



---

# La Función Zeta de Riemann y su relación con la distribución de los números primos

---

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas

Carlos Uriarte Baranda

Trabajo dirigido por  
Juan Carlos Peral Alonso

Leioa, 20 de junio de 2018



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>1. ¿Por qué la función <math>\zeta</math>?</b>	<b>1</b>
1.1. Suma recíproca de los números primos . . . . .	1
1.2. Definición y convergencia de $\zeta$ . . . . .	3
1.3. Producto de Euler . . . . .	5
<b>2. Función <math>\zeta</math> de Riemann</b>	<b>7</b>
2.1. Propiedades analíticas . . . . .	7
2.2. Función Factorial . . . . .	8
2.3. Prolongación analítica . . . . .	9
2.4. Ecuación funcional . . . . .	15
2.5. Algunos valores de $\zeta$ . . . . .	19
2.6. Ceros no triviales e hipótesis de Riemann . . . . .	22
<b>3. Teorema del número primo. Demostración analítica</b>	<b>25</b>
3.1. Formulación equivalente del TNP . . . . .	25
3.2. Lemas y condición suficiente . . . . .	29
3.3. Representación integral de la función $\psi_1(x)/x^2$ . . . . .	32
3.4. Región libre de ceros. Cota superior de $\left  \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right $ . . . . .	34
3.5. Compleción de la demostración del TNP . . . . .	36
3.6. Comentarios adicionales. Término de error . . . . .	38
<b>A. Cota superior de <math> \zeta'(s)/\zeta(s) </math>. Demostración</b>	<b>41</b>
A.1. Cota superior de $ \zeta'(s) $ . . . . .	41
A.2. Cota inferior de $ \zeta(s) $ . Región libre de ceros . . . . .	44



# Introducción

La Teoría de Números es la rama de las matemáticas que trata con las propiedades de los números naturales,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, \dots$$

Estos números son infinitos por construcción axiomática y sus propiedades, aunque a priori comprensibles, no tienen siempre una justificación formal sencilla.

En particular, los números primos son aquellos naturales distintos del uno que cumplen con la propiedad de ser divisibles únicamente entre uno y él mismo,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \dots$$

Los números primos se distribuyen entre los naturales y su infinitud es un resultado conocido desde hace más de 2000 años gracias a Euclides. No obstante, el comportamiento en su distribución continúa siendo un tema pendiente y muy complicado de estudiar y analizar.

Si consideramos bloques grandes de números y contabilizamos la cantidad de números primos en estos bloques, uno encuentra que su distribución resulta “ciertamente regular”. En efecto, denotemos por  $\pi(x)$  a la función contadora de números primos menores o iguales que  $x$ ,

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ es un número primo}\}.$$

Observando la Tabla 1 inferior, notamos que a medida que aumenta  $x$ , el cociente entre  $\pi(x)$  y  $x/\log x$  tiende a 1.

A principios del siglo XVIII, Gauss y Legendre conjeturaron independientemente este resultado. Sin embargo, fracasaron en el intento de proporcionar una prueba válida sobre semejante comportamiento. El problema sobre la veracidad o falsedad de dicha tendencia atrajo la atención de muchos matemáticos durante aproximadamente 100 años.

En 1851, el matemático ruso Chebyshev dio un gran avance probando que *si dicho ratio tenía límite, entonces el límite tenía que ser 1*. Ocho años

Tabla 1: Primos por bloques de números

$x$	$\pi(x)$	$x/\log x$	$\pi(x)/\frac{x}{\log x}$
10	4	4.3	0.93
$10^2$	25	21.7	1.15
$10^3$	168	144.8	1.16
$10^4$	1 229	1 086	1.13
$10^5$	9 592	8 686	1.10
$10^6$	78 498	72 382	1.08
$10^7$	664 579	620 420	1.07
$10^8$	5 761 455	5 428 681	1.06
$10^9$	50 847 534	48 254 942	1.05
$10^{10}$	455 052 511	434 294 482	1.048

más tarde, en 1859, Riemann atacó el problema haciendo uso de una fórmula descubierta por Euler en 1737 que relaciona los números primos con la función  $\zeta$ . En su trabajo, Riemann consideró la variable compleja y desarrolló un método ingenioso para conectar la distribución de los primos con esta función. Desafortunadamente, las matemáticas necesarias para justificar todos los detalles de su método no estaban completamente desarrolladas por aquel entonces y en consecuencia, fue incapaz de resolver el problema plenamente antes de su muerte en 1866.

Treinta años después, las herramientas analíticas necesarias ya estaban disponibles y en 1896, J. Hadamard y C. J. de la Vallée Poussin, independientemente y casi simultáneamente, finalmente mostraron

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Este remarkable resultado es conocido como *Teorema del Número Primo* (abrev. TNP) y su demostración fue uno de los grandes logros de la teoría analítica de números.

En 1949, dos matemáticos contemporáneos, Atle Selberg y Paul Erdős, causaron sensación al encontrar una prueba válida y elemental de este emblemático teorema. Su demostración, aunque de gran detalle técnico, no hace uso de la función  $\zeta$  ni del análisis complejo y por ello, en principio, es accesible a cualquiera familiarizado con el cálculo elemental.

# Resumen

El presente trabajo tiene por objetivo realizar un análisis sobre las principales propiedades de la función  $\zeta$  para posteriormente aportar una demostración analítica del Teorema del Número Primo. Así, el desarrollo de la memoria se divide en tres partes fundamentales divididas en capítulos:

En el primer capítulo comenzaremos presentando y resolviendo un problema clásico: *la divergencia de la suma recíproca de los números primos*. De su demostración, seremos capaces de obtener una identidad relacionando una suma de números naturales con un producto de números primos. De esta manera, motivaremos la razón por la cual la función

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

es una buena candidata para analizar el comportamiento de los números primos. Después de comprobar la convergencia de la serie para los  $s$  complejos tales que  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , haciendo una breve mención a los productos infinitos, concluiremos la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s},$$

válida sobre el semiplano de convergencia de  $\zeta$  y donde  $p$  recorre los números primos.

Posteriormente, en el segundo capítulo, comprobaremos que  $\zeta(s)$  es una función *holomorfa* en el semiplano  $\operatorname{Re}(s) > 1$  y con propiedades analíticas de la función factorial  $\Pi(s)$ , extenderemos su definición natural sobre el plano complejo. Además, manipulando convenientemente sus propiedades deduciremos la *ecuación funcional*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Pi(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Esta ecuación nos permitirá ubicar fácilmente los conocidos como *ceros triviales* de  $\zeta$  y nos ayudará a obtener una fórmula general para la suma

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Finalmente, para concluir con el capítulo, haremos mención a la localización de sus *ceros no triviales* en la conocida como *banda crítica* de la función  $\zeta$  y referenciaremos al artículo publicado por Riemann en Noviembre de 1859, “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse” (“Sobre el número de números primos menores que una magnitud dada”), en el que conjetura que *todos los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  tienen parte real igual a  $1/2$* . Esta es la conocida como *hipótesis de Riemann* y actualmente se alza como uno de los problemas matemáticos más difíciles de resolver.

En el último capítulo demostraremos el Teorema del Número Primo. Para ello, al igual que hizo Chebyshev, encontraremos una reformulación equivalente del mismo de la que seguidamente deduciremos una condición suficiente, que en caso de ser verdadera, implica el TNP. Será entonces cuando la función  $\zeta$  de Riemann tome especial relevancia en la demostración de este hecho. Después de diversas manipulaciones técnicas, encontraremos una expresión integral que concierne al término  $\zeta'(s)/\zeta(s)$  y que se relaciona directamente con la condición suficiente anteriormente comentada. Mostrando que  $\zeta$  posee una región libre de ceros dentro de la banda crítica, concluiremos la condición suficiente y por consiguiente el teorema quedará probado.

Para finalizar, expondremos otros resultados conocidos y más precisos sobre la relación asintótica del TNP y comentaremos el impacto que la hipótesis de Riemann tendría sobre estos resultados en caso de que fuera cierta.

# Capítulo 1

## ¿Por qué la función $\zeta$ ?

### 1.1. Suma recíproca de los números primos

La serie armónica se define como la suma formal ordenada de los recíprocos de los números naturales,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$$

Su divergencia es un resultado clásico y se deduce de la desigualdad

$$\log(N + 1) = \int_1^{N+1} \frac{dt}{t} = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}. \quad (1.1)$$

Ahora, si consideramos esta suma infinita pero suprimimos los términos en donde el denominador es un número compuesto, nos queda la suma de los recíprocos de los números primos,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$$

Euler demostró en 1737 la divergencia de esta serie y así ciertamente explicó que aun siendo números cada vez menos frecuentes, mantenían un comportamiento bastante “denso” entre los números naturales. De hecho, es un comportamiento más “denso” que el de los cuadrados perfectos, cubos, potencias cuartas, etc<sup>1</sup>. Este primer resultado es el preámbulo de un tema que ahondaremos en el último capítulo sobre la distribución de los números primos.

**Teorema 1.1.1.** *La suma  $\sum_p 1/p$ , donde  $p$  recorre los números primos, es divergente a más infinito.*

---

<sup>1</sup>Este comportamiento se deduce del hecho de que las series  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-m}$  son convergentes para  $m > 1$ . En particular,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$ . Véase la Proposición 1.2.1 más adelante

*Demostración.* Sea  $N \in \mathbb{N}$  y sea  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(N)$  definido por

$$\mathcal{N} = \{n \in \mathbb{N} : \text{si } p \mid n \text{ con } p \text{ primo, entonces } p \leq N\}. \quad (1.2)$$

Esto es,  $n \in \mathcal{N}$  si y sólo si  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$  para algunos exponentes  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$  con  $i = 1, 2, \dots, r$  y donde  $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_r \leq N$  son los números primos menores o iguales que  $N$ .

Veamos que se verifica

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n} = \prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots\right) = \prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right). \quad (1.3)$$

En efecto, cuando multiplicamos las series de números reales positivos entre sí<sup>2</sup>, estamos tomando de cada paréntesis un único término de la forma  $1/p_i^{a_i}$  para algún  $a_i \geq 0$  y multiplicándolos todos entre sí hasta obtener un elemento de la forma  $\frac{1}{n} = \frac{1}{p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_r^{a_r}}$ .

Este entero  $n$  es siempre un elemento de  $\mathcal{N}$  y por lo tanto un sumando del miembro izquierdo de (1.3).

Recíprocamente, por el *Teorema Fundamental de la Aritmética*, todo  $n \in \mathcal{N}$  puede factorizarse de la forma  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \cdots p_r^{a_r}$  con  $a_i = 0$  en caso de que  $p_i$  no sea factor primo de  $n$ . Así, el 1 del miembro izquierdo es el producto de los  $r$  unos de los paréntesis del miembro derecho y en general, cada  $1/n$  con  $n \in \mathcal{N}$ , es el resultado de multiplicar el término  $(a_1 + 1)$ -ésimo del primer paréntesis con el  $(a_2 + 1)$ -ésimo del segundo y así sucesivamente hasta el  $(a_r + 1)$ -ésimo del  $r$ -ésimo paréntesis.

Finalmente, la unicidad en la factorización en primos de los enteros hace que cada término del miembro izquierdo de la suma aparezca una única vez a partir del producto en el miembro derecho. Por tanto, la igualdad es clara.

Ahora, cada paréntesis del miembro derecho en la igualdad (1.3) es una serie geométrica convergente que puede expresarse en forma de su suma,  $(1 - 1/p)^{-1}$ . Queda entonces  $\sum_{n \in \mathcal{N}} 1/n = \prod_{p \leq N} (1 - 1/p)^{-1}$ .

Notemos que si  $n \leq N$ , entonces todos los divisores primos  $p$  de  $n$  satisfacen  $p \leq n \leq N$  y por ende  $n \in \mathcal{N}$ . Esto es,  $\{1, 2, \dots, N\} \subset \mathcal{N}$ . Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n} = \prod_{p \leq N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}. \quad (1.4)$$

<sup>2</sup>Dadas dos series infinitas  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  y  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ , definimos su *producto de Cauchy* por  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  donde  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Además, se comprueba que si las series son absolutamente convergentes, entonces  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$ . Este resultado se extiende de manera inmediata para una cantidad finita de series absolutamente convergentes.

