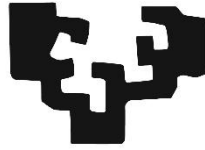


eman ta zabal zazu



Universidad  
del País Vasco

Euskal Herriko  
Unibertsitatea

# TRABAJO FIN DE GRADO

## *ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN MANIPULADOR FLEXIBLE DE DOS GRADOS DE LIBERTAD*

Alumno: **De Benito, Arribalzaga, Jon**

Director: **Campa, Gómez, Francisco Javier**

Curso: **2017/2018**

Fecha: **24, Julio, 2018**

## **DATOS BÁSICOS DEL TRABAJO DE FIN DE GRADO**

*Alumno:* Jon De Benito Arribalzaga

*Director:* Francisco Javier Campa Gómez

*Departamento:* Departamento de Ingeniería Mecánica

### **TÍTULO DEL TRABAJO**

Análisis cinemático de un manipulador flexible de 2 grados de libertad.

### **RESUMEN**

El presente proyecto enmarca la investigación sobre el análisis y desarrollo de un mecanismo que conforma el movimiento de un manipulador o de un robot tipo “compliant”, no desarrollado hasta la fecha.

El proyecto expuesto es una memoria del desarrollo de una idea o prototipo que cubre el modelado teórico de un equipo, el cual también aporta una nueva solución a las técnicas utilizadas en el ámbito de la ingeniería.

Se trata de una nueva tipología de robot basada en la deformación de 2 barras rígidas, las cuales dotan de una cierta libertad de movimiento al cabezal o punto de unión de las mismas.

En el documento se recogen los aspectos dinámicos y cinemáticos que determinan el comportamiento mecánico del mecanismo, así como su dimensionamiento, el material con el que está fabricado y el área de trabajo que puede abarcar. También se analizan los posibles errores de cálculo que se cometen y cómo minimizarlos.

Finalmente, se ofrece una alternativa al robot, en función del material por el cual se conforma, y se plantea una posible aplicación en la sociedad actual.

### **PALABRAS CLAVE**

- Robot Compliant
- Deformación
- Grados de libertad
- Discretización

- Rehabilitación
- Análisis cinemático

## **LANAREN IZENBURUA**

Bi askatasun graduko manipulatzailerik baten azterketa zinematikoa.

## **LABURPENA**

Proiektu honek, gaur egun garatu barik dagoen robot “betearazlearen” mugimendua osatzen duten mekanismoaren analisia eta garapena aztertzen du.

Lan hau modelizazio teoriko baten ideia edo ereduaren garapenaren memoria da eta baita ere, ingeniariaritzan erabiltzen diren teknikei konponbide berriak eskaintzeko balio du.

Robot mota berri bat da itxuragabetzean dauden 2 barra zurrin oinarritzat hartuta, eta aldi berean, barren buruan zein elkartasun puntuan mugimendurako askatasuna duena.

Dokumentuan, mekanismoaren jarrera mekanikoa zehazten dituen alderdi dinamikoak zein zinematikoak biltzen dira, eta baita bere hedadura, ze materialaz fabrikatu dan eta lan eremua zehazten dira. Lanean zehar, agertu ahal diren kalkulu akatsak aztertzen dira eta horiek nola minimizatu ahal diren azaltzen dut.

Amaitzeko, materialaren arabera robotaren alternatiba bat proposatzen da eta gizaritean nola aplikatu ahal den azaltzen dut.

## **HITZ GAKOAK**

- Esaneko Robotak
- Deformazio.
- Askatasun maila.
- Zatiketa
- Birgaitze
- Azterketa zinematikoa

## **TITTLE**

Kinematic analysis of a flexible manipulator with 2 degrees of freedom.

## **ABSTRACT**

The present project frames the investigation on the analysis and development of a mechanism that forms the movement of a “compliant” robot, not developed to date.

The exposed project is a memory of the development of an idea or prototype that covers the theoretical modeling of a team, which also provides a new solution to the techniques used in the field of engineering.

It is a new type of robot based on the deformation of 2 rigid bars that provide a certain freedom of movement to the head or junction point of them.

The document includes the dynamic and kinematic aspects that determines the mechanical behavior of the mechanism, as well as its dimensioning, the material with which it is manufactured and the work area it can cover. We also analyze the possible mistakes of calculation that area committed and how to minimize them.

Finally, an alternative to the robot is offered, depending on the material for which it is made, and a possible application in current society is proposed.

## **KEYWORDS**

- Compliant robot
- Deformation
- Degrees of freedom
- Discretization
- Rehabilitation
- Kinematic analysis

## ÍNDICE

1. LISTA DE TABLAS, FIGURAS Y ACRÓNIMOS	7
1.1 Lista de tablas	7
1.2 Figuras	7
1.3 Acrónimos	9
2. INTRODUCCIÓN	10
3. CONTEXTO	12
4. OBJETIVOS Y ALCANCE DEL TRABAJO	13
4.1 Objetivos	13
4.2 Alcance del trabajo	13
5. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO	15
5.1 Beneficio técnico/científico	15
5.2 Beneficio social	15
5.3 Beneficio económico	16
6. ESTADO DEL ARTE	17
6.1 Introducción a la Cinemática	17
6.2 Introducción a la Dinámica	18
6.3 Software Matemático	19
7. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS	21
7.1 Teflón	22
7.2 Titanio	22
7.3 Acero	23
8. ANÁLISIS DEL RIESGOS	24
9. SELECCIÓN/DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA. DISEÑO	27
10. METODOLOGÍA	29
10.1 Análisis cinemático	29
10.2 Análisis cuasiestático	32
10.3 Desarrollo del sistema matemático	37
11. DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS	40
11.1 Evaluación del error	40
11.2 Área de trabajo y reacciones	42

11.2.1	Área de trabajo	42
11.2.2	Reacciones	43
12.	APLICACIÓN PRÁCTICA	47
13.	DESCRIPCIÓN DE TAREAS. DIAGRAMA GANTT	50
13.1	Equipo de trabajo	50
13.2	Tareas	50
13.3	Diagrama Gantt	53
14.	PRESUPUESTO/DESCARGO DE GASTOS	54
14.1	Horas internas	54
14.2	Amortizaciones	54
14.3	Gastos	55
14.4	Subcontrataciones	55
14.5	Costes indirectos e imprevistos	55
14.6	Presupuesto final	55
15.	CONCLUSIONES	57
16.	BIBLIOGRAFÍA	59
17.	ANEXOS	61

- **MEMORIA**

**1. LISTA DE TABLAS, ILUSTRACIONES, GRÁFICAS Y ACRÓNIMOS**

**1.1 Lista de tablas**

- Tabla 7.1: Estudio de elección de materiales.
- Tabla 8.1: Coeficiente probabilidad – impacto de riesgos.
- Tabla 9.1: Representación del modelo.
- Tabla 11.1.1: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 3 hasta 35.
- Tabla 11.1.2: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 40 hasta 100.
- Tabla 11.1.3: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 200 hasta 500.
- Tabla 14.1: Partida de coste de recursos humanos y horas de ingeniería.
- Tabla 14.2: Partida de coste de amortizaciones.
- Tabla 14.3: Partida de coste de recursos materiales.
- Tabla 14.6: Resumen y partida total de descargo de gastos.

**1.2 Figuras**

- Figura 9.1: Representación del modelo.
- Figura 10.1 (1): Representación de las barras con el campo gravitatorio hacia abajo.
- Figura 10.1 (2): Representación de las barras con el campo gravitatorio hacia arriba.
- Figura 10.2 (1): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del primer segmento de la barra 1.
- Figura 10.2 (2): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del segundo segmento de la barra 1.
- Figura 10.2 (3): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del tercer segmento de la barra 1.

- Figura 10.2 (4): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del cuarto segmento de la barra 1.
- Figura 10.2 (5): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del primer segmento en la barra 2.
- Figura 10.2 (6): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del segundo segmento de la barra 2.
- Figura 10.2 (7): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del tercer segmento de la barra 2.
- Figura 10.2 (8): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del cuarto segmento de la barra 2.
- Figura 11.1: Gráfico evaluación del error.
- Figura 11.1.1: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,1 m.
- Figura 11.1.2: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,2 m.
- Figura 11.1.3: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,3 m.
- Figura 11.1.4: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,4 m.
- Figura 11.1.5: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,5 m.
- Figura 11.2.1: Área del espacio de trabajo.
- Figura 11.2.2 (1): Vista axonométrica del gráfico  $R_{1y}$ .
- Figura 11.2.2 (2): Vista en alzado del gráfico  $R_{1y}$ .
- Figura 11.2.2 (3): Representación en planta (plano X – Y).
- Figura 11.2.2 (4): Vista en alzado del gráfico  $R_{2y}$ .
- Figura 11.2.2 (5): Vista axonométrica del gráfico  $R_{2y}$ .
- Figura 11.2.2 (6): Vista en planta del gráfico  $R_{2y}$ .
- Figura 12.1 (1): Rehabilitación con el sistema convencional.
- Figura 12.1 (2): Sistema propuesto.



### 1.3 Acrónimos

- **ACV** .....Accidente CerebroVascular
- **CNC**.....Control Numérico Computacional
- **GDL**.....Grados De Libertad
- **GPa**.....GigaPascales ( $10^9$  Pascales)
- **I+D**.....Investigación y Desarrollo
- **I+D+I**.....Investigación, Desarrollo e Inversión
- **MPa**.....MegaPascales ( $10^6$  Pascales)
- **T**.....Tarea
- **TCP**.....Tool Center Point
- **TFG**.....Trabajo Fin de Grado
- $\phi$ .....Ángulo Relativo
- $\theta$ .....Ángulo Absoluto

## 2. INTRODUCCIÓN

En el presente Trabajo Fin de Grado, de ahora en adelante TFG, se ha realizado el análisis cinemático y estructural de un nuevo concepto de robot, capaz de adoptar una deformación controlada.

El dispositivo trata de situar los extremos de dos barras (unidas entre sí) en un punto determinado dentro de su área de trabajo. Sus dos barras se sitúan paralelas entre sí contenidas en un plano, definido como el plano de trabajo. Dichas barras están unidas en un extremo denominado TCP (Tool Center Point) y en el otro posee un actuador, el cual permite variar su posición para controlar la posición del otro extremo y la deformación de la barra.

Se trata de una tipología de robot no desarrollada. Hasta la fecha, el mundo científico ha optado por desarrollar otro tipo de robots denominados “snake robots”. En este caso, los investigadores intentan dotar al robot de varios grados de libertad, pero sin deformar el material y empleando una discretización elevada. Por cada tramo discretizado, el dispositivo deberá tener un motor, siendo el sistema de control caro y computacionalmente costoso.

El objetivo de este proyecto es concebir una tipología de robot que realice una función similar mediante un método no empleado anteriormente. Este método consistirá en controlar la deformación de dos medios continuos, es decir, las barras.

Para alcanzar tal punto, se plantea el problema cinemático y dinámico del sistema y se resuelve mediante la codificación de las ecuaciones en un programa informático.

Cabe destacar la gran influencia que adquieren las hipótesis y el planteamiento en que se basa el sistema; pues más tarde, se analizará el error que se ha cometido y como se podrá minimizar, de tal manera que nos aproximemos lo máximo posible al modelo real.

En la actualidad, son numerosos los sistemas mecánicos robotizados que se han desarrollado. Si se observa alrededor de cualquier lugar, siempre hay algún objeto que ha sido fabricado mediante la implicación de varias de estas máquinas.

La tecnología avanza a pasos agigantados gracias a las nuevas herramientas de investigación y la experiencia en el campo. Es por esto que, en la última década, la sociedad se ha construido la idea de que la tecnología no tiene límites.

La idea general existente lleva aparejada una mayor exigencia en la demanda de productos. El proyecto propuesto en este TFG trata de desarrollar un producto pionero y único, el cual podría abrir las puertas a muchos campos profesionales dada su amplia aplicación.

### 3. CONTEXTO

En el mercado industrial actual, existe un gran interés por los sistemas robóticos que puedan acelerar procesos industriales y ofrecer productos de mayor calidad. En otras situaciones, simplemente se busca ayudar al profesional a desarrollar una actividad determinada, sin tener que situarse esta en el ámbito industrial.

Uno de los pensamientos generales que afloran en la sociedad actual, ante las investigaciones y los descubrimientos médicos, es el hecho de creer que algún día, no muy tardío, toda enfermedad tenga su cura. Es por eso que, a los gobiernos no les importa invertir una parte importante del presupuesto nacional en sanidad pública, de cara a que en un futuro todos los individuos tengan acceso a estas nuevas técnicas del campo de la medicina.

En este TFG se ha decidido proponer una aplicación relacionada con el campo médico. De esta manera, se presentaría un producto atractivo, innovador y pionero. Concretamente, se va a implantar el dispositivo en la rehabilitación de pacientes que hayan sufrido un infarto cerebral, más comúnmente conocido con el nombre de ictus.

La rehabilitación de un ictus es un proceso largo, costoso y, en ocasiones, requiere que los pacientes tengan que volver a aprender a hacer cosas tan vitales como caminar.

En el mundo empresarial, siempre se buscan productos que produzcan una gran demanda, ya sea con una relación calidad/precio muy alta o que ofrezcan servicios en exclusiva. Si se consigue que la máquina pueda lograr unos avances notorios en la rehabilitación de pacientes, los centros médicos comenzarán a tener entre sus objetivos la adquisición de uno de ellos.

## **4. OBJETIVOS Y ALCANCE DEL TRABAJO**

### **4.1 Objetivos**

El principal objetivo de la investigación ha sido el análisis cinemático de un robot flexible con 2 gdl, el cual permita introducir una nueva técnica de manejo de los dispositivos robóticos. Para ello, se ha debido de analizar cómo responde el sistema ante los distintos movimientos.

Los objetivos parciales que se han propuesto para conseguir alcanzar el objetivo principal han sido: el planteamiento de las ecuaciones de la estática, la programación en Matlab, el análisis del error de discretización y el análisis del espacio de trabajo.

En total podríamos decir que los objetivos se dividen en un objetivo principal y 4 objetivos parciales.

### **4.2 Alcance**

El alcance de este proyecto se define en el análisis de las necesidades mecánicas del manipulador y en el análisis cinemático. También se mostrará una aplicación en la que pueda implantarse el dispositivo. No sé tendrá en cuenta la construcción del mecanismo.

Los análisis cinemático y dinámico son la clave esencial para poder diseñar el algoritmo matemático que describa el funcionamiento y la posición que ocupa el sistema en cada instante. Estos análisis han sido el punto de partida del proyecto.

La posterior codificación de las ecuaciones matemáticas, para poder resolver las ecuaciones planteadas, nos ofrece la posibilidad de interactuar con el programa para obtener otros datos de interés.

Estos otros datos de interés nos llevan a la evaluación del error que se ha analizado, así como, el estudio de la procedencia de los errores y afrontar la minimización de los mismos.

Otros de los aspectos estudiados han sido el dimensionamiento del dispositivo y el cálculo del área de trabajo. Para este punto se ha establecido previamente unas dimensiones determinadas del dispositivo (longitud de las barras, sección, ...).

La elección del material ha sido amplia, tan amplia que finalmente se decidió proponer una alternativa de proyecto en base a otro material distinto al seleccionado en principio.

Finalmente, la propuesta de una aplicación médica de rehabilitación permite observar una de las numerosas oportunidades de mejora en las técnicas científicas que ofrece.

## **5. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO**

La realización de este proyecto ha sido motivada por la carencia de un mecanismo robótico con estas características. Es bastante evidente las aportaciones que podría realizar un producto totalmente distinto a los anteriores

Introduciendo una nueva técnica alternativa a las existentes, es posible abrir el campo científico-técnico a nuevas oportunidades. De esta forma, se podría ofrecer resultado a ciertas necesidades que no hayan podido satisfacerse eficientemente.

Los beneficios de un proyecto se pueden dividir en técnicos, sociales y económicos.

### **5.1 Beneficio Técnico/Científico**

El beneficio técnico que el manipulador aporta al mundo científico se podría resumir en la introducción de una nueva técnica como alternativa a las ya establecidas actualmente.

El campo de la investigación es el que siempre aporta las herramientas que permite a la industria tecnológica seguir evolucionando e implantar innovaciones radicales.

El principal beneficio que aporta el análisis cinemático del manipulador es saber la posición final del cabezal, dada la posición relativa introducida de los apoyos. Permite conocer de antemano qué configuración debe adaptar el manipulador para llevarlo hasta una posición. En ciertos puntos, es posible que exista más de una configuración.

Otro beneficio del proyecto es poder diseñar fácilmente el manipulador en función del material y la masa que se quiera desplazar. Esto se debe a que el programa matemático está diseñado de tal manera que en sus primeras líneas requiere definir las características del material (densidad, longitud, sección, ...), sin la necesidad de cambiar ningún otro parámetro en el programa. Todas las ecuaciones están definidas con los datos iniciales del programa.

### **5.2 Beneficio Social**

Desde el punto de vista social, cabe destacar la aportación que ofrece a la sociedad implantándolo en terapias de rehabilitación de movilidad en brazos y piernas. Estas terapias podrían abarcar desde la rehabilitación de roturas óseas hasta ayudar a caminar a los pacientes que hayan sufrido un ictus. Para una persona adulta, cuyo peso se puede

considerar importante, se plantea complicado el hecho de que pueda reaprender a caminar sin un mecanismo que le ayude a realizar el movimiento, a la vez que le sustenta. El beneficio social ha sido el más relevante, por el hecho de poder ofrecer una la calidad de vida superior a las personas que lo requieran.

### **5.3 Beneficio Económico**

Teniendo en cuenta el ámbito económico, el beneficio que potencialmente puede ofrecer a la empresa que explote el proyecto es elevado. Como ya hemos comentado anteriormente, la oportunidad que brinda la fabricación y distribución en exclusiva de un producto único siempre es interesante. Esto se puede asociar a la reacción que podría generar en la sociedad, afectando a su demanda de un modo positivo. Pero este no ha sido uno de los objetivos impuestos.



## 6. ESTADO DEL ARTE

En este apartado, se procederá a explicar el Estado Del Arte en el cual se resumen los conocimientos básicos para la correcta comprensión de este trabajo y de todos sus términos. El objetivo es situar al lector en un contexto dentro de los conceptos ingenieriles en los que se van a trabajar, otorgándole una mejor perspectiva del proyecto.

### 6.1 Introducción a la Cinemática

Un buen punto de partida sería empezar por definir que es la cinemática.

La cinemática es la rama de la física que describe el movimiento de los objetos sólidos sin considerar las causas que lo originan (las fuerzas) y se limita, principalmente, al estudio de la trayectoria en función del tiempo. Las variables elementales de la cinemática son el espacio y el tiempo.

Para la realización de un análisis cinemático, hay que tener en cuenta las características que tiene el sistema. En este caso, hay que destacar los cuatro segmentos en los que se dividen cada una de las barras para poder realizar el análisis de un sólido continuo.

En el caso de los sistemas robóticos, donde aparecen sistemas de control y automatización, es imprescindible destacar como se requiere trabajar con los dos tipos de análisis cinemáticos: el directo y el inverso.

