atop 2}\right] \quad \left[{4 \atop 3}\right] \quad \left[{4 \atop 4}\right] \\
\left[{5 \atop 0}\right] \quad \left[{5 \atop 1}\right] \quad \left[{5 \atop 2}\right] \quad \left[{5 \atop 3}\right] \quad \left[{5 \atop 4}\right] \quad \left[{5 \atop 5}\right] \\
\left[{6 \atop 0}\right] \quad \left[{6 \atop 1}\right] \quad \left[{6 \atop 2}\right] \quad \left[{6 \atop 3}\right] \quad \left[{6 \atop 4}\right] \quad \left[{6 \atop 5}\right] \quad \left[{6 \atop 6}\right] \\
\left[{7 \atop 0}\right] \quad \left[{7 \atop 1}\right] \quad \left[{7 \atop 2}\right] \quad \left[{7 \atop 3}\right] \quad \left[{7 \atop 4}\right] \quad \left[{7 \atop 5}\right] \quad \left[{7 \atop 6}\right] \quad \left[{7 \atop 7}\right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
1 \\
0 \quad 1 \\
0 \quad 1 \quad 1 \\
0 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \\
0 \quad 6 \quad 11 \quad 6 \quad 1 \\
0 \quad 24 \quad 50 \quad 35 \quad 10 \quad 1 \\
0 \quad 120 \quad 274 \quad 225 \quad 85 \quad 15 \quad 1 \\
0 \quad 720 \quad 1764 \quad 1624 \quad 735 \quad 175 \quad 21 \quad 1
\end{array}$$

4.5. irudia: Lehen motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua, $n \leq 7$

Esanahi konbinatorioa: permutazioak eta zikloak

$1, 2, \ldots, n$ren edozein permutaziok ($[n]$tik $[n]$ra doan bijekzioak) ziklo bateraezinen biderkadura moduan adiera bakarreko deskonposizioa du. Izan bedi $s(n,k)$ balioa k zikloren biderkadura moduan adierazten diren permutazio kopurua. Orduan,

$$s(n,k) = \begin{cases} s(n,0) = 0, & \forall n \geq 1 \\ s(n,n) = 1, & \forall n \geq 0 \\ s(n,k) = 0, & \forall k > n \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k), & \forall n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Beraz, $s(n,k) = \left[{n \atop k}\right]$ eta $n! = s(n,0) + s(n,1) + s(n,2) + \ldots + s(n,n)$ interpretagarria da.

4.6. Bigarren motako Stirlingen zenbakiak

$x^{\underline{n}}$ garapena n. mailako polinomioa da, $x^{\underline{n}} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ x(x-1)\cdots(x-n+1), & n \geq 1 \end{cases}$

40. definizioa: *Izan bitez $k, n \in \mathbb{N}^*$; $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots\}$ oinarrian x^n garapenaren $x^{\underline{k}}$−ren koefizientea* **bigarren motako Stirlingen zenbakia** *deitzen da eta $\left\{{n \atop k}\right\}$ ikurraren bidez adierazten da.*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k} x^{\underline{k}} = \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{0} + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{1} x^{\underline{1}} + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{2} x^{\underline{2}} + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{n} x^{\underline{n}}$$

Beraz, x ezezagun batekiko koefiziente errealak dituen polinomioen espazioan, $\left(\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k}\right)_{n,k\geq 0}$ matrizea $\{1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \ldots\}$ oinarri infrakanonikotik $\{1, x, x^2, \ldots\}$ oinarri kanonikora pasatzen den oinarri-aldaketaren matrizea da.

Propietateak:

i) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k} = 0, \quad \forall k > n$

ii) $n = 0$ bada, $1 = \genfrac\{\}{0pt}{}{0}{0}$

iii) $n \geq 1$ bada, a) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{0} = 0$, b) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{1} = 1$, c) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{2} = 2^{n-1} - 1$, d) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{n} = 1$, e) $\genfrac\{\}{0pt}{}{n}{n-1} = \binom{n}{2}$

iv) $x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{k} x^{\overline{k}}$

Errepikapena:

$$\begin{cases} \genfrac\{\}{0pt}{1}{n}{0} = 0, & \forall n \geq 1, \\ \genfrac\{\}{0pt}{1}{n}{n} = 1, & \forall n \geq 0, \\ \genfrac\{\}{0pt}{1}{n}{k} = 0, & \forall k > n, \\ \genfrac\{\}{0pt}{1}{n}{k} = \genfrac\{\}{0pt}{1}{n-1}{k-1} + k\genfrac\{\}{0pt}{1}{n-1}{k}, & \forall n \geq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Esanahi konbinatorioa: multzoen partiketak eta Bell zenbakiak

Izan bedi $S(n,k)$ balioa k azpimultzotan $[n]$ multzoaren partiketa kopurua. Orduan,

$$S(n,k) = \begin{cases} S(n,0) = 0, & \forall n \geq 1 \\ S(n,n) = 1, & \forall n \geq 0 \\ S(n,k) = 0, & \forall k > n \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), & \forall n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Beraz, $S(n,k) = \genfrac\{\}{0pt}{1}{n}{k}$ eta Bellen zenbakien arteko erlazioa:

$$B_n = \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{0} + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{1} + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{2} + \ldots + \genfrac\{\}{0pt}{}{n}{n}$$

Bigarren motako Stirlingen zenbakien Pascalen triangelua

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & & & & & \left\{ {0 \atop 0} \right\} & B_0 \\
 & & & & & & & \left\{ {1 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {1 \atop 1} \right\} & & B_1 \\
 & & & & & & \left\{ {2 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {2 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {2 \atop 2} \right\} & & & B_2 \\
 & & & & & \left\{ {3 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {3 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {3 \atop 2} \right\} \quad \left\{ {3 \atop 3} \right\} & & & & B_3 \\
 & & & & \left\{ {4 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {4 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {4 \atop 2} \right\} \quad \left\{ {4 \atop 3} \right\} \quad \left\{ {4 \atop 4} \right\} & & & & & B_4 \\
 & & & \left\{ {5 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {5 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {5 \atop 2} \right\} \quad \left\{ {5 \atop 3} \right\} \quad \left\{ {5 \atop 4} \right\} \quad \left\{ {5 \atop 5} \right\} & & & & & & B_5 \\
 & & \left\{ {6 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 2} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 3} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 4} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 5} \right\} \quad \left\{ {6 \atop 6} \right\} & & & & & & & B_6 \\
 & \left\{ {7 \atop 0} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 1} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 2} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 3} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 4} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 5} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 6} \right\} \quad \left\{ {7 \atop 7} \right\} & & & & & & & & B_7
\end{array}
$$

1								1
0	1							1
0	1	1						2
0	1	3	1					5
0	1	7	6	1				15
0	1	15	25	10	1			52
0	1	31	90	65	15	1		203
0	1	63	301	350	140	21	1	848

4.6. irudia: Bigarren motako Stirlingen zenbakien triangelua eta Bellen zenbakiak, $n \leq 7$

Aplikazioak:

1) n kutxa bereizezinetan, kutxa hutsik geratu gabe, k bola bereizgarri sartzeko era kopurua. $\left\{ {k \atop n} \right\}$
2) n zenbakidun kutxatan, kutxa hutsik geratu gabe, k bola bereizgarri sartzeko era kopurua. $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$
3) $[k]$tik $[n]$ra doazen aplikazio suprajektibo kopurua. $n!\left\{ {k \atop n} \right\}$

Konbinazio-identitateak:

1)

$$n!\left\{ {k \atop n} \right\} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k$$

Frogapen konbinatorioa:
Izan bedi $\Omega :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, $c(\Omega) = n^k$.
Izen bedi $A :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe, $c(A) = n!\left\{ {k \atop n} \right\}$.

Har dezagun $\overline{A} = \Omega - A$ multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: hutsik dagoen kutxa zehaztea. Horrela, defini ditzagun $H_i \subset \Omega$ azpimultzoak, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$H_i := i. \text{ kutxa hutsik geratzea}$$

Orduan, $\overline{A} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n$ denez,

$c(A) = c(\overline{H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n}) = c(\Omega) - c(H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_n) =$

inklusio-esklusio printzipioa erabiliz

$= c(\Omega) -$

$[\sum_{i=1}^{n} c(H_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} c(H_i \cap H_j) + \sum_{1 \leq i < j < r \leq n} c(H_i \cap H_j \cap H_r) \ldots + (-1)^{n-1} c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n)]$

honako hau kontuan hartua

$c(\Omega) = n^k$

$c(H_i) = (n-1)^k$

$c(H_i \cap H_j) = (n-2)^k$

$c(H_i \cap H_j \cap H_k) = (n-3)^k$

$\vdots$

$c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \ldots \cap H_{i_r}) = (n-r)^k$

$\vdots$

$c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_n) = (n-n)^k$

hortaz

$= n^k - n(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \binom{n}{3}(n-3)^k + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^k =$

$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^k.$

2)

$$n^k = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left\{ {k \atop r} \right\} r!$$

Frogapen konbinatorioa:

Izan bedi $\Omega :=$ k bola bereizgarri n zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, $c(\Omega) = n^k$.

Har dezagun Ω multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: hutsik dagoen kutxa kopurua zehaztea. Horrela, defini ditzagun $A_i \subset \Omega$ azpimultzoak, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$A_i := \text{ zehatz-mehatz } i \text{ kutxa hutsik egotea}$$

Orduan, $\{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ partiketa ondo definitua dagoenez (izan ere, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ eta $\cup_{j=0}^{n} A_j = \Omega$),

$$\begin{aligned}
c(A) &= c(A_0) + c(A_1) + \ldots c(A_n) = \\
&\quad (*) \text{ kontuan hartua} \\
&\quad c(A_0) = \left\{ {k \atop n} \right\} n! \cdot \binom{n}{0} \\
&\quad c(A_1) = \left\{ {k \atop n-1} \right\} (n-1)! \cdot \binom{n}{1} \\
&\quad c(A_2) = \left\{ {k \atop n-2} \right\} (n-2)! \cdot \binom{n}{2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad c(A_r) = \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! \cdot \binom{n}{r} \\
&\quad \vdots \\
&\quad c(A_n) = \left\{ {k \atop n-n} \right\} (n-n)! \cdot \binom{n}{n} \\
&\quad \textit{hortaz} \\
&\quad = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)! \\
&\quad = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left\{ {k \atop r} \right\} r!
\end{aligned}$$

(*) Izan ere, zuhaitz-diagrama eta esanahi konbinatoriagatik, $c(A_r) = c(S_1) \cdot c(S_2)$ non

S_1 :=hutsik dauden r kutxak hautatzea $\Rightarrow c(S_1) = \binom{n}{r}$

S_2 := hutsik ez dauden gainontzeko $n-r$ kutxatan k bolak sartzea $\Rightarrow c(S_2) = \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)!$

Beraz, $c(A_r) = c(S_1) \cdot c(S_2) = \binom{n}{r} \cdot \left\{ {k \atop n-r} \right\} (n-r)!$

3)
$$\left\{{n+1 \atop r+1}\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{{k \atop r}\right\}$$

Frogapen konbinatorioa:
Izan bedi $\Omega := n+1$ bola bereizgarri $r+1$ kutxa bereizezinetan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe, $c(\Omega) = \left\{{n+1 \atop r+1}\right\}$.
Har dezagun Ω multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: $(n+1)$. bola, hots, azken bola, zenbat bolarekin dagoen bere kutxan. Horrela, defini ditzagun $A_i \subset \Omega$ azpimultzoak, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$A_i := \text{ } (n+1)\text{. bola zehazki } i \text{ bolekin egotea}$$

Orduan, $\{A_0, A_1, \ldots A_n\}$ partiketa ondo definitua dagoenez (izan ere, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$ eta $\cup_{j=0}^{n} A_j = \Omega$),

$$c(A) = c(A_0) + c(A_1) + \ldots c(A_n) =$$

(**) kontuan hartua

$$c(A_0) = \binom{n}{0} \cdot \left\{{n \atop r}\right\}$$

$$c(A_1) = \binom{n}{1} \cdot \left\{{n-1 \atop r}\right\}$$

$$\vdots$$

$$c(A_k) = \binom{n}{k} \cdot \left\{{n-k \atop r}\right\}$$

$$\vdots$$

$$c(A_n) = \binom{n}{n} \cdot \left\{{n-n \atop r}\right\}$$

hortaz

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{{n-k \atop r}\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \left\{{n-k \atop r}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{{k \atop r}\right\} =$$

(**) Izan ere, zuhaitz-diagrama eta esanahi konbinatoriagatik, $c(A_k) = c(S_1) \cdot c(S_2)$ non

$S_1 := k$ bola hautatzea azken bolarekin kokatzeko $\Rightarrow c(S_1) = \binom{n}{k}$

$S_2 :=$ gainontzeko $n-k$ bola geratzen diren r kutxatan sartzea $\Rightarrow c(S_2) = \left\{{n-k \atop r}\right\}$

Beraz, $c(A_k) = c(S_1) \cdot c(S_2) = \binom{n}{k} \cdot \left\{{n-k \atop r}\right\}$

Stirling eta zenbaki konbinatorioak

Hurrengo 4.1. laukian, Stirlingen zenbakiak eta zenbaki konbinatorioen oinarrizko propietateak laburbiltzen dira.

4.1. taula: Stirlingen eta zenbaki konbinatorioen laburpena

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$
$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$	$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k$
$\left\{{n \atop k}\right\} = \left\{{n-1 \atop k-1}\right\} + k\left\{{n-1 \atop k}\right\}$	$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}}$

Kutxatan boleak kokatzeko era kopuruen laburpen osoa

Ondoko 4.2. laukian, n kutxatan k bola kokatzeko era kopuruen laburpena dugu; kutxak eta bolak bereizezintzat edo bereizgarritzat jotzen dira eta kutxa hutsik egon ahal edo ezin izatea; bestalde, $n = k$ denean kasu partikularra zehazten da.

4.2. taula: n kutxatan k bola kokatzeko era kopurua

Bola bereizgarririk?	Zenbakidun kutxarik?	Kutxa hutsik?	Kokatzeko era kopurua	$n = k$ denean?	Non ikusi da?
Ez	Ez	Ezin	$p_k^{\langle n \rangle} - p_k^{\langle n-1 \rangle}$	1	4.3.
○ ○ ○	□ □	Ahal	$p_k^{\langle n \rangle}$	p_n	4.3.
Ez	Bai	Ezin	$CR_n^{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1} = \pi_k^{(n)}$	1	1.8., 4.3.
○ ○ ○	■ □	Ahal	$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k}$	$\binom{2n-1}{n}$	1.8.
Bai	Ez	Ezin	$\left\{{k \atop n}\right\}$	1	4.6.
○ ● ●	□ □	Ahal	$\left\{{k \atop 1}\right\} + \ldots + \left\{{k \atop n}\right\}$	B_n	4.4., 4.6.
Bai	Bai	Ezin	$n!\left\{{k \atop n}\right\} = \sum_{\sum r_i = k,\ r_i \in \mathbb{N}} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$	$n!$	1.8., 4.6.
○ ● ●	■ □	Ahal	$n^k = \sum_{\sum r_i = k,\ r_i \in \mathbb{N}^*} \binom{k}{r_1, r_2, \ldots, r_n}$	n^n	1.8., 2.3.

4.7. Zenbait zenbaki-familia garrantzitsuren ariketa-zerrendak

Bederatzigarren ariketa-zerrenda: Fibonacciren zenbakiak

Fibonacciren F_n zenbakiek propietate ugari dituzte, eta hainbat egilek asmatu eta ikertu dituzte. Propietate horietako batzuek ariketa-zerrenda hau osatzen dute.

(IX-1) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

(IX-2) Frogatu ezazu

$$nF_1 + (n-1)F_2 + (n-2)F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n = F_{n+4} - (n+3).$$

(IX-3) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

(IX-4) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

(IX-5) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \ldots + F_{2n-1} - F_{2n} = -F_{2n-1} + 1.$$

(IX-6) Frogatu ezazu

$$nF_2 + (n-1)F_4 + \ldots + 2F_{2n-2} + F_{2n} = F_{2n+2} - (n+1).$$

(IX-7) Frogatu ezazu

$$nF_1 + (n-1)F_3 + \ldots + 2F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n+1} - 1.$$

(IX-8) Frogatu ezazu

$$F_3 + F_6 + F_9 + \ldots + F_{3n} = \frac{1}{2}(F_{3n+2} - 1).$$

(IX-9) Sinplifika itzazu honako batura hauek:

$$F_1 + 2F_2 + \ldots + nF_n$$

$$2F_1 + 3F_2 + \ldots + (n+1)F_n$$

(IX-10) (Lucas)

$$\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots = F_{n+1}.$$

Zein da eznulua den azken batugaia ezkerraldeko atalean?

(IX-11) (A.9.)(Cassini eta Simson) Frogatu ezazu

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1.$$

Zein dira $+$ eta $-$ zeinuei dagozkien n balioak?

(IX-12) Zein dira n balioak non F_n bikoitia baita?

(IX-13) Frogatu ezazu

$$F_n = 5F_{n-4} + 3F_{n-5},$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{5n} balioa 5 zenbakiaren multiploa dela.

(IX-14) (A.9.) Aurreko formula erlazio-multzo baten adibidea baino ez da:

$$F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n$$

$$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$$

$$F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n$$

$$\dots$$

Frogatu ezazu honako formula orokor hau:

$$F_{n+m} = F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n,$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{kn} balioa F_n zenbakiaren multiploa dela.

(IX-15) (A.9.) (Lucas eta Catalan) Frogatu ezazu

$$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$$

(IX-16) (A.9.) (Lucas eta Catalan) Frogatu ezazu

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

(IX-17) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_{n-2} = F_{2n-1}$$

(IX-18) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$$

(IX-19) (Lucas) Frogatu ezazu

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$$

(IX-20) Frogatu ezazu

$$F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + \ldots + F_{2n-1}F_{2n} = F_{2n}^2$$

(IX-21) Frogatu ezazu $n \geq 3$ guztietarako:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} < F_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Hamargarren ariketa-zerrenda: zenbaki-partiketak

(X-1) Ferrerren diagramak erabiliz, froga itzazu:

(a) (Euler) k zatitan edo zati gutxiagotan n-ren partiketa-kopurua eta zati bakoitza k baino txikiago edo berdin duen partiketa-kopurua berdinak dira. Zenbaki hori $p_n^{\langle k \rangle}$ notazioarekin adierazten da.

(b) (Euler) k zatitan, n-ren partiketa-kopurua eta atal handiena k duen partiketa-kopurua berdinak dira, bere balioa $p_n^{\langle k \rangle} - p_n^{\langle k-1 \rangle}$ izanik.

(c) (Sylvester) n-ren partiketa autokonjugatuaren kopurua eta atal guztiak desberdinak eta bakoitiak dituzten partiketa-kopurua berdinak dira.

(X-2) (A.10.) (Andrews) Izan bedi $p_n^{\langle k \rangle}$ aurreko ariketan bezala. Frogatu ezazu:

(a) $p_n^{\langle k \rangle} \leq (n+1)^k$

(b) $p_n \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}$

(X-3) Frogatu ezazu

$$p_n^{\langle 2 \rangle} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

(X-4) (Cayley) Ebatz ezazu aurreko ariketa honako formula hau erabiliz

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1/2}{(1-x)^2} + \frac{1/2}{1-x^2}$$

(X-5) Izan bedi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Gara ezazu n partiketa ordenatuen zerrenda.

(b) Konproba itzazu $\pi_n^{(1)}, \ldots, \pi_n^{(n)}$ eta π_n balioak formula orokorrekiko.

(X-6) Izan bedi $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) Gara ezazu n partiketa (ezordenatuen) zerrenda.

(b) Kalkula itzazu $p_n^{\langle 1 \rangle}, \ldots, p_n^{\langle n \rangle}$ eta p_n balioak.

(c) $P^{\langle 1 \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\langle 1 \rangle} x^n$ f.s. garatuz, konproba itzazu $p_n^{\langle 1 \rangle}$ balioak.

(d) $P^{\langle 2 \rangle}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{\langle 2 \rangle} x^n$ f.s. garatuz, konproba itzazu $p_n^{\langle 2 \rangle}$ balioak.

Hamaikagarren ariketa-zerrenda: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak

(XI-1) Kutxa hutsik geratu gabe, m zenbakidun kutxatan n bola bereizgarriak kokatzeko era kopurua honako hau da:

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

(XI-2) Kutxaren bat hutsik geratzen utzita, m kutxa bereizezinetan n bola bereizgarriak kokatzeko era kopurua honako hau da:

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} + \left\{ {n \atop 2} \right\} + \ldots + \left\{ {n \atop m} \right\}.$$

(XI-3) Frogatu ezazu

$$\sum \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = m! \left\{ {n \atop m} \right\},$$

non $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$ betetzen duten zenbaki arrunt positiboen $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ m-koteek batura osatzen baitute.

(XI-4) Frogatu ezazu $n \geq 3$ guztietarako

$$\left\{ {n \atop n-2} \right\} = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} = \frac{1}{4}\binom{n}{3}(3n-5).$$

(XI-5) Frogatu ezazu $n \geq 4$ guztietarako

$$\left\{ {n \atop n-3} \right\} = \binom{n}{4} + 10\binom{n}{5} + 15\binom{n}{6} = \frac{1}{2}\binom{n}{4}(n-2)(n-3).$$

(XI-6) (A.11.) Frogatu ezazu $m \geq 1$ guztietarako

$$(e^x - 1)^m = \left\{ {m \atop m} \right\} \frac{m!}{m!} x^m + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} \frac{m!}{(m+1)!} x^{m+1} + \ldots.$$

(XI-7) (A.11.) Frogatu ezazu $n \geq m \geq 1$ guztietarako

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \ldots + (-1)^m \binom{m}{0}(m-m)^n.$$

(XI-8) (A.11.) Frogatu ezazu $m \geq 1$ guztietarako

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} = \left\{ {m \atop m} \right\} + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} x + \left\{ {m+2 \atop m} \right\} x^2 + \ldots$$

(XI-9) $(0,0)$tik (n,n)ra doazen eta diagonala gurutzatzen ez duten ibilbide *horizontal-bertikal*en kopurua $2C_n$ da, non C_n Catalanen n. zenbakia den.

(XI-10) $(0,0)$tik (n,n)ra doazen eta diagonala gurutzatzen ez duten (muturretan izan ezik) ibilbide *horizontal-bertikal*en kopurua honako hau da:

$$\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$

(XI-11)

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \geq k, \ \forall k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad \text{eta} \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$$

betetzen duten eta zenbaki arrunt eznegatibo dituen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ segida-kopurua, S_n, Catalanen C_n zenbakia da.