De este resultado y de la cota inferior (1.1), tomando logaritmos a cada lado de la desigualdad, se obtiene

$$\log(\log(N+1)) \leq \sum_{p \leq N} -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq N} \left(-\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\right).$$

La serie de Taylor del logaritmo natural centrada en el cero viene dada por la expresión

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1. \quad (1.5)$$

Si  $0 < x < 1$ , se cumple la desigualdad

$$x \leq -\log(1-x) = \int_{1-x}^1 \frac{dt}{t} \leq \frac{x}{1-x} \implies 0 \leq -\log(1-x) - x \leq \frac{x^2}{1-x}.$$

De esta manera, para  $x = 1/p$  con  $p$  primo, se consigue

$$0 \leq -\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \leq \frac{(1/p)^2}{1-1/p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Sumando para todos los primos  $p \leq N$ , se deduce

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{p \leq N} \left(-\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p}\right) &\leq \sum_{p \leq N} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = \\ &= \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{N} < 1. \end{aligned}$$

Finalmente, haciendo  $N \rightarrow \infty$  en  $\log(\log(N+1)) < \sum_{p \leq N} 1/p + 1$ , se concluye la divergencia de  $\sum_p 1/p$ .  $\square$

## 1.2. Definición y convergencia de $\zeta$

En la demostración del teorema anterior hemos hecho uso de la identidad (1.4) donde relacionamos una suma de números naturales con un producto de números primos menores o iguales que una cantidad fija  $N$ .

De manera más general, si ahora consideramos los naturales  $n$  y primos  $p$  en (1.4) pero elevados a un cierto exponente  $s$ , argumentando igual que antes, se consigue

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - 1/p^s}. \quad (1.6)$$

Esta identidad motiva la definición de la función  $\zeta$ ; ya que eligiendo convenientemente el exponente  $s$ , vamos a ver que haciendo  $N \rightarrow \infty$  en (1.6), se consigue una representación alternativa para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  como producto infinito recorriendo *todos* los números primos.

**Definición 1.2.1.** La función  $\zeta$  se define por

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(s) > 1$ .

En lo que sigue, para  $s \in \mathbb{C}$  usaremos la notación  $s = \sigma + it$  donde  $\sigma, t \in \mathbb{R}$  representarán la parte real e imaginaria de  $s$  respectivamente.

Nótese que  $n^s = n^{\sigma+it}$  con  $n^{it} = e^{it \log n}$ . Como  $|e^{it \log n}| = 1$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$|n^s| = |n^\sigma| \cdot |e^{it \log n}| = |n^\sigma| = n^\sigma, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (1.7)$$

A continuación comprobamos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  converge sobre la región de definición de  $\zeta(s)$  para ver que es una aplicación bien definida.

**Proposición 1.2.1** (Convergencia en variable real). *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$  converge si y sólo si  $\sigma > 1$ . Asimismo, cuando  $\sigma > 1$ , se cumple*

$$\frac{1}{\sigma-1} \leq \zeta(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma-1} + 1.$$

*Demostración.* La divergencia ya está probada para  $\sigma = 1$  y por comparación la serie también es divergente cuando  $\sigma < 1$ . Queda mostrar que para  $\sigma > 1$  converge.

Sea  $\sigma > 1$ . La desigualdad  $\frac{1}{(n+1)^\sigma} \leq \int_n^{n+1} \frac{du}{u^\sigma} \leq \frac{1}{n^\sigma}$  válida para cada  $n \in \mathbb{N}$  nos lleva a que sumando sobre  $1 \leq n \leq N-1$ , se tiene

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{(n+1)^\sigma} \leq \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^\sigma}.$$

En vez de considerar a la integral acotada por sumas, arreglemos la expresión para acotar la suma por integrales,

$$\frac{N^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \frac{1}{N^\sigma} = \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} + \frac{1}{N^\sigma} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\sigma} \leq 1 + \int_1^N \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{N^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}.$$

Para  $N \rightarrow \infty$ , se obtiene la convergencia y acotaciones enunciadas.  $\square$

En consecuencia de este resultado, y notando que  $\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}$ , tenemos que nuestra serie converge absolutamente si y solo si  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 1$ . Denotemos por  $\Omega_1$  a este semiplano de convergencia absoluta de la serie, i.e.  $\Omega_1 := \{s = \sigma + it : \sigma > 1\}$ .

**Observación 1.2.1.** La convergencia absoluta de una serie es condición suficiente para su convergencia, pero el recíproco no es cierto en general. Una serie puede converger pero no hacerlo absolutamente. De esta manera, resulta natural preguntarse a ver si  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  admite alguna región de convergencia mayor que  $\Omega_1$ .

La respuesta a esta pregunta es que la serie en cuestión converge si y solamente si lo hace absolutamente. No obstante, la argumentación necesaria para justificar la divergencia en el semiplano cerrado  $\sigma \leq 1$  no es evidente. De hecho, el caso  $\sigma < 1$  se justifica por las propiedades de un tipo de series más generales en las que se incluye  $\zeta$ , llamadas *series de tipo Dirichlet*, pero en las que no entraremos en este trabajo. Asimismo, el caso  $s = 1$  ya está probado mientras que cuando  $\sigma = 1$  y  $t \neq 0$ , la demostración requiere de técnicas analíticas más avanzadas.

### 1.3. Producto de Euler

Llamamos *producto infinito* de una sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  al producto formal ordenado

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots .$$

Si la sucesión de productos parciales  $\{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a un límite distinto de cero, digamos  $P \neq 0$ , entonces decimos que el producto infinito *converge a  $P$* . Si en cambio, un número finito de factores  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k} \in \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son iguales a 0 y el producto infinito obtenido suprimiendo dichos factores converge a un valor distinto de cero, entonces diremos que el producto infinito *converge a 0*. En caso contrario, diremos que el producto es *divergente*.

**Proposición 1.3.1.** *Si  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 1$ , entonces el producto  $\prod_p (1 - 1/p^s)^{-1}$ , donde  $p$  recorre los números primos, es convergente y distinto de cero.*

*Demostración.* Sea  $S_k = \sum_{n=1}^k \log a_n$  con  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ . Entonces  $e^{S_k} = \prod_{n=1}^k a_n$ . De aquí se sigue que si la serie converge, entonces el producto converge a un número no nulo y la suma es un logaritmo del producto. Basta entonces demostrar la convergencia de  $\sum_p \log(1 - 1/p^s)^{-1}$ .

Para ello, consideramos la expansión en serie de Taylor del logaritmo natural en su vertiente compleja y así reescribimos

$$-\sum_p \log \left( 1 - \frac{1}{p^s} \right) = \sum_p \left( \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3} \frac{1}{p^{3s}} + \cdots \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}.$$

Notamos además que si  $p$  es un número primo ( $p \geq 2$ ), entonces se tiene la desigualdad  $(1 - 1/p)^{-1} \leq 2$ . El siguiente desarrollo prueba la convergencia

absoluta de la serie y por consiguiente concluye la demostración:

$$\begin{aligned}
\sum_p \left| \log \left( 1 - \frac{1}{p^\sigma} \right)^{-1} \right| &\leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{1}{mp^{m\sigma}} \right| \leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{p^{m\sigma}} = \\
&= \sum_p \frac{1}{p^\sigma} + \sum_p \left( \frac{1}{p^{2\sigma}} \left( 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \right) \right) = \\
&= \sum_p \frac{1}{p^\sigma} + \sum_p \left( \frac{1}{p^{2\sigma}} \cdot \frac{1}{1 - 1/p} \right) \leq \sum_p \frac{1}{p^\sigma} + 2 \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} = \zeta(\sigma) + 2 \zeta(2\sigma) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Los productos infinitos indexados sobre los números primos son conocidos como *productos de Euler* y en particular, el producto anterior es el producto de Euler por excelencia. Veamos finalmente la equivalencia entre este producto infinito y la función  $\zeta$ .

**Teorema 1.3.2** (Equivalencia entre el producto de Euler y la función  $\zeta$ ).  
Si  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 1$ , entonces se satisface la igualdad

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s}, \quad (1.8)$$

con  $p$  recorriendo los números primos.

*Demostración.* Sean  $N \in \{2, 3, \dots\}$  y  $\mathcal{N}$  definido igual que antes y consideremos la identidad  $\sum_{n \in \mathcal{N}} n^{-s} = \prod_{p \leq N} (1 - 1/p^s)^{-1}$ . Como  $\{1, 2, \dots, N\} \subset \mathcal{N}$ , podemos escribir

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \prod_{p \leq N} \frac{1}{1 - 1/p^s} \right| = \left| - \sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n \geq N+1}} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n \geq N+1}} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Así, la desigualdad  $\frac{1}{n^\sigma} \leq \int_{n-1}^n \frac{du}{u^\sigma}$  implica

$$\sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^\sigma} \leq \int_N^\infty \frac{du}{u^\sigma} = \frac{1}{(\sigma - 1)N^{\sigma-1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Por consiguiente,  $\left| \zeta(s) - \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} \right| = 0$ . □

**Observación 1.3.1.** Puesto que el producto de Euler converge a un valor no nulo en  $\Omega_1$ , de la igualdad (1.8) se deduce que  $\zeta$  no posee ceros en el semiplano  $\sigma > 1$ .

## Capítulo 2

# Función $\zeta$ de Riemann

En el capítulo anterior habíamos definido  $\zeta$  sobre un subconjunto propio de  $\mathbb{C}$ . No contentos con restringirnos a este semiplano, decidimos ampliar de manera “natural” su dominio sobre “todo” el plano complejo.

### 2.1. Propiedades analíticas

En el análisis complejo uno de los resultados más importantes es aquel que relaciona la diferenciabilidad de las funciones complejas, la *holomorfía*, con sus representaciones en series de potencias, la *analiticidad*. De hecho, se tiene que son conceptos equivalentes. Es decir, una función es holomorfa en un punto si y solo si es analítica en dicho punto.

El siguiente resultado sobre convergencia uniforme de sucesiones de funciones holomorfas nos permitirá garantizar la analiticidad de  $\zeta(s)$ .

**Lema 2.1.1.** *Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones analíticas  $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  con  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto. Supongamos que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en cada compacto contenido en  $\Omega$  a una función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces  $f$  es analítica y la sucesión de derivadas  $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en cada compacto contenido en  $\Omega$  a la función  $f'$ .*

*Demostración.* Como  $f_n$  son analíticas en  $\Omega$ , por la *Fórmula Integral de Cauchy*<sup>1</sup>,  $f_n(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(s)}{s-s_0} ds$  donde  $D$  es cualquier disco compacto contenido en  $\Omega$ ,  $\partial D$  su frontera positivamente orientada y  $s_0$  un punto interior arbitrario de  $D$ . Por la convergencia uniforme, podemos pasar al límite bajo el signo integral y así obtener  $f(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{s-s_0} ds$ ; lo que se traduce en que  $f$  es analítica en  $s_0$ .

---

<sup>1</sup>**Fórmula Integral de Cauchy.** Sea  $\gamma$  una curva cerrada simple sobre el plano complejo, orientada positivamente, y sea  $\Omega$  el interior de  $\gamma$ . Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $z_0 \in \Omega$ , entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \quad n \geq 0.$$

Para las derivadas,  $f'_n(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{(s-s_0)^2} ds$  y  $f'(s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(s)}{(s-s_0)^2} ds$ . Si llamamos  $d > 0$  al diámetro de  $D$ , entonces se tiene  $|s - s_0|^2 \leq d^2$  y  $\text{long}(\partial D) = \pi d$ . Así,

$$|f'_n(s_0) - f'(s_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D} \frac{f_n(s) - f(s)}{(s-s_0)^2} ds \right| \leq \frac{1}{2d} \sup_{s \in \partial D} |f_n(s) - f(s)|.$$

Como la elección del disco  $D$  y  $s_0 \in D^\circ$  es arbitraria,  $\{f'_n\} \rightarrow f'$  uniformemente en cada compacto contenido en  $\Omega$ .  $\square$

**Proposición 2.1.2.** *La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  converge absoluta y uniformemente sobre cada compacto contenido en  $\Omega_1$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un compacto contenido en  $\Omega_1$ . Entonces existe  $\delta = \delta(K) > 1$  tal que  $\sigma \geq \delta$  para todo  $s \in K$ . Sea  $M_n = n^{-\delta}$ . Entonces  $M_n \leq |n^{-s}| = n^{-\sigma}$  en  $K$  por la elección de  $\delta$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge por la Proposición 1.2.1. Aplicando el *Criterio de Weierstrass*<sup>2</sup>, concluimos la demostración.  $\square$

Aplicando este resultado al lema anterior, deducimos la analiticidad de  $\zeta(s)$  cuando  $\sigma > 1$  y además

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^{-s})}{ds} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(e^{-s \log n})}{ds} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}. \quad (2.1)$$

## 2.2. Función Factorial

Euler extendió la función factorial  $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$  de los números naturales a todos los reales mayores que  $-1$  observando que en

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

la integral del miembro derecho converge también para dichos valores<sup>3</sup>. En consecuencia, Gauss introdujo la notación

$$\Pi(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^s dx, \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>**Criterio de Weierstrass.** Sean  $D \subset \mathbb{C}$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Supongamos que existe una sucesión  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de números reales no negativos tales que  $|f_n(s)| \leq M_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y todo  $s \in D$ . Si la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s)$  converge absoluta y uniformemente en  $D$ .

