# Filtros y convergencia en espacios topológicos

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Miguel Orbegozo Rodríguez

Trabajo dirigido por
Marta Macho Stadler

Leioa, 20 de junio de 2018

# Índice general

# Introducción

El estudio de la convergencia tiene gran importancia en varias áreas de las matemáticas. En análisis, muchos de los conceptos, como la derivación o la integración, se definen usando límites. En topología, muchas propiedades de un espacio, como la compacidad o el axioma de Hausdorff, así como las funciones continuas entre espacios topológicos, pueden ser descritas usando convergencia. En geometría, en especial en geometría diferencial, el concepto de convergencia también es fundamental.

El concepto de límite se estudia en espacios métricos mediante la convergencia de sucesiones. Este concepto se puede estudiar también en espacios topológicos más generales, sin embargo, no presenta buenas propiedades, por lo que resulta insuficiente. Para realizar un estudio de la convergencia en espacios topólogicos, las redes (o sucesiones generalizadas), fueron introducidas por E.H. Moore y H.L. Smith en 1922, y los filtros por H. Cartan, en 1936. El grupo Bourbaki, del que Cartan fue uno de los fundadores, utilizó el concepto de filtro en su libro *Topologie Générale* como una alternativa al concepto de red.

En este trabajo, en el capítulo 1, se introducirá el concepto de filtro, que servirá para generalizar la noción de convergencia. Se comprobará que en determinados espacios la convergencia de sucesiones no describe de manera adecuada la topología, y se demostrarán propiedades topológicas trabajando con filtros. Resultados como el teorema de Tychonoff, por ejemplo, cuya demostración es trabajosa, se prueban de manera más sencilla utilizando herramientas proporcionadas por los filtros.

Posteriormente, en el capítulo 2, se definirá la noción de filtro cerrado, similar a la de filtro, con la condición adicional de que los elementos de los filtros cerrados deben ser conjuntos cerrados. Utilizando los filtros cerrados también se puede definir la convergencia, y estudiar propiedades topológicas. Se estudiará qué propiedades de los filtros se conservan en filtros cerrados, y cuáles dejan de ser válidas debido a la restricción de utilizar exclusivamente conjuntos cerrados.

Finalmente, en el capítulo 3 se estudiarán las compactificaciones, es decir, formas de embeber espacios no compactos de manera densa en espacios compactos, y se dará una forma de construir una compactificación de un espacio de Hausdorff mediante ultrafiltros cerrados.

# Capítulo 1

# Filtros

## 1.1. Filtros

**Definición 1.1.1.** Un filtro $\mathcal{F}$ sobre $X$ es una familia no vacía de subconjuntos de X tal que :

- $F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$,
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ para todo $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
- Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset G$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Observamos que la definición es puramente conjuntista, es decir, no es necesario definir una topología sobre $X$ para definir los filtros. Veamos ahora algunos ejemplos.

**Ejemplo 1.1.1.** (i) Filtro indiscreto sobre un conjunto no vacío $X$: $\mathcal{F} = \{X\}$.

(ii) Filtro principal sobre un conjunto: Dado un conjunto $X$ y $x \in X$, se define $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid x \in A\}$. Sus elementos son no vacíos, ya que $x$ pertenece a todos ellos. Si dos conjuntos contienen a $x$, su intersección también, y si $x$ pertenece a un conjunto $A$, también pertenece a cualquier conjunto $B \supset A$.

(iii) Filtro de entornos en un espacio topológico: Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, y $x \in X$, el conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$ de los entornos del punto $x$ es un filtro, ya que los entornos de un punto cumplen las condiciones de la definición.

(iv) Filtro cofinito sobre un conjunto: Dado un conjunto infinito $X$, $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid X - A \quad \text{es finito}\}$. Es claro que los elementos de $\mathcal{F}$ son no vacíos. Además, si $A, B \in \mathcal{F}$, $X - A$ y $X - B$ son finitos, por lo que $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$ es finito, y entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Finalmente, si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces $X - B \subset X - A$ que es finito, por lo que $B \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es un filtro.

(v) Análogamente al filtro cofinito, se puede definir, en un espacio no contable, el filtro cocontable $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid X - A \quad \text{es contable}\}$.

**Definición 1.1.2.** Una subcolección $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$, es decir, si

$$\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}.$$

**Proposición 1.1.1.** *Una familia de subconjuntos no vacíos de $X$, $\mathcal{B}$, es base de algún filtro sobre el conjunto $X$ si y sólo si para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

*En tal caso, el conjunto $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$ es un filtro, el filtro generado por $\mathcal{B}$.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Si $\mathcal{B}$ es base del filtro $\mathcal{F}$, entonces dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, como son elementos del filtro, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$, y por lo tanto existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$) Si para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, entonces vemos que $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$ es un filtro. En primer lugar sus elementos son no vacíos, ya que contienen a elementos de $\mathcal{B}$. Además, si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subset F_1$ y $B_2 \subset F_2$. Entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$, por lo que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Finalmente, si $F \in \mathcal{F}$, y $F \subset G$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}$ es un filtro y $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$. □

**Ejemplo 1.1.2.** (i) Dado un conjunto $X$ y $x \in X$, $\mathcal{B} = \{\{x\}\}$ es base del filtro principal en $x$.

(ii) Dado un conjunto $X$ y $A \subset X$, $\mathcal{B} = \{A\}$ es base del filtro principal en $A$.

(iii) $\mathcal{B} = \{(a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$ es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$, que suele llamarse filtro de Fréchet.

Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos, y $f : X \longrightarrow Y$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en $X$. Entonces, $f(\mathcal{F}) = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ no tiene por qué ser un filtro en $Y$, por ejemplo, si $f$ no es sobreyectiva.

**Ejemplo 1.1.3.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$, y sea $\mathcal{F}$ un filtro en $\mathbb{R}$. Entonces, dado un elemento $F \in f(\mathcal{F})$, el conjunto $\{-1\} \cup F \supset F$ no puede pertenecer a $f(\mathcal{F})$ ya que $-1$ no pertenece al rango de $f$. Por lo tanto $f(\mathcal{F})$ no es un filtro.

**Proposición 1.1.2.** *Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos, y $f : X \longrightarrow Y$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en $X$. Entonces, $f(\mathcal{F}) = \{f(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtro en $Y$.*

*Demostración.* En primer lugar, es claro que los elementos de $f(\mathcal{F})$ son no vacíos, ya que son imágenes de conjuntos no vacíos. Ahora, sean $f(F_1)$ y $f(F_2)$ dos elementos de $f(\mathcal{F})$. Entonces, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, por lo que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Así, $f(F_1 \cap F_2) \in f(\mathcal{F})$ y además $f(F_1 \cap F_2) \subset f(F_1) \cap f(F_2)$. Por lo tanto $f(\mathcal{F})$ es base de filtro. □

**Definición 1.1.3.** Sea $f : X \longrightarrow Y$, y $\mathcal{F}$ un filtro en $X$. Definimos la imagen de $\mathcal{F}$, y la denotamos $f(\mathcal{F})$, al filtro generado por las imágenes de los elementos de $\mathcal{F}$.

**Definición 1.1.4.** Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ filtros sobre $X$. Decimos que $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Esta relación define un orden parcial sobre la familia de filtros sobre $X$.

**Ejemplo 1.1.4.**

(i) Dado un conjunto $X$, y un subconjunto $A \subset X$ con más de un punto el filtro principal en $x \in A$ es estrictamente más fino que el filtro principal en $A$.

(ii) Sobre un conjunto $X$ no contable, el filtro cocontable es estrictamente más fino que el filtro cofinito.

**Definición 1.1.5.** Un filtro $\mathcal{F}$ es fijo si $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ y libre en caso contrario.

**Ejemplo 1.1.5.**

(i) El filtro principal en $x$ es un filtro fijo para cada $x \in X$. En efecto, $x$ pertenece a todos los elementos del filtro, por lo que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Análogamente, el filtro principal en $A$ es un filtro fijo para todo $A \subset X$, $A \neq \emptyset$.

(ii) El filtro de entornos de cualquier punto $x \in X$ es un filtro fijo, ya que $x$ pertenece a cualquier entorno, por lo que la intersección de los entornos contiene a $x$ y es no vacía.

(iii) Los filtros cofinitos y cocontables son filtros libres. En efecto, sea $X$ un conjunto infinito, y $\mathcal{F}$ el filtro cofinito. Dado $x \in X$, sea $F_x = X - \{x\}$. El complementario de $F_x$ es finito, por lo que $F_x \in \mathcal{F}$, pero $x \notin F_x$. Así, $x$ no puede estar en la intersección de todos los elementos del filtro. Por lo tanto $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$, y $\mathcal{F}$ es un filtro libre. Análogamente se demuestra que los filtros cocontables son libres.

## 1.2. Convergencia de filtros

### 1.2.1. Convergencia y puntos de aglomeración

Hasta ahora, las propiedades que hemos visto de los filtros han sido, al igual que su definición, puramente conjuntistas, excepto para el ejemplo del filtro de entornos sobre un punto dado. Ahora indroducimos una topología sobre el conjunto para definir la convergencia y los puntos de aglomeración, y veremos que podemos utilizarlas para describir conceptos topológicos como la clausura o la compacidad, de manera análoga a como se emplean las sucesiones en espacios métricos.

**Definición 1.2.1.** Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico $(X, \tau)$.

(i) Decimos que $\mathcal{F}$ converge a $x$, y denotamos $\mathcal{F} \longrightarrow x$ si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$.

(ii) Decimos que $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si para todo $N \in \mathcal{N}_x$, es $N \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

La anterior definición es equivalente a, si $\mathcal{B}$ es base de filtro,

(i) $\mathcal{B} \longrightarrow x$ si y sólo si para todo $N \in \mathcal{N}_x$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset N$.

(ii) $x$ es punto de aglomeración del filtro generado por $B$ si y sólo si $B \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$ y $B \in \mathcal{B}$.

Podemos caracterizar los puntos de aglomeración de un filtro de la siguiente manera.

**Proposición 1.2.1.** *Dado un filtro $\mathcal{F}$ sobre un espacio topológico $(X, \tau)$, un punto $x \in X$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si y sólo si $x \in \overline{F}$ para cada $F \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* Dado $x \in X$, $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si y sólo si para cada $F \in \mathcal{F}$, es $N \cap F \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$, es decir, si y sólo si $x \in \overline{F}$. □

**Ejemplo 1.2.1.** (i) Es claro que en cualquier espacio topológico, para todo $x \in X$ $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x \longrightarrow x$.

(ii) Dado $x \in X$, donde $(X, \tau)$ es cualquier espacio topológico, el filtro principal en $x$, $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid x \in A\} \longrightarrow x$, ya que para todo $N \in \mathcal{N}_x$, $x \in N$.

(iii) En $(X, \tau_{ind})$ todos los filtros convergen a todos los puntos de $X$, ya que el único entorno de cada punto es el total, y el total pertenece a todos los filtros.

(iv) En $(X, \tau_{dis})$, dado $x \in X$, el único filtro que converge a $x$ es el filtro principal en $x$, ya que si $\mathcal{F} \longrightarrow x$, como $\{x\}$ es un entorno de $x$, $\{x\} \in \mathcal{F}$, y por lo tanto $\mathcal{F} = \{A \subset X \mid x \in A\}$.

(v) Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, el filtro indiscreto $\mathcal{F} = \{X\}$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si el único entorno de $x$ es $X$. Por ejemplo, en $([0,1], \tau_{[0,1)})$, donde $\tau_{[0,1)} = \{A \subset [0,1] \mid [0,1) \subset A\}$, el filtro indiscreto converge a 1, ya que el único abierto que contiene al 1 es $[0,1]$. Sin embargo, todos los puntos de $X$ son puntos de aglomeración de $\mathcal{F}$, sin importar cual sea la topología.

**Ejemplo 1.2.2.** Al contrario que las sucesiones en espacios métricos, pero al igual que sucede en espacios topológicos más generales, los filtros pueden converger a más de un punto. Sea $X$ un conjunto, y $A \subset X$ un subconjunto con más de un punto. Sea $\tau_A$ la topología A-inclusión, es decir,

$$\tau_A = \{B \subset X \mid A \subset B\} \cup \{\emptyset\}$$

Entonces el filtro principal en $A$,

$$\mathcal{F}_A = \{B \subset X \mid A \subset B\}$$

converge a todos los puntos de $A$.

**Proposición 1.2.2.** (i) *Si $\mathcal{F} \longrightarrow x$, entonces $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

(ii) *Si $\mathcal{F} \longrightarrow x$, entonces cualquier filtro más fino que $\mathcal{F}$ también converge a $x$.*

*Demostración.* (i) Si $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$, como la intersección de dos elementos cualesquiera de un filtro es no vacía, $N \cap F \neq \emptyset$, para todo $N \in \mathcal{N}_x, F \in \mathcal{F}$, es decir, $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.

(ii) Si $\mathcal{G}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$, y $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{G}$, por lo que $\mathcal{F} \longrightarrow x$.

□

### 1.2.2. Los filtros generalizan a las sucesiones

Se puede apreciar la similitud entre los filtros y las sucesiones. En efecto, en el caso de un espacio métrico $(X, d)$, dado $x \in X$, el conjunto de las bolas abiertas centradas en $X$, $\mathcal{B}_x = \{B(x, \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$ forma una base de entornos del punto $x$. Así, si un filtro $\mathcal{F}$ converge a $x$ entonces $B_x \subset \mathcal{F}$. Por otra parte, si una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $x$, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n \mid n \geq n_\varepsilon\} \subset B(x, \varepsilon)$. Esta similitud se ve de manera aún más clara si consideramos el concepto de red, que se puede considerar como una generalización de las sucesiones.

**Definición 1.2.2.** Un conjunto $D$ es un conjunto dirigido si existe una relación $\leq$ en $D$ tal que

(i) $d \leq d$ para todo $d \in D$.