El análisis cinemático directo permite conocer el punto final en que se posiciona la punta del robot, teniendo como datos de entrada las posiciones relativas del resto de sus elementos. Las ecuaciones que se emplean en este tipo de análisis son:

$$x_p = \frac{1}{2} [x_{A12} - dL * \sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i1} + \sin \theta_{i2})] \quad (1)$$

$$y_p = \frac{1}{2} [y_{A12} + 2 * dL - dL * \sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i1} + \cos \theta_{i2})] \quad (2)$$

Sin embargo, el análisis inverso permite resolver el problema de manera opuesta. En este tipo de análisis se necesita saber cuál es la posición final para indicar que configuración debe adoptar el sistema robótico a la hora de alcanzar esa posición deseada. Para este otro tipo de análisis, las ecuaciones que lo describen son:

$$x_{A12} - x_{A11} = dL * [\sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i2} - \sin \theta_{i1})] \quad (3)$$

$$y_{A12} - y_{A11} = dL * [\sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2})] \quad (4)$$

En la metodología del proyecto, se detalla cómo se emplean las ecuaciones y que representa cada variable.

Los manipuladores y robots emplean bucles de control para asegurar que el dispositivo se sitúe correctamente en el lugar deseado del espacio y con la orientación apropiada.

Cuando se desarrolla un análisis de esta tipología, no se tienen en cuenta las fuerzas, masas propias, inercias ni flexiones que se generan. Pero, sin embargo, estos también influyen en el comportamiento del manipulador. Esto se recoge en el análisis dinámico.

## 6.2 Introducción a la Dinámica

La dinámica es la rama de la física que describe la evolución, en el tiempo, de un sistema físico en relación con los motivos o causas que provocan los cambios de estado físico y/o estado de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los factores capaces de producir alteraciones de un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento.

En el análisis dinámico es donde se recogen todos los fenómenos que quedan excluidos del análisis cinemático. Se trata de hallar una relación que describa las reacciones y fuerzas que sufre un cuerpo en relación con sus aceleraciones. En este proyecto en concreto, las aceleraciones que se experimentan son muy pequeñas y se han despreciado. Se ha empleado el uso de un modelo cuasi-estático el cual emplea el uso de las ecuaciones del equilibrio estático para analizar el sistema.

El planteamiento seguido para resolver el problema parte del hecho de analizar cada segmento en que se divide la barra. A cada segmento se le dibuja el diagrama del sólido libre y se le aplican las ecuaciones de la estática. Sabiendo que todo el movimiento está contenido en el mismo plano, al igual que las reacciones y la acción del campo gravitatorio, se aplica el equilibrio de fuerzas y momentos pertenecientes a ese campo.

$$\sum_{i=1}^N F_x = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N F_y = 0 \quad (6)$$

En este caso, se analizan las fuerzas y reacciones en las dos direcciones principales del plano y se igualan a cero.

$$\sum_{i=1}^N M_z = 0 \quad (7)$$

La otra ecuación de equilibrio proviene de la suma de los momentos perpendiculares al plano anterior (eje z). Estos momentos son producidos por las fuerzas estudiadas en las dos ecuaciones anteriores.

De esta manera, obtendremos 3 ecuaciones por cada segmento en el que hemos dividido la barra, haciendo un total de  $3 \cdot N$  ecuaciones por cada una de las barras.

Después de la realización del análisis, se emplea un software matemático para conseguir el resultado de las ecuaciones y resolver el problema.

### 6.3 Software Matemático

El programa matemático en el que se va a realizar la programación de las ecuaciones para que represente el estado final de las dos barras, es "MatLab 2016".

Este software es conocido por ser uno de los más completos a la hora de disponer de herramientas para ayudar a visualizar resultados. Por otra parte, la optimización y la velocidad de resolución de problemas con un gran número de ecuaciones es bastante buena. A diferencia de otro software como Octave, nos permite trabajar con sistemas de ecuaciones más grandes y resolverlos en un tiempo razonable.

La razón de emplear este programa nace de la necesidad de generalizar las ecuaciones obtenidas anteriormente, para un número de discretización  $N$ . De esta manera, cuanto más se discretice la barra (el número de segmentos en los que se divide cada barra crezca), mayor será la aproximación al medio continuo de las barras reales.

Los comandos que dibujan las posiciones permiten visualizar cual será el estado final de las barras. Finalmente, se emplearán estos mismos comandos para permitir observar

ciertos datos relevantes, como el espacio de trabajo y las reacciones que se producen en los apoyos en función de la posición del plano que ocupe.

## 7. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS

Las alternativas que ofrece un proyecto de investigación y desarrollo (I+D) son numerosas. Cuando se está desarrollando una idea que ha sido concebida sobre el papel, hay que poner muchas limitaciones para ir obteniendo un primer modelo sobre el que trabajar. Durante la investigación, se van visualizando errores que se deben corregir cambiando algunas de las limitaciones impuestas previamente. En este caso, se podría cambiar cualquier característica de diseño; desde la potencia de los actuadores, hasta el dimensionamiento del sistema.

Una de las alternativas que más posibilidades ofrece es la de poner el manipulador en la punta de un brazo robótico que sea capaz de orientarlo en una dirección determinada del espacio. De esta forma, conseguiríamos que el manipulador fuera capaz de trabajar en cualquier punto del espacio con la orientación adecuada (en este caso hacia abajo).

No obstante, para realizar el análisis de alternativas se ha optado por ofrecer unas propuestas basadas en el material de las barras. Los materiales utilizados afectan al dimensionamiento del sistema y las fuerzas solicitadas. Los materiales escogidos para realizar las propuestas alternativas son: teflón, titanio y acero.

Cuando se consiguió terminar la programación matemática, se hizo un estudio de materiales para observar cual tenía las mejores cualidades.

Material	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Módulo elástico (Mpa)	Reacciones en los apoyos
Teflón	2.200	410	0,053562 N
Acero	7.850	210.000	1,4957 N
Titanio	4.540	107.000	0,79697 N
Kevlar	1.440	80.000	0,1967 N

Tabla 7.1: Estudio de elección de materiales

El estudio queda recogido en la tabla 6.1 donde se muestran las características de cada material (densidad y módulo elástico o de Young) que afectan al comportamiento dinámico. Dicho comportamiento queda reflejado en las reacciones que se producen en

los apoyos. Estas reacciones están expresadas en módulo, y para cada apoyo son iguales en modulo y dirección, pero de sentido opuesto.

El kevlar es la opción que más gusta y se ha decidido realizar el proyecto con este material, pero eso no significa que las barras no puedan ser de otros materiales.

El kevlar es una fibra artificial, ligera, robusta y con gran resistencia al calor.

El estudio de materiales refleja que la principal diferencia reside en las reacciones que se producen en los apoyos. Es decir, las fuerzas que deben ejercer los actuadores.

### **7.1 Teflón**

El teflón o politetrafluoroetileno es el material más parecido al Kevlar en cuanto a sus características. Se trata de un polímero con una resistencia a tracción y torsión un poco inferior al Kevlar, y con una fuerza requerida para deformarla de un 72,56% inferior. Es el material más fácil de deformar de todos los propuestos y el segundo más ligero detrás del Kevlar. Para que el sistema posea la rigidez mínima requerida, las barras empleadas deben de tener un radio de 3mm, en vez de las de 1mm empleadas inicialmente.

En aplicaciones que requieran de una gran precisión, sin solicitar unos esfuerzos importantes, sería donde esta opción cobraría más fuerza. La precisión se achaca a la poca oposición a la deformación, ya que, pueden variar la posición más fácilmente.

### **7.2 Titanio**

El uso de los metales en la industria es la solución más frecuente para satisfacer una necesidad existente. A pesar de ser un metal, el módulo elástico es de 107.000 Mpa, siendo este uno de los metales más sencillos de deformar. Otra característica que hace al titanio ser una buena alternativa es su bajo riesgo de producir reacciones alérgicas. Es por esto que, en los últimos años, el titanio se haya comenzado a emplear en operaciones microquirúrgicas. Si una de las aplicaciones situara al dispositivo en contacto con la piel del usuario, esta opción sería muy interesante.

Por otro lado, cabe destacar el hecho de que deformar las barras, en las mismas condiciones que el Kevlar, requeriría de un esfuerzo 4 veces mayor.

### **7.3 Acero**

En el caso del acero, las fuerzas que requieren ser aplicadas para deformarlas y posicionar el cabezal en un punto son del orden de un 760% más que comparando con el caso de que la barra fuera de Kevlar. En estos casos, el precio del material y los actuadores harían incrementar el coste de fabricación del producto.

Se estudia esta posibilidad porqué en ciertas circunstancias, se podría requerir que el manipulador se fabricara en acero inoxidable 3, el cual tiene aplicaciones en operaciones médicas.

## 8. ANÁLISIS DE RIESGOS

Durante el desarrollo de la investigación pueden surgir diferentes problemas en un amplio rango de operaciones; desde el mal funcionamiento del programa informático, hasta que otro equipo de investigación muestre al mundo tecnológico un manipulador basado en el mismo principio.

En este apartado del proyecto, se evalúan los riesgos que se estiman que puedan surgir en las diferentes fases del proyecto.

Identificación de riesgos:

- A) Error en el planteamiento de las ecuaciones.
- B) Obtención de resultados matemáticos erróneos.
- C) Dimensionamiento incorrecto.
- D) Actuadores defectuosos.
- E) Adelanto de la competencia.

En la Tabla se evalúa la probabilidad de ocurrencia y el impacto de cada riesgo:

<i>Impacto</i>				
<i>Probabilidad</i>		<i>Bajo</i> 0.1	<i>Medio</i> 0.5	<i>Alto</i> 0.9
<i>Baja</i> 0.2	0.02	C 0.10	D 0.18	
<i>Media</i> 0.5	0.05	A 0.25	0.45	
<i>Alta</i> 0.8	E 0.08	B 0.40	0.72	

Tabla 8.1: Coeficientes probabilidad – impacto de riesgos



Priorización de los riesgos:

Tras la evaluación de riesgos utilizamos los coeficientes orientativos tabulados en la Tabla para realizar una priorización de los riesgos.

De esta manera, se establece el siguiente orden de prioridades con el correspondiente valor de probabilidad-impacto.

B) Obtención de resultados matemáticos erróneos (0.40)

A) Error en el planteamiento de las ecuaciones (0.25)

D) Actuadores defectuosos (0.18)

C) Dimensionamiento incorrecto (0.10)

E) Adelanto de la competencia (0.08)

Con objeto de reducir y evitar los riesgos se proponen las siguientes medidas preventivas para cada situación:

**B) Obtención de resultados matemáticos erróneos:**

Este riesgo tiene una probabilidad de ocurrencia bastante alta, dado que es común que los programas de resolución matemática cometan errores de truncatura que se ven amplificadas dependiendo del tipo de programa que se emplee.

Una posible solución a este riesgo es realizar la resolución matemática con distintos programas y viendo, respecto al resultado con el valor más alto de discretización, que valores generan menos error. De esta forma se podría obtener una mayor precisión en los resultados.

En este caso, la resolución se realizó con los programas Octave y Matlab, siendo los resultados más imprecisos en el primero.

**A) Error en el planteamiento de las ecuaciones:**

Teniendo en cuenta que la persona que ha realizado el planteamiento ha sido un alumno del grado de ingeniería, cada paso ha estado respaldado por un tutor que ha ido verificando si los resultados obtenidos han sido correctos.

**D) Actuadores defectuosos:**

Los actuadores son suministrados por un proveedor. El riesgo de que alguno de los dos motores llegue defectuoso es medio, debido al impacto que tendría sobre el proyecto; a pesar de ser poco probable. Para ello se le deberá exigir el máximo compromiso por parte del cliente.

**C) Dimensionamiento incorrecto:**

Dependiendo de la aplicación para la que se vaya a emplear el manipulador, las necesidades físicas variarán. Si se pretende destinarlo para desplazar cargas pesadas, las barras deberán de ser dimensionadas (sección y longitud) para el evitar el fallo por rotura. También tendría un impacto directo sobre la elección del material y la potencia de los actuadores.

**E) Adelanto de la competencia:**

Es el riesgo con el coeficiente más bajo dada su poca probabilidad de ocurrencia. Es importante destacar que, si algún otro equipo de investigadores registrara una patente de un manipulador con características similares y basadas en el mismo principio científico, todo el proyecto sería un derroche de recursos y tiempo. Durante todo el documento, se menciona el hecho de que se trata de inventar algo único, marcándose como objetivo ser una alternativa real a los dispositivos actuales.

## 9. SELECCIÓN/DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA. DISEÑO

El producto que se desea desarrollar es un manipulador controlado por CNC (Control Numérico Computacional) que está formado por 2 barras de 1 metro de longitud y 2 milímetros de diámetro.

La solución final, por la que se ha decidido optar y desarrollar la parte principal del proyecto, ha sido la del manipulador fabricado con dos barras de Kevlar. Los argumentos que más han influenciado en la decisión han sido las grandes posibilidades que ofrece el material de cara a los distintos escenarios en los que requiera emplearse. En el análisis de alternativas, ya se expuso que en algunas aplicaciones concretas deberíamos cambiar el tipo de material empleado.

El kevlar empleado en este proyecto se denomina kevlar 29; qué a diferencia del resto de compuestos de la misma familia, es el que posee el módulo elástico más bajo.

La característica más sorprendente es su excepcional resistencia a la tracción de 3,5 Gpa; comparándola con otros materiales, el acero posee una resistencia de 1,5Gpa. Este fenómeno se debe a la orientación de sus cadenas moleculares (en dirección del eje de la fibra) y a la gran cantidad de enlaces por puentes de hidrógeno entre las cadenas.

En el campo tecnológico, se buscan materiales que eviten la rotura frágil. El kevlar es un material que suele tener un comportamiento a rotura dúctil, con una elongación de 3,6%. Esto hace visible el lugar por donde puede fallar el dispositivo, pudiéndose predecir la rotura y cambiar la pieza dañada antes de que colapse.

El modelo final, una vez montado, poseerá dos barras unidas. En uno de sus extremos estarán unidas entre sí (punto que denominamos cabezal) y en el otro extremo, permanecerán unidas a 2 actuadores independientes (uno para cada barra) que podrán variar la posición entre sí.

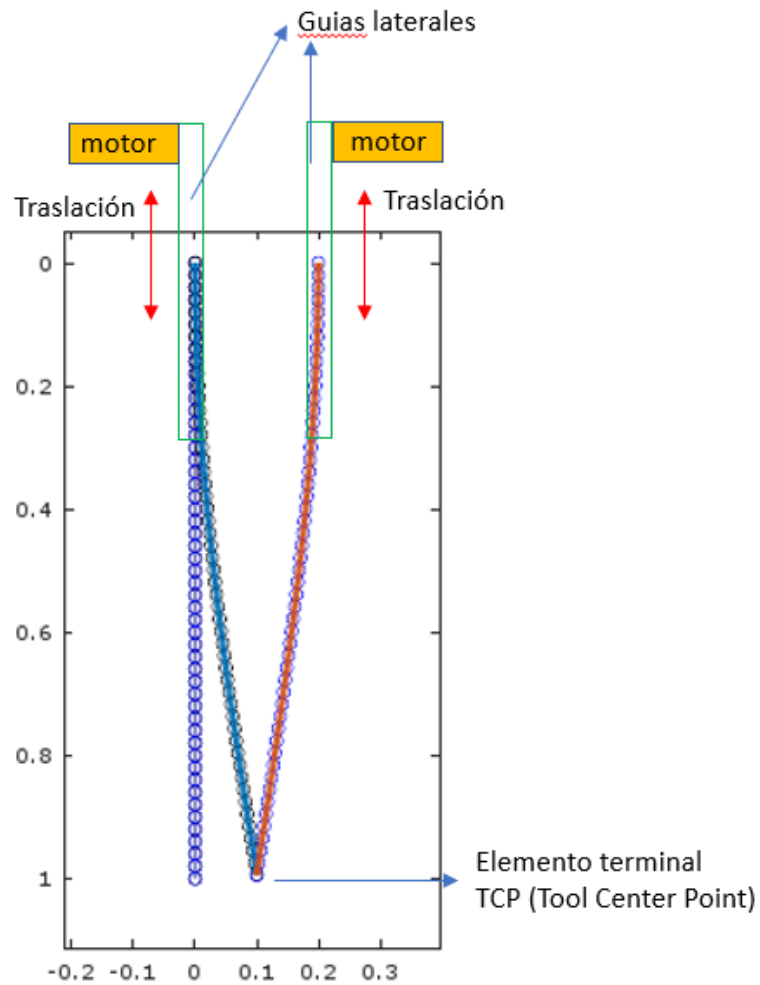


Figura 9.1: Representación del modelo

Las barras se dispondrán paralelamente una respecto de la otra y orientadas hacia abajo. De esta manera, las barras trabajan a tracción en el caso de tener que desplazar alguna carga. La figura 8.1 muestra de color azul la posición que ocuparía la barra verde sin deformar. La barra verde y la barra roja están dispuestas para una separación de 0,2 metros en horizontal y 0 metros en vertical, donde las barras no están sometidas a un esfuerzo grande.

## 10. METODOLOGÍA

### 10.1 Análisis cinemático

Antes de empezar a plantear la resolución del problema, se deberá situar el mismo en el contexto en que se encuentra. Se trata de realizar el estudio de dos barras paralelas sobre las cuáles actúa la gravedad en la dirección que tendrían ambas barras sin deformar. En este caso, el punto más bajo del sistema sería el de la unión de ambas barras. En otras palabras, las barras están orientadas hacia abajo, dejando los extremos que están conectados a los actuadores en la parte superior.

Para realizar el desarrollo del proyecto, se ha realizado el planteamiento cinemático y dinámico de las dos barras sometidas a estudio. Posteriormente, se han extraído las ecuaciones que resuelven el problema cinemático directo y el inverso para determinar la posición de las barras.

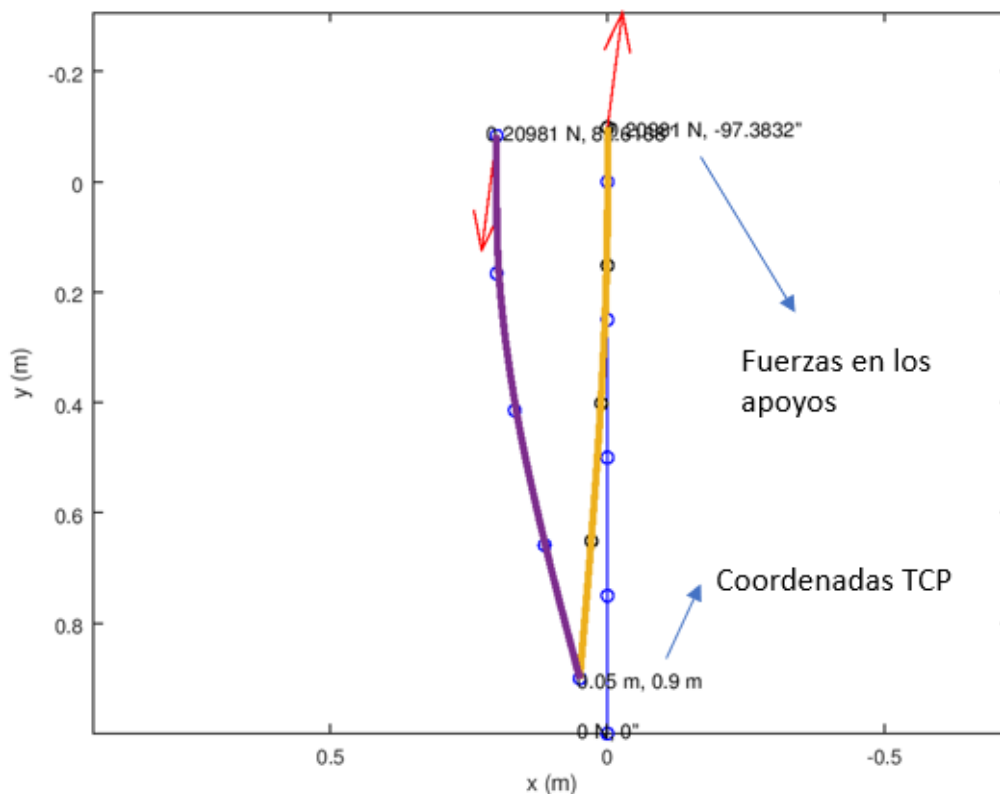


Figura 10.1 (1): Representación de las barras con el campo gravitatorio hacia abajo.