<sup>3</sup>Originalmente Euler escribió la integral en términos de  $n! = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^n dy$ .

como extensión de  $n!$  para todos los números complejos  $s = \sigma + it$  en el semiplano  $\sigma > -1$ . Además, existe otra representación de  $\Pi(s)$  también conocida por Euler dada por la expresión

$$\Pi(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N}{(s+1)(s+2)(s+3) \cdots (s+N)} (N+1)^s. \quad (2.3)$$

Esta fórmula es válida para todo  $s$  donde  $\Pi(s)$  estaba definida originalmente ( $\sigma > -1$ ); pero además, puede comprobarse que el límite anterior existe para *todos* los valores de  $s$  complejos tales que el denominador sea distinto de cero. Además, (2.3) es una función analítica sobre el plano complejo, no se anula en ningún punto y presenta polos simples en los enteros negativos. En otras palabras, (2.3) extiende de manera “natural” la definición de  $\Pi(s)$  sobre casi todo el plano complejo.

Enunciamos a continuación los siguientes resultados sobre la función factorial que serán de utilidad más adelante:

$$\Pi(s) = s \Pi(s-1), \quad (2.4)$$

$$\frac{\pi^s}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \sin(\pi s), \quad (2.5)$$

$$\Pi(s) = 2^s \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \Pi\left(\frac{s-1}{2}\right) \pi^{-1/2}. \quad (2.6)$$

La identidad (2.4) es la llamada *ecuación funcional de la función factorial* que junto con  $\Pi(0) = 1$  proporciona  $\Pi(n) = n!$ . La identidad (2.5) es esencialmente la *fórmula producto del seno* y a (2.6) se la conoce como *fórmula de Legendre*.

Para consultar los aspectos técnicos de la construcción y propiedades de la función  $\Pi$  pueden consultarse [1] (p. 145-157) o [2] (p. 421-425).

## 2.3. Prolongación analítica

Otro excelente resultado del análisis complejo es el *Principio de Prolongación Analítica*. Este establece que bajo unas condiciones mínimas, si una función analítica puede ser prolongada analíticamente a un dominio mayor, entonces esta extensión es única.

**Teorema** (Principio de Prolongación Analítica). *Sea  $\Omega$  un abierto conexo en  $\mathbb{C}$  y  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfas. Si  $f$  y  $g$  coinciden sobre un subconjunto de  $\Omega$  con un punto de acumulación, entonces  $f$  y  $g$  coinciden sobre todo  $\Omega$ .*

Es interesante remarcar que Riemann nunca hablaba explícitamente de la prolongación analítica de la función  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  más allá del semiplano  $\Omega_1$ . Sin embargo, contemplaba la idea de encontrar una fórmula que fuera “válida para todo  $s$ ”. Esto significa que él veía el problema en términos más

análogos a encontrar una fórmula como la de (2.3) para la función factorial antes que una extensión analítica región a región. La visión de extensión analítica mediante cadenas de discos y series de potencias convergentes en cada disco procede de Weierstrass y es ciertamente antitética con la filosofía Riemanniana de que las funciones analíticas fueran tratadas globalmente y no localmente en términos de series de potencias.

Riemann obtiene la fórmula para  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  válida sobre  $\mathbb{C}$  como sigue:

**Proposición 2.3.1.** *Si  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 1$ , entonces se cumple*

$$\Pi(s-1)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx.$$

*Demostración.* Veamos primero la igualdad en el caso real ( $s = \sigma$ ). Sea  $u = nx$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$\Pi(\sigma-1) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\sigma-1} du = \int_0^{\infty} e^{-nx} (nx)^{\sigma-1} n dx = n^{\sigma} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{\sigma-1} dx,$$

que implica

$$\frac{\Pi(\sigma-1)}{n^{\sigma}} = \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{\sigma-1} dx.$$

Sumando para todos los  $n \in \mathbb{N}$ , resulta

$$\Pi(\sigma-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{\sigma-1} dx, \quad (2.7)$$

donde ya sabemos que el miembro izquierdo converge cuando  $\sigma > 1$ . Aplicando el *Teorema de Convergencia Monótona*<sup>4</sup>, garantizamos el intercambio de sumatorio e integral y así conseguimos

$$\Pi(\sigma-1)\zeta(\sigma) = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} x^{\sigma-1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\sigma-1}}{e^x-1} dx, \quad \sigma > 1, \quad (2.8)$$

puesto que  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}$  cuando  $x > 0$ .

Nos queda mostrar la igualdad cuando  $s$  no es real. Como  $\Pi(s-1)\zeta(s)$  es analítica en  $\sigma > 1$ , basta mostrar que la integral  $\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1} dx$  es una función holomorfa de  $s$  en  $\Omega_1$  y por prolongación analítica, la igualdad será cierta en todo el semiplano.

<sup>4</sup>**Teorema de Convergencia Monótona.** Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión creciente de funciones reales no negativas definidas sobre un conjunto medible  $X$ . Supongamos además que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a la función límite  $f$ . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \int_X f.$$

Consideremos la región  $1 + \delta \leq \sigma \leq c$  donde  $\delta > 0$  y  $c > 1$  y escribamos

$$\int_0^\infty \left| \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} \right| dx \leq \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} dx = \left( \int_0^1 + \int_1^\infty \right) \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} dx.$$

Notamos que  $x^{\sigma-1} \leq x^\delta$  para  $0 \leq x \leq 1$ ;  $x^{\sigma-1} \leq x^{c-1}$  para  $x \geq 1$  y que  $e^x - 1 \geq x$  cuando  $x \geq 0$ . Entonces, que para cada  $1 + \delta \leq \sigma \leq c$ , se cumple

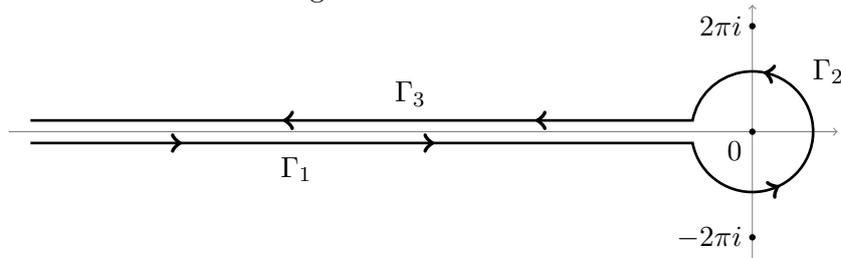
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} dx &\leq \int_0^1 \frac{x^\delta}{e^x - 1} dx \leq \int_0^1 x^{\delta-1} dx = \frac{1}{\delta}, \\ \int_1^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{e^x - 1} dx &\leq \int_1^\infty \frac{x^{c-1}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^\infty \frac{x^{c-1}}{e^x - 1} dx = \Pi(c-1)\zeta(c). \end{aligned}$$

Esto muestra que el integrando del enunciado converge uniformemente en cada banda de la forma  $1 + \delta \leq \sigma \leq c$  con  $\delta > 0$  y  $c > 1$  y por ende, representa a una función analítica sobre el semiplano  $\Omega_1$ .  $\square$

La función factorial tiene una prolongación *meromorfa* en todo el plano complejo (i.e. holomorfa en todo  $\mathbb{C}$  excepto por una cantidad de puntos aislados). Ahora mostraremos que a la integral anterior le ocurre lo mismo y así obtendremos la prolongación analítica de la función  $\zeta$ .

Para ello, consideramos el contorno  $\Gamma$  que “rodea” al eje real negativo como se muestra en Figura 2.1. El contorno  $\Gamma$  está compuesto de tres partes:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ . La curva  $\Gamma_2$  es una circunferencia de radio  $0 < \rho < 2\pi$  en el origen de coordenadas, positivamente orientada y  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  son los “bordes” inferior y superior de un “corte” en el plano a través del eje real negativo.

Figura 2.1: Contorno  $\Gamma$



Usaremos las parametrizaciones  $z = \rho e^{i\theta}$  con  $\theta \in (-\pi, \pi)$  sobre  $\Gamma_2$ ,  $z = re^{-\pi i}$  sobre  $\Gamma_1$  y  $z = re^{\pi i}$  sobre  $\Gamma_3$  donde  $r \in (\rho, \infty)$ .

**Teorema 2.3.2.** *La función definida por la integral de contorno*

$$I(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{z^s e^z}{1 - e^z} dz$$

*es entera (i.e. holomorfa sobre todo el plano complejo) y en el semiplano  $\Omega_1$  se cumple la igualdad*

$$\pi I(s-1) = \sin(\pi s) \Pi(s-1) \zeta(s).$$

*Demostración.* Primero vamos a ver que la función  $I : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es entera. La integral sobre  $\Gamma_2$  es claramente entera. Para las otras dos, consideramos un disco compacto arbitrario  $|s| \leq M$  y probaremos que las integrales a lo largo de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  convergen uniformemente en dicho disco. Como el integrando es una función holomorfa de  $s$ , esto mostrará que  $I(s)$  es entera.

Si  $r \geq 1$ , sobre  $\Gamma_1$  se tiene

$$|z^s| = \left| e^{s \log z} \right| = \left| e^{s(\log |z| - i\pi)} \right| = \left| e^{s \log r} \right| \left| e^{-i\pi(\sigma + it)} \right| = |r^s| e^{t\pi} \leq r^M e^{\pi M},$$

para cada  $|s| \leq M$ . De manera análoga, sobre  $\Gamma_3$  se cumple

$$|z^s| = |r^s| \left| e^{i\pi(\sigma + it)} \right| = |r^s| e^{-t\pi} \leq r^M e^{\pi M}, \quad |s| \leq M.$$

Ahora usamos que  $e^r - 1 > e^r/2$  siempre que  $r > \log 2$  y así, cuando  $r \geq 1$ , sobre  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_3$  se verifica la desigualdad

$$\left| \frac{z^s e^z}{1 - e^z} \right| \leq \frac{r^M e^{\pi M} e^{-r}}{1 - e^{-r}} = \frac{r^M e^{\pi M}}{e^r - 1} < \frac{2r^M e^{\pi M}}{e^r} = A r^M e^{-r}, \quad |s| \leq M,$$

donde  $A$  es una constante que depende de  $M$  pero no de  $r$ .

Cuando  $\rho \leq r \leq 1$ , se tiene  $|z^s| \leq e^{\pi M}$  sobre  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_3$  y en consecuencia se tiene la desigualdad

$$\left| \frac{z^s e^z}{1 - e^z} \right| \leq \frac{e^{\pi M}}{e - 1} \leq e^{\pi M}, \quad |s| \leq M.$$

Por consiguiente, cuando  $i = 1, 3$ , la integral se acota por

$$\int_{\Gamma_i} \left| \frac{z^s e^z}{1 - e^z} \right| dr \leq \int_{\rho}^1 e^{\pi M} + A \int_1^{\infty} r^M e^{-r} dr \leq (1 - \rho)e^{\pi M} + A \Pi(M),$$

para cada  $|s| \leq M$ . Como la elección del disco es arbitraria, concluimos que  $I(s)$  es una función entera.

Veamos ahora la igualdad del enunciado. Denotemos por  $g(z) := \frac{e^z}{1 - e^z}$ . Entonces,

$$2\pi i I(s - 1) = \int_{\Gamma} z^{s-1} g(z) dz.$$

Sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  sabemos que  $g(z) = g(-r)$ . Además, en  $\Gamma_1$  se tiene

$$z^{s-1} = e^{(s-1) \log z} = e^{(s-1)(\log r - i\pi)} = r^{s-1} e^{-(s-1)i\pi} = -r^{s-1} e^{-\pi i s}.$$

De manera análoga, sobre  $\Gamma_3$  se verifica  $z^{s-1} = e^{(s-1)(\log r + i\pi)} = -r^{s-1} e^{\pi i s}$ .

