



---

# Clasificación topológica de superficies triangulables no compactas

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

Artxon Larrakoetxea Intxaurreaga

Trabajo dirigido por  
Marta Macho Stadler

Leioa, 26 de junio de 2017



# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1. Preliminares</b>  | <b>2</b>   |
| 1.1. Definiciones básicas . . . . .                                   | 2          |
| 1.2. Triangulación de una superficie . . . . .                        | 5          |
| 1.3. Clasificación de superficies compactas . . . . .                 | 8          |
| 1.4. Superficies compactas con borde . . . . .                        | 15         |
| <b>2. Clasificación de superficies no compactas</b>                   | <b>18</b>  |
| 2.1. Frontera ideal de una superficie . . . . .                       | 18         |
| 2.2. Género infinito y clases de orientabilidad . . . . .             | 21         |
| 2.3. Teorema de Kerékjartó . . . . .                                  | 22         |
| 2.4. Construcción de una superficie con frontera ideal dada . . . . . | 27         |
| 2.5. Un teorema de representación . . . . .                           | 34         |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>36</b>  |



# Introducción

La clasificación de  $n$ -variedades topológicas ha sido y sigue siendo un área activa de estudio en topología y geometría. Mientras que muchos de los problemas, como la clasificación completa de superficies, han sido resueltos, la clasificación de 3-variedades no está del todo clara, aunque en 2006 G. Perelman dio un gran paso al demostrar la *conjetura de Poincaré*. El presente trabajo consiste en el estudio de un artículo de Ian Richards: *On the classification of noncompact surfaces* (1963)[1], en el que se describe una clasificación topológica completa de superficies triangulables no compactas. Para entender mejor este problema de clasificación vamos a necesitar un breve contexto histórico y ver la motivación detrás del mismo.

La teoría de variedades 2-dimensionales, como también otras ramas en el campo de topología tienen su origen en la conocida *fórmula de Euler* (1750),  $v - e + f = 2$ , la cual establece una relación entre el número de caras ( $f$ ), aristas ( $e$ ) y vértices ( $v$ ) de un poliedro convexo. Una de las generalizaciones de la fórmula para grafos planares, llevadas al cabo por L'Huilier (1811), es considerado el primer resultado conocido de invariante topológico. Otro tipo de generalización fue dado por Schläfli al extenderla a espacios  $n$ -dimensionales, el resultado fue demostrado por Poincaré (1893):  $N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1}N_{n-1} = 1 - (-1)^n$ , donde  $N_0 = v$ ,  $N_1 = e$ ,  $N_2 = f$  y  $N_k$  es el número de análogos  $k$ -dimensionales.

En los años 1860, Möbius y Jordan, de manera independiente trabajaron en el problema de equivalencia topológica de superficies, elaboraron una clasificación de superficies compactas orientables. En 1865, Möbius describió propiedades de la banda que lleva su nombre en términos de no orientabilidad [8].

En los años 1870, Klein estudió la orientabilidad de los subespacios de un plano proyectivo real 2-dimensional, introdujo los conceptos de propiedad relativa y absoluta, e identificó la orientabilidad como una propiedad absoluta. En 1882, describió la llamada botella de Klein, una de las superficies cerradas no orientables más conocida. La clasificación de superficies compactas no orientables fue publicada por van Dyck en 1888 [9].

Todavía los conceptos de homeomorfismo o de superficie abstracta no eran precisos. La primera demostración rigurosa de la clasificación de superficies compactas fue hecha por Dehn y Heegaard en 1907 [10]. Una demostración algebraica de la clasificación fue publicada por Brauer en *Systems of circuits on two-dimensional manifolds* (1921)[3].

En el año 1923, Kerékjartó dio el teorema de clasificación de superficies no compactas, después de introducir el concepto de componente de borde como herramienta para compactificar la superficie abierta, pero su trabajo no correspondía con el nivel de exactitud exigida. Richards (1963) y Goldmann (1971) demostraron de manera más precisa el teorema y dieron algunas consecuencias de él. [1, 11]

El objetivo principal de este trabajo será dar una demostración del teorema de Kerékjartó y dar un modelo para representar una superficie no compacta cualquiera.

En el primer capítulo, repasaremos los conceptos básicos de topología general, definiremos una superficie triangulable y daremos algunos invariantes topológicos que nos sirvan para clasificar las superficies compactas. También daremos algunos de los resultados importantes de este tipo de superficies para su uso más adelante.

En el segundo capítulo, definiremos la *frontera ideal* de una superficie, que es otro invariante topológico, y esta será nuestra herramienta más importante para dar una clasificación para superficies no compactas.



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Definiciones básicas

Un *espacio topológico* es un conjunto  $S$  de puntos junto con una familia  $\tau$  de subconjuntos de  $S$  llamados *abiertos* que cumplen las siguientes condiciones:

- (i)  $\emptyset$  y  $S$  son abiertos
- (ii) La unión de toda colección de conjuntos abiertos es un abierto.
- (iii) La intersección de toda colección finita de conjuntos abiertos es un abierto

Una *base* del espacio topológico es un subconjunto  $\beta \subset \tau$  tal que todos los abiertos pueden escribirse como uniones finitas de los elementos de  $\beta$ . Se dice que un espacio topológico es *segundo numerable* ( $C_{II}$ ) si su topología tiene una base contable.

Un *espacio de Hausdorff* es un espacio topológico que cumple la siguiente propiedad:

- Para dos puntos cualquiera  $p_1, p_2 \in S$  distintos, existen  $U_1, U_2 \subset S$  dos abiertos disjuntos tales que  $p_1 \in U_1$  y  $p_2 \in U_2$ .

El *interior* de un conjunto  $U \subset S$  es el mayor abierto contenido en  $U$ , se denota por  $U^\circ$ . Al complementario de un abierto se le llama *cerrado*. La *clausura* de un conjunto  $U \subset S$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $U$ , se denota por  $\bar{U}$ . Se dice que  $S$  es *separable* si existe  $D \subset S$ , *denso* y contable, donde *denso* significa  $\bar{D} = S$ . Se puede demostrar que un espacio topológico  $C_{II}$  es también separable (ver [7] Teorema 16.9 (b)).

Una característica muy importante para el estudio de superficies es la conexión. Un espacio topológico  $S$  se dice que es *conexo* si no existen dos

abiertos disjuntos no vacíos tales que  $U \cup V = S$ . Una *región* es un conjunto conexo abierto y una *región cerrada* es un conjunto conexo cerrado.

Siguiendo con la conectividad, se dan dos teoremas cuyas pruebas podemos encontrar en [5] (Prop. 4.9 (c), (d)) que servirán para definir el concepto de *componente conexa*.

**Teorema 1.1.1.** *Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos conexos y  $p \in U_i$  para todo  $i \in I$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} U_i$  es conexo.*

**Teorema 1.1.2.** *Sea  $U$  un conjunto conexo y  $U \subset V \subset \bar{U}$ , entonces  $V$  también es conexo.*

Como consecuencia del Teorema 1.1.1, todo punto de un espacio topológico pertenece a un subconjunto conexo maximal, llamado *componente conexa*, que es la unión de todos los conjuntos conexos que contienen al punto dado. Por el Teorema 1.1.2 se deduce que una componente conexa es un cerrado. Dos componentes conexas solo pueden ser disjuntas o iguales, por lo que un espacio topológico se puede descomponer en sus componentes conexas. Si un espacio solo tiene una componente conexa, entonces es un espacio conexo; en caso contrario, si cada componente es un punto, entonces se dice que el espacio es *totalmente desconexo*.

El objetivo es la clasificación de superficies triangulables conexas no compactas. Por ello, la definición de *compacidad* se dará a continuación, la definición de una *superficie* se dará el final de este apartado y en el siguiente apartado se desarrollará el concepto de una *superficie triangulable*.

Un *recubrimiento abierto* de un espacio topológico  $S$ , es una familia de abiertos  $\{U_i\}_{i \in I}$  tal que  $\bigcup_{i \in I} U_i = S$ . Se dice que un espacio topológico  $S$  es *compacto* si y solo si para cada recubrimiento abierto de  $S$  existe un subrecubrimiento finito. Esto es, existe una cantidad finita de abiertos  $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_N}\}$  tales que  $\bigcup_{j=1}^N U_{i_j} = S$ .

A veces es más conveniente expresar la compacidad en términos de conjuntos cerrados. Se dice que una familia de conjuntos cerrados tiene la *propiedad de intersección finita*, si para toda subfamilia finita, la intersección de sus conjuntos es no vacía.

**Teorema 1.1.3.** ([7] Teorema 17.4 (a), (b)). *Un espacio es compacto si y solo si toda familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

La introducción de una topología en un espacio permite una definición intuitiva y el estudio de aplicaciones continuas. Dados dos espacios topológicos  $S$  y  $S'$ , se dice que  $f : S \rightarrow S'$  es *continua en un punto*  $p \in S$ , si para todo

abierto  $V$  con  $f(p) \in V$  existe un abierto  $U$  con  $p \in U$  tal que  $f(U) \subset V$ . Si es continua en todos los puntos de  $S$ , entonces se dice que  $f$  es *continua*. Además, si  $f$  es biyectiva y su inversa también es continua, entonces  $f$  es un *homeomorfismo*. En ese caso, se dice que  $S$  y  $S'$  son *homeomorfos* o topológicamente equivalentes.

**Definición 1.1.1.** Un *embebimiento* del espacio topológico  $S$  en el espacio  $Y$  es una aplicación continua  $f : S \rightarrow Y$ , tal que la aplicación inducida sobre su imagen  $f : S \rightarrow f(S)$  es un homeomorfismo. Se dice que  $S$  está embebido en  $Y$  mediante  $f$ , y en tal caso  $S$  es topológicamente equivalente a un subespacio de  $Y$  con su topología relativa, y por lo tanto, todas las propiedades topológicas que posee este subconjunto también las tiene  $S$ .

**Observación 1.1.1.** Si  $Y$  es un espacio topológico con la topología  $\tau$ , y  $S \subset Y$ , entonces la topología relativa se define mediante  $\tau_S = \{S \cap U : U \in \tau\}$

**Definición 1.1.2.** Si  $S$  no es compacto, una *compactificación* de  $S$  es un par  $(Y, f)$  con  $Y$  compacto y  $f : S \rightarrow Y$  un embebimiento con  $\overline{f(S)} = Y$ .

Un *invariante topológico* es la propiedad de un espacio topológico que se preserva a través de homeomorfismos. La imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua es conexa, y lo mismo ocurre con la imagen de un conjunto compacto. Por lo tanto, la conexión y la compacidad son invariantes topológicos.

Para acabar con el apartado se definirá que es una *variedad*, una *superficie* y un tipo especial de superficie llamada *superficie con borde*.

**Definición 1.1.3.** Una *variedad  $n$ -dimensional* topológica, es un espacio  $C_{II}$  y Hausdorff, donde cada punto posee un entorno homeomorfo a la bola abierta euclídea de dimensión  $n$ ,

$$\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\}$$

**Definición 1.1.4.** Una *superficie* es una variedad 2-dimensional conexa.

**Definición 1.1.5.** Una *superficie con borde* es un espacio topológico conexo, Hausdorff y  $C_{II}$ , donde hay dos tipos de puntos:

- (i) Los *puntos interiores*, cuyos entornos son homeomorfos a la bola abierta euclídea de dimensión 2.
- (ii) Los *puntos del borde*, cuyos entornos son homeomorfos al conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0\}$$

## 1.2. Triangulación de una superficie

La triangulación es una herramienta conveniente a la hora de estudiar algunas propiedades de espacios topológicos. Al final de este apartado se dará un teorema con condición necesaria y suficiente para la existencia de una triangulación en una superficie. Pero antes, empezamos con la definición de un *complejo abstracto*.

**Definición 1.2.1.** Un *complejo abstracto* es un conjunto finito o infinito  $K$ , junto con una familia de subconjuntos finitos  $K'$ , llamados *símplices* con las siguientes propiedades:

- Todo  $\alpha \in K$  pertenece a uno o a lo sumo a una cantidad finita de símplices.
- Todo subconjunto de un símplice es un símplice.

Sea  $s \in K'$  un símplice y sea  $k$  el número de elementos de  $s$ , entonces la dimensión de un símplice es uno menos que la cantidad de elementos que lo componen,  $\dim s = k - 1$ . Y la dimensión de un complejo abstracto  $K$  es el máximo de las dimensiones de los símplices que lo componen,  $\dim K = \max_{s \in K'} \{\dim s\}$ .