Oharra: zenbakizko soluzioak B.4. eranskinean daude.

GRAFO-TEORIA

5. gaia

Grafo-teoria

Notazioa: Izan bedi A multzoa: gai honetan, $|A|$ notazioa erabiliko dugu multzoaren kardinala, $c(A)$, adierazteko.

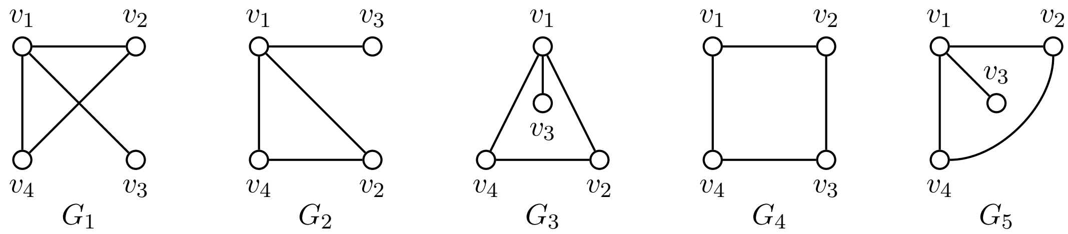
5.1. Oinarrizko kontzeptuak

41. definizioa: *G* **grafoa** *V eta E izeneko bi multzo finituren bidez definitzen da, $G = (V, E)$ adierazirik. V multzo ez-hutsaren osagaiei* **erpinak** *esaten zaie eta $E-$ren osagaiak,* **ertzak** *deitutakoak, ordenarik gabeko erpinen bikoteak dira.*

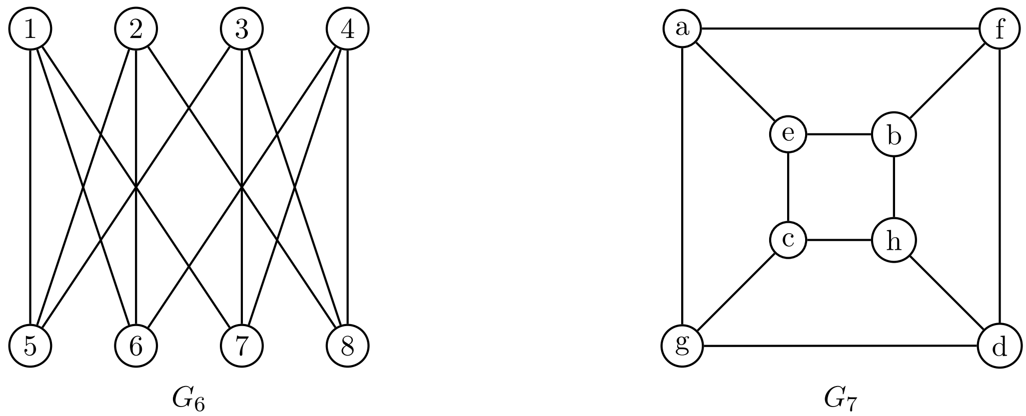
Ohikoa da grafoa irudi baten bidez adieraztea. Erpin bakoitza puntu baten bidez eta ertzak lerroekin marrazten dira.

42. definizioa: *Bi grafo G_1 eta G_2* **isomorfoak** *direla esaten da, $G_1 \simeq G_2$ adieraziz, baldin eta haien erpinen artean banan-banako korrespondentzia badago, haien ertzen arteko banan-banako korrespondentzia bihurtua. $G_1 = (V_1, E_1)$ eta $G_2 = (V_2, E_2)$ grafo isomoforfoak dira baldin eta soilik baldin $f : V_1 \to V_2$ funtzio bijektiboa existitzen bada, erpinen arteko auzokidetasuna mantenduz, hots, $\forall u, v \in V_1, \quad uv \in E_1 \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E_2$.*

Adibidez, ikus ditzagun $G(V, E)$ grafoaren adierazpen isomorfo batzuk, non $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eta $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_4\}$ baitira. 5.1.. irudian ikusten den bezala, G_1, G_2, G_3 eta G_5 grafoak isomorfoak dira. Hala ere, G_4 ez da isomorfoa besteekiko. Bestalde, 5.2.. irudiko G_6 eta G_7 isomorfoak dira. Izan ere, $f(a) = 1, f(b) = 2, f(3) = c, f(4) = d, f(5) = e, f(6) = f, f(7) = g, f(8) = h$ bijekzioa aintzat hartuta erpinen arteko auzokidetasuna mantentzen denez, $G_6 \simeq G_7$.



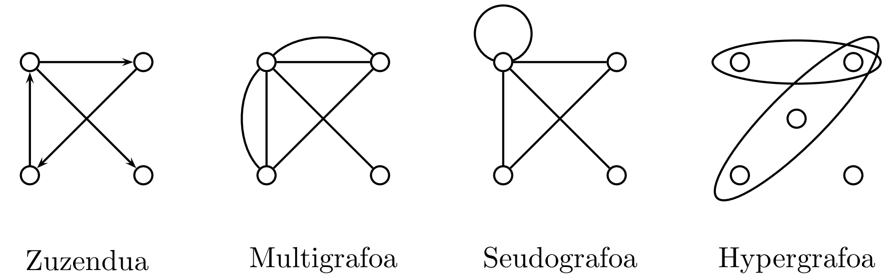
5.1. irudia: Zenbait graforen adierazpenak



5.2. irudia: Grafo isomorfoak

43. definizioa: *Grafo definizioaren hedadurak, ikusi 5.3.. irudian adibide batzuk.*

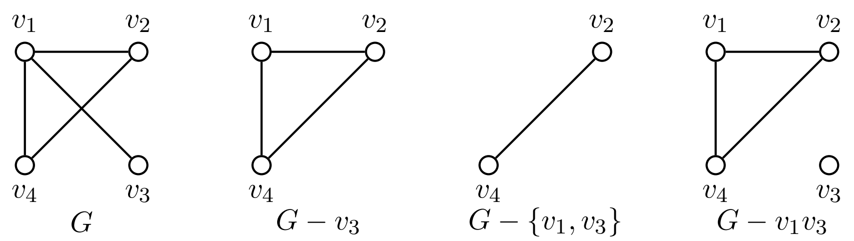
- *$E-$ren bikoteak ordenatuak badira, $E \subseteq V \times V$,* **grafo zuzenduak** *lortzen dira. Horrela, ertz bakoitzak bere orientazioa du.*
- *E multzoa multzo anizkoitza izatea onartuz gero, hots, ertz bat behin baino gehiagotan agertzen bada,* **ertz anizkoitza** *deitzen da eta bere maiztasuna* **ertzen anizkoiztasuna** *eta emaitzari* **multigrafoa edo grafo anizkoitza** *esaten zaio.*
- *Ertz baten bi erpinak berdinak badira, ertza* **begizta** *dela esaten da eta emaitzari* **seudografoa** *esaten zaio.*
- *Ertzak erpinen azpimultzoak badira,* **hypergrafoak** *lortzen dira.*
- *V edo E multzo infinituak badira,* **grafo infinituak** *lortzen dira.*



5.3. irudia: Grafoen hedadurak

44. definizioa: *Grafoaren osagaiak.*

- **Grafoaren maila** *bere V erpinen multzoaren kardinala da eta* **grafoaren tamaina** *bere E ertzen multzoaren kardinala da.*
- *Ertz bat osatzen duten bi erpinei* **auzokideak** *esaten zaie eta ertzaren bidez* **konektatuta** *daudela esaten da. v erpinaren auzoa, $N(v)$, berarekiko auzokideak diren erpinen multzoa da: $N(v) = \{u \in V | uv \in E\}$.*
- *Ertz baten erpina eta erpina bera* **erasotzaileak edo intzidenteak** *direla esaten da. Erpin bati lotuta dagoen ertz kopurua* **erpinaren maila** *deitzen da, $d(v)$ adierazirik. Erpinaren maila bikoitia edo bakoitia denean, erpina bikoitia edo bakoitia dela esaten da, hurrenez hurren.*
- *Izan bitez $G = (V, E)$ grafoa eta $v \in V$; $\boldsymbol{G - v}$ notazioak zera adierazten du: G-tik v erpina ezabatzea eta berari lotutako ertz erasotzaile guztiak. Baldin eta E_1 erpinen multzoa bada, $\boldsymbol{G - E_1}$ notazioak G grafoa adierazten du non E_1en erpin guztiak eta ertz erasotzaileak ezabatu baitira. Izan bedi $uv \in E$; $\boldsymbol{G - uv}$ notazioak zera adierazten du: G-tik soilik uv ertza ezabatzea (u eta v erpinak geratzen dira). Ikusi 5.4.. irudian adibide batzuk.*



5.4. irudia: Grafoen kendurak

5.1. teorema: *$G(V, E)$ grafoan (edo multigrafoan), erpinen mailen batura ertzen kopuruaren bikoitza da:*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

5.2. korolarioa: *Edozein grafotan (edo multigrafotan), erpin bakoitien kopurua bikoitia da.*

45. definizioa: *Grafo mota batzuk, ikusi 5.5.. eta 5.6.. irudietan adibide batzuk.*

- *$\forall u, v \in V$, $uv \in E$ betetzen duen n mailako grafoa n erpineko* **grafo betea** *deitzen da eta K_n notazioarekin adierazten da.*

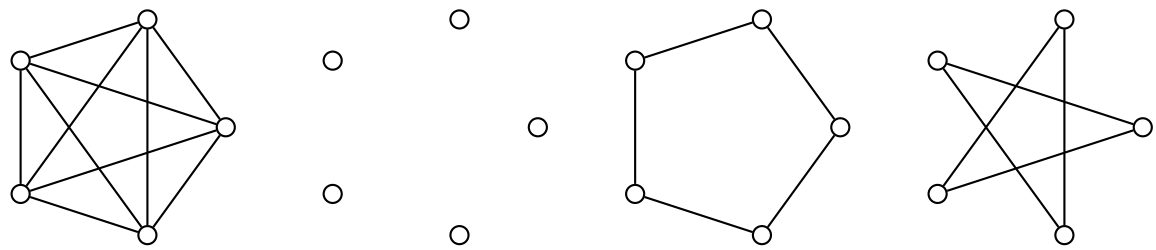
- *E multzo hutsa duen n mailako grafoa n erpineko* **grafo hutsa** *deitzen da eta E_n notazioarekin adierazten da.*

- *Izan bedi G grafoa; bere erpinen multzo bera duen eta G grafotik kanpoko ertz guztiak dituen grafoari Gren* **grafo osagarria** *esaten baitzaio, $\overline{G}$ adierazirik.*

- *Grafo bat* **erregularra** *dela esaten da, baldin eta erpin guztien maila bera bada. r* **mailako grafo erregularra** *da eta r-erregularra deitzen da, baldin eta $d(v) = r \ \forall v \in V$. Esate baterako, K_n $n-1$ mailako grafo erregularra da eta E_n, 0 mailako grafo erregularra.*

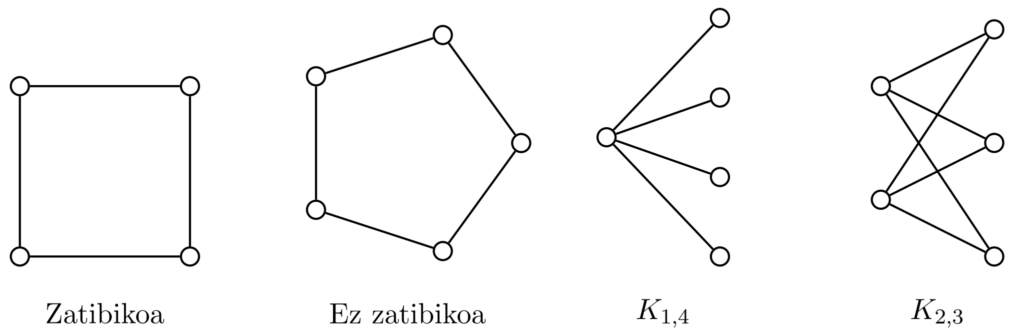
- *$G_1 = (V_1, E_1)$ grafoari $G = (V, E)-$ren* **azpigrafoa** *esaten zaio, baldin eta $V_1 \subseteq V$ eta $E_1 \subseteq E$ betetzen bada. $G_1 \subseteq G$ adierazten da. Baldin eta $V_1 = V$, G_1 azpigrafo* **sortzailea** *dela esaten da.*

- *G grafoa* **zatibikoa** *dela esaten da baldin eta erpinen multzoaren partiketa badago V bi zatitan banatzen duena, V_1 eta V_2, non G grafoaren ertz bakoitzaren muga bat V_1 azpimultzoan eta bestea V_2 azpimultzoan baitago.* **Zatibiko grafo betea** *dugu, $K_{|V_1|,|V_2|}$ adierazirik, baldin eta V_1 eta V_2 azpimultzoen arteko konexio posible guztiak agertzen badira, hots, $E = \{v_1v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.*



K_5 E_5 G $\overline{G}$

5.5. irudia: Zenbait grafo mota



5.6. irudia: Grafoen zatibikotasuna

5.2. Bideak eta ibilbideak

46. definizioa: *$G = (V, E)$ grafoan, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ guztietarako $v_i v_{i+1} \in E$ betetzen duen $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ erpinen segidari* **v_1 eta $v_k$ren arteko paseoa** *esaten zaio. Ertz guztiak desberdinak dituen paseoari* **ibilbidea** *esaten zaio, eta erpin guztiak desberdinak dituen paseoari* **bidea** *esaten zaio. Ibilbidearen* **luzera** *ertzen kopurua da. Baldin eta ibilbideak $v_1 = v_k$ betetzen badu, hots, ibilbide itxia bada, orduan $v_1, v_2, \ldots, v_k$ erpinen segidari* **zirkuitoa** *esaten zaio. Baldin eta bideak $v_1 = v_k$ betetzen badu, hots, bide itxia bada, $v_1, v_2, \ldots, v_k$ erpinen segidari* **zikloa** *esaten zaio. n erpineko zikloa C_n grafoa da eta n erpineko bidea P_n grafoa da.*

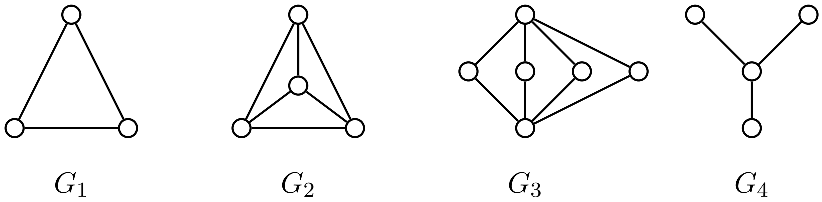
47. definizioa: *Grafo bat* **konexua** *dela esaten da baldin eta bi erpin, edozein, lotu ahal badira bide baten bidez.*

5.3. teorema: *Izan bedi G gutxienez bi mailako grafoa. G zatibiko grafoa da baldin eta soilik baldin ziklo bakoitirik ez badu.*

Oharra: ez dugu 5.3. teoremaren frogapenik ikusiko.

48. definizioa: *Bide eta ibilbide berezi batzuk.*

- *Ertz bakoitzetik zehatz-mehatz behin igarotzen den ibilbideari* **Eulerren ibilbidea** *esaten zaio.*
- *Eulerren ibilbide itxia* **Eulerren zirkuitua** *deitzen da.*
- *Eulerren zirkuitua duen grafoari* **Eulerren grafoa** *deitzen zaio.*
- *Erpin bakoitzetik zehazki behin igarotzen den bideari* **Hamiltonen bidea** *edo* **bide hamiltondarra** *esaten zaio.*
- *Hamiltonen bide itxia* **ziklo hamiltondarra** *deitzen da.*
- *Ziklo hamiltondarra duen grafoari* **grafo hamiltondarra** *deitzen zaio.*



5.7. irudia: Grafo eulearren eta hamiltondarren adibideak

5.7.. irudian aurkezten dira lau aukerak grafo eulearrak eta hamiltondarrak izateko. Izan ere, G_1 grafo eulearra eta hamiltondarra da; G_2 hamiltondarra da, baina ez eulearra; G_3 eulearra da, baina ez hamiltondarra, eta G_4 ez eulearra eta ez hamiltondarra.

5.4. teorema: *Grafo (edo multigrafo) batek Eulerren zirkuitua badu, bere erpin guztiak bikoitiak dira.*

5.5. teorema: *Grafo (edo multigrafo) batek Eulerren ibilbidea badu, bi erpin bakoiti ditu gehienez.*

5.6. korolarioa: *Eulerren ibilbidea duen edozein grafok (edo multigrafok) 0 edo 2 erpin bakoiti ditu.*

Adibidez, *etxetxoak* Eulerren ibilbidea du, baina *gutun-azalak* ez du Eulerren ibilbiderik.

Aplikazioa: Königsberg-eko 7 zubiaren problemak ez du soluziorik. Ikusi 5.8.. irudia.

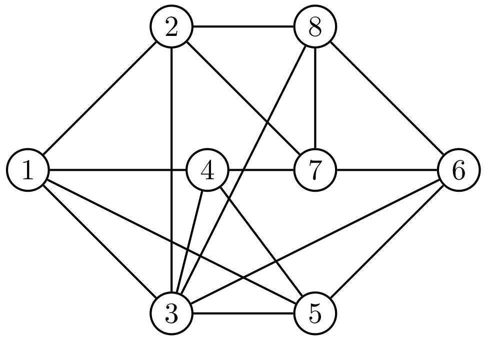
5.8. irudia: Königsberg-eko 7 zubiak

5.7. teorema: *Erpin bakoitirik ez duen edozein grafo (edo multigrafo) konexuk Eulerren zirkuituren bat dauka.*

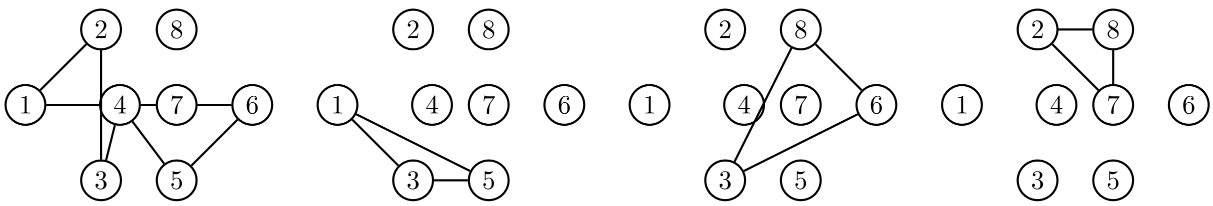
5.8. teorema: *Zehazki bi erpin bakoiti dituen edozein grafo (edo multigrafo) konexuk Eulerren ibilbideren bat dauka.*

Adibidez, 5.9.. irudiko grafoan, erpin guztiak bikoitiak dira. 5.7.. teorema frogatu daiteke era konstruktibo batean. Izan ere, esate baterako, has gaitezke 1 nodoan ziklo bat egin arte (5.10..

irudiko A zikloa), nodo guztiak bikoitiak direnez, nodo batean sartzean, beti dago ateratzeko aukera. Ertz gurutzaturik gabe geratzekotan, jarrai dezagun zikloak osatzen; beti da posible, nodoen bikoitasunagatik, ertzik gabe geratu arte. 5.10.. irudian ikusten denez, lau ziklo horiek kontuan hartuz gero, ez dago ertz gehiagorik. Orain, posible da guztiak konektatzea baldintza berdinagatik eta grafo konexua delako. Azkenik, eulerren zirkuitua topatu dugu, esate baterako, A ziklotik hasita, 1 nodoan guztiak zeharkatuz 3ra arte; hortik, C zikloa 3tik 8ra; D zikloan, 8tik osorik; C zikloan, 8tik 6ra eta 6tik 3ra; B zikloan, 3tik osorik, eta A ziklora itzuliz, 3tik 1era ixten da.



5.9. irudia: Erpin bikoitidun grafoa



(A zikloa) (B zikloa) (C zikloa) (D zikloa)

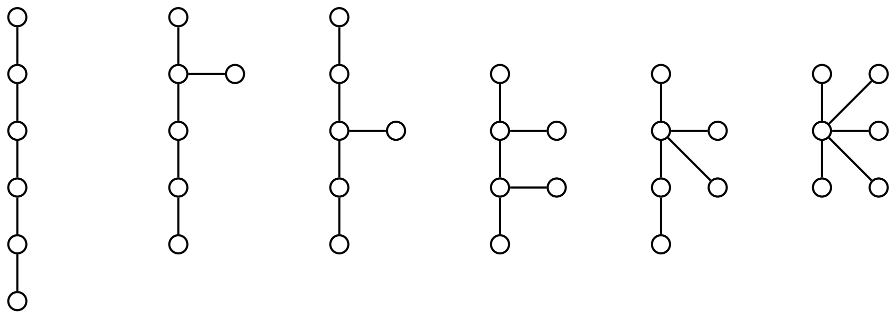
5.10. irudia: 5.9.. irudiaren ziklo batzuk

5.3. Zuhaitzak

Zuhaitzak hainbat arlotan erabiltzen diren grafo bereziak dira. Besteak beste, egituretan, sailkapen tekniketan, kodifikazioaren teorian, optimizazio problemetan ditugu zuhaitzak. Zuhaitzak, grafo berezi gisa, ikasi zituen lehenengoa Gustav Robert Kirchoff (1824-1887) izan zen, elektrizitatearen fluxuan agertzen diren Ohm legeak zabaltzeko erabili zuen zuhaitzen kontzeptua.

49. definizioa: *Ziklo gabeko grafo konexua* **zuhaitza** *deitzen da.*

Adibidea, $n = 6$ erpineko zuhaitzak 5.11.. irudian ikus daitezke.



5.11. irudia: 6 erpineko zuhaitz posibleak

5.9. teorema: *Edozein zuhaitzetan (erpin bakarrekoan izan ezik) existitzen da 1 mailako erpinik.*

5.10. teorema: *n erpineko zuhaitzak, zehazki, $n-1$ ertz ditu.*

5.11. teorema: *Edozein zuhaitzaren u eta v erpinen artean, bide bakarra dago.*

5.12. teorema: *Zuhaitz baten auzokideak ez diren bi erpin ertz baten bidez konektatzen badira, orduan ateratzen den grafoak ziklo bat izango du.*

5.13. teorema: *Zuhaitz baten edozein ertz ezabatzen bada, orduan ateratzen den grafoa ez da konexua.*

5.14. teorema: *n erpineko grafo konexuak $n-1$ ertz baditu, orduan zuhaitza da.*

5.15. teorema: *n erpineko eta ziklo gabeko grafoak $n-1$ ertz baditu, orduan zuhaitza da.*

Laburbilduz, zuhaitzaren bi karakterizazio ikusi ditugu. Izan bedi G n erpineko grafoa. Orduan,

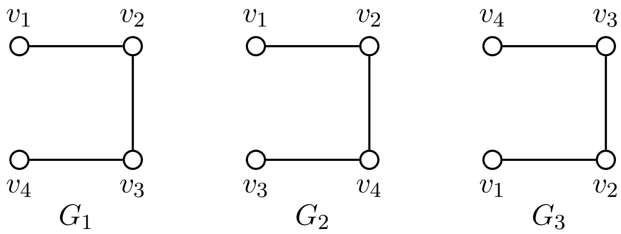
$$G \text{ zuhaitza} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{konexua} \\ n-1 \text{ ertzekoa} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ziklo gabekoa} \\ n-1 \text{ ertzekoa} \end{array} \right\}$$

50. definizioa: *Izan bitez $u, v \in V$ zuhaitz baten bi erpin, $u-$ren eta $v-$ren arteko* **distantzia** *u-tik v-ra doan bide bakarreko ertzen kopurua da.*

Zenbat n erpineko zuhaitz dago?

