

Trabajo Fin de Grado
Grado en Física

Estudio acústico de sistemas con interpretación e interés musical.



Autor:
Jorge Rodríguez San José
Director:
Victor Etxebarria

© JorgeRodríguez2018

Índice

1	Introducción y objetivos	2
2	Marco teórico	4
2.1	Ecuación de onda transversal.....	4
2.2	Barra libre-libre.....	6
2.3	Conceptos musicales.....	7
2.3.1	Intervalo	7
2.3.2	Afinación.....	8
2.3.3	Tolerancia auditiva.....	16
3	Equipo experimental.....	17
3.1	Montaje del acondicionador de señal.....	17
3.2	Preparación y calibración del equipo completo	18
4	Medidas y resultados	20
4.1	Madera tratada de palosanto	20
4.2	Maderas de marimba.....	22
4.3	Viola.....	23
5	Interpretación y conclusiones	26
5.1	Madera de palosanto	26
5.2	Maderas de Marimbas.....	28
5.3	Viola.....	30
6	Conclusiones	37
	Agradecimientos	38
	Bibliografía	39

1 Introducción y objetivos

Para mucha gente la música y la física están a años luz una de la otra, pero sorprendentemente están mucho más ligadas de lo que uno se pueda imaginar. Por supuesto, que la música es sonido y el sonido es una de las ramas de la física, pero también están conectadas de otra manera, ambas son tremendamente enrevesadas. Los mayores avances en la física han tenido su origen en las mentes brillantes de los grandes genios. Einstein nos dio la teoría de la relatividad, Heisenberg y Schrödinger nos dieron los fundamentos de la física cuántica o Fermi los mayores avances en la física nuclear y de partículas. Así mismo Bach puso las bases de la música tal y como la conocemos hoy en día, Beethoven nos dio unas magníficas sinfonías o Schönberg fue capaz de crear un estilo compositivo usando las matemáticas. Por tanto, la física y la música son productos de la mente.

Los instrumentos musicales tradicionales, resultado de un proceso acumulativo de ingenio humano y de experiencias sonoras labradas durante siglos, constituyeron la puerta de acceso al estudio de la acústica. A lo largo de la historia, el progreso científico, teórico y experimental, estimuló el avance de la acústica ampliando su ámbito de acuerdo con nuevos intereses y gracias a la disponibilidad de nuevas técnicas y procedimientos. Un punto de partida se encuentra en Pitágoras (s. VI a.C), quien comprobó, experimentando auditivamente, que una cuerda vibrante sometida a una tensión dada producía los intervalos musicales hoy día denominados octava, quinta y cuarta, cuando era fijada en un medio, dos tercios y tres cuartos de su longitud.

A partir del Renacimiento son muchos los físicos y matemáticos atraídos por el hechizo de los instrumentos musicales. Galileo (1564-1642), Mersenne (1588-1648), Hooke (1635-1703), Fourier (1768-1830) a quien se debe el famoso teorema, fundamental en acústica, de la descomposición de una función periódica en una fundamental y sus armónicos, Lagrange (1736-1813), Chladni (1756-1824) cuyo método para localizar líneas nodales en placas vibrantes mediante arena fina es vigente aun hoy en día, Poisson (1781-1840), por citar algunos, participan en mayor o menor grado en el esfuerzo por descifrar la relación entre la física y la música. No obstante, fue la ingente labor realizada por Helmholtz (1821-1894) y Rayleigh (1842-1919) la que puso los cimientos de la acústica moderna, hecho de especial relieve si se tiene en cuenta la precariedad de la instrumentación acústica de que disponían. Aunque rudimentaria e incómoda, esta instrumentación permitió una primera ampliación del ámbito acústico, hasta entonces limitado a la música.

Es a principios del siglo XX cuando el desarrollo alcanzado por la instrumentación electrónica, acústica y óptica permiten un rápido avance de la investigación

acústica, avance que se ha visto acelerado en los últimos 70 años por el desarrollo de los ordenadores y de nuevas tecnologías como la del láser. Impulsando las investigaciones acústicas en múltiples frentes sin abandonar, no obstante, la acústica de los instrumentos tradicionales, la cual sigue dando respuestas acerca de las características de los sonidos musicales. Fue en la última mitad del siglo XX cuando un grupo llamado Catgut Acoustical Society fundado por Carleen Maley Hutchins realizó los mayores avances hasta la fecha en esta rama.

Tras toda una vida estudiando música, han sido muchos los momentos en los que no he sido capaz de encontrar explicación musical a ciertos aspectos de ésta. La principal cuestión se me planteó a la hora de querer comprar mi instrumento definitivo y fue la que me motivó a realizar este trabajo, y es que fue un año entero probando más de 15 instrumentos diferentes en los que cada uno tenía algo diferente que no sabía explicar bien. Por eso, en este trabajo lo que pretendo es ser capaz de ver y cuantificar el sonido y la calidad de un instrumento musical, además de ser capaz de ofrecer una explicación conjunta apoyándome en la física y en la música. Se realizarán medidas de tres sistemas mediante la excitación con un martillo piezoeléctrico, un micrófono y un analizador de señal que realiza una FFT, con el fin de obtener la respuesta en frecuencia de éstos tres para así realizar un análisis y una interpretación musical de los datos obtenidos. Los sistemas son una madera de palosanto, dos maderas diferentes de marimba y una viola como conjunto complejo.

2 Marco teórico

2.1 Ecuación de onda transversal

El efecto de distorsionar una barra es producir no sólo momentos de flexión sino también fuerzas cortantes. Consideremos una fuerza cortante hacia arriba F_y que actúa en el extremo izquierdo del segmento dx como positiva. Entonces, la fuerza cortante asociada que actúa en el extremo derecho del segmento debe estar dirigida

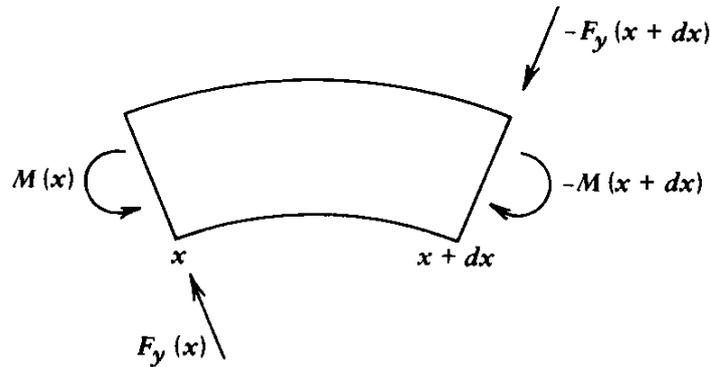


Ilustración 1 Momentos de flexión y fuerzas cortantes en una barra.

hacia abajo y en consecuencia es negativa. Cuando una barra flexionada está en condición de equilibrio estático, los pares de torsión y las fuerzas cortantes que actúan en cualquier segmento deben estar relacionadas de tal manera que no produzcan un momento de giro neto. Si tomamos momentos alrededor del extremo izquierdo del segmento de la **Ilustración 1**, se tiene

$$M(x) - M(x + dx) = F_y(x + dx)dx \quad (1)$$

Para segmentos de pequeña longitud dx , $M(x + dx)$ y $F_y(x + dx)$ podemos expandir en serie de Taylor alrededor de x , lo que nos da

$$F_y = -\frac{\partial M}{\partial x} = YS\kappa^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \quad (2)$$

Con Y módulo de Young y S la sección transversal y κ radio de giro del área de la sección transversal S . Donde hemos omitido términos de segundo orden en dx .

Esta relación entre la fuerza cortante F_y y el momento de flexión M la hemos derivado para una condición de equilibrio estático. Para vibraciones transversales de una barra, el equilibrio es más bien dinámico y el lado derecho de (1) debe ser igual a la rapidez de aumento del momento angular del segmento. Sin embargo, si

el desplazamiento y la pendiente de la barra se limitan a valores pequeños podemos despreciar las variaciones en el momento angular, y así (2) nos sirve como aproximación adecuada para la relación F_y y y .

Así la fuerza neta hacia arriba que actúa en el segmento dx viene dada por

$$dF_y = F_y(x) - F_y(x + dx) = -\frac{\partial F_y}{\partial x} dx = YS\kappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx \quad (3)$$

Esta fuerza dará al segmento una aceleración hacia arriba, y debido a que la masa del segmento es $\rho S dx$, la ecuación de movimiento nos queda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\kappa^2 c^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (4)$$

Donde $c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$.

Vamos a resolver esta ecuación por separación de variables, para ello vamos a escribir el desplazamiento transversal complejo como

$$y = \Psi(x)e^{j\omega t} \quad (5)$$

Vemos fácilmente que al introducir (5) en (4) la función exponencial del tiempo se cancela dejándonos una nueva ecuación total que implica a Ψ como función de x .

$$\frac{d^4 \Psi}{dx^4} = \frac{\omega^4}{v^4} \Psi \quad (6)$$

Donde $v = \sqrt{\omega c \kappa}$.

Supongamos ahora que Ψ puede expresarse como una exponencial de la forma $\Psi = A \exp(\gamma x)$, con $\gamma^4 = (\frac{\omega}{v})^4$. Y la sustituimos en (6), esto puede satisfacer cuatro valores de $\gamma = \pm \omega/v, \pm j \omega/v$. Entonces la solución completa está dada por la suma de estas cuatro soluciones.

$$\Psi = \mathbf{A}e^{\omega x/v} + \mathbf{B}e^{-\omega x/v} + \mathbf{C}e^{j\omega x/v} + \mathbf{D}e^{-j\omega x/v} \quad (7)$$

Donde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ son constantes de amplitud compleja. La solución para los desplazamientos y es

$$y = e^{j\omega t} (\mathbf{A}e^{\omega x/v} + \mathbf{B}e^{-\omega x/v} + \mathbf{C}e^{j\omega x/v} + \mathbf{D}e^{-j\omega x/v}) \quad (8)$$

La parte real de (8) es la solución de (4). Si manipulamos un poco esta expresión y usamos las identidades hiperbólicas y trigonométricas correspondientes, llegamos a

$$y = \cos(\omega t + \phi) \left[A \cosh \frac{\omega x}{v} + B \sinh \frac{\omega x}{v} + C \cos \frac{\omega x}{v} + D \sin \frac{\omega x}{v} \right] \quad (9)$$

donde A, B, C, D son constantes reales. Aun cuando estas constantes están relacionadas con las constantes complejas **A**, **B**, **C**, **D**, pero no tienen importancia ya que en la práctica A, B, C, D se determinan con condiciones de contorno e iniciales.

2.2 Barra libre-libre

En una barra libre-libre las condiciones que se deben satisfacer son $A - C = 0$ y $B - D = 0$ en $x = 0$ y en $x = L$. Restringiéndonos las frecuencias permitidas a aquellas que satisfagan

$$\tan \frac{\omega L}{2v} = \pm \tanh \frac{\omega L}{2v} \quad (10)$$

Resolviendo esta ecuación trascendente, las frecuencias permitidas están dadas por

$$f = \frac{\pi c \kappa}{8L^2} (3.0112^2, 5^2, 7^2, 9^2, \dots) \quad (11)$$

Observamos que en contraste con una cuerda vibrante los sobretonos no son armónicos de la fundamental.