Dado un complejo abstracto, podemos construir su correspondiente *complejo geométrico*  $K_g$ , el cual es un espacio topológico. Un elemento en  $K_g$  es una función real  $\lambda$ , con las siguientes propiedades:

- (i)  $\lambda(\alpha) \geq 0$  para todo  $\alpha \in K$ .
- (ii) Los símplices están formados por  $\alpha \in K$  tales que  $\lambda(\alpha) > 0$ .
- (iii)  $\sum_{\alpha \in K} \lambda(\alpha) = 1$ .

Dado un símplice  $s$  podemos obtener un subconjunto  $s_g$  de  $K_g$  imponiendo la condición  $\lambda(\alpha) = 0$  si  $\alpha \notin s$ . De esta manera se tiene que  $K_g$  es la unión de todos los  $s_g$ . Pongamos por caso  $s = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  un 2-símplice, y sea  $\lambda_k = \lambda(\alpha_k)$ . Un punto en  $s_g$  puede representarse por una terna  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , con  $\lambda_k \geq 0$  y  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ . Obtenemos entonces una *realización geométrica* de  $s_g$  como un triángulo en  $\mathbb{R}^3$ .

Sobre cada  $s_g$  introducimos la topología de su realización geométrica, y con ello definimos una topología sobre  $K_g$ , estableciendo que un conjunto es cerrado si y solo si su intersección con cada  $s_g$  es cerrada. Dado que cada  $\alpha \in K$  pertenece a lo sumo a una cantidad finita de símplices, el espacio es *localmente compacto*, esto es, todo punto de  $K_g$  tiene un entorno compacto.

De esta manera hemos construido una realización de un complejo abstracto que tiene la propiedad de preservar la relación de inclusión, esto es, si  $s$  y  $t$  son dos símlices, sus realizaciones geométricas cumplen  $s_g \cap t_g = (s \cap t)_g$ .

**Definición 1.2.2.** La *triangulación* de una superficie  $S$  (o una superficie con borde  $\bar{S}$ ) se define en términos de un complejo abstracto 2-dimensional  $K$ , junto con una aplicación  $\sigma : K \rightarrow S$  (o  $\bar{S}$ ) dado por  $s \mapsto \sigma(s)$ , siendo  $s$  un símlice de  $K$ , que satisface:

- (i)  $\sigma(s_1 \cap s_2) = \sigma(s_1) \cap \sigma(s_2)$ .
- (ii) Existe un homeomorfismo de  $s_g$  sobre  $\sigma(s)$  que aplica cada  $s'_g$  inducido por  $s' \subset s$  sobre  $\sigma(s')$ .
- (iii) La unión de todos los  $\sigma(s)$  es  $S$  (o  $\bar{S}$ ).
- (iv) Todo punto de  $S$  (o  $\bar{S}$ ) tiene un entorno que interseca solo un número finito de  $\sigma(s)$ .

Puesto que  $K$  es un complejo abstracto 2-dimensional, los símlices solo pueden tener dimensión 0, 1 y 2, luego sus realizaciones geométricas son puntos, segmentos y triángulos, por lo tanto,  $\sigma(s)$  es homeomorfo a alguno de estos tres.

**Teorema 1.2.1.** *Dada una triangulación de  $S$  mediante un complejo abstracto  $K$  existe un homeomorfismo de  $K_g$  sobre  $S$  que lleva cada  $s_g$  sobre  $\sigma(s)$ .*

*Demostración.* Por cualquier vértice  $\alpha$  definimos  $\varphi(\alpha_g) = \sigma(\alpha)$ . Si  $t$  es un 1-símlice, definimos  $\varphi$  sobre  $t_g$  como uno de los homeomorfismos cuya existencia asegura (ii) de la definición anterior. Finalmente, teniendo  $\varphi$  definida sobre el borde de cada 2-símlice geométrico  $s_g$ , podemos extenderlo al homeomorfismo del símlice entero. Esto se hace componiendo el homeomorfismo dado por (ii) de la definición anterior con otro homeomorfismo de  $s_g$  sobre sí mismo.

Aplicación  $\varphi$  resultante es continua, y como consecuencia de (i) es biyectiva. Por (iii) se deduce que su imagen es todo  $S$ . Finalmente por (iv) se deduce que la aplicación inversa también es continua. Por lo tanto,  $\varphi$  es un homeomorfismo.  $\square$

El siguiente paso es determinar bajo que condiciones un complejo geométrico  $K_g$  es una superficie triangulable, la triangulación definida con complejo abstracto  $K$  y  $\sigma(s) = s_g$ . Usemos las letras  $\alpha$ ,  $a$  y  $A$  para denotar los 0-, 1- y 2-símlices respectivamente. Escribimos  $a = (\alpha_1, \alpha_2)$  si queremos referirnos a un 1-símlice concreto, y  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  en caso de un 2-símlice.

**Teorema 1.2.2.** ([2] Pag. 46, 22E) *Un complejo geométrico 2-dimensional  $K_g$  es una superficie triangulable con  $\sigma(s) = s_g$  si y solo si  $K$  cumple con las siguientes condiciones:*

- (i) Todo  $a$  está contenido en exactamente dos  $A$ .
- (ii) Los símlices geométricos  $a$  y  $A$  que contienen un  $\alpha$  dado, pueden referirse de manera cíclica como  $a_1, \dots, a_m$  y  $A_1, \dots, A_m$  de tal manera que  $a_i = A_i \cap A_{i-1}$  ( $a_1 = A_1 \cap A_m$ ).
- (iii)  $K$  es conexo. en sentido que no puede ser representado por dos complejos disjuntos.

**Teorema 1.2.3.** ([2] Pag. 107, 46) (Teorema de Radó - 1925) Toda superficie compacta es triangulable.

Para acabar con la sección introducimos el concepto de *refinamiento* de una triangulación, que nos será de utilidad en el capítulo 2.

Sea una triangulación de una superficie dada a través de un complejo abstracto  $K$ . La *subdivisión elemental* de la triangulación se define de siguiente modo: se toma un 1-símlice  $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ , supongamos que pertenece a los 2-símlices  $A_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  y  $A_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$ . Agregamos a  $K$  un nuevo 0-símlice  $\alpha$ , reemplazamos 1-símlice  $a$  por los 1-símlices  $(\alpha, \alpha_1)$  y  $(\alpha, \alpha_2)$ , y añadimos 1-símlices  $(\alpha, \alpha_3)$  y  $(\alpha, \alpha_4)$  al complejo abstracto  $K$ . Notamos que ahora en vez de dos 2-símlices  $A_1$  y  $A_2$  tenemos un total de cuatro 2-símlices formados por 1-símlices construidos añadiendo  $\alpha$ .

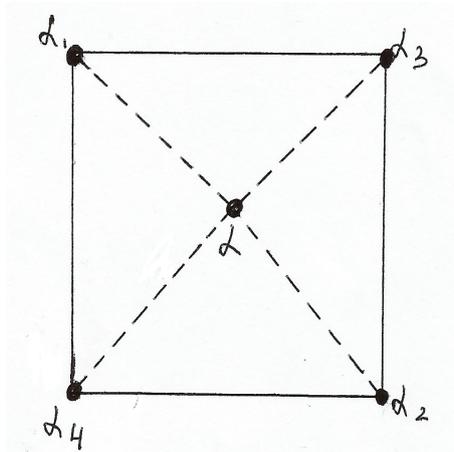


Figura 1.1: Subdivisión elemental

La *subdivisión simple* de una triangulación es el proceso de aplicar la subdivisión elemental de manera simultánea a una cantidad finita o infinita de 1-símlices, siempre que ningún par de éstos pertenezca a un mismo 2-símlice. El *refinamiento* de una triangulación es el proceso de aplicar la subdivisión simple un número finito de veces.

Por último, un *refinamiento baricéntrico* es un tipo especial de refinamiento donde en cada subdivisión elemental se toma un 2-símplice  $A$  de  $K$  y se le añade tres 0-símplices correspondientes a los puntos medios de cada 1-símplice de  $A$  y otro 0-símplice,  $\alpha$ , correspondiente al baricentro de  $A$ , para un total de cuatro nuevos 0-símplices. Unimos  $\alpha$  con todos los demás 0-símplices consiguiendo un total de nueve 1-símplices (tres de  $A$  inicial y seis nuevos), junto con un total de seis nuevos 2-símplices que reemplazan a  $A$  en la triangulación refinada  $K$ .

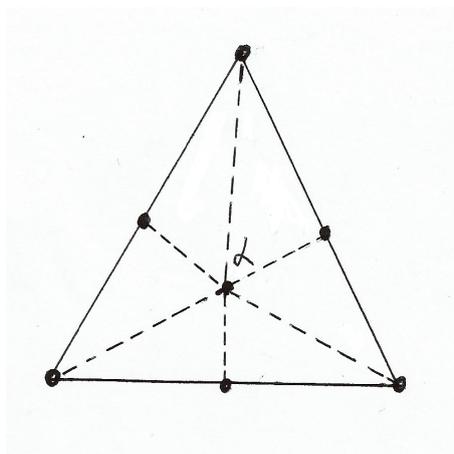


Figura 1.2: Refinamiento baricéntrico

Volveremos a éste concepto en la sección 2.3.

### 1.3. Clasificación de superficies compactas

La parte central de este apartado es presentar un teorema de clasificación, que dice que toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, una suma conexa de uno o más toros, o suma conexa de uno o más planos proyectivos. Como consecuencia del teorema de triangulación, cada superficie compacta tiene una presentación poligonal. A partir de aquí, veremos que dada una presentación poligonal, ésta se puede reducir a una presentación estándar de alguna de las superficies de arriba. Para construir ejemplos de superficies compactas introducimos la noción de *suma conexa*.

Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies compactas y  $D_i \subset S_i$  discos abiertos de cada superficie. Los subespacios  $S'_i = S_i - D_i$  son superficies con borde cuyos bordes son homeomorfos a una circunferencia  $\mathbb{S}^1$ . Ahora, si  $f : fr(S'_1) \rightarrow fr(S'_2)$  es un homeomorfismo cualquiera, sobre la unión disjunta  $S'_1 \cup S'_2$  se identifica

$p \in fr(S'_1)$  con su imagen  $f(p) \in fr(S'_2)$ . El espacio cociente resultante es una *suma conexa* de  $S_1$  y  $S_2$ , es denotada por  $S_1 \# S_2$  y es una superficie. En caso de las superficies, para cualquier elección de  $D_i \in S_i$  o homeomorfismo  $f$  entre bordes, los espacios resultantes siempre son homeomorfos.

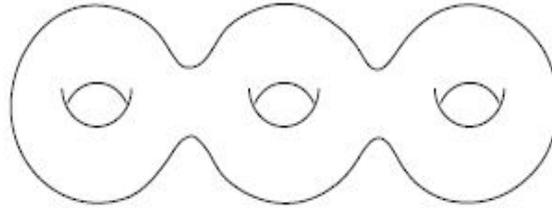


Figura 1.3: La suma conexa de tres toros

A continuación daremos una representación de la esfera  $S^2$ , el toro  $T^2$  y el plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  como espacios cocientes de un cuadrado con aristas identificadas a pares. Estas son las superficies fundamentales porque toda superficie compacta puede construirse haciendo sumas conexas entre estas tres (ver [5]).

- (i) La esfera  $S^2$  es homeomorfa al cociente de  $[0, 1]^2$  por la relación de equivalencia  $(0, t) \sim (t, 0)$  y  $(1, t) \sim (t, 1)$ , si  $0 \leq t \leq 1$ .
- (ii) El toro  $T^2$  es homeomorfo al cociente de  $[0, 1]^2$  por la relación de equivalencia  $(0, t) \sim (1, t)$  y  $(t, 0) \sim (t, 1)$ , si  $0 \leq t \leq 1$ .
- (iii) El plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  es homeomorfo al cociente de  $[0, 1]^2$  por la relación de equivalencia  $(0, t) \sim (1, 1 - t)$  y  $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ , si  $0 \leq t \leq 1$ .

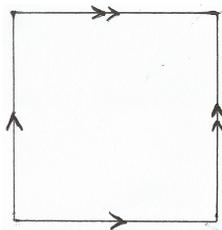


Figura 1.4: La esfera

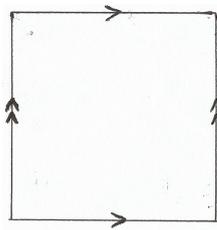


Figura 1.5: El toro

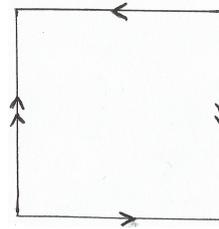


Figura 1.6: El plano proyectivo

El paso siguiente es dar un método general para construir una superficie identificando las aristas de una figura geométrica. Definimos un *polígono*

como una realización geométrica de un complejo abstracto 1-dimensional en  $\mathbb{R}^2$  que es homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , y es la unión de una cantidad finita de 1-símplices que solo intersecan en sus puntos finales. Los 0-símplices y 1-símplices de un polígono son llamados *vértices* y *aristas* respectivamente. Una *región poligonal* es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$ , cuyo interior es homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^2$  y cuyo borde es un polígono.