(ii) Si $d_1 \leq d_2$ y $d_2 \leq d_3$, entonces $d_1 \leq d_3$.

(iii) Para todo $d_1, d_2 \in D$, existe $d_3 \in D$ tal que $d_1 \leq d_3$ y $d_2 \leq d_3$.

A la relación $\leq$ se le llama dirección en $D$.

**Definición 1.2.3.** Una red sobre un conjunto $X$ es una función $\varphi : D \longrightarrow X$, donde $D$ es un conjunto dirigido. El punto $\varphi(d)$ se suele denotar por $x_d$, y la red por $\{x_d\}_{d\in D}$.

Es claro que las sucesiones son también redes, ya que los números naturales con la relación usual de orden forman un conjunto dirigido. Es decir, las redes generalizan el concepto de sucesión. Así, la convergencia de redes se define de manera similar a la convergencia de sucesiones.

**Definición 1.2.4.** Se dice que una red $\{x_d\}_{d\in D}$ converge a un punto $x$ en un espacio topológico $(X, \tau)$, y se denota por $x_d \longrightarrow x$ si, para cada entorno $U$ de $x$ existe un $d_0 \in D$ tal que $d_0 \leq d$ implica que $x_d \in U$.

Veamos que podemos establecer una relación entre filtros y redes.

**Definición 1.2.5.** Sea $X$ un conjunto y $\{x_d\}_{d\in D}$ una red en $X$. Para cada $d_0 \in D$, definimos el conjunto $B_{d_0} = \{x_d \mid d_0 \leq d\}$. Entonces la familia $\mathcal{B} = \{B_d \mid d \in D\}$ es una base de filtro, para un filtro llamado el filtro generado por $\{x_d\}_{d\in D}$.

**Definición 1.2.6.** Sea $X$ un conjunto, y $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X$. Definimos el conjunto $D_{\mathcal{F}} = \{(x, F) \mid x \in F \in \mathcal{F}\}$. Así, $D_{\mathcal{F}}$ está dirigido por la relación $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subset F_1$. Por lo tanto, la función $\varphi : D_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ definida por $\varphi((x, F)) = x$ es una red en $X$, y se llama la red basada en $\mathcal{F}$.

La convergencia de filtros y redes es equivalente en el siguiente sentido:

**Proposición 1.2.3.** (i) *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Un filtro $\mathcal{F}$ sobre $X$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si la red basada en $\mathcal{F}$ converge a $x$.*

(ii) *Una red $\{x_d\}_{d\in D}$ en $X$ converge a $x \in X$ si y sólo si el filtro generado por $\{x_d\}_{d\in D}$ converge a $x$.*

### 1.2.3. Descripción de conceptos topológicos mediante filtros

**Proposición 1.2.4.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $\mathcal{F}$ un filtro. Entonces un punto $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{G}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G} \longrightarrow x$.*

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, entonces se tiene $N \cap F \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$ y $F \in \mathcal{F}$. Sea $\mathcal{B} = \{F \cap N \mid F \in \mathcal{F} \quad N \in \mathcal{N}_x\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de filtro. Es claro que los elementos de $\mathcal{B}$ son no vacíos.

Sean $B_1 = F_1 \cap N_1$, $B_2 = F_2 \cap N_2 \in \mathcal{B}$. Entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$, por lo que $B_3 = (F_1 \cap F_2) \cap (N_1 \cap N_2) \in \mathcal{B}$. Además, claramente $B_3 = B_1 \cap B_2$ (y por tanto $B_3 \subset B_1 \cap B_2$), por lo que $\mathcal{B}$ es base de un filtro $\mathcal{G}$. Por otra parte, dado $F \in \mathcal{F}$, como $X \in \mathcal{N}_x$, $F = F \cap X \in \mathcal{B}$, por lo que el filtro generado por $\mathcal{B}$ es más fino que $\mathcal{F}$. Finalmente, para todo $N \in \mathcal{N}_x$, dado $F \in \mathcal{F}$, $F \cap N \in \mathcal{B}$, y $F \cap N \subset N$, por lo que $\mathcal{B}$ converge a $x$.

$\Longleftarrow$) Si existe un filtro $\mathcal{G}$ más fino que $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G} \longrightarrow x$, entonces $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{G}$. Sean $N \in \mathcal{N}_x$ y $F \in \mathcal{F}$. Entonces $N \in \mathcal{G}$ y $F \in \mathcal{G}$, por lo que por ser $\mathcal{G}$ filtro, $N \cap F \neq \emptyset$, lo que implica que $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.

$\square$

A continuación vemos una caracterización de la clausura de un conjunto en términos de filtros. Recordemos que, en espacios métricos un punto pertenece a la clausura de un conjunto si existe una sucesión contenida en el conjunto que converja al punto; podemos hacer algo análogo con filtros.

**Teorema 1.2.5.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe un $\mathcal{F}$ filtro tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \longrightarrow x$.*

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $x \in \overline{A}$, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, $A \cap N \neq \emptyset$, y entonces $\mathcal{B} = \{A \cap N | N \in \mathcal{N}_x\}$ es una base para un filtro $\mathcal{F}$. Es claro que $A \in \mathcal{F}$ y que para todo $N \in \mathcal{N}_x$, $N \in \mathcal{F}$ por lo que $\mathcal{F} \longrightarrow x$.

$\Longleftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro tal que $A \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Entonces, $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$ y por lo tanto para todo $N \in \mathcal{N}_x$, $N \in \mathcal{F}$. Así, debe ser $N \cap A \neq \emptyset$ y en consecuencia $x \in \overline{A}$.

$\square$

El anterior resultado implica que la topología de un espacio queda caracterizada por la convergencia de los filtros sobre el espacio base. Este resultado no es cierto en general si empleamos sucesiones, solamente se cumple en espacios primero numerables, es decir, espacios en los que para cada punto existe una base de entornos contable. Veamos lo que ocurre en un espacio que no es primero numerable.

**Ejemplo 1.2.3.** Consideramos $\mathbb{R}$ con la topología cocontable, es decir, $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$, donde $\tau_{coc} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ es contable}\}$. $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ no es primero numerable. Veamos que las únicas sucesiones que convergen son semiconstantes, es decir, si $x_n \longrightarrow x$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $x_n = x$.

Supongamos que existe una sucesión no semiconstante tal que $x_n \longrightarrow x$. Al no ser semiconstante, existe una subsucesión $\{x_{\varphi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{\varphi(n)} \neq x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es convergente, también lo será la subsucesión, es decir, $x_{\varphi(n)} \longrightarrow x$. Ahora, si $Rg(\{x_{\varphi(n)}\})$ denota el rango de $\{x_{\varphi(n)}\}$, tomamos $U = \mathbb{R} - Rg(\{x_{\varphi(n)}\}) \in \tau_{coc}$ porque el rango de una sucesión es contable. Tenemos que $x \in U$, por lo que $U$ es un entorno del punto $x$. Sin embargo, ningún punto de la subsucesión está en $U$, por lo que la subsucesión no puede converger a $x$ y por lo tanto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tampoco.

Ahora, consideramos el conjunto $A = [0, 1]$. Su clausura es $\overline{A} = \mathbb{R}$, ya que los conjuntos cerrados en esta topología son contables, y $A$ no es contable, por lo que el único cerrado en el que esta contenido es el total. Por lo tanto, $x = 3 \in \overline{A}$, pero no hay ninguna sucesión contenida en $A$ que converja a 3.

Por otra parte, en $(\mathbb{R}, \tau_{dis})$ las únicas sucesiones convergentes son las semiconstantes, ya que si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x$, como $\{x\}$ es un entorno de $x$, necesariamente existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $x_n \in \{x\}$, es decir, $x_n = x$. Por lo tanto, desde el punto de vista de la convergencia de sucesiones, en $\mathbb{R}$ la topología discreta y la cocontable son indistinguibles. En definitiva, la convergencia de sucesiones no caracteriza la topología, como si lo hace la convergencia de filtros, según el teorema 1.2.5.

Veamos más propiedades sobre convergencia de filtros.

**Definición 1.2.7.** Decimos que un espacio topológico $(X, \tau)$ es de Hausdorff si dos puntos distintos se pueden separar por abiertos disjuntos, es decir, si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U$, $y \in V$, y $U \cap V = \emptyset$.

**Teorema 1.2.6.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces $(X, \tau)$ es Hausdorff si y sólo si todo filtro sobre $X$ converge como mucho a un punto.*

*Demostración.* Sea $(X, \tau)$ un espacio de Hausdorff, y supongamos que existe $\mathcal{F}$ un filtro que converge a dos puntos $x \neq y$. Existen $B_1, B_2 \in \tau$ tales que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $x \in B_1$, $y \in B_2$. Como los abiertos son entornos de cada uno de sus puntos, $B_1 \in \mathcal{N}_x$, por lo que $B_1 \in \mathcal{F}$, y $B_2 \in \mathcal{N}_x$, y por tanto $B_2 \in \mathcal{F}$, pero esto no puede ser porque $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \tau)$ no es de Hausdorff. Entonces, existen $x \neq y$ tales que si $U_1$ es un abierto que contiene a $x$ y $U_2$ es un abierto que contiene a $y$, es $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Por lo que $N \cap M \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x, M \in \mathcal{N}_y$, ya que todo entorno de un punto contiene a un abierto que contiene al punto. Sea $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$. Claramente $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Pero además, $y$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, pues todos sus entornos contienen a un abierto que contiene a $y$, cuya intersección con los entornos de $x$ es no vacía por hipótesis. Entonces, existe un filtro $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, y que converge a $y$. Como además $\mathcal{G} \longrightarrow x$, tenemos un filtro que converge a dos puntos distintos.

□

Veamos ahora que podemos utilizar la convergencia de filtros para caracterizar las funciones continuas, de manera similar a como utilizamos la convergencia de sucesiones para caracterizar funciones continuas en espacios métricos. Una aplicación entre espacios métricos $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para cada sucesión en $X$ que converge a $x$, su imagen es una sucesión en $Y$ que converge a $f(x)$. Sin embargo, esto no pasa en espacios topológicos más generales, al igual que antes, solamente se cumple en espacios primero numerables.

**Ejemplo 1.2.4.** Consideramos la aplicación $1_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}, \tau_{coc}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_u)$ definida por $1_{\mathbb{R}}(x) = x$. No es una aplicación continua, ya que $(0,1) \in \tau_u$ pero $1_{\mathbb{R}}^{-1}(0,1) = (0,1)$ no es abierto en $\tau_{coc}$ pues su complementario no es contable. Sin embargo, si una sucesión en $(\mathbb{R}, \tau_{coc})$ converge a $x$, hemos visto en el ejemplo 1.2.3 que es semiconstante. Por lo tanto, su imagen es también una sucesión semiconstante y por lo tanto converge.

Queremos obtener un resultado que caracterice las funciones continuas mediante la convergencia de filtros en cualquier espacio topólogico.

**Teorema 1.2.7.** *Sean $(X, \tau_X)$ e $(Y, \tau_Y)$ dos espacios topológicos. Una aplicación $f : (X, \tau_X) \longrightarrow (Y, \tau_Y)$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para todo filtro $\mathcal{F}$ que converge a $x$, $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$.*

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Supongamos que $f$ es continua en $x$ y $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Sea $M \in \mathcal{N}_{f(x)}$. Entonces existe $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $f(N) \subset M$. Como $N \in \mathcal{F}$, $f(N) \in f(\mathcal{F})$ por lo que $M \in f(\mathcal{F})$. Es decir, $\mathcal{N}_{f(x)} \subset f(\mathcal{F})$, lo cual implica que $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para todo filtro $\mathcal{F}$ que converge a $x$, $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$. Tomamos $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$ que sabemos que converge a $x$. Entonces $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$, es decir, $\mathcal{N}_{f(x)} \subset f(\mathcal{N}_x)$. Por lo tanto, para cada entorno $M \in \mathcal{N}_{f(x)}$, existe un entorno $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $f(N) \subset M$. En consecuencia, $f$ es continua en $x$.

□

A continuación vamos a estudiar cómo se comporta la convergencia de filtros en los espacios producto. Para ello definimos primero el producto arbitrario de espacios topológicos.

**Definición 1.2.8.** Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. Definimos su producto cartesiano como

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i \quad \text{para cada } i \in I\}.$$

En el caso en el que el conjunto $I$ es finito, podemos representar este producto de forma natural usando una tupla, que es la manera usual de representar los productos cartesianos finitos.

**Ejemplo 1.2.5.** Si el conjunto $I$ es finito, podemos considerar $I = \{1, ..., n\}$, y entonces una aplicación $x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ es una n-tupla $(x_1, ..., x_n)$ donde la i-ésima componente es $x(i)$ para cada $i \in I$, y pertenece a $X_i$. Podemos considerar por ejemplo $I = \{1, 2\}$, $X_1 = \mathbb{R}$, $X_2 = [0, 1]$. Entonces, el producto $\prod_{i\in I} X_i = \{(x(1), x(2)) \mid x(1) \in \mathbb{R}, x(2) \in [0, 1]\}$.

Generalmente se denota el valor de $x(i)$ como $x_i$, y se denomina la i-ésima componente de $x$, de manera natural, ya que en el caso de productos finitos $x(i)$ es precisamente la i-ésima componente de la tupla. Además, la aplicación $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ definida por $\pi_i(x) = x(i)$, es decir, que lleva un elemento del producto x en su j-ésima componente se le llama la j-ésima proyección.

Ahora, si cada $X_i$ es un espacio topológico $(X_i, \tau_i)$, queremos definir una topología en el producto cartesiano que guarde relación con las topologías de los factores $X_i$.Una posible opción es definir una base de la topología con conjuntos que sean productos de abiertos, es decir, $U \subset \prod_{i\in I} X_i$ es un abierto básico si y sólo si $U = \prod_{i\in I} U_i$, donde cada $U_i$ es abierto en $X_i$. Estos conjuntos, efectivamente, forman una base para una topología, llamada la topología caja. Sin embargo, no es una topología útil, ya que muchas propiedades topológicas de los factores, como la compacidad, que estudiaremos más adelante, no se trasladan al producto, ya que tiene demasiados abiertos. En cambio, podemos definir otra topología, restringiendo el número de abiertos, que hará que el producto sí conserve muchas propiedades de los factores.