Combinando estos resultados y teniendo en cuenta que  $dz = -dr$  sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  y que  $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$  sobre  $\Gamma_2$ , se consigue

$$\begin{aligned}
 2\pi i I(s-1) &= \int_{\infty}^{\rho} -r^{s-1} e^{-\pi i s} g(-r)(-dr) + && \text{(sobre } \Gamma_1) \\
 &+ i \int_{-\pi}^{\pi} \rho^{s-1} e^{(s-1)i\theta} \rho e^{i\theta} g(\rho e^{i\theta}) d\theta + && \text{(sobre } \Gamma_2) \\
 &+ \int_{\rho}^{\infty} -r^{s-1} e^{\pi i s} g(-r)(-dr) = && \text{(sobre } \Gamma_3) \\
 &= (-e^{-\pi i s} + e^{\pi i s}) \int_{\rho}^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + i \rho^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{s i \theta} g(\rho e^{i\theta}) d\theta = \\
 &= 2i \sin(\pi s) \int_{\rho}^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr + i \rho^s \int_{-\pi}^{\pi} e^{s i \theta} g(\rho e^{i\theta}) d\theta.
 \end{aligned}$$

Dividimos entre  $2i$  y resulta una expresión de la forma

$$\pi I(s-1) = \sin(\pi s) I_1(s, \rho) + I_2(s, \rho). \quad (2.9)$$

Por la Proposición 2.3.1, se consigue

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} I_1(s, \rho) = \int_0^{\infty} r^{s-1} g(-r) dr = \Pi(s-1) \zeta(s).$$

Ahora veamos que  $I_2(s, \rho) \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow 0$ . Para ello, notamos que  $g(z)$  es holomorfa en el disco  $|z| < 2\pi$  salvo en  $z = 0$  donde presenta un polo simple. Entonces  $z g(z)$  es holomorfa en  $|z| \leq 2\pi$  y en particular está acotada. Sea  $D$  la constante tal que  $|g(z)| \leq D/|z|$  para  $0 < z < 2\pi$ . Así, cuando  $|z| = \rho$ , se consigue

$$|I_2(s, \rho)| \leq \frac{\rho^\sigma}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-t\theta} \left( \frac{D}{\rho} \right) d\theta \leq D\pi e^{\pi|t|} \rho^{\sigma-1} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Retomando la expresión (2.9), finalmente se deduce

$$\pi I(s-1) = \sin(\pi s) \Pi(s-1) \zeta(s), \quad s \in \Omega_1. \quad (2.10)$$

□

Este resultado consigue que, manipulando suficientemente la expresión (2.10), obtengamos una reformulación equivalente para  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ .

En efecto, por las propiedades (2.4) y (2.5) de la función factorial, se consigue

$$\sin(\pi s) = \frac{\pi}{\Pi(s-1)\Pi(-s)}, \quad s \neq 2, 3, 4, \dots \quad (2.11)$$

Si sustituimos (2.11) en (2.10), se obtiene

$$\pi I(s-1) = \frac{\pi}{\Pi(s-1)\Pi(-s)} \Pi(s-1)\zeta(s), \quad s \in \Omega_1 \setminus \{2, 3, 4, \dots\},$$

donde podemos cancelar y reordenar los términos de la expresión pues nos encontramos sobre valores de  $s$  no conflictivos. Entonces,

$$\zeta(s) = \Pi(-s)I(s-1), \quad s \in \Omega_1 \setminus \{2, 3, 4, \dots\}. \quad (2.12)$$

**Observación 2.3.1.** Si analizamos el comportamiento de  $\Pi(s)I(s-1)$  sobre el plano complejo, observamos que esta es analítica en  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  por los polos simples de  $\Pi(-s)$  en  $s = 1, 2, 3, 4, \dots$

No obstante, si  $s_0 \in \{2, 3, 4, \dots\}$ , al ser  $\zeta(s)$  analítica en  $\Omega_1$ , tenemos que  $\lim_{s \rightarrow s_0} \zeta(s)$  existe y es igual a  $\zeta(s_0)$ . De esta forma, como  $\{2, 3, 4, \dots\}$  son puntos aislados sobre  $\Omega_1$ , de (2.12) deducimos

$$\zeta(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \Pi(-s)I(s-1).$$

En otras palabras, las singularidades de  $\Pi(-s)I(s-1)$  en  $\{2, 3, 4, \dots\}$  son evitables y por consiguiente, pueden ser subsanadas estableciéndose el valor del límite correspondiente en cada caso. De hecho, en la Observación 2.3.2 veremos que  $I(s-1)$  presenta ceros en  $\{2, 3, 4, \dots\}$  por los polos simples de  $\Pi(-s)$ .

**Nota.** En lo que sigue, cuando tratemos con funciones con singularidades evitables aisladas, al formar parte de igualdades como las de (2.12), sobreentenderemos que la igualdad también se mantiene en dichas situaciones, tomando el valor de límite correspondiente.

**Definición 2.3.1.** Llamamos *función  $\zeta$  de Riemann* a la función meromorfa sobre el plano complejo y definida por

$$\zeta(s) := \Pi(-s)I(s-1), \quad s \neq 1. \quad (2.13)$$

El siguiente Teorema reúne las propiedades analíticas de la misma.

**Teorema 2.3.3.** *La función  $\zeta(s)$  anteriormente definida es analítica para todo  $s \neq 1$ . Además, contiene un polo simple con residuo igual a 1 en  $s = 1$ .*<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Si  $z_0$  es una singularidad aislada de una función holomorfa  $f$ , se llama *residuo* de  $f$  en  $z_0$ , y se representa por  $\text{Res}_{z_0} f(z)$ , al coeficiente  $a_{-1}$  de la serie de Laurent de  $f$  en  $z_0$ . Si además  $z_0$  es un polo de orden  $m$ , entonces

$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z-z_0)^m f(z) \right].$$

*Demostración.* La holomorfía de  $\zeta$  es clara por construcción. Veamos que hay un polo simple en  $s = 1$  con residuo igual a 1.

Si  $s = k$  es un entero, el integrando en  $I(k)$  toma los mismos valores sobre  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  y por lo tanto, las integrales a lo largo de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_3$  se anulan quedando únicamente la integral sobre  $\Gamma_2$  (véase la demostración del Teorema 2.3.2). Por consiguiente,

$$I(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{z^k e^z}{1 - e^z} dz = \operatorname{Res}_0 \frac{z^k e^z}{1 - e^z}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.14)$$

Como  $\frac{e^z}{1 - e^z}$  presenta un polo simple en  $z = 0$ , cuando  $k = 0$ , se tiene  $I(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^z}{1 - e^z} = -1$ . Finalmente se deduce

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 \zeta(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} (s - 1) \Pi(-s) I(s - 1) = \\ &= -I(0) \lim_{s \rightarrow 1} (1 - s) \Pi(-s) = \lim_{s \rightarrow 1} \Pi(1 - s) = 1. \end{aligned}$$

□

**Observación 2.3.2.** La expresión (2.14) superior implica que  $I(k) = 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . En efecto, si  $k \geq 1$ , entonces  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{k+1} e^z}{1 - e^z} = 0$ .

## 2.4. Ecuación funcional

Así como en la función factorial se cumple la ecuación  $\Pi(s) = s \Pi(s - 1)$  para cada  $s$  en donde la función tiene sentido ( $s \neq -1, -2, -3, \dots$ ), el desarrollo siguiente tiene como propósito obtener una ecuación funcional para  $\zeta$ .

Comenzamos con un resultado técnico auxiliar.

**Lema 2.4.1.** Sea  $\Omega(\rho)$  el abierto que resulta de eliminar del plano complejo los círculos de centro  $2n\pi i$  para cada  $n \in \mathbb{Z}$  y radio  $0 < \rho < \pi$ . Entonces, la función  $g(z) = e^z / (1 - e^z)$  está acotada en  $\Omega(\rho)$ .

*Demostración.* Designemos por  $x$  e  $y$  a las partes real e imaginaria de  $z \in \mathbb{C}$  respectivamente. Sea

$$Q(\rho) = \{z \in \mathbb{C} : |x| \leq 1, |y| \leq \pi, |z| \geq \rho\}.$$

Claramente  $Q(\rho)$  es un compacto en el que  $g$  es continua; luego está acotada. Como  $|g(z)| = |g(z + 2\pi i)|$ , tenemos que  $g$  está acotada en toda la “banda agujereada”

$$\{z \in \mathbb{C} : |x| \leq 1, |z - 2n\pi i| \geq \rho \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}.$$

En consecuencia, queda comprobar que la función  $g$  está acotada fuera de esta banda, es decir, cuando  $|x| > 1$ . En general,

$$|g(z)| \leq \left| \frac{e^z}{1 - e^z} \right| = \frac{e^x}{|1 - e^x|} \leq \frac{e^x}{|1 - e^x|}.$$

Si  $x > 1$ , entonces  $|1 - e^x| = e^x - 1$ , luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

Si  $x < -1$ , entonces  $|1 - e^x| = 1 - e^x$ , luego

$$|g(z)| \leq \frac{e^x}{1 - e^x} \leq \frac{1}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e - 1}.$$

□

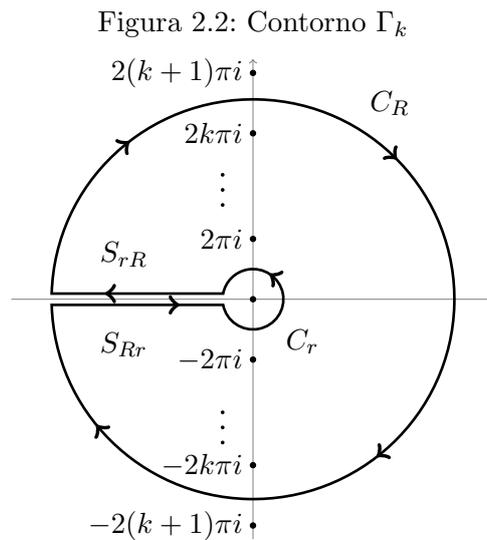
**Teorema 2.4.2** (Ecuación funcional de la función  $\zeta$  de Riemann). *Para cada número complejo  $s \neq 1$ , se cumple*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Pi(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s). \quad (2.15)$$

*Demostración.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $\Gamma_k$  la curva cerrada simple que contiene en su interior los puntos  $\pm 2n\pi i$  con  $1 \leq n \leq k$  pero que excluye a aquellos donde  $n > k$  junto con el semieje real negativo. Este contorno puede tomarse tal y como se describe a continuación.

- (i) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , sean  $C_r$  y  $C_R$  las circunferencias concéntricas centradas en el origen con radios  $0 < r < \pi$  y  $R = (2k+1)\pi$  respectivamente. Las orientaciones para cada circunferencia las consideraremos en sentido antihorario y horario respectivamente.
- (ii) Sobre el semieje real negativo consideramos los segmentos de longitud  $R - r$  que conectan las circunferencias  $C_r$  y  $C_R$ . Llamemos por  $S_{Rr}$  a aquel que se recorre de izquierda a derecha, una la circunferencia exterior con la interior, y por  $S_{rR}$  al opuesto, una la interior con la exterior.

Por construcción,  $\Gamma_k$  está orientada negativamente.



Definimos

$$I_k(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{z^s e^z}{1 - e^z} dz,$$

entendiendo que el logaritmo que define a  $z^s = e^{s \log z}$  toma parte imaginaria  $\pi$  sobre  $S_{rR}$ , pasa de  $\pi$  a  $-\pi$  por la circunferencia exterior  $C_R$ , vale  $-\pi$  en el tramo  $S_{Rr}$  y pasa de  $-\pi$  a  $\pi$  por la circunferencia interior  $C_r$ .