El siguiente resultado es clave en todo lo que sigue. Su demostración la podemos encontrar en [5](Prop. 6.4).

**Proposición 1.3.1.** *Sea  $P$  una región poligonal en  $\mathbb{R}^2$  con un número par de aristas y sea  $\sim$  una relación de equivalencia que identifica cada arista con exactamente otra, por medio de un homeomorfismo lineal que envía los puntos finales de una arista en los puntos finales de la otra. El cociente resultante es una superficie compacta.*

Por ejemplo, si tomamos  $[0, 1]^2$  y la relación de equivalencia que identifica  $(0, t) \sim (1, t)$  y  $(t, 0) \sim (1 - t, 1)$ , si  $0 \leq t \leq 1$ . Por la proposición anterior, el espacio cociente resultante es una superficie compacta llamada botella de Klein ( $\mathbb{K}^2$ ).

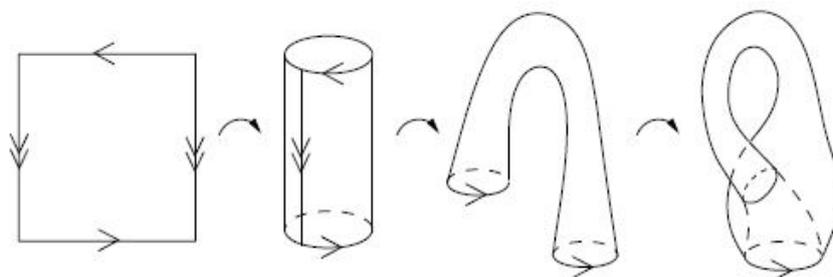


Figura 1.7: La botella de Klein

Representaremos todas las superficies como cocientes de regiones poligonales con  $2n$  lados. De manera informal, podemos describir relaciones de equivalencia entre aristas nombrando aristas con letras del conjunto  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , junto con una flecha que indica de que manera están identificadas las aristas con el mismo nombre. A una región poligonal se le asocia una sucesión de símbolos, obtenidos al leer las etiquetas de sus bordes en el sentido de las agujas del reloj. Por ejemplo, a una arista  $a \in S$  con flecha en sentido horario, se le asocia el símbolo  $a$ ; si flecha esta en sentido antihorario, se le asocia el símbolo  $a^{-1}$ . De esta manera, la relación de equivalencia de  $[0, 1]^2$  que da lugar al toro, resulta en una sucesión de símbolos  $aba^{-1}b^{-1}$ .

Formalmente, dado un conjunto  $S$ , definimos una *palabra* como una tupla de símbolos, cada uno de la forma  $a$  o  $a^{-1}$  para algún  $a \in S$ . Una *presentación poligonal*, escrita como  $\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_k \rangle$ , es un conjunto finito  $S$  junto con una cantidad finita de palabras  $W_1, \dots, W_k$  en  $S$  de longitud 3 o más. Un caso especial ocurre cuando  $S$  solo tiene un elemento, y como no existe un polígono de dos aristas, se considera un disco cerrado cuyas "aristas" son los semicírculos (izquierdo y derecho), y la única palabra tiene longitud 2.

Si una presentación poligonal tiene solamente una palabra,  $\mathcal{P} = \langle S \mid W \rangle$ , entonces se trata de una superficie, porque es un espacio cociente resultante de una única región poligonal. Las únicas decisiones arbitrarias son la forma, el tamaño y la ubicación de región poligonal, y el primer símbolo de la palabra  $W$  a partir de cual se quiere construir una superficie. Es fácil demostrar que diferentes elecciones en este sentido dan lugar a superficies homeomorfas.

**Ejemplo 1.3.1.** Estas son las presentaciones poligonales para algunas de las superficies:

- (i) la esfera  $\mathbb{S}^2$ :  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^2) = \langle a \mid aa^{-1} \rangle$  ó  $\mathcal{P}(\mathbb{S}^2) = \langle ab \mid aa^{-1}bb^{-1} \rangle$ .
- (ii) el toro  $\mathbb{T}^2$ :  $\mathcal{P}(\mathbb{T}^2) = \langle ab \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ .
- (iii) el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ :  $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2) = \langle a \mid aa \rangle$  ó  $\mathcal{P}(\mathbb{RP}^2) = \langle ab \mid abab \rangle$ .
- (iv) la botella de Klein  $\mathbb{K}^2$ :  $\mathcal{P}(\mathbb{K}^2) = \langle ab \mid aba^{-1}b \rangle$ .

La siguiente proposición nos da un método para dar una presentación de una superficie formada por una suma conexas.

**Proposición 1.3.2.** ([5] Prop 6.12). Sea  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies dadas por presentaciones

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 \rangle \text{ y } \langle b_1, \dots, b_m \mid W_2 \rangle$$

respectivamente. Entonces, la suma conexas  $S_1 \sharp S_2$  tiene como presentación

$$\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \mid W_1 W_2 \rangle$$

donde  $W_1 W_2$  indica la palabra formada al concatenar  $W_1$  y  $W_2$ .

**Ejemplo 1.3.2.** Se tienen las siguientes presentaciones:

- (i) Suma conexas de  $n$  toros:  $\langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle$
- (ii) Suma conexas de  $n$  planos proyectivos:  $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle$

Se dice que dos presentaciones son equivalentes si determinan superficies homeomorfas. En la siguiente proposición vamos a describir las *transformaciones elementales* que se pueden hacer en una presentación sin que ésta represente una superficie diferente.

**Proposición 1.3.3.** ([5] Prop. 6.10). *Siguientes son las transformaciones elementales para una presentación de una superficie:*

- **RENOMBRAMIENTO.** *Cambiar el nombre de un símbolo  $a \in S$  por algún otro  $b \notin S$ , intercambiar todas las ocurrencias de dos símbolos  $a_i, a_j \in S$ , o intercambiar todas las ocurrencias de  $a_i$  y  $a_i^{-1}$  para algún  $a_i \in S$ .*
- **SUBDIVISIÓN.** *Sustituyendo todas las ocurrencias de  $a$  por  $ae$  y ocurrencias de  $a^{-1}$  por  $e^{-1}a^{-1}$ , donde  $e \notin S$ .*
- **CONSOLIDACIÓN.** *Si los símbolos  $a, b \in S$  siempre ocurren de manera adyacente de forma  $ab$  o  $b^{-1}a^{-1}$ , se sustituye  $ab$  por  $a$  y  $b^{-1}a^{-1}$  por  $a^{-1}$ .*
- **REFLEJO.**  $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 \dots a_n, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid a_n^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_k \rangle$
- **ROTACIÓN.**  $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1 a_2 \dots a_n, W_2, \dots, W_k \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid a_2 \dots a_n a_1, W_2, \dots, W_k \rangle$
- **CORTE.**  $\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2 \rangle$
- **PEGADO.**  $\langle a_1, \dots, a_n, c \mid W_1 c, c^{-1} W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle$
- **DOBLADO.**  $\langle a_1, \dots, a_n, a \mid W_1 a a^{-1} W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle$
- **DESDOBLADO.**  $\langle a_1, \dots, a_n \mid W_1 W_2 \rangle \mapsto \langle a_1, \dots, a_n, a \mid W_1 a a^{-1} W_2 \rangle$

Utilizando transformaciones elementales es fácil comprobar el siguiente resultado.

**Lema 1.3.4.** ([5] Lemas 6.16, 6.17) *Se verifican las propiedades:*

- $\mathbb{K}^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2$ .
- $T^2 \sharp \mathbb{R}P^2$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2 \sharp \mathbb{R}P^2$ .

Finalmente, combinados todos los resultados anteriores, se deduce el siguiente teorema, cuya demostración está en [5] (Teorema 6.15).

**Teorema 1.3.5.** (Clasificación de superficies compactas). *Cualquiera superficie compacta es homeomorfa a una de las siguientes:*

- (i) una esfera  $S^2$ ,
- (ii) una suma conexa de  $n$  toros  $T^2 \sharp \dots \sharp^{(n)} T^2$ ,
- (iii) una suma conexa de  $n$  planos proyectivos  $\mathbb{R}P^2 \sharp \dots \sharp^{(n)} \mathbb{R}P^2$ .

Todavía no está asegurado que todas las superficies del teorema anterior no sean homeomorfas entre ellas. ¿Es posible que suma conexa de  $n$  toros sea homeomorfa a una suma conexa de  $n$  planos proyectivos, o homeomorfa a una suma conexa de  $m$  toros con  $m \neq n$ ? Para poder responder a esta pregunta, necesitamos introducir dos conceptos nuevos: la *característica de Euler* y la *orientabilidad*.

**Definición 1.3.1.** Sea  $S$  una superficie y su triangulación definida mediante complejo  $K$  2-dimensional. La *característica de Euler* se define de la siguiente manera:

$$\chi(S) = \sum_{k=0}^2 (-1)^k n_k$$

donde  $n_k$  es el número de  $k$ -símplices en  $K$ .

La característica de Euler es un invariante topológico. Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies con  $\chi(S_1) \neq \chi(S_2)$  entonces son topológicamente distintas.

**Proposición 1.3.6.** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies compactas, la *característica de Euler* de la suma conexa se calcula de siguiente manera:

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

**Proposición 1.3.7.** (La *característica de Euler* para superficies compactas).  $\chi(S)$  es:

- (i) 2 si  $S$  es una esfera,
- (ii)  $2 - 2n$  si  $S$  es una suma conexa de  $n$  toros,
- (iii)  $2 - n$  si  $S$  es una suma conexa de  $n$  planos proyectivos.

Para demostrar la primera proposición, eliminamos un 2-símplice de cada una de las triangulaciones de  $S_1$  y  $S_2$ , e identificamos los bordes resultantes para obtener una nueva triangulación de la suma conexa  $S_1 \# S_2$ . Luego, aplicamos la fórmula de la Definición 1.3.1 para conseguir el resultado. La segunda proposición se demuestra utilizando el Teorema 1.3.5 y operando.

La característica de Euler puede usarse para distinguir las sumas conexas de  $n$  toros, cada uno tiene su único valor, y por ello son superficies topológicamente distintas. El mismo razonamiento se aplica para las sumas conexas de  $n$  planos proyectivos. Sin embargo, la suma conexa de  $n$  toros y la suma conexa de  $2n$  planos proyectivos tienen la misma característica de Euler. Aquí es donde la *orientabilidad* juega un papel fundamental.

**Definición 1.3.2.** Se dice que una superficie  $S$  es *orientable* si no contiene ningún subespacio homeomorfo a una banda de Möbius,  $M$ .

**Observación 1.3.1.** También es posible definir una presentación poligonal para una superficie con borde compacta si dejamos la posibilidad de no identificar algunas pares de aristas. De esta manera podemos definir una presentación poligonal para una banda de Möbius,  $\mathcal{P}(\mathbb{M}) = \langle a, b, c \mid abcb \rangle$ . Observamos que las aristas  $a$  y  $c$  están sin identificar con ninguna otra.

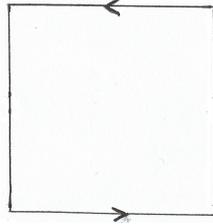


Figura 1.8: La banda de Möbius

Un plano proyectivo real  $\mathbb{RP}^2$  es homeomorfo al espacio de adjunción de de una banda de Möbius y un disco cerrado por la aplicación que identifica sus bordes, de allí la falta de orientabilidad de  $\mathbb{RP}^2$ . Esta afirmación es trivial si tenemos en cuenta las realizaciones geométricas de las presentaciones poligonales de  $\mathbb{RP}^2$  y  $\mathbb{M}$ .

Si  $S_1$  y  $S_2$  tienen distinta orientabilidad, entonces son superficies topológicamente distintas. Por lo tanto, la orientabilidad es invariante topológico (ver [5] Corolario 10.24).

**Proposición 1.3.8.** ([5] Prop. 6.20). *Una superficie es orientable si y solo si es homeomorfa a una esfera o a una suma conexa de  $n$  toros.*

Ahora podemos formular el teorema que asegura que todas las superficies de Teorema 1.3.5 son distintas.