**Definición 1.2.9.** Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Consideramos los conjuntos del producto $\prod_{i\in I} X_i$ de la forma $U = \prod_{i\in I} U_i$, donde $U_i$ es abierto en $X_i$ para cada $i \in I$, y además $U_i = X_i$ para casi todo $i \in I$, es decir para todos los índices excepto un número finito de ellos. Esta familia

$$\beta = \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \tau_i, U_i = X_i \text{ para casi todo } i\}$$

forma una base para una topología llamada topología producto o de Tychonoff, y que se denota como $\tau_{TYC}$.

**Observación 1.2.1.** Los abiertos básicos del producto $\prod_{i\in I} U_i$, donde $U_i \neq X_i$ para $i_1, ...i_n$, pueden escribirse de la forma $\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$.

**Teorema 1.2.8.** *Sea $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Consideramos $(X = \prod_{i\in I} X_i, \tau_{TYC})$. Entonces, $\mathcal{F} \longrightarrow x$ en $X$ si y sólo si para* *todo* $i \in I$, $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \pi_i(x)$ *en* $X_i$.

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Supongamos que $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Entonces, como $\pi_i$ es continua para cada $i \in I$, por el teorema anterior tenemos que $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \pi_i(x)$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que para todo $i \in I$, $\pi_i(\mathcal{F}) \longrightarrow \pi_i(x)$. Sea $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k)$ un entorno básico de $x \in X$, con $U_k \in \mathcal{N}_{\pi_{i_k}(x)}$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$ Entonces tenemos que $U_k \in \pi_{i_k}(\mathcal{F})$ para todo $k \in \{1, ..., n\}$, por lo que para cada $k \in \{1, ..., n\}$ existe $F_k \in \mathcal{F}$ tal que $\pi_{i_k}(F_k) \subset U_k$. Por lo tanto, $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_k) \in \mathcal{F}$, y en consecuencia se tiene que $\mathcal{F} \longrightarrow x$. □

## 1.3. Ultrafiltros

**Definición 1.3.1.** Un filtro $\mathcal{F}$ sobre $X$ es un ultrafiltro si no hay ningún filtro estrictamente más fino que él, es decir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ implica que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

**Ejemplo 1.3.1.** (i) Dado un conjunto $X$ y un punto $x \in X$, el filtro principal en $x$, $\mathcal{U} = \{A \subset X \mid x \in A\}$ es un ultrafiltro, ya que si $\mathcal{F}$ es un filtro más fino que $\mathcal{U}$, como $\{x\} \in \mathcal{U}$, tenemos que $\{x\} \in \mathcal{F}$, y entonces, dado $F \in \mathcal{F}$, $F \cap \{x\} \neq \emptyset$, es decir, $x \in F$, por lo que $F \in \mathcal{U}$. Así, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$, por lo que ambos son iguales, y no hay ningún filtro estrictamente más fino que $\mathcal{U}$.

(ii) Dado un conjunto $X$ y $A \subset X$, el filtro principal en $A$ no es ultrafiltro si $A$ tiene más de un punto, ya que está contenido en el filtro principal de cada uno de los puntos de $A$.

En el caso de ultrafiltros, la convergencia y la aglomeración son propiedades equivalentes.

**Lema 1.3.1.** *Si* $\mathcal{U}$ *es un ultrafiltro,* $\mathcal{U} \longrightarrow x$ *si y sólo si* $x$ *es punto de aglomeración de* $\mathcal{U}$.

*Demostración.* Es claro que si un ultrafiltro converge a un punto entonces ese punto es punto de aglomeración del ultrafiltro, por la proposición 1.2.2. Y, recíprocamente, si $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{U}$, hemos probado que existe un filtro más fino que $\mathcal{U}$ que converge a $x$. Pero un filtro más fino que $\mathcal{U}$ tiene que ser $\mathcal{U}$, por ser ultrafiltro. □

Veamos algunas caracterizaciones del concepto de ultrafiltro.

**Teorema 1.3.2.** *Sea* $\mathcal{F}$ *un filtro sobre* $X$. *Son equivalentes las siguientes condiciones:*

(i) $\mathcal{F}$ *es ultrafiltro,*

(ii) *$A \cup B \in \mathcal{F}$ implica que $A \in \mathcal{F}$ ó $B \in \mathcal{F}$,*

(iii) *Para todo $A \subset X$, $A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$,*

(iv) *Para todo $A \subset X$, si $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $A \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* 1) $\Longrightarrow$ 2): Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro y $A \cup B \in \mathcal{F}$. Tomamos $\mathcal{B} = \{C \subset X : A \cup C \in \mathcal{F}\}$. Es claro que $B \in \mathcal{B}$.

i) Si $\emptyset \in \mathcal{B}$, entonces $A = \emptyset \cup A \in \mathcal{F}$.

ii) Si $\emptyset \notin \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es un filtro que contiene a $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ y por lo tanto $B \in \mathcal{F}$.

2) $\Longrightarrow$ 3): Dado $A \subset X$, tomamos $B = X - A$. Entonces, $A \cup B = X \in \mathcal{F}$ por lo que $A \in \mathcal{F}$ ó $X - A \in \mathcal{F}$.

3) $\Longrightarrow$ 4): Sea $A \subset X$ tal que $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. Entonces $X - A \notin \mathcal{F}$ y en consecuencia $A \in \mathcal{F}$.

4) $\Longrightarrow$ 1): Sea $\mathcal{G}$ un filtro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Sea $G \in \mathcal{G}$, entonces $G \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ porque $F \in \mathcal{F}$, lo que implica que $F \in \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ es un filtro. Entonces, por 4) tenemos que $G \in \mathcal{F}$ y por lo tanto que $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, y en consecuencia $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro.

□

**Proposición 1.3.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos, y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces, si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en $X$, $f(\mathcal{U})$ es un ultrafiltro en $Y$.*

*Demostración.* Veamos que para cada $A \subset Y$, $A \in f(\mathcal{U})$ ó $Y - A \in f(\mathcal{U})$. Dado $A \subset Y$, consideramos $B = f^{-1}(A) \subset X$. Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro, $B \in \mathcal{U}$ ó $X - B \in \mathcal{U}$. Si $B \in \mathcal{U}$, entonces $f(B) \subset A$. Además, $f(B) \in f(\mathcal{U})$, y por lo tanto, $A \in f(\mathcal{U})$. Análogamente, si $X - B \in \mathcal{U}$, como $f(X - B) \subset Y - A$, y $f(X - B) \in f(\mathcal{U})$, $Y - A \in f(\mathcal{U})$. □

**Teorema 1.3.4.** *Todo filtro está contenido en algún ultrafiltro.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{C}$ la familia de los filtros más finos que $\mathcal{F}$. En esta familia podemos definir un orden parcial por $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Dada una cadena $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, es claro que $\mathcal{U} = \cup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un filtro por ser $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ una cadena, y además es más fino que $\mathcal{F}$ y es una cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, la cadena tiene un elemento maximal, que será un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$. □

**Ejemplo 1.3.2.** El filtro cofinito y el filtro cocontable sobre $\mathbb{R}$ no son ultrafiltros, ya que si tomamos $A = [0, 1]$, $A$ no pertenece al filtro cofinito (respectivamente, cocontable) porque su complementario no es finito (ni contable), pero $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ tampoco pertenece al filtro cofinito (respectivamente, cocontable) porque $A$ no es finito (ni contable). Sí están contenidos en algún ultrafiltro. Además, los ultrafiltros que los contienen deben ser libres porque el filtro cofinito y cocontable son libres.

**Proposición 1.3.5.** *Dado un conjunto $X$, y una familia de subconjuntos de $X$ con la propiedad de intersección finita (es decir, tal que la intersección de un número finito de elementos cualesquiera de la familia es no vacía), existe un ultrafiltro que la contiene.*

*Demostración.* Sea $\mathfrak{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de $X$ con la propiedad de intersección finita. Entonces, consideramos $\mathcal{B} = \{\cap_{j=1}^{n} F_{i_j} \mid n \in \mathbb{N},\quad F_{i_j} \in \mathfrak{F}\}$. Basta tomar $n = 1$ y cada $F_i$ para ver que $\mathfrak{F} \subset \mathcal{B}$ . Afirmamos que $\mathcal{B}$ es base de un filtro. En primer lugar, sus elementos son no vacíos, ya que son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Además, dados $B_1 = \bigcap_{j=1}^{n} F_{i_j}$ y $B_2 = \bigcap_{k=1}^{m} F_{i_k} \in \mathcal{B}$, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$, tenemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ porque también es una intersección finita de elementos de $\mathfrak{F}$, y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ genera un filtro, y entonces existe un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{B}$, y por lo tanto a $\mathfrak{F}$. □

**Proposición 1.3.6.** *Un filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto $X$ es la intersección de los ultrafiltros que lo contienen.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre $X$, $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ la familia de ultrafiltros que contienen a $\mathcal{F}$. En primer lugar, es claro que $\mathcal{F} \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Ahora, sea $E$ un conjunto que no pertenezca a $\mathcal{F}$. Entonces, para cada $F \in \mathcal{F}$, no puede ser $F \subset E$, y por lo tanto $F \cap (X - E) \neq \emptyset$. Entonces, $\mathcal{F} \cup \{X - E\}$ es una familia de subconjuntos de $X$ con la propiedad de intersección finita, por lo que estará contenido en un ultrafiltro $\mathcal{U}_E$. Como $X - E \in \mathcal{U}_E$, es $E \notin \mathcal{U}_E$. Como $\mathcal{U}_E$ es un ultrafiltro que contiene a $\mathcal{F}$, $E \notin \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$. Por lo tanto, ningún conjunto que no pertenezca a $\mathcal{F}$ pertenece a la intersección de los ultrafiltros que contienen a $\mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$. □

## 1.4. Espacios compactos

En espacios métricos la compacidad se puede caracterizar usando convergencia de sucesiones. En efecto, un espacio métrico es compacto si y sólo si toda sucesión contiene una subsucesión convergente. Como las sucesiones en espacios topológicos más generales no tienen buenas propiedades, queremos caracterizar los espacios compactos de manera análoga utilizando filtros. Recordamos primero la definición de espacio compacto.

**Definición 1.4.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Se dice que es compacto cuando de todo recubrimiento por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito.

Ahora veamos que, al igual que en un espacio métrico compacto toda sucesión tiene una subsucesión convergente, todo filtro tiene un filtro más fino que él que converge. En concreto, podemos caracterizar un espacio compacto como aquel en el que todo ultrafiltro es convergente. Probamos también que el hecho que cualquier familia de subconjuntos con intersección finita tenga intersección no vacía caracteriza los espacios compactos, porque lo utilizaremos en el capítulo de compactificaciones.

**Proposición 1.4.1.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

*a) $X$ es compacto.*

*b) Toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.*

*c) Todo ultrafiltro converge.*

*Demostración.* a) $\Rightarrow$ b): Supongamos que de todo recubrimiento por abiertos se puede extraer un subrecubrimiento finito. Sea $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita, y supongamos que tiene intersección vacía. Consideramos $\mathfrak{U} = \{X - F_i\}_{i\in I}$, que es una familia de abiertos. Como $\mathcal{F}$ tiene intersección vacía, $\mathfrak{U}$ es un recubrimiento de $X$. Esto implica que existe un subrecubrimiento finito, es decir, existen $(X - F_1), ..., (X - F_n)$ tales que $\bigcup_{i=1}^{n}(X - F_i) = X$, y por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \emptyset$, lo cual contradice que $\mathcal{F}$ tenga la propiedad de intersección finita, luego $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía.

b) $\Rightarrow$ c): Supongamos que toda familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Consideramos $\mathcal{F} = \{\overline{U} \mid U \in \mathcal{U}\}$, donde $\overline{U}$ denota la clausura de $U$. $\mathcal{F}$ es una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita, luego existe $x \in X$ tal que $x \in \overline{U}$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Esto implica que para cada $N \in \mathcal{N}_x$, $N \cap U \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Es decir, $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{U}$, y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, $\mathcal{U} \longrightarrow x$ por el lema 1.3.1.

c) $\Rightarrow$ a) Supongamos por reducción al absurdo que $X$ no es compacto. Entonces, existe $\mathfrak{U}$ un cubrimiento por abiertos de $X$ que no tiene un subrecubrimiento finito. Por lo tanto, $X - (U_i \cap ... \cap U_n) \neq \emptyset$ para cualquier familia finita $\{U_1, ..., U_n\}$ de $\mathfrak{U}$. Entonces, los conjuntos de la forma $X - (U_i \cap ... \cap U_n)$ forman una base de filtro. Ese filtro estará contenido en un ultrafiltro $\mathcal{F}$, que, por hipótesis, converge a un punto $x \in X$. Ahora, por ser $\mathfrak{U}$ un cubrimiento de $X$, existe $U_x \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in U_x$. Entonces, $U_x$ es un entorno de $x$, por lo que $U_x \in \mathcal{F}$. Sin embargo, por construcción $X - U_x \in \mathcal{F}$, lo cual es imposible. Por lo tanto $\mathfrak{U}$ debe tener un subrecubrimiento finito. □

A continuación vamos a probar el teorema de Tychonoff, que dice que un espacio producto es compacto si y solo si cada factor lo es. Demostrar este teorema sin usar filtros es bastante trabajoso, pero con ellos solo tenemos que utilizar que en un espacio producto un filtro converge si y solo si converge componente a componente.