Si consideramos una barra libre-libre de 100cm las relaciones de frecuencias vendrán dadas por

Frecuencia
f_1
$2.756 f_1$
$5.404 f_1$
$8.933 f_1$

Tabla 1 Vibraciones transversales características de una barra libre-libre de 100cm.

En la **Ilustración 2** observamos que los nodos de vibración correspondientes a la fundamental f_1 y todas las frecuencias adicionales impares son simétricas con respecto al centro. La pendiente $\frac{\partial y}{\partial x}$ en el centro es siempre nula, dando un verdadero antinodo. En contraste las frecuencias pares corresponden a modos de vibración simétricos con respecto al centro. En todos los modos, las posiciones modales están simétricamente distribuidas con respecto al centro.

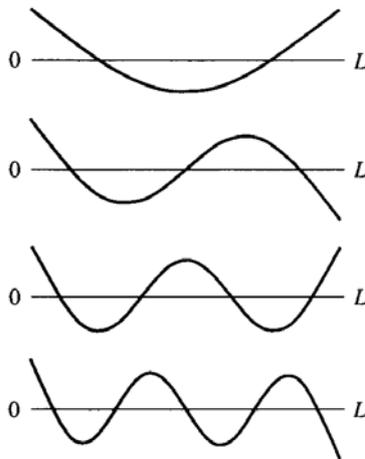


Ilustración 2 Modos transversales de vibración de una barra libre-libre.

2.3 Conceptos musicales

Para comprender algunas conclusiones y explicaciones dadas en este trabajo debemos entender algunos conceptos básicos de la teoría musical.

2.3.1 Intervalo

Intervalo es la diferencia de frecuencia entre dos notas musicales, medida cuantitativamente en grados o notas naturales y cualitativamente en tonos y semitonos. Su expresión aritmética suele ser una proporción simple.

En cuanto a los tipos de intervalos existentes, tenemos los intervalos tonales que tienen un solo valor justo; los modales que tienen un valor mayor y otro menor y propios de la modalidad en la que se encuentran. Todos los intervalos pueden ser, además, aumentados o disminuidos.

Se consideran simples los intervalos no mayores que una octava y compuestos a los que la exceden. Los intervalos compuestos son análogos a los intervalos simples correspondientes. Así, una novena es una segunda a la octava y puede ser mayor o menor; una duodécima es análoga a una quinta y puede ser justa, aumentada o disminuida.

La calificación de intervalos como consonantes o disonantes ha variado enormemente a lo largo de los siglos, así como la definición de lo consonante o disonante en sí. En la armonía tradicional desde el siglo XVII se consideran consonantes o disonantes los siguientes intervalos:

- Consonancias perfectas: los intervalos de 4^a, 5^a y 8^a cuando son justas.
- Consonancias imperfectas: los intervalos de 3^a y 6^a cuando son mayores o menores.
- Disonancias absolutas: los intervalos de 2^a y 7^a mayores y menores.

- Disonancias condicionales: todos los intervalos aumentados y disminuidos, excepto la 4^a aumentada y la 5^a disminuida.
- Semiconsonancias: la 4^a aumentada y la 5^a disminuida.

Las diferencias de frecuencias entre intervalos se analizarán a fondo en el apartado siguiente.

2.3.2 Afinación

Nos enfrentamos pues, a la tarea de determinar la afinación de las doce notas de una octava de un piano.

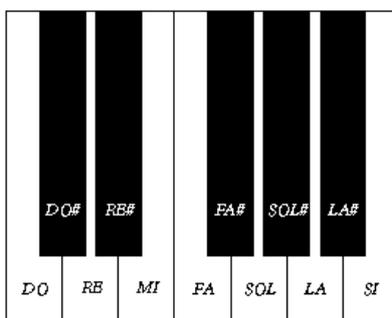


Ilustración 3 Las doce notas de una octava de un piano.

Para ello tendremos en cuenta el procedimiento llamado de cancelación de octavas: una vez determinada la afinación de un *re*, la trasladaremos a todos los otros *re* del piano, multiplicando o dividiendo su frecuencia por 2. Y lo mismo con todas las demás notas existentes.

El *do* tendrá un valor inicial normalizado de 1. A partir de él, a cada una de las demás notas les corresponderá un valor entre 1 (ese *do*) y 2 (el *do* siguiente), que se corresponderá con la frecuencia proporcional de la nota con respecto a ese *do* = 1. Habremos concluido en cuanto podamos determinar los valores de todas las demás notas. Todos los cálculos pueden ser replicados a partir de cualquier otro valor inicial (por ejemplo, a partir de un *la* de 440Hz).

Las doce notas indican que para llegar de un *do* al siguiente habrá que dar doce pasos. A cada uno de ellos se le llama semitono. Abordaremos el problema apelando, en primer lugar, a los descubrimientos hechos por los pitagóricos, siguiendo el método que utilizaban para afinar los instrumentos de la época.

Escala pitagórica

Los pitagóricos organizaron sus escalas basándose en simples relaciones numéricas entre los distintos sonidos. Así, la escala pitagórica se estructura sobre dos intervalos: la octava, que presenta una relación de frecuencias entre las notas de 2/1, y la quinta, de relación de frecuencias 3/2. Los pitagóricos obtuvieron los

diferentes sonidos de la escala encadenando quintas, apelando luego a la antes nombrada cancelación de octavas para situar esas notas en el rango buscado.

Partamos del *do* como ejemplo. En primer lugar, se calcula la relación de la primera quinta ascendente, para obtener el *sol*. Un nuevo encadenamiento nos llevará a un *re*, para seguir con un *la*, un *mi* y, finalmente, un *si*. Tomando ahora una quinta descendente desde el *do* inicial, se consigue el *fa*. De este modo se obtienen los siete sonidos de la escala:

$$fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si$$

Si se continúa con el encadenamiento de quintas, es posible alcanzar los doce sonidos de la llamada escala cromática, conformando lo que se conoce como círculo de quintas:

$$sol\flat \leftarrow reb \leftarrow lab \leftarrow mi\flat \leftarrow sib \leftarrow fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow re \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si \rightarrow fa\sharp$$

Donde los símbolos bemol (\flat) y sostenido (\sharp) designan ajustes de un semitono inferior y superior, respectivamente.

Obtenidas pues las doce notas mediante sucesivos encadenamientos de quintas, bastará luego con situar los sonidos en la misma escala en el rango de una única octava mediante el procedimiento de cancelación de octavas.

Haciendo las cuentas

Ahora sí, vamos a determinar la afinación de cada nota por encadenamientos de quintas y cancelaciones de octavas (es decir, dividiendo o multiplicando por 2), de modo que, recordemos, el valor de sus frecuencias relativas se encuentre siempre entre 1 (la relación que mantiene el *do* consigo mismo) y 2 (la relación que mantiene el *do* con el *do* de la siguiente escala).

Primero se determina el *sol*, que está a una quinta del *do*:

$$sol = \frac{3}{2}$$

Luego el *re*, a una quinta del *sol* (multiplicando por $3/2$), pero teniendo que cancelar una octava (multiplicando por $1/2$):

$$re = sol \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$$

La distancia de *do* a *re* se llama tono, y, como era de esperar, es equivalente a dos semitonos.

Luego el *la*, a una quinta del *re*:

$$la = re \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{9}{8}\right) \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16}$$

El *mi*, a una quinta del *la*, pero teniendo que cancelar una octava:

$$mi = la \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{27}{16}\right) \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{64}$$

La escala se completa con el *si*, a una quinta del *mi*, y el *fa*, a una quinta por debajo del *do*, y subiendo una octava (multiplicando por 2).

En definitiva, tomando el *do* como valor normalizado a 1, tenemos:

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación frecuencias	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Nota	Reb		Mib	Solb	Lab	Sib		
Relación frecuencias	256/243		23/27	1024/729	128/81	16/9		

Tabla 2 Relación de frecuencias escala pitagórica.

La coma pitagórica

Al ascender una quinta de *si*, se llega al *fa#*, que debería ser el mismo sonido que el *solb*, alcanzado en el otro extremo tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes. Pero estos dos sonidos no son exactamente iguales: la diferencia entre el *fa#* y el *solb*, se denomina coma pitagórica. Del mismo modo, tras hacer las cancelaciones de octava correspondientes, los sonidos extremos *fa#* - *reb* no se encuentran a la distancia de una quinta justa, sino que forman un intervalo que difiere de ella en una coma pitagórica. Esta quinta ligeramente más pequeña se denomina quinta del lobo.

La composición del círculo de quintas involucra el encadenamiento de doce quintas, llegando a una nota que es casi la misma que la del comienzo, sólo que a una distancia de siete octavas tal y como podemos apreciar en la siguiente imagen.

La coma pitagórica es ese casi. Se puede calcular su valor (llamémoslo CP) partiendo de una frecuencia f y comparando el encadenamiento doce quintas a partir de f con el encadenamiento de siete octavas:

$$CP = \frac{f \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{f \cdot 2^7} = 1.013643265$$

La diferencia es entonces de algo más de un 1% de una octava o, equivalentemente, casi un cuarto de semitono. Esta diferencia se debe a que el cálculo de la

fracción que define la quinta es incompatible con la octava, como se demuestra fácilmente. Para ello, estudiemos si existen dos exponentes cualesquiera, x e y , que nos permitan casar las dos fracciones:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^y \rightarrow \frac{3^x}{2^x} = 2^y \rightarrow 3^x = 2^x \cdot 2^y \rightarrow 3^x = 2^{x+y}$$

De la última expresión se deduce que sería lo mismo que hallar un número que fuera a la vez potencia de 2 y de 3. Sin embargo, y dado que tanto 2 como 3 son números primos, ello contradice el teorema fundamental de la aritmética, según el cual todo entero positivo tiene una única representación como producto de números primos. Este teorema, postulado por Euclides, fue demostrado de forma completa por primera vez por *Carl Friedrich Gauss*. De él se sigue que los intervalos de quintas y octavas definidos por los pitagóricos nunca se emparejarán, o lo que es lo mismo, que no hay escala cromática sin la coma pitagórica como inevitable compañera.

Otras afinaciones

Tanto la voz humana como los instrumentos de cuerda sin posiciones fijas (sin trastes) permiten la afinación natural, o sea, aquella que produce una mayor consonancia entre sus notas, una mayor armonía. Esto es así en ambos casos porque tanto la una como los otros permiten modificar sutilmente la altura de los sonidos emitidos (corregir la afinación) para alcanzar una consonancia máxima. Como hemos visto, la escala pitagórica se construye a partir de una nota principal desde la que se determinan las demás, por sucesivos encadenamientos de quintas puras. Sin embargo, esto trae aparejados algunos inconvenientes aritméticos en la búsqueda de una buena consonancia: el primero, derivado de la incompatibilidad de los intervalos de octava y de quinta, da a luz a la ya mencionada quinta del lobo; el segundo aparece por causa de otra incompatibilidad, en este caso de las quintas con las terceras mayores.

En la escala pitagórica, la afinación de las terceras se obtiene por un encadenamiento de cuatro intervalos de quinta, lo que, cancelando octavas, se traduce numéricamente como un ratio de frecuencias 81:64. Sin embargo, hay otra forma de determinar la afinación de una tercera, la que sigue la simple relación 5/4 o, lo que es lo mismo, 80:64. Estas son las terceras puras.