51. definizioa: *Zuhaitzaren erpin bakoitzak izenik badu,* **zuhaitz etiketatua** *deitzen da. Bi zuhaitz etiketatuak baliokideak dira, baldin eta beren erpinen eta (ordenarik gabeko) ertzen izenak berdinak badira.*

Adibidez, 5.12.. irudian ikusten denez, G_1 eta G_3 zuhaitz etiketatu baliokideak dira, baina ez G_2 zuhaitz etiketatuarekiko.



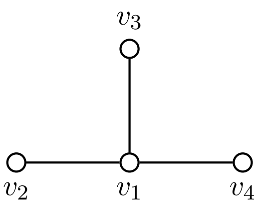
5.12. irudia: Zuhaitz etiketatuak

5.16. teorema: *Izan bedi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ erpineko zuhaitz etiketatua, non $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ $d(v_i) = d_i + 1$ v_i erpinaren maila baita. Orduan, zuhaitz etiketatuen kopurua honako koefiziente multinomial hau da:*

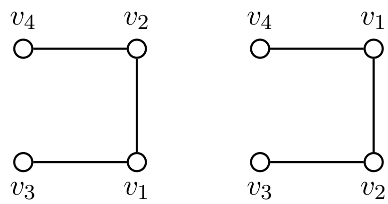
$$\binom{n-2}{d_1, d_2, \ldots, d_n}$$

Adibidez, $n = 4$ denean, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ erpinen multzoa dugu. Baldin eta $d(v_1) = 3$ eta $d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 1$ erpinen mailak badira, orduan zuhaitz etiketatu *bakarra* dago. Baldin eta $d(v_1) = d(v_2) = 2$ eta $d(v_3) = d(v_4) = 1$ erpinen mailak badira, *bi* zuhaitz etiketatu daude. Izan ere, 5.13.. irudian ikusten denez, aukerak adierazita daude.

$$\binom{2}{2,0,0,0} = 1 :$$



$$\binom{2}{1,1,0,0} = 2 :$$



5.13. irudia: Zuhaitz etiketatuen kopurua eta koefiziente multinomialak

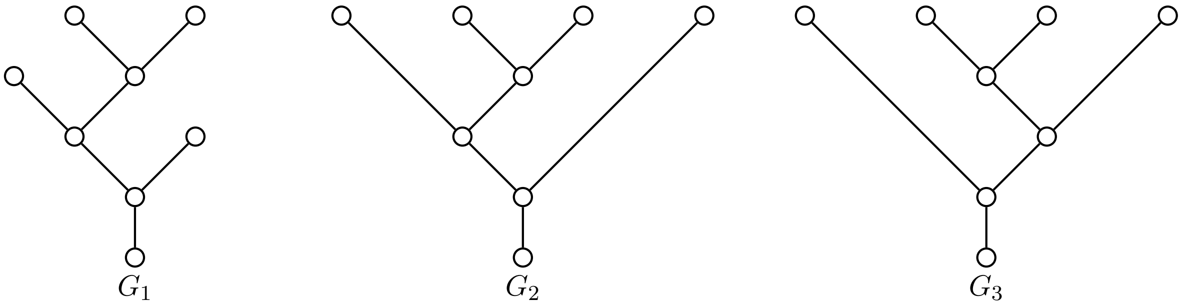
5.17. teorema: *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ zenbaki arrunten segida zuhaitz baten erpinen mailak dira baldin eta soilik baldin haien batura $2(n-1)$ bada.*

5.18. teorema: **(Cayleyren formula)** *n erpineko zuhaitz etiketatuen kopurua n^{n-2} da.*

Adibidez, $n = 4$ bada, bi motatako zuhaitz daude eta zuhaitz etiketatuak $12 + 4 = 16 = 4^2$ dira

52. definizioa: **Sustraidun zuhaitzean**, *1 mailako erpin bati sustrai-erpina deitzen zaio. Sustraidun zuhaitza* **hirubaliokoa** *da, baldin eta erpin bakoitzaren maila 1 edo 3 bada. 1 mailako erpin guztiak (sustrai-erpina izan ezik) goiko lerro berean kokatzen badira, lerro horretan dagoen erpin kopuruari* **zuhaitzaren maila** *esaten zaio.* **Zuhaitz ordenatuak** *aintzat hartuko ditugu,* *hots, sustraidun zuhaitzak, non erpin bakoitzaren ondorengoa ezker-eskuin ordena zehatz batean emanda baitago.*

Adibideaz, 5.14.. irudian, hirubalioko sustraidun zuhaitzak ditugu, guztiak 4 mailakoak. Zuhaitz ordenatuak aintzat hartzeagatik, G_1 eta G_2 berdinak dira, baina desberdinak G_3 zuhaitzarekiko.

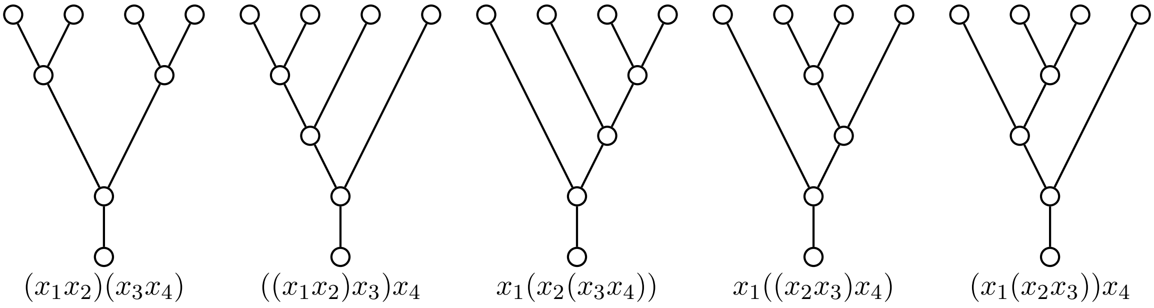


5.14. irudia: Hirubalioko sustraidun zuhaitz etiketatuak

5.19. teorema: *n mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoen kopurua Catalanen $(n-1)$. zenbakia da, hots, C_{n-1},*

$$\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

Adibidean, 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoen kopurua $C_3 = 5$ da, eta 5.15.. irudian, bosten adierazpenak agertzen dira.

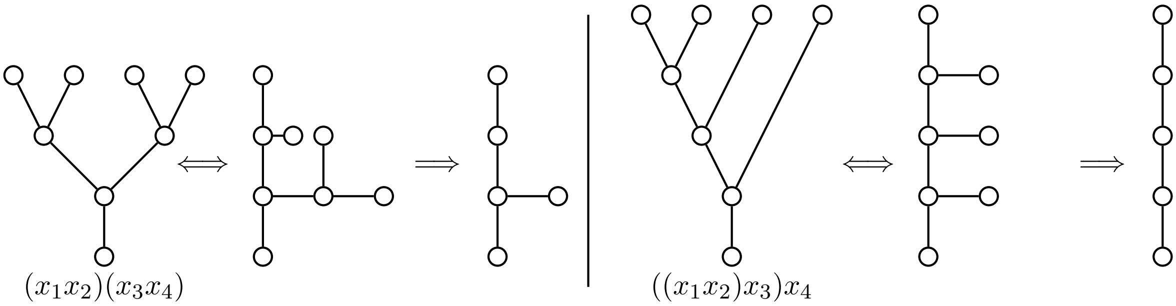


5.15. irudia: Ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoak

5.20. teorema: *n erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitzen kopurua Catalanen $(n-2)$. zenbakia da, hots, C_{n-2},*

$$\frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}.$$

5.20.. teoremaren frogapena n erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitzen multzoaren eta $n-1$ mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoen multzoaren arteko bijekzioan oinarritua dago; 5.16.. irudian, bi adibide ikus daitezke $n = 5$ kasurako.



5.16. irudia: Bi zuhaitz moten arteko baliokidetasuna

5.4. Planotasuna

53. definizioa: *G grafoa planoan irudika badaiteke eta ertzak soilik erpinetan ukitzen badira,* **planarra** *dela esaten da.*

54. definizioa: *G grafo planarraren* **eskualdea** *planoaren atal handiena da non grafoa ukitzen ez duen kurba baten bidez edozein bi puntu lot baitaitezke. Sortzen den* **eskualdeen multzoa***ri* ***F*** *esaten zaio, eta haren kardinala ez dago grafoaren irudikapenaren menpe. R* **eskualdearen maila**, ***b(R)***, *bera mugatzen duten ertzen kopurua da.*

Adibidez, K_4 planarra da, baina K_5 ez da planarra.

5.21. teorema: (Eulerren formula) *F eskualdeen multzoa duen $G = (V, E)$ grafoa konexua eta planarra bada, orduan honako hau betetzen da:*

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

5.22. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$. n erpineko $G = (V, E)$ grafo konexu planarra badugu, orduan $|E| \leq 3n - 6$. Baldin eta $|E| = 3n - 6$, orduan eskualde guztien maila 3 da (hau da, triangeluak).*

Frogapena:

(i) Ziklo gabekoa bada, zuhaitza izango da. Orduan, $|E| = n - 1 \leq 3n - 6 \Leftrightarrow n \geq 3$.

(ii) Bestalde, zuhaitza ez bada, zikloren bat izango du eta eskualde bakoitzak gutxienez 3 ertz izango ditu, $\forall R,\ b(R) \geq 3$. Beraz, $\sum_{R\in F} b(R) \geq 3|F|$. Eta ertz bakoitza gehienez 2 eskualdetan dagoenez, $\sum_{R\in F} b(R) \leq 2|E|$. Hau da,

$$3|F| \leq \sum_{R\in F} b(R) \leq 2|E|$$

Gainera, Eulerren teoremagatik, $|F| = 2 - |V| + |E|$. Orduan,

$$3(2 - |V| + |E|) \leq 2|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

5.23. korolarioa: *K_5 ez da planarra.*

5.24. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$. n erpineko $G = (V, E)$ grafo planarra badugu, orduan $|E| \leq 3n - 6$.*

Frogapena:

Oro har G grafoak k osagai konexu izango ditu. Frogatu dezagun indukzioz $k-$ren gainean.

(i) $k = 1$ denean, G konexua denez, aurreko 5.22. teoreman frogatuta dago.

(ii) Indukzio-hipotesia: eman dezagun egiazkoa dela k osagai konexurako. Hau da, $G_k = (V_k, E_k)$ denean, $|E_k| \leq 3|V_k| - 6$.

(iii) Frogatu dezagun $k + 1$ osagai konexu dituen $G_{k+1} = (V, E)$ graforako. Grafo honetan, $O_1, O_2, \ldots, O_k$ eta $O_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ osagai konexu daude eta

$$G_{k+1} = (O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_k) \cup O_{k+1} = G_k(V_k, E_k) \cup O_{k+1},$$

non $|V| = |V_k| + |V_{k+1}|$ eta $|E| = |E_k| + |E_{k+1}|$. Azken osagaia, O_{k+1}, hiru motatakoa izan daiteke: (a) erpin bakarrekoa, (b) bi erpinekoa edo (c) hiru erpinekoa edo gehiagokoa.

(a) $|V_{k+1}| = 1$ erpinekoa, orduan $|E_{k+1}| = 0$. Alde batetik, $|V| = |V_k| + |V_{k+1}| = |V_k| + 1$ eta $|E| = |E_k| + |E_{k+1}| = |E_k|$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $|E| = |E_k| \leq 3|V_k| - 6 \leq 3|V| - 6$.

(b) $|V_{k+1}| = 2$ erpinekoa, orduan $|E_{k+1}| = 1$. Alde batetik, $|V| = |V_k| + |V_{k+1}| = |V_k| + 2$ eta $|E| = |E_k| + |E_{k+1}| = |E_k| + 1$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $|E| = |E_k| + 1 \leq 3|V_k| - 6 + 1 \leq 3(|V_k| + 2) - 6 \leq 3|V| - 6$.

(c) $|V_{k+1}| \geq 3$ erpinekoa; orduan, 5.22. teoremagatik, $|E_{k+1}| \leq 3|V_{k+1}| - 6$. Alde batetik, $|V| = |V_k| + |V_{k+1}|$ eta $|E| = |E_k| + |E_{k+1}|$. Beraz, indukzio-hipotesiaz, $|E| = |E_k| + |E_{k+1}| \leq (3|V_k| - 6) + (3|V_{k+1}| - 6) = 3(|V_k| + |V_{k+1}|) - 12 \leq 3|V| - 6$.

5.25. teorema: *Izan bedi $n \geq 3$, n erpineko $G = (V, E)$ grafo konexu planarra eta 3 luzerako ziklo gabekoa. Orduan, $|E| \leq 2n - 4$.*

5.26. korolarioa: *$K_{3,3}$ zatibiko grafo betea ez da planarra.*

5.27. teorema: *(Kuratowskyren grafo planarren karakterizazioa) G grafo planarra da baldin eta soilik baldin eta haren barnetik $K_{3,3}$ edo K_5 atera ezin badira.*

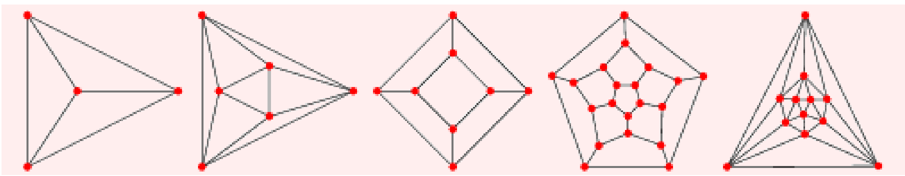
Oharra: ez dugu 5.27. teoremaren frogapenik ikusiko.

5.28. teorema: *G grafo planarra bada, existitzen da erpinen bat non bere maila 5 baino txikiago edo berdin baita.*

Aplikazioa: gorputz platonikoak.

55. definizioa: **Gorputz platonikoak** *poliedro erregular konbexuak dira, haien aurpegiak poligono erregularrak dira eta edozein erpinetan aurpegi kopuru bera agertzen da. Tetraedroak, oktaedroak, kuboak, dodekaedroak eta ikosaedroak aurreko propietateak betetzen dituzte.*

Gorputz platoniko bakoitza grafo planar baten bidez adieraz daiteke, aurpegi bakoitza eskualde baten bidez adieraziz; ikus 5.17.. irudia. Horretarako, irudika ezazu arrain-begi objektibo duen kamara erabiliz, poliedroen argazkiak ateratzen.



Tetraedroa Oktaedroa Kuboa Dodekaedroa Ikosaedroa

5.17. irudia: Gorputz platonikoen adierazpen planarrak

Izan bitez p aurpegi bakoitzak duen ertzen kopurua eta q erpin bakoitzean dagoen aurpegien kopurua. Orduan,

$$q|V| = 2|E| \quad \text{eta} \quad p|F| = 2|E|.$$

5.1.. taulan, gorputz platonikoen erpin, ertz eta eskualde kopuruak adierazten dira, grafo planar moduan irudikatuta, besteak beste.

5.1. taula: Gorputz platonikoen ezaugarriak

Grafo planarra	$\|V\|$	$\|E\|$	$\|F\|$	p	q
Tetraedroa	4	6	4	3	3
Oktaedroa	6	12	8	3	4
Kuboa	8	12	6	4	3
Dodekaedroa	20	30	12	5	3
Ikosaedroa	12	30	20	3	5

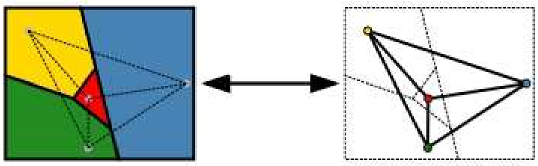
5.29. teorema: *Zehazki, 5 gorputz platoniko existitzen dira.*

5.5. Koloratzea

56. definizioa: *Grafo bat* **koloratua** *da baldin eta erpin bakoitzak kolore bat badu eta auzokideak diren erpinen koloreak diferenteak badira. G grafoa koloratzeko behar den kolore kopuru txikienari grafoaren* **zenbaki kromatikoa** *esaten zaio, $\chi(G)$ adierazirik.*

Adibidez, kuboaren zenbaki kromatikoa 2 da; E_n grafo hutsak $\chi(E_n) = 1$ zenbaki kromatikoa duten bakarrak dira eta K_n grafo beteak $\chi(K_n) = |V| = n$ duten bakarrak dira.

Koloratzearen teoria mapen eskualdeen koloratzeari lotuta dago, mapak[1] grafo planarren bidez adierazten baitira. 5.18.. irudian, mapen eta grafo planarren arteko lotura adierazten da eta koloratzearen problema irudikatzen da.



5.18. irudia: Grafo planarrak, mapak eta koloratzea

5.30. teorema: (Bost koloretako teorema): *Izan bedi G grafo planarra, orduan $\chi(G) \leq 5$.*
Frogapena:

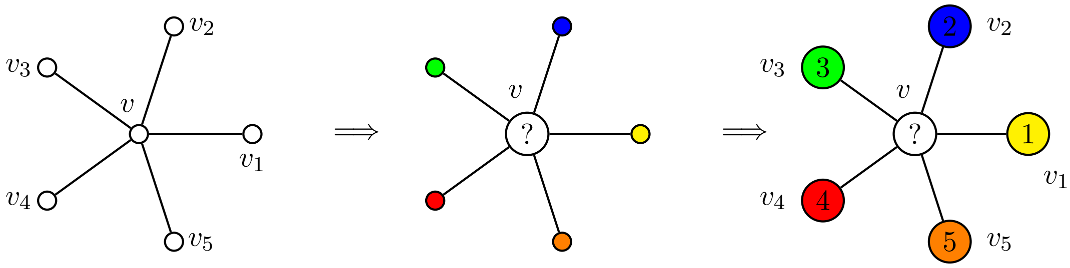
Izan bedi $G = (V, E)$ eta $|V| = n$; indukzioz, $n-$ren gainean, frogatuko dugu.

Hasierako kasua: $n \leq 5$ bada, argi dago egiazkoa dela.

Induzkio-hipotesia: demagun $n-1$ erpineko grafo planar guztietarako $\chi(G_{n-1}) \leq 5$ dela.

Frogatu dezagun n erpineko kasurako. 5.28. teorema dela kausa, v existitzen da non $d(v) \leq 5$ baita. $G' = G - v$ grafoa planarra eta $n-1$ mailakoa denez, $\chi(G') \leq 5$ induzkio hipotesiagatik. Erabil ditzagun $1, 2, 3, 4, 5$ koloreak G' koloratzeko, v erpinaren auzokideen koloreak lekuz elkar aldatu nahi ditugu kolore bat askatzeko, 5.19. irudian ikusten den bezala.

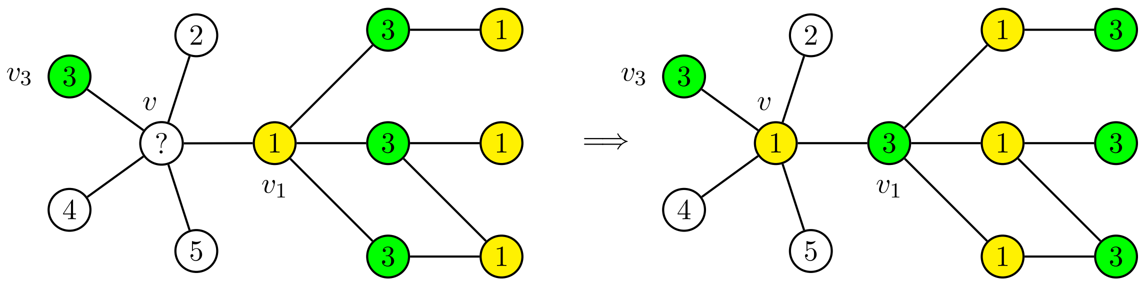
[1]Demagun eskualdeak konexuak direla eta eskualdeen arteko mugak puntuak soilik ezin direla izan.



5.19. irudia: 5 mailako erpinaren koloratzearen problema

Bi kasu desberdindu ditzakegu, 1 eta 3 koloreak dituen v_1-etik v_3-ra doan biderik soilik existitzen den ala ez aintzat hartu.

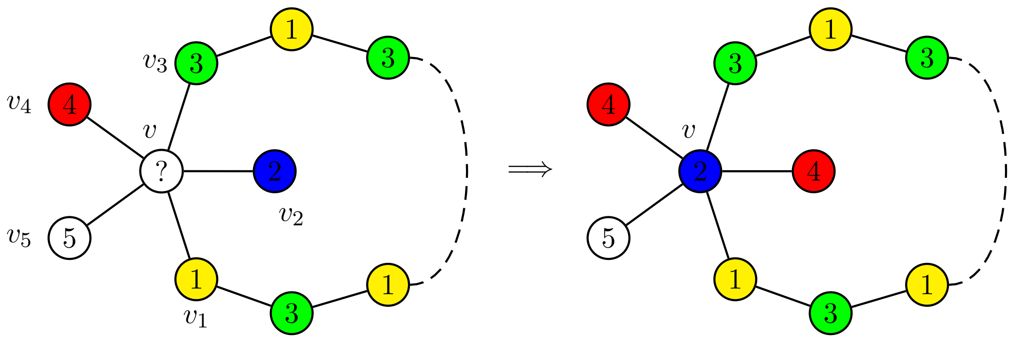
1. kasua: ez da existitzen 1 eta 3 koloreak dituen v_1-etik v_3-ra doan biderik soilik.