**Teorema 1.4.2.** ***(Tychonoff)*** *Sea* $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos. Consideramos* $(X = \prod_{i\in I} X_i, \tau_{TYC})$*. Entonces* $X$ *es compacto si y sólo si* $X_i$ *es compacto para todo* $i \in I$*.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Sea $(X, \tau_{TYC})$ compacto. Para cualquier $i \in I$, la i-ésima proyección $\pi_i : (X, \tau_{TYC}) \to X_i$ es continua y sobreyectiva, es decir, $X_i$ es la imagen continua de un compacto, y por lo tanto $(X_i, \tau_i)$ es compacto para cada $i \in I$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en $X$. Entonces, por la proposición 1.3.3 para todo $i \in I$ $\pi_i(\mathcal{F})$ es un ultrafiltro en $X_i$, que converge por ser $X_i$ compacto. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ converge, por lo que $X$ es compacto. $\square$

La anterior propiedad sucede si consideramos el espacio producto con la topología de Tychonoff; sin embargo, el resultado no es cierto si consideramos la topología caja, como se observa en el siguiente contraejemplo.

**Ejemplo 1.4.1.** Sea $(X_i = [0,1], \tau_u)$ para $i \in \mathbb{N}$, y sea $(X = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i, \tau_{caj})$. Recordamos que una base de abiertos de la topología caja está formada por conjuntos de lavforma $U = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} U_i$ con $U_i$ abierto en $X_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Queremos encontrar un cubrimiento por abiertos de $X$ que no tenga un subrecubrimiento finito. Sea $U_j = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} V_i$ donde

$$V_i = \begin{cases} X_i & si \quad i = j \\ \\ [0,1) & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Y sea $U_0 = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} (1/2, 1]$. Veamos que $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ es un cubrimiento por abiertos de $X$. Sea $x \in X$. Si existe algún índice $i$ tal que $\pi_i(x) \neq 1$, entonces $x \in U_i$, y en caso contrario, $x \in U_0$. Por lo tanto, $X \subset \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} U_i$. Sin embargo, este cubrimiento no tiene subrecubrimiento finito, ya que para todo $i \in \mathbb{N}$, si tomamos como $x_i$ el punto cuya i-ésima coordenada es 1 y todas las demás son 0, $x_i$ solamente está contenido en el abierto $U_i$, por lo que no podemos extraer un subrecubrimiento finito, como hemos comentado antes, al haber demasiados abiertos. Esto implica que $(X, \tau_{caj})$ no es compacto.

# Capítulo 2

# Filtros cerrados

## 2.1. Filtros cerrados

Ya hemos visto que podemos caracterizar los espacios compactos, y otras propiedades topológicas, como la clausura o la continuidad de funciones, por medio de filtros. Vamos ahora a definir una clase alternativa de filtros, que nos servirá más adelante para construir compactificaciones de espacios no compactos, es decir, para embeber un espacio no compacto en uno compacto.

**Definición 2.1.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $\mathcal{C}$ el conjunto de cerrados en $X$. Un filtro cerrado $\mathcal{F}$ sobre $X$ es una familia no vacía de suconjuntos de $\mathcal{C}$ tal que:

- $F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathcal{F}$,

- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ para cada $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,

- Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset G$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

**Ejemplo 2.1.1.** (i) Análogamente a como hemos hecho con filtros, podemos definir el filtro principal cerrado en $x$, $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{C} \mid x \in A\}$.

(ii) Dado $x \in X$, $\mathcal{F} = \{\overline{N} \mid N \in \mathcal{N}_x\}$ es un filtro cerrado.

Al igual que ocurría con los filtros, a veces conviene trabajar con bases de filtros cerrados, que se definen de manera análoga.

**Definición 2.1.2.** Una subcolección $\mathcal{B}$ de un filtro cerrado $\mathcal{F}$ es una base de $\mathcal{F}$ si para todo $F \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F$, es decir, si

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{C} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$$

.

**Proposición 2.1.1.** *Una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de $X$ es base de algún filtro cerrado sobre el conjunto $X$ si y sólo si para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

*En tal caso, el conjunto $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{C} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$ es un filtro cerado, el filtro cerrado generado por $\mathcal{B}$.*

*Demostración.* $\Rightarrow$) Si $\mathcal{B}$ es base del filtro cerrado $\mathcal{F}$, entonces dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, como son elementos del filtro cerrado, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$, y por lo tanto existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

$\Leftarrow$) Si para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, entonces vemos que $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{C} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset F\}$ es un filtro. En primer lugar sus elementos son no vacíos, ya que contienen a elementos de $\mathcal{B}$. Además, si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, existen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ tales que $B_1 \subset F_1$ y $B_2 \subset F_2$. Entonces existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2 \subset F_1 \cap F_2$, por lo que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$. Finalmente, si $F \in \mathcal{F}$, y $F \subset G$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset F \subset G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$. Así, $\mathcal{F}$ es un filtro cerrado y $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{F}$. □

**Definición 2.1.3.** Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos filtros cerrados. Decimos que $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$.

Obsérvese que los filtros cerrados no tienen por qué ser filtros en el sentido definido anteriormente, ya que todos sus elementos deben ser conjuntos cerrados, condición que no se imponía a los filtros. De hecho, la definición de filtros cerrados requiere la introducción de una topología, al contrario que la noción de filtro, que es conjuntista. En el siguiente ejemplo vemos que, aparte de las similitudes en la definición, no tiene por qué haber relación entre filtros y filtros cerrados.

**Ejemplo 2.1.2.** Consideramos $(\mathbb{R}, \tau_u)$, la recta real con la topología usual. Definimos $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{C}_u : 0 \in F\}$, que es el filtro principal cerrado en 0. El intervalo $[-1, 1]$ es claramente un elemento de $\mathcal{F}$, ya que es cerrado y contiene al 0. Si $\mathcal{F}$ fuera un filtro, el intervalo $(-2, 2)$ también sería un elemento de $\mathcal{F}$, ya que contiene a $[-1, 1]$, sin embargo, esto no puede ser ya que no es un conjunto cerrado y todos los elementos de $\mathcal{F}$ lo son. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ no es un filtro.

Por otra parte, los filtros en general tampoco son filtros cerrados. Basta con considerar el filtro $\mathcal{N}_0$ en la recta real con la topología usual. El intervalo $(-1, 1)$ es un entorno del 0, sin embargo, no es un conjunto cerrado, por lo que $\mathcal{N}_0$ no puede ser un filtro cerrado.

Sin embargo, a pesar de haber introducido la condición de que los elementos deben ser conjuntos cerrados, en determinados espacios algunos filtros pueden ser también filtros cerrados.

**Ejemplo 2.1.3.** (i) Dado cualquier espacio topólogico $(X, \tau)$, el filtro indiscreto $\mathcal{F} = \{X\}$ es un filtro cerrado.

(ii) En un espacio con la topología discreta, $(X, \tau_{dis})$, todos los filtros son también filtros cerrados, ya que todo subconjunto de $X$ es cerrado.

(iii) En $(\mathbb{R}, \tau^0)$, donde $\tau^0 = \{A \subset \mathbb{R} \mid 0 \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\}$ es la topología 0-exclusión, el filtro principal en 0, $\mathcal{F} = \{F \subset \mathbb{R} \mid 0 \in F\}$ es un filtro cerrado, ya que sus elementos son cerrados en $\tau^0$.

## 2.2. Convergencia de filtros cerrados

A pesar de las diferencias, la definición de filtros cerrados es en cierto sentido análoga a la de filtros, lo único que se ha hecho es imponer la condición adicional de que los elementos del filtro deben ser conjuntos cerrados. Por ello, algunas de las propiedades de los filtros se trasladan a los filtros cerrados, aunque la restricción de que los elementos de los filtros cerrados tengan que ser cerrados hace que las propiedades no sean iguales.

Comenzamos con la convergencia, que es la motivación inicial para estudiar filtros. No podemos imponer la condición de que todos los entornos del punto límite pertenezcan al filtro cerrado, ya que en general los entornos de un punto no son cerrados, pero, al igual que al estudiar convergencia de sucesiones en espacios métricos exigimos que haya puntos de la sucesión contenidos en cualquier bola centrada en el punto (y, análogamente, cuando una red converge a un punto, cualquier entorno del punto contiene elementos de la red), en el caso de filtros cerrados exigimos, para que un filtro cerrado converja a un punto, que tenga elementos contenidos en cualquier entorno del punto.

**Definición 2.2.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro cerrado.

(i) Decimos que $\mathcal{F}$ converge a $x$, y denotamos $\mathcal{F} \longrightarrow x$ si para todo $N \in \mathcal{N}_x$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset N$.

(ii) Decimos que $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si para todo $N \in \mathcal{N}_x$, $N \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

**Ejemplo 2.2.1.** En $(\mathbb{R}, \tau_{cof})$, donde $\tau_{cof} = \{A \subset \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ es finito}\}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, el filtro principal cerrado en $x$, $\mathcal{F} = \{F \text{ cerrado} \mid x \in F\}$, converge a $x$, ya que $\{x\} \in \mathcal{F}$ por ser cerrado (los cerrados son los conjuntos finitos).

**Proposición 2.2.1.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $\mathcal{F}$ un filtro cerrado sobre $X$. Entonces un punto $x \in X$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ si y sólo si* $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

*Demostración.* Si $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, entonces para cada cada $F \in \mathcal{F}$, $F \cap N \neq \emptyset$ para todo $N \in \mathcal{N}_x$. Es decir, $x \in \overline{F} = F$. Por lo tanto, $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$. Recíprocamente, si $x \in \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F$, para cada $F \in \mathcal{F}$, $x \in F$, luego $F \cap N \neq \emptyset$ para todo entorno $N \in \mathcal{N}_x$. Por lo tanto, $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$. □

La convergencia de filtros cerrados es más restrictiva que la de filtros, en el sentido de que hay más filtros convergentes que filtros cerrados convergentes. Por ejemplo, en cualquier espacio topológico $(X, \tau)$, para cada punto $x \in X$ existe al menos un filtro que converge a $x$, el filtro de entornos $\mathcal{N}_x$. Sin embargo hay espacios topológicos en los que ningún filtro cerrado converge a algunos puntos, como vemos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.2.2.** Consideramos el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{[0,1]})$, donde $\tau_{[0,1]} = \{B \subset \mathbb{R} \mid [0,1] \subset B\} \cup \{\emptyset\}$ es la topología [0,1]-inclusión. Antes que nada vamos a ver como son los cerrados en este espacio. Los cerrados son los complementarios de los abiertos, por lo que $\mathcal{C} = \{B \subset \mathbb{R} \mid B \cap [0,1] = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$. Entonces, ningún filtro cerrado puede converger a un punto $x \in [0,1]$, ya que $[0,1]$ es entorno abierto de $x$, pero no hay ningún cerrado contenido en él (el único cerrado que contiene puntos del $[0,1]$ es el total).

**Proposición 2.2.2.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, y $\mathcal{F}$ un filtro cerrado. Si existe $\mathcal{G}$ filtro cerrado, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ tal que $\mathcal{G} \longrightarrow x$, entonces $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* Supongamos que existe $\mathcal{G}$ un filtro cerrado más fino que $\mathcal{F}$ que converge a $x$. Entonces, para todo entorno $N \in \mathcal{N}_x$, existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subset N$. Como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \cap G \neq \emptyset$, por lo que $F \cap N \neq \emptyset$, y por lo tanto $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$. □

En cambio, el recíproco no es cierto, al contrario de lo que sucedía con los filtros.

**Ejemplo 2.2.3.** Consideramos $(\mathbb{R}, \tau_{[0,1]})$. En primer lugar, el filtro $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\}$ tiene como punto de aglomeración a todos los puntos del intervalo $[0,1]$, pues para cada $x \in [0,1]$, $\mathbb{R} \cap N = N \neq \emptyset$ para todo entorno $N \in \mathcal{N}_x$. Sin embargo, hemos visto en el ejemplo anterior que no hay filtros cerrados que converjan a ningún punto de $[0,1]$. Por lo tanto, no hay filtros más finos que $\mathcal{F}$ que converjan a ningún punto de $[0,1]$.

En el capítulo anterior, veíamos que un punto de un espacio topológico pertenece a la clausura de un conjunto si y sólo si ese conjunto pertenece a un filtro que converja al punto. Sin embargo, utilizando filtros cerrados solamente una de las implicaciones es cierta.

**Proposición 2.2.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico, $x \in X$ y $A \subset X$. Si existe $\mathcal{F}$ filtro cerrado tal que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \longrightarrow x$, entonces $x \in \overline{A}$.*

*Demostración.* Si existe $\mathcal{F}$ filtro cerrado tal que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \longrightarrow x$, entonces para todo entorno de $x$, $N \in \mathcal{N}_x$, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subset N$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro cerrado, y $\overline{A} \in \mathcal{F}$, $\overline{A} \cap N \neq \emptyset$. Por tanto $x \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. □

Sin embargo, el recíproco no es cierto.

**Ejemplo 2.2.4.** Consideramos, como antes $\mathbb{R}$ con la topología [0,1]-inclusión, $\tau_{[0,1]} = \{B \subset \mathbb{R} \mid [0,1] \subset B\} \cup \{\emptyset\}$. Hemos visto que que no hay filtros cerrados que converjan a un punto de [0,1]. Sin embargo, el único cerrado que contiene a [0,1] es $\mathbb{R}$. Tomando $A = [0,1]$, y $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}\}$. Entonces, $\overline{A} = \mathbb{R}$, y vemos que $x \in \overline{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{F}$, pero $\mathcal{F}$ no converge a $x$.

Podemos, en cambio, ver que un punto pertenece a la clausura de un conjunto si y sólo si es punto de aglomeración de un filtro cerrado que contenga a la clausura del conjunto.