De ello se deduce que la escala pitagórica, tomando partido por la afinación por encadenamiento de quintas, descuida la pureza de las terceras. En las teclas blancas de un piano hay tres de estas terceras: *do-mi*, *fa-la* y *sol-si*. Podría decirse que la escala pitagórica prefiere tener buenas quintas a costa de que las terceras no sean puras.

Escala diatónica

La búsqueda de una afinación natural pura ha conducido a una nueva forma de organizar los sonidos y sus relaciones, conocida como escala diatónica. Así como la escala pitagórica calcula todos sus intervalos exclusivamente mediante encadenamientos de quintas, la diatónica tiene una organización más compleja.

Partiendo del *do*, respeta los intervalos de quinta para calcular las que considera como las siguientes dos notas más importantes de la escala: *fa* y *sol*. A continuación, calcula *mi*, *la* y *si* como terceras puras de *do*, *fa* y *sol*, respectivamente.

La escala se completa con el *re* afinado como una quinta justa a partir del *sol*:

Fa	←	Do	→	Sol	→	Re
↓		↓		↓		
La		Mi		Si		

Ilustración 4 Esquema de cálculo escala diatónica.

Los intervalos de la escala diatónica son más puros, acústicamente más estables. Esto queda también a la vista en la mayor sencillez de las relaciones entre frecuencias que describen los intervalos que la componen. En primer lugar, y siempre a partir de un *do* normalizado de valor 1, se calcula *fa* y *sol* a una quinta pura del *do*: el *fa* se afina en $4/3$, y el *sol*, en $3/2$. A partir del *do* se calcula su tercera, *mi*, a una distancia de $5/4$.

El mismo cálculo se realiza para encontrar el *la* como tercera de *fa*:

$$la = fa \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$$

Otra vez, para encontrar el *si* como tercera de *sol*:

$$si = sol \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$$

Y, por último, se calcula el *re* a una quinta pura de *sol*, cancelando una octava:

$$re = sol \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Relación frecuencias	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
Nota	Re b	Mi b	Sol b	La b	Si b			
Relación frecuencias	16/15	6/5	45/32	8/5	16/9			

Tabla 3 Relación frecuencias escala diatónica.

La secuencia con la que se fueron definiendo los intervalos de la escala diatónica sigue la estructura de la música tonal. La inmensa mayoría de la música de los últimos siglos se inscribe en la música tonal, desde el periodo barroco y clásico hasta el rock y la música pop, pasando por los folklores occidentales.

En la música tonal, las notas se organizan jerárquicamente alrededor de una nota principal, llamada tónica, o centro tonal. Cada nota cumple una función musical en la organización, estableciendo las diferentes notas un juego de tensiones que impulsa el desarrollo del proceso musical. Esta funcionalidad hace que algunos intervalos (y en especial los bemoles y sostenidos) convenga afinarlos de distinta manera según el contexto en el que se presentan. La tabla que sigue muestra una de esas posibles afinaciones.

Por algún lugar siempre se complica...

La escala diatónica no escapa a los problemas que siempre plantea la incompatibilidad de los intervalos principales de octava, quinta y tercera. Casi todas sus quintas son de $3/2$, pero la quinta *re-la* es algo menor: $40/27$. Y las dificultades crecen al intentar completar la escala con bemoles y sostenidos: siempre vuelve a presentarse la quinta del lobo.

Ha habido múltiples intentos de resolver el problema mediante diferentes temperamentos, es decir, sistemas que intentan conciliar las distintas dificultades de la construcción de la escala, cediendo parcialmente la pureza de afinación de ciertos intervalos con el fin de que otros resulten un poco más aceptables. Por la mayor o menor pureza de cada intervalo, esa opción define el color de cada temperamento. De todos modos, aunque estas escalas y temperamentos consigan un equilibrio relativamente aceptable para los distintos intervalos que los componen, es un equilibrio que siempre gira alrededor de la tónica, es decir, la nota a partir de la cual fueron calculadas todas las demás.

Esto no es un problema mientras se mantenga dicha tónica como centro. Pero en cuanto se quiere hacer que el centro tonal sea otro, toda la configuración de la escala cambia.

Aunque la afinación absoluta de cada una de las notas se mantiene, el cambio de centro tonal altera los equilibrios relativos en función del nuevo centro tonal, lo que genera un cambio de color.

Al ejecutar una obra compuesta con su centro tonal en *do*, sobre un instrumento afinado a partir de *do* según la escala diatónica, la obra luce tal como fue concebida. Supongamos ahora que se quiere interpretar la misma obra, pero un tono más aguda, es decir con centro en *re*, sin cambiar de instrumento y manteniendo su afinación en *do*. El resultado es que la obra se oirá no sólo más aguda sino también desafinada.

Para comprobarlo, basta fijar la atención en el intervalo *re-la*. En la escala diatónica dicho intervalo no se afina según la relación $3/2$, sino $40/27$. En la nueva

interpretación, con centro tonal en re, el intervalo re-la estaría pasando a ocupar el lugar que antes ocupaba el intervalo *do-sol*, afinado según la relación $3/2$.

Todos contentos

Hasta aquí no hemos conseguido construir una escala que no incluya intervalos desafinados. Surge entonces una pregunta inevitable: ¿es posible construir un temperamento en el cual todas las relaciones entre las notas se mantengan, independientemente de cuál de ellas sea el centro tonal? Este problema es irresoluble mediante la compensación de intervalos, cambiando la afinación de las notas para ampliarlos o reducirlos. La solución consiste en hacer que la octava quede construida con doce intervalos que desde el inicio sean iguales entre sí. Estos doce intervalos deben ser doce semitonos iguales que, en conjunto, completen una octava.

Vincenzo Galilei, padre de Galileo, propuso ya en el siglo XVI una división de la octava en doce semitonos iguales. Sus semitonos guardaban entre sí un ratio entre sus frecuencias de $18/17$. El encadenamiento de doce de estos intervalos resulta en octavas y quintas pequeñas, de 1,9855... y 1,4919..., respectivamente.

Vamos pues, a enfocar la cuestión como si se tratara de un simple problema matemático. Llamemos x a la relación de frecuencias que deben guardar dos semitonos consecutivos, de modo que doce intervalos de x resulten igual a una octava. En términos algebraicos, diremos que ese x debe satisfacer la igualdad:

$$x^{12} = 2 \Rightarrow x = \sqrt[12]{2}$$

Este valor de 1.05946... permite, por definición, obtener una octava perfecta. La coma pitagórica se distribuye por igual en todas las notas de la escala.

Como hemos visto, todas las escalas y temperamentos empleados en un momento histórico u otro repartían la coma pitagórica en función de qué intervalos se consideraran más importantes: a ellos se los mantenía más puros, mientras que los menos importantes quedaban desvirtuados. En el temperamento con intervalo 1,05946..., llamado temperamento igual, todos los intervalos quedan equivalentemente desafinados.

Para calcular la afinación de cada intervalo en este sistema se encadenan tantos semitonos como se requiera en cada uno de los casos. Tomemos, por ejemplo, un intervalo de quinta; éste se compone de siete semitonos, por lo que su afinación será la siguiente:

$$x^7 = 1.49830708$$

Aplicando concatenación de semitonos construimos la nota requerida a partir del centro tonal.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
n=1	do		32.7	65.41	130.81	261.63	523.25	1046.50	2093.00	4186.01
n=2	do#		34.65	69.30	138.59	277.18	554.37	1108.73	2217.46	4434.92
n=3	re		36.71	73.42	146.83	293.66	587.33	1174.66	2349.32	4698.64
n=4	re#		38.89	77.78	155.56	311.13	622.25	1244.51	2489.02	4978.03
n=5	mi		41.2	82.41	164.81	329.63	659.26	1318.51	2637.02	5274.04
n=6	fa	21.826	43.65	87.31	174.61	349.23	698.46	1396.91	2793.83	5587.65
n=7	fa#	23.125	46.25	92.50	185.00	369.99	739.99	1479.98	2959.96	5919.91
n=8	sol	24.50	49.00	98.00	196.00	392.00	783.99	1567.98	3135.96	6271.93
n=9	sol#	25.96	51.91	103.83	207.65	415.30	830.61	1661.22	3322.44	
n=10	la	27.50	55.00	110.00	220.00	440.00	880.00	1760.00	3520.00	
n=11	la#	29.14	58.27	116.54	233.08	466.00	932.33	1864.66	3729.31	
n=12	si	30.87	61.74	123.47	246.94	493.88	987.77	1975.53	3951.07	

Ilustración 5 Relación de frecuencias en Hz de la escala de temperamento igual.

El temperamento igual se ha impuesto a lo largo y ancho del mundo, sobre todo para el caso de los instrumentos de afinación fija, y lo que es más, el oído humano parece tolerarlo bastante bien. Aunque es cierto que algunos intervalos resultan tal vez demasiado grandes (y, por el contrario, otros excesivamente pequeños), ofrece una gran ventaja y otra no tan ventajosa para algunos: la primera, de índole práctica, es que permitió aprovechar los teclados ya existentes; la segunda, de naturaleza musical, es que gracias a que todos los intervalos son idénticos, el color del sistema se mantiene, independientemente de cuál sea el centro tonal. He de matizar que esto último es lo que más controversia crea ya que al ser igual Es importante tener en cuenta que lo expuesto hasta ahora obliga en cualquier caso a los instrumentos de afinación fija. Tal es el caso del piano, cuyas notas mantienen su afinación a lo largo de toda una interpretación musical. Sin embargo, los instrumentos de afinación libre, tales como la voz humana, tienen la posibilidad de alternar una afinación diatónica y, según la necesidad, adaptarse al temperamento igual.

Para orientarnos en las medidas e interpretar los resultados, hemos empleado el temperamento igual a lo largo de todo el trabajo.

2.3.3 Tolerancia auditiva

En el apartado anterior se ha hablado de afinación, dando distintos sistemas de temperamento según que referencias elijamos. Está claro que en el ámbito musical no nos vamos a encontrar nunca con un sonido puro y por tanto va a ser casi imposible obtener las frecuencias mostradas en la **Tabla 4**. Entonces, ¿Qué es lo que escucha un oído con una educación media-baja como notas afinadas? Aquí entra en juego la herencia musical y la educación histórica de nuestro oído. Por ejemplo en las composiciones occidentales la música se forma a partir de una unidad mínima que hemos llamado semitono pero en músicas más orientales es común y además característico encontrarnos intervalos de un cuarto de tono. Ya por debajo de esta relación interválica, un oído de educación media-baja es incapaz de notar la diferencia entre intervalos que distan un cuarto de tono.

Así pues nuestra tolerancia para nombrar e identificar una nota se va a basar en un margen a partir de las notas dadas en la **Tabla 4** de un cuarto de tono por encima o por debajo.

$$\text{Cuarto de tono} \rightarrow x = \sqrt[24]{2} \quad (12)$$

Cabe destacar que los semitonos y por tanto los cuartos de tono, tienen un carácter exponencial y su rango de frecuencias será mucho más amplio según aumente la frecuencia. Como consecuencia las tolerancias en frecuencias también aumentarán según estas sean más altas.