**Teorema 1.3.9.** *Dos superficies compactas  $S_1$  y  $S_2$  son homeomorfas si y solo si sus características de Euler coinciden y las dos superficies tienen la misma orientabilidad.*

Para acabar con esta sección vamos a dar el teorema análogo, pero esta vez usando el concepto de *género* de una superficie compacta definido a partir de la característica de Euler.

**Definición 1.3.3.** Sea  $S$  una superficie compacta, entonces el *género*  $S$  se calcula de la siguiente manera:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2 - \chi(S)), & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - \chi(S), & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases}$$

Intuitivamente, si  $S$  es una superficie compacta,  $g(S)$  representa el número máximo de veces que se puede cortar  $S$  a lo largo de curvas cerradas simples no intersectadas sin que la superficie se desconecte. Por ejemplo, cualquier curva cerrada simple corta a una esfera en dos, por ello  $g(\mathbb{S}^2) = 0$ . En cambio, hay curvas cerradas simples que no desconectan un toro, pero solo podemos hacerlo una vez, cualquier otro corte da lugar a un subespacio desconexo del toro, por lo que  $g(\mathbb{T}^2) = 1$ .

**Teorema 1.3.10.** *Dos superficies compactas  $S_1$  y  $S_2$  son homeomorfas si y solo si sus géneros coinciden y las dos superficies tienen la misma orientabilidad.*

## 1.4. Superficies compactas con borde

En esta sección vamos a dar una clasificación en el caso de superficies con borde, definidos en Definición 1.4.3. Este será un resultado muy importante a la hora de clasificar las superficies no compactas del siguiente capítulo.

**Lema 1.4.1.** *Sea  $S$  una superficie compacta con borde que tiene  $k \in \mathbb{N}$  componentes en su borde (cada una de ellas homeomorfa a  $\mathbb{S}^1$ ). Si tomamos  $k$  discos cerrados y identificamos el borde de cada uno con cada componente del borde de  $S$ , la superficie resultante  $S'$  es una superficie compacta.*

Esta propiedad nos permite probar siguiente resultado (ver [6]).

**Teorema 1.4.2.** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  superficies con borde compactas con el mismo número de componentes en sus bordes. Entonces  $S_1$  y  $S_2$  son homeomorfas si y solo si lo son las superficies compactas  $S'_1$  y  $S'_2$  obtenidas según el procedimiento del Lema 1.4.1 .*

Ahora, teniendo en cuenta que podemos definir la característica de Euler exactamente igual como en el caso de las superficies compactas, se tiene el siguiente resultado presentado por H.R. Brahana (1921)[3]:

**Teorema 1.4.3.** *Dos superficies con borde compactas son homeomorfas si y solo si tienen el mismo número de componentes en el borde, son ambas orientables o no orientables, y tienen la misma característica de Euler.*

A continuación vamos a extender el concepto de género al caso de superficies con borde compactas.

**Definición 1.4.1.** El *género reducido* de una superficie con borde compacta  $S$  se define por:

$$g(S) = 1 - \frac{1}{2}(\chi(S) + k)$$

siendo  $k$  el número de curvas en la frontera de  $S$ .

**Definición 1.4.2.** Una superficie con borde se dice *planar* si toda subsuperficie compacta en ella es de género reducido cero.

**Proposición 1.4.4.** *Sea  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies con borde compactas, unidas a lo largo de  $k$  curvas frontera comunes, entonces*

$$g(S_1 \cup S_2) = g(S_1) + g(S_2) + (k - 1).$$

Para finalizar el capítulo citaremos algunos de los resultados que nos serán de gran ayuda a la hora de demostrar el teorema principal del este trabajo, el Teorema de Kerékjartó (ver [1] pag. 265).

**Lema 1.4.5.** *Si  $S$  es una superficie con borde compacta,  $C$  es una curva cerrada simple en la frontera de  $S$  y  $\varphi$  es un homeomorfismo de  $C$  sobre sí misma, entonces  $\varphi$  puede extenderse a un homeomorfismo de  $S$  sobre sí misma, tal que toda curva frontera de  $S$  resulta invariante bajo  $\varphi$ .*

**Lema 1.4.6.** *Sea  $S$  una superficie con borde compacta de género reducido  $g$ , y sea  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_p$  una partición del conjunto de curvas frontera de  $S$ . Entonces, para cualquier  $k \leq \max(g - \frac{1}{2}, 0)$ , existen  $p - 1$  curvas cerradas simples en  $S$  que no se intersecan entre sí, que dividan a  $S$  en  $p$  componentes  $U_1, \dots, U_p$  tal que  $\Gamma_i \subset U_i$  para todo  $i = 1, \dots, p$ ,  $U_i$  es de género reducido  $k$ , y  $U_i$  es de género cero para  $1 < i < p$ . Más aún, si  $S$  es no orientable y  $k$  es un entero, entonces  $U_1$  puede hacerse tanto orientable como no orientable.*

El Lema 1.4.5 es trivial si  $\varphi$  preserva la orientación, y si la invierte se trata de pasar la superficie "de adentro hacia afuera". En cambio, la prueba de Lema 1.4.6 es larga y en ella se utiliza la forma normal de una superficie como un polígono en el plano (agujereado por discos). La desigualdad  $k \leq g - 1/2$  en vez de  $k \leq g$  se necesita solo por si se desea hacer  $U_1$  orientable cuando la superficie  $\Gamma$  no lo sea.



## Capítulo 2

# Clasificación de superficies no compactas

En este capítulo vamos a estudiar otra clase distinta de variedades bidimensionales, que son las superficies no compactas. Un subconjunto abierto de una superficie compacta es una superficie no compacta, y también lo es el complementario de cualquier conjunto compacto totalmente desconexo. Como no podía ser de otra forma, formar sumas conexas también es aplicable aquí, pero a diferencia de superficies compactas, estas sumas pueden ser infinitas contables. Este tipo de construcciones nos da una amplia gama de superficies no compactas.

Parte central de este capítulo es la demostración del teorema de Kerékjartó. Pero antes vamos a necesitar desarrollar algunos elementos de la teoría de finales, que nos permitirán definir un invariante topológico nuevo conocido con el nombre la *frontera ideal*.

### 2.1. Frontera ideal de una superficie

Esta teoría puede desarrollarse para espacios topológicos más generales, pero dada nuestra materia de estudio, consideraremos la *frontera ideal* en una superficie  $S$ .

**Definición 2.1.1.** Decimos que sucesión encajada de las regiones (abiertas y conexas) no acotadas  $(P_n) = P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n \supset \dots$  de la superficie  $S$  determina un *final* o *una componente de frontera* de  $S$ , si:

- (i) Para todo  $n$ , la frontera de  $P_n$  es compacta en  $S$ .
- (ii) Para todo  $A \subset S$  acotado, existe  $n$  suficientemente grande tal que  $P_n \cap A = \emptyset$ .

Decimos que dos finales  $(P_n)$  y  $(Q_n)$  son *equivalentes* si para cada  $n$  existe un entero  $N$  tal que  $P_N \subset Q_n$  y viceversa. Denotaremos por  $p^*$  a la clase de equivalencia que contiene a la componente de frontera  $p = (P_n)$ .

El siguiente lema nos permite entender mejor esa relación de equivalencia.

**Lema 2.1.1.** *Si  $(P_n)$  y  $(Q_n)$  son dos sucesiones encajadas que determinan un final de  $S$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (i) *para todo  $l \in \mathbb{N}$ ,  $P_l \cap Q_l \neq \emptyset$*
- (ii) *para todo  $l \in \mathbb{N}$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $P_k \subset Q_l$ .*

*Demostración.* Para demostrar (i)  $\Rightarrow$  (ii), recordamos que dado un conjunto conexo  $C$  y un conjunto abierto  $G$  tales que  $G \cap U \neq \emptyset$  y  $G \cap U^c \neq \emptyset$ , entonces se cumple  $G \cap \partial U \neq \emptyset$ , donde  $\partial U$  denota la frontera de  $U$ . El resultado también es válido para un  $G$  cerrado. Ahora, dado  $l \in \mathbb{N}$ , como  $\partial Q_l$  es compacto (luego acotado) y usando (i) de la Definición 2.1.1, existe un  $k$  suficientemente grande tal que  $P_k \cap \partial Q_l = \emptyset$ . Usando nuestra hipótesis y el hecho de que podemos tomar  $k > l$ , tenemos que  $P_k \cap Q_l \supset P_k \cap Q_k \neq \emptyset$ . Finalmente se deduce que  $P_k \subset Q_l$ .

Para demostrar (ii)  $\Rightarrow$  (i), dado  $l \in \mathbb{N}$  si  $P_k \subset Q_l$  para  $k$  grande, de nuevo podemos tomar  $k > l$  y se tiene que  $P_l \cap Q_l \supset P_k \cap Q_l = P_k \neq \emptyset$ .  $\square$

**Definición 2.1.2.** La *frontera ideal* de una superficie  $S$  es el espacio topológico de las clases de equivalencia de sucesiones que determinan un final,  $B(S) = \{p^* : p = (P_n)\}$ . Su topología es la siguiente: para cada  $U \subset S$  con frontera compacta, definimos  $U^*$  como el conjunto de todos los finales  $p^*$  con  $p = (P_n)$ , tales que  $P_n \subset U$  para  $n$  suficientemente grande. Tomamos el conjunto de todos  $U^*$  como base para la topología de  $B(S)$ .

La frontera ideal es un concepto que describe una manera en que los conjuntos de  $S$  dividen al mismo en componentes no acotadas. A continuación daremos siguiente resultado.

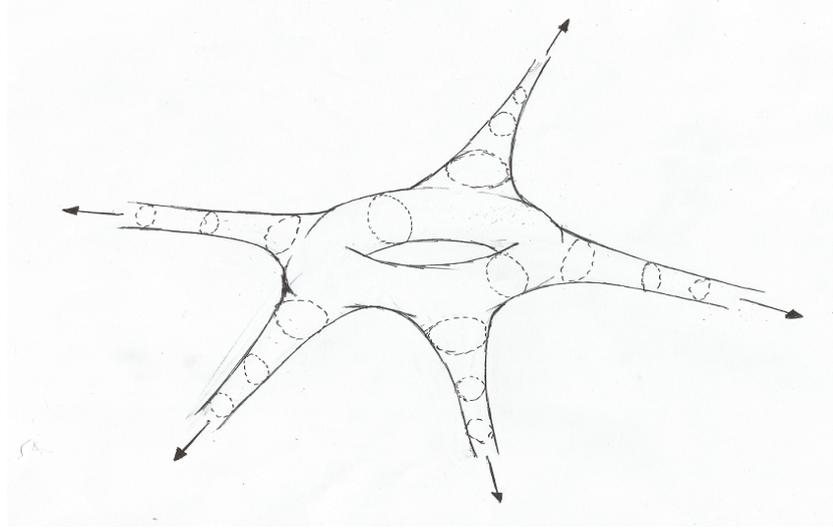


Figura 2.1: Superficie con finales

**Proposición 2.1.2.** Sean subconjuntos  $U, V \subset S$  cuyas fronteras son compactas. Entonces, se tienen siguientes igualdades:

$$(U \cup V)^* = U^* \cup V^*$$

$$(U \cap V)^* = U^* \cap V^*$$

*Demostración.* Los subconjuntos  $U \cup V, U \cap V$  de  $S$  tienen fronteras compactas en  $S$ , por lo que tiene sentido asociarles un abierto de  $B(S)$ . Veamos ahora la inclusión  $(U \cup V)^* \subset U^* \cup V^*$ . Sea  $p^* \in (U \cup V)^*$ , por definición, existe  $n$  suficientemente grande tal que  $P_n \subset U \cup V$ . Diferenciamos siguientes casos:

- Si  $P_n \cap V = \emptyset$  entonces  $P_n \subset U$ , y por lo tanto  $p^* \in U^*$ .
- Si  $P_n \cap V \neq \emptyset$  tomamos  $n$  suficientemente grande de modo que también valga  $P_n \cap \partial V = \emptyset$ . Pueden ocurrir dos cosas:
  - Si  $V$  es un abierto, como  $P_n$  es un conexo que corta a  $V$  y no corta  $\partial V$ , si tiene que  $P_n \cap V^c = \emptyset$ . Esto es,  $P_n \subset V$ , lo que implica  $p^* \in V^*$ .
  - Para un  $V$  general escribimos  $V \subset V^\circ \cup \partial V$ , donde  $V^\circ$  denota el interior del conjunto. Tenemos  $P_n \cap V \neq \emptyset$  y  $P_n \cap \partial V = \emptyset$ , por lo tanto se cumple que  $P_n \cap V^\circ \neq \emptyset$ . Además por la relación  $\partial(V^\circ) \subset \partial V$ ,  $P_n$  tampoco corta la frontera de  $V^\circ$ , luego,  $P_n$  no corta el complementario de  $V^\circ$ . Se tiene siguiente inclusión  $P_n \subset V^\circ \subset V$ , y esto implica que  $p^* \in V$ .