5.20. irudia: Bost koloretako problemaren 1. kasua

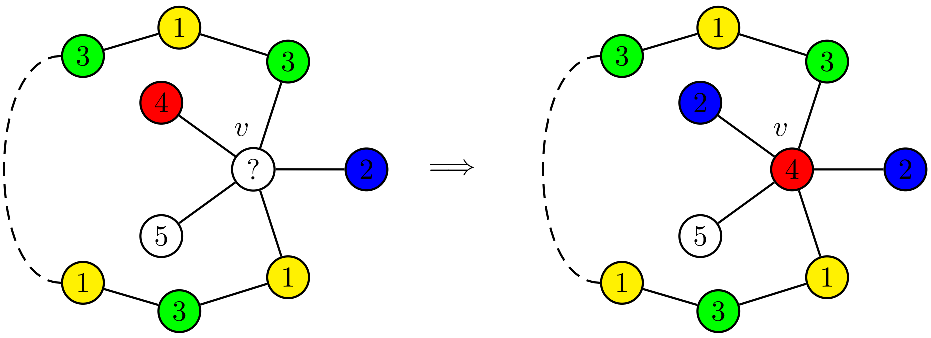
Orduan, erraza da problema ebaztea. 5.20.. irudian ikusten den bezala, nahikoa da, adibidez, v_1 erpinaren kolorea v erpinari esleitu eta v_1 erpinari lotutako eremuan 1 eta 3 koloreak lekuz elkar aldatzea. Argi dago, alboko erpinik beti kolore diferenterekin koloreztatuta egongo direla 1. kasuaren baldintzagatik.

2. kasua: 1 eta 3 koloreak dituen soilik v_1-etik v_3-ra doan bidea existitzen da.



5.21. irudia: Bost koloretako problemaren 2. kasua (v_2 barruan)

Orduan v erpinarekin, 1 eta 3 koloretako zikloa osatzen da, v_2 edo v_4 bere barnean duena, ikusi 5.21. eta 5.22., hurrenez hurren.



5.22. irudia: Bost koloretako problemaren 2. kasua (v_4 barruan)

Orduan, 2. kasuko bi egoeretan problema ebatz daiteke orain azalduko dugun bezala. Adibidez, v_2 zikloaren barruan badago, nahikoa da v_2 erpinaren kolorea erabiltzea v erpina koloratzeko eta v_2 erpinari lotutakoan 2 eta 4 koloreak lekuz elkar aldatzea, aurreko kasuan bezala. Argi dago, v_2 eta v_4 erpinen arteko ez dela existitzen soilik 2 eta 4 koloreko ziklorik, nahitaez 1 eta 3 koloreko zikloa zeharkatu behar genukeelako, grafo planar bat delako. Beraz, frogatuta geratzen da.

5.31. teorema: (Lau koloretako teorema): *Izan bedi G grafo planarra; orduan,* $\chi(G) \leq 4$.

Lau koloretako teoremaren frogapenak mende bat baino gehiago behar izan zuen; gaur egun ere interes handiko problema da, eta besteak beste, oin-oharrean[2] aipatutako zabalkunde-artikulua kontsulta dezakezue.

Izan ere, problema planteatu zenetik ebatzi arte, ehun urte baino gehiago pasatu ziren. 1852. urtean, Francis Guthriek bere anaiari eta Augustus de Morgani planteatu zien eta 1878. urtean,

[2] `http://www.ehu.es/~mtwmastm/Paseo0405.pdf`

Arthur Cayleyk aieruaren enuntziatua argitaratu zuen. Sir Alfred Bray Kempek frogapen bat argitaratu zuen 1879. urtean, baina 1890. urtean, Percy Heawoodek akats bat topatu zuen (eta bost koloretako teorema frogatu zuen Kemeperen ideiekin). 1976. urtean, Ken Appel eta Wolfgang Haken matekatikariek frogatu zuten ordenagailu baten laguntzarekin (50 eguneko kalkuluak) eta 1995. urtean, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour eta Robin Thomas egileek frogapena hobetu zuten.

5.6. Grafo-teoriaren ariketa-zerrenda

Hamabigarren ariketa-zerrenda: grafo-teoria

(XII-1) Egin ezazu agurren lemaren itzulpena, grafo-teoriaren teorema egokia erabiliz.

(XII-2) Irudikatu K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 eta K_6. Zenbat ertz dauka K_n grafo beteak?

(XII-3) Erantzun iezaiezu, baiezko erantzuna bada, adibidea jarriz eta ezezkoa bada, azalpena emanez.

(a) 10 ertz dituen 4 mailako grafo erregularrik dago?

(b) 15 ertz dituen 4 mailako grafo erregularrik dago?

(XII-4) Zenbat zuhaitz etiketatu dago non v_1 eta v_2 erpinen maila 3 baita eta v_3, v_4, v_5 eta v_6 erpinen maila 1 baita? Irudika itzazu emaitzak.

(XII-5) Existitzen da zuhaitza non erpinen mailak 4, 4, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 baitira? Marraztu ezazu erantzuna baiezkoa bada.

(XII-6) Aintzat har ditzagun $n = 5$ erpineko zuhaitzak.

a) Zenbat mota dago? Azal ezazu erantzuna.

b) Mota bakoitzean zenbat zuhaitz etiketatu dago?

c) Zenbat dira guztira? Egiazta ezazu Cayleyren formula.

(XII-7) Zenbat 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubalioko dago? Irudika itzazu.

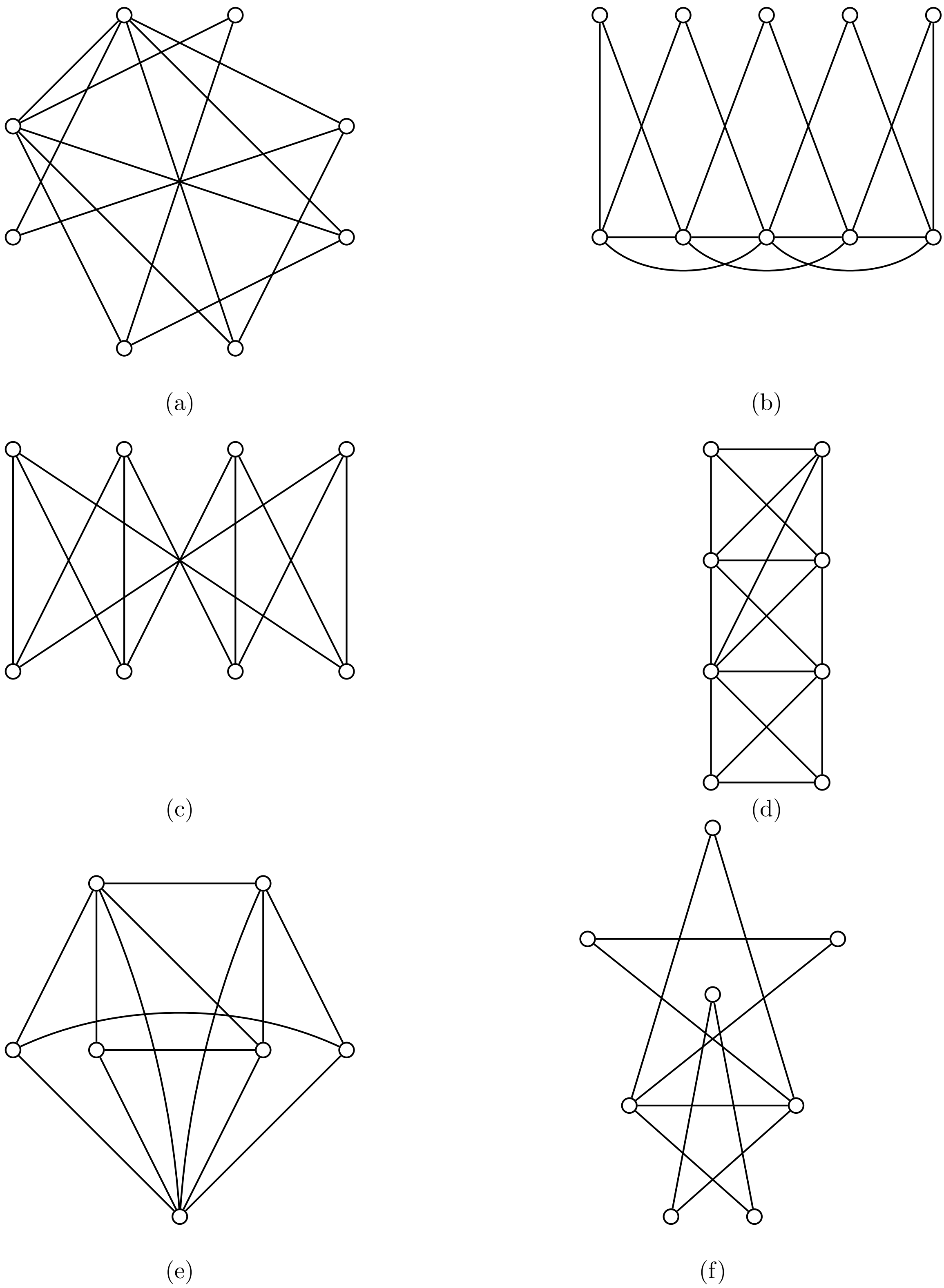
(XII-8) (A.12.) Bost erpineko eta ordenatutako sustraidun zenbat zuhaitz dago? Irudika ezazu bakoitza eta adieraz ezazu aurreko ariketarekiko korrespondentzia.

(XII-9) Frogatu ezazu 5.23.. irudiko (a), (b), (c), (d), (e) eta (f) grafoak planarrak direla, hots, irudikatu grafo bakoitzaren ertzek elkar gurutza ez dezaten. Egiazta ezazu Eulerren formula kasu bakoitzean.

(XII-10) Determina ezazu 5.24.. irudiko Australiako herrien mapari dagokion zenbaki kromatikoa, dagokion grafo planarra irudikatuz.

(XII-11) Determina ezazu 5.25.. irudiko Afrikako herrien mapari dagokion zenbaki kromatikoa. Azal ezazu erantzuna.

Oharra: zenbakizko soluzioak B.5. eranskinean daude.



5.23. irudia: Sei grafoak

5.24. irudia: Australiako mapa

5.25. irudia: Afrikako mapa

ARIKETAK

A. eranskina

Zenbait ariketaren ebazpenak

A.1. Lehenengo ariketa-zerrendako ebazpenak: lur- eta sabai-funtzioak

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-2) ariketa

(I-2) Izan bedi $b \geq 2$ zenbaki osoa. Zenbaki-sistemaren oinarritzat b hartuta, edozein zenbaki arrunt n, $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ multzoko zifrak erabiliz adierabakarrean idatz daiteke. Erabil dezagun $d_b(n)$ notazioa b oinarrian n zenbakiaren zifra-kopurua adierazteko. Adibidez,

$$d_{10}(357) = 3 \quad eta \quad d_2(8) = d_2((1000)_2) = 4.$$

Aurkitu $log_b(n)$-ren menpeko $d_b(n)$ adierazpena.

Adibidez, sistema hamartarrean ($b = 10$), zein da $n = 2305$ zifra-kopurua? Erantzuna erraza da, $d_{10}(2305) = 4$. Azter dezagun egoera:

$$\begin{aligned} d_{10}(n) &= 4 \Leftrightarrow 1000 \leq n < 10000 \\ d_{10}(n) &= 7 \Leftrightarrow 10^6 \leq n < 10^7 \\ d_{10}(n) &= k \Leftrightarrow 10^{k-1} \leq n < 10^k \end{aligned}$$

Eta $\log_{10}$ gorakorra denez,

$$k - 1 \leq log_{10}(n) < k$$

Hau da, $k-1$ kopurua, $log_{10}(n)$ baino txikiagoa edo berdina den zenbaki osorik handiena da. Beraz, $k - 1 = \lfloor log_{10}(n) \rfloor$. Eta $k = 1 + \lfloor log_{10}(n) \rfloor$. Frogapena errepika daiteke 10 oinarria b orokorraren menpe ordezkatuz.

Ariketa hau 1.3.. azpiatalean aipatzen da.

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-3) ariketa

(I-3) Egiaztatu edo gezurtatu honako baieztapen hauek:

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \,, \ \forall x \geq 0$

b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil \,, \ \forall x \geq 0$

a) $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \,, \ \forall x \geq 0$

($\leq$) $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor \leq \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

($\geq$) Absurdura eramanez, demagun $\left\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor < \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n \leq \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\lfloor x \rfloor < n^2 \leq x$ absurdoa da.

b) $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil \,, \ \forall x \geq 0$

($\geq$) $\lceil x \rceil \geq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lceil x \rceil} \geq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil \geq \lceil \sqrt{x} \rceil$

($\leq$) Absurdura eramanez, demagun $\left\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \right\rceil > \lceil \sqrt{x} \rceil$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lceil x \rceil} > n \geq \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\lceil x \rceil > n^2 \geq x$ absurdoa da.

(I-4) ariketaren emaitzatik ere deduzitzen da. Izan ere, $\sqrt{\cdot} : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, gorakorra eta honako propietate hau betetzen du: $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-4) ariketa

(I-4) Izan bitez D zuzen erreala edo $[0,\infty)$ tartea, eta $f : D \to \mathbb{R}$ funtzio jarraitua, gorakorra eta honako propietate hau betetzen duena:

$$f(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$$

Frogatu:

a) $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$

b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

a) $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor = \lfloor f(x) \rfloor$

($\leq$) $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $f(\cdot)$ gorakorra denez, $f(\lfloor x \rfloor) \leq f(x) \Rightarrow \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor \leq \lfloor f(x) \rfloor$

($\geq$) Absurdura eramanez, demagun $\lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor < \lfloor f(x) \rfloor$ dela.
Orduan, $\exists n \in \mathbb{N} \ : \ f(\lfloor x \rfloor) < n \leq f(x)$ eta $f(\cdot)$ jarraitua eta gorakorra denez, $\exists m = f(n)$ non $f(\lfloor x \rfloor) < m \leq f(x)$ betetzen den.
Gainera, $f(m) = n \in \mathbb{N} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$. Beraz, $\lfloor x \rfloor < m \leq x$ absurdoa da.

b) $\lceil f(x) \rceil = \lceil f(\lceil x \rceil) \rceil$

Analogoki frogatu daiteke.

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-7) ariketa

(I-7) Aurkitu baldintza nahiko eta beharrezkoa, honako hau bete dadin:

$$\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil \,, \ \forall x \geq 0$$

Baldin eta $x \in \mathbb{Z}$, berehalakoa da berdintza beti betetzen dela.

Baldin eta $x \notin \mathbb{Z}$, orduan berdintza betetzen da baldin eta $x \notin \cup_{n \in \mathbb{N}^*} (n^2, n^2+1)$ bada.

Argi dagoenez, $\lfloor x \rfloor \leq x$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez, $\sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq \sqrt{x} \Rightarrow \left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil \leq \lceil \sqrt{x} \rceil$

Hala ere, $\left\lceil \sqrt{\lfloor x \rfloor} \right\rceil < \lceil \sqrt{x} \rceil \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq n < \sqrt{x}$ eta $\sqrt{\cdot}$ gorakorra denez,

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \lfloor x \rfloor \leq n^2 < x$
$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \lfloor x \rfloor \leq n^2 < x < \lfloor x \rfloor + 1 \leq n^2 + 1$
$\Leftrightarrow x \in (n^2, n^2 + 1)$

Lehenengo ariketa-zerrendako (I-12) ariketa

*(I-12) (*Dirichleten usategiaren printzipioa*) Baldin eta n uso m horma-zulotan banatzen badira, hobiren batean gutxienez, $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ uso daude, eta hobiren batean, gehienez, $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ uso daude.*

Ariketa hau 1.3.. printzipioan oinarrituta dago.

Izan bedi $x_i \in \mathbb{N}^*$ zenbakia i. horma-zuloan dagoen uxo kopurua, $i = 1, 2, \ldots, m$; orduan, argi dago $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ dela, n uso kopuru totala baita.

(a) Frogatu dezagun hobiren batean gutxienez $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ uso daudela.
Izan ere, $\exists i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ x_i \geq \frac{n}{m}$, hots, $x_i \geq \lceil \frac{n}{m} \rceil$.

Ikusiko dugu absurdura eramanez; demagun hobi guztietan uso gutxiago daudela eta kontraesana topatzen badugu, enuntziatua frogatuta geratuko da.

$\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad x_i < \lceil \frac{n}{m} \rceil$, hau da, $x_i \leq \lceil \frac{n}{m} \rceil - 1$

Beraz,

$$n = x_1 + \ldots + x_m \leq m(\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil - 1). \tag{A.1}$$

Bi aukera daude, (i) $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$ edo (ii) $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$

(i) Baldin eta $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$, orduan $(\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1) = \frac{n}{m} - 1$ eta (A.1) ekuazioagatik, $\frac{n}{m} \leq \frac{n}{m} - 1$ absurdora heldu gara.

(ii) Baldin eta $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$, orduan $(\lceil \frac{n}{m} \rceil - 1) = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ eta (A.1) ekuazioagatik, $\frac{n}{m} \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ beste absurdora ere heldu gara.

(b) Frogatu dezagun hobiren batean gehienez $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ uso daudela.
Izan ere, $\exists j \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ x_j \leq \frac{n}{m}$, hots, $x_j \leq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$.

Orain ere ikusiko dugu absurdura eramanez; demagun hobi guztietan uso gehiago daudela eta kontraesana topatzen badugu, enuntziatua frogatuta geratuko da.

$\forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \quad x_j > \lfloor \frac{n}{m} \rfloor$, hau da, $x_j \geq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$

Beraz,

$$n = x_1 + \ldots + x_m \geq m(\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1). \qquad \text{(A.2)}$$

Bi aukera daude, (i) $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$ edo (ii) $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$

(i) Baldin eta $\frac{n}{m} \in \mathbb{Z}$, orduan $(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1) = \frac{n}{m} + 1$ eta (A.2) ekuazioagatik, $\frac{n}{m} \geq \frac{n}{m} + 1$ absurdora heldu gara.

(ii) Baldin eta $\frac{n}{m} \notin \mathbb{Z}$, orduan $(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1) = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ eta (A.2) ekuazioagatik, $\frac{n}{m} \geq \lceil \frac{n}{m} \rceil$ beste absurdora ere heldu gara.

A.2. Bigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: oinarrizko konbinatoriako problemak

Bigarren ariketa-zerrendako (II-11) ariketa

(II-11) Casanova jaunak zazpi neskalagun ditu eta egun bakoitzean batekin paseatzeko ohitura du. Igande batean erabaki zuen hurrengo astean zehar neska berarekin bi egun jarraian egongo ez zela. Zenbat eratara egin dezake aste horretako hitzorduen egutegia?

Izan bedi Ω = 'aste horretako egutegia egiteko aukerak'. Orduan, zuhaitz-diagrama edo biderkaduraren erregela erabil dezakegu kardinala kalkulatzeko.

Izan ere, $c(\Omega) = r_1 \cdot r_2 \cdots r_7$, non
r_i = 'i. egunean neska hautatzeko aukera kopurua' den, $i = 1, 2, \ldots, 7$. Argi dagoenez, 1. egunean 7 aukera daude, hots, $r_1 = 7$; baina, 2. egunetik aurrera, aurreko egunarekin ez kointziditzeko 6 aukera besterik ez daude, hots, $r_2 = r_3 = \ldots = r_7 = 6$.

Beraz, $c(\Omega) = 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 7 \cdot 6^6 = 3226592$.

Bigarren ariketa-zerrendako (II-22) ariketa

(II-22) 52 tamainako karta-sorta batekin pokerrean jokatuz, zenbat eratara lor daiteke full *bat (hirukote bat eta bikote bat)? Eta* pokerra *(4 karta berdinak)? Eta* bi bikote*? Eta* hirukote *bat?*

Izan bitez $Z = \{1, 2, ..., 13\}$ zenbaki posibleen multzoa eta $M = \{\heartsuit, \spadesuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$ karta-mota posibleen multzoa.

(a) Full (hirukotea+bikotea), $c(\Omega_{3,2}) =$**?**

Full, hau da, hirukote bat eta bikote bat ateratzeko adibidea: $\{1\heartsuit, 1\clubsuit, 1\spadesuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit\}$

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu full lortzeko-era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_{3,2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$

r_1: hirukoterako karta zenbakia hautatzea, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean 1), $r_1 = c(Z) = 13$.

r_2: bikoterako karta zenbakia hautatzea, aurrekoaren desberdina, (adibidean 2), $r_2 = c(Z) - 1 = 12$.

r_3: hirukotea osatzeko motak hautatzea, hots, Mtik hiru mota ateratzea (adibidean, $\heartsuit$, $\clubsuit$ eta $\spadesuit$), $r_3 = \binom{c(M)}{3} = \binom{4}{3}$.

r_4: bikotea osatzeko motak hautatzea, hots, Mtik bi mota ateratzea (adibidean, $\heartsuit$ eta $\spadesuit$), $r_4 = \binom{c(M)}{2} = \binom{4}{2}$.

Beraz, $c(\Omega_{3,2}) = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2} = 3744$.

(b) Pokerra (laukotea), $c(\Omega_{4,1}) =$**?**

Pokerra, hau da, laukote bat ateratzeko adibidea: $\{1\heartsuit, 1\clubsuit, 1\spadesuit, 1\diamondsuit, 2\spadesuit\}$

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu pokerra lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $c(\Omega_{4,1}) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4$

r_1: laukoterako karta-zenbakia hautatzea, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean 1), $r_1 = c(Z) = 13$.

r_2: bosgarren karta-zenbakia hautatzea, aurrekoaren desberdina, (adibidean 2), $r_2 = c(Z) - 1 = 12$.

r_3: laukotea osatzeko motak hautatzea, hots, Mtik lau mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$ eta $\diamondsuit$), $r_3 = \binom{c(M)}{4} = \binom{4}{4}$.

r_4: bosgarren kartaren mota hautatzea, hots, Mtik mota bat ateratzea (adibidean $\spadesuit$), $r_4 = \binom{c(M)}{1} = \binom{4}{1}$.

Beraz, $c(\Omega_{4,1}) = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{1} = 624$.