**Proposición 2.2.4.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe $\mathcal{F}$ filtro cerrado tal que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ y $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.*

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Si $x \in \overline{A}$, $\mathcal{F} = \{B \supset A \mid B \text{ cerrado}\}$ es un filtro cerrado, y $\overline{A} \in \mathcal{F}$ porque $A \subset \overline{A}$. Además, como $x \in \overline{A}$, dado $N \in \mathcal{N}_x$, $N \cap A \neq \emptyset$ y como para todo $B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ entonces $N \cap B \neq \emptyset$, por lo que $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$.

$\Longleftarrow$) Supongamos que existe un filtro $\mathcal{F}$ tal que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ y $x$ es un punto de aglomeración de $\mathcal{F}$. Entonces, dado un entorno de $x$, $N \in \mathcal{N}_x$, $F \cap N \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$. En concreto, $\overline{A} \cap N \neq \emptyset$ para cada $N \in \mathcal{N}_x$, por lo que $x \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. □

**Proposición 2.2.5.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico de Hausdorff. Entonces todo filtro cerrado converge como mucho a un punto.*

*Demostración.* Supongamos que $(X, \tau)$ es de Hausdorff, y que existe $\mathcal{F}$ filtro cerrado que converge a dos puntos $x \neq y$. Por ser $X$ de Hausdorff existen $B_1, B_2 \in \tau$ tales que $x \in B_1$, $y \in B_2$ y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Como los abiertos son entornos de los puntos que contienen, y $\mathcal{F} \longrightarrow x$, existe $F_1 \in \mathcal{F}$ tal que $F_1 \subset B_1$. Análogamente, como $\mathcal{F} \longrightarrow y$, existe $F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $F_2 \subset B_2$. Pero entonces $F_1 \cap F_2 \subset B_1 \cap B_2 = \emptyset$, lo cual contradice que $\mathcal{F}$ sea un filtro cerrado. Por lo tanto, un filtro cerrado no puede converger a más de un punto.

□

Sin embargo, al contrario de lo que ocurría con los filtros, el recíproco no es cierto.

**Ejemplo 2.2.5.** Consideramos $(\mathbb{R}, \tau_{[0,1]})$. No es un espacio de Hausdorff, ya que para cada $U \in \tau_{[0,1]}$, $U \neq \emptyset$, $0 \in U$, $1 \in U$, por lo que 0 y 1 no se pueden separar por abiertos disjuntos. Vamos a ver que todo filtro cerrado converge como mucho a un punto. Sabemos que los cerrados de este espacio son $\mathcal{C} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \cap [0,1] = \emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\}$. En primer lugar, hemos visto que ningún filtro cerrado puede converger a un punto $x \in [0,1]$. Ahora, supongamos que existe un filtro cerrado $\mathcal{F}$ que converge a dos puntos $x \neq y$, con $x, y \notin [0,1]$. Entonces tenemos que $U = [0,1] \cup \{x\}$ es entorno abierto de $x$, y el único cerrado que está contenido en $U$ y contiene a $x$ es $\{x\}$, porque los cerrados distintos del total tienen intersección vacía con $[0,1]$. Por tanto, como $\mathcal{F} \longrightarrow x$, $\{x\} \in \mathcal{F}$. Análogamente tenemos que, como $\mathcal{F} \longrightarrow y$, $\{y\} \in \mathcal{F}$, pero $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$, lo que contradice que $\mathcal{F}$ sea un filtro cerrrado. Por lo tanto los filtros cerrados en este espacio convergen como mucho a un punto.

**Observación 2.2.1.** En este espacio sí hay, sin embargo, filtros que convergen a más de un punto, pues no es espacio de Hausdorff. Por ejemplo, la familia $\mathcal{F} = \{B \subset \mathbb{R} \mid [0,1] \subset B\}$ es un filtro, ya que sus elementos contienen al intervalo $[0,1]$ por lo que son no vacíos; la intersección de dos elementos cualesquiera también contiene al intervalo, por lo que pertenece a $\mathcal{F}$, y cualquier conjunto que contenga a un elemento de $\mathcal{F}$ también contendrá a $[0,1]$ por lo que pertenece a $[0,1]$. Ahora, sea $x \in [0,1]$. Un entorno $N$ de $x$ contiene un abierto que contiene a $x$, y los abiertos que contienen a $x$ (y por tanto no vacíos), contienen a $[0,1]$, por lo que pertenecen a $\mathcal{F}$ y en consecuencia $N \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $\mathcal{N}_x \subset \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{F} \longrightarrow x$. Como $x$ era un punto cualquiera de $[0,1]$, tenemos que $\mathcal{F}$ converge a todos los puntos del intervalo $[0,1]$.

## 2.3. Ultrafiltros cerrados

Definimos ahora los ultrafiltros cerrados de manera análoga a como lo hacíamos con los ultrafiltros, y de hecho tendrán propiedades similares, al igual que ocurre con los filtros y los filtros cerrados.

**Definición 2.3.1.** Un filtro cerrado $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro cerrado si no hay ningún filtro cerrado estrictamente más fino que él, es decir, si $\mathcal{F}_1$ es un filtro cerrado, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$ implica que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

**Proposición 2.3.1.** *Todo filtro cerrado está contenido en un ultrafiltro cerrado.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F}$ un filtro cerrado, y sea $\mathcal{C}$ la familia de filtros cerrados más finos que $\mathcal{F}$. Dada una cadena $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$, es claro que $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un filtro cerrado más fino que $\mathcal{F}$ y es una cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, la cadena tiene un elemento maximal, que será un ultrafiltro cerrado que contiene a $\mathcal{F}$. $\square$

**Proposición 2.3.2.** *Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro cerrado y $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, con $F_1$ y $F_2$ cerrados. Entonces $F_1 \in \mathcal{F}$ o $F_2 \in \mathcal{F}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{G} = \{G \mid G \cup F_1 \in \mathcal{F}, \quad G \quad \text{cerrado}\}$. Es claro que $F_2 \in \mathcal{G}$.

- Si $\emptyset \in \mathcal{G}$, entonces $F_1 = \emptyset \cup F_1 \in \mathcal{F}$.

- Si $\emptyset \notin \mathcal{G}$, vemos que entonces $\mathcal{G}$ es un filtro cerrado. En primer lugar, sus elementos son no vacíos. Además, si $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, $G_1 \cup F_1 \in \mathcal{F}$, $G_1 \cup F_1 \in \mathcal{F}$. Entonces $(G_1 \cap G_2) \cup F_1 = (G_1 \cup F_1) \cap (G_2 \cup F_1)$, que pertenece a $\mathcal{F}$ por ser un filtro cerrado. Por lo tanto $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$. Finalmente, si $G_1 \in \mathcal{G}$, y $G_2 \supset G_1$, entonces $G_2 \cup F_1 \supset G_1 \cup F_1 \in \mathcal{F}$, por lo que $G_2 \cup F_1 \in \mathcal{F}$, lo que implica que $G_2 \in \mathcal{G}$. Ahora, sea $F \in \mathcal{F}$. Entonces $F \cup F_1 \supset F_1 \in \mathcal{F}$, por lo que $F_1 \in \mathcal{G}$. Es decir, $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, pero como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Entonces, como $F_2 \cup F_1 \in \mathcal{F}$ tenemos que $F_2 \in \mathcal{G} = \mathcal{F}$.

$\square$

Veamos algunas propiedades de los ultrafiltros cerrados en espacios de Hausdorff, que utilizaremos al estudiar compactificaciones.

**Proposición 2.3.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio de Hausdorff, y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro cerrado en $X$. Entonces $\mathcal{F}$ tiene como mucho un único punto de aglomeración.*

*Demostración.* Si $x$ es punto de aglomeración de $\mathcal{F}$, por la proposición 2.2.1, $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$. Pero entonces, el filtro principal cerrado en $x$ es más fino que $\mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro cerrado, es el filtro principal cerrado en $x$, $\mathcal{F} = \{F \text{ cerrado en X} \mid x \in F\}$. Por ser $(X, \tau)$ de Hausdorff, $\{x\}$ es cerrado, por lo que $\{x\} \in \mathcal{F}$. Si existe otro punto de aglomeración de $\mathcal{F}$ $y \neq x$, razonando análogamente sería $\{y\} \in \mathcal{F}$, lo que es imposible porque $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$. $\square$

**Proposición 2.3.4.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico de Hausdorff. Entonces para cada $x \in X$ existe un único ultrafiltro cerrado que converge a $x$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{F} = \{F \subset X \mid x \in F, \quad F \quad \text{cerrado}\}$ el filtro principal cerrado en $x$. Claramente $\mathcal{F}$ es un filtro cerrado que converge a $x$. En efecto, para todo entorno $N \in \mathcal{N}_x$, $\{x\} \subset N$ y $\{x\} \in \mathcal{F}$ pues en los espacios de Hausdorff los puntos son cerrados. Ahora, sea $\mathcal{G}$ un filtro cerrado que converge a $x$, y sea $G \in \mathcal{G}$. Por ser $G$ cerrado, si $x \notin G = \overline{G}$, existe un entorno $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \cap G = \emptyset$. Pero como $\mathcal{G} \to x$, existe $G_1 \in \mathcal{G}$ tal que $G_1 \subset N$ y por tanto $G_1 \cap G = \emptyset$, lo que contradice la definición de filtro cerrado. Por tanto $x \in G$, por lo que $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$. Si además $\mathcal{G}$ es ultrafiltro, $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, y sabemos que $\mathcal{F}$ está contenido en un ultrafiltro cerrado, que tiene que converger a $x$, por lo que efectivamente $\mathcal{F}$ es el único ultrafiltro cerrado que converge a $x$. $\square$

De esta manera, como veremos en el siguiente capítulo, podemos identificar cada punto de $X$ con el ultrafiltro cerrado que converge al punto.

# Capítulo 3

# Compactificaciones

## 3.1. Compactificación de un espacio topológico

Aunque un espacio topológico no sea compacto, en ocasiones es posible considerarlo como un subespacio denso de uno que si lo sea, lo que es conveniente a la hora de estudiar propiedades topológicas.

**Definición 3.1.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Una compactificación de $X$ es un par $(K, h)$ donde $K$ es un espacio compacto, y $h : (X, \tau) \to (K, \tau_K)$ es un embebimiento, de manera que $h(X)$ es denso en K. Si además $K$ es de Hausdorff, diremos que $(K, h)$ es una compactificación de Hausdorff.

Recordamos que un embebimiento es una función continua que restringida a su imagen es un homeomorfismo, es decir, $h : (X, \tau_X) \to (K, \tau_K)$ es un embebimiento si es continua y $h_1 : (X, \tau_X) \longrightarrow (h(X), \tau_{h(X)})$ definida por $h_1(x) = h(x)$ para todo $x \in X$ es homeomorfismo.

Puesto que $X$ es homeomorfo a su imagen por $h$, podemos identificar a $X$ con $h(X)$, y pensar $X$ como un subespacio de $K$.

La compactificación de un espacio no tiene por qué ser única, un mismo espacio topológico se puede embeber de manera densa en distintos espacios compactos, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.1.1.** Sea $(X = (0, 1), \tau_u)$. No es un espacio compacto, porque los subespacios de $(\mathbb{R}, \tau_u)$ son compactos si y sólo si son cerrados y acotados. Pero $([0, 1], i)$, donde $i$ es la inclusión de $X$ en $[0, 1]$, es una compactificación de $X$, ya que $i$ es claramente un embebimiento, $X$ es denso en $[0, 1]$ y $([0, 1], \tau_u)$ es un espacio compacto.

Observamos que para embeber $X$ en un espacio compacto ha bastado con añadirle dos puntos (el 0 y el 1), pero también podemos encontrar una compactificación de $X$ añadiendo solamente un punto. Consideramos $K = \mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad en el plano complejo, y $h = exp$, es decir, $h : (X, \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_u)$ definida por $h(x) = e^{2\pi i x}$. La imagen de $X$ es $\mathbb{S}^1 - \{1\}$, y $X$ es claramente homeomorfo a su imagen por $h$, y $h(X)$ es denso en $\mathbb{S}^1$. Por tanto, $(\mathbb{S}^1, h)$ es una compactificación de $X$, que hemos conseguido añadiendo un sólo punto (el 1 como número complejo).

**Definición 3.1.2.** Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, y dadas dos compactificaciones $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ de $X$, definimos la relación $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ si existe una aplicación continua $F : (K_2, \tau_{K_2}) \longrightarrow (K_1, \tau_{K_1})$ tal que $F \circ h_2 = h_1$.

**Definición 3.1.3.** Dado un espacio topológico $(X, \tau)$, y dadas dos compactificaciones $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ de $X$, decimos que son topológicamente equivalentes si $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ y $(K_2, h_2) \leq (K_1, h_1)$.