Las demás inclusiones son inmediatas. □

**Definición 2.1.3.** Sea  $p^*$ , representado por  $p = (P_n)$ , un elemento de  $B(S)$ . Decimos que  $p^*$  es *planar* y/o *orientable* si los conjuntos  $P_n$  son planares y/o orientables para todo  $n$  suficientemente grande. Estas definiciones no dependen del representante elegido.

Teniendo en cuenta las dos definiciones anteriores, podemos considerar la frontera ideal como una terna encajada de conjuntos  $B(S) \supset B'(S) \supset B''(S)$ , donde  $B'(S)$  representa el subconjunto de finales no planares y  $B''(S)$  subconjunto de finales no orientables. Dado que la planaridad implica orientabilidad, esta claro que la segunda inclusión se cumple. Cada uno de estos subconjuntos es un cerrado en  $B(S)$ .

**Ejemplo 2.1.1.** Si para cada subconjunto compacto  $A \subset S$ ,  $S - A$  tiene a lo sumo  $m$  componentes conexas no acotadas y el número  $m$  se realiza para algún compacto  $A$ , entonces  $B(S)$  es un conjunto de  $m$  elementos con topología discreta. Además,  $m = 0$  si y solo si la superficie es compacta.

## 2.2. Género infinito y clases de orientabilidad

En el capítulo anterior habíamos definido el género y la orientabilidad para una superficie compacta. En esta sección vamos extender ambos conceptos para la clase de superficies no compactas.

**Definición 2.2.1.** Se dice que una superficie no compacta es de *género infinito* y/o *infinitamente no orientable* si no existe un subconjunto acotado  $A \subset S$  de manera que  $S - A$  es de género cero y/o orientable.

Una superficie es de *género finito* si no es de género infinito, en este caso el género de  $S$  se define como el género del subconjunto acotado  $A$ . Claramente, una superficie infinitamente no orientable también es de género infinito.

Si tomamos una superficie compacta orientable, le quitamos un disco abierto consiguiendo así una superficie con borde, e identificamos el borde con el borde de una banda de Möbius, entonces se dice que la superficie resultante tiene un *bonete cruzado*. Si tenemos una superficie no compacta  $S$  y toda subsuperficie compacta suficientemente grande contiene un número par/impar de bonetes cruzados, decimos que  $S$  tiene no-orientabilidad par/impar. Teniendo esto en cuenta, se definen cuatro *clases de orientabilidad* para una superficie no compacta:

- (i) superficies orientables
- (ii) superficies infinitamente no orientables
- (iii) superficies finitamente no orientables de no-orientabilidad par

(iv) superficies finitamente no orientables de no-orientabilidad impar

La clase de orientación es un invariante topológico.

Para acabar con la sección, vamos a dar tres propiedades importantes de la frontera ideal, el primero de los cuales es casi trivial, que nos serán de mucha utilidad en la demostración del teorema de Kerékjartó.

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $S_1$  una subsuperficie contenida en  $S$ , entonces el entorno  $S_1^*$  en  $B(S)$  contiene finales no planares y/o no orientables si y sólo si  $S_1$  es de género infinito y/o infinitamente no orientable. Del mismo modo,  $S_1^*$  es vacío si y sólo si  $S_1$  es acotado.*

**Proposición 2.2.2.** *([2] 36,37). La frontera ideal de una superficie separable es totalmente desconexa, separable y compacta.*

Por último damos un resultado más para entender mejor las superficies de género infinito.

**Proposición 2.2.3.** *Una superficie con borde de género infinito contiene subsuperficies compactas de género reducido arbitrariamente grande.*

La demostración de esta proposición se hace usando la relación entre el género y la característica de Euler de las superficies compactas (Definición 1.4.1).

## 2.3. Teorema de Kerékjartó

En este punto podemos dar el resultado más importante de las superficies no compactas. Vamos a considerar solo aquellas superficies cuyas triangulaciones puedan ser realizadas como subcomplejos geométricos de complejos formados por refinamiento baricéntrico (Figura 1.2).

**Teorema 2.3.1.** *(de Kerékjartó). Sean  $S$  y  $S'$  dos superficies separables del mismo género y clase de orientabilidad. Entonces,  $S$  y  $S'$  son homeomorfas si y solo si sus fronteras ideales, considerados como terna de espacios  $B(S) \supset B'(S) \supset B''(S)$ , son topológicamente equivalentes.*

*Demostración.* Por definición, la frontera ideal es un invariante topológico, por lo tanto el "solo si" es trivial. Para probar el "sí", asumiremos que ambas  $S$  y  $S'$  son infinitamente no orientables (por lo tanto de género infinito), hacemos esta elección porque éste es el caso mas difícil y es fácil modificar la prueba para el caso general. La prueba se basa, por un lado, en la descomposición de  $S$  y  $S'$  en subsuperficies compactas cuyas fronteras son curvas cerradas simples, y, por otro lado, en el Teorema 1.4.3 que clasifica las superficies compactas con borde según su orientabilidad, su género y el

número de componentes de borde. De esta manera, una superficie compacta de género grande contiene una subsuperficie equivalente a cualquier superficie con borde, de género menor y la misma orientabilidad.

Sea  $h$  el homeomorfismo entre las fronteras ideales  $B(S)$  y  $B(S')$ . Para construir el homeomorfismo  $f$  entre  $S$  y  $S'$ , representaremos cada superficie como unión de una cadena encajada de subsuperficies compactas  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  y  $A'_1 \subset A'_2 \subset \dots$ . Para cada  $n$  construiremos un homeomorfismo  $f_n$  de  $A_n$  sobre  $A'_n$  tal que  $f_n|_{A_{n-1}} = f_{n-1}$ ; la extensión natural de éstos nos dará el homeomorfismo  $f$  entre  $S$  y  $S'$ . Además imponemos las siguientes condiciones:

- (i) Para cada  $n$ , existe exactamente una curva cerrada simple  $d(U)$  en la frontera de cada componente  $U$  de  $S - A_n$ , similarmente para las componentes  $U'$  de  $S' - A'_n$ .
- (ii) Si  $f_n(d(U)) = d(U')$  entonces  $h(U^*) = (U')^*$  (recordamos la Definición 2.1.2, donde  $U^*$  es un abierto de  $B(S)$  asociado a  $U$ ).

Tomemos ahora un par de sucesiones encajadas  $B_1 \subset B_2 \subset \dots$  y  $B'_1 \subset B'_2 \subset \dots$  de subsuperficies acotadas, tales que sus uniones dan  $S$  y  $S'$  respectivamente y satisfacen (i) (reemplazando  $A_n$  por  $B_n$ ), y satisfacen la siguiente condición:

- (iii) Cada componente de  $S - B_n$  o  $S' - B'_n$  es no acotada, sea de género cero o género infinito, y sea orientable o no orientable.

La construcción de las ternas  $(f_n, A_n, A'_n)$  se hace por inducción, comenzado por tomar  $A_0 = A'_0 = \emptyset$ . Queremos que  $f_n, A_n$  y  $A'_n$  cumplan las condiciones (i), (ii) y (iii). Además usamos el proceso que alterna del siguiente modo: cuando  $n$  es par, hacemos  $A_n$  suficientemente grande tal que  $B_n \subset A_n$ , y se construye  $A'_n$  para que se ajuste a las necesidades. Cuando  $n$  es impar, intercambiamos los roles de  $S$  y  $S'$ , de esta manera  $S$  y  $S'$  estarán cubiertos por las uniones de las subsuperficies  $A_n$  y  $A'_n$  respectivamente.

Dada una terna  $(f_n, A_n, A'_n)$  con  $n$  par, queremos construir  $(f_{n+1}, A_{n+1}, A'_{n+1})$  tal que  $B'_{n+1} \subset A'_{n+1}$  y las condiciones (i), (ii), (iii) sean satisfechas.

Primero, construimos la subsuperficie  $A'_{n+1}$ . Para algún  $M \in \mathbb{N}$ ,  $A'_n$  está contenida en el interior de  $B'_M$ , hacemos  $m = \max(n+1, M)$  y definimos  $A'_{n+1} = B'_m$  (de esta manera aseguramos  $B'_{n+1} \subset A'_{n+1}$ ).

Para construir  $A_{n+1}$  utilizamos lo siguiente:

- (iv) Para  $m$  suficientemente grande, la clausura de cada componente de  $B'_m - A_n$  es de género reducido estrictamente mayor que el género de la correspondiente componente de  $A'_{n+1} - A'_n$  a menos que esta

última componente sea de género cero. Además, cada componente de  $B_m - A_n$  es no orientable siempre que la correspondiente componente de  $A'_{n+1} - A'_n$  lo sea.

Vamos a aclarar la correspondencia entre las componentes de  $B_m - A_n$  y las de  $A'_{n+1} - A'_n$  a través de la siguiente observación.

**Observación 2.3.1.** Recordamos que, por las condiciones (i) y (ii) de arriba, el homeomorfismo  $h$  da una correspondencia entre las curvas frontera de  $S - A_n$  y las de  $S' - A'_n$ . Además, por la condición (i), la frontera de cada componente de  $B_m - A_n$  ( $A'_{n+1} - A'_n$ ) contiene exactamente una curva de frontera de  $S - A_n$  ( $S' - A'_n$ ), asimismo una o más curvas de frontera de  $S - B_m$  ( $S' - A'_{n+1}$ ). Si  $A_n$  esta contenida en el interior de  $B_m$ , cada componente de  $S - A_n$  contiene a una componente no vacía de  $B_m - A_n$ . Similarmente, si  $A'_n$  esta contenida en el interior de  $A'_{n+1}$ , hay una correspondencia entre las componentes de  $S' - A'_{n+1}$  y las de  $A'_{n+1} - A'_n$ . En estos terminos se establece la correspondencia citada en (iv).

**Prueba de (iv).** Sean  $U$  y  $U'$  correspondientes componentes de  $S - A_n$  y  $S' - A'_n$  tales que  $h(U^*) = (U')^*$ . Dado que  $h$  es homeomorfismo,  $h(U^*)$  contiene finales no planares y/o no orientables si y sólo si  $U^*$  lo hace. Tomando  $U$  como subsuperficie y aplicando la Proposición 2.2.1 tenemos que  $U^*$  contiene finales no planares y/o no orientables si y sólo  $U$  es de género infinito y/o es infinitamente no orientable. El mismo razonamiento es aplicable para  $U'$ . Además, por la condición (iii) sabemos que  $U$  y  $U'$  no son acotadas, con lo cual  $U^*$  y  $(U')^*$  no son vacías.

Por la condición (iii)  $U$  puede ser de género cero o infinito, supongamos que es de género infinito. Entonces por la Proposición 2.2.3,  $U$  contiene subsuperficies compactas de género arbitrariamente grande. Sea  $M$  el género que se quiere superar, entonces existe  $K \subset U \subset S - A_n$ ,  $K$  subsuperficie compacta de  $U$  con género  $g(K) > M$ . Tomemos  $B_m$  tal que  $B_m \supset A_n \cup K$ . De este modo, si  $W$  es la componente conexa de  $B_m - A_n$  que se asocia con  $U$  (comparte una curva frontera) y satisface  $W \supset K$ . Queremos ver que el género de  $\overline{W}$  es mayor que  $M$ . Para ello escribimos  $\overline{W} = \overline{K} \cup \overline{W - K}$  y aplicando la formula del género de una suma conexa de subsuperficies (Proposición 1.4.4) se tiene:

$$g(\overline{W}) = g(K) + g(\overline{W - K}) + (k - 1)$$

donde  $k$  es el número de curvas frontera de  $K$ , y por lo tanto  $g(\overline{W - K}) + (k - 1) \geq 0$ . Obtenemos entonces  $g(\overline{W}) > M$ .