(c) Bi bikote, $c(\Omega_{2,2,1}) =$**?**

Bi bikote ateratzeko adibidea: $\{1\heartsuit, 1\clubsuit, 2\heartsuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit\}$

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliko dugu bi bikote lortzeko era kopurua kalkulatzeko: $r_1 \cdot r_2 \cdot$

$r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$

r_1: bi bikoteetarako karta-zenbakiak hautatzea, hots, $Z-$tik bi zenbaki ateratzea (adibidean 1 eta 2), $c(r_1) = \binom{13}{2}$

r_2: bostgarren karta-zenbakia ateratzea bi aurrekoen desberdina (adibidean 3), $c(r_2) = \binom{11}{1}$

r_3: zehaztutako lehenengo bikotea osatzeko bi karta mota ateratzea, hots, Mtik bi mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$ eta $\clubsuit$), $c(r_3) = \binom{4}{2}$

r_4: zehaztutako bigarren bikotea osatzeko bi karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$ eta $\spadesuit$), $c(r_4) = \binom{4}{2}$

r_5: bakarrik geratzen den bosgarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_5) = \binom{4}{1}$

Beraz, $c(\Omega_{2,2,1}) = \binom{13}{2} \cdot \binom{11}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} = 123558.$

(d) Hirukotea, $c(\Omega_{3,1,1}) =$**?**

Hirukotea ateratzeko adibidea: $\{1\heartsuit, 1\spadesuit, 1\diamondsuit, 2\heartsuit, 3\heartsuit\}$

Zuhaitz-diagramaren teknika erabiliz, hirukotea lortzeko era kopurua $= r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 \cdot r_5$

r_1: hirukoterako karta-zenbakia hautatzea, hots, $Z-$tik zenbaki bat ateratzea (adibidean 1), $c(r_1) = \binom{13}{1}$

r_2: laugarren eta bosgarren karta-zenbakiak ateratzea, aurrekoaren desberdinak baita haien artean ere (adibidean 2 eta 3), $c(r_2) = \binom{12}{2}$

r_3: zehaztutako hirukotea osatzeko hiru karta motak ateratzea (adibidean $\heartsuit$, $\spadesuit$ eta $\diamondsuit$), $c(r_3) = \binom{4}{3}$

r_4: zehaztutako laugarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_4) = \binom{4}{1}$

r_5: zehaztutako bosgarren karta mota ateratzea (adibidean $\heartsuit$), $c(r_5) = \binom{4}{1}$

Beraz, $c(\Omega_{3,1,1}) = \binom{13}{1} \cdot \binom{12}{2} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 54912.$

Bigarren ariketa-zerrendako (II-34) ariketa

(II-34) Kalkulatu 40 tamainako karta-sorta batetik 6 karta aukeratzeko kopurua,

a) Erregeren bat egonda.

b) Bastoirik ez egonda.

c) Erregeren bat baina bastoirik ez egonda.

Izan bitez, Ω ='40 karta-sortatik 6 karta ateratzeko aukerak' eta E ='6 kartatik gutxienez bat erregea izateko aukerak' eta B ='6 kartatik gutxienez bat bastoia izateko aukerak', $E, B \subset \Omega$.

(a) $c(E) = c(\Omega) - c(\overline{E}) = \binom{40}{6} - \binom{36}{6}$.

(b) $c(\overline{B}) = \binom{30}{6}$.

(c) $c(E \cap \overline{B}) = c(\overline{B}) - c(\overline{B} \cap \overline{E}) = \binom{30}{6} - \binom{27}{6}$.

A.3. Hirugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: oinarrizko konbinatoriako beste zenbait problema

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-4) ariketa

(III-4) 100 kuboren bilduma baten 100 kuboen aurpegiak gorriak, urdinak edo berdeak dira. 80 kubok, gutxienez aurpegi gorri bat daukate; 85ek, gutxienez aurpegi urdin bat eta 75ek, gutxienez aurpegi berde bat dute. Datu horietan oinarrituta ezin da esan hiru koloretako aurpegiak dituen x kubo-kopurua, baina zerbait esan daiteke. Zer da?

Izan bitez,
G ='gutxienez aurpegi gorri bat duten kuboak', $c(G) = 80$,
U ='gutxienez aurpegi urdin bat duten kuboak', $c(U) = 85$,
B ='gutxienez aurpegi berde bat duten kuboak', $c(B) = 75$.

Dakigunez, $c(G \cup U \cup B) = 100$ eta $c(G \cap U \cap B)$ mugatu nahi dugu.

Inklusio-esklusio printzipioagatik (1.1. teorema),
$c(G \cup U \cup B) = c(G) + c(U) + c(B) - c(G \cap U) - c(G \cap B) - c(U \cap B) + c(G \cap U \cap B)$.

Orduan, datuetan oinarrituta,

$c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140.$

Gainera,

$$\begin{aligned}
c(G \cap U) &= c(G) + c(U) - c(G \cup U) = 165 - c(G \cup U) \geq 165 - 100 = 65, \\
c(G \cap B) &= c(G) + c(B) - c(G \cup B) = 155 - c(G \cup B) \geq 155 - 100 = 55, \\
c(U \cap B) &= c(U) + c(B) - c(U \cup B) = 160 - c(U \cup B) \geq 160 - 100 = 60.
\end{aligned}$$

Beraz, $c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140 \geq 180 - 140 = 40.$

Bestalde, $c(G \cap U \cap B) = c(G \cap U) + c(G \cap B) + c(U \cap B) - 140 \leq 80 + 75 + 75 - 140 = 90.$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-9) ariketa

(III-9) Kalkula ezazu berarekiko $\{1, 2, \ldots, n\}$ multzoaren bijekzio-kopurua, zehazki $k(\leq n)$ elementu finko mantenduz. Azal itzazu itzulpen batzuk, esate baterako, adieraz itzazu bolak kutxatan kokatzearen problema eta dantza-bikoteak osatzearen problema baliokideak.

Izan bedi $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$; orduan, honako multzo honen kardinala kalkulatu nahi dugu:
$\Omega = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : f(i) = i \ \forall i \in \{i_1, \ldots, i_k\}, \ f(i) \neq i \ \forall i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\}.$

Defini ditzagun elementu bakar bat finko uzten duten multzoak:
$A_i = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : f(i) = i\}, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Teorian ikusi dugunez, 1.7.. azpiatalean, $D_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_1 \cap \ldots \overline{A}_n$ nahasketa multzoaren kardinala, $c(D_n) = n! \cdot \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$ da.

Izan bedi, $D = \{f : [n] \to [n] \text{ bijekzioa } : f(i) \neq i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-k\}, \ f(i) = i, \ \forall i \in \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}\}$, orduan, $c(D) = c(D_{n-k}) = (n-k)! \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$.

Beraz, $c(\Omega) = r_1 \cdot r_2$, non r_1 kopurua finko ez dauden osagaiak aukeratzeko era kopurua baita eta r_2 kopurua $n-k$ elementu ez finko eta k elementu finko uzten duten bijekzio kopurua baita. Hots,

$$c(\Omega) = \binom{n}{n-k} \cdot (n-k)! \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{n!}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-14) ariketa

(III-14) Zenbat zatitzaile ditu $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ faktore lehenetako deskonposizioa duen zenbakiak? Zenbat da zatitzaile guztien batura?

Izan bedi $Z =$'$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$ zenbakiaren zatitzaileen multzoa'. Orduan, $c(Z) = c(Z_1) \cdot c(Z_2) \cdot \ldots \cdot c(Z_k)$, non

$$\begin{aligned}
Z_1 &:=' p_1^{m_1}\text{-en zatitzaileak}' = \{p_1^0,\ p_1^1,\ p_1^2, \ldots, p_1^{m_1}\} \Rightarrow c(Z_1) = m_1 + 1,\\
Z_2 &:=' p_2^{m_2}\text{-ren zatitzaileak}' = \{p_2^0,\ p_2^1,\ p_2^2, \ldots, p_2^{m_2}\} \Rightarrow c(Z_2) = m_2 + 1,\\
&\vdots\\
Z_k &:=' p_k^{m_k}\text{-ren zatitzaileak}' = \{p_k^0,\ p_k^1,\ p_k^2, \ldots, p_k^{m_k}\} \Rightarrow c(Z_k) = m_k + 1
\end{aligned}$$

baitira. Beraz, $c(Z) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_k + 1) = \prod_{j=1}^{k} (m_j + 1)$

Gainera, zatitzaileen batura honela kalkula daiteke:

$$\sum_{n \in Z} n = (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{m_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{m_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \ldots + p_k^{m_k}) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1 - p_j^{m_j+1}}{1 - p_j}.$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-15) ariketa

(III-15) (Eulerren ϕ funtzioa) n zenbaki arrunt guztietarako, defini dezagun $\phi(n) := c(A_n)$, non

$$A_n := \{k \in \{1, 2, \ldots, n\}\ :\ k \text{ lehena } n\text{rekiko}\}.$$

Frogatu honako hau: baldin eta $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$ faktore lehenetako n-ren deskonposizioa bada, orduan

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

Kalkula ditzagun lehenengo balioak,

$$\begin{aligned}
&n = 1, \quad A_1 = \{k \in \{1\}\ :\ k \text{ lehena 1ekiko}\} = \emptyset && \Rightarrow \phi(1) = 0,\\
&n = 2, \quad A_2 = \{k \in \{1, 2\}\ :\ k \text{ lehena 2rekiko}\} = \{1\} && \Rightarrow \phi(2) = 1,\\
&n = 3, \quad A_3 = \{k \in \{1, 2, 3\}\ :\ k \text{ lehena 3rekiko}\} = \{1, 2\} && \Rightarrow \phi(3) = 2,\\
&n = 4, \quad A_4 = \{k \in \{1, 2, 3, 4\}\ :\ k \text{ lehena 4rekiko}\} = \{1, 3\} && \Rightarrow \phi(4) = 2,\\
&n = 5, \quad A_5 = \{k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\ :\ k \text{ lehena 5ekiko}\} = \{1, 2, 3, 4\} && \Rightarrow \phi(5) = 4,\\
&n = 6, \quad A_6 = \{k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\ :\ k \text{ lehena 6rekiko}\} = \{1, 5\} && \Rightarrow \phi(6) = 2,\\
&\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Izan bedi $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_l^{m_l}$, kalkula dezagun $\phi(n) = c(A_n)$. Horretarako, honako multzo hauek defini ditzagun:

$$\begin{aligned} B_1 &:= \{k \in [n] \ : \ p_1|k\}, \\ B_2 &:= \{k \in [n] \ : \ p_2|k\}, \\ &\vdots \\ B_l &:= \{k \in [n] \ : \ p_l|k\}. \end{aligned}$$

Argi dagoenez,

$$\cup_{i=1}^{l} B_i = \{k \in [n] \ : \ p_1|k \wedge p_2|k \wedge \ldots \wedge p_l|k\}.$$

Beraz,

$$A_n = \overline{\cup_{i=1}^{l} B_i} = \cap_{i=1}^{l} \overline{B_i} = \{k \in [n] \ : \ p_1 \not| k \vee p_2 \not| k \vee \ldots \vee p_l \not| k\}.$$

Horrela,

$$\phi(n) = c(A_n) = c(\overline{\cup_{i=1}^{l} B_i}) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{l} B_i).$$

Eta inklusio-esklusio printzipioa (1.1. teorema) erabiliz,

$$\phi(n) = c([n]) - \sum_{1 \le i \le l} c(B_i) + \sum_{1 \le i < j \le l} c(B_i \cap B_j) - \sum_{1 \le i < j < k \le l} c(B_i \cap B_j \cap B_k) + \ldots + (-1)^l c(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_l).$$

Dakigunez,

$$\begin{aligned} B_i = \{k \in [n] \ : \ p_i|k\} &\Rightarrow c(B_i) = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i}, \\ B_i B_j = \{k \in [n] \ : \ p_i|k \vee p_j|k\} &\Rightarrow c(B_i B_j) = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor = \frac{n}{p_i p_j}, \\ &\vdots \\ B_1 B_2 \ldots B_l = \{k \in [n] \ : \ p_1|k \vee p_2|k \vee \ldots p_l|k\} &\Rightarrow c(B_1 B_2 \ldots B_l) = \left\lfloor \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_l} \right\rfloor = \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_l}. \end{aligned}$$

Azkenik,

$$\begin{aligned} \phi(n) &= c(A_n) = c(\Omega) - c(\cup_{i=1}^{l} B_i) = \\ &= n - \sum_{1 \le i \le l} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le l} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{1 \le i < j < k \le l} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \ldots + (-1)^l \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_l} = \\ &= n \left(1 - \sum_{1 \le i \le l} \frac{1}{p_i} + \sum_{1 \le i < j \le l} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{1 \le i < j < k \le l} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \ldots + (-1)^l \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_l} \right) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l} \right). \end{aligned}$$

Azken berdintza indukzioz l-rekiko frogatu daiteke.

Eulerren funtzioa teoriako 1.7.. azpiatalean aipatzen da.

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-16) ariketa

(III-16) (Legendre) Izan bitez p zenbaki lehena eta n zenbaki arrunta. Kalkula ezazu p zenbakiak zenbat aldiz zatitzen duen $n!$. (Oharra: p zenbakiak hiru aldiz m zatitzen duela esaten da, baldin eta m zenbakia p^3 zenbakiaz zatigarria bada baina p^4 zenbakiaz zatigarria ez bada; hau da, p^3 zenbakiak m zatitzen duen p-ren berredura handiena bada; beste era batean esanda, faktore lehenetako n-ren deskonposizioan p biderkatzailean p^3 agertzen bada.)

Izan bedi b zenbakia, p lehenak $n!$ zatitzen duen aldi kopurua.

Defini ditzagun honako multzo hauek:

$$\begin{aligned}
A_0 &:= \{k \in [n] \ : \ p \nmid k\} && \Rightarrow c(A_0) = n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, \\
A_1 &:= \{k \in [n] \ : \ p|k \ baina \ p^2 \nmid k\} && \Rightarrow c(A_1) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor, \\
A_2 &:= \{k \in [n] \ : \ p^2|k \ baina \ p^3 \nmid k\} && \Rightarrow c(A_2) = \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor, \\
&\vdots \\
A_m &:= \{k \in [n] \ : \ p^m|k \ baina \ p^{m+1} \nmid k\} && \Rightarrow c(A_m) = \left\lfloor \frac{n}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{m+1}} \right\rfloor
\end{aligned}$$

Orduan,

$$b = 0 \cdot c(A_0) + 1 \cdot c(A_1) + 2 \cdot c(A_2) + \ldots + m \cdot c(A_m)$$

Zenbat da m zenbaki arrunta?

Argi dagoenez, m zenbakiak honako hau betetzen du:

$$p^m \leq n < p^{m+1} \Leftrightarrow log_p(p^m) \leq log_p(n) < log_p(p^{m+1}) \Leftrightarrow m \leq log_p(n) < m+1 \Rightarrow m = \lfloor log_p(n) \rfloor$$

Beraz,

$$b = \sum_{i=1}^{\lfloor log_p(n) \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-19) ariketa

(III-19) Zinema-areto baten sarrerak 5 eurokoak dira. Sarrerak saltzen hastean, kutxan ez dago kanbiorik. Zinema-aretoaren aurrean, m pertsona daude, bakoitzak 5 euroko billetea duena, eta beste n pertsona, bakoitzak 10 euroko billetea duena, $n \leq m$. Zenbat eratara ordena daitezke $m+n$ pertsonak ilara batean kutxa kanbio gabe gera ez dadin? Ariketa honen eta aurrekoaren artean erlaziorik ba al dago?

Ariketa hau gorabehera ibilbide berezien aplikazioa da. Izan ere, OX ardatzean pertsonak adieraziko ditugu eta OY ardatzean *gora* 5 euro duen kasuan eta *behera* 10 euro duenean. Horrela, problemaren helburua kutxa kanbiorik gabe geratzea denez, *gorabehera ibilbide bereziak* zenbatu behar ditugu. Ibilbidearen hasiera $(0,0)$ da (kutxan kanbiorik ez dagoelako), eta, amaieran, $(p,q) = (m+n, m-n)$ posizioan egongo gara.

Gogora ditzagun $c(\mathcal{I}_{p,q}) = C_{p,\frac{p+q}{2}}$ eta $c(\mathcal{I}^*_{p,q}) = c(\mathcal{I}_{p,q+2}) = C_{p,\frac{p+q+2}{2}}$ direla, non $\mathcal{I}_{p,q}$ eta $\mathcal{I}^*_{p,q}$, $(0,0)$tik (p,q)ra doazen gorabehera ibilbideak eta gorabehera ibilbideak ez-bereziak baitira, hurrenez hurren.

Beraz, ibilbide berezien kopurua:

$$c(\mathcal{I}_{p,q}) - c(\mathcal{I}^*_{p,q}) = c(\mathcal{I}_{m+n,m-n}) - c(\mathcal{I}^*_{m+n,m-n}) == \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1} = \binom{m+n}{m}\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)$$

Gainera, gorabehera ibilbide berezi bakoitzean, 5 euro duten m pertsonak eta 10 euro duten n pertsonak berrordenatu daitezke, $m! \cdot n!$ eratara. Hori dela eta, ariketaren erantzuna:

$$m! \cdot n! \cdot \left(c(\mathcal{I}_{p,q}) - c(\mathcal{I}^*_{p,q})\right) = (m+n)! \left(1 - \frac{n}{m+1}\right)$$

Hirugarren ariketa-zerrendako (III-20) ariketa

(III-20) $\mathbb{Z}_2 := \{0,1\}$ *gorputzaren gaineko hiru dimentsiotako* $\mathcal{E}_3$ *espazio afinean, kalkula itzazu:*

a) puntuen kopuru osoa,

b) zuzenen kopuru osoa,

c) planoen kopuru osoa,

d) zuzen bakoitzean dagoen puntu kopurua,

e) puntu bakoitzetik pasatzen den zuzen kopurua,

f) plano bakoitzean dagoen puntu kopurua,

g) puntu bakoitzetik pasatzen den plano kopurua,

h) plano bakoitzean dagoen zuzen kopurua,

i) zehaztutako zuzen batetik pasatzen den plano kopurua,

j) zehaztutako plano batekiko paraleloa den plano kopurua,

k) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

l) zehaztutako plano batekiko paraleloa den zuzen kopurua,

m) zehaztutako zuzen batekiko paraleloa den plano kopurua,

n) zehaztutako zuzen batekin gurutzatzen den zuzen kopurua.

a) $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ eta $\mathcal{E}_3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{Z}_2\} = \{(0,0,0),\dots,(1,1,1,)\}$. Beraz, $c(\mathcal{E}_3) = VR_2^3 = 2^3 = 8$.

b) Zuzen bat adierazteko, bi puntu desberdin behar dira. Hortaz, $C_{8,2} = \binom{8}{2} = 28$.

c) Plano bat osatzeko, lerro berean ez dauden hiru puntu desberdin behar dira. 8 elementutik 3 aukeratzea $\binom{8}{3}$ da; hala ere, plano bakoitza adierazteko, $\binom{4}{3}$ era daude. Horrela, plano-kopurua $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{4}{3}} = 14$ da.

d) $c(\mathbb{Z}_2) = 2$.

e) Gainontzeko puntuen artean, bigarren puntua aukeratzeko era kopurua, hau da, $2^3 - 1 = 7$.

f) $c(\mathbb{Z}_2)^2 = 4$.

g) Gainontzeko puntuen artean, beste bi puntu aukeratzeko era kopurua, $\binom{7}{2}$, baina kontuan hartuta plano bakoitza $\binom{3}{2}$ aldiz agertzen dela. Horregatik, $\frac{\binom{7}{2}}{\binom{3}{2}} = 7$.

h) Plano lau puntu binaka hartzeko era kopurua, hots, $\binom{4}{2} = 6$.

i) Hirugarren puntua aukeratzeko era kopurua $\binom{6}{1}$, kontuan hartuta plano bakoitza $\binom{2}{1}$ eratara adieraz daitekeela. Beraz, $\frac{\binom{6}{1}}{\binom{2}{1}} = 3$.

j) 1.

k) 3.

l) $\binom{4}{2} = 6$.

m) 3.

n) $6 + 6 = 12$.

A.4. Laugarren ariketa-zerrendako ebazpenak: olinpiada matematikoetako problemak

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-1) ariketa

(IV-1) Alderdi politiko baten kongresu batean, 2000 bazkide daude. Kazetari baten arabera, bilera batean, $\%12,\overset{\frown}{12}$ emakumezkoak dira eta $\%23,4\overset{\frown}{23}$ sektore kritikoan daude. Zenbat bazkide ez dira joan bilerara?

Izan bitez ondoko multzoak:

$$\begin{aligned}
&B =' \text{bazkideen multzoa}' && \Rightarrow c(B) = 2000,\\
&\Omega =' \text{bileran dauden multzoa}' && \Rightarrow c(\Omega) = ?,\\
&E =' \text{bileran dauden emakumezkoen multzoa}' && \Rightarrow c(E) = \frac{c(E)}{c(\Omega)} c(\Omega) = 0.\overline{12} \cdot c(\Omega),\\
&S =' \text{bileran dauden sektore kritikoen multzoa}' && \Rightarrow c(S) = \frac{c(S)}{c(\Omega)} c(\Omega) = 0.2\overline{34} \cdot c(\Omega)
\end{aligned}$$

Zatiki adierazpenen faktore lehenen deskonposizioak erabiliz,

$$\begin{aligned}
c(E) &= \frac{2^2}{3 \cdot 11} \cdot c(\Omega),\\
c(S) &= \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot 37} \cdot c(\Omega)
\end{aligned}$$

Orduan,

$$3, 11, 37 \mid c(\Omega).$$

Gainera, $3 \cdot 11 \cdot 37 = 1221$ eta $c(\Omega) \leq c(B) = 2000$. Beraz,

$$c(\Omega) = 1221.$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-2) ariketa

(IV-2) Izan bedi 3 zifradun 14 zenbaki arrunt desberdin dituen Ω multzoa. Frogatu ezazu existitzen direla bi azpimultzo $A \subset \Omega$ eta $B \subset \Omega$ ez-hutsak eta bateraezinak direnak non honako hau betetzen baita:

$$A\text{-ren elementuen batura } = B\text{-ren elementuen batura}$$

Izan bedi $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_{14} \ : \ 100 \leq x_i < 1000, \ x_i \in \mathbb{N}, \ i \in [14]\}$.

Hauxe frogatu behar dugu:

$$\exists \ \emptyset \neq A, B \subseteq \Omega, \ A \neq B, \ A \cap B = \emptyset \ : \ \sum_{x \in A} x = \sum_{x \in B} x.$$

Defini dezagun honako funtzio hau:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(\Omega) - \emptyset &\to \mathbb{N} \\ A &\to f(A) = \sum_{x \in A} x \end{aligned}$$

eta frogatu dezagun ezin dela injektiboa izan. Izan ere, izan bitez k eta n, multzo ez-hutsen kopurua eta batura posibleen kopurua, hurrenez hurren. Argi dago

$$k = c(\mathcal{P}(\Omega) - \emptyset) = 2^{c(\Omega)} - 1 = 2^{14} - 1 = 16383$$

eta

$$n < 14 \cdot 1000 = 14000$$

Beraz, $k > n$ denez, *Usategiaren printzipioa*gatik (1.3.. printzipioa),

$$\exists \ \emptyset \neq A, B \subseteq \Omega, \ A \neq B \ : \ f(A) = f(B).$$

Baina, A eta B bateraezinak al dira?