**Proposición 3.1.1.** *Si dos compactificaciones $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ de un espacio topológico $(X, \tau)$ son topológicamente equivalentes, entonces existe un homeomorfismo $H : (K_1, \tau_{K_1}) \longrightarrow (K_2, \tau_{K_2})$ tal que $H \circ h_1 = h_2$*

*Demostración.* Sean dos compactificaciones $(K_1, h_1)$ y $(K_2, h_2)$ de un espacio topológico $(X, \tau)$. Por ser topológicamente equivalentes, existen dos aplicaciones $F_1 : (K_1, \tau_{K_1}) \longrightarrow (K_2, \tau_{K_2})$ y $F_2 : (K_2, \tau_{K_2}) \longrightarrow (K_1, \tau_{K_1})$ continuas y tales que $F_1 \circ h_1 = h_2$, $F_2 \circ h_2 = h_1$. Entonces, basta con ver que $F_1$ es homeomorfismo. Se tiene que $F_2 \circ F_1 \circ h_1 = F_2 \circ h_2 = h_1$, por lo que $F_2 \circ F_1 = id_{K_1}$, y análogamente $F_1 \circ F_2 \circ h_2 = F_1 \circ h_1 = h_2$ por lo que $F_1 \circ F_2 = id_{K_2}$. Es decir, $F_1$ y $F_2$ son inversas una de la otra, y como ambas son continuas son homeomorfismos. $\square$

**Proposición 3.1.2.** *La relación $\leq$ es un orden parcial sobre el conjunto de las compactificaciones de $(X, \tau)$.*

*Demostración.* Es claro que cada $(K, h)$ está relacionada consigo misma tomando como $F$ la identidad. Si $(K_1, h_1) \leq (K_2, h_2)$ y $(K_2, h_2) \leq (K_3, h_3)$, entonces existen $F : (K_2, \tau_{K_2}) \longrightarrow (K_1, \tau_{K_1})$ y $G : (K_3, \tau_{K_3}) \longrightarrow (K_2, \tau_{K_2})$ continuas y tales que $F \circ h_2 = h_1$ y $F \circ h_3 = h_2$. Tomamos la aplicación $H = F \circ G : (K_3, \tau_{K_3}) \longrightarrow (K_1, \tau_{K_1})$. Es continua por ser composición de aplicaciones continuas, y $H \circ h_3 = F \circ G \circ h_3 = F \circ h_2 = h_1$. Así, $(K_1, h_1) \leq (K_3, h_3)$. $\square$

**Ejemplo 3.1.2.** En el ejemplo anterior, $(\mathbb{S}^1, h) \leq ([0, 1], i)$. Los puntos de $\mathbb{S}^1$ se pueden considerar de la forma $e^{2\pi ix}$ con $x \in [0, 1]$. Si definimos la aplicación $F : ([0, 1], \tau_u) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \tau_u)$ por $F(x) = e^{2\pi ix}$ es claramente continua. Entonces, para cada $x \in [0, 1]$, $F \circ i(x) = F(x) = e^{2\pi ix} = h(x)$, es decir, $F \circ i = h$, por lo que $(\mathbb{S}^1, h) \leq ([0, 1], i)$.

## 3.2. Compactificación de Alexandroff

Vamos a ver que para una determinada clase de espacios siempre podemos construir una compactificación añadiendo un sólo punto. Dichos espacios serán de Hausdorff y tendrán una propiedad adicional que enunciamos a continuación.

**Definición 3.2.1.** Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico. Se dice que $X$ es localmente compacto si todo punto $x \in X$ tiene una base de entornos formada por conjuntos compactos.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico de Hausdorff no compacto, y $p$ un punto que no pertenece a $X$. Definimos $X^* = X \cup \{p\}$. Entonces, definimos*

(i) $\mathcal{B}_x^{X^*} = \mathcal{B}_x^X$, *si $x \in X$, donde $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de $x$ en $(X, \tau)$.*

(ii) $\mathcal{B}_p^{X^*} = \{\{p\} \cup (X - L) \mid L$ *es compacto en* $X\}$.

*Entonces, estas familias forman una base de entornos en $X^*$ que define una topología $\tau^*$ sobre $X^*$.*

*Demostración.* Es claro que las bases de entornos de los puntos de $X$ forman bases de entornos en $X^*$. Veamos para $p$. Es inmediato que $p$ pertenece a cualquier conjunto de la forma $\{p\} \cup (X - L)$ con $L$ compacto en $X$. Además, si $N_1 = \{p\} \cup (X - L_1)$, $N_2 = \{p\} \cup (X - L_2)$, con $L_1$ y $L_2$ compactos en $X$, como $L_1 \cup L_2$ es compacto en $X$ (cualquier cubrimiento por abiertos se puede dividir en abiertos que cubren a $L_1$ y abiertos que cubren a $L_2$ y extraer un subrecubrimiento finito para cada uno de ellos), tenemos que $N_3 = \{p\} \cup (X - (L_1 \cup L_2))$ y además $N_3 = N_1 \cap N_2$, por lo que en concreto $N_3 \subset N_1 \cap N_2$. Finalmente, dado $y \in N = \{p\} \cup (X - L)$, queremos ver si existe $M \in \mathcal{B}_y$ tal que $M \subset N$. Si $y = p$ es inmediato, ya que podemos tomar $M = N$. Si $y \neq p$, entonces $y \in X - L$. Como $L$ es compacto en $X$, y $X$ es de Hausdorff, $L$ es cerrado, por lo que $X - L$ es abierto en $X$, y como contiene a $y$ es un entorno de $y$. Por tanto basta con tomar $M = X - L \subset N$. □

Esta base de entornos define una topología $\tau^*$ sobre $X^*$. Vamos a ver que con esta topología $X^*$ es compacto y $X$ es denso en $X^*$, es decir, $X^*$ es una compactificación de $X$. Observamos que si $U \in \tau$, $U \in \tau^*$.

**Proposición 3.2.2.** $(X, \tau)$ *es denso en* $(X^*, \tau^*)$.

*Demostración.* Como $X \subset \overline{X}$, basta con ver que $p \in \overline{X}$. Consideramos un entorno de $p$, $N = \{p\} \cup (X - L)$. Como $X$ no es compacto, $L \neq X$, por lo que $X - L \neq \emptyset$, y entonces $N \cap X \neq \emptyset$. Por lo tanto $p \in \overline{X}$, luego $X$ es denso en $X^*$. □

**Proposición 3.2.3.** $(X^*, \tau^*)$ *es compacto.*

*Demostración.* Sea $\bigcup_{i\in I} U_i = X^*$ un cubrimiento por abiertos de $X^*$, y sea $U_{i_0}$ un abierto que contiene a $p$. Entonces $U_{i_0}$ es un entorno de $p$, por lo que $U_{i_0}$ contiene a $\{p\} \cup (X - L)$, donde $L$ es compacto en $X$. Por lo tanto, $L$ contiene a $X^* - U_{i_0}$, y como $L$ es compacto y $L \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ , existen $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ tales que $L \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$. Entonces, $X^* \subset \bigcup_{j=0}^{n} U_{i_j}$, luego $X^*$ es compacto. □

**Teorema 3.2.4.** *Si $(X, \tau)$ es localmente compacto y de Hausdorff, entonces $(X^*, \tau^*)$ es de Hausdorff.*

*Demostración.* Es claro que podemos separar puntos distintos de $X$ mediante abiertos disjuntos, ya que los abiertos en $X$ son abiertos en $X^*$ y $X$ es de Hausdorff. Veamos si podemos separar $p$ de un punto cualquiera $x \in X$. Como $X$ es localmente compacto, existe $N \in \mathcal{N}_x$ compacto. Entonces, $\{p\} \cup (X - N) \in \mathcal{B}_p^{X^*}$. Además, existe $U$ abierto, $U \subset N$, y $x \in U$, y también existe $V$ abierto, $V \subset \{p\} \cup (X - N)$ y $p \in V$. Además, $U \cap V = \emptyset$. □

Vemos ahora que la compactificación de Alexandroff es la única (salvo homeomorfismos) compactificación que se construye añadiendo un sólo punto, y que además es minimal con respecto al orden parcial definido para las compactificaciones. Para ello utilizamos un resultado previo, que puede encontrarse en [1], págs 149-159.

**Lema 3.2.5.** *Si $(K, \tau_K)$ es un espacio compacto y de Hausdorff, y $(X, \tau_X)$ es un subespacio denso de $K$ localmente compacto, entonces $X$ es abierto en $K$.*

Entonces, es inmediato que si $(X, \tau)$ es un espacio localmente compacto y de Hausdorff, y $(K, h)$ es una compactificación de Hausdorff de $(X, \tau)$, $h(X)$ es abierto en $K$.

**Teorema 3.2.6.** *Si $(K, h)$ es una compactificación de un espacio $(X, \tau)$ localmente compacto y de Hausdorff tal que $K - X = \{x_0\}$, entonces $K$ es homeomorfo a $X^*$.*

*Demostración.* Veamos en primer lugar como son los abiertos del espacio $(K, \tau_K)$. Si $U$ es abierto en $K$ y $x_0 \notin U$, entonces $U \subset h(X)$, y como $X$ es homeomorfo a su imagen por $h$ esto implica que $h^{-1}(U)$ es abierto en $X$. Si $x_0 \in U$, entonces $K - U \subset h(X)$, y, como $K - U$ es cerrado en $K$, por lo que es compacto por ser $K$ compacto. Entonces $h^{-1}(K - U)$ es compacto en $X$. Es decir, los abiertos que contienen a $x_0$ son de la forma $K - h(L)$ con $L$ compacto en $X$.

Definimos la aplicación $f : (X^*, \tau^*) \longrightarrow (K, \tau_K)$ por $f(x) = h(x)$ si $x \in X$, $f(p) = x_0$. Es claro que es biyectiva. Veamos que es continua. Si $U$

es abierto en $K$ y $x_0 \notin U$, entonces $f^{-1}(U) = h^{-1}(U)$, que es abierto en $X$, y por tanto abierto en $X^*$, porque $X$ es abierto en $X^*$. Si $x_0 \in U$, entonces $U = K - h(L)$ con $L$ compacto en $X$. Entonces $f^{-1}(h(L)) = h^{-1}(h(L)) = L$ que es compacto en $X$, y por tanto, como $f$ es biyectiva, $f(U) = X^* - L$ es abierto en $X^*$. Por último, veamos que $f^{-1}$ es continua. Se tiene que $f^{-1}(x_0) = p$. Sea $\{p\} \cup (X - L)$ un entorno básico de $p$. Entonces, $f(L) = h(L)$ es compacto en $K$ por ser $L$ compacto. Así, es cerrado. Por lo tanto, $f(\{p\} \cup (X - L)) = K - L$, que es abierto y contiene a $x_0$, por lo que es un entorno de $x_0$. Si $x \neq x_0$, $f^{-1}(x) = y \in X$, por lo que un entorno de $f^{-1}(x)$ es $U$ un abierto de $X$ que contiene a $f^{-1}(x)$. Entonces, $f(U) = h(U)$ que es abierto en $h(X)$ y por lo tanto abierto en $K$. Así, $f(U)$ es entorno de $x$. Es decir, $f^{-1}$ es continua. □

**Teorema 3.2.7.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff, y $(K, h)$ una compactificación de $X$. Entonces $(X^*, i) \leq (K, h)$.*

*Demostración.* Definimos la aplicación $f : (K, \tau_K) \longrightarrow (X^*, \tau^*)$ por $f(x) = h^{-1}(x)$ si $x \in h(X)$, $f(x) = p$ si $x \in K - h(X)$. Es claro que $f \circ h = i$. Veamos que es continua. Dado $x \in K$, si $f(x) = p$, un entorno básico de $f(x)$ es de la forma $U = \{p\} \cup (X - L)$. Entonces, $f^{-1}(U) = f^{-1}(X^*) - f^{-1}(L) = K - f^{-1}(L) = K - h(L)$. Como $h$ es continua, $h(L)$ es compacto en $K$, por lo que es cerrado, y entonces $K - h(L)$ es abierto en $K$ y contiene a $x$, por lo que es entorno de $x$. Si $f(x) \neq p$, un entorno básico de $f(x)$ es un abierto de $X$ $U$ que contiene a $f(x)$. Entonces, $f^{-1}(U) = h(U)$, que es abierto en $h(X)$ por ser $X$ homeomorfo a su imagen por $h$, y como $h(X)$ es abierto en $K$, $h(U)$ es abierto en $K$. Es decir, es un entorno de $x$. Así, $f$ es continua, y $(X^*, i) \leq (K, h)$. □

## 3.3. Compactificación de Stone-Čech

**Definición 3.3.1.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es $T_1$ si para cada $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $U$ abierto en $X$ tal que $x \in U$, $y \notin U$.

**Definición 3.3.2.** Un espacio topológico es completamente regular si, dados $A$ cerrado en $X$ y $x \notin A$, existe una aplicación $f : (X, \tau) \longrightarrow ([0, 1], \tau_u)$ continua tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$.

**Definición 3.3.3.** Un espacio topológico $(X, \tau)$ es de Tychonoff si es completamente regular y $T_1$.

El siguiente resultado puede encontrarse en [4], pág 122.

**Proposición 3.3.1.** *Un espacio topológico es de Tychonoff si y sólo si es homeomorfo a un subespacio de un espacio compacto de Hausdorff.*

Sea $(X, \tau)$ un espacio de Tychonoff, y $C^*(X)$ el conjunto de aplicaciones continuas de $(X, \tau)$ en $([0,1], \tau_u)$. Consideramos el producto $[0,1]^{C^*(X)}$, es decir, $\prod_{f \in C^*(X)} [0,1]_f$ Entonces, este espacio es de Hausdorff, y es compacto por el teorema de Tychonoff, pues $([0,1], \tau_u)$ es compacto, por lo que cualquier subespacio cerrado será compacto. Además, si consideramos la aplicación evaluación

$$e : X \longrightarrow \prod_{f \in C^*(X)} [0,1]_f$$

dada por $(e(x))_f = f(x)$, es un embebimiento de $(X, \tau)$ en $(\prod_{f \in C^*(X)} [0,1]_f, \tau_{TYC})$ (ver [4], pág 136).

**Definición 3.3.4.** La compactificación de Stone-Čech de un espacio topológico de Tychonoff $(X, \tau)$ es $(\beta X, e)$, donde $\beta X$ es la clausura de $e(X)$ en $\prod_{f \in C^*(X)} [0,1]_f$.