El problema objeto de estudio tiene las características de ser un sistema mecánico de modelo cuasi-estático, con la fuerza de gravedad actuando en el eje vertical del mismo.

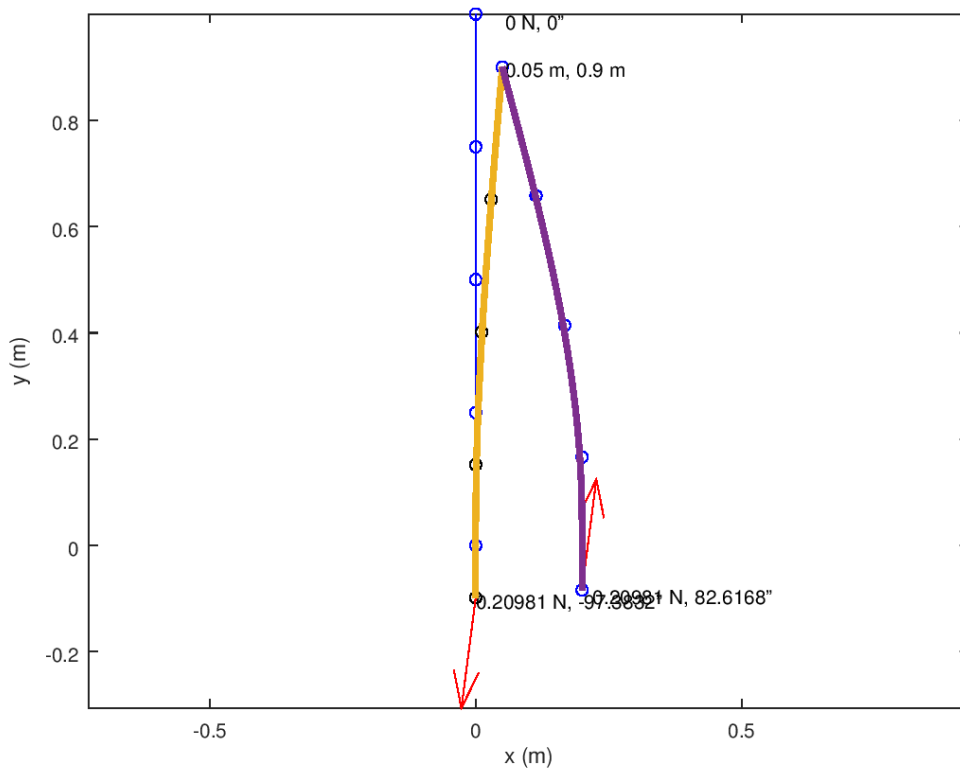


Figura 10.1 (2): Representación de las barras con el campo gravitatorio hacia arriba.

En la figura 10.1 (2), puede observarse como la fuerza de gravedad actúa hacia arriba. Para facilitar la visión del sistema, el dispositivo se ha analizado orientándolo en esta dirección y sentido. De aquí en adelante, el problema se resolverá con el dispositivo orientado de esta manera.

La unión de las barras con los actuadores se toma como un empotramiento y la unión entre ambas barras como un par de rotación.

Para comenzar a realizar el planteamiento del problema dinámico, se realiza una discretización de las barras en 4 segmentos, para más adelante generalizar el sistema a una discretización de N barras.

Para recoger el fenómeno de flexión en las ecuaciones, se dispone de unos muelles de torsión en cada división de la barra y un par de rotación que sea capaz de trasladar la flexión que se induce en la misma.

El sistema controla las deformaciones de las barras con la posición relativa de los dos apoyos de las barras, siendo las coordenadas  $x_{A12}$  e  $y_{A12}$  las coordenadas de la posición relativa de la barra 2 respecto a la 1.

Para la simplificación de algunos cálculos, se situará el sistema de referencia sobre el apoyo empotrado de la barra de la izquierda, denominándola, así como barra 1.

Es aquí donde emana la necesidad de resolver el sistema cinemático inverso, ya que, se parte de la necesidad de llevar el cabezal del dispositivo (el extremo donde están unidas las barras) a una posición determinada y se necesitará averiguar qué posición relativa deben adoptar los extremos empotrados (habrá que obtener  $x_{A12}$  e  $y_{A12}$  como solución del problema).

Las incógnitas  $x_p$  e  $y_p$  representan la posición del extremo articulado respecto al sistema de referencia definido. A partir de ahora en adelante denominaremos p al punto de unión de ambas barras.

Las ecuaciones de la cinemática inversa del problema son 2 para las coordenadas X e Y. Donde:

$$x_p = \frac{1}{2} [x_{A12} - dL * \sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i1} + \sin \theta_{i2})] \quad (8)$$

$$y_p = \frac{1}{2} [y_{A12} + 2 * dL - dL * \sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i1} + \cos \theta_{i2})] \quad (9)$$

Estas ecuaciones vienen dadas por el cálculo de las coordenadas de  $x_p$  e  $y_p$ , realizando la suma de los elementos de cada barra según su orientación. Esto es que para calcular  $x_p$  se deberá ir por dos caminos, la barra 1 y la barra 2, estableciendo una relación entre el punto p y las dos barras a la vez.

$$x_p = -dL * \sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i1}) \quad (\text{camino en x para la barra 1}) \quad (10)$$

$$x_p = x_{A12} - dL * \sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i2}) \quad (\text{camino en x para la barra 2}) \quad (11)$$

Una vez situados en este punto, se extrae la relación previamente comentada.

Siendo la primera ecuación el camino que llevaría al punto p por la barra 1 y la segunda por la barra 2.

Para calcular  $y_p$ , se realiza el mismo procedimiento de manera análoga.

$$y_p = dL + dL * \sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i1}) \quad (\text{camino en y para la barra 1}) \quad (12)$$

$$y_p = y_{A12} + dL + dL * \sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i2}) \quad (\text{camino en y para la barra 2}) \quad (13)$$

Las incógnitas  $x_p$  e  $y_p$  representan la posición del extremo articulado respecto al sistema de referencia definido.

Los ángulos  $\theta_{11}, \theta_{21}, \theta_{31}, \dots$  representan los giros de los segmentos 1, 2, 3, .... de la barra 1 respecto al eje vertical de referencia del sistema. Es decir, no son ángulos relativos entre las barras, sino absolutos.

De manera análoga ocurre con los ángulos  $\theta_{i2} \forall i=1, N$  para la barra 2.

El diferencial de longitud  $dL$  se toma como la longitud de cada segmento discretizado, siendo este  $dL = \frac{L}{N}$ . "L" es la longitud total de la barra.

A la hora de analizar la cinemática directa del problema,  $x_{A12}$  e  $y_{A12}$  serían los datos de entrada del problema y las incógnitas serían las coordenadas del punto p del sistema.

$$x_{A12} - x_{A11} = dL * [\sum_{i=2}^N (\sin \theta_{i2} - \sin \theta_{i1})] \quad (14)$$

$$y_{A12} - y_{A11} = dL * [\sum_{i=2}^N (\cos \theta_{i1} - \cos \theta_{i2})] \quad (15)$$

## 10.2 Análisis cuasiestático

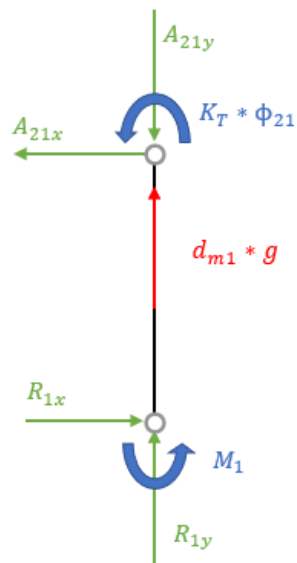
Una vez que ya se ha planteado el problema cinemático, se procede a plantear el problema cuasiestático de cada uno de los segmentos discretizados por separado para extraer las ecuaciones de equilibrio que nos relacionen los esfuerzos que se producen en toda la longitud de las barras.

Para realizar este análisis se seguirá suponiendo una discretización de 4 partes y posteriormente, se generalizarán las expresiones obtenidas para N partes. Se deben de analizar las 4 partes discretizadas de cada barra para obtener el mayor número de relaciones posibles entre sus incógnitas de cara a la resolución del problema.

Primero se procederá a analizar la barra 1 (la de la izquierda, de acuerdo a la orientación establecida).



**Barra 1**



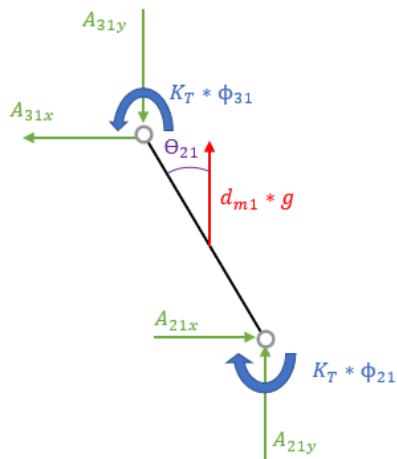
$$x) R_{1x} = A_{21x}$$

$$y) R_{1y} + d_{m1} * g = A_{21y}$$

$$M_z) M_1 + K_T * \phi_{21} + A_{21x} * dL = 0$$

$$\phi_{21} = \Theta_{21}$$

Figura10.2 (1): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del primer segmento de la barra 1.

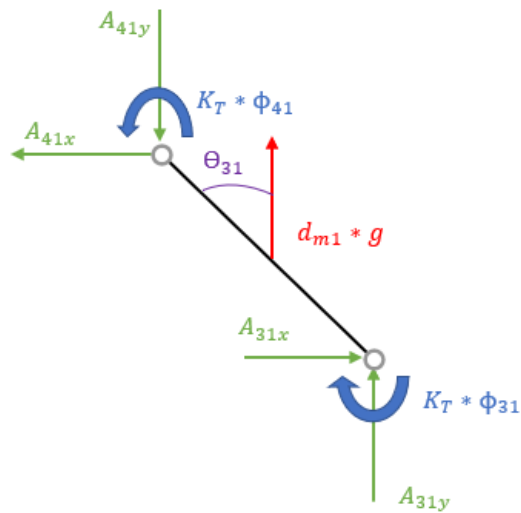


$$x) A_{21x} = A_{31x}$$

$$y) A_{21y} + d_{m1} * g = A_{31y}$$

$$M_z) K_T * \phi_{31} - K_T * \phi_{21} + A_{31x} * dL * \cos(\Theta_{21}) + A_{31y} * dL * \sin(\Theta_{21}) - d_{m1} * g * \frac{dL}{2} * \sin(\Theta_{21}) = 0$$

Figura10.2(2): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del segundo segmento de la barra 1.

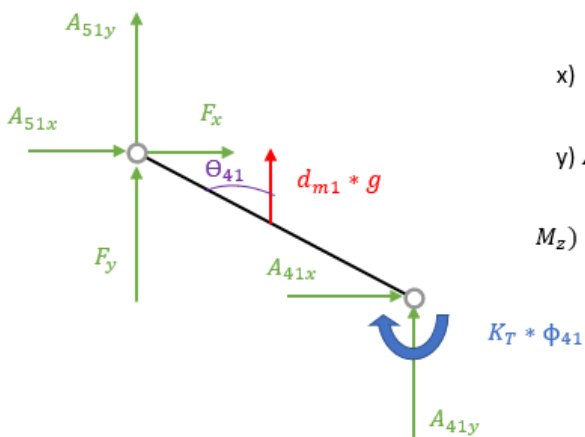


$$x) A_{31x} = A_{41x}$$

$$y) A_{31y} + d_{m1} * g = A_{41y}$$

$$M_z) K_T * \phi_{41} - K_T * \phi_{31} + A_{41x} * dL * \cos(\Theta_{31}) + A_{41y} * dL * \sin(\Theta_{31}) - d_{m1} * g * \frac{dL}{2} * \sin(\Theta_{31}) = 0$$

Figura10.2(3): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del tercer segmento de la barra 1.



$$x) A_{41x} = A_{51x} + F_x$$

$$y) A_{41y} + d_{m1} * g + F_y + A_{51y} = 0$$

$$M_z) K_T * \phi_{41} + (F_y + A_{51y}) * dL * \sin(\Theta_{41}) + (F_x + A_{51x}) * dL * \cos(\Theta_{41}) + d_{m1} * g * \frac{dL}{2} * \sin(\Theta_{41}) = 0$$

Figura10.2(4): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del cuarto segmento de la barra 1.

**Barra 2**

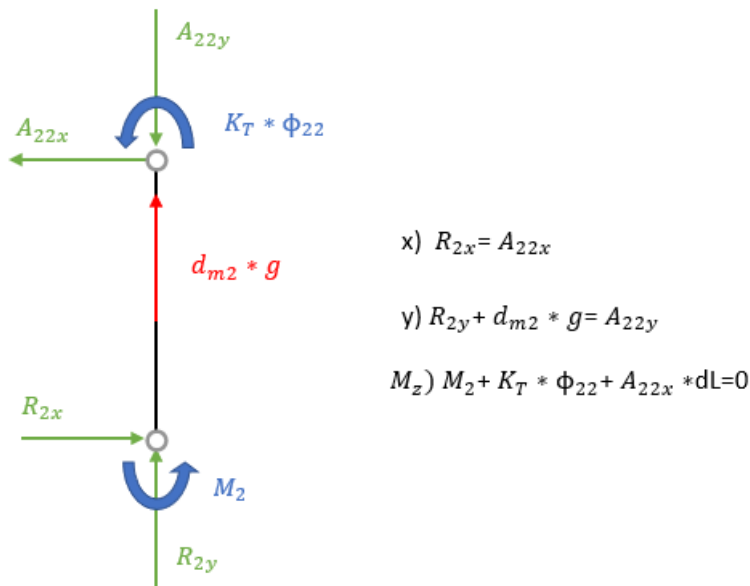


Figura10.2(5): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del primer segmento de la barra 2.

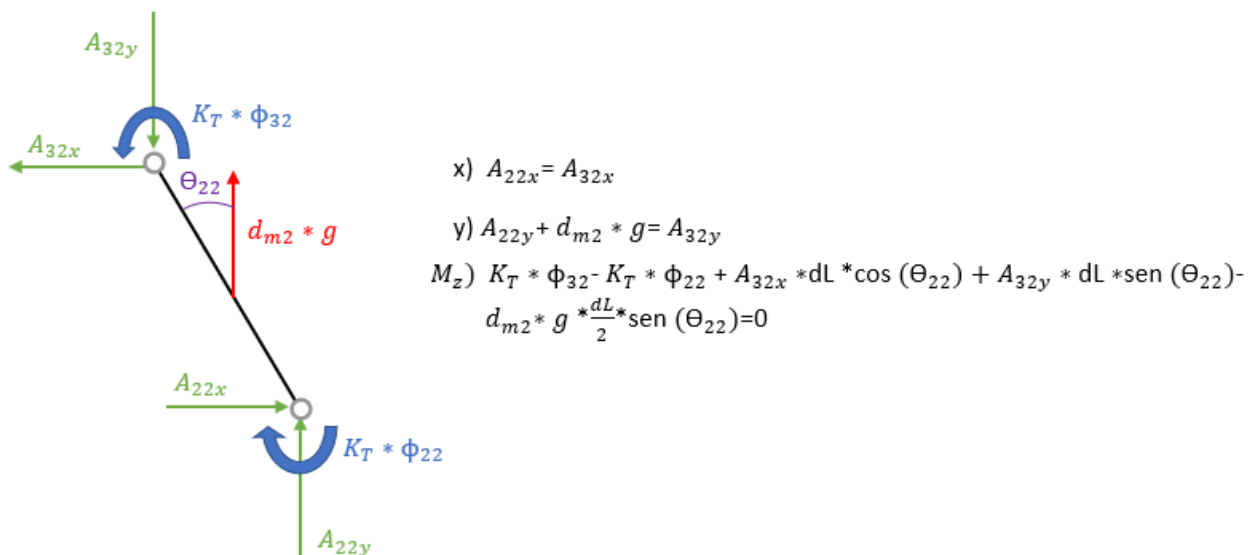
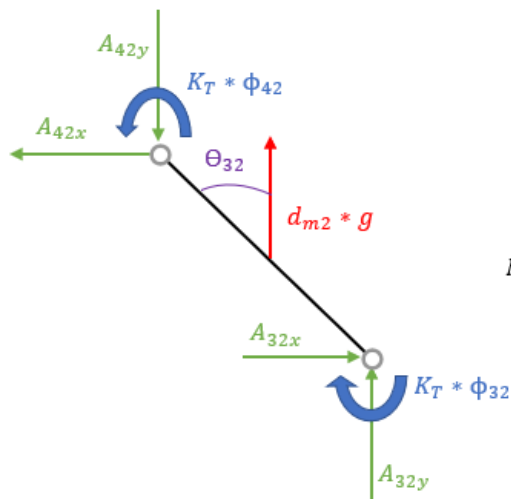
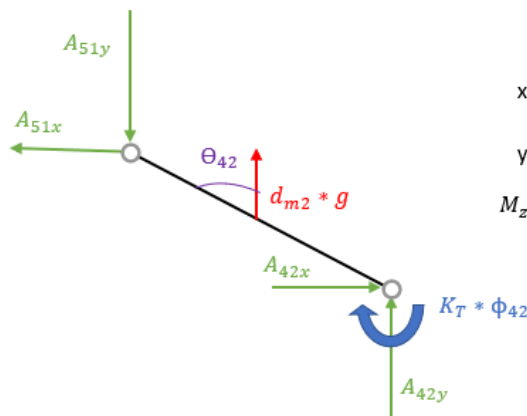


Figura10.2(6): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del segundo segmento de la barra 2.



$$\begin{aligned}
 x) \quad & A_{32x} = A_{42x} \\
 y) \quad & A_{32y} + d_{m2} * g = A_{42y} \\
 M_z) \quad & K_T * \phi_{42} - K_T * \phi_{32} + A_{42x} * dL * \cos(\Theta_{32}) + A_{42y} * dL * \text{sen}(\Theta_{32}) - \\
 & d_{m2} * g * \frac{dL}{2} * \text{sen}(\Theta_{32}) = 0
 \end{aligned}$$

Figura 10.2(7): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del tercer segmento de la barra 2.



$$\begin{aligned}
 x) \quad & A_{42x} = A_{51x} \\
 y) \quad & A_{42y} + d_{m2} * g = A_{51y} \\
 M_z) \quad & -K_T * \phi_{42} + A_{51y} * dL * \text{sen}(\Theta_{42}) + A_{51x} * dL * \cos(\Theta_{42}) - \\
 & d_{m2} * g * \frac{dL}{2} * \text{sen}(\Theta_{42}) = 0
 \end{aligned}$$

Figura 10.2(8): Diagrama del sólido libre con las ecuaciones del cuarto segmento de la barra 2.