3 Equipo experimental

La intención del montaje del sistema experimental consistía en el empleo de un martillo piezoeléctrico, un micrófono de alta precisión y un analizador de señal que realizase la transformada de Fourier del cociente de la señal del micrófono y la del martillo. Para poder trabajar con el martillo piezoeléctrico era necesario un acondicionador de señal.

3.1 Montaje del acondicionador de señal

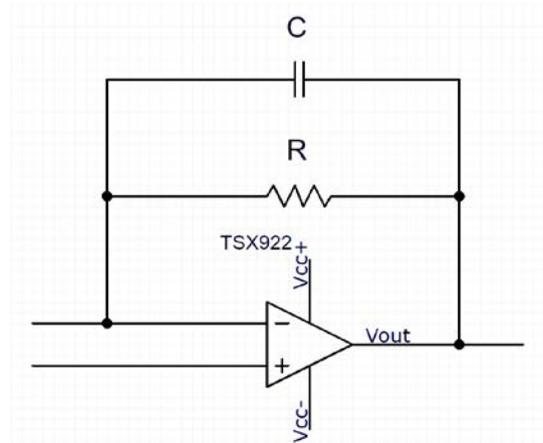


Ilustración 6 Esquema del circuito del acondicionador de señal

Una vez planteada la idea del montaje inicial del aparato de medida, estaba la necesidad de amplificar y acondicionar la pequeña señal que devolvía el martillo piezoeléctrico. Para ello se optó por un diseño como el que se ve en la **Ilustración 6**, compuesto por un OPAMP TSX922, una resistencia de $100\text{K}\Omega$ y un condensador de $1\mu\text{F}$. En primera instancia se optó por la alimentación del amplificador operacional mediante tres pilas de 9V colocadas en serie junto con un divisor de tensión. Se usaron las pilas con el fin de obtener una alimentación lo más lineal posible. En un primer experimento se detectó que la parte del circuito encargada de la alimentación del amplificador interfería con la parte responsable de la amplificación por lo que se barajaron diferentes opciones para subsanar este problema, entre las cuales se propuso colocar dos seguidores de voltaje a modo de aislante, esta opción se descartó al aumentar la complejidad y el tamaño del acondicionador. Finalmente se optó por alimentarlo externamente con un generador de tensión, simplificando así el circuito.

Una vez solucionados los primeros problemas se comenzó a comprobar si el circuito integraba, para ello mediante un generador, se hizo pasar una onda cuadrada lenta (1Hz) por el circuito, con la idea de poder observar la onda triangular de salida. No se observó nada, por lo que se decidió hacer un *back to basics* para comprobar que el montaje era el idóneo. Para ello se sustituyó el TSX922 por un

741. En este punto sí se empezó a observar un comportamiento más parecido a lo buscado, aun así el generador de señal comenzó a dar muchos problemas y se decidió cambiar por otro.

Con la certeza de que el montaje era correcto y que el generador de onda funcionaba se volvió a los TSX922, pero esta vez se pudo determinar que el problema residía en los delicados OPAMP que al haber sido soldados a un soporte para su colocación en la placa habían sido dañados.

Tras todos estos problemas se decidió comprar un acondicionador de señal comercial para poder continuar con el experimento.

3.2 Preparación y calibración del equipo completo

Una vez dispuesto todo el material para montar el equipo experimental, se procede a montar y a probar. El sistema se compone tal y como se ve en la **Ilustración 7**.

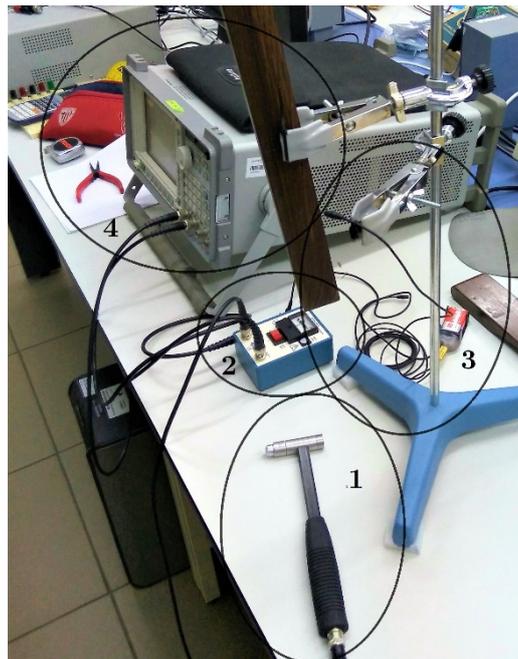


Ilustración 7 Esquema del sistema de medición.
1-Martillo piezoeléctrico, 2-Acondicionador de señal, 3-Microfono, 4-Analizador de señal.

Para comprobar que el sistema funciona perfectamente se comprueba tanto auditivamente como a través del analizador si la nota producida al golpear una madera de marimba coinciden. El resultado es satisfactorio.

Con el fin de obtener unas medidas más ajustadas a la realidad, se programa un *average* en el analizador, de tal manera que nos compone una gráfica con la media de 10 percusiones consecutivas con el martillo.

Para las medidas con la viola se ha empleado un armazón en que se colgaba la viola mediante cuatro gomas elásticas de manera que ésta quedaba completamente libre. Por seguridad se le ha colocado una cuerda de seguridad en la parte superior que únicamente actuaría en caso de fallar las gomas. El montaje lo podemos ver en la **Ilustración 7**. También con el fin de evitar que las cuerdas se exciten con los golpes, se han amortiguado con una espuma elastomérica.



Ilustración 8 Armazón de sujeción para la viola.

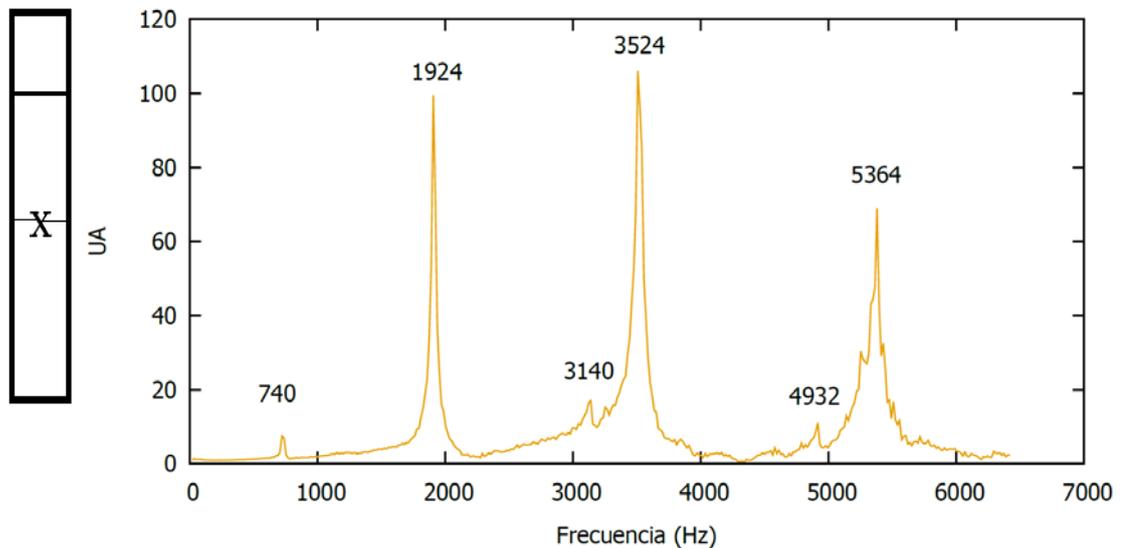
4 Medidas y resultados

4.1 Madera tratada de palosanto

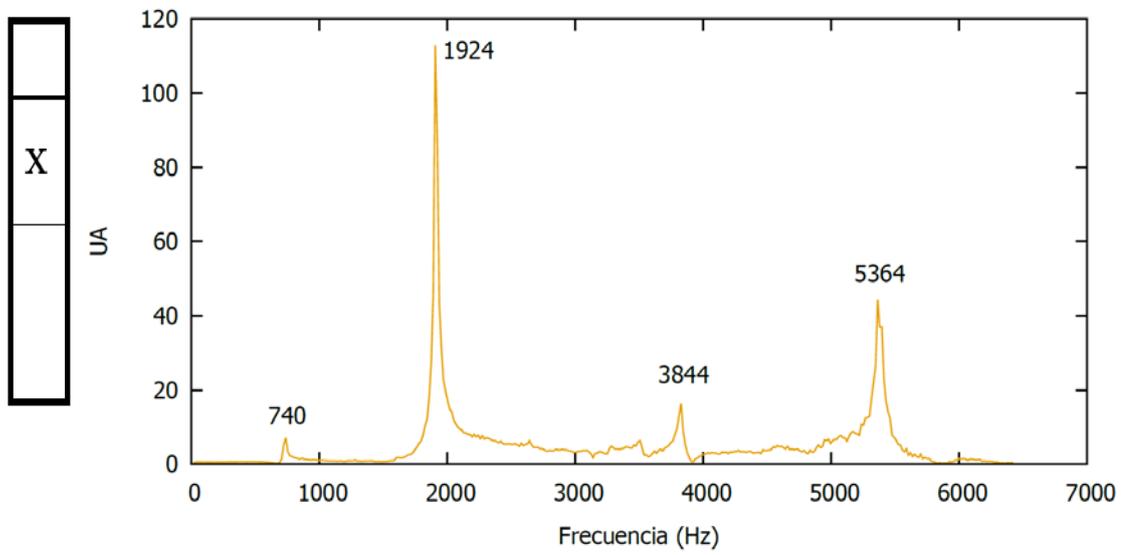
La primera medida se realiza con un listón de madera de palosanto, previamente tratado para producir una frecuencia fundamental de 740Hz correspondientes a la nota musical Fa₅ #.

Apoyándonos en los resultados teóricos de los modos normales de una barra libre-libre, la posición de sus líneas nodales y los máximos de amplitud, podemos ser capaces de buscar los primeros modos de nuestra madera, si tenemos en cuenta que la longitud es mayor que el grosor de ésta.

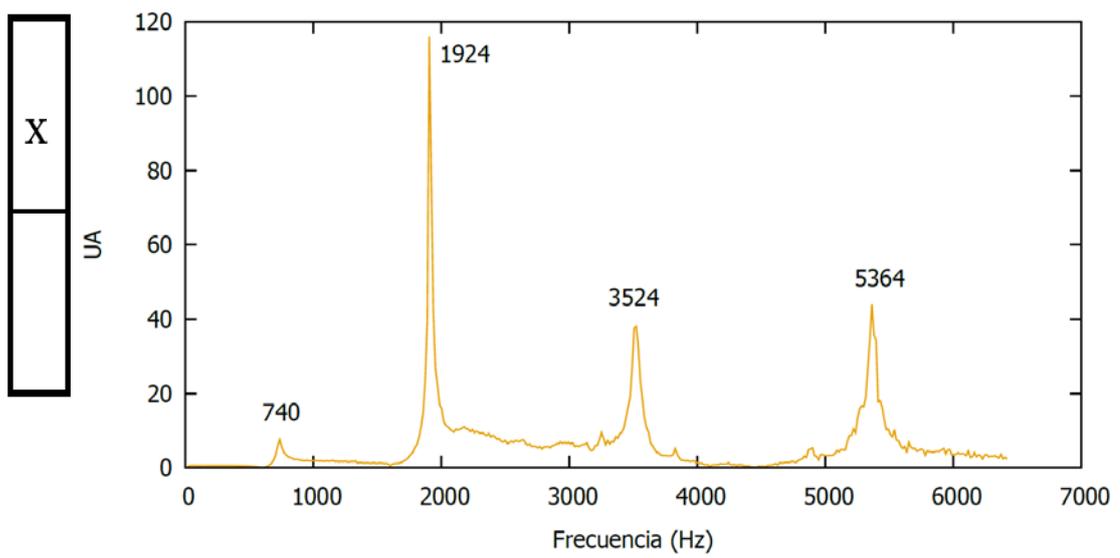
Variando la posición de la línea nodal y percutiendo en la zona correspondiente al máximo de amplitud obtenemos los siguientes resultados, donde podemos ver donde se ha golpeado la tabla, marcado con una x, y donde se ha puesto la línea nodal, marcado con una línea más gruesa:



Gráfica 1 Búsqueda de los modos principales.