Veamos que cuando  $\sigma < -1$ , la integral sobre  $C_R$  tiende a 0 cuando  $N \rightarrow \infty$ . En efecto, sobre  $C_R$  tenemos  $z = Re^{i\theta}$  con  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Entonces,

$$|z^s| = R^\sigma e^{-t\theta} \leq R^\sigma e^{\pi|t|}.$$

Además, es claro que  $C_R \subset \Omega(\rho)$  para cada  $\rho < \pi$  fijo (véase el Lema 2.4.1). Por tanto, el integrando sobre  $C_R$  puede acotarse superiormente por  $AR^\sigma e^{\pi|t|}$  siendo  $A$  la cota superior de  $e^z/(1 - e^z)$ . De esta manera, si  $\sigma < -1$ , entonces

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^s e^z}{1 - e^z} dz \right| \leq (2\pi R) \cdot (AR^\sigma e^{\pi|t|}) = 2\pi AR^{\sigma+1} e^{\pi|t|} \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{k \rightarrow \infty} 0.$$

Teniendo en cuenta la definición de  $I(s)$  en el Teorema 2.3.2, se concluye

$$I(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k(s), \quad \sigma < -1.$$

Equivalentemente,

$$I(-s) = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k(-s), \quad \sigma > 1. \quad (2.16)$$

Ahora calcularemos  $I_k(-s)$  mediante el *Teorema de los Residuos*<sup>6</sup> de Cauchy. Los polos del integrando en el interior de  $\Gamma_k$  se encuentran en los puntos  $2n\pi i$  para  $-k \leq n \leq k$  y  $n \neq 0$ . Por lo tanto,

$$I_k(-s) = - \sum_{\substack{n=-k \\ n \neq 0}}^k R(n) = - \sum_{n=1}^k (R(n) + R(-n)), \quad R(n) := \operatorname{Res}_{2n\pi i} \left( \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} \right).$$

Ahora,

$$R(n) = \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} (z - 2n\pi i) \frac{z^{-s} e^z}{1 - e^z} = \left( \frac{e^{2n\pi i}}{(2n\pi i)^s} \right) \lim_{z \rightarrow 2n\pi i} \frac{z - 2n\pi i}{1 - e^z} = - \frac{e^{2n\pi i}}{(2n\pi i)^s}.$$

<sup>6</sup>**Teorema de los Residuos.** Sea  $\Omega$  un abierto en  $\mathbb{C}$  y  $f$  una función meromorfa en  $\Omega$ . Sea  $S \subset \Omega$  el conjunto de singularidades aisladas de  $f$  que suponemos finito y sea  $\Gamma$  una curva cerrada simple con traza contenida en  $\Omega$  y que no interseca a ninguna de las singularidades de  $f$  en  $\Omega$ .

Si  $S$  está contenido en el interior de  $\Gamma$ , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz = \pm \sum_{z \in S} \operatorname{Res}_z f(z),$$

donde el sumatorio se toma con signo positivo o negativo en función de si la curva está orientada positiva o negativamente respectivamente.

En consecuencia,

$$I_k(-s) = \sum_{n=1}^k \left( \frac{e^{2n\pi i}}{(2n\pi i)^s} + \frac{e^{-2n\pi i}}{(-2n\pi i)^s} \right) = \sum_{n=1}^k \left( \frac{1}{(2n\pi i)^s} + \frac{1}{(-2n\pi i)^s} \right).$$

Además, notando que  $i^{-s} = e^{-\pi i s/2}$  y  $(-i)^{-s} = e^{\pi i s/2}$ , podemos escribir

$$I_k(-s) = \left( \frac{e^{-\pi i s/2}}{(2\pi)^s} \right) \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} + \left( \frac{e^{\pi i s/2}}{(2\pi)^s} \right) \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s} = \frac{(e^{\pi i s/2} + e^{-\pi i s/2})}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s}.$$

Como  $e^{\pi i s/2} + e^{-\pi i s/2} = 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)$  y gracias al resultado (2.16), haciendo  $k \rightarrow \infty$ , se consigue

$$I(-s) = (2\pi)^{-s} 2 \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s), \quad \sigma > 1.$$

Por último, como la fórmula anterior es válida en el semiplano  $\sigma > 1$  y  $\Pi$  no presenta problemas en  $\sigma > 0$ , si multiplicamos a ambos lados de la igualdad por  $\Pi(s-1)$ , se tiene

$$\zeta(1-s) = \Pi(s-1)I(-s) = 2 \Pi(s-1) (2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s).$$

Por prolongación analítica y la definición (2.13), se tiene que la ecuación superior es válida para todo  $s \neq 0$ .<sup>7</sup> Cambiando  $s$  por  $1-s$ , finalmente se concluye

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Pi(-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad s \neq 1.$$

□

**Corolario 2.4.3** (Ceros Triviales). *Si  $\sigma < 0$ , entonces  $\zeta(s) = 0$  si y solo si  $s = -2k$  con  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Demostración.* La función  $\Pi(-s)$  no se anula en todo el plano complejo y  $\zeta(1-s)$  tampoco lo hace para  $\sigma < 0$  (véase la Observación 1.3.1). Además,  $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0$  si y solo si  $s = 2k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . □

Estos valores pares negativos en donde la función se anula “trivialmente” son conocidos como *ceros triviales* de la función  $\zeta$  y volveremos a hacer referencia a ellos en un desarrollo posterior.

El siguiente desarrollo muestra una ecuación funcional equivalente y mucho más natural que la anterior:

<sup>7</sup>De los ceros de  $I(-s)$  en  $\{-1, -2, -3, \dots\}$  se sigue que  $\cos(\pi s/2)\zeta(s)$  presenta ceros en dichos valores. Por consiguiente,  $\Pi(s-1)\cos(\pi s/2)\zeta(s)$  posee singularidades evitables en los enteros negativos.

En primer lugar, en la fórmula de Legendre (2.6) intercambiamos  $s$  por  $-s$  para conseguir

$$\sqrt{\pi} \Pi(-s) = 2^{-s} \Pi\left(\frac{-s}{2}\right) \Pi\left(-\frac{s+1}{2}\right), \quad s \neq 1, 2, 3, \dots$$

El resultado al sustituir en la ecuación funcional (2.15) queda entonces

$$\sqrt{\pi} \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} 2^{-s} \Pi\left(\frac{-s}{2}\right) \Pi\left(-\frac{s+1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Si a continuación cambiamos  $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$  por la fórmula (2.5) y simplificamos, se consigue

$$\sqrt{\pi} \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{s}{2} \pi^s \Pi\left(-\frac{s+1}{2}\right) \zeta(1-s), \quad s \neq 0, 1.$$

Por la ecuación funcional (2.4) de la función factorial, podemos escribir  $\Pi\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{1-s}{2} \Pi\left(-\frac{s+1}{2}\right)$ . Sustituyendo esta identidad en la expresión anterior y reordenando términos, se obtiene

$$\Pi\left(\frac{s}{2}\right) \frac{2}{s} \zeta(s) = \frac{2}{1-s} \Pi\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{s-\frac{1}{2}} \zeta(1-s), \quad s \neq 0, 1.$$

Finalmente, volviendo a reordenar los términos de la igualdad superior convenientemente, resulta

$$\frac{\pi^{\frac{-s}{2}}}{s} \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{\pi^{\frac{-(1-s)}{2}}}{1-s} \Pi\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad s \neq 0, 1. \quad (2.17)$$

Esta ecuación tiene la particularidad de que su miembro derecho se obtiene del izquierdo cambiando  $s$  por  $1-s$ . De esta forma, si definimos

$$\Phi(s) := \frac{\pi^{\frac{-s}{2}}}{s} \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s), \quad s \neq 0, 1,$$

entonces la ecuación funcional (2.17) se traduce en

$$\Phi(s) = \Phi(1-s). \quad (2.18)$$

## 2.5. Algunos valores de $\zeta$

Gracias a la ecuación funcional (2.15), conseguimos deducir  $\zeta(-2k) = 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Siguiendo el hilo de este resultado, en esta sección vamos a calcular expresiones particulares de la función  $\zeta$  para algunos valores enteros.

Comenzamos considerando la función analítica de variable compleja  $f(z) := \frac{e^z - 1}{z}$  cuando  $z \neq 0$  y  $f(0) := 0$ . Su desarrollo en serie de potencias centrado en el cero se hereda del de la exponencial y es tal que

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \cdots .$$

Asimismo, sobre el disco  $|z| < 2\pi$  la función es no nula y por tanto su inversa también es analítica en dicha región. Por consiguiente,  $1/f$  puede desarrollarse como serie de potencias alrededor del 0 con radio de convergencia igual a  $2\pi$ ,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k. \quad (2.19)$$

Los coeficientes  $B_k$  que aparecen en (2.19) son conocidos como *números de Bernoulli*. Para hallarlos, despejamos el denominador y expandimos en serie de potencias,

$$\begin{aligned} z &= \left( B_0 + B_1 z + \frac{B_2}{2!} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \cdots \right) \left( z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \\ &= B_0 z + \left( \frac{B_0}{2!} + B_1 \right) z^2 + \left( \frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_2}{2!} \right) z^3 + \cdots . \end{aligned}$$

Comparando el miembro derecho con el izquierdo, se deduce  $B_0 = 1$  y la fórmula de recurrencia para  $n \geq 2$ :

$$0 = \sum_{\substack{k+m=n \\ k \geq 0, m \geq 1}} \frac{B_k}{k!m!} = n! \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k.$$

Obviando el término  $n!$  y añadiendo  $B_n$  a cada lado de la igualdad, se simplifica la relación de recurrencia anterior:

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 2. \quad (2.20)$$

**Nota.** La expresión (2.20) no calcula directamente el valor de  $B_n$ . Sin embargo, resulta sencillo deducir de ella la relación  $B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

Veamos ahora la conexión entre estos coeficientes y la función  $\zeta$ . Para ello, evaluamos en  $\zeta$  los enteros no positivos y gracias a (2.14), se consigue

$$\zeta(-n) = \Pi(n) I(-n-1) = n! \operatorname{Res}_0 \left( \frac{z^{-n-1} e^z}{1-e^z} \right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (2.21)$$

Sea  $h(z) := \frac{z^{-n-1} e^z}{1 - e^z}$  para  $0 < |z| < 2\pi$  y  $h(0) := 0$ . Consideramos así la serie de Laurent centrada en  $z = 0$  de la función  $h$ ,

$$\begin{aligned} h(z) &= -z^{-n-2} e^z \frac{z}{e^z - 1} = -z^{-n-2} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) = \\ &= -z^{-n-2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = \sum_{t=-n-2}^{\infty} a_t z^t, \end{aligned}$$

donde

$$b_m = \sum_{r=0}^m \frac{B_r}{r!(m-r)!} \quad (\text{producto de Cauchy}).$$

Para conocer el valor del residuo en  $z = 0$  de  $h$ , calculamos su coeficiente  $a_{-1}$ . Fijándonos en las potencias de  $z$ , para que  $t = -1$ , se tiene que  $m = n + 1$ . Por ende, gracias a la fórmula de recurrencia (2.20),

$$\begin{aligned} a_{-1} = -b_{n+1} &= - \sum_{r=0}^{n+1} \frac{B_r}{r!(n+1-r)!} = - \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} \frac{B_r}{(n+1)!} = \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} B_r = \begin{cases} \frac{-B_{n+1}}{(n+1)!}, & \text{si } n \geq 1, \\ -1/2, & \text{si } n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Retomamos (2.21) y así se consigue

$$\zeta(0) = -1/2 \quad \text{y} \quad \zeta(-n) = \frac{-B_{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

**Observación 2.5.1.** Puesto que  $\zeta(-2k) = 0$  cuando  $k \in \mathbb{N}$ , deducimos que  $B_{2k+1} = 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Además, como  $\zeta$  no tiene más ceros en el semiplano  $\sigma < 0$ , necesariamente  $B_{2k} \neq 0$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Para hallar  $\zeta$  en los enteros pares positivos, consideramos  $s = -(2n - 1)$  con  $n \in \mathbb{N}$  en la ecuación funcional (2.15),

$$\begin{aligned} \zeta(-(2n-1)) &= 2^{-2n+1} \pi^{-2n} \Pi(2n-1) \sin\left(\frac{-(2n-1)\pi}{2}\right) \zeta(2n), \\ \frac{-B_{2n}}{2n} &= 2 (2\pi)^{-2n} (2n-1)! (-1)^n \zeta(2n). \end{aligned}$$

Despejando convenientemente, finalmente resulta

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2 (2n)!}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.23)$$

que es el caso general de las expresiones particulares  $\zeta(2) = \pi^2/6$  y  $\zeta(4) = \pi^4/90$ . Nótese que de este resultado se concluye que  $\zeta(2n) \notin \mathbb{Q}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  por ser  $\pi$  un número trascendente.

De este comportamiento regular de la función  $\zeta$  en los enteros pares positivos no se conoce un resultado análogo para los impares positivos. Sin embargo, existen ciertos resultados parciales sobre la irracionalidad de los mismos. En 1978 Apéry mostró que  $\zeta(3) = 1,202\dots$  es irracional [3] y en 2001 se probó que  $\{\zeta(2k+1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  contiene una infinidad de irracionales [4]. Por contra, aún no se conoce si  $\zeta(5)$  lo es, aunque se ha justificado que alguno de los números  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9)$  o  $\zeta(11)$  tiene que ser irracional [5].

Resumimos el desarrollo realizado en esta sección en el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.1.** *La función  $\zeta$  de Riemann toma los siguientes valores:*

- Si  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\zeta(-n) = \frac{-B_{n+1}}{n+1}$  y en particular  $\zeta(-2n) = 0$ .
- Si  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces  $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2 (2n)!}$ .