Tras la obtención de las ecuaciones extraídas mediante el análisis dinámico, se simplifican las mismas, sustituyendo progresivamente algunas variables en otras ecuaciones. Finalmente, se extraen 4 ecuaciones para cada barra, que serán la base del programa matemático, el cual más tarde se empleará para resolver tanto el problema cinemático directo como el inverso.

Para la barra 1 se extraen las siguientes expresiones:

$$M_1 + K_T * \phi_{21} + R_{1x} * dL = 0 \quad (16)$$

$$K_T * (\phi_{31} - \phi_{21}) + R_{1x} * dL * \cos \phi_{21} + \left( R_{1y} + \frac{3}{2} * d_{m1} * g \right) * dL * \sin \phi_{21} = 0 \quad (17)$$

$$K_T * (\phi_{41} - \phi_{31}) + R_{1x} * dL * \cos \theta_{31} + \left( R_{1y} + \frac{5}{2} * d_{m1} * g \right) * dL * \sin \theta_{31} = 0 \quad (18)$$

$$K_T * \phi_{41} + R_{1x} * dL * \cos \theta_{41} - \left( R_{1y} + \frac{7}{2} * d_{m1} * g \right) * dL * \sin \theta_{41} = 0 \quad (19)$$

Análogamente, se extraen las expresiones para la barra 2:

$$M_2 + K_T * \phi_{22} + (R_{1x} - F_x) * dL = 0 \quad (20)$$

$$K_T * (\phi_{32} - \phi_{22}) + (R_{1x} - F_x) * dL * \cos \phi_{22} + \left( R_{2y} + \frac{3}{2} * d_{m2} * g \right) * dL * \sin \phi_{22} = 0 \quad (21)$$

$$K_T * (\phi_{42} - \phi_{32}) + (R_{1x} - F_x) * dL * \cos \theta_{32} + \left( R_{2y} + \frac{5}{2} * d_{m2} * g \right) * dL * \sin \theta_{32} = 0 \quad (22)$$

$$-K_T * \phi_{42} + (R_{1x} - F_x) * dL * \cos \theta_{42} + \left( R_{2y} + \frac{7}{2} * d_{m2} * g \right) * dL * \sin \theta_{42} = 0 \quad (23)$$

A partir de estas 8 expresiones, 4 para cada barra, se generalizarán las expresiones para introducirlas en el programa matemático y poder resolver el problema con una discretización mayor. De esta manera, al discretizar más las barras, la solución se aproximará más a la realidad del medio continuo.

### 10.3 Desarrollo del sistema matemático

El sistema matemático se define como el modelo de ecuaciones que se van a codificar en un programa informático de resolución numérica (en este caso, se empleará el programa Matlab).

El motivo, por el cual se emplea el uso de esta herramienta, es la gran complejidad para resolver el sistema de ecuaciones de una barra discretizada en N partes, siendo N un número elevado. Para ello, se define un subprograma en el que se introducen las ecuaciones. Este subprograma se llama “funcionesnonlingen” y es utilizado por el programa principal (llamado “Kevlargen”) para resolver el sistema a través de la función “solve”. Para emplear esta función se debe haber creado un vector x que contengan las soluciones del problema (las posiciones de las barras y las reacciones).

Para representar las barras como si fuesen un medio continuo, se traza una cuerda desde el punto medio de un segmento hasta el del siguiente. De este modo, se consigue

una única curva continua que representa la barra deformada. Es verdad que la curva no pasará por los puntos de unión de los segmentos, pero será una representación aproximada bastante cercana a la real. El comportamiento dinámico en los nodos de unión será calculado igual, ya que, el cálculo de la cuerda sólo se emplea para representar las barras, no para realizar el análisis cinemático.

El modelo matemático soporta todos los cálculos que se realicen, aunque estos no sean correctos físicamente. Es, en este punto, donde se deben analizar los datos obtenidos y ver si el dispositivo ha sido diseñado correctamente y puede desarrollar su labor sin ningún impedimento. En otras palabras, que el robot sea capaz de realizar todo el movimiento deseado sin limitaciones ni roturas. Para este estudio del error, se realizarán 420 evaluaciones y se recogerán en una hoja de cálculo.

Posteriormente, se procederá a visualizar las limitaciones del dispositivo; esto es, su área de trabajo. Para ello se ha modificado el programa principal, creando otro programa con el nombre de "workspace". Para analizar esta área se deberán realizar un bucle de evaluaciones. Mientras, el software deberá ir guardando cada posición del punto P que obtenga de cada evaluación.

En este caso, se evaluará el área de trabajo para la separación horizontal de 0.2 m entre barras. Las posiciones verticales se irán moviendo en cuanto el programa vaya avanzando en su compilación.

Las posiciones relativas se han programado como vectores que deben tener 50 posiciones a evaluar equidistantes en el intervalo [-0.8,0.8]. Para ello el paso debe de ser de 0.032.

$$v\_yA12d=-0.8:0.032:0.8;$$
$$v\_yA11d=-0.8:0.032:0.8;$$

Los vectores de las posiciones x del punto P y de las reacciones deberán de iniciarse con la misma longitud que los anteriores.

Finalmente, se emplea el uso de las funciones "figure", "plot" y "surf" para poder representar las soluciones.

En el anexo 10 (anexo 10.1 10.2 y 10.3), se adjuntan las programaciones de todos los programas utilizados.

## 11. DESCRIPCIÓN DE LOS RESULTADOS

### 11.1 Evaluación del error de discretización

Durante la realización del presente proyecto, la principal fuente de errores proviene de la aproximación que se realiza tomando el medio continuo de las barras como una serie de elementos discretizados.

Normalmente, para disminuir el error y que el modelo matemático discretizado se aproxime a la realidad, se emplea un gran número de elementos discretizados. Esto es, si se aproximan las barras de 1 metro de longitud a un modelo formado por 5 segmentos en cada barra, el resultado obtenido tendrá mayor error que si la aproximación se realiza a un elemento de 200 divisiones.

En este caso, lo que se ha realizado para poder escoger la mejor aproximación, se ha comparado, para un número distinto de discretizaciones, el error relativo que comete cada modelo y su coste computacional. Se ha realizado un análisis de 14 discretizaciones distintas en cada una de las 30 configuraciones estudiadas, haciendo un total de 420 evaluaciones.

Es importante evaluar el coste computacional, ya que, cuando el valor de discretización  $N$  crece, aumenta el tamaño del sistema de ecuaciones a resolver. En esta situación, el programa matemático tarda más tiempo en resolverlo, a la vez que emplea un espacio de almacenamiento mayor en la memoria del ordenador.

El método de comparación empleado se basa en el cálculo del error relativo de cada una de las 2 coordenadas que definen la posición del punto  $P(x_p, y_p)$ . Para calcular el error relativo, se ha realizado una amplia serie de evaluaciones en el modelo matemático. De esta manera, cuando se ha observado que el valor de las coordenadas convergía con el aumento del número de piezas discretizadas, se ha tomado ese valor de las coordenadas del punto  $P$  como valor de referencia para acometer el cálculo del error relativo de todas las demás.

Durante el proceso de evaluación, para todas las posiciones relativas de los apoyos evaluadas, se ha concluido que con  $N=500$  el sistema converge. No obstante, este valor supone un coste computacional elevado, es entonces cuando calculamos los errores relativos en base a este valor.



Posteriormente, cuando se han obtenido los errores relativos de las coordenadas del punto P, se calcula el módulo que forman estas dos. Acto seguido se procede a representarlas en una gráfica.

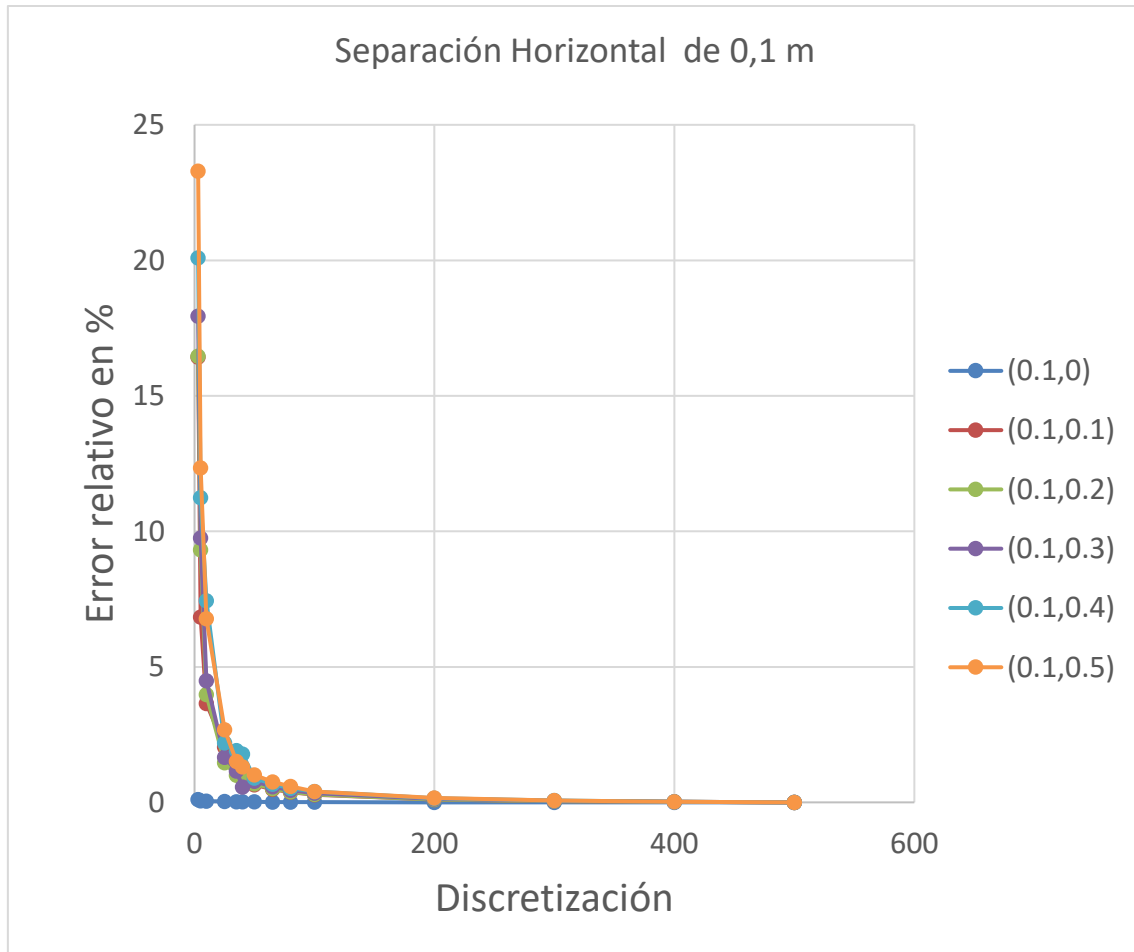


Figura 11.1.1: Gráfico de evaluación del error

Con la representación gráfica para las distintas posiciones, podemos visualizar de manera sencilla, cómo a medida que aumentamos la discretización, los errores disminuyen. En este punto, es donde el ingeniero deberá decidir qué valor de discretización es suficiente para afrontar el desarrollo del proyecto de manera eficiente. En otras palabras, deberá de aceptar el error que quiera cometer.

Para este proyecto hemos decidido que, para una discretización de 200 elementos por barra, se comete un error inferior al 1%. Se cree que este es el punto óptimo de precisión en relación al trabajo realizado por el programa.

Durante la observación de los resultados, se visualiza cómo los errores disminuyen con una velocidad elevada a medida que aumentamos el número de elementos. Los errores

son razonablemente aceptables y con ello se consigue uno de los objetivos del proyecto, la minimización del error para aproximarse al modelo real.

En el anexo 11.1, se exponen el resto de gráficas correspondientes a los ensayos realizados. En algunas gráficas, se observa qué, para algunas configuraciones, el error comienza siendo muy grande. Se cree que esto se debe a que son puntos característicos del sistema, y qué, por alguna razón, producen estos errores relativos tan elevados, los cuales se disminuyen a valores normales a partir de la discretización de 10 elementos.

## **11.2 Área de Trabajo y Reacciones**

El otro estudio que se marcaba como uno de los objetivos al inicio del proyecto es el cálculo del área de trabajo. Se trata de calcular la superficie que puede abarcar el manipulador con las dimensiones impuestas anteriormente.

Además, también se han calculado las reacciones que se producen en los apoyos, que coinciden con las fuerzas requeridas por los actuadores.

Para realizar el cálculo del área de trabajo, se ha modificado el programa principal que ha sido empleado para resolver el planteamiento del problema inicial.

Estas modificaciones consisten en realizar un barrido, en el eje y, por las diferentes posiciones relativas que pueden adoptar los actuadores. La posición horizontal permanece constante, con una separación de 0.2 m. A la vez que se realiza el barrido, se registran datos de interés como las reacciones y las posiciones del cabezal para cada configuración. De esta manera pediremos al programa que lo represente una vez acabados los cálculos.

### **11.2.1 Área de Trabajo**

A continuación, se procede a analizar los resultados obtenidos del cálculo del área de trabajo.

El área de trabajo es objeto de estudio por su utilidad a la hora de definir los límites del manipulador. De esta forma, se sabe si, para una posición dada del plano de trabajo, el manipulador será capaz de alcanzarla, o de si estará situada fuera de su campo de trabajo y habrá que mover la posición de todo el manipulador para poder alcanzarla.

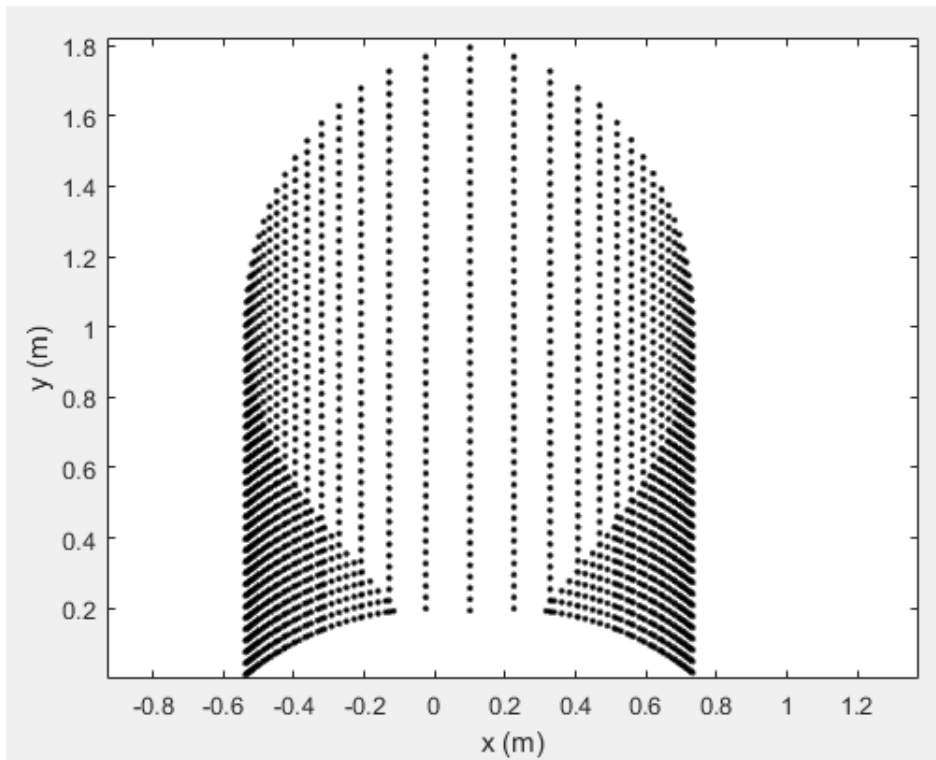


Figura 11.2.1: Área del espacio de trabajo

Recordando que las barras miden 1 metro de longitud, el barrido se ha realizado para las posiciones relativas comprendidas, en el eje  $y$ , en el intervalo  $[-0.8,0.8]$ , con un paso de 0.032.

Las posiciones que ocupan las barras en el eje horizontal son  $x=0$  y  $x=0.2$ .

En total se han realizado 2.500 iteraciones, en un tiempo de 7 minutos y 44 segundos. Se pueden apreciar claramente 2 límites laterales formados por dos rectas y los 2 límites superiores por 2 curvas.

### 11.2.2 Reacciones

Para realizar el cálculo de las reacciones en el eje  $y$ , simplemente se han registrado los valores  $R_{1y}$  y  $R_{2y}$  para representarlos en 2 gráficas distintas, una para cada reacción.

Se han generado 2 gráficas en 3D para representar la fuerza necesaria en función de la posición deseada.

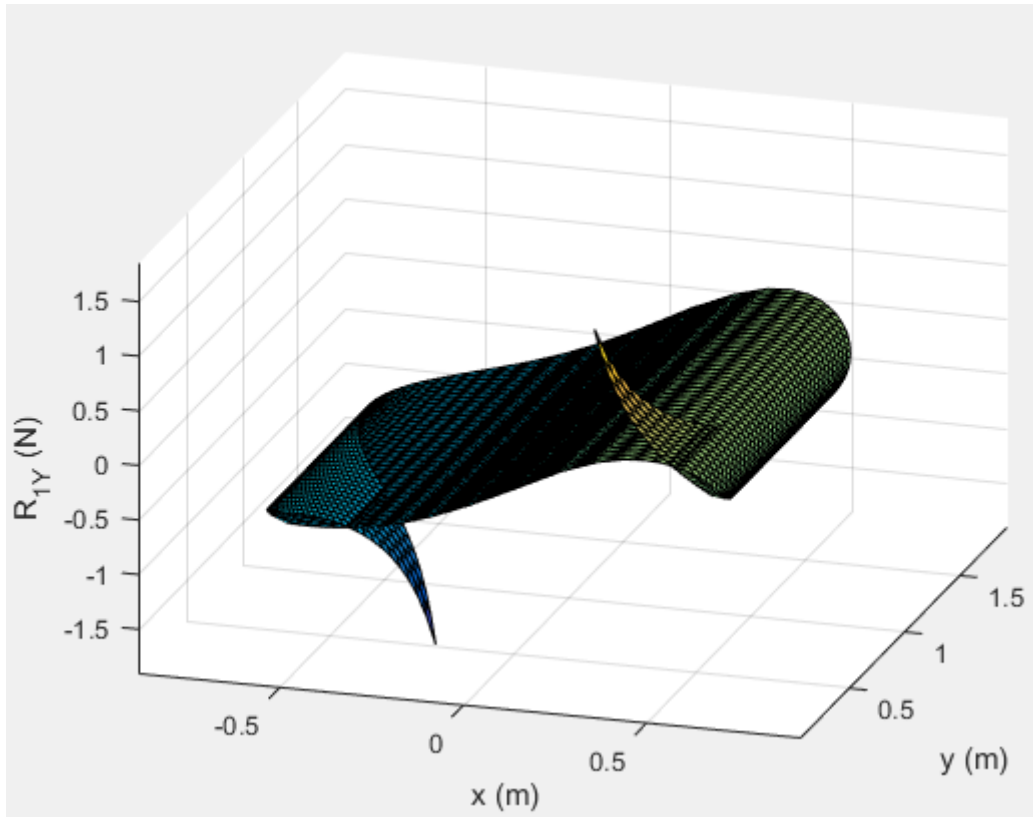


Figura 11.2.2 (1): Vista axonométrica del gráfico  $R_{1y}$

Las gráficas son simétricas respecto al eje vertical para las dos reacciones. Se puede apreciar la distribución que adopta en el espacio y como se acentúa en dos puntos.