Para probar que cada componente de  $B_m - A_n$  es no orientable cuando la correspondiente componente de  $A'_{n+1} - A'_n$  lo es, consideramos  $W'$  una componente conexa no orientable de  $A'_{n+1} - A'_n$ , con lo cual la componente conexa  $U'$  de  $S' - A'_n$  que contiene a  $W'$  es también no orientable, es más, por la condición (iii),  $U'$  debe ser infinitamente no orientable. Ahora, por la

Proposición 2.2.1,  $(U')^*$  debe contener finales no orientables, lo cual implica que  $U^*$  contiene finales no orientables, siendo  $U$  la componente conexa de  $S - A_n$  correspondiente con  $U'$ , por lo tanto  $U$  es infinitamente no orientable. Esto quiere decir que no existe un subconjunto compacto  $A \subset U$  tal que  $U - A$  sea orientable, siendo así, la componente conexa  $W$  de  $B_m - A_n$  correspondiente a  $W'$ , que verifica  $W \subset U$  no puede ser orientable. Con esto se finaliza la prueba de (iv).

Para cada  $m$ , sean  $V_1^m, \dots, V_p^m$  las componentes conexas de  $S - B_m$  y  $U'_1, \dots, U'_q$  las componentes de  $S' - A'_{n+1}$ . Además notaremos  $\beta_k^m = [V_k^m]^*$  y  $\alpha'_j = [U'_j]^*$  los entornos en  $B(S)$  y  $B(S')$  asociados a tales componentes conexas. Necesitamos también la siguiente propiedad:

- (v) Para  $m$  suficientemente grande, cada entorno  $\beta_i^m$  en  $B(S)$  está contenido en la imagen inversa mediante  $h$  de uno de los entornos  $\alpha'_j$  en  $B(S')$ .

**Prueba de (v).** Veamos en primer lugar que los conjuntos  $\beta_k^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$  y  $k = 1, \dots, p_m$  (el rango de  $k$  es distinto según el valor de  $m$ ) forman una base de la topología de  $B(S)$ . Dados  $p^* \in B(S)$  y  $m \in \mathbb{N}$ ,  $B_m$  es acotado, por lo tanto  $P_n \subset S - B_m$  para  $n$  suficientemente grande, donde  $p = (P_n)$  es un representante de  $p^*$ ; y dado que  $P_n$  es conexo, debe estar contenido en alguna componente conexa de  $S - B_m$ , esto es, existe un  $i$  tal que  $P_n \subset V_i^m$  con lo cual  $p^* \in \beta_i^m$ . Esto demuestra que los abiertos  $\beta_k^m$  cubren  $B(S)$  (en realidad demostramos que para todo  $p^* \in \beta_i^m$  y para todo  $m \in \mathbb{N}$  existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $p^* \in \beta_i^m$ , que es un resultado algo más fuerte).

Sea  $W \subset S$ ,  $W$  no acotado (si  $W$  es acotado, entonces  $W^* = \emptyset$  y lo que sigue es trivial) tal que  $\partial W$  es compacto. Dado que  $\overline{W} = W^\circ \cup \partial W$  es compacto, de aquí sigue que  $W^\circ$  es acotado, y además  $\partial(W^\circ)$  es compacto, pues  $\partial W$  lo es y  $\partial(W^\circ) \subset \partial W$ . Sea  $m$  tal que  $B_m \supset \partial(W^\circ)$  con lo cual  $S - B_m \subset S - \partial(W^\circ)$ . Tomemos un  $q^* \in W^*$  con un representante  $q = (Q_n)$ , entonces  $Q_n \subset W^\circ$  para  $n$  grande, y como hemos visto que los conjuntos  $\beta_k^m$ ,  $k = 1, 2, \dots$  cubren  $B(S)$ , existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $q^* \in \beta_i^m$  por lo tanto  $Q_n \subset V_i^m$ . Veamos que  $\beta_i^m \subset [W^\circ]^*$ . Tenemos  $V_i^m \subset S - B_m \subset S - \partial(W^\circ)$  por lo tanto  $V_i^m \cap \partial(W^\circ) = \emptyset$  y dado que  $V_i^m$  es un conexo, entonces, o bien  $V_i^m$  no corta a  $W^\circ$  o bien  $V_i^m$  no corta al complementario de  $W^\circ$ . El caso  $V_i^m \cap W^\circ = \emptyset$  es imposible puesto que  $Q_n \subset V_i^m \cap W^\circ$  para  $n$  suficientemente grande, con lo cual debe ser  $V_i^m \cap (W^\circ)^c = \emptyset$ , esto es,  $V_i^m \subset W^\circ$ . Con todo esto,  $\beta_i^m = [V_i^m]^* \subset [W^\circ]^* \subset W^*$  y hemos demostrado que el conjunto de los  $\beta_i^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, p_m$  es una base de la topología de  $B(S)$ .

Por otra parte, como  $A'_{n+1}$  es acotado,  $[A'_{n+1}]^* = \emptyset$  y (por la Proposición 2.1.2) los conjuntos  $\alpha'_j$  cubren  $B(S')$ . Así, cada elemento de  $B(S)$  está contenido en algún entorno  $\beta_i^m$ , el cual a su vez está contenido en algún entorno  $h^{-1}[\alpha'_j]$ ; esto se verifica del siguiente modo: dado un  $p^* \in B(S)$ ,  $h(p^*) \in \alpha'_j$  para algún  $j$ , estos abiertos cubren  $B'(S)$ , y por la continuidad de  $h$  en  $p^*$

existe  $\beta_i^r$  entorno de  $p^*$  tal que  $h(\beta_i^r) \subset \alpha'_j$ , es decir,  $p^* \in \beta_i^r \subset h^{-1}[\alpha'_j]$ . Por la compacidad de  $B(S)$  (Proposición 2.2.2), una colección finita  $Q$  de los  $\beta_i^r$  cubre  $B(S)$ . Sea  $M$  el máximo de los índices  $r$  de los  $\beta_i^r \in Q$ , entonces (v) vale para  $m \geq M$ . Pues, si  $m \geq M$ , entonces  $B_m \supset B_M$ , luego  $S - B_M \supset S - B_m$ , y entonces, o bien  $V_i^m \subset V_j^M$  o bien  $V_i^m \cap V_j^M = \emptyset$  para  $i = 1, \dots, p_m$  y  $j = 1, \dots, p_M$ . Y en el caso  $V_i^m \subset V_j^M$  se tiene  $\beta_i^m \subset_j^M \subset h^{-1}[\alpha'_{jM}]$ . Con esto se finaliza la prueba de (v).

Supongamos que  $m$  es suficientemente grande como para que las condiciones (iv) y (v) sean satisfechas. Vamos a eliminar algunas partes concretas de cada componente de  $B_m - A_n$  para conseguir el conjunto  $A_{n+1}$  que debe cumplir las siguientes propiedades:

- (vi) Cada componente de  $A_{n+1} - A_n$  es homeomorfa a la componente correspondiente de  $A'_{n+1} - A'_n$ .
- (vii) Cada componente de  $S - A_{n+1}$  contiene exactamente aquellas componentes de  $S - B_m$  que corresponden, de acuerdo con (v), a una única componente de  $S' - A'_{n+1}$ .

Además  $A_{n+1}$  debe cumplir (i) y (iii), lo cual es suficiente para construir  $f_{n+1}$ . También vamos a necesitar algunos resultados para superficies compactas del capítulo 1: la clasificación de superficies compactas con borde (Teorema 1.4.3), el Lema 1.4.5 y el Lema 1.4.6.

Por conveniencia, de aquí en adelante escribiremos  $B_m - A_n$  donde en realidad queremos escribir su clausura en  $S$ , que es compacta y es posible aplicar los lemas anteriores (de esta manera evitamos notaciones complicadas en el resto de la prueba).

Por la condición (iv), cada componente de  $B_m - A_n$  es de género reducido suficientemente grande y la orientabilidad adecuada de modo que, usando el Lema 1.4.6, podemos retraer  $B_m$  a una superficie  $A_{n+1}$  que contenga a  $A_n$  de modo que el género reducido y la orientabilidad de cada componente conexa de  $A_{n+1} - A_n$  coinciden con las de correspondientes componentes de  $A'_{n+1} - A'_n$ . Una idea de como se realiza esta construcción es como sigue, tomemos  $W$  componente conexa de  $B_m - A_n$ , entonces  $\overline{W}$  resulta una superficie con borde compacta que tiene género  $g$  estrictamente mayor que el género de  $W'$ , la componente correspondiente de  $A'_{n+1} - A'_n$ . Supongamos que  $\overline{W}'$  tiene género  $k$  y apliquemos el Lema 1.4.6. Tomamos la partición  $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$  de las curvas frontera de  $\overline{W}$ , dada por

$$\Gamma_1 = \{\text{curva frontera común entre } \overline{W} \text{ y } S - A_n\}$$

lo cual tiene sentido pues sabemos que  $\overline{W}$  comparte exactamente una curva

frontera con  $S - A_n$ , y

$$\Gamma_2 = \{\text{resto de las curvas frontera de } \overline{W}\}.$$

Ahora, el Lema 1.4.6 garantiza que para cada  $k \leq \max\{g - \frac{1}{2}, 0\}$  existe una curva cerrada simple en  $\overline{W}$  que lo divide en exactamente dos componentes  $U_1$  y  $U_2$ , de modo que  $\Gamma_1 \subset U_1$ ,  $\Gamma_2 \subset U_2$ , y el género reducido de  $U_1$  es  $k$ . Con este razonamiento,  $U_1$  tiene género  $k$ , es de la misma clase de orientabilidad que  $\overline{W}$  y comparte una curva frontera con  $A_n$ , y mediante esta curva común se pega  $U_1 = (U_1)_{\overline{W}}$  a  $A_n$  determinando un  $A_{n+1}$  tal que las componentes de  $A'_{n+1} - A'_n$  son los  $U_1$ 's y las componentes de  $B_m - A_{n+1}$  los  $U_1$ 's del Lema 1.4.6.

Recordemos que por la condición (v), varias componentes de  $B_m - A_n$  corresponden (mediante  $h$ ) a una componente de  $S' - A'_{n+1}$ . Retrayendo  $B_m$  a  $A_{n+1}$ , las componentes adecuadas de  $S - B_m$  deben juntarse dentro de  $B_m$  para que las componentes de  $S - A_{n+1}$  satisfagan las condiciones (i) a (vii).

Finalmente, dentro de cada componente de  $B_m - A_n$ , podemos tener todas las componentes excepto una de  $B_m - A_{n+1}$  (correspondiente a  $U_i$ ,  $1 < i < p$  en Lema 1.4.6) de género cero, y una componente extra (si la hay) puede añadirse a la parte de  $S - B_m$  que ya es de género infinito o infinitamente no orientable, de modo que  $A_{n+1}$  satisface (iii).

Para construir  $f_{n+1}$ , usamos el teorema de clasificación de superficies con borde compactas (Teorema 1.4.3) para dar un homeomorfismo  $g$  de  $A_{n+1} - A_n$  sobre  $A'_{n+1} - A'_n$ . Dado que  $f_n$  satisface (ii) y  $A_{n+1}$  satisface (vii), podemos suponer que  $g^{-1} \circ f_n$  lleva cada curva en  $d(A_n)$  en la frontera de  $A_n$  sobre sí misma y que  $g$  cumple (ii) sobre  $d(A_{n+1})$  (es decir,  $g(d(A_{n+1})) = d(A'_{n+1})$ ). Escribimos  $\phi = g^{-1} \circ f_n$  sobre  $d(A_n)$  y extendemos  $\phi$  a  $A_{n+1} - A_n$  según nos permite el Lema 1.4.5. Por último, definimos

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} g \circ \phi(x), & \text{si } x \in A_{n+1} - A_n \\ f_n(x), & \text{si } x \in A_n \end{cases}$$

entonces  $f_{n+1}$  es continua sobre cada componente  $d(A_n)$  y satisface (ii) sobre cada curva frontera de  $d(A_{n+1})$ . Luego la terna  $(f_{n+1}, A_{n+1}, A'_{n+1})$  verifica todas las condiciones.

□

## 2.4. Construcción de una superficie con frontera ideal dada

Por el teorema anterior hemos establecido que si dos espacios topológicos tienen las fronteras ideales homeomorfas, es que los espacios mismos también

son homeomorfos. En esta sección vamos a dar un paso más, estableciendo una relación todavía más fuerte para las superficies no compactas y sus fronteras ideales.

Recordemos que la frontera ideal puede escribirse como  $B''(S) \subset B'(S) \subset B(S)$ , una terna encajada de espacios compactos, separables y totalmente desconexos (Proposición 2.2.2). En esta sección veremos que dada una terna cualquiera de tales espacios, ésta ocurre como frontera ideal de alguna superficie. Además, vamos a construir dicha superficie tomando una esfera a la que quitaremos puntos, discos y sometiendo las fronteras de estos discos a identificaciones adecuadas.