## 2.6. Ceros no triviales e hipótesis de Riemann

Riemann mejoró la ecuación funcional  $\Phi(s) = \Phi(1-s)$  eliminando los dos polos de la función  $\Phi(s)$  en  $s = 0$  y  $s = 1$ . Para ello, observamos que la expresión  $s(s-1)$  no se altera al intercambiar  $s$  por  $1-s$ . Por ende, multiplicamos a  $\Phi(s)$  por este factor y así conseguimos la función entera  $\xi$  definida por

$$\xi(s) := \pi^{-s/2} (s-1) \Pi\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s). \quad (2.24)$$

La ecuación funcional  $\Phi(s) = \Phi(1-s)$  se traduce finalmente en

$$\xi(s) = \xi(1-s). \quad (2.25)$$

La función  $\xi(s)$  no tiene ceros en el semiplano  $\sigma > 1$  y por simetría tampoco los tiene en  $\sigma < 0$ . Ahora, como  $\Pi(s/2)$  presenta polos simples en los pares negativos, los ceros de  $\zeta(s)$  en dichos valores han de ser necesariamente simples (*ceros triviales*). Además, por la Observación 1.3.1 y el Corolario 2.4.3,  $\zeta$  no presenta más ceros en los semiplanos  $\sigma < 0$  y  $\sigma > 1$ . En consecuencia, *todo cero no trivial de  $\zeta$  ha de hallarse sobre la región  $0 \leq \sigma \leq 1$ , también conocida como banda crítica de la función  $\zeta$ .*

*Los ceros no triviales de  $\zeta(s)$  coinciden en posición y orden con los ceros de  $\xi(s)$ .* En efecto,  $\xi$  no presenta ceros fuera de la banda crítica y además es inmediato comprobar que 0 y 1 no son ceros de ninguna de las dos funciones

( $\xi(0) = \xi(1) = 1/2$  y  $\zeta(0) = -1/12$ ). Así, si  $s$  es cualquier otro punto en la banda crítica, vemos que la expresión  $\pi^{-s/2} (s-1) \Pi(s/2)$  no tiene ni ceros ni polos y por lo tanto, el orden de un cero en dicha región para  $\zeta$  coincide con el de  $\xi$ . En otras palabras, calcular los ceros de  $\xi$  equivale a encontrar los ceros no triviales de  $\zeta$ .

La ecuación funcional (2.25) se caracteriza por el hecho de ser simétrica respecto al eje  $\sigma = 1/2$ . De esta forma, los ceros no triviales de  $\zeta$  se distribuyen simétricamente respecto a dicho eje dentro de la banda crítica. Además, analizando convenientemente la función  $\xi$ , puede comprobarse que  $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$ . De esta forma, sus ceros se distribuyen también simétricamente respecto al eje real. Afirmamos entonces que  $\zeta(\rho) = 0$  para algún  $\rho$  en la banda crítica si y sólo si  $\zeta(1-\rho) = \zeta(\bar{\rho}) = \zeta(\overline{1-\rho}) = 0$ .

En Noviembre de 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann publicó “Sobre el número de números primos menores que una magnitud dada”. En este artículo de tan solo ocho caras de extensión, el autor, partiendo de la función  $\zeta$ , estableció una serie de relaciones entre nuestra función y la distribución de los números primos. De hecho, si denotamos por  $\Xi(z) := \xi(\frac{1}{2} + iz)$ , Riemann declaró que “es muy probable que todas las raíces de  $\Xi$  sean reales. Sin duda, sería deseable tener una prueba rigurosa de esto, pero he dejado a un lado la investigación de tal prueba después de algunos intentos infructuosos ya que no es necesario para el objetivo inmediato de mi estudio” [6] (p. 3).

En otras palabras, Riemann afirmó que todos los ceros no triviales de  $\zeta$  (las raíces de  $\xi$ ) tienen parte real igual a un medio.

Desde entonces, nadie ha probado o encontrado un contraejemplo de esta afirmación. En 1914, Hardy demostró que  $\Xi(z)$  tiene infinitas raíces reales [7] y en 1921, junto con Littlewood, mostraron que la cantidad de ceros reales entre 0 y  $T$  es de por lo menos  $KT$ , para cierta constante positiva  $K$  y  $T$  suficientemente grande [8]. Paralelamente, en 1914, se probó que la cantidad de raíces complejas de  $\Xi(z)$  en la región  $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq T, -\varepsilon \leq \operatorname{Im} z \leq T\}$  es igual a  $\frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}$ , para cualquier  $\varepsilon > 0$ , con un error que se aproxima a cero cuando  $T \rightarrow \infty$  [9]. En cualquier caso, todas estas aproximaciones están aún lejos de lo que originalmente conjeturó Riemann.

En 1900, Hilbert añadió este enunciado a su lista de los “23 problemas no resueltos” y posteriormente, en el año 2000, el Instituto Clay de Matemáticas lo catalogó como uno de los “Millenium Prize Problems”. Se le conoce así como la *hipótesis de Riemann* y su resolución se mantiene premiada con la cantidad un millón de dólares.

Para concluir con el capítulo, adjuntamos una tabla con los 99 primeros ceros no triviales de  $\zeta$  computados con una precisión de 9 dígitos decimales [10]. Como todos estos valores verifican la hipótesis de Riemann, listamos en orden creciente las partes imaginarias positivas  $t_n$  tales que  $\zeta(1/2 \pm it_n) = 0$  para  $n \in \{1, 2, \dots, 99\}$ .

Tabla 2.1: Primeros ceros no triviales de  $\zeta$ 

$n$	$t_n$	$n$	$t_n$	$n$	$t_n$
<b>1</b>	14.134725142	<b>34</b>	111.029535543	<b>67</b>	176.441434297
<b>2</b>	21.022039639	<b>35</b>	111.874659177	<b>68</b>	178.377407776
<b>3</b>	25.010857580	<b>36</b>	114.320220915	<b>69</b>	179.916484020
<b>4</b>	30.424876126	<b>37</b>	116.226680321	<b>70</b>	182.207078484
<b>5</b>	32.935061588	<b>38</b>	118.790782866	<b>71</b>	184.874467848
<b>6</b>	37.586178158	<b>39</b>	121.370125002	<b>72</b>	185.598783677
<b>7</b>	40.918719012	<b>40</b>	122.946829294	<b>73</b>	187.228922583
<b>8</b>	43.327073281	<b>41</b>	124.256818554	<b>74</b>	189.416158656
<b>9</b>	48.005150881	<b>42</b>	127.516683880	<b>75</b>	192.026656360
<b>10</b>	49.773832478	<b>43</b>	129.578704200	<b>76</b>	193.079726603
<b>11</b>	52.970321478	<b>44</b>	131.087688531	<b>77</b>	195.265396679
<b>12</b>	56.446247697	<b>45</b>	133.497737203	<b>78</b>	196.876481840
<b>13</b>	59.347044003	<b>46</b>	134.756509753	<b>79</b>	198.015309676
<b>14</b>	60.831778525	<b>47</b>	138.116042055	<b>80</b>	201.264751943
<b>15</b>	65.112544048	<b>48</b>	139.736208952	<b>81</b>	202.493594514
<b>16</b>	67.079810529	<b>49</b>	141.123707404	<b>82</b>	204.189671803
<b>17</b>	69.546401711	<b>50</b>	143.111845808	<b>83</b>	205.394697202
<b>18</b>	72.067157674	<b>51</b>	146.000982486	<b>84</b>	207.906258887
<b>19</b>	75.704690699	<b>52</b>	147.422765342	<b>85</b>	209.576509716
<b>20</b>	77.144840069	<b>53</b>	150.053520420	<b>86</b>	211.690862595
<b>21</b>	79.337375020	<b>54</b>	150.925257612	<b>87</b>	213.347919359
<b>22</b>	82.910380854	<b>55</b>	153.024693811	<b>88</b>	214.547044783
<b>23</b>	84.735492981	<b>56</b>	156.112909294	<b>89</b>	216.169538508
<b>24</b>	87.425274613	<b>57</b>	157.597591817	<b>90</b>	219.067596349
<b>25</b>	88.809111208	<b>58</b>	158.849988171	<b>91</b>	220.714918839
<b>26</b>	92.491899271	<b>59</b>	161.188964137	<b>92</b>	221.430705554
<b>27</b>	94.651344041	<b>60</b>	163.030709687	<b>93</b>	224.007000254
<b>28</b>	95.870634228	<b>61</b>	165.537069187	<b>94</b>	224.983324669
<b>29</b>	98.831194218	<b>62</b>	167.184439978	<b>95</b>	227.421444279
<b>30</b>	101.317851006	<b>63</b>	169.094515415	<b>96</b>	229.337413305
<b>31</b>	103.725538040	<b>64</b>	169.911976479	<b>97</b>	231.250188700
<b>32</b>	105.446623052	<b>65</b>	173.411536519	<b>98</b>	231.987235253
<b>33</b>	107.168611184	<b>66</b>	174.754191523	<b>99</b>	233.693404178

## Capítulo 3

# Teorema del número primo. Demostración analítica

**Teorema** (Teorema del Número Primo). *Sea  $\pi(x)$  la función contadora de números primos menores o iguales que  $x$ . Entonces,*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \quad \text{i.e.} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

### 3.1. Formulación equivalente del TNP

Antes de comenzar con la prueba de este Teorema, mostraremos una reformulación equivalente del mismo mucho más cómoda de manejar para nuestra prueba posterior.

Definimos en primer lugar las siguientes funciones auxiliares dadas originalmente por Chebyshev en 1848.

**Definición 3.1.1.** Si  $n \in \mathbb{N}$ , se define el *símbolo de Von Mangoldt* al valor numérico determinado por

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^m \text{ para cierto primo } p \text{ y algún } m \geq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

**Definición 3.1.2.** Si  $x > 0$ , se define la función  $\psi$  de Chebyshev mediante la fórmula

$$\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

donde  $n$  recorre los números naturales menores o iguales que  $x$ .

**Definición 3.1.3.** Si  $x > 0$ , se define la función  $\vartheta$  de Chebyshev mediante la fórmula

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

donde  $p$  recorre los números primos menores o iguales que  $x$ .

La primera relación entre  $\vartheta$  y  $\psi$  surge del hecho de que si  $x > 0$ , entonces

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_m \sum_{\substack{p \\ p^m \leq x}} \Lambda(p^m) = \sum_m \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p = \sum_{m \leq \log_2 x} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p,$$

donde  $m$  y  $p$  recorren los números naturales y primos respectivamente. En consecuencia, se consigue la igualdad

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}). \quad (3.1)$$

El siguiente resultado relaciona los cocientes  $\psi(x)/x$  y  $\vartheta(x)/x$ .

**Proposición 3.1.1.** *Si  $x > 0$ , entonces*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\log^2 x}{2\sqrt{x} \log 2}.$$

*Demostración.* De la igualdad (3.1), se obtiene

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Además, de la definición de  $\vartheta(x)$ , se sigue la desigualdad  $\vartheta(x) \leq \sum_{p \leq x} \log x \leq x \log x$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} 0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) &\leq \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \leq \\ &\leq (\log_2 x) \sqrt{x} \log \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x} \log^2 x}{2 \log 2}. \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $x$  se concluye la desigualdad deseada.  $\square$

**Observación 3.1.1.** Este resultado implica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} = 0;$$

lo que se traduce en que si alguno de los cocientes tiene límite cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces el otro también lo tiene y además ambos coinciden.

El siguiente lema nos resultará de especial utilidad tanto para los resultados de esta sección como para los de la siguiente.

**Lema 3.1.2** (Identidad de Abel). *Sea  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  y definamos por  $A(x) := \sum_{n \leq x} a(n)$  cuando  $x \geq 1$  y  $A(x) := 0$  cuando  $0 \leq x < 1$ . Supongamos que la función real  $f$  tiene derivada continua en  $[y, x]$  con  $0 < y < x$ . Entonces,*

$$\sum_{y < n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - A(y) f(y) - \int_y^x A(t) f'(t) dt.$$

*Demostración.* Sean  $M = [y]$  y  $N = [x]$  de manera que  $A(y) = A(M)$  y  $A(x) = A(N)$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 \sum_{y < n \leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=M+1}^N a(n)f(n) = \sum_{n=M+1}^N \{A(n) - A(n-1)\}f(n) \\
 &= \sum_{n=M+1}^N A(n)f(n) - \sum_{n=M}^{N-1} A(n)f(n+1) \\
 &= \sum_{n=M+1}^{N-1} A(n)\{f(n) - f(n+1)\} + A(N)f(N) - A(M)f(M+1) \\
 &= - \sum_{n=M+1}^{N-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t)dt + A(N)f(N) - A(M)f(M+1) \\
 &= - \int_{M+1}^N A(t)f'(t)dt + A(x)f(x) - \int_N^x A(t)f'(t)dt \\
 &\quad - A(y)f(y) - \int_y^{M+1} A(t)f'(t)dt \\
 &= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.
 \end{aligned}$$

□

Aplicando este lema escribimos  $\vartheta(x)$  y  $\pi(x)$  dependientes el uno del otro en términos de integrales.