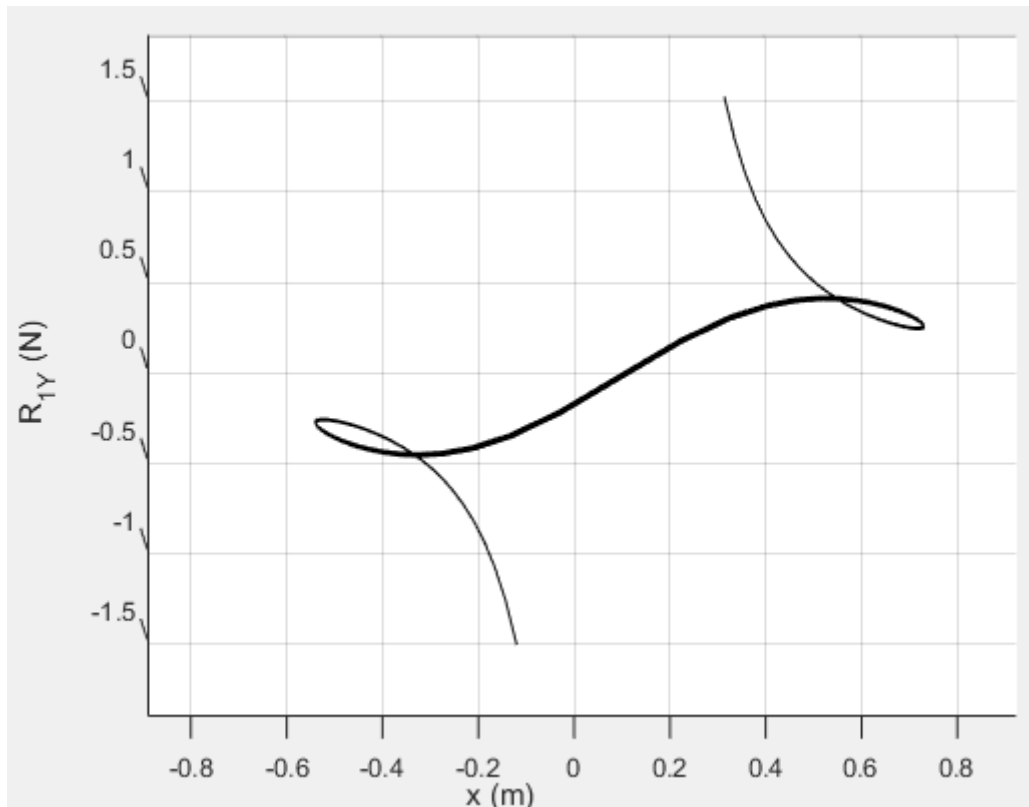


Figura 11.2.2 (2): Vista en alzado del gráfico  $R_{1y}$

Si se observa la gráfica en alzado, se ve el tipo de curva que representan las reacciones. Lo más llamativo de la representación son los dos puntos dobles que se observan. Estos puntos se producen cuando para una posición determinada del plano de trabajo, se producen 2 posibles configuraciones de las barras.

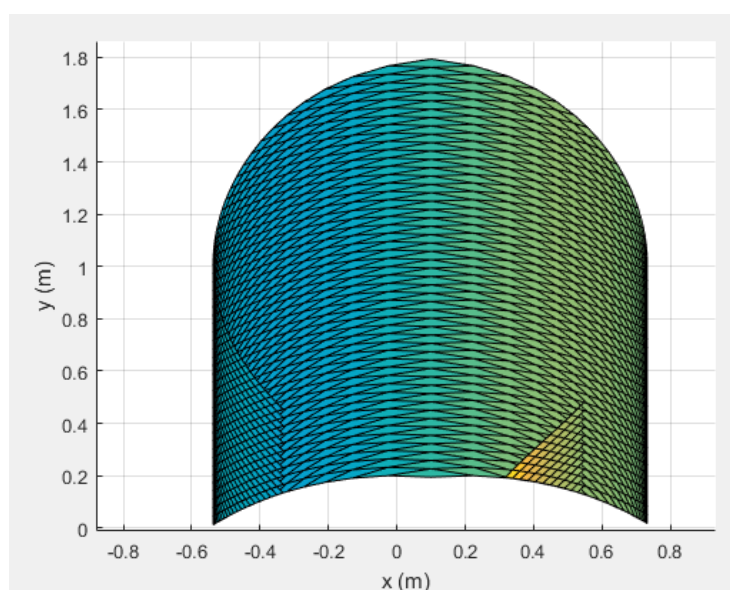


Figura 11.2.2 (3): Representación en planta (plano X-Y)

En esta última gráfica, es lógico ver como la proyección sobre el plano X-Y coincide con el área de trabajo. Esto se debe a que el área de trabajo está contenida en el mismo plano.

## 12. APLICACIÓN PRÁCTICA

Durante todo el proyecto, siempre se ha comentado la influencia que tenían todas las posibles aplicaciones para mejorar las técnicas actuales.

Se ha hablado de que el dispositivo podría ser implantado para ofrecer nuevas técnicas alternativas industriales a las que hoy en día se emplean. También se ha comentado el hecho que pueda ser empleado en el campo de la microcirugía, dada la necesidad de poder sortear obstáculos y requerir de una elevada precisión.

Sin embargo, en algunos apartados del documento, se ha dejado ver un especial interés por la rehabilitación médica. La aplicación que se expondrá a continuación está relacionada con los pacientes que han sufrido un ictus, también conocida como accidente cerebrovascular (ACV).

Un ictus es un acceso morbooso que se manifiesta de modo súbito y violento. Comúnmente, se producen por una patología en los vasos sanguíneos que suministran la sangre al cerebro. La mayor parte de los individuos que lo padecen sufren lesiones en el cerebro, dejando ciertas funciones dañadas dependiendo de cuál haya sido el área afectada.

La rehabilitación de un ACV busca minimizar las discapacidades experimentadas por el paciente para facilitar su reintegración social y laboral. La recuperación íntegra no se produce en ningún caso, siempre quedan secuelas. La velocidad de rehabilitación es mayor en los primeros meses y va descendiendo progresivamente hasta alcanzar los 12 meses, momento en el que ya no se suele experimentar una mejora apreciable.

En la actualidad, los sistemas de rehabilitación para caminar no están extensiblemente desarrollados.

La terapia más empleada es aquella en la que, al sujeto, se le sustenta con un arnés anclado al techo y se le dispone sobre una cinta de actividad deportiva.



Figura 12.1 (1): Rehabilitación con el sistema convencional

Esta práctica no tiene ningún efecto sobre los pacientes que no son capaces de mover las piernas por sí mismos. Es cierto que existen dispositivos robóticos que ayudan a caminar al paciente, pero son de un coste elevado y privativo para gran parte de la sociedad. Es aquí donde se muestra la oportunidad de introducir el dispositivo para cubrir una necesidad existente.

El diseño del dispositivo consistiría en la unión de varios pares de barras en paralelo para poder aumentar la rigidez del sistema. Se ha supuesto que con la unión de 5 pares de barras en paralelo separados una distancia de 5 cm entre los planos de movimiento de unos y otros sería suficiente.

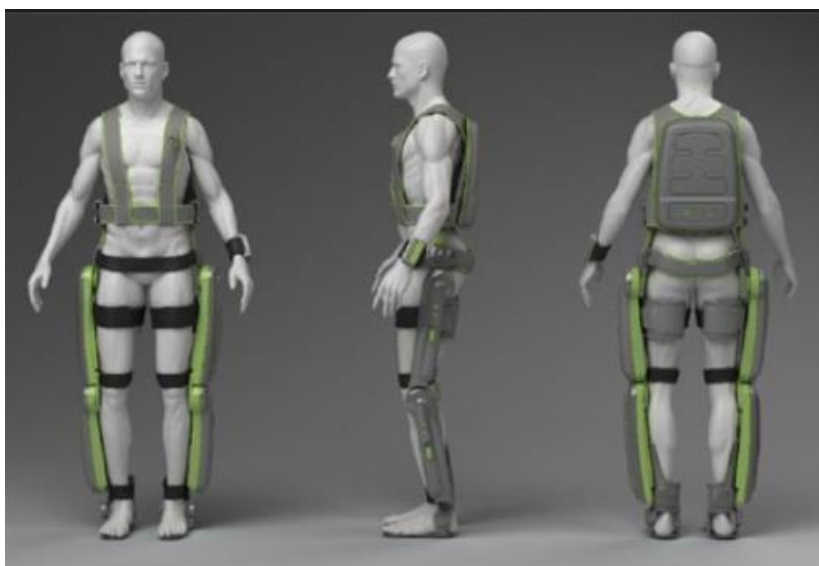


Figura 12.1 (2): Sistema propuesto

En la figura, se pueden apreciar como las barras del dispositivo irían cubiertas por una carcasa para proteger frente a posibles agentes que las puedan dañar.



Con esta aplicación propuesta se ha buscado un beneficio social; de este modo se facilita el acceso a esta tecnología a los centros médicos con un presupuesto más reducido.

## **13. DESCRIPCIÓN DE TAREAS. DIAGRAMA GANTT.**

### **13.1 Equipo de trabajo**

El equipo de trabajo para este proyecto está compuesto por el director del proyecto, Francisco Javier Campa Gómez, y por el alumno, Jon De Benito Arribalza, quién realiza y redacta el TFG.

### **13.2 Tareas**

En el presente apartado se explicarán las tareas en las que se ha decidido dividir el proyecto para conseguir una correcta planificación. A continuación, se expondrán las tareas según el orden cronológico:

#### T.1 Análisis del estado del arte

En esta primera tarea, se realiza un estudio de otros trabajos que tienen características en común al que se va a desarrollar. Se realiza revisando la bibliografía, de tal modo que se pueda hacer una idea general de que características tendrá el presente trabajo y en que principios se basará.

#### T.2 Planificación

En esta segunda tarea se establecieron las necesidades del trabajo, el alcance, los objetivos y cómo se iban a distribuir las tareas en el tiempo. También se contemplaron otros aspectos como el contexto en el que se iba a situar, teniendo en cuenta las posibles aplicaciones.

#### T.3 Planteamiento del modelo

Esta tarea es donde se determina el proceso de planteamiento y obtención de las ecuaciones que serán la base de cálculo del manipulador.

##### T.3.1 Análisis Cinemático

Es una subtarea que recoge el planteamiento de las ecuaciones cinemáticas que describen el comportamiento de las barras del sistema.

### T.3.2 Análisis Cuasiestático

En esta subtarea se analizan las fuerzas y momentos a los cuales se someten las barras.

### T.3.3 Planteamiento de ecuaciones

En esta última subtarea se recogen las ecuaciones obtenidas en las dos anteriores. De tal manera que combinando y simplificando las ecuaciones se obtienen unas ecuaciones preparadas para ser introducidas en el programa matemático.

### T.4 Prácticas de ordenador

Seguidamente, se realiza la resolución del problema planteado y se evalúan los resultados obtenidos.

#### T.4.1 Obtención de resultados (Matlab)

En esta subtarea se concentran la mayor parte de los esfuerzos para llevar a cabo la realización del proyecto. Se procede a codificar el programa con las ecuaciones previamente obtenidas. Para la resolución del problema se utilizará el software de Matlab. Los resultados se representan gráficamente en función de la posición de todos los puntos de las barras, incluida la posición del cabezal que es la solución al problema.

#### T.4.2 Evaluación de resultados

En este apartado, se comparan los resultados para distintas configuraciones del sistema en función de su grado de discretización. De esta manera, podemos evaluar el error que se comete al introducir una discretización más pequeña para agilizar la compilación del programa y obtener los resultados de una manera más rápida.

#### T.4.3 Obtención del espacio de trabajo (Matlab)

En la última subtarea, se vuelve a emplear el uso del software Matlab con el objetivo de obtener el espacio de trabajo en el que puede trabajar el manipulador dado un dimensionamiento específico. Para ello se realizan modificaciones sobre el programa principal antes codificado.

### T.5 Análisis de alternativas

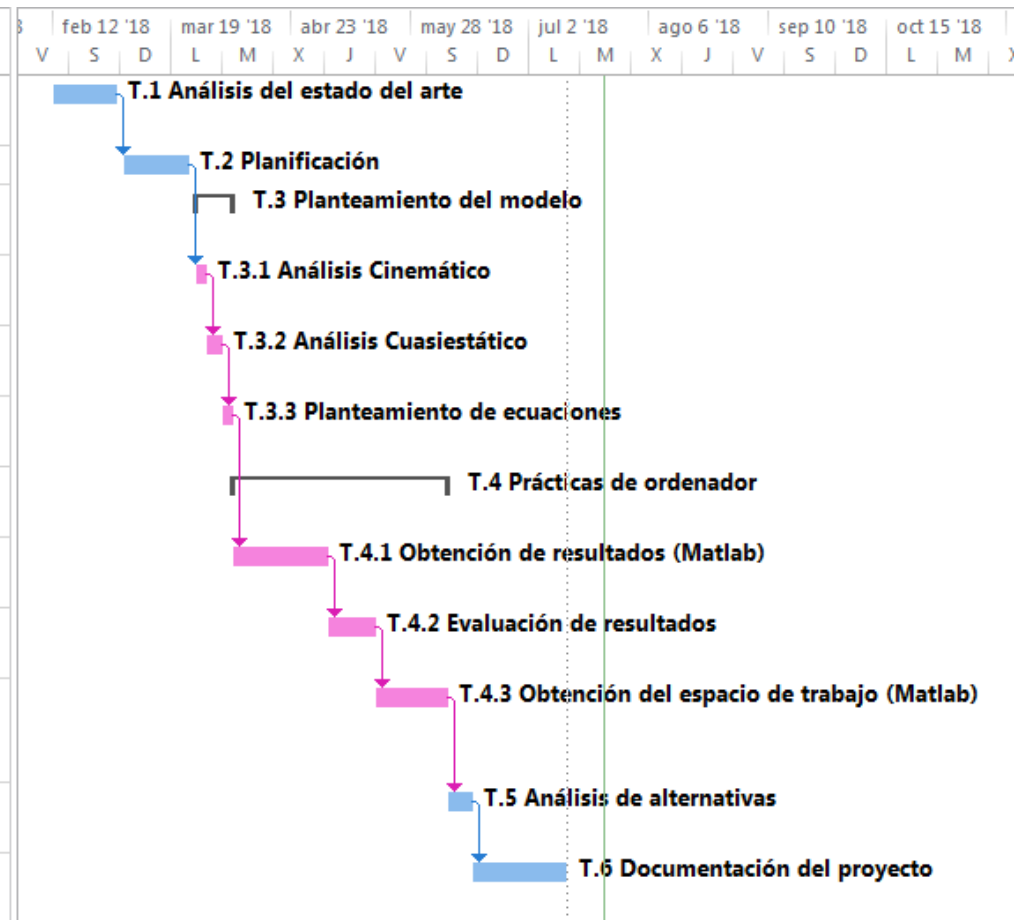
En la presente tarea, se procede a analizar qué otras opciones se podrían ofrecer como solución al sistema. En este caso, se contempla el hecho de emplear otros materiales para la fabricación de las barras.

### T.6 Documentación del proyecto

Finalmente, se recoge todo el trabajo realizado en el proyecto para documentarlo. Se elaborará un informe completo y detallado del trabajo realizado.

### 13.3 Diagrama Gantt

Nombre de tarea	Duración	Comienzo	Fin	Predecesoras
T.1 Análisis del estado del arte	15 días	lun 2/12/18	vie 3/2/18	
T.2 Planificación	15 días	lun 3/5/18	vie 3/23/18	1
▣ T.3 Planteamiento del modelo	9 días	lun 3/26/18	jue 4/5/18	
T.3.1 Análisis Cinemático	3 días	lun 3/26/18	mié 3/28/18	2
T.3.2 Análisis Cuasiestático	3 días	jue 3/29/18	lun 4/2/18	4
T.3.3 Planteamiento de	3 días	mar 4/3/18	jue 4/5/18	5
▣ T.4 Prácticas de ordenador	45 días	vie 4/6/18	jue 6/7/18	
T.4.1 Obtención de resultados	20 días	vie 4/6/18	jue 5/3/18	6
T.4.2 Evaluación de resultados	10 días	vie 5/4/18	jue 5/17/18	8
T.4.3 Obtención del espacio de trabajo (Matlab)	15 días	vie 5/18/18	jue 6/7/18	9
T.5 Análisis de alternativas	5 días	vie 6/8/18	jue 6/14/18	10
T.6 Documentación del proyecto	20 días	vie 6/15/18	jue 7/12/18	11



## 14. DESCARGO DE GASTOS

En este apartado se realizará el presupuesto detallado para poder llevar a cabo la realización del proyecto. Se indicarán los gastos en distintos conceptos desglosados por partidas, de tal manera que sea más sencillo de comprender.

### 14.1 Horas internas

La partida de horas internas recoge el coste de recursos humanos que supone en el proyecto. Tiene en cuenta las horas remuneradas que una persona dedica en el proyecto. Para ello, se ha calculado el número de horas que se han dedicado al proyecto por parte de cada persona involucrada.

En este caso, se ha tenido en cuenta que en el proyecto han participado el director del mismo y el alumno (ingeniero industrial).

Horas internas	Número de horas	Tasa (€/h)	Coste
Director del proyecto	40 h	50 €/h	2.000 €
Ingeniero Industrial	100 h	30 €/h	3.000 €
<b>TOTAL</b>			<b>5.000 €</b>

Tabla 14.1: Partida de coste de recursos humanos y horas de ingeniería

### 14.2 Amortizaciones

En el concepto de amortizaciones, se incluyen los gastos ocasionados por el uso de recursos materiales que no han sido adquiridos exclusivamente para este proyecto. Es por esto que se tendrán en cuenta el coste de los ordenadores y licencias de software atendiendo a las horas que se emplearán de estos recursos en la realización del trabajo.