Demagun $A \cap B \neq \emptyset$, orduan

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A - A \cap B) + f(A \cap B) \\ f(B) &= f(B - A \cap B) + f(A \cap B) \\ f(A) &= f(B) \end{aligned}$$

Beraz, $f(A - A \cap B) = f(B - A \cap B)$ denez, izan bitez $\tilde{A} = A - A \cap B$ eta $\tilde{B} = B - A \cap B$, orduan

$$\exists\ \tilde{A}, \tilde{B} \subseteq \Omega,\ \ \tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset\ :\ f(\tilde{A}) = f(\tilde{B}).$$

Baina, $\tilde{A}$ eta $\tilde{B}$ ez-hutsak al dira?

Demagun $\tilde{A} = \emptyset$, orduan

$$f(\tilde{A}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{B}) = 0 \Rightarrow \tilde{B} = \emptyset \Rightarrow A = A \cap B = B \Rightarrow A = B$$

absurdua izango zen, beraz, ez-hutsak dira.

Azkenik, ikusi dugu $\tilde{A}$ eta $\tilde{B}$ multzoekin ariketa frogatuta dagoela. Baldin eta A eta B bateraezinak badira, $\tilde{A} = A$ eta $\tilde{B} = B$.

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-3) ariketa

(IV-3) Dantzaldi batera, 8 neska eta 8 mutil joan dira. Ilaran, neskak eta mutilak txandaka daude eserita, lehenengoa mutila izanik. Zenbat eratara osa daiteke 5 bikote dituen multzoa, baldin eta bikote guztiak hasieran jarraian zeuden neskek eta mutilek osatzen badituzte?

Ariketa hau ebazteko honako itzulpen hau erabiliko dugu.

Har dezagun mutil eta nesken zerrenda, non bi pertsonaren artean 1 edo 0 idatziko dugun, segun eta bikotea osatu ala ez. Orduan, bost 1 (bikote) eta hamar 0 (ez-bikote) osagaiez osatutako 15 luzerako 0-1 segidak ditugu, non bi 1 jarraian ezin baitira egon.

Eta problema ezagun hori ebazteko, honako itzulpen hau erabil dezakegu: hamar 0 ditugu eta bost 1 kokatu behar dira posibleak diren hamaika posiziotan, hau da,

$$C_{11,5} = \binom{11}{5}.$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-4) ariketa

(IV-4) Bilera batean, 5 nazionalitate desberdinetako 201 pertsona daude. 6 pertsonako talde bakoitzean, gutxienez, 2 adin berekoak dira. Frogtua ezazu bileran nazionalitate bereko, adin bereko eta sexu bereko gutxienez 5 pertsona daudela.

Aintzat har ditzagun honako multzo hauek:

$$\begin{aligned} P &=' \text{pertsonen multzoa}' = \{x_1, x_2 \ldots, x_{201}\} \\ S &=' \text{sexu posibleen multzoa}' = \{s_1, s_2\} \\ N &=' \text{nazionalitate posibleen multzoa}' = \{n_1, n_2 \ldots, n_5\} \\ A &=' \text{adin posibleen multzoa}' = \{a_1, a_2 \ldots, a_5\} \end{aligned}$$

Defini dezagun honako funtzio hau:

$$\begin{aligned} f : P &\to E = S \times N \times A \\ x_i &\to f(x_i) = (s(x_i), n(x_i), a(x_i)) \end{aligned}$$

eta frogatu dezagun ezin dela injektiboa izan. Izan ere, izan bitez k eta n, pertsona kopurua eta ezaugarri posibleen kopurua, hurrenez hurren. Argi dago

$$k = c(P) = 201$$

eta

$$n = c(E) = c(S) \cdot c(N) \cdot c(A) \leq 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

Beraz, $k > n$ denez, *Usategiaren printzipioa*gatik (1.3.. printzipioa),

$$\text{existitzen da, gutxienez, } \left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{201}{50} \right\rceil = 5 \text{ pertsona ezaugarri berekin.}$$

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-7) ariketa

(IV-7) Izan bedi

$$q(n) := \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor, \;\; n = 1, 2, \ldots$$

a) Kalkula itzazu $q(n)$ balioak, $1 \leq n \leq 25$. Balioei begiratuz, zein uste duzu direla n balioak non $q(n) > q(n+1)$?

b) Frogatu aurreko aierua, hots, kalkula itzazu $q(n) > q(n+1)$ betetzen duten zenbaki arrunt guztiak.

(a) Egin ditzagun kalkuluak:

n	$q(n)$
1	1
2	2
3	3
4	2
5	2

n	$q(n)$
6	3
7	3
8	4
9	3
10	3

n	$q(n)$
11	3
12	4
13	4
14	4
15	5

n	$q(n)$
16	4
17	4
18	4
19	4
20	5

n	$q(n)$
21	5
22	5
23	5
24	6
25	5

Beraz, aierua honako hau da:

$$q(n) > q(n+1) \Leftrightarrow n + 1 = m^2$$

(b) Frogatu dezagun inplikazio bakoitza:

$\Leftarrow$) $n + 1 = m^2 \Rightarrow q(n) > q(n+1)$ egiazkoa al da?

$n + 1 = m^2 \Rightarrow \sqrt{n+1} = m \Rightarrow \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = m$

Gainera,

$$\begin{aligned} (m-1)^2 < n = m^2 - 1 < m^2 \Rightarrow \\ m - 1 < \sqrt{n} < m \Rightarrow \\ m - 1 = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \end{aligned}$$

Orduan,

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{m-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m^2-1}{m-1} \right\rfloor = \lfloor m + 1 \rfloor = m + 1$$

Bestalde,

$$q(n+1) = \left\lfloor \frac{n+1}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m^2}{m} \right\rfloor = m$$

Beraz,

$$q(n) = m + 1 > m = q(n+1)$$

$\Rightarrow$) $q(n) > q(n+1) \Rightarrow n+1 = m^2$ egiazkoa al da?

Absurdura eramanez, demagun $n+1 \neq m^2$, orduan bi karratu perfekturen artean egongo da. Hots, $n+1 \in \{m^2+1, m^2+2, \ldots, m^2+2m\}$. Orduan,

$$\begin{aligned} m^2 < n+1 < (m+1)^2 &\Rightarrow \\ m < \sqrt{n+1} < m+1 &\Rightarrow \\ m = \lfloor \sqrt{n+1} \rfloor & \end{aligned}$$

Bestalde, $n \in \{m^2, m^2+2, \ldots, m^2+2m-1\}$ denez,

$$\begin{aligned} m^2 \leq n < (m+1)^2 &\Rightarrow \\ m \leq \sqrt{n} < m+1 &\Rightarrow \\ m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor & \end{aligned}$$

Orduan,

$$\frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m} = \frac{n+1}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor}$$

Beraz,

$$q(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+1}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \right\rfloor = q(n+1)$$

eta kontraesana denez, frogatuta geratzen da.

Laugarren ariketa-zerrendako (IV-8) ariketa

(IV-8) Marraztu daitezke planoan 2003 zuzenki, non bakoitzak zehazki beste hiru zuzenki mozten baititu?

Ez. Ariketa hori *Agurren lema*ren bidez frogtua daiteke. Pertsona kopuru bakoitia agurtzen duten pertsona kopuruak zenbaki bikoitia izan behar du. Agurren lemaren egoeraren itzulpena (hau da, pertsonek beste pertsona batzuk agurtzen dituztela) zera da: zuzenek beste zuzen batzuk mozten dituztela. Zehazki, beste hiru zuzenki mozten dituzten zuzen kopuruak bikoitia izan behar duenez, ezin da 2003 izan.

A.5. Bosgarren ariketa-zerrendako ebazpenak: zenbaki konbinatorioak

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-10) ariketa

(V-10) Banatu zatiki sinpletan

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Aurreko emaitza erabiliz, frogatu ezazu (berriro)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}.$$

Lehenengo adierazpena zatiki sinpletan banatu ahal dugu:

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x+1} + \dots + \frac{A_k}{x+k} + \dots + \frac{A_n}{x+n}$$

Izendatzaile komuna egin ondoren, zenbakitzaileak berdinduz:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} A_k x(x+1)\cdots(x+k-1)(x+k+1)\cdots(x+n)$$

Eta x aldagaia $\{0,-1,\dots,-k,\dots,-n\}$ balioekin ordezkatuz, hau da, $\forall k = 0,\dots,n$, $x = -k$ denean:

$$n! = A_k(-k)(-k+1)\cdots(-k+k-1)(1)(2)\cdots(n-k) \Rightarrow A_k = (-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!} = (-1)^k\binom{n}{k}$$

Beraz,

$$\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{x+k} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x+k}$$

Partikularki, $x = 1$ denean:

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-13) c) ariketa

(V-13) Frogatu itzazu

c) $\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$

$$(c) \quad \binom{2n-1}{n} < 4^{n-1}, \ \forall n \geq 2.$$

Frogapen konbinatorioa:

(iv) propietatea eta 1. KI erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-2}{n} + \binom{2n-2}{n-1} < \binom{2n-2}{0} + \ldots + \binom{2n-2}{2n-2} =$$
$$= 2^{2n-2} = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}$$

Frogapen konbinatorio alternatiboa:

(iv) propietatea eta 1. KI erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2}\left[\binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n-1}\right] < \frac{1}{2}\left[\binom{2n-1}{0} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}2^{2n-1} = 2^{2n-2} = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}$$

Frogapen aljebraikoa:

$$\binom{2n-1}{n} < 4^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\binom{2n}{n} < \frac{1}{4}4^n \Leftrightarrow 2\binom{2n}{n} < 4^n \Leftrightarrow 2\frac{(2n)!!}{n!}\frac{(2n-1)!!}{n!} < 2^{2n} \Leftrightarrow$$
$$2\frac{2^n n!}{n!}\frac{2n-1}{n}\frac{2n-3}{n-1}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{1} < 2 \cdot 2^n 2^{n-1} \Leftrightarrow \frac{2n-2k-1}{n-k} < 2 \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \Leftrightarrow$$
$$2n - 2k - 1 < 2n - 2k \Leftrightarrow -1 < 0$$

Indukziozko frogapena:

Baldin eta $n = 2$, orduan $\binom{2n-1}{n} = \binom{3}{2} = 3 < 4^{n-1} = 4$ egiazkoa da.

Induzkio-hipotesia (IH): Suposa dezagun (n-1)rako egiazkoa dela:

$$\binom{2n-3}{n-1} < 4^{n-2}$$

Frogatu dezagun $n-$rako:

(iv) propietatea, 4. KI (maximoa) eta (IH) erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-3}{n} + 2\binom{2n-3}{n-1} + \binom{2n-3}{n-2} <$$

$$< \binom{2n-3}{n-1} + 2\binom{2n-3}{n-1} + \binom{2n-3}{n-1} = 4\binom{2n-3}{n-1} < 44^{n-2} = 4^{n-1}$$

Indukziozko frogapen alternatiboa:

Baldin eta $n = 2$, orduan $\binom{2n-1}{n} = \binom{3}{2} = 3 < 4^{n-1} = 4$ egiazkoa da.

Induzkio-hipotesia (IH): Suposa dezagun (n-1)rako egiazkoa dela:

$$\binom{2n-3}{n-1} < 4^{n-2}$$

Frogatu dezagun $n-$rako:

(iii) eta (v) propietateak eta (IH) erabiliz:

$$\binom{2n-1}{n} = \frac{2n-1}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{2n-1}{n}\frac{2n-2}{n-1}\binom{2n-3}{n-2} = \frac{2n-1}{n}2\binom{2n-3}{n-1} <$$

$$< \frac{4n-2}{n}4^{n-2} < \frac{4n}{n}4^{n-2} = 4^{n-1}$$

Bosgarren ariketa-zerrendako (V-15) ariketa

(V-15) Gaussen koefiziente binomialak $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ *honela definitzen dira:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &= 1, \\
\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} &= \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}, \; r = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Adibidez,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{q^4 - 1}{q - 1} \frac{q^3 - 1}{q2 - 1} = \frac{(q^2+1)(q+1)(q-1)(q^2+q+1)(q-1)}{(q-1)(q+1)(q-1)} \\
&= (q^2+1)(q^2+q+1) = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.
\end{aligned}$$

(Beraz, Gaussen koefiziente binomialak ez dira zenbakiak funtzioak baizik. Baina sinplifikatzeagatik, ez da adierazten notazioan.)

a) *Kalkula itzazu* $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

b) *Frogatu ezazu* batuketaren legea*:*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

c) *Frogatu ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.*

d) *Frogatu ezazu*

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

e) *Frogatu ezazu*

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-r \end{bmatrix}.$$

f) *Frogatu ezazu*

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} qx^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} q^3x^3.$$

g) *Frogatu ezazu*

$$\prod_{r=0}^{n-1} (1 + q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

h) *Aurreko erabiliz, Newtonen binomioaren formularen beste frogapen bat eman ezazu.*

Gaussen koefiziente binomialak $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ honela definitzen dira:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1}, \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

a) Kalkula itzazu $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} &= 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}\frac{q^2 - 1}{q^2 - 1} = q^2 + q + 1, \\
\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{q^3 - 1}{q - 1}\frac{q^2 - 1}{q^2 - 1}\frac{q - 1}{q^3 - 1} = 1.
\end{aligned}$$

b) Frogatu ezazu *batuketaren legea*:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}.$$

Alde batetik,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\frac{q^n - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n+2-r} - 1}{q^r - 1}$$

Beste alde batetik,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n+1-r} = {} & \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1}\frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1} + \\
& \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r-1} - 1} q^{n+1-r} = \\
& \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r+1} - 1}\left(\frac{q^{n-r+1} - 1}{q^r - 1} + q^{n+1-r}\right) = \\
& \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r+1} - 1}\left(\frac{q^{n-r+1} - 1 + q^{n+1} - q^{n+1-r}}{q^r - 1}\right) = \\
& \frac{q^n - 1}{q - 1}\frac{q^{n-1} - 1}{q^2 - 1} \cdots \frac{q^{n-r+2} - 1}{q^{r+1} - 1}\frac{q^{n+1} - 1}{q^r - 1}.
\end{aligned}$$

c) Frogatu ezazu Gaussen koefiziente binomialak q-rekiko polinomioak direla.

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1$ eta $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{q-1}{q-1} = 1$

$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \frac{q^2-1}{q-1} = q+1$, eta $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \frac{q^2-1}{q-1}\frac{q-1}{q^2-1} = 1$

$\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = q^2+q+1$, $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = q^2+q+1$ eta $\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$, a) atalean ikusi dugunez.

Frogatu dezagun indukzioz $n$ren gainean.

Suposa dezagun $\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix}$ $q$rekiko polinomioak direla (induzkio hipotesia).

Frogatu dezagun $\begin{bmatrix}n+1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}n+1\\1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}n+1\\n+1\end{bmatrix}$ $q$rekiko polinomioak direla.

Argi dago, b) atalagatik $\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}$ ere polinomioak direla. Izan ere, $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}$ indukzio-hipotesiagatik polinomioak dira, eta q^{n+1-r} polinomioa denez, $\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}q^{n+1-r}$ ere polinomioa da, hots, $\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}$ Gaussen koefiziente binomialak polinomioak direla frogatu dugu.

d) Frogatu ezazu

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \binom{n}{r}.$$

L'Hôpitalen erregela erabiliz, $k = 1, 2, \ldots, r$ denean,

$$\lim_{q\to 1}\frac{q^{n-k+1}-1}{q^k-1} = \lim_{q\to 1}\frac{(n-k+1)q^{n-k}}{kq^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$$

Beraz,

$$\lim_{q\to 1}\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \lim_{q\to 1}\frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdots\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1} = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\cdots\frac{n-r+1}{r} = \frac{n^{\underline{r}}}{r!} = \binom{n}{r}.$$

e) Frogatu ezazu

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}.$$

Izan bedi $r = min(r, n-r)$, orduan, $r \le n-r$ denez,

$$\begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix} = \frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q^2-1}\cdots\frac{q^{n-r+1}-1}{q^r-1}\frac{q^{n-r}-1}{q^{r+1}-1}\frac{q^{n-r-1}-1}{q^{r+2}-1}\cdots\frac{q^{r+2}-1}{q^{n-r-1}-1}\frac{q^{r+1}-1}{q^{n-r}-1} = \begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$$

f) Frogatu ezazu

$$(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}qx^2 + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}q^3x^3.$$

a) atalaren emaitzak erabiliz,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}qx^2 + \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}q^3x^3 &= 1 + (q^2+q+1)x + (q^2+q+1)qx^2 + q^3x^3 \\
&= 1 + q^2x + qx + x + q^3x^2 + q^2x^2 + qx^2 + q^3x^3 \\
&= (1 + x + qx^2 + qx) + (q^2x + q^3x^2 + q^2x^2 + q^3x^3) \\
&= (1 + x + qx^2 + qx) + (1 + qx + x + qx^2)q^2x \\
&= (1 + x + qx + qx^2)(1 + q^2x) \\
&= (1+x)(1+qx)(1+q^2x)
\end{aligned}$$

g) Frogatu ezazu

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$n=1$ denean, $(1+x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x^1$ egiazkoa da.

Izan ere, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x^1 = 1 + x$

$n=2$ denean, $(1+x)(1+qx) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x^1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} q^1 x^2$ egiazkoa da.

Izan ere, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x^1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} q^1 x^2 = 1 + (q+1)x + qx^2 = 1 + qx + x + qx^2 = (1+x)(1+qx)$

$n=3$ denean, $(1+x)(1+qx)(1+q^2x) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} x^1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} q^1 x^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} q^{1+2} x^3$ egiazkoa da.

Izan ere, f) atalean ikusi dugu.

Frogatu dezagun induzkioz n-ren gainean.

Suposa dezagun n kasurako Indukzio Hipotesia [IH]:

$$\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Frogatu dezagun $n+1$ kasurako:

$$\prod_{r=0}^{n}(1+q^r x) = \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

Izan ere,

$$\prod_{r=0}^{n}(1+q^r x) = \left(\prod_{r=0}^{n-1}(1+q^r x) \right)(1+q^n x) =$$

eta [IH] erabiliz,

$$= \left(\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r \right)(1+q^n x) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r + \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)+n} x^{r+1} =$$

eta x^r aldagaiaren koefizienteak batuz,

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} q^0 x^0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} q^{n-(r-1)} \right) q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r + \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(n-1)+n} x^{n+1} =$$

eta b) atala, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}$ eta $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix}$ erabiliz,

$$= \sum_{r=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r.$$

h) Aurreko erabiliz, Newtonen binomioaren formularen beste frogapen bat eman ezazu.

Newtonen binomioa: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ deduzitzeko g) ataleko identitatean $q \to 1$era doan limitea aintzat hartu besterik ez da egin behar.

Izan ere, alde batetik

$$\lim_{q \to 1} \prod_{r=0}^{n-1} (1+q^r x) = \prod_{r=0}^{n-1} (1+x) = (1+x)^n$$

Beste aldetik, d) atalagatik,

$$\lim_{q \to 1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} q^{1+2+\ldots+(r-1)} x^r = \lim_{q \to 1} \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r$$

A.6. Seigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Newtonen binomioa

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-6) ariketa

(VI-6) Frogatu ezazu honako identitate hau:

$$\sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l (1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}).$$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, idatz ezazu beste identitate bat zenbaki konbinatorioak erabiliz.

Lehenengoz, egiazta dezagun identitatea. Izan bedi $b \equiv \sum_{l=0}^{k} (-1)^l x^l$, orduan:

$$b = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^k x^k$$
$$xb = x - x^2 + x^3 - \ldots (-1)^k x^{k+1}$$

Batura eginez, $(1+x)b = 1 + (-1)^k x^{k+1} = 1 - (-1)^{k+1} x^{k+1} = 1 - (-x)^{k+1}$.

Eta b askatuz, $b = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}$.

Beraz, ezkerraldeko adierazpena berridatziz, $b(1+x)^n = \frac{1-(-x)^{k+1}}{1+x}(1+x)^n = (1+x)^{n-1}\left(1-(-x)^{k+1}\right)$

Adierazpenaren bi ataletan x^k-ren koefizienteak konparatuz, beste identitate bat berreskura dezakegu. Izan ere, Newtonen binomioa ezkerraldeko $(1+x)^n$ adierazpenean aplikatuz:

$$\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^l (1+x)^n = \left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^l x^l\right)\left(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r\right)$$

eta Newtonen binomioa $(1+x)^{n-1}$ eskuinaldeko adierazpenean:

$$(1+x)^{n-1}(1-(-x)^{k+1}) = \left(\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}x^s\right)(1-(-x)^{k+1})$$

Ezkerraldeko x^k-ri lotutako koefizientea adierazteko, (l,r) bikote posibleak batu behar ditugu, hau da,

$$\{(l,r)\in\mathbb{N}^2 \ : \ l+r=k\} = \{(0,k),\ (1,k-1),\ \ldots,\ (k,0)\}$$

Eskuinaldean x^k-ri lotutako koefizientea adierazteko era bakarra $\binom{n-1}{k}$ da. Beraz,

$$\binom{n-1}{k} = (-1)^0\binom{n}{k} + (-1)^1\binom{n}{k-1} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{0} = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{n}{r}.$$

Hau da, bosgarren ariketa-zerrendako (V-8) ariketan agertu zen konbinazio-identitatea berreskuratu dugu.

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-7) ariketa

(VI-7) Honako identitate hau erabiliz

$$(1+x)^{-n}(1-x)^{-n} = (1-x^2)^{-n},$$

kalkula ezazu honako batura honen emaitza

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}\binom{n+m-k-1}{m-k}.$$

Aplika dezagun Binomio Orokortuaren formula hiru ataletan, orduan:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^k\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-x)^r\right) = \left(\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-n}{s}(-x^2)^s\right)$$

(iii) propietateagatik,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r}x^r\right)=\left(\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n+s-1}{s}x^{2s}\right)$$

Ezkerraldeko x^m-ri lotutako koefizientea adierazteko, (k,r) bikote posibleak batu behar ditugu, hau da,

$$\{(k,r)\in\mathbb{N}^2\ :\ k+r=m\}=\{(0,m),\ (1,m-1),\ \ldots,\ (m,0)\}$$

Eskuinaldean x^m-ri lotutako koefizientea adierazteko bi aukera daude m-ren paritatearen arabera. Beraz,

$$(-1)^0\binom{n-1}{0}\binom{n+m-1}{m}+(-1)^1\binom{n}{1}\binom{n+m-2}{m-1}+\ldots+(-1)^m\binom{n+m-1}{m}\binom{n-1}{0}=$$
$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}\binom{n+m-k-1}{m-k}=\begin{cases}0, & m \text{ bakoitia bada}\\ \binom{n+m/2-1}{m/2}, & m \text{ bikoitia bada}\end{cases}$$

Seigarren ariketa-zerrendako (VI-8) ariketa

(VI-8) (*American Mathematical Monthly*) Izan bitez m eta n zenbaki arrunt ez-negatiboak; kalkula ezazu honako adierazpen honen emaitza:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{m}{k}(1-y)^{n+k+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}y^{m+k+1}.$$

Izan bitez,

$$A_1=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{n+k+1}\binom{m}{k}(1-y)^{n+k+1}$$

eta

$$A_0=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{m+k+1}\binom{n}{k}y^{m+k+1}.$$

A_1 sinplifikatzeko, kontuan har dezagun

$$\frac{(1-y)^{n+k+1}}{n+k+1}=\int_0^{1-y}t^{n+k}dt=\frac{t^{n+k+1}}{n+k+1}|_0^{1-y}.$$

Beraz,

$$A_1 = \sum_{k=0}^{m} \frac{(1-y)^{n+k+1}}{n+k+1}(-1)^k \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} \left(\int_0^{1-y} t^{n+k} dt \right) (-1)^k \binom{m}{k} =$$

$$= \int_0^{1-y} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} t^n t^k dt = \int_0^{1-y} t^n \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-t)^k dt.$$

Gogora dezagun Newtonen binomioa: $\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-t)^k = (1-t)^k$.