**Proposición 3.1.3.** *Si  $x \geq 2$ , entonces*

$$\vartheta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \quad \text{y} \quad \pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

*Demostración.* Sea  $a(n)$  la función característica de los números primos, i.e.  $a(n) = 1$  si  $n$  es un número primo y  $a(n) = 0$  en caso contrario. Entonces,

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \sum_{1 < n \leq x} a(n) \quad \text{y} \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = \sum_{1 < n \leq x} a(n) \log n.$$

Tomando  $f(t) = \log t$  en el Lema 3.1.2 con  $y = 1$ , se obtiene

$$\vartheta(x) = \sum_{1 < n \leq x} a(n) \log n = \pi(x) \log(x) - \pi(1) \log(1) - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt,$$

que coincide con la expresión de la proposición ya que  $\pi(t) = 0$  para todo  $t < 2$ .

Sea ahora  $b(n) := a(n) \log n$ . Entonces,

$$\vartheta(x) = \sum_{n \leq x} b(n) \quad \text{y} \quad \pi(x) = \sum_{3/2 < n \leq x} \frac{b(n)}{\log n}.$$

Considerando  $f(t) = 1/\log x$  en el Lema 3.1.2 con  $y = 3/2$ , se consigue

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \frac{\vartheta(3/2)}{\log 3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt,$$

que vuelve a coincidir con la expresión enunciada ya que  $\vartheta(t) = 0$  cuando  $t < 2$ .  $\square$

El siguiente teorema concluye la sección y muestra tres formas equivalentes de enunciar el TNP.

**Teorema 3.1.4.** *Las siguientes afirmaciones lógicas son equivalentes:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1, \quad (3.2)$$

$$\vartheta(x) \sim x \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1, \quad (3.3)$$

$$\psi(x) \sim x \quad \text{i.e.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1. \quad (3.4)$$

*Demostración.* La equivalencia entre (3.3) y (3.4) ya está probada (véase la Observación 3.1.1). Veamos que (3.2) y (3.3) también son equivalentes. Para ello, notamos que gracias a la Proposición 3.1.3, cuando  $x > 2$ , podemos escribir

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x) \log x}{x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt, \quad \frac{\pi(x) \log x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt.$$

Para ver que (3.2) implica (3.3), basta con probar  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt = 0$ . Por hipótesis  $\pi(t)/t \sim 1/\log t$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Entonces, existe  $R > 0$  tal que  $\frac{\pi(t)}{t} \leq R \frac{1}{\log t}$  para  $t \geq 2$ . En consecuencia, si  $x > 4$ , se consigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt &\leq \frac{R}{x} \int_2^x \frac{1}{\log t} dt = \frac{R}{x} \left( \int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \right) \left( \frac{1}{\log t} dt \right) \leq \\ &\leq \frac{R}{x} \left( \frac{\sqrt{x} - 2}{\log 2} + \frac{x - \sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} \right) \leq \\ &\leq R \left( \frac{1}{\sqrt{x} \log 2} + \frac{1}{\log \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} \log \sqrt{x}} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, veamos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt = 0$ . Notando esta vez que la hipótesis nos dice  $\vartheta(t) \sim t$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , razonando igual que antes llegamos a que existe  $R > 0$  tal que para  $x > 4$ , se cumple

$$\begin{aligned} \frac{\log x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t \log^2 t} dt &\leq \frac{R \log x}{x} \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t} = \frac{R \log x}{x} \left( \int_2^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x \right) \left( \frac{dt}{\log^2 t} \right) \leq \\ &\leq R \left( \frac{\log x}{\sqrt{x} \log^2 2} + \frac{\log x}{\log^2 \sqrt{x}} - \frac{\log x}{\sqrt{x} \log^2 \sqrt{x}} \right) = \\ &= R \left( \frac{\log x}{\sqrt{x} \log^2 2} + \frac{4}{\log x} - \frac{4}{\sqrt{x} \log x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

### 3.2. Lemas y condición suficiente

Gracias a las equivalencias anteriores, de ahora en adelante tendremos por finalidad mostrar  $\psi(x) \sim x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Comenzamos así notando que la función  $\psi$  es una función a trozos. Por ello, nos será más conveniente trabajar con su integral. Sea  $\psi_1(x) := \int_1^x \psi(t) dt$ .

El siguiente conjunto de lemas nos conducirán a una condición suficiente que implique  $\psi(x) \sim x$ .

**Lema 3.2.1.** Sean  $a(n)$  y  $A(x)$  definidas igual que en la Identidad de Abel. Entonces

$$\sum_{n \leq x} (x - n) a(n) = \int_1^x A(t) dt.$$

*Demostración.* Basta elegir  $f(t) = t$  en el Lema 3.1.2. □

El siguiente resultado es el equivalente a la regla de L'Hôpital para funciones lineales y crecientes a trozos.

**Lema 3.2.2.** Sean  $a(n) \geq 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y  $A(x)$  definida igual que antes. Denotemos por  $A_1(x) := \int_1^x A(t) dt$ . Si para ciertos  $c > 0$  y  $L > 0$  se satisface la fórmula asintótica  $A_1(x) \sim Lx^c$ , entonces  $A(x) \sim cLx^{c-1}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* La función  $A(x)$  es no decreciente por ser los  $a(n)$  no negativos. Sea  $\beta > 1$  y consideremos la diferencia  $A_1(\beta x) - A_1(x)$ . Se consigue así la desigualdad

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(u) du \geq \int_x^{\beta x} A(x) du = x(\beta - 1)A(x).$$

Esto implica,

$$xA(x) \leq \frac{A_1(\beta x) - A_1(x)}{\beta - 1} \implies \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1} \left\{ \frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c} \beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c} \right\}.$$

Fijamos  $\beta$  y hacemos  $x \rightarrow \infty$  en la desigualdad anterior. Entonces,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{L\beta^c - L}{\beta - 1} = L \frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}.$$

Ahora hacemos  $\beta \rightarrow 1^+$ . Como el cociente del miembro derecho es el cociente incremental de la derivada de  $x^c$  en el punto  $x = 1$  (igual a  $c$ ), la desigualdad queda

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL.$$

Sea  $0 < \alpha < 1$  y consideremos  $A_1(x) - A_1(\alpha x)$ . Un argumento análogo al del caso anterior muestra

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq L \frac{1 - \alpha^c}{1 - \alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} cL.$$

Concluimos de esta forma que  $A(x)/x^{c-1}$  tiende a  $cL$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Proposición 3.2.3** (Condición suficiente).

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) \quad (3.5)$$

y en caso de que  $\psi_1(x) \sim x^2/2$ , entonces  $\psi(x) \sim x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Si  $a(n) = \Lambda(n)$ , entonces  $A(x) = \psi(x)$  y  $A_1(x) = \psi_1(x)$ . Aplicando los lemas anteriores se sigue el resultado enunciado.  $\square$

Nuestro siguiente objetivo va a ser expresar  $\psi_1(x)/x^2$  como una integral de contorno que concierne a la función  $\zeta$ . Para ello, necesitaremos los casos particulares  $k = 1$  y  $k = 2$  del siguiente lema.

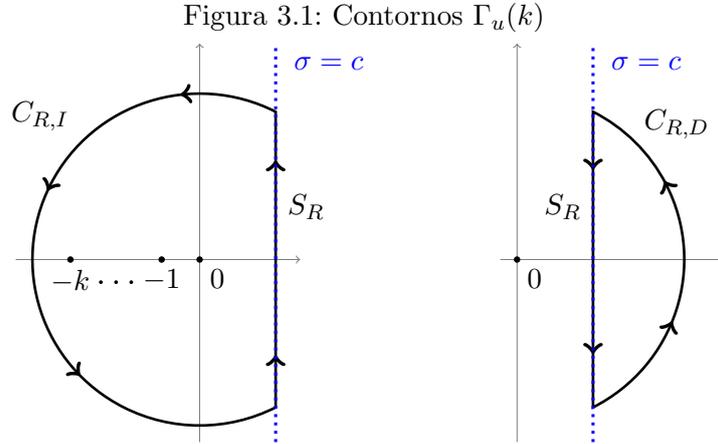
**Lema 3.2.4.** Si  $c > 0$  y  $u > 0$ , entonces para cada entero  $k \geq 1$  se cumple

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = \begin{cases} \frac{(1-u)^k}{k!}, & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ 0, & \text{si } u > 1, \end{cases}$$

siendo la integral absolutamente convergente.

*Demostración.* Sea  $C_R$  la circunferencia con radio  $R > \max\{k, c\}$  y centro el origen de coordenadas. Denotemos por  $S_R$  al segmento de recta perpendicular al eje real que pasa por el punto  $c$  y que tiene por extremos a los puntos de intersección con  $C_R$ . Así,  $S_R$  divide a la circunferencia en dos arcos:  $C_{R,I}$  y  $C_{R,D}$  (los fragmentos izquierdo y derecho de  $C_R$  respectivamente). Si  $0 < u \leq 1$ , sea  $\Gamma_u(R) = C_{R,I} \cup S_R$ . Si  $u > 1$ , sea  $\Gamma_u(R) = C_{R,D} \cup S_R$ . En cada caso, consideremos las curvas orientadas positivamente.

Nótese que por construcción los polos del integrando yacen en el interior de  $\Gamma_u(R)$  cuando  $u > 1$ .



Para probar el lema, aplicaremos el *Teorema de los Residuos* a la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u(R)} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u(R)} \frac{u^{-z} \Pi(z-1)}{\Pi(z+k)} dz.$$

Veamos que la integral a lo largo de cada trazo circular tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ . Si escribimos  $z = x + iy$  y  $|z| = R$ , el integrando está dominado por

$$\left| \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} \right| = \frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}.$$

La desigualdad  $u^{-x} \leq u^{-c}$  se justifica por el hecho de que si  $0 < u \leq 1$ , entonces  $-R \leq x \leq c$  y  $u^{-x}$  es una función decreciente; y si  $u > 1$ , entonces  $c \leq x \leq R$  y  $u^{-x}$  es creciente. Además, para  $1 \leq m \leq k$ , se cumple

$$|z+m| \geq |z| - m = R - m \geq R - k \geq R/2,$$

ya que  $R > 2k$ . Por lo tanto, la integral a lo largo de cada arco circular está acotada absolutamente por

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R(R/2)^k} = \frac{2^{k+1}\pi}{u^c R^k} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Esto se traduce en que las integrales sobre  $\Gamma_u(R)$  dan el mismo resultado que las integrales sobre  $S_R$ .

Cuando  $u > 1$  el integrando es analítico dentro de  $\Gamma_u$  y por lo tanto la integral vale cero. Haciendo  $R \rightarrow \infty$ , se sigue que la integral sobre la recta  $\sigma = c$  también vale cero.

Si  $0 < u \leq 1$ , evaluamos la integral sobre  $\Gamma_u(R)$  y por el *Teorema de los Residuos* (polos simples en los enteros  $n = 0, -1, -2, \dots, -k$ ), se consigue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_u(R)} \frac{u^{-z} \Pi(z-1)}{\Pi(z+k)} dz = \sum_{n=0}^k \left( \operatorname{Res}_{-n} \frac{u^{-z} \Pi(z-1)}{\Pi(z+k)} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-u)^n,$$

porque

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-n} \frac{u^{-z} \Pi(z-1)}{\Pi(z+k)} &= \lim_{z \rightarrow -n} \left( (z+n) \frac{u^{-z} \Pi(z-1)}{\Pi(z+k)} \right) = \\ &= \left( \frac{u^n}{\Pi(k-n)} \right) \left( \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \Pi(z-1) \right) = \\ &= \left( \frac{u^n}{\Pi(k-n)} \right) \left( \lim_{z \rightarrow -n} \frac{\Pi(z+n)}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} \right) = \\ &= \frac{u^n \Pi(0) (-1)^n}{\Pi(k-n) \Pi(n)} = \frac{(-u)^n}{n!(k-n)!}. \end{aligned}$$

Haciendo  $R \rightarrow \infty$ , la integral sobre  $\sigma = c$  resulta  $\frac{(1-u)^k}{k!}$ .  $\square$

### 3.3. Representación integral de la función $\psi_1(x)/x^2$

En primer lugar vamos a justificar la siguiente relación entre la función  $\zeta$  y el símbolo de Von Mangoldt.