Amortizaciones	Coste total	Horas utilizadas	Horas útiles	Coste parcial
Ordenador portátil	1.450 €	100 h	8.500 h	17,06 €
MatLab R2016a	2.000 €	40 h	3.000 h	26,67 €
Gantt Project	869 €	3 h	3000 h	0,87 €
Microsoft office	580 €	60 h	3000 h	11,6 €
<b>TOTAL</b>				<b>56,20€</b>

Tabla 14.2: Partida de coste de amortizaciones

### 14.3 Gastos

En la última partida de los gastos directos, se contemplan los recursos adquiridos en exclusiva para la realización de este proyecto. Básicamente se han recogido los gastos en recursos materiales.

Gastos	Coste unitario	Cantidad	Coste
Bolígrafos	1 €	7	7,00 €
Paquetes de hojas	5 €	1	5,00 €
<b>TOTAL</b>			<b>12,00 €</b>

Tabla 14.3: Partida de coste de recursos materiales

### 14.4 Subcontrataciones

Este proyecto no incluye costes en subcontrataciones. Si se hubiese llevado a cabo la construcción del manipulador en este TFG, sí hubiesen aparecido gastos directos con estas características.

### 14.5 Costes indirectos

Los costes indirectos son aquellos definidos como no atribuibles directamente al trabajo realizado. Normalmente se le asignan un valor del 5% adicional a los costes directos totales, siendo estos gastos de 253,41 €.

### 14.6 Presupuesto final

El presupuesto total o final es la suma total de todos los gastos que conlleva el proyecto. Es decir, hay que tener en cuenta los costes directos, costes indirectos e imprevistos. Finalmente, se logra calcular que el presupuesto requerido asciende a 5.321,61 €.

Concepto	Coste
Horas internas	5.000,00 €
Amortizaciones	56,20 €
Gastos	12,00 €
Subcontrataciones	0,00 €
<b>Subtotal 1</b>	5.068,20 €
Costes indirectos (5%)	253,41 €
<b>Total</b>	<b>5.321,61 €</b>

Tabla 14.6: Resumen y partida total de descargo de gastos



## 15. CONCLUSIONES

En el este apartado, se procede a realizar una breve reflexión acerca de los resultados y las observaciones que se han extraído durante la realización del proyecto.

Es irrefutable el dominio que se debe tener, tanto de los conceptos mecánicos como matemáticos, para poder realizar una labor de I+D en un proyecto. Además, se requiere un cierto manejo del software MatLab para alcanzar todos los objetivos propuestos.

Ante tal complejidad, se debe recalcar el hecho de que esto es un TFG y que ha estado supervisado muy de cerca por un experimentado director. El alumno, en determinadas ocasiones, presentaba ciertas dudas e inexperiencia que se han compensado con esta ayuda.

Por otra parte, la compleja programación del software, ha requerido de una importante inversión de tiempo. Los mayores esfuerzos se han focalizado en ello, y esto ha permitido obtener unos resultados notablemente satisfactorios a la hora de analizar los resultados.

La creación de esta nueva técnica para construir y diseñar manipuladores permite realizarlo con una inversión económica menor. Se trata de manipuladores más sencillos. El programa matemático permite diseñar un manipulador de esta tipología con cualesquiera materiales y dimensiones en cuestión de minutos. Incluso, el programa permite introducir 2 barras con un material distinto para cada una de ellas.

En la descripción de resultados, se observa cómo los errores cometidos se minimizan con el aumento de la discretización. Permite al ingeniero ver qué error se comete para cada discretización y que tanto por ciento de este está dispuesto a aceptar. Por otra parte, la obtención del área de trabajo permite observar si el manipulador es capaz de alcanzar un punto determinado del plano y donde se sitúan sus límites. Es una herramienta de gran utilidad si se desea fabricar un dispositivo que requiera moverse entre 2 puntos concretos del plano sin reposicionar todo el sistema.

Sin duda, al beneficio científico se le debe sumar el social como principales ventajas del instrumento. La posibilidad que ofrece en la mejora de la calidad de vida de algunas personas es una gran oportunidad para ellas. La medicina, de la mano de la ingeniería,

se sumerge en la búsqueda de nuevas terapias para las personas afectadas con discapacidades.

El nivel de evolución en los últimos años ha sido elevado, en parte gracias a todos los proyectos de I+D+I que se llevan a cabo por equipos de investigadores. Actualmente, se sigue librando una importante batalla contra las enfermedades.

En definitiva, el planteamiento y la búsqueda de una solución frente a una necesidad existente aporta una gran experiencia de cara al alumno. El trabajo permite experimentar cual es la metodología que se debe emplear y el empleo de las herramientas de las que se disponen. En proyectos de I+D, los recursos suelen ser limitados, para ello ha sido indispensable aprender a desarrollar el trabajo con las herramientas que se disponía.

## 16. BIBLIOGRAFÍA

[1] Campa, F.J., *Manipulador flexible de 2 grados de libertad. Apuntes. Universidad del País Vasco*, Curso 2017-2018.

[2] Desc. (2016). Los aspectos de la rehabilitación (Fecha del último acceso: 18/07/2018), de Federación Española del Ictus. Disponible en:

<https://ictusfederacion.es/infoictus/rehabilitacion/>

[3] Desc. (2005). Cinemática. (Fecha del último acceso: 14/07/2018), de Wikipedia. Disponible en:

<https://es.wikipedia.org/wiki/Cinem%C3%A1tica>

[4] Desc. (2005). Dinámica. (Fecha del último acceso: 14/07/2018), de Wikipedia. Disponible en:

<https://es.wikipedia.org/wiki/Din%C3%A1mica>

[5] Desc. (2016). Manual de MatLab (Fecha del último acceso: 12/07/2018), Mathworks. Disponible en:

[https://www.mathworks.com/help/pdf\\_doc/matlab/getstart.pdf](https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf)

[6] Desc. (2018). ¿Cuál es el futuro que le espera a la robótica industrial? (Fecha del último acceso: 14/03/2018), Universia España. Disponible en:

<http://noticias.universia.es/ciencia-tecnologia/noticia/2018/02/14/1157859/cual-futuro-espera-robotica-industrial.html>

[7] Desc. (2011). Kevlar (Fecha del último acceso: 14/04/2018). Disponible en:

<https://es.wikipedia.org/wiki/Kevlar>

[8] Desc. (2008). Constantes elastoplásticas de diferentes materiales (Fecha del último acceso: 17/04/2018), de Wikipedia. Disponible en:

[https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Constantes\\_el%C3%A1stopl%C3%A1sticas\\_de\\_diferentes\\_materiales](https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Constantes_el%C3%A1stopl%C3%A1sticas_de_diferentes_materiales)

[9] Desc. (2010). Teflón (PTFE) (Fecha del último acceso: 17/04/2018), de Phemsa. Disponible en:

<http://www.phemsa.es/?p=103>

[10] Zuazo, J.I., Proyectos de ingeniería. Apuntes. Universidad del País Vasco, Curso 2017-2018.

[11] Tárrago, J.A., Elasticidad y resistencia de materiales. Apuntes. Universidad del País Vasco, Curso 2016-2017.

[12] Vallejo, J., Cálculo de máquinas. Apuntes. Universidad del País Vasco, Curso 2017-2018.

## 17.ANEXOS

### ANEXO 10

#### Anexo 10.1

##### Subprograma funcionesnonlingen

Function F = funcionesnonlingen (x, cte, dL, Fx, Fy, xA11d, yA11d, xA12d, yA12d, dm1, dm2, g, N)

%x1=M1

%x2=th21

%x3=th31

%x4=th41

%x5=M2

%x6=th22

%x7=th32

%x8=th42

%x9=R1x

%x10=R1y

%ecuaciones de la barra 1

F(1)=x(1)+cte\*tan(x(2)/2)+x(2\*N+1)\*dL;

F(2) = -cte\*(tan(x(2)/2)-tan((x(3)-x(2))/2)) + x(2\*N+1)\*dL\*cos(x(2)) +  
(x(2\*N+2) + (3/2)\*dm1\*g)\*dL\*sin(x(2));

for jj=3:N-1

F(jj) = -cte\*(tan((x(jj)-x(jj-1))/2)-tan((x(jj+1)-x(jj))/2)) +  
x(2\*N+1)\*dL\*cos(x(jj)) + (x(2\*N+2)+(jj-(1/2))\*dm1\*g)\*dL\*sin(x(jj));

end;

F(N) = -cte\*tan((x(N)-x(N-1))/2)+x(2\*N+1)\*dL\*cos(x(N))+(x(2\*N+2)+(N-  
(1/2))\*dm1\*g)\*dL\*sin(x(N));

%ecuaciones de la barra 2

F(N+1) = x(N+1)+cte\*tan(x(N+2)/2)-(Fx\*dL+x(2\*N+1)\*dL);

F(N+2) = -cte\*(tan(x(N+2)/2)-tan((x(N+3)-x(N+2))/2)) -  
(Fx\*dL+x(2\*N+1)\*dL)\*cos(x(N+2))-(Fy\*dL+x(2\*N+2)\*dL+(3/2)  
\*dm2\*g\*dL)\*sin(x(N+2))

for jjj=N+3:2\*N-1

F(jjj) = -cte\*(tan((x(jjj)-x(jjj-1))/2)-tan((x(jjj+1)-  
x(jjj))/2))-(Fx\*dL+x(2\*N+1)\*dL)\*cos(x(jjj))-  
(Fy\*dL+x(2\*N+2)\*dL+(jjj-N-(1/2))\*dm2\*g\*dL)\*sin(x(jjj));

end;

$$F(2*N) = -cte * \tan((x(2*N) - x(2*N-1))/2) - (F_x * dL + x(2*N+1) * dL) * \cos(x(2*N)) - (F_y * dL + x(2*N+2) * dL + (N - 1/2) * dm_2 * g * dL) * \sin(x(2*N));$$

`%ECUACIONES DE LA CINEMÁTICA`

$$F(2*N+1) = -(x_{A12d} - x_{A11d}) / dL;$$

$$F(2*N+2) = -(y_{A12d} - y_{A11d}) / dL;$$

`for ii=1:N-1`

$$F(2*N+1) = F(2*N+1) + \sin(x(ii+N+1)) - \sin(x(ii+1));$$

$$F(2*N+2) = F(2*N+2) + \cos(x(ii+1)) - \cos(x(ii+N+1));$$

`end;`

## **Anexo 10.2**

### **Programa Kevlaren**

```
clear all;clc;close all;

time0=cputime;

%Longitud de la viga (m)
L=1;%0.673;%1;%

%Area seccion (m^2)
rad=0.001;
A=pi*rad^2;

%Momento de inercia de la seccion
Iz=pi*rad^4/4;

%Módulo elástico
E=80*1e+09;%kevlar de

%densidad de las barras en kg/m3
den1=1440*1;
den2=1440*1;

%gravedad
g=9.81;

%Número de elementos
N=50;
dL=L/N;

%masas de las barras

m1=den1*A*L;
m2=den2*A*L;
```

```

dm1=m1/N;
dm2=m2/N;

%Número de vigas
Nv=2;

for ii=1:Nv
mat_x(1:(N+1),ii)=0;
mat_y(1:(N+1),ii)=(0:N)*dL;
end;

plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'k');hold
on;plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'ko');hold on
plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'b');hold
on;plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'bo')

% Posicion deseada de A12 y A11
xA12d=0.2;
yA12d=0.2;
xA11d=0;
yA11d=0;

%Inicializando vector de soluciones
sol=zeros(2*N+2,1);

%Fuerzas externas en el TCP
Fx=0;
Fy=0;

cte=2*E*Iz/dL;
fun = @(x)funcionesnonlingen (x,cte,dL,Fx,Fy,xA11d,yA11d,xA12d,
yA12d,dm1,dm2,g,N);

x0 = sol;
x
fsolve(fun,x0,optimset('Display','iter','MaxFunEvals',35000,'Max
Iter',600,'TolFun',0.001));
%x1=M1 %x2=th21 %x3=th31 %x4=th41
%x5=M2 %x6=th22 %x7=th32 %x8=th42 %x9=R1x %x10=R1y
R1x=x(2*N+1);
R1y=x(2*N+2);
R2x=-Fx-R1x;
R2y=-Fy-R1y;

% Barra 2
mat_x(1,2)=xA12d;
mat_y(1,2)=yA12d;
mat_x(2,2)=xA12d;
mat_y(2,2)=yA12d+dL;

for ii=3:N+1
mat_x(ii,2)=xA12d-dL*sum(sin(x(N+2:N-1+ii)));
mat_y(ii,2)=yA12d+dL+dL*sum(cos(x(N+2:N-1+ii)));
end;

% Barra 1
mat_x(2,1)=0;

```

```

mat_y(2,1)=dL;

for ii=3:N+1
    mat_x(ii,1)=-dL*sum(sin(x(2:(ii-1))));
    mat_y(ii,1)=dL+dL*sum(cos(x(2:(ii-1))));
end;

gcf; hold on;
%DEFORMACION BARRAS 1 Y 2
plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'k');hold
on;plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'ko');hold on
plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'b');hold
on;plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'bo')
%REPRESENTAR VECTORES FUERZA
quiver(mat_x(1,2),mat_y(1,2),R2x,R2y,0.05,'r')
quiver(mat_x(1,1),mat_y(1,1),R1x,R1y,0.05,'r')
quiver(mat_x(N+1,2),mat_y(N+1,2),Fx,Fy,0.05,'r')
xlabel('x (m)')
ylabel('y (m)')
%VISUALIZAR VALORES
text(1.1*mat_x(1,2),1.1*mat_y(1,2),[num2str(sqrt(R2x^2+R2y^2)) ' N, ' num2str(180/pi*atan2(R2y,R2x)) ' °'])
text(0,-0.1,[num2str(sqrt(R1x^2+R1y^2)) ' N, ' num2str(180/pi*atan2(R1y,R1x)) ' °'])
text(1.1*mat_x(N+1,2),mat_y(N+1,2),[num2str(mat_x(N+1,2)) ' m, ' num2str(mat_y(N+1,2)) ' m'])
text(1.1*mat_x(N+1,2),1.1*mat_y(N+1,2),[num2str(sqrt(Fx^2+Fy^2)) ' N, ' num2str(180/pi*atan2(Fy,Fx)) ' °'])

%Construcción cuerda
%tramo 0
vx(:,1)=zeros(2*N+2,1);
vx(1:2*N+2,2)=mat_x(1,2);

for ii=1:Nv
vy(:,ii)=[(mat_y(1,ii)):dL/2/(10):(mat_y(1,ii)+dL/2)]';
end;
%tramo 1
rho11=dL/2/tan(x(2)/2);
rho12=dL/2/tan(x(N+2)/2);
xc1=-rho11;
yc1=dL/2;
xc2=mat_x(1,2)-rho12;
yc2=mat_y(1,2)+dL/2;
vth1=0:x(2)/10:x(2);
vth2=0:x(N+2)/10:x(N+2);
vx(11:(11+10),1)=xc1+rho11*cos(vth1);
vy(11:(11+10),1)=yc1+rho11*sin(vth1);
vx(11:(11+10),2)=xc2+rho12*cos(vth2);
vy(11:(11+10),2)=yc2+rho12*sin(vth2);
% gcf;
% plot(vx,vy,'LineWidth',3)
long=(11+10);
%tramo ii
for jj=2:N-1
rho11=dL/2/tan((x(jj+1)-x(jj))/2);
rho12=dL/2/tan((x(N+jj+1)-x(N+jj))/2);
xc1=mat_x(jj,1)-dL/2*sin(x(jj))-rho11*cos(x(jj));
yc1=mat_y(jj,1)+dL/2*cos(x(jj))-rho11*sin(x(jj));
xc2=mat_x(jj,2)-dL/2*sin(x(N+jj))-rho12*cos(x(N+jj));
yc2=mat_y(jj,2)+dL/2*cos(x(N+jj))-rho12*sin(x(N+jj));

```



```

vth1=x(jj):(x(jj+1)-x(jj))/10:x(jj+1);
vth2=x(N+jj):(x(N+jj+1)-x(N+jj))/10:x(N+jj+1);
vx(long+1:(long+11),1)=xc1+rho11*cos(vth1);
vy(long+1:(long+11),1)=yc1+rho11*sin(vth1);
vx(long+1:(long+11),2)=xc2+rho12*cos(vth2);
vy(long+1:(long+11),2)=yc2+rho12*sin(vth2);
% gcf;
% plot(xc1,yc1,'kx')
% plot(xc2,yc2,'rx')
% axis equal
% gcf;
%
plot(vx(long+1:(long+11),:),vy(long+1:(long+11),:),'k','LineWidth
h',3)
long=long+11;
end;
% gcf;
% plot(vx,vy,'LineWidth',3)

%tramo final
jj=0.5:0.05:1;
for ii=1:Nv
vx(long+1:(long+11),ii)=[mat_x(end-1,ii)+jj*(mat_x(end,ii)-
mat_x(end-1,ii))]';
vy(long+1:(long+11),ii)=[mat_y(end-1,ii)+jj*(mat_y(end,ii)-
mat_y(end-1,ii))]';
end;
gcf;
plot(vx,vy,'LineWidth',3)
axis equal
time1=cputime;
disp(time1-time0)

```

### **Anexo 10.3**

#### **Programa workspace**

```

clear all;clc;close all;

time0=cputime;
% vector de todas las coordenadas y a analizar

v_yA12d=-0.8:1.6/50:0.8;
v_yA11d=-0.8:1.6/50:0.8;

%se deben inicializar los vectores solución
v_xp=zeros(length(v_yA12d),length(v_yA11d));
v_yp=zeros(length(v_yA12d),length(v_yA11d));
v_R1y=zeros(length(v_yA12d),length(v_yA11d));
v_R2y=zeros(length(v_yA12d),length(v_yA11d));

%se inicia el contador
cont=1;

%Longitud de la viga (m)
L=1;%0.673;%1;%

%Area seccion (m^2)
rad=0.001;

```

```

A=pi*rad^2;

%Momento de inercia de la seccion
Iz=pi*rad^4/4;

%Módulo elástico
E=80*1e+09;%kevlar de

%densidad de las barras en kg/m3
den1=1440*1;
den2=1440*1;

%gravedad
g=9.81;

%Número de elementos
N=100;
dL=L/N;

%masas de las barras
m1=den1*A*L;
m2=den2*A*L;

dm1=m1/N;
dm2=m2/N;

%Número de vigas
Nv=2;

for cont=1:length(v_yA12d)
    for cont2=1:length(v_yA11d)

        % Posicion deseada de A12 y A11
        xA12d=0.2;
        yA12d=v_yA12d(cont);
        xA11d=0;
        yA11d=v_yA12d(cont2);
        for ii=1:Nv
            mat_x(1:(N+1),ii)=0;
            mat_y(1:(N+1),ii)=(0:N)*dL;
        end;

        %                               plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'k');hold
on;plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'ko');hold on
        %                               plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'b');hold
on;plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'bo')

%Inicializando vector de soluciones
sol=zeros(2*N+2,1);

%Fuerzas externas en el TCP
Fx=0;
Fy=0;