Antes de dar el teorema principal de esta sección, vamos a dar la definición de la *dimensión topológica* y algunos de sus resultados (demostraciones en [4]).

**Definición 2.4.1.** La *dimensión topológica* de un conjunto  $X$  (denotamos por  $\dim(X)$ ) se define de manera inductiva de la siguiente manera:

- (i)  $\dim(X) = -1$  si y sólo si  $X = \emptyset$ .
- (ii)  $\dim(X) \leq n$  si para todo  $x \in X$  y para todo abierto  $U$  existe un abierto  $V$  con  $x \in V$  tal que  $\bar{V} \subset U$ , y  $\dim(\partial V) \leq n - 1$ . Y  $\dim(X) = n$  si la condición anterior se cumple para  $n$ , pero no para  $n - 1$ .
- (iii)  $\dim(X) = \infty$  si para todo  $n$ ,  $\dim(X) \leq n$  es falso.

**Lema 2.4.1.** Un espacio totalmente desconexo tiene *dimensión topológica* 0.

**Teorema 2.4.2.** Todo espacio topológico compacto separable de *dimensión*  $n$  puede embeberse en el espacio euclídeo de *dimensión*  $2n + 1$ .

Si  $X$  es un espacio topológico compacto, separable y totalmente desconexo, entonces su  $\dim(X) = 0$ . Por el teorema anterior  $X$  puede embeberse en la recta real. Ahora,  $X$  que es un subespacio de la recta real, puede verse como un subconjunto del conjunto de Cantor. Entonces tenemos,

**Proposición 2.4.3.** Todo espacio topológico compacto, separable y totalmente desconexo es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de Cantor.

En este punto podemos dar el teorema principal de esta sección.

**Teorema 2.4.4.** Sea  $(X, Y, Z)$  una terna de espacios topológicos compactos, separables y totalmente desconexos con  $Z \subset Y \subset X$ . Entonces existe una superficie  $S$  cuya frontera ideal  $(B(S), B'(S), B''(S))$  es topológicamente equivalente a la terna  $(X, Y, Z)$ .

*Demostración.* Por la Proposición 2.4.3 podemos suponer que  $X$  es un subconjunto del conjunto de Cantor, que puede verse como embebido en la compactación del plano por un punto (es decir, una esfera) como los puntos  $(x, 0)$  tal que  $0 \leq x \leq 1$  y tal que  $x$  admite una expansión triádica que no involucra el dígito 1.

Sea  $D'$  el conjunto de todos los discos cerrados en el plano tales que sus diámetros son los intervalos en el eje  $x$  de la forma

$$I(n, m) = [(n - 1/3)/3^m, (n + 4/3)/3^m], \quad 0 \leq n \leq 3^m,$$

donde  $n$  es un entero y en su expansión triádica no aparece el dígito 1, y el entero  $m$  recorre todos los enteros no negativos. Dado un  $m$  definimos  $T(m)$  como el conjunto de tales  $n$ . Sea  $D$  el conjunto de los discos en  $D'$  tales que contienen al menos un punto de  $X$ . Veamos primero que  $D$  determina una base para la topología de  $X$ .

Tomemos un  $x \in X$  y una bola  $B(y, r)$  de centro  $y \in \mathbb{R}$  y radio  $r > 0$  que contiene a  $x$ . Supongamos que  $y - r < x \leq y$ . Tomemos  $m$  suficientemente grande como para que  $(x - n/3^m) + 1/3^{m+1} < r$ . Observamos que  $x - n/3^m$  puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo como  $n$  el entero formado por los  $m$  primeros dígitos de  $x$ , de hecho, eligiendo  $n$  de este modo, la diferencia  $x - n/3^m$  es menor que  $1/3^m < 4/3^{m+1}$ . Observamos también que el número  $n/3^m$  coincide con los  $m$  primeros dígitos de  $x$  y por lo tanto aproxima a este último por debajo. Con todo esto, obtenemos las siguientes desigualdades,

$$y - r < \frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^m} < \frac{n}{3^m} < x \leq y$$

además si  $m$  es suficientemente grande como para que

$$\frac{4}{3^{m+1}} < r$$

concluimos lo siguiente

$$y - r < \frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^m} < \frac{n}{3^m} < x < \frac{n}{3^m} + \frac{4}{3^{m+1}} < x + \frac{4}{3^{m+1}} \leq y + \frac{4}{3^{m+1}} < y + r.$$

Se deduce que para el par de números  $m$  y  $n \in T(m)$  no negativos, se tiene que  $x \in I(n, m) \subset B(y, r)$ , y por lo tanto, el disco que tiene a  $I(n, m)$  como diámetro también está contenido en  $B(y, r)$ . Y por ello,  $D$  determina una base para la topología de  $X$ .

La familia de discos  $D$  satisface las siguientes condiciones:

- (i) Un par cualquiera de discos en  $D$  son disjuntos o uno contiene al otro.

- (ii) La intersección de una cadena infinita encajada de discos de  $D$  es un sólo punto de  $X$ .

**Demostración de (i).** Primero veremos que la condición se cumple para  $D'$  y de manera inmediata se puede ver que  $D$  también la cumple. Por conveniencia, dado un entero negativo vamos a pensar en su expansión triádica finita (que es única), dejando de lado la infinita.

Vamos a ver que dado un  $m$ , la cardinalidad de  $T(m)$  es exactamente  $2^m$ . Dado un  $n \in T(m)$  se tiene que  $0 \leq n < 3^m$ , donde la desigualdad es estricta porque si se cumpliera  $n = 3^m$  entonces en la expansión triádica de  $n$  aparecería el dígito 1 en  $m$ -ésima posición (lo que contradice la definición de  $n$ ). Por la desigualdad anterior,  $n$  debe tener  $m$  dígitos, además esos dígitos deben ser el 0 o el 2, lo que nos da un total de  $2^m$  combinaciones posibles. Notemos también que los números así construidos son pares, pues en la expansión triádica sumamos potencias de 3 multiplicadas por 0 o por 2.

El siguiente paso es demostrar que para  $m$  fijo, y  $n, s \in T(m)$ , con  $n \neq s$ , se tiene  $I(n, m) \cap I(m, s) = \emptyset$ . Para ello, supongamos que se da el caso

$$\frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}} \leq \frac{s}{3^m} - \frac{1}{3^m} \leq \frac{n}{3^m} - \frac{4}{3^{m+1}}$$

es decir, estamos suponiendo que el extremo izquierdo de  $I(m, s)$  pertenece a  $I(n, m)$ . Por primera desigualdad tenemos que  $n \leq s$ , y como  $n$  y  $s$  son pares distintos, se cumple que  $s - n \geq 2$ . Con esto,

$$\frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^m} = \frac{n+2}{3^m} - \frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}} \leq \frac{s}{3^m} - \frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^m}$$

se sigue

$$\frac{n}{3^m} + \frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}} \leq \frac{s}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}} \leq \frac{n}{3^m} - \frac{4}{3^{m+1}}$$

lo cual implica

$$\frac{2}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}} \leq \frac{4}{3^{m+1}},$$

simplificando la desigualdad, llegamos a que  $6 \leq 5$ , lo cual es una contradicción.

Resumiendo, dado un  $m$  entero no negativo tenemos  $2^m$  discos disjuntos en  $D'$  cuyos diámetros son los intervalos  $I(n, m)$  con  $n \in T(m)$ , denotamos a la familia de estos discos por  $D'(m)$ , que son los discos a escala  $m$ .

Por la definición de  $D'$ , tenemos que

$$D' = \bigcup_{m \geq 0} D'(m).$$

Como  $T(m+1)$  tiene el doble de elementos que  $T(m)$ , su cardinalidad es  $2^{m+1}$ . A continuación veremos que los números de  $T(m+1)$  son de la forma  $3n$  ó  $3n+2$  con  $n \in T(m)$ . Dado  $n \in T(m)$ , está claro que  $3n$

es un entero que no contiene al dígito 1, puesto que  $n$  no lo contiene, y multiplicando por 3 no cambia la afirmación, es más, la única diferencia entre  $n$  y  $3n$  es que el segundo tiene un 0 más al final. Además, dado que  $n \leq 3^m$ , se tiene que  $3n \leq 3^{m+1}$ , y hemos demostrado que  $3n \in T(m+1)$  para  $n \in T(m)$ . Para ver que  $3n+2 \in T(m+1)$  el razonamiento es similar. como  $3n \in T(m+1)$  y su último dígito es 0,  $3n+2$  no tiene el dígito uno en su expansión triádica. Si  $n \in T(m)$  entonces  $n < 3^m$ , por lo tanto  $n \leq 3^m - 1$  y con esto  $3n+2 \leq 3^{m+1} - 1$ . Con esto completamos la demostración de que  $3n, 3n+2 \in T(m+1)$  cuando  $n \in T(m)$ . Dado que  $3n$  no puede ser igual a  $3s+2$  para un par cualquiera de  $n, s \in T(m)$ , llegamos a que los  $2^{m+1}$  números de  $T(m+1)$  deben tener la forma  $3n$  ó  $3n+2$ , con  $n \in T(m)$ . Y entonces la familia  $D'(m+1)$  consiste de  $2^{m+1}$  discos disjuntos de diámetros  $I(s, m+1)$  con  $s \in T(m+1)$ , y  $s = 3n$  ó  $s = 3n+2$  para algún  $n \in T(m)$ .

Mostraremos ahora que dado  $n \in T(m)$  los intervalos  $I(3n, m+1)$  e  $I(3n+2, m+1)$  están contenidos en  $I(n, m)$ . Es decir, los discos a escala  $m+1$  están contenidos a pares en los discos a escala  $m$ . Sea el caso del intervalo  $I(s, m+1)$  con  $s = 3n$  para algún  $n \in T(m)$ . Tenemos

$$\frac{s}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+2}} = \frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^{m+2}} > \frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}},$$

con lo que, el extremo izquierdo de  $I(s, m+1)$  es mayor que el extremo izquierdo de  $I(n, m)$ . Por otro lado,

$$\frac{s}{3^{m+1}} + \frac{4}{3^{m+2}} = \frac{n}{3^m} + \frac{4}{3^{m+2}} < \frac{n}{3^m} + \frac{4}{3^{m+1}},$$

y entonces, el extremo derecho de  $I(s, m+1)$  es menor que el extremo derecho de  $I(n, m)$ . Se tiene la inclusión  $I(s, m+1) \subset I(n, m)$ . Veamos el caso cuando  $s = 3n+2$ , escribamos

$$\frac{s}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+2}} = \frac{3n+2}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+2}} = \frac{n}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+2}} > \frac{n}{3^m} > \frac{n}{3^m} - \frac{1}{3^{m+1}},$$

y por lo tanto, el extremo izquierdo de  $I(s, m+1)$  es mayor que el extremo izquierdo de  $I(n, m)$ . Además,

$$\frac{s}{3^{m+1}} + \frac{4}{3^{m+2}} = \frac{3n+2}{3^{m+1}} + \frac{4}{3^{m+2}} = \frac{n}{3^m} + \frac{2}{3^{m+1}} + \frac{4}{3^{m+2}} < \frac{n}{3^m} + \frac{4}{3^{m+1}}$$

pues  $2+4/3 < 4$ . Y con esto, el extremo derecho de  $I(s, m+1)$  es menor que el extremo derecho de  $I(n, m)$ , y ocurre la segunda inclusión deseada. Queda claro ahora que todo disco en  $D'(m)$  contiene dos discos de  $D'(m+1)$ , y para una misma escala los discos son disjuntos. Así, hemos demostrado (i) para la familia de discos  $D'$ .

**Demostración de (ii).** Tomamos una cadena infinita de discos  $D$  y pensamos en sus diámetros como otra cadena en  $\mathbb{R}$  denotada por  $\{I_j = I(n_j, m_j)\}$ . Sea la cadena  $\{I_j \cap X\}$  que es una familia de cerrados en  $X$  que tiene la propiedad de intersección finita. Dado que  $X$  compacto, aplicamos el Teorema 1.1.3 para probar que  $\bigcap_{j \leq i} I_j \cap X \neq \emptyset$ .

**Observación 2.4.1.** Veamos ahora que esta intersección no vacía consiste sólo de un punto de  $X$ . Supongamos que tenemos dos puntos  $x_1$  y  $x_2$  en la intersección, sea  $d$  la distancia entre ellos. Tomamos ahora un  $J$  suficientemente grande como para que  $1/3^{m_J} < d$ , es decir,  $x_1$  y  $x_2$  no pertenecen a  $I_J$  simultáneamente. Luego, uno de ellos queda fuera del  $I_J$ , y deja de pertenecer a la intersección  $\bigcap_{j \geq 1} I_j \cap X$ . La razón de esto es porque la cadena está formada por a lo sumo un disco a cada escala.