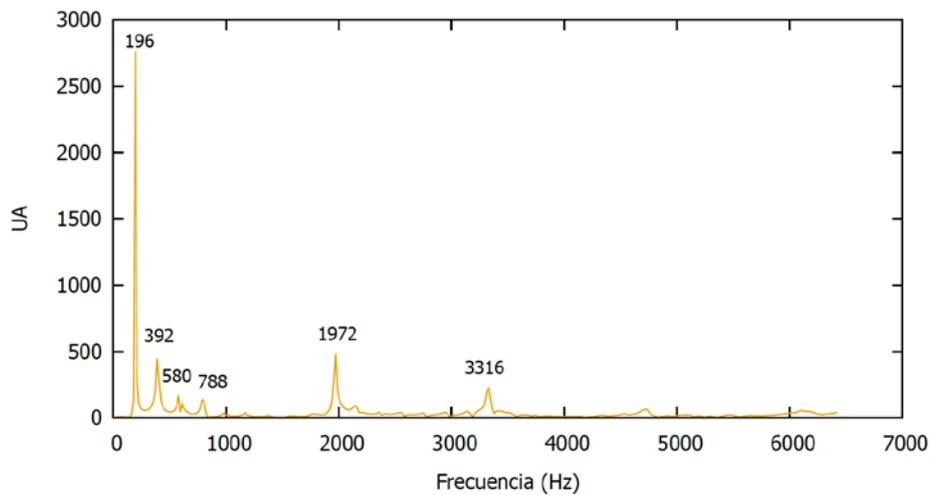
Gráfica 2 Búsqueda del segundo y cuarto modo.



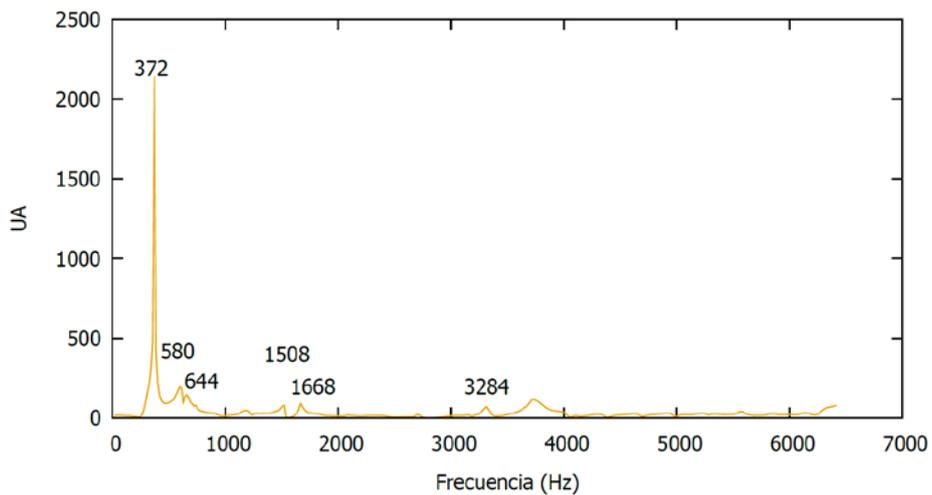
Gráfica 3 Búsqueda del segundo y cuarto modo.

4.2 Maderas de marimba

Se han realizado medidas a dos maderas de marimba, es decir, dos maderas preparadas y trabajadas en forma para que predomine la frecuencia fundamental al ser golpeadas en su centro. La madera 1 es una madera bien trabajada y de buena calidad correspondiente a una marimba orquestal, la madera 2 en cambio es una madera de una marimba básica, de mala calidad. La primera produce la frecuencia correspondiente a un Sol₃ y la segunda a un Fa₄♯. Los resultados gráficos son los siguientes:



Gráfica 4 Modos madera de marimba Sol₃.

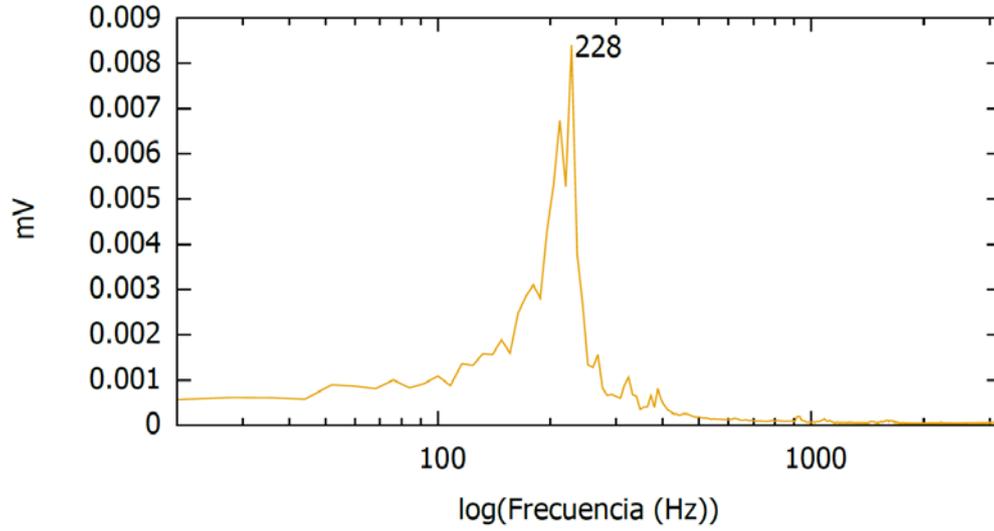


Gráfica 5 Modos madera de marimba Fa₄♯.

4.3 Viola

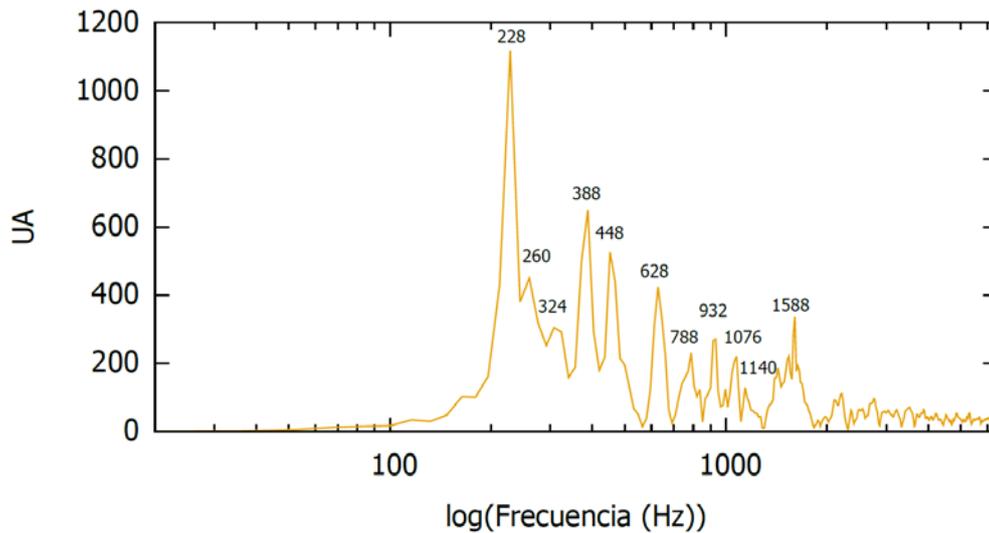
Se han querido buscar los modos de vibración de la viola como sistema completo, para ello se han hecho 3 tipos de medida:

La primera, ha sido la búsqueda del modo A_0 o modo de aire, para ello se ha soplado de la manera más uniforme posible a través de las efes de la caja.



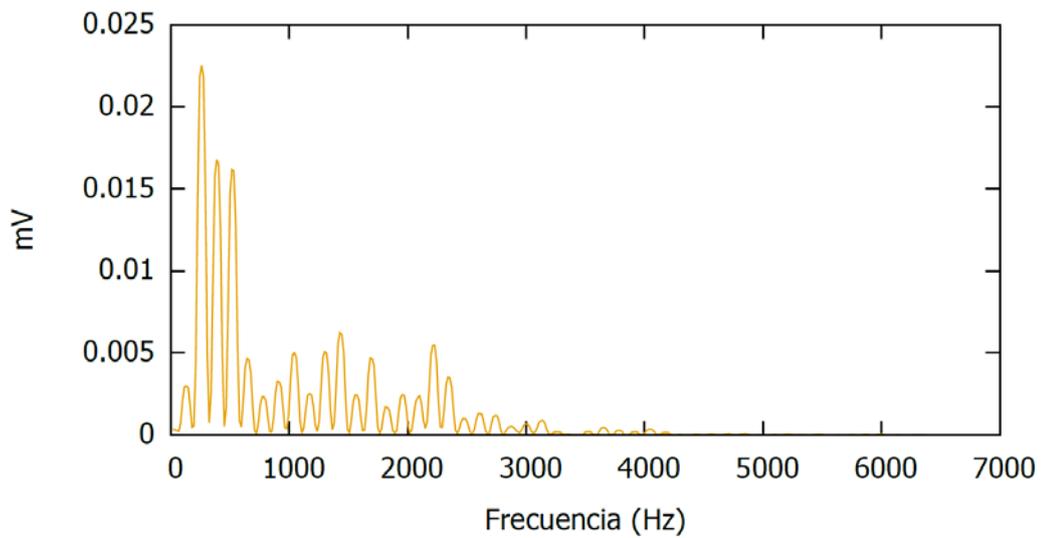
Gráfica 6 Modo A_0 o modo de Aire.

La segunda, se ha percutido con el martillo en la parte superior del puente de manera vertical.