```

```

cte=2*E*Iz/dL;
fun = @(x)funcionesnonlingen (x,cte,dL,Fx,Fy,xA11d,yA11d,
xA12d, yA12d,dm1,dm2,g,N);

x0 = sol;
x
=
fsolve(fun,x0,optimset('MaxFunEvals',35000,'MaxIter',600,'Tol
Fun',0.001));
%x1=M1 %x2=th21 %x3=th31 %x4=th41
%x5=M2 %x6=th22 %x7=th32 %x8=th42 %x9=R1x
%x10=R1y
R1x=x(2*N+1);
R1y=x(2*N+2);
R2x=-Fx-R1x;
R2y=-Fy-R1y;

% Barra 2
mat_x(1,2)=xA12d;
mat_y(1,2)=yA12d;
mat_x(2,2)=xA12d;
mat_y(2,2)=yA12d+dL;

for ii=3:N+1
    mat_x(ii,2)=xA12d-dL*sum(sin(x(N+2:N-1+ii)));
    mat_y(ii,2)=yA12d+dL+dL*sum(cos(x(N+2:N-1+ii)));
end;

% Barra 1
mat_x(1,1)=0;
mat_y(1,1)=yA11d;
mat_x(2,1)=0;
mat_y(2,1)=yA11d+dL;

for ii=3:N+1
    mat_x(ii,1)=-dL*sum(sin(x(2:(ii-1))));
    mat_y(ii,1)=yA11d+dL+dL*sum(cos(x(2:(ii-1))));
end;

% gcf; hold off;
%DEFORMACION BARRAS 1 Y 2
% p1=plot(mat_x(:,2),mat_y(:,2),'b');hold on;
% p2=plot(mat_x(:,1),mat_y(:,1),'b');
%REPRESENTAR VECTORES FUERZA
% quiver(mat_x(1,2),mat_y(1,2),R2x,R2y,0.05,'r')
% quiver(mat_x(1,1),mat_y(1,1),R1x,R1y,0.05,'r')
% quiver(mat_x(N+1,2),mat_y(N+1,2),Fx,Fy,0.05,'r')
% VISUALIZAR VALORES
%
text(1.1*mat_x(1,2),1.1*mat_y(1,2),[num2str(sqrt(R2x^2+R2y^2)
) ' N, ' num2str(180/pi*atan2(R2y,R2x)) ' °'])
% text(0,-0.1,[num2str(sqrt(R1x^2+R1y^2)) ' N, '
num2str(180/pi*atan2(R1y,R1x)) ' °'])
%
text(1.1*mat_x(N+1,2),mat_y(N+1,2),[num2str(mat_x(N+1,2)) ' m,
' num2str(mat_y(N+1,2)) ' m'])
%
text(1.1*mat_x(N+1,2),1.1*mat_y(N+1,2),[num2str(sqrt(Fx^2+Fy^
2)) ' N, ' num2str(180/pi*atan2(Fy,Fx)) ' °'])

%Construcción cuerda

```

```

%Guardar Posicion del TCP

v_xp(cont,cont2)=mat_x(N+1,2);
v_yp(cont,cont2)=mat_y(N+1,2);
v_R1y(cont,cont2)=R1y;
v_R2y(cont,cont2)=R2y;

%
plot(v_xp(1:cont,1:cont2),v_yp(1:cont,1:cont2),'k. ');
%       xlabel('x (m) ')
%       ylabel('y (m) ')
%       pause(0.00001)
clc
disp((cont/length(v_yA12d))*100)
end;

end;

gcf;
%                               plot(v_xp(:,1),v_yp(:,1),'K');hold
on;plot(v_R1y(:,1),'b');hold on;plot(v_R2y(:,1),'r')
plot(v_xp(1:cont,1:cont2),v_yp(1:cont,1:cont2),'k. ');
axis equal
xlabel('x (m) ')
ylabel('y (m) ')

figure;
surf(v_xp,v_yp,v_R2y)
xlabel('x (m) ')
ylabel('y (m) ')
zlabel('R_2_Y (N) ')

figure;
surf(v_xp,v_yp,v_R1y)
xlabel('x (m) ')
ylabel('y (m) ')
zlabel('R_1_Y (N) ')

time1=cputime;
disp(time1-time0)

```

**Anexo11.1**

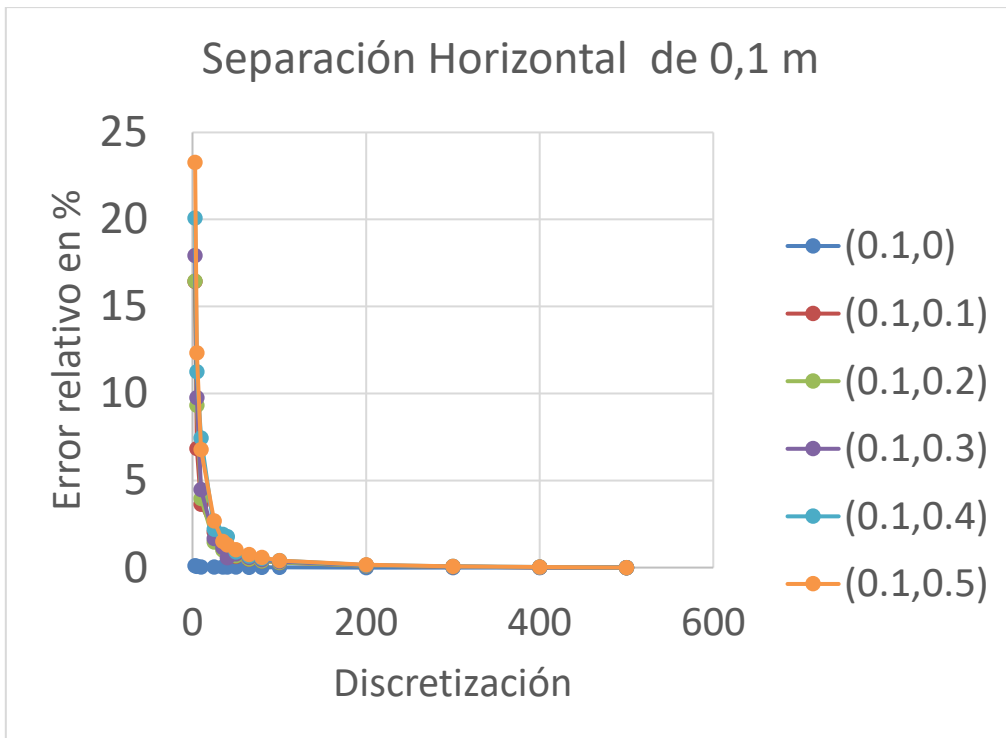


Figura 11.1.1: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,1 m.

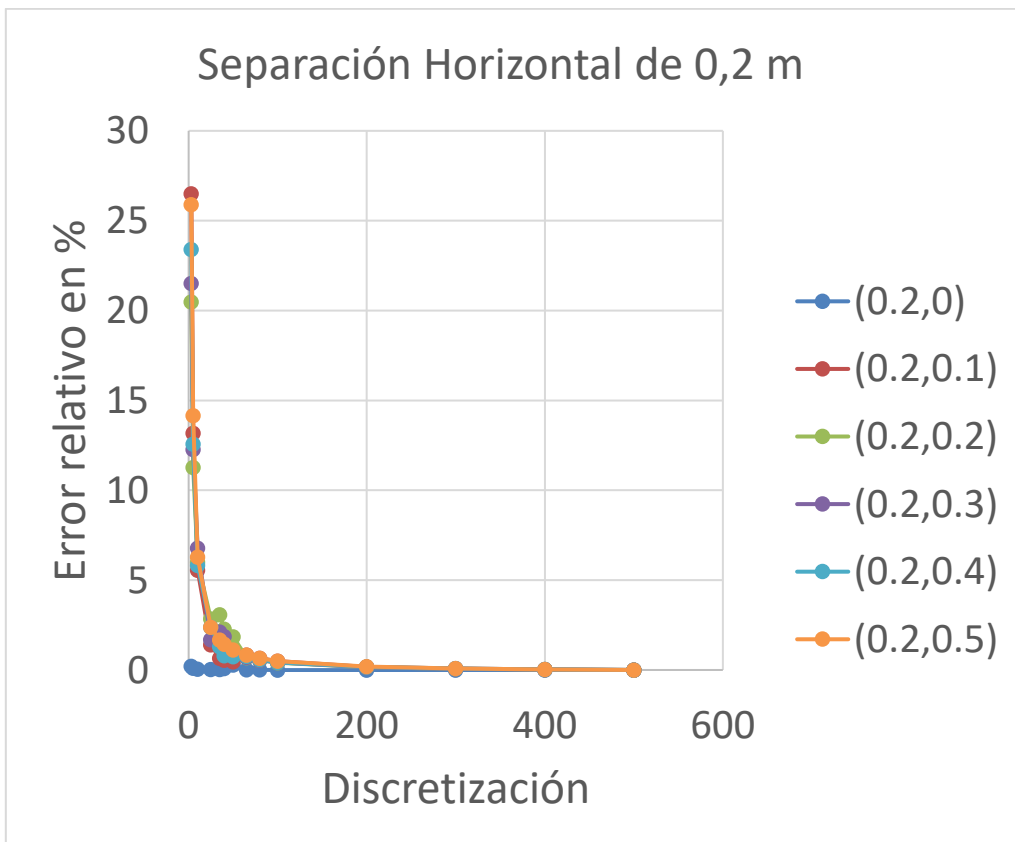


Figura 11.1.2: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,2 m.

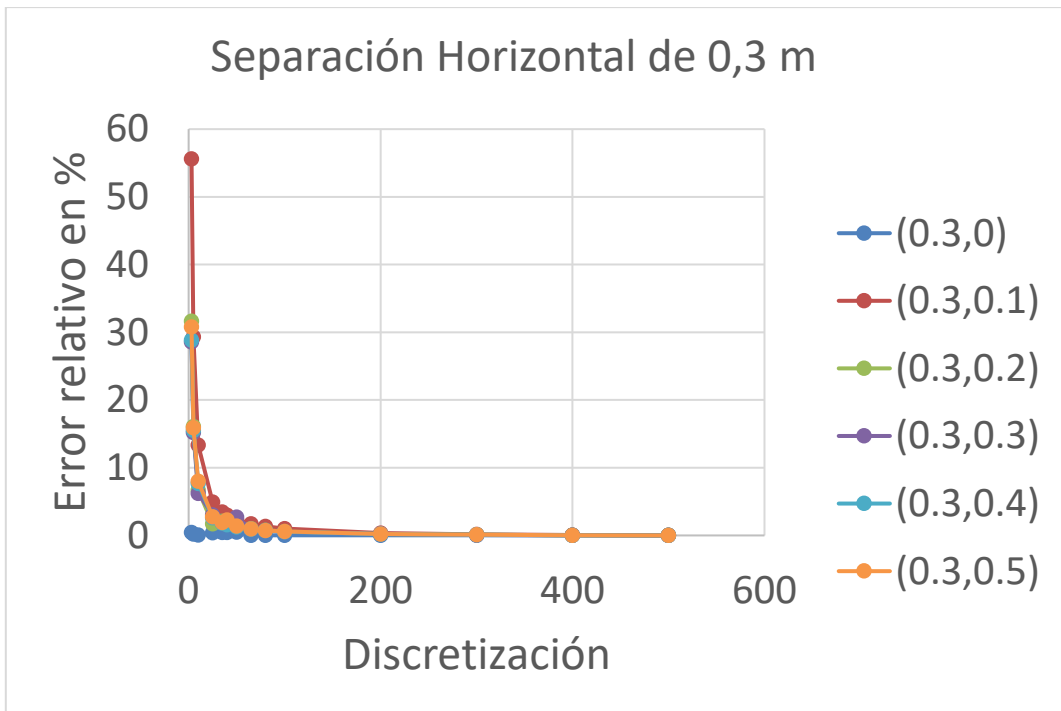


Figura 11.1.3: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,3 m.

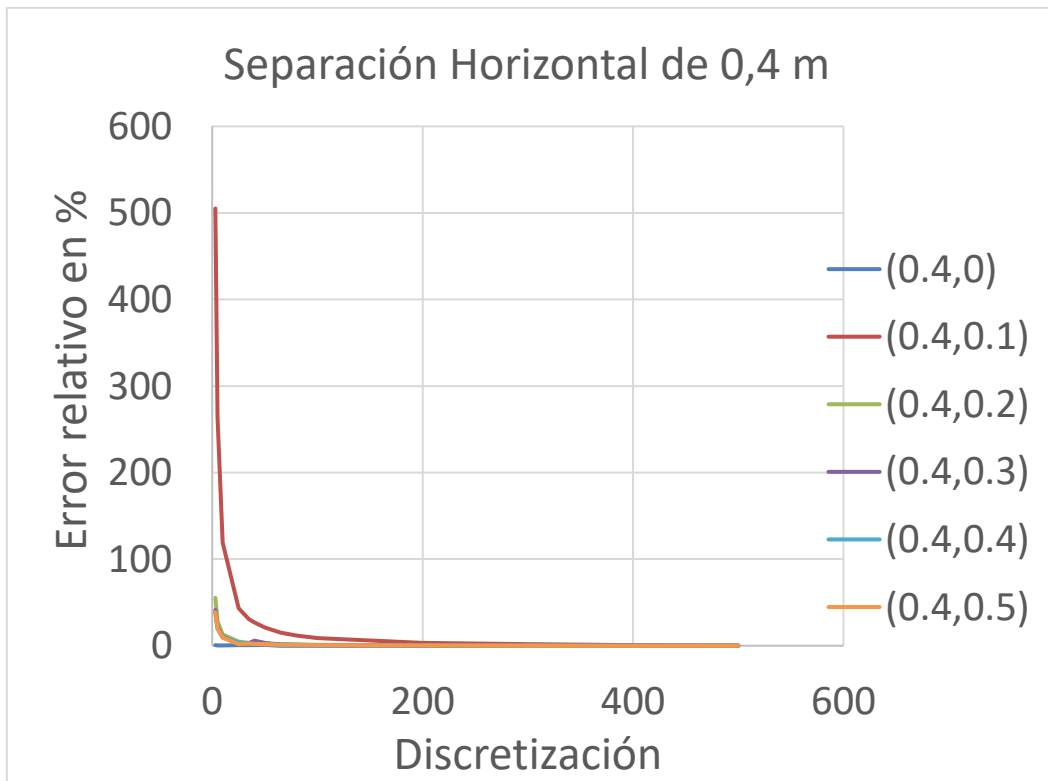


Figura 11.1.4: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,4 m.

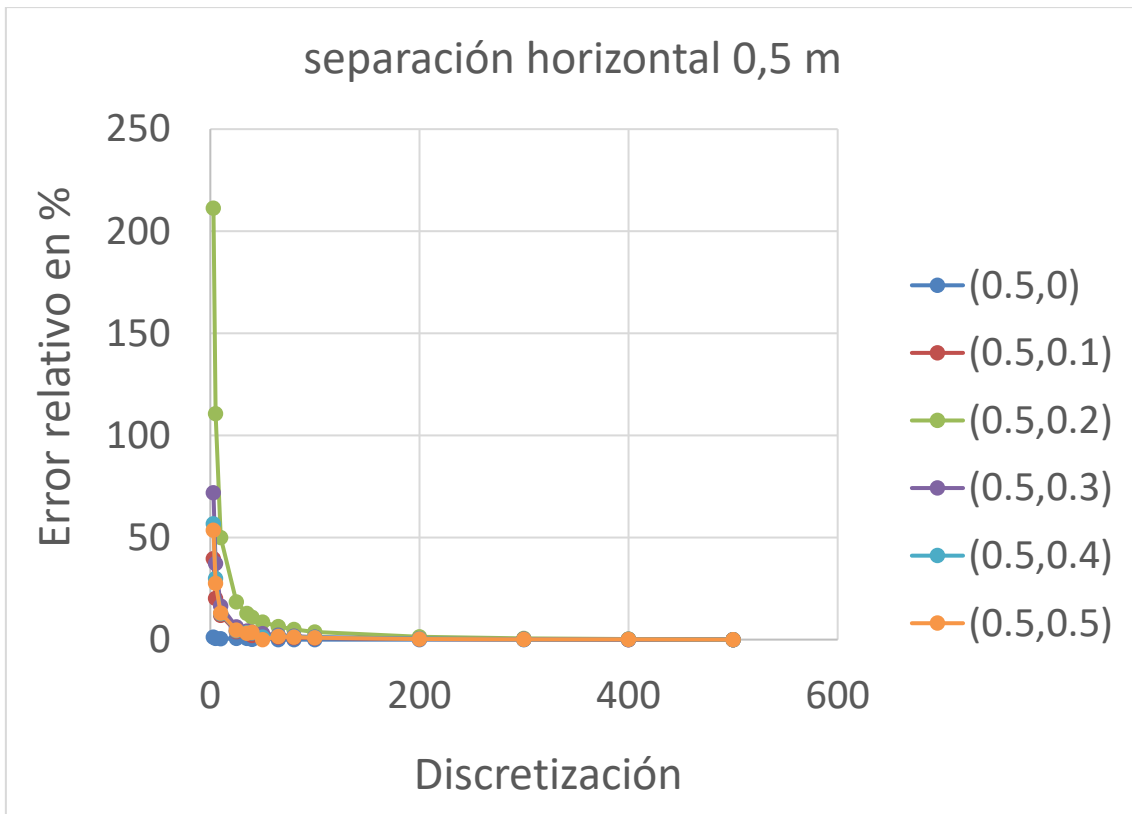


Figura 11.1.5: Representación del error de discretización para una separación horizontal de 0,5 m.