Beraz, $A_1 = \int_0^{1-y} t^n (1-t)^k dt$.

Eta $u = 1 - t$ aldagai-aldaketa aintzat hartuz,

$$A_1 = \int_1^y (1-u)^n u^m (-du) = \int_y^1 u^m (1-u)^n du.$$

Bestalde, A_0 sinplifikatzeko, kontuan har dezagun

$$\frac{y^{m+k+1}}{m+k+1} = \int_0^y t^{m+k} dt = \frac{t^{m+k+1}}{m+k+1}|_0^y.$$

Beraz,

$$A_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{m+k+1}}{m+k+1}(-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_0^y t^{m+k} dt \right) (-1)^k \binom{n}{k} =$$

$$= \int_0^y \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} t^m t^k dt = \int_0^y t^m \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-t)^k dt.$$

Eta Newtonen binomioagatik,

$$A_0 = \int_0^y t^m (1-t)^n dt.$$

Azkenik, Beta funtzioaren propietateak erabiliz,

$$A_1 + A_0 = \int_0^1 t^m (1-t)^n dt = B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)} = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}$$

A.7. Zazpigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: koefiziente multinomialak

Zazpigarren ariketa-zerrendako (VII-2) ariketa

(VII-2) (Bola bereiziak kutxatan)

a) Zenbat eratara bana daiteke zenbakidun 3 kutxatan $3n$ bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

b) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

c) Zenbat eratara bana daiteke zenbakidun k kutxatan kn bola bereizgarriak, kutxa bakoitzean n bola egonda?

d) Eta kutxa zenbakidunak ez badira?

(a) 3 zenbakidun kutxatan $3n$ bola bereizgarriren kokapena. Izan bitez 1,2,. . . , 3n bolen zenbakiak eta **1, 2** eta **3** kutxen zenbakiak.

1, 2 eta **3** izeneko kutxetan $1\ 2\ \ldots\ n\ n+1\ n+2\ \ldots\ 2n\ 2n+1\ 2n+2\ \ldots\ 3n$ bola bereizgarriren kokapenaren problema itzul daiteke segiden honako problema honetara: **1** osagaia n aldiz, **2** osagaia n aldiz eta **3** osagaia n aldiz errepikatuz osatzen den $3n$ luzeradun segidaren ordenazioak. Adibidez, $n = 2$ denean, 6 bola bereizgarri ditugu 3 kutxatan kokatzeko, eta honako itzulpen hauek egingo genituzke:

1		**2**		**3**	
1	5	3	6	2	4

$\Leftrightarrow$ **132312**

1		**2**		**3**	
1	2	3	4	5	6

$\Leftrightarrow$ **112233**

1		**2**		**3**	
3	4	1	2	5	6

$\Leftrightarrow$ **221133**

$3n$ bola bereizgarri ditugunean, 3 kutxatan kokatzeko adibidea honako hau izango da:

1			**2**			**3**		
1	$\ldots$	n	$n+1$	$\ldots$	$2n$	$2n+1$	$\ldots$	$3n$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{1 \ldots 1 2 \ldots 2 3 \ldots 3}$

Oro har, $a_1 a_2 \ldots a_{3n}$ segida dugu, non a_i zenbakiak i. bolari dagokion kutxa adierazten duen, $a_i \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 3n$.

Beraz, kopurua $3n$ osagai horien errepikatuzko permutazioak dira:

$$PR_{3n}^{n,n,n} = \binom{3n}{n, n, n}$$

(b) 3 kutxa bereizezinetan $3n$ bola bereizgarrien kokapena. Izan bitez 1,2,. . . , 3n bolen zenbakiak. Kutxek zenbakirik ez dutenez, orain goian aipatutako bigarren eta hirugarren adibideak berdin berdinak (bereizezinak) dira. Zenbat errepikapen daude aurreko egoerarekin konparatuz?. Kokapen bat finkatzen badugu, kutxak berrordenatuz soilik lortzen dira emaitza berdin berdinak. Beraz, (b) ataleko kopurua zera da: (a) atalekoa zati kutxen berrordenatze posibleak, hots, kutxa-kopuruaren permutazioak. Horregatik,

$$\frac{1}{3!}\binom{3n}{n, n, n}$$

Beste era batean esanda, (b) ataleko egoeratik (a) ataleko egoerara pasatzeko kutxen permutazioak kontuan hartu behar dira, hots,

$$(b) \times 3! = (a) \Rightarrow (b) = \frac{1}{3!} \times (a)$$

Zazpigarren ariketa-zerrendako (VII-5) ariketa

(VII-5) Frogatu ezazu $[(n!)!]^{n+1}$ *zenbakiak* $(n^2!)!$ *zatitzen duela.*

$n = 1$ denean, berehalakoa da. $n \geq 2$ denean, bi urratsetan frogatuko dugu: lehenengoz $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak $((n+1)!)!$ zatitzen duela eta bigarrenik, azken horrek $[(n^2)!]!$ zatizen duela.

Lehenik, $(n!)!$ zenbakia $n + 1$ aldiz agertarazteko koefiziente multinomiala erabil dezakegu, $n! + n! + \ldots + n! = (n + 1)n! = (n + 1)!$ denez, honako zenbaki hau ondo definituta dago:

$$\binom{(n+1)!}{n!, n!, \ldots, n!} = \frac{((n+1)!)!}{(n!)! \cdot (n!)! \cdots (n!)!} = \frac{((n+1)!)!}{[(n!)!]^{n+1}} \in \mathbb{N}$$

Beraz, lehenengo urratsa argi dago, $[(n!)!]^{n+1} \mid ((n + 1)!)!$.

Bigarrena frogatzeko, erabil dezagun $n + 1 \leq n^2, \forall n \geq 2$. Beraz,

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1)$$
$$(n^2)! = 1 \cdot 2 \cdots n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdots n^2$$

Orduan, argi dago $(n + 1)! \mid (n^2)! \Rightarrow ((n + 1)!)! \mid ((n^2)!)!$

Azkenik, $[(n!)!]^{n+1} \mid ((n^2)!)!$.

A.8. Zortzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: funtzio sortzaileak eta errepikapenak

Zortzigarren ariketa-zerrendako (VIII-7) ariketa

(VIII-7 Izan bedi a_n, dado bat lau aldiz botatzen denean n puntu lortzeko era kopurua. Kalkula ezazu (a_n)-ren funtzio sortzailea, eta a_{12} eta a_{20} balioak.

Problema horren itzulpena egin daiteke. Izan ere, a_n balioa, $x_1+x_2+x_3+x_4 = n$ ekuazioaren soluzio kopurua da, non $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ baitira. Argi dago $a_n = 0, \forall n \notin \{4, 5, \dots, 24\}$.

Funtzio sortzailea, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kalkulatzeko Funtzio Sortzailearen Teorema (3.3. teorema) erabiliko dugu.

$$
\begin{aligned}
g(x) =& (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 = \\
&= x^4 \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4} = \\
&= x^4 \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-x^6)^k \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-4}{l} (-x)^l = \\
&= x^4 \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k x^{6k} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{3+l}{l} x^l = \\
&= x^4 \left(\binom{4}{0} - \binom{4}{1} x^6 + \binom{4}{2} x^{12} - \binom{4}{3} x^{18} + \binom{4}{4} x^{24} \right) \left(\binom{3}{0} + \binom{3+1}{1} x + \binom{3+2}{2} x^2 + \dots \right)
\end{aligned}
$$

Beraz, a_{12} eta a_{20} koefizienteak kalkulatzeko, kontuan hartu behar dira (k, l) bikote posibleak non $n = 4 + 6k + l$ baitira.

Lehenengoz, 12 puntu lortzeko aukera kopurua, $n = 12$ kasua da.

$$12 = 4 + 6k + l \Leftrightarrow 8 = 6k + l \Leftrightarrow (k, l) \in I_{12} = \{(0, 8),\ (1, 2)\}$$

Beraz,

$$
\begin{aligned}
a_{12} = \sum_{(k,l) \in I_{12}} \binom{4}{k} (-1)^k \binom{3+l}{l} &= \binom{4}{0}\binom{3+8}{8} - \binom{4}{1}\binom{3+2}{2} = \\
&= \binom{11}{3} - 4\binom{5}{2} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3!} - 4\frac{5 \cdot 4}{2!} = 11 \cdot 5 \cdot 3 - 40 = 165 - 40 = 125.
\end{aligned}
$$

Eta, 20 puntu lortzeko aukera kopurua, $n = 20$ kasua da.

$$20 = 4 + 6k + l \Leftrightarrow 16 = 6k + l \Leftrightarrow (k, l) \in I_{16} = \{(0, 16),\ (1, 10),\ (2, 4)\}$$

$$a_{20} = \sum_{(k,l)\in I_{20}} \binom{4}{k}(-1)^k \binom{3+l}{l} = \binom{4}{0}\binom{3+16}{16} - \binom{4}{1}\binom{3+10}{10} + \binom{4}{2}\binom{3+4}{4} =$$
$$= \binom{19}{3} - 4\binom{13}{3} + \binom{4}{2}\binom{7}{3} = \frac{19\cdot 18\cdot 17}{3!} - 4\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3!} + 6\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} =$$
$$= 19\cdot 3\cdot 17 - 4\cdot 13\cdot 2\cdot 11 + 6\cdot 35 = 35.$$

A.9. Bederatzigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Fibonacciren zenbakiak

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-11) ariketa

(IX-11) (Cassini eta Simson) Frogatu ezazu

$$F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = \pm 1.$$

Zein dira + eta − zeinuei dagozkien n balioak?

Ikus ditzagun lehenengo adibideak:

$$\begin{aligned}
n &= 1,\ F_1F_3 - F_2^2 = 1\cdot 2 - 1^2 = 2 - 1 = +1\\
n &= 2,\ F_2F_4 - F_3^2 = 1\cdot 3 - 2^2 = 3 - 4 = -1\\
n &= 3,\ F_3F_5 - F_4^2 = 2\cdot 5 - 3^2 = 10 - 9 = +1\\
n &= 4,\ F_4F_6 - F_5^2 = 3\cdot 8 - 5^2 = 24 - 25 = -1\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Beraz, aierua da $F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$ dela.

Frogatu dezagun indukzioz:

Lehenengo kasua egiazkoa da. Demagun egiazkoa dela $n-1$ kasurako, hots, $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ (indukzio-hipotesia, IH). Eta frogatu dezagun n kasurako:

$$F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 =^{EE} F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 =^{EE} (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1}^2 =$$
$$= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) =^{IH} -(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

non EE Fibonacciren $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ errepikapen erlazioa baita.

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-14) ariketa

(IX-14 Aurreko formula erlazio-multzo baten adibidea baino ez da:

$$F_{n+3} = 2F_{n+1} + F_n$$

$$F_{n+4} = 3F_{n+1} + 2F_n$$

$$F_{n+5} = 5F_{n+1} + 3F_n$$

$$\ldots$$

Frogatu ezazu honako formula orokor hau:

$$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n,$$

eta ondoriozta ezazu n guztietarako F_{kn} balioa F_n zenbakiaren multiploa dela.

(a) Frogatu dezagun $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$ formula (2 mailako) indukzioz m-rekiko:

Lehenengo kasua, $m = 1$ denean, egiazkoa da n guztietarako.
Izan ere, $F_{n+1} =^? F_1 F_{n+1} + F_0 F_n = F_{n+1}$.

Bigarren kasua, $m = 2$ denean, egiazkoa da n guztietarako.
Izan ere, $F_{n+2} =^? F_2 F_{n+1} + F_1 F_n = F_{n+1} + F_n$.

Demagun egiazkoa dela $m-2$ eta $m-1$ kasuetarako, hots,
$F_{n+m-2} = F_{m-2} F_{n+1} + F_{m-3} F_n$ (1. indukzio-hipotesia) eta
$F_{n+m-1} = F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n$ (2. indukzio-hipotesia).

Eta frogatu dezagun m kasurako:

$$\begin{aligned} F_{n+m} &=^{EE} F_{n+m-1} + F_{n+m-2} =^{IH} (F_{m-1}F_{n+1} + F_{m-2}F_n) + (F_{m-2}F_{n+1} + F_{m-3}F_n) = \\ &= F_{n+1}(F_{m-1} + F_{m-2}) + F_n(F_{m-2} + F_{m-3}) =^{EE} F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}. \end{aligned}$$

(b) Frogatu dezagun $F_n | F_{kn}$.

$$F_{kn} = F_{kn-n+n} = F_{n(k-1)+n}.$$

Eta (a) ataleko emaitza erabiliz, non $n := (k-1)n$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{kn} = F_{n(k-1)+n} = F_n F_{(k-1)n+1} + F_{n-1} F_{(k-1)n}. \tag{A.3}$$

Eta indukzioz $k-$rekiko frogatu dezakegu:

Lehenengo kasuan, $k = 1$ denean, egiazkoa da.
Izan ere, $F_n|F_n$.

Demagun egiazkoa dela $k-1$ kasurako, hau da, $F_n|F_{n(k-1)}$.

Orduan, argi dago $F_n|F_{kn}$.
Izan ere, $F_n|F_nF_{(k-1)n+1}$ berehalakoa da eta $F_n|F_{n-1}F_{(k-1)n}$ indukzio-hipotesiagatik; beraz, A.3 ekuazioagatik, emaitza frogatuta geratzen da.

Bederatzigarren ariketa-zerrendako (IX-15) ariketa

(IX-15) (Lucas eta Catalan) Frogatu ezazu

$$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$$

Frogatu dezagun (IX-14) ariketaren (a) emaitza erabiliz, non $n := n-1$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{2n-1} = F_{(n-1)+n} = F_nF_n + F_{n-1}F_{n-1}$$

Bederatzigarre nariketa-zerrendako (IX-16) ariketa

(IX-16 (Lucas eta Catalan) Frogatu ezazu

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n}$$

Frogatu dezagun (IX-14) ariketaren (a) emaitza erabiliz, non $n := n$ eta $m := n$ baitira,

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_nF_{n+1} + F_{n-1}F_n =^{EE} (F_{n+1} - F_{n-1})F_{n+1} + F_{n-1}(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

A.10. Hamargarren ariketa-zerrendako ebazpenak: zenbaki-partiketak

Hamargarren ariketa-zerrendako (X-2) b) ariketa

(X-2) (Andrews) Izan bedi $p_n^{\langle k \rangle}$ aurreko ariketan bezala. Frogatu ezazu:

b) $p_n \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}$

Sailka dezagun p_n, n zenbakiaren partiketa, 1 zenbakia dagoen ala ez aintzat hartuta:

$$\begin{aligned} A_1 :=& \text{ gutxienez 1 behin duten partiketen bilduma} \\ A_2 :=& \text{ 1 zenbakirik ez duten partiketen bilduma} \\ =& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak dituzten partiketen bilduma} \end{aligned}$$

p_n-ren $\{A_1, A_2\}$ partiketa ondo definituta dago. Alde batetik, argi dago

$$c(A_1) = p_{n-1}.$$

Bestalde, A_2 zati kopuruaren arabera berriro sailkatuko dugu:

$$\begin{aligned} A_{21} :=& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak eta } k \text{ zati edo gutxiago duten partiketen bilduma} \\ A_{22} :=& \text{ zati guztiak 2 edo handiagoak eta } k \text{ zati baino gehiago duten partiketen bilduma} \end{aligned}$$

A_2-ren $\{A_{21}, A_{22}\}$ partiketa ondo definituta dago. Egiazta daitekeenez,

$$\begin{aligned} c(A_{21}) &\leq p_n^{\langle k \rangle} \\ c(A_{22}) &\leq p_{n-k} \end{aligned}$$

A_{22} esanahiagatik eta Ferreren diagraman oinarrituz, k *puntu* ezaba daitezke eta gainontzeko $n-k$ puntuen partiketa geratzen da.

$$\begin{array}{rlllll} (1) & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \circ \\ (2) & \bullet & \bullet & \circ & \circ & \\ & \vdots & & & & \\ (k) & \bullet & \bullet & \circ & & \\ (k+1) & \circ & \circ & \circ & & \\ & \vdots & & & & \end{array}$$

Azkenik,

$$p_n = c(A_1) + c(A_{21}) + c(A_{22}) \leq p_{n-1} + p_n^{\langle k \rangle} + p_{n-k}$$

A.11. Hamaikagarren ariketa-zerrendako ebazpenak: Stirlingen eta Catalanen zenbakiak

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-6) ariketa

(XI-6) Frogatu ezazu $m \geq 1$ guztietarako

$$(e^x - 1)^m = \left\{ {m \atop m} \right\} \frac{m!}{m!} x^m + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} \frac{m!}{(m+1)!} x^{m+1} + \ldots .$$

Frogapena:

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^m &= (x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots)^m = \\
&= (x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots)(x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots) \overset{(m)}{\cdots} (x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots) = \\
&(1 \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot 1)x^m + \\
&+ (\frac{1}{2!} \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot \frac{1}{2!})x^{m+1} + \\
&+ (\frac{1}{3!} \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \overset{(m)}{\cdots} 1 \cdot 1 + \ldots + 1 \cdot 1 \cdot \overset{(m)}{\cdots} \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!})x^{m+2} + \\
&+ \ldots .
\end{aligned}$$

Beraz,

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^m &= \sum_{n=m}^{\infty} (\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_m=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_m \in \mathbb{N}}} \frac{1}{n_1!} \frac{1}{n_2!} \cdots \frac{1}{n_m!}) x^n = \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_m=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_m \in \mathbb{N}}} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}) x^n = \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} (\sum_{\substack{n_1+n_2+\ldots+n_m=n \\ n_1,n_2,\ldots,n_m \in \mathbb{N}}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}) x^n =
\end{aligned}$$

(ikusi (XI-3) ariketa, berehalakoa da esanahi konbinatorioari erreparatuz)

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} m! \left\{ {n \atop m} \right\} x^n$$

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-7) ariketa

(XI-7) Frogatu ezazu $n \geq m \geq 1$ guztietarako

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \binom{m}{m} m^n - \binom{m}{m-1}(m-1)^n + \ldots + (-1)^m \binom{m}{0}(m-m)^n.$$

1. frogapena (indukzioz n gainean)

2. frogapena (esanahi konbinatorioa eta inklusio-esklusio printzipioa erabiliz):
Izen bedi $\Omega := n$ bola bereizgarri m zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, $c(\Omega) = m^n$.
Izen bedi $A := n$ bola bereizgarri m zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak, kutxa hutsik geratu gabe, $c(A) = m!\left\{ {n \atop m} \right\}$.
Aintzat har dezagun $\overline{A} = \Omega - A$ multzoaren sailkapena honako irizpide honi jarraituz: hutsik dagoen kutxa zehaztea. Horrela, defini ditzagun $i = 1, 2, \ldots, m$

$H_i :=$ i. kutxa hutsik geratuz, n bola bereizgarri m zenbakidun kutxatan sartzeko aukerak

Orduan, $\overline{A} = H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_m$ denez,

$$c(A) = c(\overline{H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_m}) = c(\Omega) - c(H_1 \cup H_2 \cup \ldots H_m).$$

Eta inklusio-esklusio printzipioa (1.1. teorema) erabiliz,

$$= c(\Omega) -$$
$$[\sum_{i=1}^{m} c(H_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} c(H_i \cap H_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} c(H_i \cap H_j \cap H_k) \ldots + (-1)^{m-1} c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_m)].$$

Kontuan har ditzagun honako emaitza hauek:

$$\begin{aligned}
&c(\Omega) = m^n \\
&c(H_i) = (m-1)^n \\
&c(H_i \cap H_j) = (m-2)^n \\
&c(H_i \cap H_j \cap H_k) = (m-3)^n \\
&\vdots \\
&c(H_{i_1} \cap H_{i_2} \ldots \cap H_{i_k}) = (m-k)^n \\
&\vdots \\
&c(H_1 \cap H_2 \ldots \cap H_m) = (m-m)^n
\end{aligned}$$

Hortaz,

$$c(A) = m^n - m(m-1)^n + \binom{m}{2}(m-2)^n - \binom{m}{3}(m-3)^n + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}(m-m)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{m-k}(m-k)^n.$$

3. frogapena ((XI-6) ariketa erabiliz):

$$(e^x - 1)^m = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{m!}{n!} x^n.$$

$(e^x - 1)^m$ zera da: $a_n = \left\{ {n \atop m} \right\} m!$ segidari lotutako funtzio sortzaile esponentziala, hau da, $(e^x - 1)^m$ potentzia seriearen garapenean, $\frac{x^n}{n!}$ osagaiari dagokion koefizientea da.
Bestalde, Newtonen Binomioa erabiliz,

$$\begin{aligned}
(e^x - 1)^m &= (-1 + e^x)^m = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (e^x)^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k e^{(m-k)x} = \\
& e^x garatuz \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(m-k)x]^n}{n!} = \\
&= \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{m-k} (-1)^k \frac{(m-k)^n x^n}{n!} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{m-k} (m-k)^n \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Beraz, $\frac{x^n}{n!}$ osagaiari dagokion koefizientea $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{m-k}(m-k)^n$ denez, identitatea ondorioztatzen da:

$$m! \left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{m-k} (m-k)^n, \ \forall n \geq m.$$

$$0 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{m-k} (m-k)^n, \ \forall n < m.$$

Hamaikagarren ariketa-zerrendako (XI-8) ariketa

(XI-8) Frogatu ezazu $m \geq 1$ guztietarako

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} = \left\{ {m \atop m} \right\} + \left\{ {m+1 \atop m} \right\} x + \left\{ {m+2 \atop m} \right\} x^2 + \ldots$$