**Observación 2.4.2.** En conjunto de discos que contiene un punto  $x \in X$  fijo, forma una cadena infinita. El procedimiento para probar esto es similar al utilizado cuando probamos que los discos en  $D$  formaban una base para la topología de  $S$ . En todo caso agregamos el comentario que los extremos de los intervalos  $I(n, m)$  no pertenecen a  $X$ , pues son de la forma  $(n - 1/3)/3^m$  y  $(n + 4/3)/3^m$ , con  $n \in T(m)$ .

Continuamos con la demostración del teorema. Sean  $P^+$  y  $P^-$  los semiplanos  $y > 0$  y  $y < 0$  respectivamente. Para cada disco  $K \in D$  sean  $K'$  y  $K''$  dos discos más grandes propios de  $K$  (de esta manera, todo disco de  $D$  propio de  $K$  estará contenido en  $K'$  o en  $K''$ ).

Para cada disco  $K \in D$  elegimos dos círculos  $C^+$  y  $C^-$  contenidos en el interior de  $K$  de modo que

- (a)  $C^+ \subset P^+$  y  $C^- \subset P^-$ ,
- (b)  $C^+$  y  $C^-$  no intersecan ni a  $K'$  ni a  $K''$ ,
- (c)  $C^+$  y  $C^-$  son simétricos con respecto al eje  $x$ .

En particular, la condición (b) nos dice que los círculos  $C^\pm(K)$  no se intersecan variando  $K \in D$ .

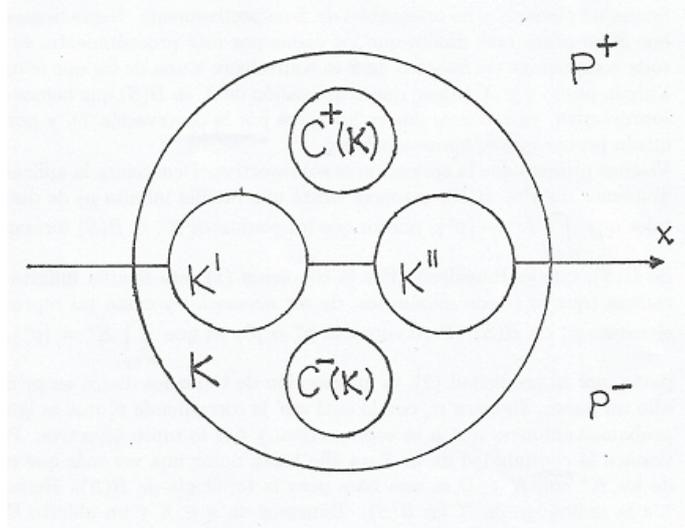


Figura 2.2: Los círculos  $C^\pm(K)$

Para construir una superficie  $S$  con la frontera ideal dada vamos a quitar de la esfera los puntos en  $X$  e identificaremos los interiores de los círculos  $C^\pm(K)$  adecuadamente. En primer lugar, rellenamos los círculos  $C^\pm(K)$  tales que  $K \cap Y = \emptyset$ , y quitaremos los interiores de los círculos  $C^\pm(K)$  tales que  $K \cap Y \neq \emptyset$  (los finales no planares). Si  $K \cap Y \neq \emptyset$  pero  $K \cap Z = \emptyset$  (los finales no planares orientables) entonces identificamos la frontera de  $C^+(K)$  con la de  $C^-(K)$  reflejando los círculos con respecto del eje  $x$ , es decir, el punto más alto de  $C^+(K)$  se identifica con el punto más bajo de  $C^-(K)$  y viceversa. Si  $K \cap Z \neq \emptyset$  (los finales no orientables), entonces identificamos la frontera de  $C^+(K)$  con la de  $C^-(K)$  trasladando una sobre la otra, aquí los puntos más altos de una se identifican con más altos de la otra, y los bajos igual. La primera identificación preserva la orientación, mientras que la segunda la invierte.

Por las propiedades (i) y (ii) observamos que cada punto  $x \in X$  puede ser representado unívocamente por una cadena maximal de discos en  $D$  (la cadena representante no es única). Notemos que cada cadena maximal en  $D$  representa una componente *abstracta* de frontera. Esto define una función de  $X$  en  $B(S)$ .

Dado que  $X - Y$  y  $X - Z$  son abiertos en  $X$ , para cada punto  $p \in X - Y$  existe un disco  $K \in D$  tal que  $x \in K \subset X - Y$ , es decir,  $K \cap Y = \emptyset$  (recordamos que  $D$  es una base para la topología de  $X$ ). Similarmente para  $X - Z$ . Con esto, los cerrados  $Y$  y  $Z$  de  $X$  corresponden a las cadenas maximales que representan finales no planares y no orientables de  $S$  respectivamente. Falta demostrar que  $S$  no tiene más finales que los dados por este procedi-

miento, es decir, que toda componente de frontera de  $S$  es equivalente a una de las que le corresponde a algún punto  $x \in X$  (la sobreyectividad), también falta ver el homeomorfismo.

Denotamos la aplicación por  $h$  y veamos su sobreyectividad. Sea  $p^* \in B(S)$ , entonces existe una familia infinita  $p_1$  de discos  $K \in D$  tales que  $\bigcap_{K \in p_1} K^* = \{p^*\}$ , puesto que los conjuntos  $K^* \subset B(S)$  forman una base de  $B(S)$ , que es Hausdorff. Por la condición (i) la familia infinita  $p_1$  es una cadena y como tal representa a un elemento  $p_1^* \in B(S)$ . Pero entonces  $p_1^* = p^*$ , ya que  $\bigcap_{K \in p_1} K^* = \{p^*\}$ . Por otra parte, por la propiedad (ii), la intersección de todos los discos en  $p_1$  consiste de sólo un punto, llamémoslo  $p'$ , con lo cual a  $p'$  le corresponde  $p_1^*$  que es igual a  $p^*$ . Y probamos entonces que  $h$  es sobreyectiva. Y como la inyectividad se deduce de la Observación 2.4.1, se tiene que  $h$  es biyectiva.

Para acabar, veamos la continuidad de  $h$ . De nuevo usando que el conjunto de los  $K^*$  con  $K \in D$  es una base para la topología de  $B(S)$ , y que  $h$  es la aplicación de  $X$  en  $B(S)$ . Tomamos un  $x \in X$  y un abierto  $U^* \subset B(S)$  tal que  $h(x) \in U^*$ , como los  $K^*$  forman una base, tenemos que existe un  $K^*$  tal que  $h(x) \in K^* \subset U^*$ . Por otra parte,  $K^*$  es el conjunto de los finales  $p^*$  tales que las componentes que lo definen están contenidas en  $K$  (el punto (ii) de la Definición 2.1.1), y entonces  $h(x)$  es uno de estos finales, con lo cual una cadena que lo define queda contenida en  $K$ , y finalmente  $x \in K$ , más aún, por la Observación 2.4.2,  $x \in K^\circ$  (los discos no tienen elementos de  $X$  en su frontera). Lo único que falta decir es que  $h(K^\circ) = h(K) \subset K^*$ , y esto es la consecuencia directa de la definición de  $K^*$ . Entonces se tiene que  $x \in K^\circ$  y  $h(K^\circ) \subset K^*$  y la continuidad de  $h$  esta demostrada. En definitiva,  $h$  es un homeomorfismo de  $X$  en  $B(S)$ .

□

## 2.5. Un teorema de representación

En virtud del teorema anterior, una terna encajada de conjuntos  $(X, Y, Z)$  de espacios compactos, separables y totalmente desconexos determinan una superficie  $S'$ , salvo homeomorfismos. Teniendo en cuenta los pasos utilizados en la demostración del teorema, podemos construir una superficie  $S$ , tomando una esfera y modificándola de tal manera que su frontera ideal sea  $(X, Y, Z)$ . De hecho, según el Teorema 2.3.1, sólo necesitamos considerar posibles variaciones en el género, clase de orientabilidad de  $S$  y  $S'$ . En el caso en que alguna de las superficies tenga género infinito o grado de no orientabilidad infinito, la representación de  $S'$  es como la  $S$  construida en la demostración del Teorema 2.4.4. Por otra parte dado que es posible variar el género o grado de orientabilidad en el caso finito sumando o quitando un

número finito de asas o bonetes cruzados, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.1.** *Toda superficie es homeomorfa a una superficie construída a partir de una esfera  $\Sigma$  de la cual primero se quita un conjunto compacto separable totalmente desconexo  $X$ , luego eliminando de  $\Sigma - X$  los interiores de una cantidad finita o infinita numerable de discos  $D_1, D_2, \dots$  cerrados disjuntos dos a dos, y finalmente identificando a pares las fronteras de estos discos. Puede ser necesario identificar la frontera de un disco consigo mismo para producir un bonete cruzado impar. La sucesión  $D_1, D_2, \dots$  "aproxima a  $X$ " en el sentido que, para cada abierto  $U$  en  $\Sigma$  que contiene a  $X$ , todos salvo una cantidad finita de discos  $D_i$  están contenidos en  $U$ .*

En la figura de abajo vemos como es un ejemplo de la representación visual de una superficie con una con una cantidad infinita de componentes de bordes (representados por una sucesión infinita de puntos), 2 asas y 3 bonetes cruzados.

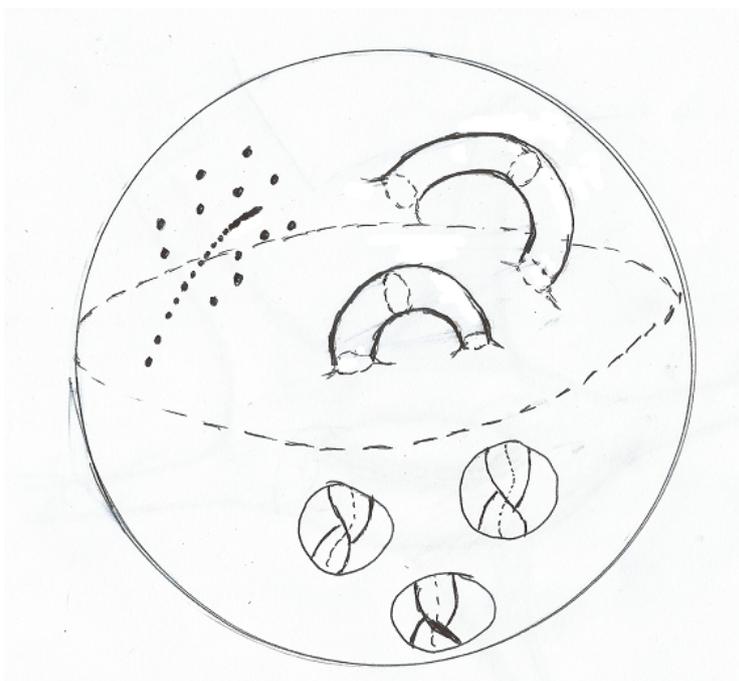


Figura 2.3: Representación de una superficie

# Bibliografía

- [1] Richards, I., *On the classification of noncompact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 106, 1963., 259-269
- [2] L.V. Ahlfors y L. Sario, *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, New Jersey, 1960.
- [3] H.R. Brahana, *Systems of circuits on two-dimensional manifolds*. Ann. Math. 23(2), 144168 (1921)
- [4] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton University Press, New Jersey, 1941.
- [5] J.M. Lee, *Introduction to topological manifolds*, Graduate Texts in Maths 202, Springer, 2000.
- [6] W.S. Massey, *Introducción a la topología algebraica*, Reverté, 1982.
- [7] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, 1970.
- [8] A.F. Mobius, *Ueber die bestimmung des inhaltes eines polyeders*. Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Mathematisch- physikalische Klasse 17, 3168 (1865)
- [9] W. von Dyck, *Beitrage zur analysis situs*. Mathematische Annalen 32, 457512 (1888)
- [10] M. Dehn, P. Heegaard, in *III AB.3 Analysis Situs*, ed. by W.F. Meyer. Encyklopadie Der Mathematischen Wissenschaften Mit Einschluss Ihrer Anwendungen (Druck Und Verlag Von B.G. Teubner, Leipzig, 1907), pp. 153220
- [11] Goldman, M. E., *An algebraic classification of noncompact 2-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 156 (1971), 241-258.