Xa12	Ya12	N=3	N=3	N=5	N=5	N=10	N=10	N=25	N=25	N=35	N=35
		xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp
0,1	0	0,049955	0,99805	0,049937	0,99829	0,049928	0,99841	0,049922	0,99847	0,049921	0,99848
0,1	0,1	-0,27527	0,93639	-0,30687	0,93535	-0,34045	0,92297	-0,32266	0,93655	-0,32465	0,93651
0,1	0,2	-0,39188	0,87003	-0,42543	0,8704	-0,45046	0,86714	-0,46223	0,86573	-0,46434	0,86544
0,1	0,3	-0,45118	0,81975	-0,4961	0,81625	-0,52491	0,81202	-0,54027	0,80893	-0,54304	0,80829
0,1	0,4	-0,47524	0,7964	-0,52737	0,78801	-0,55148	0,79026	-0,57983	0,77353	-0,58166	0,77367
0,1	0,5	-0,47383	0,7966	-0,53821	0,77429	-0,57397	0,77279	-0,59715	0,76072	-0,6021	0,75329
0,2	0	0,099887	0,99215	0,099858	0,99314	0,099842	0,99363	0,099832	0,99386	0,09983	0,9939
0,2	0,1	-0,16144	0,98096	-0,19067	0,97534	-0,20742	0,97288	-0,21652	0,97144	-0,21818	0,97117
0,2	0,2	-0,29698	0,92909	-0,33132	0,92411	-0,35094	0,92029	-0,3837	0,91104	-0,38456	0,91105
0,2	0,3	-0,36093	0,89152	-0,40313	0,88304	-0,42821	0,87832	-0,46628	0,86477	-0,46839	0,86531
0,2	0,4	-0,39083	0,87149	-0,44559	0,86035	-0,47878	0,84572	-0,49955	0,85112	-0,50125	0,83505
0,2	0,5	-0,39806	0,86448	-0,4594	0,84605	-0,50066	0,83327	-0,52196	0,8284	-0,52551	0,82582
0,3	0	0,14978	0,98219	0,14975	0,98447	0,14973	0,98559	0,15029	0,98627	0,15035	0,98636
0,3	0,1	-0,042501	0,9986	-0,067707	0,99692	-0,083019	0,99572	-0,091059	0,99504	-0,092479	0,99492
0,3	0,2	-0,17551	0,97585	-0,21529	0,96793	-0,2394	0,963	-0,25215	0,95969	-0,25126	0,95879
0,3	0,3	-0,25264	0,94895	-0,29973	0,93765	-0,33144	0,93274	-0,34257	0,92117	-0,34646	0,92639
0,3	0,4	-0,29341	0,93025	-0,34774	0,91493	-0,38029	0,91122	-0,40027	0,89957	-0,40354	0,89855
0,3	0,5	-0,30877	0,92261	-0,37359	0,89881	-0,40867	0,89262	-0,43129	0,88199	-0,43496	0,88067
0,4	0	0,19961	0,96796	0,1996	0,97214	0,19881	0,97399	0,201	0,97556	0,2012	0,97577
0,4	0,1	0,054622	0,99799	0,032798	0,99927	0,019775	0,99975	0,012934	0,99989	0,011807	0,99993
0,4	0,2	-0,062308	0,99711	-0,10046	0,99209	-0,12163	0,99056	-0,13271	0,98943	-0,13483	0,98905
0,4	0,3	-0,14157	0,98414	-0,18899	0,97584	-0,21597	0,9732	-0,23511	0,96827	-0,23384	0,96737



0,4	0,4	-0,19059	0,96787	-0,24672	0,95995	-0,27742	0,95229	-0,29605	0,94626	-0,29844	0,94654
0,4	0,5	-0,21319	0,96514	-0,27767	0,94947	-0,31523	0,93996	-0,35158	0,91526	-0,33819	0,92995
0,5	0	0,24939	0,94914	0,2494	0,95595	0,24885	0,959	0,24806	0,96014	0,24809	0,96039
0,5	0,1	0,13517	0,98542	0,11639	0,99014	0,10831	0,99406	0,10061	0,9948	0,10009	0,9947
0,5	0,2	0,036913	0,99894	0,0035254	0,99998	-0,016569	0,99983	-0,027044	0,99956	-0,028922	0,9995
0,5	0,3	-0,036986	0,9997	-0,082591	0,9944	-0,10985	0,99218	-0,12331	0,99073	-0,12596	0,99046
0,5	0,4	-0,086734	0,99454	-0,14066	0,98628	-0,17509	0,98321	-0,19183	0,97861	-0,19371	0,97749
0,5	0,5	-0,11436	0,98927	-0,17811	0,97641	-0,21413	0,97678	-0,23445	0,96664	-0,2382	0,96569

Tabla 11.1.1: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 3 hasta 35.

Xa12	Ya12	N=40	N=40	N=50	N=50	N=65	N=65	N=80	N=80	N=100	N=100
		xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp
0,1	0	0,049921	0,99848	0,04992	0,99849	0,049905	0,99849	0,049904	0,99849	0,049904	0,99849
0,1	0,1	-0,3256	0,93644	-0,32727	0,9364	-0,32782	0,93635	-0,32816	0,93632	-0,32845	0,93629
0,1	0,2	-0,46499	0,86534	-0,46588	0,86521	-0,46671	0,86509	-0,46722	0,86501	-0,46766	0,86494
0,1	0,3	-0,54618	0,80648	-0,54509	0,8078	-0,54618	0,80754	-0,54686	0,80737	-0,54745	0,80722
0,1	0,4	-0,58239	0,77352	-0,58712	0,77037	-0,58845	0,76992	-0,58928	0,76964	-0,58999	0,76939
0,1	0,5	-0,60329	0,7528	-0,60495	0,75212	-0,60647	0,75148	-0,60742	0,75108	-0,60824	0,75074
0,2	0	0,09972	0,99389	0,10008	0,99398	0,099809	0,99393	0,099809	0,99394	0,099806	0,99395
0,2	0,1	-0,21838	0,97117	-0,2186	0,97105	-0,21778	0,97205	-0,21817	0,972	-0,21851	0,97195
0,2	0,2	-0,3651	0,91023	-0,36636	0,91726	-0,37072	0,91672	-0,37127	0,9166	-0,37175	0,9165
0,2	0,3	-0,45158	0,87773	-0,45466	0,87066	-0,45577	0,87034	-0,45647	0,87015	-0,45708	0,86996
0,2	0,4	-0,50432	0,83305	-0,50463	0,83309	-0,504	0,83772	-0,50486	0,83741	-0,50569	0,83708
0,2	0,5	-0,52506	0,82036	-0,52669	0,81971	-0,52819	0,81912	-0,52911	0,81875	-0,52992	0,81843
0,3	0	0,15039	0,98639	0,15044	0,98644	0,14971	0,98628	0,14971	0,9863	0,14971	0,98632
0,3	0,1	-0,092937	0,99486	-0,09358	0,99482	-0,094152	0,99477	-0,094507	0,99474	-0,094814	0,99471
0,3	0,2	-0,25217	0,96189	-0,25315	0,96169	-0,25402	0,96153	-0,25458	0,96142	-0,25506	0,96132
0,3	0,3	-0,34759	0,9207	-0,36165	0,91257	-0,34999	0,92554	-0,35068	0,92536	-0,35128	0,9252
0,3	0,4	-0,40456	0,89823	-0,40598	0,89778	-0,40728	0,89737	-0,40809	0,89711	-0,40879	0,89689
0,3	0,5	-0,44632	0,85823	-0,44445	0,86571	-0,43918	0,87915	-0,4401	0,87882	-0,44088	0,87854
0,4	0	0,20127	0,97583	0,20139	0,97592	0,19961	0,97546	0,19961	0,9755	0,19961	0,97553
0,4	0,1	0,011449	0,99994	0,010923	0,99992	0,010392	0,99994	0,010095	0,99994	0,0098392	0,99994
0,4	0,2	-0,13548	0,98896	-0,13646	0,98885	-0,13718	0,98885	-0,13768	0,98879	-0,13813	0,98874
0,4	0,3	-0,25474	0,95674	-0,24828	0,95393	-0,23794	0,96617	-0,23861	0,96603	-0,23918	0,96591

0,4	0,4	-0,30104	0,94427	-0,3013	0,94119	-0,30301	0,9445	-0,3038	0,9443	-0,30448	0,94412
0,4	0,5	-0,35301	0,91756	-0,34087	0,92889	-0,34243	0,92844	-0,34332	0,92817	-0,34409	0,92794
0,5	0	0,24949	0,96107	0,25155	0,96196	0,24951	0,96133	0,24952	0,96141	0,24952	0,96146
0,5	0,1	0,09885	0,99411	0,095619	0,99524	0,098007	0,99424	0,097756	0,99428	0,097539	0,99431
0,5	0,2	-0,029501	0,99948	-0,030307	0,99945	-0,031047	0,99943	-0,031514	0,99941	-0,031898	0,9994
0,5	0,3	-0,12675	0,99035	-0,12769	0,99031	-0,12869	0,99019	-0,12931	0,99011	-0,12984	0,99004
0,5	0,4	-0,19398	0,97729	-0,20314	0,97498	-0,19717	0,97684	-0,19792	0,9767	-0,19857	0,97657
0,5	0,5	-0,23701	0,96375	-0,25574	0,95148	-0,24195	0,96492	-0,24281	0,96472	-0,24355	0,96455

Tabla 11.1.2: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 40 hasta 100.

Xa12	Ya12	N=200		N=300		N=400		N=500	
		xp	yp	xp	yp	xp	yp	xp	yp
0,1	0	0,049908	0,99849	0,049908	0,9985	0,049908	0,9985	0,049908	0,9985
0,1	0,1	-0,32904	0,93624	-0,32923	0,93622	-0,32933	0,93621	-0,32939	0,93621
0,1	0,2	-0,46854	0,8648	-0,46883	0,86476	-0,46897	0,86474	-0,46905	0,86472
0,1	0,3	-0,54862	0,80693	-0,549	0,80683	-0,5492	0,80678	-0,54931	0,80675
0,1	0,4	-0,59141	0,7689	-0,59188	0,76873	-0,59212	0,76865	-0,59226	0,7686
0,1	0,5	-0,60987	0,75004	-0,61041	0,74981	-0,61068	0,74969	-0,61084	0,74963
0,2	0	0,099806	0,99396	0,099805	0,99397	0,099805	0,99397	0,099806	0,99397
0,2	0,1	-0,21921	0,97184	-0,21941	0,97181	-0,21952	0,97179	-0,21959	0,97178
0,2	0,2	-0,37272	0,91628	-0,37302	0,91622	-0,37318	0,91618	-0,37327	0,91616
0,2	0,3	-0,45826	0,86964	-0,45865	0,86952	-0,45885	0,86947	-0,45897	0,86943
0,2	0,4	-0,50693	0,83671	-0,5074	0,83655	-0,50763	0,83647	-0,50777	0,83642
0,2	0,5	-0,53151	0,81779	-0,53204	0,81757	-0,53231	0,81746	-0,53247	0,8174
0,3	0	0,14971	0,98635	0,14971	0,98637	0,14971	0,98638	0,14971	0,98638
0,3	0,1	-0,095432	0,99465	-0,095627	0,99464	-0,095728	0,99463	-0,095788	0,99462
0,3	0,2	-0,25601	0,96113	-0,25632	0,96107	-0,25648	0,96104	-0,25658	0,96102
0,3	0,3	-0,35247	0,92488	-0,35286	0,92478	-0,35306	0,92472	-0,35318	0,92469
0,3	0,4	-0,41018	0,89645	-0,41063	0,8963	-0,41087	0,89623	-0,41101	0,89618
0,3	0,5	-0,44244	0,87798	-0,44296	0,87779	-0,44323	0,87769	-0,44338	0,87763
0,4	0	0,19961	0,9756	0,19961	0,97562	0,19961	0,97563	0,19961	0,97563
0,4	0,1	0,0093303	0,99995	0,0091735	0,99995	0,0090774	0,99995	0,009027	0,99995
0,4	0,2	-0,13901	0,98862	-0,1393	0,98858	-0,13944	0,98856	-0,13953	0,98855

0,4	0,3	-0,24032	0,96567	-0,2407	0,96559	-0,24089	0,96555	-0,241	0,96553
0,4	0,4	-0,30582	0,94376	-0,30627	0,94364	-0,30649	0,94358	-0,30663	0,94354
0,4	0,5	-0,34562	0,92748	-0,34612	0,92732	-0,34638	0,92724	-0,34653	0,92719
0,5	0	0,24951	0,96156	0,24952	0,96159	0,24951	0,96161	0,24951	0,96162
0,5	0,1	0,097112	0,99437	0,09697	0,9944	0,096899	0,99441	0,096856	0,99441
0,5	0,2	-0,032683	0,99937	-0,032944	0,99936	-0,033075	0,99936	-0,033152	0,99935
0,5	0,3	-0,13091	0,98989	-0,13126	0,98985	-0,13144	0,98983	-0,13154	0,98981
0,5	0,4	-0,19986	0,97633	-0,20028	0,97624	-0,2005	0,9762	-0,20062	0,97618
0,5	0,5	-0,24503	0,9642	-0,24552	0,96409	-0,24576	0,96403	-0,24591	0,964

Tabla 11.1.3: Evaluación de las distintas configuraciones escogidas con una discretización desde 200 hasta 500.

**Anexo 11.2**

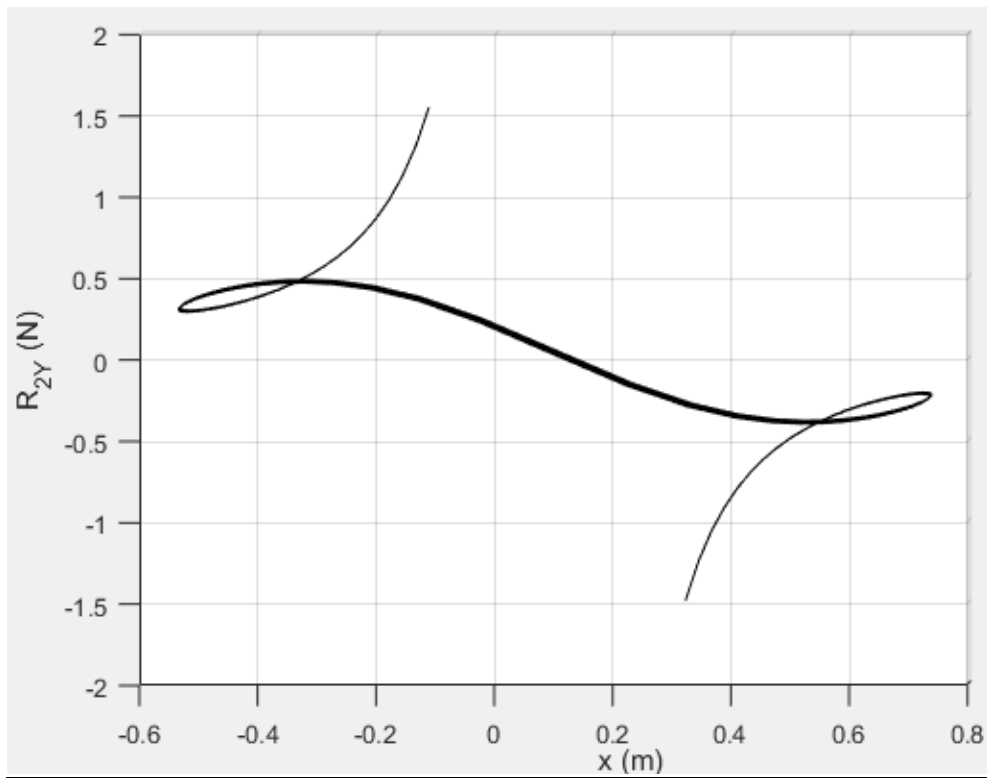


Figura 11.2.2 (4): Vista en alzado del gráfico  $R_{2y}$

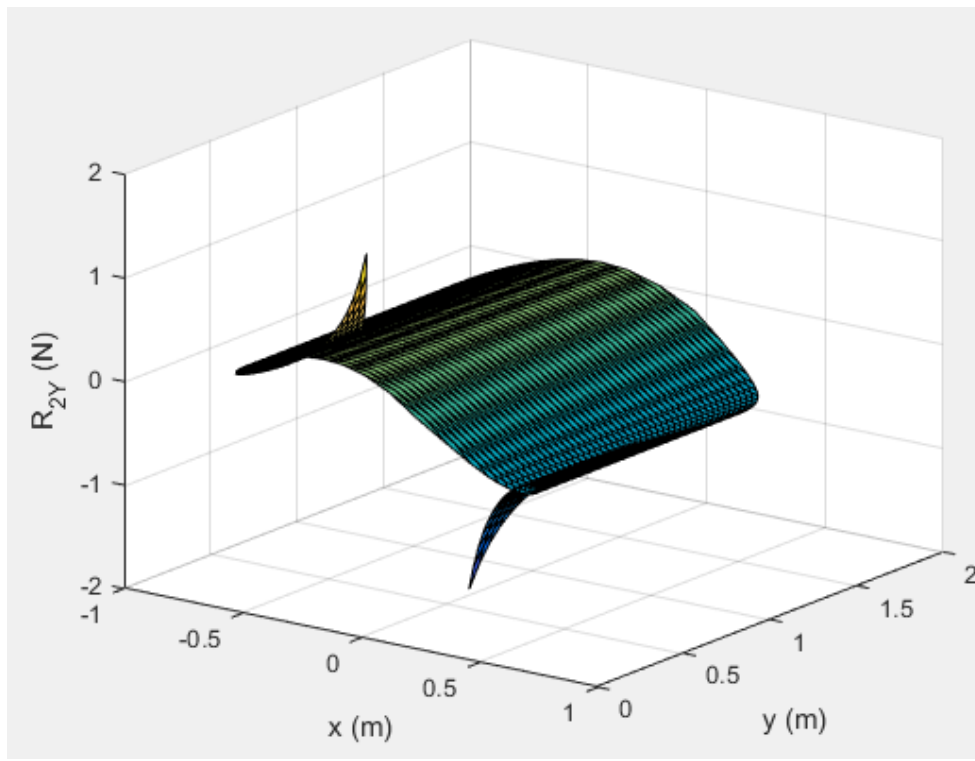


Figura 11.2.2 (5): Vista axonométrica del gráfico  $R_{2y}$

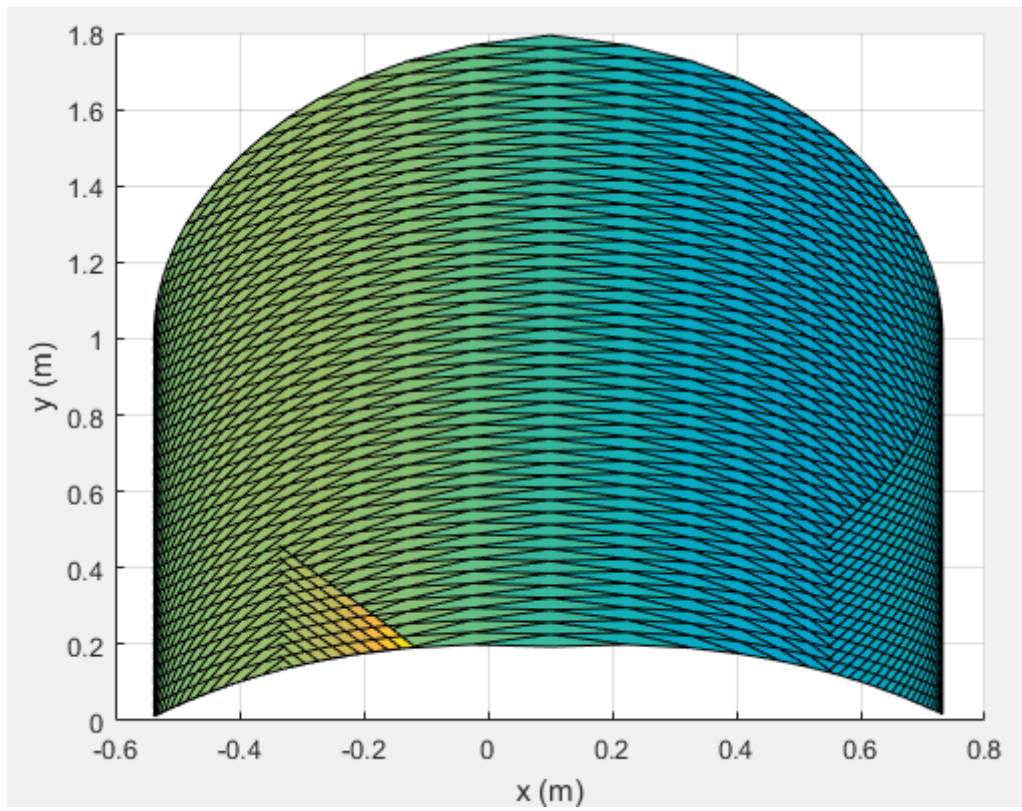


Figura 11.2.2 (6): Vista en planta del gráfico  $R_{2y}$  (Plano X-Y).