Frogapena (indukzioz):
$m = 1$ denean egiazkoa da.
Izan ere,

$$\frac{1}{1-x} = \left\{ {1 \atop 1} \right\} + \left\{ {2 \atop 1} \right\} x + \left\{ {3 \atop 1} \right\} x^2 + \ldots = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Demagun egiazkoa dela $(m-1)$rako (indukzio-hipotesia).

$$\frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-(m-1)x)} = \left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m \atop m-1} \right\} x + \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} x^2 + \ldots$$

Frogatu dezagun $m-$rako:

$$\begin{aligned}
\Pi_{n=1}^{m} \frac{1}{1-nx} &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-mx)} \\
&\mathit{indukzio-hipotesia} \\
&= \frac{1}{1-mx}\left(\left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m \atop m-1} \right\} x + \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} x^2 + \ldots\right) \\
&= (1 + mx + m^2x^2 + \ldots)\left(\left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m \atop m-1} \right\} x + \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} x^2 + \ldots\right) = \\
&= \left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \\
&+ [m\left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m \atop m-1} \right\}]x + \\
&+ [m^2\left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m \atop m-1} \right\} + \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\}]x^2 + \\
&+ \ldots + \\
&+ [m^k\left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} + m^{k-1}\left\{ {m \atop m-1} \right\} + \ldots + m\left\{ {m+k-2 \atop m-1} \right\} + \left\{ {m+k-1 \atop m-1} \right\}]x^k + \\
&+ \ldots = \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots
\end{aligned}$$

Amaitzeko frogapena, frogatu ditzagun a_k koefizienteak $\left\{ {m+k \atop m} \right\}$ direla, errepikapen erlazioa erabiliz:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

Frogatu dezagun indukzioz

$$a_k = \left\{ {m+k \atop m} \right\}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \left\{ {m-1 \atop m-1} \right\} = \left\{ {m \atop m} \right\} \\
a_1 &= \left\{ {m+1 \atop m} \right\} = \left\{ {m \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m \atop m} \right\} = \left\{ {m \atop m-1} \right\} + m \\
a_2 &= \left\{ {m+2 \atop m} \right\} = \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m+1 \atop m} \right\} = \left\{ {m+1 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m \atop m-1} \right\} + m^2 \\
&\text{suposa dezagun } (k-1)\text{−rako egiazkoa dela [IH]} \\
a_{k-1} &= \left\{ {m+k-1 \atop m} \right\} = \left\{ {m+k-2 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m+k-3 \atop m-1} \right\} + m^2\left\{ {m+k-4 \atop m-1} \right\} + \ldots + m^{k-1} \\
&\text{frogatu dezagun } k\text{rako:} \\
a_k &= \left\{ {m+k \atop m} \right\} = \left\{ {m+k-1 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m+k-1 \atop m} \right\} = \\
&\text{indukzio-hipotesia [IH] erabiliz} \\
&= \left\{ {m+k-1 \atop m-1} \right\} + m\left\{ {m+k-2 \atop m-1} \right\} + \ldots + m^{k-1}\left\{ {m \atop m-1} \right\} + m^k
\end{aligned}$$

A.12. Hamabigarren ariketa-zerrendako ebazpenak: grafo-teoria

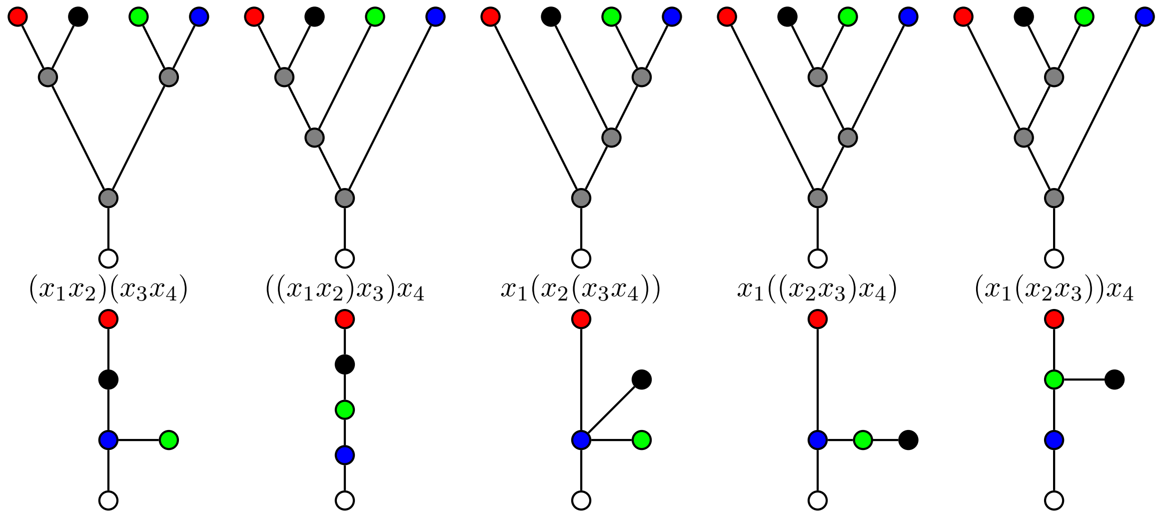
Hamabigarren ariketa-zerrendako (XII-8) ariketa

(XII-8) Bost erpineko eta ordenatutako sustraidun zenbat zuhaitz dago? Irudika ezazu bakoitza eta adieraz ezazu aurreko ariketarekiko korrespondentzia.

Erantzuna, 5.3.. atalean azaltzen denez, $C_{n-2} = C_3 = 5$ da. 5.15.. irudian aurreko ariketaren emaitza ikus dezakegu. 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubalioko bakoitzari 5 erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitza dagokio. Beraz, irudika dezagun elkarrekin, lehenengo lerroan, 4 mailakoak eta bigarren lerroan korrespondentziak.

Kontuan hartu behar dugu, lehenengo lerroko grafoak 4 mailako eta ordenatutako sustraidun zuhaitz hirubaliokoak direnez, bakoitza identifika daitekeela biunibokoki lau elementuen parentesien problemarekin. Goiko mailan, beti lau erpin daude eta x_1, x_2, x_3 eta x_4 elementuekin elkartu daitezke. Laguntzeko kolore batekin adieraziko dugu, hau da, x_1 erpin gorria da, x_2 beltza, x_3 berdea eta x_4 urdina. Beheko mailan, berriz, beti erpin bakarra dago, *sustraia* izenekoa, zuria. Gainontzeko erpinak, prozeduran desagertuko/gainjarriko dira, eta grisez marraztu dugu.

Zuhaitz hirubalioko bakoitzaren korrespondentzia bilatzeko, honako eraikitze-teknika honi jarraituko diogu. Lehenengoz, eskuineko ertzak horizontalki kokatuko ditugu eta ezkerreko ertzak, bertikalki; ezkerraldean zentrotik urrutien dagoen erpinen lerro bertikalari *ardatza* deituko diogu. Hori egin eta gero, erpinen lerro horizontal bakoitzean, honako prozedura hau egingo dugu. Pentsa dezagun ertz bertikalak zurrunak direla eta ertz horizontalak, berriz, laburtu daitezkeela guztiz uzkurtu arte. Eskuin aldean zentrotik urrutien dagoen erpina hartu eta ezkerrerantz bultzatu ardatzeraino eta bidetik aurkitutako erpin guztiak gainjarriko ditugu. Horrela, lortzen dira 5 erpineko eta ordenatutako sustraidun zuhaitz guztiak, A.1.. irudian ikusten den bezala.



A.1. irudia: Bost erpineko ordenatutako sustraidun zuhaitzak

B. eranskina

Ariketen zenbakizko soluzioak

B.1. Oinarrizko konbinatoriaren ariketa-zerrenden soluzioak

Ariketa-zerrendak 1.10.. azpiatalean kontsulta daitezke.

Lehenengo ariketa-zerrendaren soluzioak

(I-1) a) $\{x\} + \{y\} \in [0, 1)$; b) $< x > + < y > \in [0, 1)$.
(I-2) $d_n(n) = \lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$.
(I-4) a) egiazkoa; b) egiazkoa.
(I-6) a) gezurrezkoa; b) gezurrezkoa.
(I-7) $\lfloor x \rfloor > (n-1)^2$ eta $x \leq n^2$.
(I-8) $b-a;\ b-a;\ b-a-1;\ b-a+1$.
(I-9) $\lfloor b \rfloor - \lfloor a \rfloor;\ \lceil b \rceil - \lceil a \rceil;\ \lceil b \rceil - \lfloor a \rfloor - 1;\ \lfloor b \rfloor - \lceil a \rceil + 1$.
(I-10) $m = \lfloor \log_2(n) \rfloor$, $l = n - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$.
(I-11) $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ edo $\left\lceil x - \frac{1}{2} \right\rceil$.

Bigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(II-1) 86.
(II-2) 17.
(II-3) 25200.
(II-4) 65536.
(II-5) 96.
(II-6) 15552.
(II-7) 200.

(II-8) 360; 3888.
(II-9) 330; 767.
(II-10) 900; 500.
(II-11) 326592.
(II-12) 83160.
(II-13) 5040; 420.
(II-14) 40!.
(II-15) $\frac{80!}{2^{40}}$.
(II-16) 32760.
(II-17) 30240; 65610.
(II-18) 1465; 1885.
(II-19) $\frac{1}{2}\binom{4}{2}\binom{36}{18}$; $\binom{4}{2}\binom{36}{8}$.
(II-20) 15.
(II-21) $\binom{49}{6}$; $\binom{10}{6}$.
(II-22) 3744; 624; 123552; 54912.
(II-23) 3^{15}.
(II-24) 1000; 360.
(II-25) 144; 1152.
(II-26) 144000.
(II-27) 486; 216.
(II-28) 12; 12.
(II-29) 36.
(II-30) 40320.
(II-31) $\binom{52}{5}\binom{47}{5}\binom{42}{5}\binom{37}{5}$.
(II-32) 140; 3360; 560.
(II-33) 462; 200.
(II-34) $\binom{40}{6}-\binom{36}{6}$; $\binom{30}{6}$; $\binom{30}{6}-\binom{27}{6}$.
(II-35) 404352.
(II-36) $\binom{7}{5}\binom{11}{5}5!$.
(II-37) 28800; 160000.
(II-38) $\binom{24}{11}$; $\binom{23}{10}$; $\binom{23}{11}$.

Hirugarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(III-1) 280.
(III-2) 90.
(III-3) $c(ABC) = -13$.
(III-4) $c(ABC) \geq 40$.
(III-5) $2(n!)^2$.
(III-6) $(n-2)!$.
(III-7) $\binom{m+1}{n}$.
(III-8) a) $n!$; b) $n!\binom{n}{2}$; c) $\binom{n}{2}^2\binom{n-2}{2}^2(n-4)! + \binom{n}{2}\binom{n}{3}(n-2)!$.
(III-9) $\frac{n!}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$.

(III-10) $(2^m - 1)(2^n - 1)$.
(III-11) $(b-1)b^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$.
(III-12) (Laguntza: adieraz itzazu gizabanako bakoitza puntu baten bidez eta bi pertsonaren arteko agurra bi puntuak lotzen dituen lerro baten bidez).
(III-13) (Lag.: Lotu d zatitzaile bakoitza bere $\frac{n}{d}$ zenbaki osagarriarekin; edo erabil ezazu honako ariketa honen emaitza).
(III-14) $\prod_{i=1}^{k}(m_i + 1)$; $\prod_{i=1}^{k} \frac{1-p_i^{m_i+1}}{1-p_i}$.
(III-15) (Lag.: inklusio-esklusio printzipioa).
(III-16) $\sum_{i=1}^{\lfloor \log_p n \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.
(III-17) 249.
(III-18) $\binom{p}{\frac{p+q}{2}+1}$.
(III-19) $(m+n)!\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)$.
(III-20) a) 8; b) 28; c) 14; d) 2; e) 7; f) 4; g) 7; h) 6; i) 3; j) 1; k) 3; l) 6; m) 3; n) 12.

Laugarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(IV-1) 779.
(IV-2) (Lag.: Usategiaren printzipioa aplikatuz, frogatu ezazu Ω-ren azpimultzo ez-hutsa bakoitzari bere osagaien batura esleitzen dion funtzioa ezin dela injektiboa izan.
(IV-3) 462.
(IV-4) (Lag.: Usategiaren printzipioa).
(IV-5) a) 76; b) 81.
(IV-6) 233.
(IV-7) n zenbakiak non $n+1$ karratu perfektua baita.
(IV-8) ez (ikusi hirugarren ariketa-zerrendako (III-12) ariketa).
(IV-9) ez (ilara bikoitietan/bakoitietan kokatutako fitxak ilara bikoitietan/bakoitietan soilik jar daitezke).
(IV-10) 3.

B.2. Konbinazio-identitateen ariketa-zerrenden soluzioak

Ariketa-zerrendak 2.5.. azpiatalean kontsulta daitezke.

Bosgarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(V-1) $n+1$ zenbakiak $\binom{2n}{n}$ zatitzen du.
(V-2) (Lag.: Lotu azpimultzo bakoitza bere osagarriarekin).
(V-3) (Lag.: Zehaztu noiz $\binom{n}{k}$ zati $\binom{n}{k-1}$-ren arteko zatidura ≥ 1 den).

(V-4) a) $k = 1$, $r = n-1$; b) $k = 2$, $r = n-1$; c) $k = 3$, $r = n-1$; d) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) - \sum_{k=1}^{n} k$.
(V-5) a) $r = n-k$.
(V-6) (Lag.: Sailkatu bikote ordenatuak, osagaiak berdinak edo desberdin dituzten aintzat hartuta).
(V-7) (Lag.: k-ren gaineko indukzioa).
(V-8) (Lag.: k-ren gaineko indukzioa).
(V-9) (Lag.: erabil ezazu $\binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k} = \binom{m}{n}\binom{n}{k}$. Konbinatoria erabiliz, (A, B) bikote-kopurua, non A multzoa $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$tik eta n osagai dituen azpimultzoa den eta $B \subset A$).
(V-10) a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k}\frac{1}{x+k}$.
(V-12) (Lag.: Erabil itzazu $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ eta $\binom{n-1}{l} = \binom{n-1}{n-1-l}$.)
(V-15) a) $\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1$, $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = q^2 + q + 1$.

Seigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VI-1) a) 0; b) baldin eta $k = \frac{a-bd}{c-b}$ zenbaki oso ez-negatibo bada, $\binom{d}{k}$; bestela, 0; c) $\sum \binom{b}{k}\binom{k}{l}$, non $k \geq l$ eta $k + l = b$ betetzen dituzten eta zenbaki oso ez-negatiboak dituzten (k, l) bikoteek batura osatzen dute (baldin eta b zenbaki oso ≥ 0 ez bada, 0).
(VI-2) $\binom{x+y}{n} = \frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!}$ denez, koefiziente binomialetarako Vandermonderen formulatik ondorioztatzen da.
(VI-3) n-ren gaineko indukzioa.
(VI-4) Ezkerraldeko atala $[(1+x) - x]^n$-ren garapena da.
(VI-5) a) $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\binom{n}{l} l^k = 0$; b) $\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+1}\binom{n}{l} l^n = (-1)^{n+1} n!$.
(VI-6) 2.5. ariketa-zerrendaren (V-8) ariketa.
(VI-7) Baldin eta m bakoitia bada, 0; eta baldin eta m bikoitia bada, $\binom{n+m/2-1}{m/2}$.
(VI-8) $\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ (Lag.: Adieraz ezazu batugai bakoitza integral egoki baten bidez).

Zazpigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VII-1) 6300; 1050.
(VII-2) a) $\binom{3n}{n,n,n}$; b) $\frac{1}{3!}\binom{3n}{n,n,n}$; c) $\frac{(kn)!}{(n!)^k}$; d) $\frac{1}{k!}\frac{(kn)!}{(n!)^k}$.
(VII-3) 20412.
(VII-4) $\frac{(2n)!}{2^n} = \binom{2n}{2,2,\ldots,2} = (2n-1)!!n!$.
(VII-5) $[(n!)!]^{n+1}$ zenbakiak zatitzen du $((n+1)!)!$ eta $n \geq 2$ denean, $((n+1)!)!$ zenbakiak zatitzen du $(n^2!)!$.
(VII-8) 0; $n, k \geq 1$ guztietarako, $\sum (-1)^{r_1+r_2+\ldots+r_k}\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_{2k}} = 0$, non $r_1 + r_2 + \ldots + r_{2k} = n$ betetzen duten eta zenbaki oso ez-negatiboak dituzten $(r_1, r_2, \ldots, r_{2k})$ 2k-koteek batura osatzen baitute.
(VII-9) 2310.
(VII-10) $\binom{m}{k, m-2k, k}$, non $k = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ den.

B.3. Funtzio sortzaileak eta errepikapenen ariketa-zerrendaren soluzioak

Ariketa-zerrenda 3.4.. azpiatalean kontsulta daiteke.

Zortzigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(VIII-1) a) $(1-5t)^{-1}$;
b) $(1+t)^{-1}$;
c) $(1-t^2)^{-1}$;
d) $[(1-t^2)^{-1}]' = 2t(1-t^2)^{-2}$;
e) $4(1-2t)^{-1}$.
(VIII-2) a) $\binom{n+2}{n}$;
b) $a_n = 1$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den aintzat hartuta;
c) $(-4)^n$;
d) $2^{n+1}-2$;
e) $2^n/n!$;
f) $a_n = 1/(n/2)!$ edo 0, n bikoitia ala bakoitia den aintzat hartuta;
g) $a_{2n-1} = (-1)^{n-1}/(2n-1)!,\ a_{2n} = 0$;
h) $a_{2n} = (-1)^n/(2n)!,\ a_{2n-1} = 0$.
(VIII-3) a) $g(-t)$;
b) $[g(t)-g(0)]/t$;
c) $tg(t)$;
d) $[(1+t)g(t)-g(0)]/t$;
e) $(1-t)g(t)$;
f) $[g(t)+g(-t)]/2$;
g) $[g(t)-g(-t)]/2$;
h) $g(t^2)$;
i) $[g(t)]^2$;
j) $g(t)/(1-t)$;
k) $tg'(t)$;
l) $t^k g^{(k)}(t)$.
(VIII-4) a) $t(1-t)^{-2}$; b) $(1-2t)/(1-3t-4t^2)$.
(VIII-5) a) $(1-t)^{-3}(1-t^4)^{-1}$; b) $(1-t^2)^{-2}(1-t^3)^{-2}$.
(VIII-6) 100; 36.
(VIII-7) $(t+t^2+\ldots+t^6)^4 = t^4(1-t^6)^4/(1-t)^4$; 125; 35.
(VIII-8) a) $1,2,3,5$; b) $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; c) $(1+t)/(1-t-t^2)$; d) $a_n = F_{n+2}$.
(VIII-9) (a_n) aurreko ariketaren segida da.
(VIII-10) a) $1,1,2,3$; b) $a_n = a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n \geq 2)$; c) $1/(1-t-t^2)$; d) $a_n = F_{n+1}$.
(VIII-11) (a_n) segida 8. eta 9. ariketena da.

B.4. Zenbaki-familia garrantzitsuen ariketa-zerrenden soluzioak

Ariketa-zerrendak 4.7.. azpiatalean kontsulta daitezke.

Bederatzigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(IX-9) $nF_{n+2} - Fn + 3 + 2$; $(n+1)F_{n+2} - F_{n+3} + 1$.
(IX-10) $\binom{n-k}{k}$, non $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ baita.
(IX-11) $+$ baldin eta n bakoitia bada, $-$ baldin eta n bikoitia bada.
(IX-12) $3n$.

Hamargarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(X-5) b) $\pi_1^{(1)} = 1$; $(\pi_2^{(1)}, \pi_2^{(2)}) = (1,1)$; $(\pi_3^{(1)}, \pi_3^{(2)}, \pi_3^{(3)}) = (1,2,1)$; $(\pi_4^{(1)}, \pi_4^{(2)}, \pi_4^{(3)}, \pi_4^{(4)}) = (1,3,3,1)$; $(\pi_5^{(1)}, \pi_5^{(2)}, \pi_5^{(3)}, \pi_5^{(4)}, \pi_5^{(5)}) = (1,4,6,4,1)$.
(X-6) $P^{\langle 1 \rangle}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$ eta $P^{\langle 2 \rangle}(x) = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \ldots$.

B.5. Grafo-teoriaren ariketa-zerrendaren soluzioak

Ariketa-zerrenda 5.6.. azpiatalean kontsulta daiteke.

Hamabigarren ariketa-zerrendaren soluzioak

(XII-2) $n(n-1)/2$.
(XII-3) a) Bai, K_5; b) ez, $4 \not| 30$.
(XII-4) 6.
(XII-5) Bai.
(XII-6) 3; $60 + 5 + 60 = 5^3$.
(XII-7) 5.
(XII-8) 5.
(XII-9) (a) $(|V|, |E|, |F|) = (8, 13, 7)$, (b) $(10, 17, 9)$, (c) $(8, 12, 6)$, (d) $(8, 16, 10)$, (e) $(7, 14, 9)$, (f) $(8, 10, 4)$
(XII-10) 3.
(XII-11) 4.

Bibliografia

[1] Fibonacci Association. The fibonaccy quarterly, 1963.

[2] V.K. Balakrishnan. *Combinatorics.* Schaums Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1995.

[3] R.C. Bose and B. Manvel. *Introduction to Combinatorial Theory.* Wiley, New York, 1984.

[4] D.I.A. Cohen. *Basic Techniques of Combinatorial Theory.* Wiley, New York, 1978.

[5] F. García Merayo. *Matemática Discreta.* Paraninfo, Madrid, 2001.

[6] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1994.

[7] J.M. Harris, J. L. Hirst, and M. J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory.* Springer, New York, 2008.

[8] N. Hartsfield and G. Ringel. *Pearls in Graph Theory.* Dover, New York, 1994.

[9] J. Heber Nieto Said. *Teoría Combinatoria.* La Universidad del Zulia, Venezuela, 1996.

[10] OEIS Foundation Inc. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2011.

[11] D.A. Marcus. *Combinatorics: A Problem Oriented Approach.* The Mathematical Association of America, 1998.

[12] RSME. Olimpiada matemática española, 1963.

[13] R. J. Trudeau. *Introduction to Graph Theory.* Dover Pulications, Inc, Nueva York, 1993.

[14] N. Ya. Vilenkin. *Combinatorics.* Academic Press, New York, 1971.

[15] H. S. Wilf and N. Calkin. The electronic journal of combinatorics, 1994.

[16] H.S. Wilf. *Generatingfuntionology.* Academic Press, Boston, 1990.