**Teorema 3.3.2.** *Si $(K, \tau_K)$ es un espacio compacto y de Hausdorff, y $f : (X, \tau) \longrightarrow (K, \tau_K)$ es una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua $F : (\beta X, \tau_{\beta X}) \longrightarrow (K, \tau_K)$ tal que $F \circ e = f$.*

*Demostración.* $(K, \tau_K)$ es un espacio de Tychonoff, y por lo tanto se puede embeber mediante una evaluación $e'$ (al igual que hemos hecho con $X$) en el producto $\prod_{h \in C^*(K)} [0,1]_h$. Definimos $H : \prod_{g \in C^*(X)} [0,1]_g \longrightarrow \prod_{h \in C^*(K)} [0,1]_h$ de la siguiente manera: dado $t \in \prod_{g \in C^*(X)} [0,1]_g$, $(H(t))_h = t_{h \circ f}$. Esto implica que $H$ es continua, ya que hemos definido que cada proyección $\pi_h$ es $\pi_h \circ H(t) = \pi_{h \circ f}(t)$, es decir, cada proyección en $\prod_{h \in C^*(K)} [0,1]_h$ es una proyección en $\prod_{g \in C^*(X)} [0,1]_g$, luego es continua, y por lo tanto $H$ es continua. Ahora, dado $x \in X$, cada proyección de la imagen por $H$ de $e(x)$ está dada por $(H(e(x)))_h = (e(x))_{h \circ f} = g \circ f(x) = (e'(f(x)))_h$, luego $H(e(x)) = e'(f(x))$. Como $f(x) \in K$, $H(e(x)) \in e'(K)$, es decir, $H(e(X)) \subset e'(K)$. Además, como $e(X)$ es denso en $\beta X$, $H(e(X))$ es denso en $H(\beta X)$. Pero como $e'(K)$ es cerrado en $\prod_{h \in C^*(K)} [0,1]_h$ (es la imagen continua de un compacto luego es compacto), y contiene a $H(e(X))$, se tiene que $H(\beta X) \subset e'(K)$. Finalmente, definimos la aplicación $F : (\beta X, \tau_{\beta X}) \longrightarrow (K, \tau_K)$ por $F = e'^{-1} \circ (H_{|\beta X})$. Es continua por ser composición de aplicaciónes continuas, y además para cada $x \in \beta X$, $F \circ e(x) = e'^{-1} \circ H \circ e(x) = e'^{-1}(H(e(x))) = e'^{-1}(e'(f(x))) = f(x)$, luego $F \circ e = f$. $\square$

**Teorema 3.3.3.** *Sea $(X, \tau)$ un espacio de Tychonoff. Entonces, si $(K, h)$ es una compactificación de $(X, \tau)$, $(K, h) \leq (\beta X, e)$.*

*Demostración.* Basta con definir una aplicación $F : (\beta X, \tau_{\beta X}) \longrightarrow (K, \tau_K)$ continua tal que $F \circ e = h$. Se tiene que $h : (X, \tau) \longrightarrow (K, \tau_K)$ es una aplicación continua de $(X, \tau)$ en un espacio compacto de Hausdorff. Por tanto, por el teorema 3.3.2, existe $H : (\beta X, \tau_{\beta X}) \longrightarrow (K, \tau_K)$ continua tal que $H \circ e = h$. Tomando $F = H$ se tiene el resultado. □

Este teorema implica que la compactificación de Stone-Čech es maximal con respecto al orden parcial que hemos definido, si $(X, \tau)$ es un espacio topológico de Tychonoff.

**Teorema 3.3.4.** *Una compactificación $(K, h)$ de Hausdorff que tenga la propiedad de extensión definida en el teorema 3.3.2 es topológicamente equivalente a la compactificación de Stone-Čech.*

*Demostración.* Hay que ver que $(K, h) \leq (\beta X, e)$ y $(\beta X, e) \leq (K, h)$. Por el teorema 3.3.3, $(K, h) \leq (\beta X, e)$. Veamos que $(\beta X, e) \leq (K, h)$. Tenemos que $(\beta X, \tau_{\beta X})$ es un espacio compacto y de Hausdorff, y además la evaluación $e : (X, \tau) \longrightarrow (\beta X, \tau_{\beta X})$ es una función continua, por tanto, existe un función continua $F : (K, \tau_K) \longrightarrow (\beta X, \tau_{\beta X})$ tal que $F \circ h = e$. Esto implica que $(\beta X, e) \leq (K, h)$. Así, $(K, h)$ y $(\beta X, e)$ son topológicamente equivalentes. □

## 3.4. Compactificación de Wallman

Vamos a definir una compactificación de un espacio de Hausdorff en función de sus ultrafiltros cerrados. Sea $(X, \tau)$ un espacio de Hausdorff, y $\gamma X$ el conjunto de ultrafiltros cerrados de $X$. Vamos a ver que $\gamma X$ es una compactificación de $X$. Para ello necesitamos primero definir una topología sobre $\gamma X$. Queremos que guarde algún tipo de relación con $X$ y con los ultrafiltros cerrados. Por tanto, ya que los elementos de los ultrafiltros cerrados son subconjuntos cerrados de $X$, definimos los conjuntos cerrados de la topología de $\gamma X$ utilizando los cerrados de $X$.

**Definición 3.4.1.** Dado un conjunto cerrado $D$ de $X$, definimos en $\gamma X$ el conjunto $D^* = \{\mathcal{F} \in \gamma X \mid D \in \mathcal{F}\}$. Ahora, sea $\mathcal{W} = \{D^* \mid \text{D es cerrado en X}\}$.

Queremos ver que podemos utilizar los conjuntos $D^*$ para definir una topología sobre $\gamma X$. Dado que los $D$ son conjuntos cerrados en $X$, es natural tratar de considerar los $D^*$ como cerrados en $\gamma X$. Recordemos el siguiente resultado.

**Definición 3.4.2.** Una familia de subconjuntos $\mathcal{W}$ de $X$ es base de cerrados para un topología sobre $\tau$ $X$ si

i) $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{W}} F = \emptyset$,

ii) Dados $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, para cada $x \notin F_1 \cup F_2$, existe $F \in \mathcal{W}$ tal que $x \notin F$ y $F_1 \cup F_2 \subset F$.

En ese caso, $\tau = \{X - (\bigcap_{i \in I} F_i) \mid F_i \in \mathcal{W}\}$.

**Proposición 3.4.1.** *$\mathcal{W}$ es una base de cerrados de $\gamma X$.*

*Demostración.* i) Como $X$ es un espacio de Hausdorff, $\{x\}$ es cerrado en $X$ para todo $x \in X$. Entonces, sean $x \neq y$, y $D_1 = \{x\}$, $D_2 = \{y\}$. $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ por lo que no existe un ultrafiltro cerrado $\mathcal{F}$ tal que $\{x\} \in \mathcal{F}$, $\{y\} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, $D_1^* \cap D_2^* = \emptyset$ y en consecuencia $\bigcap\limits_{D^* \in \mathcal{W}} D^* = \emptyset$.

ii) Sean $D_1^*, D_2^* \in \mathcal{W}$, y $\mathcal{F}$ tal que $D_1, D_2 \notin \mathcal{F}$. Tomamos el conjunto $D_3^* = \{\mathcal{F} \in \gamma X \mid D_1 \cup D_2 \in \mathcal{F}\}$. Ahora, si $\mathcal{G} \in D_1^*$, es decir, $D_1 \in \mathcal{G}$, entonces tenemos $D_1 \subset D_1 \cup D_2$, por lo que $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{G}$ y por lo tanto $\mathcal{F} \in D_3^*$. Entonces, $D_1^* \subset D_3^*$, y análogamente $D_2^* \subset D_3^*$. Finalmente, supongamos que $\mathcal{F} \in D_3^*$, entonces $D_1 \cup D_2 \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro cerrado, $D_1 \in \mathcal{F}$ ó $D_2 \in \mathcal{F}$, lo que contradice que $D_1, D_2 \notin \mathcal{F}$.

□

Entonces, $\mathcal{W}$ es una base de cerrados para una topología sobre $\gamma X$, definida por

$$\tau_{\gamma X} = \{\gamma X - (\bigcap_{i \in I} D_i^*) \mid D_i^* \in \mathcal{W} \text{ e I es un conjunto de índices arbitrario}\}.$$

Vamos ahora a definir el embebimiento de $(X, \tau)$ en $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$. Sabiendo que para cada $x \in X$ hay un único ultrafiltro cerrado que converge a $x$ por la proposición 2.3.4, es natural identificar cada punto con ese ultrafiltro.

**Definición 3.4.3.** Definimos $h : (X, \tau) \longrightarrow (\gamma X, \tau_{\gamma X})$ la función que lleva cada punto $x \in X$ al ultrafiltro cerrado que converge a $x$, que denotamos por $\mathcal{F}_x$.

**Proposición 3.4.2.** *$h$ es un embebimiento de $(X, \tau)$ en $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$.*

*Demostración.* - Por la proposición 2.3.4 hay un único ultrafiltro cerrado que converge a cada punto $x \in X$, por lo que $h$ está bien definida.

- Si $x \neq y$, entonces $h(x) \neq h(y)$ porque un ultrafiltro cerrado en un espacio de Hausdorff converge como mucho a un punto (Proposición 2.2.5). Por lo tanto $h$ es inyectiva.

- Sea $D^*$ un cerrado básico en $\gamma X$. Entonces se tiene que $h^{-1}(D^*) = \{x \in X \mid \text{ existe } \mathcal{F} \in D^* \text{ tal que } \mathcal{F} \to x\} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \in D^*\}$. Si $\mathcal{F}_x \in D^*$, hemos visto antes que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$, por lo que, por ser $\mathcal{F}_x$ filtro cerrado, $\{x\} \cap D \neq \emptyset$ lo que implica que $x \in D$. Es decir, $x \in h^{-1}(D^*)$, por lo que $h^{-1}(D^*) = D$ que es cerrado en $X$, luego $h$ es continua.

- Ahora, consideramos como espacio de llegada $h(X)$ en vez de $\gamma X$. Sea $D$ cerrado en $X$. Tenemos que $h(D) = \{\mathcal{F}_x \mid x \in D\}$. Como $x \in D$, $D \in \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F} \in D^*$, es decir, $h(D) \subset D^*$. Como ya hemos visto que $h^{-1}(D^*) = D$, tenemos que $h(D) = h(X) \cap D^*$ que es cerrado en la topología inducida en el subespacio $h(X)$. Entonces, la aplicación $h_1 : (X, \tau) \longrightarrow (h(X), \tau_{h(X)})$ lleva cerrados en cerrados, luego es cerrada, y como ya hemos visto que es continua e inyectiva tenemos que $X$ es homeomorfo con su imagen por $h$.

Es decir, $h$ es un embebimiento de $(X, \tau)$ en $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$. □

**Proposición 3.4.3.** *$h(X)$ es denso en $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$.*

*Demostración.* Vamos a probar que $\overline{h(X)} = \gamma X$. $\overline{h(X)}$ es la intersección de los cerrados de $\gamma X$ que contienen a $h(X)$. Como todo cerrado se puede escribir como intersección de cerrados básicos, podemos considerar sólo los elementos de $\mathcal{W}$. Sea $D^* \in \mathcal{W}$ tal que $h(X) \subset D^*$. Entonces, $D \in \mathcal{F}$ para todo $\mathcal{F} \in h(X)$. Si $D \neq X$, entonces existe $x \in X$ tal que $x \notin D$. Consideramos $\mathcal{F}_x$ el ultrafiltro cerrado que converge a $x$. Por ser $X$ de Hausdorff, $\{x\}$ es cerrado en $X$, por lo que $\{x\} \in \mathcal{F}_x$. Como $\{x\} \cap D = \emptyset$, $D \notin \mathcal{F}$, por lo que $\mathcal{F} \notin D^*$. Pero $\mathcal{F} \in h(X)$, y por tanto $h(X) \not\subset D^*$, lo que contradice la hipótesis inicial. Es decir, $D = X$, y entonces $D^* = \gamma X$, ya que $X$ es un elemento de todos los filtros cerrados. Por lo tanto el único cerrado de $\gamma X$ que contiene a $h(X)$ es $\gamma X$, por lo que $h(X)$ es denso en $\gamma X$. □

Ahora, vamos a ver que $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$ es compacto, y por lo tanto que es una compactificación de $X$. Utilizamos un lema previo.

**Lema 3.4.4.** *Sea $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados en un espacio topológico $(X, \tau)$ con la propiedad de intersección finita. Entonces existe un ultrafiltro cerrado que contiene a $\{D_i\}_{i \in I}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{B} = \{\bigcap_{j=1}^n D_{i_j} \mid n \in \mathbb{N}, \quad D_{i_j} \in \mathcal{D}\}$. Basta con tomar $n = 1$ y cada $D_i$ para ver que $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$. Afirmamos que $\mathcal{B}$ es base de un filtro cerrado. En primer lugar, sus elementos son cerrados no vacíos, ya que son intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$. Además, dados $B_1 = \displaystyle\bigcap_{j=1}^{n} D_{i_j}$ y $B_2 = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{m} D_{i_k} \in \mathcal{B}$, tomando $B_3 = B_1 \cap B_2$, tenemos que $B_3 \in \mathcal{B}$ porque también es una intersección finita de elementos de $\mathcal{D}$, y $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Por lo tanto $\mathcal{B}$ genera un filtro cerrado, y entonces existe un ultrafiltro cerrado que contiene a $\mathcal{B}$, y por lo tanto a $\mathcal{D}$. □

**Teorema 3.4.5.** *$(\gamma X, \tau_{\gamma X})$ es compacto.*

*Demostración.* Por la proposición 1.4.1, probar que es compacto es equivalente a ver que cualquier familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía. Como todo cerrado se escribe como intersección de cerrados básicos, podemos considerar que los elementos de la familia pertenecen a $\mathcal{W}$. Es decir, sea $A = \{D_i^*\}_{i\in I}$ una familia de cerrados básicos con la propiedad de intersección finita. Esto implica que si tomamos $\{D_{i_j}^*\}_{j=1}^n$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $\mathcal{F} \in \bigcap_{j=1}^{n} D_{i_j}^*$. Por lo tanto $D_{i_j} \in \mathcal{F}$ para $j = 1, ..., n$. Como los filtros cerrados tienen la propiedad de intersección finita, $\bigcap_{i=1}^{n} D_{i_j} \neq \emptyset$, es decir, $\{D_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados de $X$ con la propiedad de intersección finita. Aplicando el lema vemos que existe un ultrafiltro cerrado $\mathcal{G} \supset \{D_i\}_{i\in I}$, es decir $D_i \in \mathcal{G}$ para todo $i \in I$, y en consecuencia $\mathcal{G} \in \bigcap_{i\in I} D_i^*$. Por lo tanto, $A$ tiene intersección no vacía, luego $\gamma X$ es compacto. □

Por lo tanto, podemos embeber $X$ de manera densa en el espacio compacto $\gamma X$. Es decir, $(\gamma X, h)$ es una compactificación de $(X, \tau)$. Queremos ahora que $\gamma X$ sea de Hausdorff. Para dar una condición necesaria y suficiente para que lo sea, tenemos que dar la definición de espacio normal.