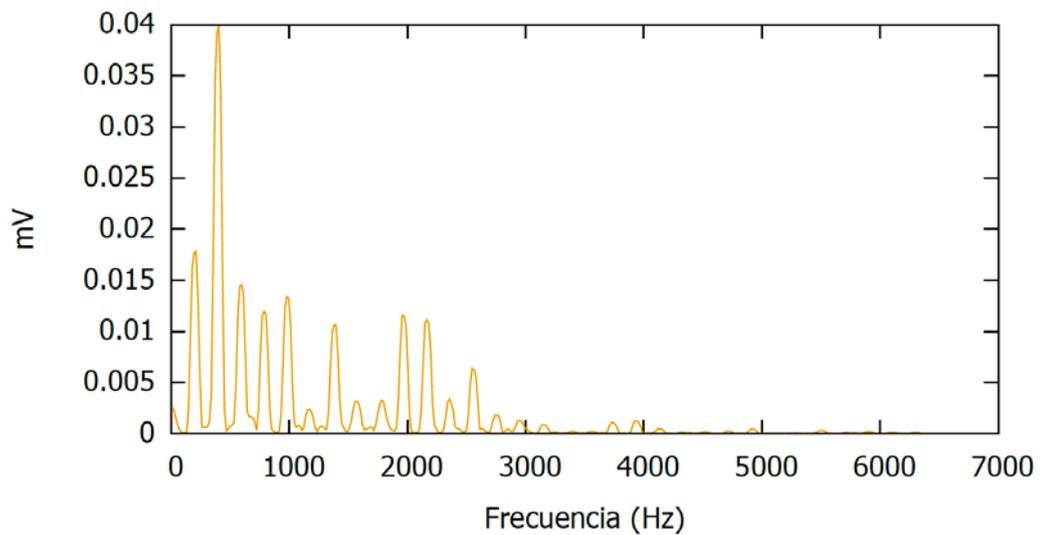


Gráfica 7 Algunas frecuencias destacables de los modos de la viola completa.

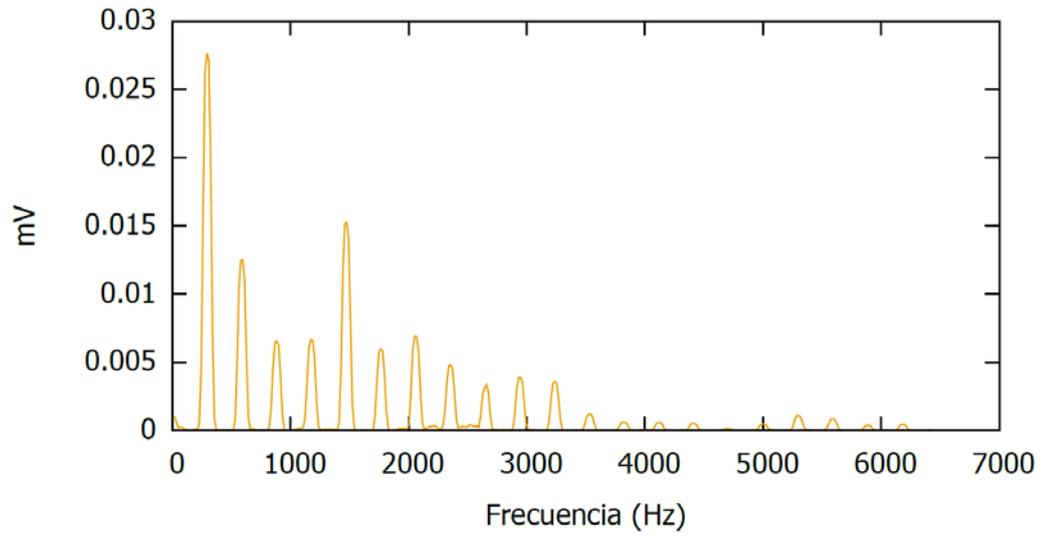
Y la tercera medida ha sido la viola completa, pero siendo tocadas cada una de las cuerdas al aire con el arco, con el fin de observar la tan estudiada cuerda vibrante y sus armónicos. Simplemente se ha medido la respuesta en frecuencia en el analizador a través de un micrófono.



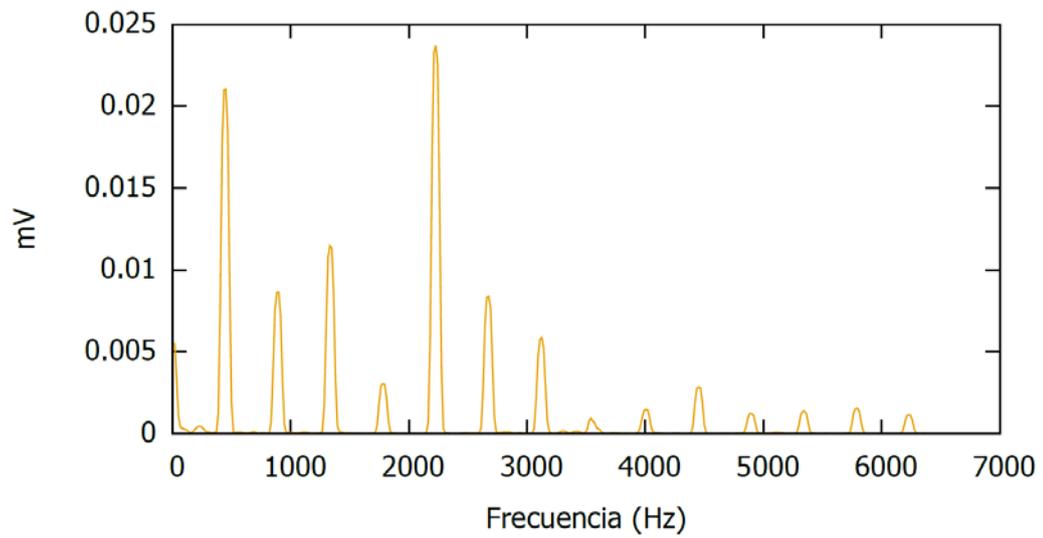
Gráfica 8 Cuerda vibrante Do.



Gráfica 9 Cuerda vibrante Sol.



Gráfica 10 Cuerda vibrante Re.



Gráfica 11 Cuerda vibrante La.

5 Interpretación y conclusiones

5.1 Madera de palosanto

En la búsqueda de los diferentes modos de esta madera cambiando sus líneas nodales y su punto de golpeo hemos concluido que los cuatro primeros modos son los siguientes:

Frecuencia (Hz)	Modo
740	1º
1924	2º
3524	3º
5364	4º

Tabla 4 Cuatro primeros modos de vibración.

La pregunta en este punto es clara, ¿Por qué consideramos el primer modo el de 740Hz, si apenas su pico tiene amplitud respecto a los demás? La respuesta a priori puede parecer poco válida pero simplemente lo es, porque lo oímos. Además para afirmar nuestra respuesta nos basamos en un fenómeno psicoacústico llamado *phantom fundamental* [1], que se produce cuando los armónicos de un sonido sugieren una frecuencia fundamental, pero el sonido carece de una componente en la frecuencia fundamental misma. El cerebro percibe el tono de un sonido no solo por su frecuencia fundamental, sino también por la periodicidad implícita en la relación entre los armónicos superiores; podemos percibir el mismo tono (quizás con un timbre diferente) incluso si la frecuencia fundamental falta. Para experimentar este efecto, no hay más que coger un pequeño altavoz y reproducir cualquier sinfonía, nosotros oiríamos y seríamos capaces de diferenciar el sonido de los contrabajos to, pero, ¿es capaz el altavoz de emitir esas frecuencias tan graves? La respuesta es negativa, para que eso ocurriese sería necesaria una membrana mucho más grande.

Así, estas medidas nos han permitido, no solo encontrar los cuatro primeros modos de esta madera, sino que además hemos sido capaces de experimentar e identificar este curioso fenómeno psicocústico.

También hay que destacar que el martillo piezoeléctrico dispone de varias puntas con diferentes durezas con las que es posible excitar diferentes frecuencias, podríamos haber usado una punta más blanda para así poder sacar una fundamental predominante, pero no hubiera sido posible determinar los armónicos superiores, tampoco hubiera sido necesario ya que ésta primera la teníamos bien identificada auditivamente.

La relación entre las frecuencias de los cuatro modos principales obtenidos son los siguientes:

Frecuencia (Hz)	Relación
740	f_1
1924	$2.6f_1$
3524	$4.762f_1$
5364	$7.248f_1$

Tabla 5 Relación entre las frecuencias

Vemos que estas relaciones entre frecuencias guardan cierta relación con las de la barra libre-libre aunque la diferencia es perfectamente achacable a que nuestra madera sí tiene un grosor considerable.

Es momento ahora de analizar todas las frecuencias obtenidas en las tres medidas pero esta vez desde un punto de vista musical. Los cuatro primeros modos de vibración corresponden con las siguientes notas:

Frecuencia (Hz)	Modo	Nota
740	1º	F _{a5} #
1924	2º	Si ₆
3140	-	Sol ₇
3524	3º	La ₇
3844	-	Si ₇
4932	-	Re ₈ #
5364	4º	Mi ₈

Tabla 6 Notas musicales correspondientes a las frecuencias obtenidas.

Aparentemente estos 7 sonidos no guardan ninguna relación entre ellos a no ser que los reordenemos, realizando las correspondientes inversiones y cancelaciones de octava, de manera que lo que obtenemos es un conjunto de intervalos de tercera que podríamos identificar como un acorde de Mi menor con 7ª, 9ª y 11ª.

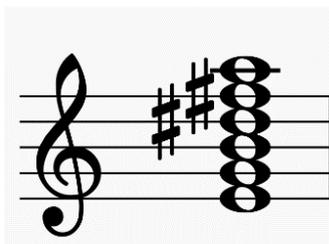


Ilustración 9 Acorde de Mi menor con 7ª, 9ª y 11ª.

Acorde poco usual en la música de hasta principios del siglo XX pero muy empleado en música contemporánea y Jazz. Esto no deja de ser curioso, ya que hemos estudiado un listón de madera preparado para estar afinado a una frecuencia de 740Hz nada más, sin ser un instrumento musical ni estar preparado para hacer música.

En la **Gráfica 2** se observan dos grandes picos correspondientes al segundo y cuarto modo de la madera y uno intermedio sobre los 3844 Hz, podríamos precipitarnos e indicar que este último puede corresponder a un tercer modo, pero no es así, ya que el tercer modo no puede aparecer en esa configuración porque estamos matando el punto de máxima amplitud colocando una línea nodal en dicho punto. Así que su estudio se reduce a identificarlo como la primera octava del segundo modo.

5.2 Maderas de Marimbas

Tras haber estudiado una madera simple es el momento de avanzar y analizar estas dos maderas de marimba como sencillas partes de un instrumento musical. En este apartado, se pretende identificar en primera instancia, qué es lo que diferencia a dos instrumentos o partes de instrumento en este caso, de notable diferencia en la calidad de sonido.

Frecuencia Hz	Nota
196	Sol ₃
392	Sol ₄
580	Re ₅
788	Sol ₅
1972	Si ₆
3316	Sol ₇ #

Tabla 7 Madera de marimba

En la primera madera, según la **Gráfica 4** observamos 6 picos diferentes. El primero de ellos y más diferenciable se sitúa en 196Hz correspondiente a la nota musical Sol₃, siendo ésta la frecuencia característica de esta madera. También se observan las dos primeras octavas de esta nota, correspondientes a frecuencias de

392Hz (Sol₄) y 788Hz (Sol₅). Nuevamente si reordenamos los picos con factor de calidad alto, obtenemos la tríada del acorde de Sol Mayor:

Al pico de 3316Hz correspondiente a un Sol₇# no se le ha encontrado una explicación musical, ya que esta nota difiere en medio tono con la fundamental de la madera y no se ajusta a ningún tipo de armonía. Lo más probable es que se deba a una sobreexcitación de la madera al ser golpeada.