**Definición 3.4.4.** Se dice que un espacio topológico $(X, \tau)$ es normal si, dados $A$, $B$ cerrados en $X$ tales que $A \cap B = \emptyset$, existen $U$, $V$ abiertos en $X$, con $A \subset U$, $B \subset V$, tales que $U \cap V = \emptyset$.

**Teorema 3.4.6.** *$(\gamma X, \tau_{\gamma X})$ es Hausdorff si y sólo si $(X, \tau)$ es normal.*

*Demostración.* $\Longrightarrow$) Supongamos que $\gamma X$ es de Hausdorff, y sean $A$ y $B$ cerrados disjuntos en $X$. Entonces, $A^*$ y $B^*$ son cerrados disjuntos en $\gamma X$, ya que si $\mathcal{F} \in A^* \cap B^*$ entonces $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{F}$, lo cual es imposible porque $A$ y $B$ son disjuntos. Por ser $\gamma X$ compacto y de Hausdorff, podemos separar $A^*$ y $B^*$ por abiertos disjuntos $U_1$ y $U_2$ en $\gamma X$. Ahora, sean $V_1 = U_1 \cap X$, y $V_2 = U_2 \cap X$, que son abiertos en $X$. $V_1$ y $V_2$ son disjuntos, y además $A \subset V_1$ y $B \subset V_2$, ya que $A^* \subset U_1$, por lo que $A \subset U_1$ y $A \subset X$, luego $A \subset U_1 \cap X$, y análogamente para $B$. Por lo tanto $X$ es normal.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $X$ es normal, y sean $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2 \in \gamma X$. Veamos primero que en ese caso existen $A$ y $B$ cerrados disjuntos en $X$ tales que $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$. En caso contrario, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ sería una familia de cerrados

con la propiedad de intersección finita, por lo que existiría $\mathcal{U}$ un ultrafiltro cerrado que contendría a $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ pero como ambos son ultrafiltros cerrados, $\mathcal{U} = \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, lo que es una contradicción.
Como $X$ es normal, existen $U_1$ y $U_2 \in \tau$ disjuntos tales que $A \subset U_1$ y $B \subset U_2$. Entonces, $X - U_1$ y $X - U_2$ son cerrados en $X$. Tomamos $V_1 = \gamma X - (X - U_1)^*$ y $V_2 = \gamma X - (X - U_2)^*$, que son abiertos en $\gamma X$ por ser complementrarios de cerrados básicos. Supongamos que $\mathcal{F}_1 \notin V_1$. Entonces $\mathcal{F}_1 \in (X - U_1)^*$, luego $(X - U_1) \in \mathcal{F}_1$. Sin embargo, $A \in \mathcal{F}_1$ y $A \cap (X - U_1) = \emptyset$ porque $A \subset U_1$, lo cual es imposible por ser $\mathcal{F}_1$ filtro cerrado. Es decir, $\mathcal{F}_1 \in V_1$, y análogamente $\mathcal{F}_2 \in V_2$.
Por último, veamos que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Supongamos que existe $\mathcal{G} \in V_1 \cap V_2$. Entonces $X - U_1 \notin \mathcal{G}$ y $X - U_2 \notin \mathcal{G}$. Pero como $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, se tiene que $(X - U_1) \cup (X - U_2) = X$, luego por ser $\mathcal{G}$ ultrafiltro cerrado $X - U_1 \in \mathcal{G}$ ó $X - U_2 \in \mathcal{G}$, lo que es una contradicción. Es decir, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y por lo tanto $\gamma X$ es de Hausdorff. □

Por lo tanto, tenemos que, si $(X, \tau)$ es normal, $(\gamma X, h)$ es una compactificación de Hausdorff de $X$, ya que hemos probado que podemos embeber $X$ de manera densa en el espacio de Hausdorff $\gamma X$. Además, en este caso podemos identificar la compactificación de Wallman con la compactificación de Stone-Čech.

**Teorema 3.4.7.** *Si $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$ es un espacio de Hausdorff, entonces $(\gamma X, h)$ es topológicamente equivalente a la compactificación de Stone-Čech.*

*Demostración.* Por el teorema 3.3.4, basta con probar que cualquier función continua de $(X, \tau)$ a un espacio compacto y de Hausdorff $(K, \tau_K)$ se puede extender a $(\gamma X, \tau_{\gamma X})$.

Sea $f : (X, \tau) \longrightarrow (K, \tau_K)$ una función continua. Si $\mathcal{F} \in \gamma X - h(X)$, definimos $\mathcal{G} = \{F \text{ cerrado en K} \mid f^{-1}(F) \in \mathcal{F}\}$. $\mathcal{G}$. En primer lugar veamos que es un filtro cerrado en $K$. Sus elementos son no vacíos, porque se tiene que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$, por lo que $\emptyset \notin \mathcal{G}$. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{G}$, entonces $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2) \in \mathcal{F}$, y como $f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(f_2) = f^{-1}(F_1 \cap F_2) \in \mathcal{F}$, se tiene que $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{G}$. Por último, si $F \in \mathcal{G}$ y $F \subset G$, $f^{-1}(F) \subset f^{-1}(G)$, luego $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ por ser $\mathcal{F}$ filtro cerrado en $X$, y $G \in \mathcal{G}$. Además, si $A, B$ son cerrados en $K$ y $A \cup B \in \mathcal{G}$, $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Por ser $\mathcal{F}$ ultrafiltro cerrado en $X$, $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ o $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, luego $A \in \mathcal{G}$ o $B \in \mathcal{G}$.

Esto implica que $\mathcal{G}$ está contenido en un único ultrafiltro cerrado en $K$. En efecto, supongamos que existen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ultrafiltros cerrados distintos en $K$ que contienen a $\mathcal{G}$. Entonces existen $G_1 \in \mathcal{U}_1$, $G_2 \in \mathcal{U}_2$ tales que $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Por ser $K$ compacto y de Hausdorff, es normal, por lo que existen $U, V \in \tau_K$ tales que $G_1 \subset U$, $G_2 \subset V$, y $U \cap V = \emptyset$. Sea $F_1 = K - U$, $F_2 = K - V$. Entonces, $F_1 \cap G_1 = \emptyset$, (porque $G_1 \subset U = K - F_1$), y análogamente $F_2 \cap G_2 = \emptyset$. Además, $F_1 \cup F_2 = K - (F_1 \cap F_2) = K$. Por lo tanto, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{G}$, es decir, $F_1 \in \mathcal{G}$ ó $F_2 \in \mathcal{G}$. Si $F_1 \in \mathcal{G}$, entonces $F_1 \in \mathcal{U}_1$, pero $G_1 \in \mathcal{U}_1$ y $F_1 \cap G_1 = \emptyset$, lo cual es imposible. Por lo tanto $F_2 \in \mathcal{G}$, pero en ese caso, $F_2 \in \mathcal{U}_2$, y como $G_2 \in \mathcal{U}_2$ y $F_2 \cap G_2 = \emptyset$, por lo que tenemos una contradicción. Así, no existen dos ultrafiltros cerrados distintos que contengan a $\mathcal{G}$. Sabemos, por la proposición 2.3.1, que esta contenido en algún ultrafiltro cerrado $\mathcal{U}$, por lo que éste es único.

Por ser $\mathcal{U}$ filtro cerrado, es una familia de cerrados con intersección finita, luego tiene intersección no vacía, por ser $K$ compacto. Por la proposición 2.2.1 tiene un punto de algomeración, y por ser de Hausdorff, por la proposición 2.3.3 este punto, que llamamos $q_{\mathcal{F}}$, es único.

Entonces, la aplicación $H : (\gamma X, \tau_{\gamma X}) \longrightarrow (K, \tau_K)$ dada por $H(\mathcal{F}_x) = f(x)$ si $\mathcal{F}_x = h(x)$, $H(\mathcal{F}) = q_{\mathcal{F}}$ si $\mathcal{F} \in \gamma X - h(X)$, está bien definida, y $H \circ h = f$. Veamos que es continua.

Si $\mathcal{F}_x = h(x)$ con $x \in X$, dado un entorno $U$ de $H(\mathcal{F}_x) = f(x)$, que podemos suponer que es abierto en $K$, $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$, por ser $f$ continua, y contiene a $x$, por lo que es un entorno abierto de $x$. Además, $h(f^{-1})(U)$ es abierto en $h(X)$ y por tanto en $\gamma X$, por el lema 3.2.5. Como $\mathcal{F}_x = h(x) \in h(f^{-1}(U))$, $h(f^{-1}(U))$ es un entorno abierto de $\mathcal{F}_x$, $H(h(f^{-1}(U))) = f(f^{-1})(U) = U$. Así, $H$ es continua en $\mathcal{F}_x$.

Si $\mathcal{F} \in \gamma X - h(X)$, sea $N$ un entorno de $H(\mathcal{F})$ en $K$. Podemos suponer $N \in \tau_K$. Sea $A = K - N$ cerrado en $K$. Como $f$ es continua, $f^{-1}(A) = D$ es cerrado en $X$. Entonces, $D^*$ es cerrado en $\gamma X$, y $\mathcal{F} \notin D^*$. En efecto, si $\mathcal{F} \in D^*$, entonces $D \in \mathcal{F}$. Como $f^{-1}(f(D)) \supset D$, $f^{-1}(f(D)) \in \mathcal{F}$. Eso implica que $f(D) \in \mathcal{G} = \{F \text{ cerrado en K} \mid f^{-1}(F) \in \mathcal{F}\}$. Entonces, $q_{\mathcal{F}} = H(\mathcal{F}) \in f(D) = f(f^{-1}(A)) = A = K - N$, pero $H(\mathcal{F}) \in N$, lo que es una contradicción. Es decir, $\mathcal{F} \in \gamma X - D^*$, que es abierto en $\gamma X$, luego es entorno de $\mathcal{F}$. Veamos que $H(\gamma X - D^*) \subset N$. Sea $\mathcal{U} \in \gamma X - D^*$. Entonces, $D \notin \mathcal{U}$. Por lo tanto, existe $D_1 \in \mathcal{U}$ tal que $D \cap D_1 = \emptyset$. Por lo tanto $f(D) \cap f(D_1) = \emptyset$, ya que si existe $x \in f(D) \cap f(D_1)$, existe $y \in D_1$ tal que $f(y) = x \in f(D)$. Pero entonces $y \in f^1(f(D)) = D$, lo cual es imposible pues $D \cap D_1 = \emptyset$. Como tenemos que $H(\mathcal{U}) \in f(D_1)$, $H(\mathcal{U}) \notin f(D) = A = K - N$. Por lo tanto, $H(\mathcal{U}) \in N$, y $H(\gamma X - D^*) \subset N$. Así, $H$ es continua en $\mathcal{F}$. Es decir, $H$ es continua en todo punto de $\gamma X$.

□

## 3.5. Ejemplos

Finalizamos con un par de ejemplos sencillos. La compactificación de Stone-Čech, aunque se sabe que existe, no se conoce en la mayoría de los casos.

### 3.5.1. Compactificaciones de $((0,1), \tau_u)$

Hemos visto que $(\mathbb{S}^1, exp)$ es una compactificación de $((0,1), \tau_u)$ que se obtiene añadiendo un sólo punto, y por lo tanto es la compactificación de

Alexandroff. También hemos visto que $([0,1], \tau_u)$ es una compactificación de $((0,1), \tau_u)$. Sin embargo, no es la compactificación de Stone-Čech, ya que la aplicación $\sin 1/x$ definida sobre $(0,1)$ no se puede extender de manera continua a $[0,1]$. Además, $([0,1], \tau_u)$ tampoco puede ser la comactificación de Wallman, ya que, por ser $((0,1), \tau_u)$ normal, la compactificación de Wallman es topólogicamente equivalente a la compactificación de Stone-Čech, por el teorema 3.4.7.

### 3.5.2. Compactificaciones de $(\mathbb{N}, \tau_u)$

Sea $(\mathbb{N}, \tau_u)$. Consideramos el espacio $(X = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}, \tau_u)$. Entonces $(X, h)$, donde $h : (\mathbb{N}, \tau_u) \longrightarrow (X, \tau_u)$ se define por $h(n) = 1/n$, es una compactificación de $(\mathbb{N}, \tau_u)$. Es claro que $\mathbb{N}$ es homeomorfo a su imagen por $h$, ya que $h$ es continua, y su inversa es ella misma, $h^{-1}(x) = 1/x$ para cada $x \in h(\mathbb{N})$, y es continua. Además, $(X, \tau_u)$ es compacto, ya que, dado un cubrimiento por abiertos de $X$, el abierto que contiene al 0 contiene a todos los puntos de $X$ excepto un número finito de ellos, pues la sucesión $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0. Como hemos construido $X$ añadiendo un sólo punto, $(X, h)$ es la compactificación de Alexandroff de $(\mathbb{N}, \tau_u)$.

# Bibliografía


[1] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin (1989)

[2] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer-Verlag (1955)

[3] H. Wallman, Lattices and topological spaces, *Annals of Mathematics*, Second Series, **39**, no. 1 (1938): 112-26

[4] S. Willard, *General Topology*, Dover (2004)