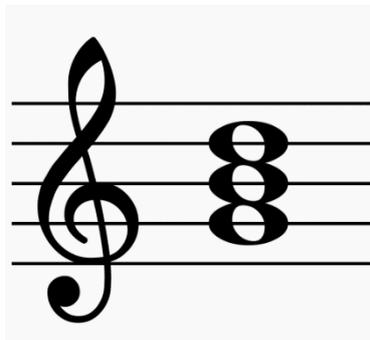


Ilustración 10 Acorde Sol Mayor.

En las medidas de la segunda madera de marimba se puede observar d que la frecuencia predominante es la fundamental en 372Hz (Fa₄#), pero en cambio los demás picos observados tienen un factor de calidad mucho menor. También observamos que en esta madera solo nos aparece una octava de la fundamental y con bastante poco factor de calidad sobre los 1508Hz.

Frecuencia Hz	Nota
372	Fa ₄ #
580	Re ₅
644	Mi ₅
1508	Fa ₆ #
1668	Sol ₆ #
3284	Sol ₇ #
3716	La ₇ #

Tabla 8 Madera marimba Fa₄#.

Aquí podríamos estar ante una primera diferencia observada de la calidad sonora entre los instrumentos. En las pruebas auditivas la primera madera tenía un timbre y un sonido mucho más envolvente y armonioso en cambio la segunda era mucho más pobre y tenía muchísima menos proyección sonora.

En cuanto a la relación de las notas musicales correspondientes a esta madera nos encontramos con un acorde de Re Mayor con dominante aumentada novena y undécima aumentada. Un acorde sin ningún sentido musical y que no tiene cabida en ningún tipo de armonía, lo que evidenciaría una segunda diferencia cualitativa en la construcción y calidad de ambas maderas ya que la primera madera nos ofrecía un acorde de tríada mayor que como se puede ver en la parte teórica, es un acorde con alta consonancia. Este hecho sería completamente compatible con lo que se percibe en las pruebas auditivas.



Ilustración 11 Acorde de Re Mayor con dominante aumentada novena y undécima aumentada.

5.3 Viola

Después de haber medido sistemas de menor a mayor complejidad, es el momento de estudiar el más complejo por el momento, la viola como sistema completo.

En la primera prueba se ha determinado el modo de aire de la viola o modo A_0 que no es más que el modo de vibración que tiene el aire dentro de la cavidad del instrumento. Se ha observado que este modo, en la viola estudiada en concreto, se sitúa sobre los 228Hz, confirmando lo que estudios con otros métodos diferentes indicaban [2].

Está claro que tenemos que tener en cuenta que tanto el aire de dentro del instrumento, como la madera que compone el cuerpo de la viola y el puente vibran, y que tendrán sus modos característicos. Sin olvidarnos de las cuerdas, que analizaremos más adelante. En la segunda prueba, que consiste en excitar todo el sistema, es decir, aire, cuerpo y puente, se han observado un gran número de picos, que debemos separar en tres partes, la primera será la que contiene el ya mencionado modo de Helmholtz o modo A_0 . La segunda, incluirá los modos de vibración que llamaremos de cuerpo y la última los modos de puente. Esta diferenciación es un poco burda ya que es un sistema mixto en el que los tres tipos de modos están

mezclados, pero nos sirve para hacernos una idea de cómo están distribuidos estos modos.

En la **Gráfica 7** se pueden observar diferentes modos de vibración a los que en la tabla vamos a relacionar con sus notas musicales correspondientes.

Frecuencia Hz	Nota
228	Modo de Aire
260	Do ₄
324	Mi ₄
388	Sol ₄
448	La ₄
628	Re ₅ #
788	Sol ₅
932	La ₄ #
996	Si ₅
1076	Do ₆
1140	Re ₆
1428	Fa ₆
1588	Sol ₆

Tabla 9 Frecuencias resultantes en la Gráfica 7.

Esos diferentes modos los separamos en tres grupos como ya hemos mencionado con anterioridad, de manera que se pueden visualizar en la **Ilustración 12**.

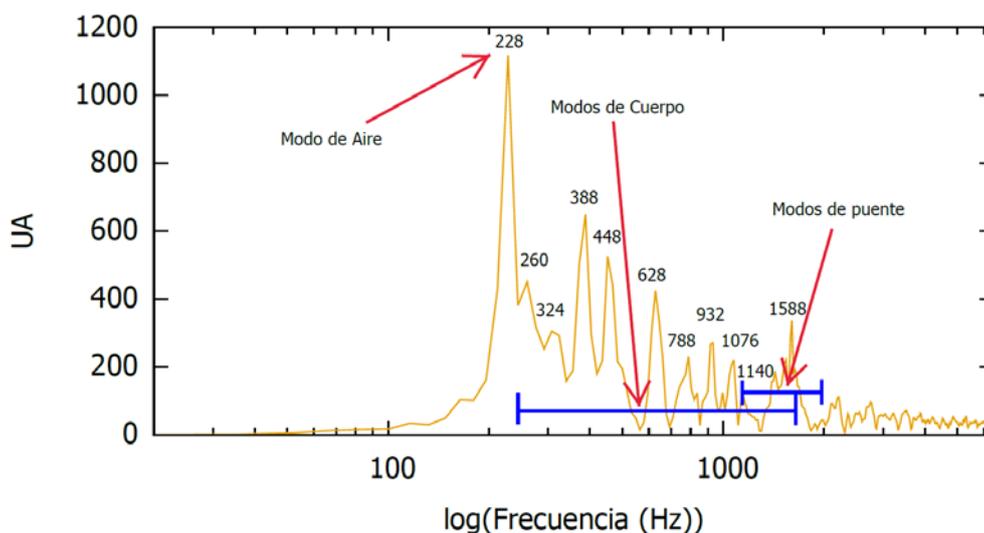


Ilustración 12 Diferenciación del modo de aire, modos de cuerpo y los modos de puente.

Donde se puede observar que el grueso de picos se sitúa en las frecuencias en las que corresponden a los modos de cuerpo, además de que esas son las frecuencias de las notas que genera la viola al ser tocada. Siendo el registro de ésta entre 132Hz-1174Hz. Cabe destacar que el hecho de que aparezcan repetidamente las frecuencias correspondientes a las notas *Sol* y *Do* en nuestro espectro de frecuencias no es ninguna casualidad, todo músico sabe que hay tonalidades en las que los instrumentos se desenvuelven mejor y responden de manera más brillante, ya sea por su geometría, su forma de tocar o simplemente por motivos históricos. En el caso de la viola son Sol Mayor y Do Mayor. Esto no quiere decir que no se interpreten obras en otras tonalidades, sino que en estas dos es donde se puede sacar mayor partido al timbre, color y sonido característico de la viola.

Es reseñable en esta viola que los modos de cuerpo por lo general tienen unos factores de calidad bastante altos, además de que las frecuencias que aparecen están muy cerca de las mostradas en la **Tabla 5**. Con esto y junto al análisis realizado con las maderas de marimba en el apartado 5.2, en el que se ha determinado que un indicativo claro de calidad sonora de un instrumento es la cantidad de picos obtenidos, su factor de calidad y su precisión respecto a las notas tabuladas, hacen que podamos decir sin haber escuchado el instrumento que esta viola está bien construida, calibrada y es de alta calidad. Nada más lejos de la realidad, ya que la viola que se ha medido es una viola de concierto *Jan Marc* del año 2008 valorada en unos 10.000\$.

Los modos de puente en una viola según el *Handbook of acoustics* [3] se sitúan entre los 1kHz y los 2kHz, es por eso hemos indicado ese rango como posibles modos de puente aunque también se situaran algunos modos de cuerpo en ese intervalo. Estos modos son prácticamente imposibles de identificar con precisión con el sistema completo montado, así que como mucho podemos ubicarlos en un espectro de frecuencias.

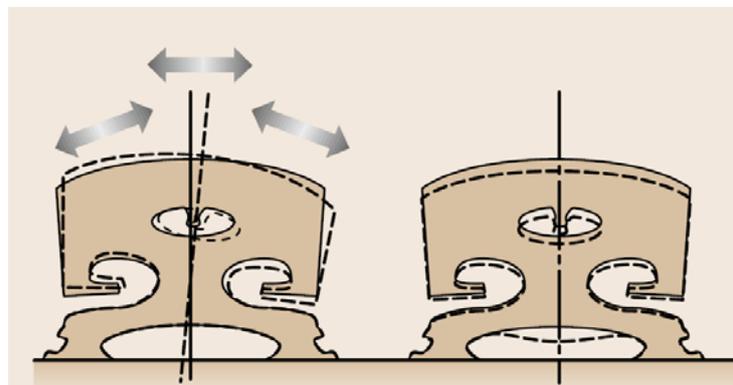


Ilustración 13 Modos de vibración del puente de una viola.

A modo ilustrativo podemos ver en como vibra la viola en algunos de los modos mostrados, las imágenes están extraídas de un artículo del departamento de música de la UC Davis [4].

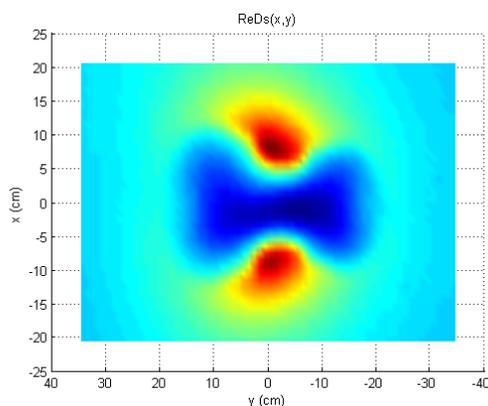


Ilustración 14 Modo de aire A_0 (228Hz)

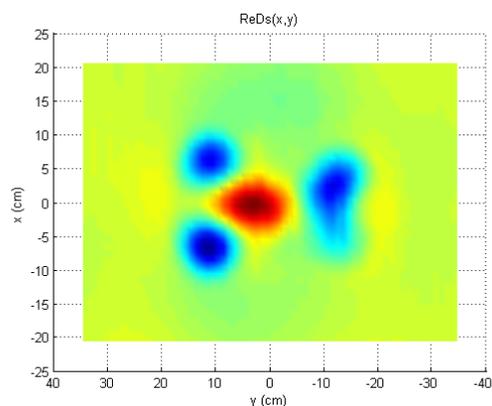


Ilustración 16 1076Hz.

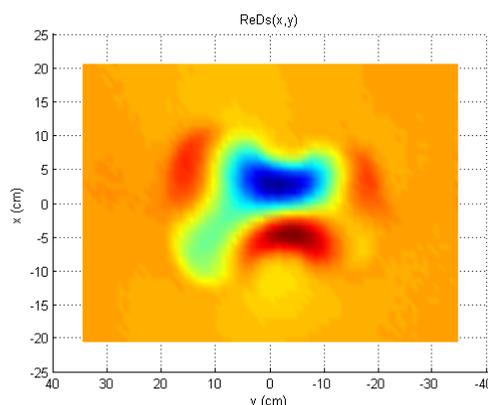


Ilustración 15 324Hz.

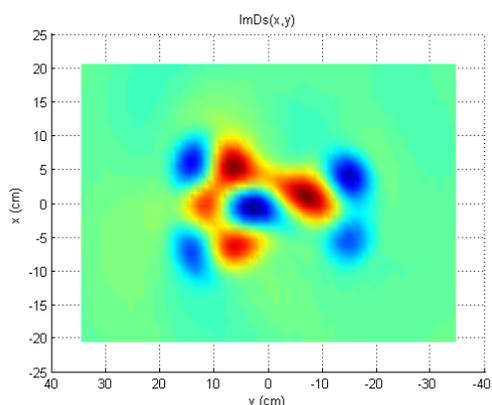


Ilustración 17 1588Hz.

Por último se han analizado las cuatro cuerdas de la viola sonando con el arco, pero no de manera continua ya que dejaría de ser cuerda libre para ser cuerda forzada. Se ha obtenido lo esperado, armónicos múltiples enteros de la frecuencia fundamental. Lo primero que nos hemos encontrado al observar el espectro de frecuencias de la **Gráfica 8**, es la “ausencia” del armónico fundamental en la cuerda Do, esto es debido a que al ser la nota más grave capaz de producir el instrumento, la caja de éste no es capaz radiar esa frecuencia por motivos simplemente de tamaño y geometría [5]. Este mismo efecto se observa de igual manera en la cuerda Sol aunque de forma menos clara tal y como se ve en la **Gráfica 9**. En cambio en las cuerdas Re y La no aparece este fenómeno ya que estamos a frecuencias superiores que la caja sí emite. La ausencia o poca presencia de estas dos frecuencias fundamentales, no significa que no oigamos la altura de esa nota,

ya que aquí vuelve a aparecer el fenómeno *phantom fundamental* [1], sino que el color característico del sonido es diferente.

Para intentar entender cómo influye cada armónico en el sonido global vamos a ubicar cada uno de ellos, estudiando qué notas musicales son hasta el sexto armónico.

Se han dispuesto los resultados en cuatro tablas, cada una correspondiente a una cuerda, en las que se da el múltiplo de la frecuencia fundamental, la frecuencia correspondiente a ese armónico, la nota musical y el grado o intervalo que forma respecto a la nota de la fundamental.

Cuerda Do			
n	$f_n(Hz)$	Nota	Grado
1	132	Do ₃	I
2	260	Do ₄	I
3	388	Sol ₄	V
4	516	Do ₅	I
5	660	Mi ₅	III
6	788	Sol ₅	V

Tabla 10

Cuerda Re			
n	$f_n(Hz)$	Nota	Grado
1	292	Re ₄	I
2	580	Re ₅	I
3	884	La ₅	V
4	1172	Re ₆	I
5	1476	Fa ₆ #	III
6	1764	La ₆	V

Tabla 12

Cuerda Sol			
n	$f_n(Hz)$	Nota	Grado
1	196	Sol ₃	I
2	388	Sol ₄	I
3	596	Re ₅	V
4	788	Sol ₅	I
5	980	Si ₅	III
6	1172	Re ₆	V

Tabla 11

Cuerda La			
n	$f_n(Hz)$	Nota	Grado
1	442	La ₄	I
2	884	La ₅	I
3	1316	Mi ₆	V
4	1764	La ₆	I
5	2228	Do ₇ #	III
6	2660	Mi ₇	V

Tabla 13

Vemos que hasta el sexto armónico siempre se forman tríadas del acorde mayor de la fundamental. Es decir, los seis primeros armónicos de una cuerda vibrante forman el acorde mayor de la nota correspondiente a la primera frecuencia.

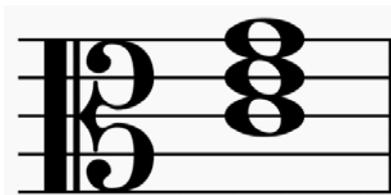


Ilustración 18 DoM.



Ilustración 19 ReM.

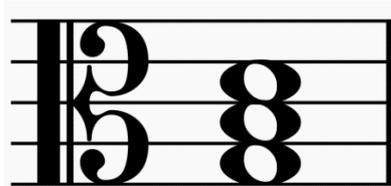


Ilustración 20 SolM.



Ilustración 21 LaM.

Como ya se ha adelantado, cada armónico va a contribuir de manera diferente al timbre del sonido o color [6], para analizar y sacar conclusiones vamos a estudiar los 16 primeros armónicos de la cuerda Do.

n	f_n (Hz)	Nota	Intervalo
1	132	Do ₃	I
2	260	Do ₄	I
3	388	Sol ₄	V
4	516	Do ₅	I
5	660	Mi ₅	III
6	788	Sol ₅	V
7	932	La ₅ #	VI aumentada
8	1044	Do ₆	I
9	1172	Re ₆	II
10	1316	Mi ₆	III
11	1444	Fa ₆ #	IV aumentada
12	1572	Sol ₆	V
13	1668	Sol ₆ #	V aumentada
14	1844	La ₆ #	VI aumentada
15	1972	Si ₆	VII
16	2100	Do ₇	I

Tabla 14 16 primeros armónicos cuerda Do.

Con lo indicado en 2.3.1 en referencia a la consonancia de los intervalos, vamos a sacar las siguientes conclusiones:

- El sonido fundamental proporciona por sí solo la sensación de altura de la nota que percibimos, misma sensación de altura que el fundamental

con todos sus armónicos. Aunque como ya vimos en 5.1 la frecuencia fundamental no es imprescindible para percibir el conjunto como una nota con la misma altura, siempre y cuando existan o suenen el resto de armónicos de la serie.

- Los armónicos números 2, 4, 8 y todos los que forman una relación igual a una potencia de 2 con la fundamental, refuerzan el carácter inequívoco de la sensación de altura del conjunto, ya que son octavas de la fundamental.
- Los armónicos 3, 6, 12 y todos aquellos que forman con el 3 una relación que es una potencia de 2, aportan un timbre nasal al conjunto ya que el intervalo de quinta otorga una dureza consonante al sonido.
- Los armónicos 5 y 10 producen un timbre o color redondo, profundo, o cálido. Son intervalos de tercera, siendo esta un grado modal que determina si una tonalidad es mayor o menor.
- Los armónicos 7, 11, 13, 14 y 15 son disonantes y dan un carácter áspero al sonido.

Así pues, podemos concluir que observando qué armónicos destacan en esta viola, podemos hacernos una idea del color y sonido característico que nos vamos a encontrar. En las cuerdas Do y Sol la poca presencia del armónico fundamental frente al segundo hace que el sonido sea más oscuro, dando ese sonido característico de viola. Una presencia reseñable del tercer armónico en ambas cuerdas nos da un sonido consonante duro y potente, característico de esta viola en concreto. En cambio en la cuerda Re al igual que en la cuerda La es la frecuencia fundamental la que destaca, siendo el sonido menos oscuro, más claro y abierto que en las cuerdas Do y Sol. Por último en la cuerda La predomina el quinto armónico que como hemos indicado anteriormente da un color redondo, profundo y cálido.

Salvo la característica general de ausencia de la frecuencia fundamental, el resto de propiedades sonoras son únicas y diferentes en cada instrumento, habiendo violas en las que en la cuerda La en vez de predominar el quinto armónico lo haga el tercero, teniendo así un sonido menos cálido pero más chillón y potente. Incluso al revés, teniendo cuerdas graves en las que predomine el quinto armónico generando un sonido muy dulce pero menos potente. No se puede determinar cuál es mejor o peor eso queda en manos de los gustos del músico.

6 Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado de menor a mayor complejidad un instrumento musical, con el fin de entender ciertos aspectos musicales con la ayuda de la física y viceversa. Para así crear un nexo de unión más sólido entre estas dos ramas que para muchos parecen estar a años luz.

Se ha trabajado siempre con la intención de dar explicación musical a todos los hechos y resultados que nos encontrábamos. En el estudio de la madera de palo-santo se han podido obtener los 4 primeros modos de vibración basándonos en el estudio teórico de una barra libre-libre. También se ha encontrado el fenómeno de la fundamental fantasma.

En el estudio de las maderas de marimba se ha observado lo que podría ser en una primera aproximación la calidad de un instrumento musical, viendo una diferencia muy clara en el número de modos de vibración diferentes que aparecen en las gráficas y su ubicación en el rango de frecuencias.

En el estudio de la viola como sistema completo se han podido diferenciar 3 tipos de frecuencias, la primera el modo de aire, que se ha observado tanto en la **Gráfica 6** como en la **Gráfica 7**, además de coincidir con lo obtenido mediante otros métodos diferente por otros investigadores [2]. También se han visto diferentes modos de cuerpo que nuevamente vuelven a coincidir con algunos obtenidos en otros experimentos [4]. Y por último se han podido ubicar los dos modos de vibración característicos del puente de la viola entre los 1-2kHz.

En el estudio de algo tan sencillo como las vibraciones de una cuerda, hemos llegado a una correlación musical de cuál es el aporte de cada uno de los armónicos de la cuerda al sonido global del conjunto del instrumento. Es en este punto donde somos capaces de responder a la pregunta de qué es lo que hace especial y diferente a cada instrumento. Siendo claramente qué frecuencias o armónicos son los que destacan, dando así un color característico y diferente a cada instrumento.

Se puede concluir que el resultado del estudio ha sido satisfactorio y que se han cumplido los objetivos marcados al principio de éste, llegándose a dar respuesta a las preguntas que motivaron este trabajo. Además todo lo encontrado experimentalmente ha servido para para corroborar datos obtenidos en otros experimentos realizados con métodos diferentes por otros investigadores, con resultados idénticos.

Así, se ha conseguido poner un punto de objetividad en algo tan subjetivo como la música.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a toda la gente que ha hecho posible que haya podido llegar hasta aquí y realizar este estudio. En primer lugar a mis abuelos Mentxu y Carlos a quienes dedico este trabajo. A mis padres, por no dejar nunca de creer en mí, a pesar de las muchas adversidades. A Iker, Iñigo e Iván, por su constante apoyo, ayuda y amistad. A todas esas personas que han estado a mi lado durante estos últimos años y no han dejado de animarme en ningún momento. A Jose María Bretos, profesor de acústica de Musikene, por sus consejos, charlas y orientación. Y sobre todo a Víctor Etxebarria por mostrarme e introducirme en el maravilloso mundo de la acústica.

Bibliografía

- [1] P. Cariani y B. Delgutte, «Neural Correlates of the Pitch of Complex Tones. I. Pitch and Pitch Saliency,» *Journal of Neurophysiology*, vol. 76, Septiembre 1996.
- [2] J. Coffey, «The Air Cavity, f-holes and Helmholtz Resonance,» *Cheshire, UK.*, 2013.
- [3] Rossing, Thomas D., Springer Handbook of Acoustics, Stanford: Springer, 2014.
- [4] M. Powell, «Acoustic Analysis of the Viola,» *Department of Physics, UC Davis*.
- [5] J. Coffey, «How We Hear the Sound of the Violin and Viola,» *Cheshire, UK.*, 2013.
- [6] R. L. P. Alonso, Historia de la música en 6 bloques, Madrid: Visión Libros.
- [7] J. Agulló, «Acústica musical,» *Investigación y Ciencia*, 1989.
- [8] C. M. Hutchins, «Acoustics for the violin maker,» *Catgut Acoustical Society Newsletter*, vol. I, 1978.
- [9] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens y J. V. Sanders, Fundamentals of Acoustics, John Wiley & Sons, 2000.