**Proposición 3.3.1.** *Para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 1$ , se cumple*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \quad (3.6)$$

*Demostración.* Por un lado,  $\zeta'(s)/\zeta(s)$  es holomorfa en el semiplano  $\Omega_1$  por ser cociente de dos funciones holomorfas y con denominador no nulo. Por el otro lado,  $\Lambda(n)/n^s$  son funciones holomorfas mayoradas (absolutamente) por  $M_n = \log n/n^\sigma$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Puesto que  $\zeta'(\sigma) = -\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  (véase (2.1)), en particular  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge. Aplicando el *Criterio de Weierstrass*, concluimos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)/n^s$  representa a una función holomorfa.

Para probar la igualdad, mostraremos el resultado en la variable real y por prolongación analítica será cierto en  $\Omega_1$ . De la representación (1.8) en forma de producto de primos de la función  $\zeta$ , tomando logaritmos se consigue

$$\log \zeta(\sigma) = - \sum_p \log(1 - 1/p^\sigma).$$

Ahora, la serie  $\sum_p \frac{d}{d\sigma} \log(1 - 1/p^\sigma) = \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma - 1}$  converge uniformemente por tener por mayorante a  $\sum_{n=1}^{\infty} \log n/(n^\sigma - 1)$ . En consecuencia, se justifica

la igualdad  $\zeta'(\sigma)/\zeta(\sigma) = -\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma - 1}$ . La siguiente comprobación concluye la demostración:

$$\sum_p \frac{\log p}{p^\sigma - 1} = \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \frac{1}{1 - 1/p^\sigma} = \sum_p \frac{\log p}{p^\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^{r\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma}.$$

□

**Teorema 3.3.2.** Si  $c > 1$  y  $x \geq 1$ , entonces

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \quad (3.7)$$

*Demostración.* En primer lugar, dividimos entre  $x$  en (3.5):

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left( 1 - \frac{n}{x} \right) \Lambda(n).$$

Aplicamos el Lema 3.2.4 cuando  $k = 1$  y  $u = n/x$  con  $n \leq x$  para así conseguir

$$1 - \frac{n}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds \implies \frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds \right).$$

Como además la integral vale cero cuando  $n > x$ , podemos escribir la expresión anterior por

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s}{s(s+1)} ds \right) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{\Omega} f_n(s) ds \right).$$

Ahora justificaremos el intercambio entre sumatorio e integral. Veamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} |f_n(s)| ds$  converge. En efecto, como  $|(x/n)^s| \leq (x/n)^c$  pues  $s = c + it$  con  $t \in \mathbb{R}$ , las sumas parciales absolutas verifican

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} |f_n(s)| ds &\leq \sum_{n=1}^N \int_{\Omega} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^c}{|s||s+1|} ds = \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n^c} \overbrace{\int_{\Omega} \frac{x^c}{|s||s+1|} ds}^{\text{convergente}} \leq \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} ds < \infty, \quad \text{para cierta constante } C > 0. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a la convergencia absoluta de la serie y por consiguiente al intercambio entre sumatorio e integral.

Queda entonces,

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

Dividiendo entre  $x$  se sigue el resultado enunciado. □

**Teorema 3.3.3.** Si  $c > 1$  y  $x \geq 1$ , entonces

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds, \quad (3.8)$$

donde

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right).$$

*Demostración.* Aplicamos el Lema 3.2.4 con  $k = 2$  y  $u = 1/x$  para obtener

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)(s+2)} ds, \quad c > 0.$$

Reemplazando  $s$  por  $s-1$  (entonces  $c > 1$ ), se consigue

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \frac{1}{s-1} ds. \quad (3.9)$$

Restando (3.9) a (3.7) cuando  $c > 1$ , se consigue finalmente (3.8).  $\square$

Fijado  $c > 1$ , parametrizamos  $s = c + it$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces,  $x^{s-1} = x^{c-1} x^{it} = x^{c-1} e^{it \log x}$ . La identidad (3.8) se convierte de esta manera en

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(c+it) e^{it \log x} dt. \quad (3.10)$$

Observando así la igualdad anterior, nuestro objetivo de ahora en adelante será mostrar que el miembro derecho tiende a cero para conseguir  $\psi_1(x) \sim x^2/2$ . Para ello, primero vamos a ver que podemos poner  $c = 1$  en (3.10) y posteriormente deduciremos que la integral tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ .

### 3.4. Región libre de ceros. Cota superior de $\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right|$

Los siguientes lemas nos permitirán mostrar la no nulidad de  $\zeta$  sobre la frontera de la banda crítica.

**Lema 3.4.1.** Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , se cumple  $3 + 4 \cos \theta + \cos(2\theta) \geq 0$ .

*Demostración.* Resulta inmediato a partir de los siguientes cálculos,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (1 + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = \\ &= \frac{1}{2}(3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta). \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 3.4.2.** Si  $\sigma > 1$  y  $t \in \mathbb{R}$ , entonces  $|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + it)| \geq 1$ .

*Demostración.* En general, si  $z \in \mathbb{C}$ , entonces  $\log |z| = \operatorname{Re}(\log z)$ . Así, de la representación en forma de producto de  $\zeta(s)$  cuando  $\sigma > 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \log |\zeta(s)| &= \log \left| \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| = \operatorname{Re} \left( - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right) = \\ &= \operatorname{Re} \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(t \log p^m)}{mp^{m\sigma}}. \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \log |\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + it)\zeta(\sigma + it)| &= \\ &= 3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| = \\ &= \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3 + 4 \cos(t \log p^m) + \cos(2t \log p^m)}{mp^{m\sigma}} \geq 0, \end{aligned}$$

pues todos los sumandos son no negativos gracias al Lema 3.4.1. Esto implica la desigualdad enunciada.  $\square$

**Teorema 3.4.3.** La función  $\zeta(s)$  de Riemann no posee ceros en las rectas  $\sigma = 1$  y  $\sigma = 0$ .

*Demostración.* Basta con probar el caso  $\sigma = 1$  y por simetría será cierto para  $\sigma = 0$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe  $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\zeta(1 + it_0) = 0$ . Consideremos ahora el comportamiento de  $\zeta(\sigma)$ ,  $\zeta(\sigma + it_0)$  y  $\zeta(\sigma + 2it_0)$  cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$ . En primer lugar, como  $\zeta(s)$  tiene un polo simple en  $s = 1$ , entonces  $|\zeta(\sigma)(\sigma - 1)|$  está acotada cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$ . En segundo lugar, dado que  $\zeta$  es analítica en  $1 + it_0$ , la derivada en ese punto existe y coincide con el límite cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$  de

$$\frac{\zeta(\sigma + it_0) - \zeta(1 + it_0)}{(\sigma + it_0) - (1 + it_0)} = \frac{\zeta(\sigma + it_0)}{\sigma - 1}.$$

En particular,  $|\zeta(\sigma + it_0)/(\sigma - 1)|$  está acotada cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$ . En tercer lugar, la analiticidad de  $\zeta$  en  $1 + 2it_0$  implica que  $|\zeta(\sigma + 2it_0)|$  esté también acotada cuando  $\sigma \rightarrow 1^+$ .

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + it_0) \zeta(\sigma + 2it_0)| &= \\ &= (\sigma - 1) \underbrace{|\zeta(\sigma)(\sigma - 1)|^3}_{\text{acotado}} \underbrace{\left| \frac{\zeta(\sigma + it_0)}{\sigma - 1} \right|^4}_{\text{acotado}} \underbrace{|\zeta(\sigma + 2it_0)|}_{\text{acotado}} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 1^+} 0. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.4.2, llegamos a una contradicción.  $\square$

El siguiente teorema se deduce a partir de una serie de resultados que conciernen a cotas superiores de  $|\zeta(s)|$  y  $|\zeta'(s)|$  y a una cota inferior positiva de  $|\zeta(s)|$  en las proximidades de la recta  $\sigma = 1$  cuando  $|t| \geq 2$ . El desarrollo completo de estos resultados y demostraciones se encuentra adjunto en el apéndice A.

**Teorema 3.4.4** (Cota superior de  $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ ). *Existen constantes  $0 < c < 1/2$  y  $A > 0$  tales que para  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma \geq 1 - c (\log |t|)^{-9}$  y  $|t| \geq 2$ , se cumple*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq A (\log |t|)^9.$$

### 3.5. Completión de la demostración del TNP

Antes de completar la demostración del Teorema del Número Primo, necesitaremos este último resultado sobre la teoría de funciones de variable compleja.

**Lema 3.5.1.** *Si  $f(s)$  es una función que posee un polo de orden  $k$  en algún punto  $s_0$ , entonces el cociente  $f'(s)/f(s)$  presenta un polo simple en  $s_0$  con residuo igual a  $-k$ .*

*Demostración.* Por hipótesis podemos escribir  $f(s) = g(s)/(s - s_0)^k$  con  $g$  una función analítica en  $s_0$  y  $g(s_0) \neq 0$ . Entonces, para  $s$  en un entorno reducido de  $s_0$ , se tiene

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s - s_0)^k} - \frac{kg(s)}{(s - s_0)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s - s_0)^k} \left\{ \frac{-k}{s - s_0} + \frac{g'(s)}{g(s)} \right\}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{-k}{s - s_0} + \frac{g'(s)}{g(s)}.$$

Esto prueba el lema ya que  $g'(s)/g(s)$  es analítica en  $s_0$ . □

**Proposición 3.5.2.** *La función  $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$  es analítica en  $s = 1$ .*

*Demostración.* Por el lema anterior,  $\zeta'(s)/\zeta(s)$  posee un polo simple en  $s = 1$  con residuo igual a  $-1$ . Entonces, la serie de Laurent de  $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  centrada en el punto  $s = 1$  es de la forma  $\frac{-1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s-1)^n$ . El resultado se sigue a partir de esta expresión. □

**Teorema 3.5.3.** *Si  $x \geq 1$ , entonces*

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(1+it) e^{it \log x} dt,$$

donde la integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(1+it)| dt$  converge con

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right), \quad s = \sigma + it.$$

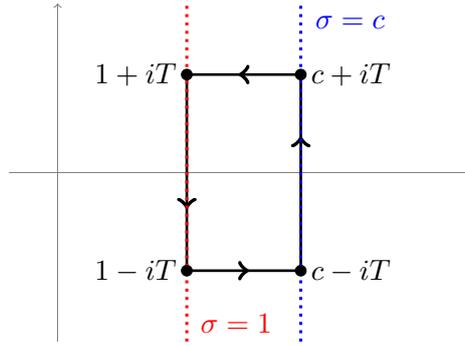
Además,  $\psi_1(x) \sim x^2/2$  cuando  $x \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* En el teorema 3.3.3 ya probamos que si  $c > 1$  y  $x \geq 1$ , entonces

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds. \quad (3.11)$$

Veamos que podemos mover la recta de integración a la línea  $\sigma = 1$ . Para ello, aplicamos el *Teorema de los Residuos* sobre el rectángulo  $R(T)$  orientado positivamente y determinado por los vértices  $1 \pm iT$  y  $c \pm iT$  con  $T > 0$ . Como  $x^{s-1}h(s)$  es analítica sobre  $R(T)$ , tenemos que  $\int_{R(T)} x^{s-1}h(s)ds = 0$ .

Figura 3.2: Contorno  $R(T)$



Ahora, cuando nos encontramos sobre los segmentos horizontales del rectángulo de integración, tenemos la parametrización  $s = \sigma \pm iT$  con  $1 \leq \sigma \leq c$ . Así, como  $|s| \geq T$ , se tiene

$$\left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \leq \frac{1}{T^2} \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{s(s+1)(s-1)} \right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2}.$$

Gracias al Teorema 3.4.4, si  $T \geq 2$  y  $\sigma \geq 1$ , entonces

$$|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq A \log^9 T.$$

Combinando estas acotaciones para  $T \geq 2$ , se consigue

$$|h(s)| \leq \left| \frac{1}{s(s+1)} \right| \left( \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| + \left| \frac{1}{s-1} \right| \right) \leq \frac{A \log^9 T}{T^2} + \frac{1}{T^2} \leq \frac{M \log^9 T}{T^2},$$

tomando  $M = 1 + A$ .

De esta forma,

$$\left| \int_{1 \pm iT}^{c \pm iT} x^{s-1} h(s) ds \right| \leq \int_1^c x^{c-1} \frac{M \log^9 T}{T^2} d\sigma = M x^{c-1} \frac{\log^9 T}{T^2} (c-1).$$

Haciendo  $T \rightarrow \infty$ , llegamos a que las integrales a lo largo de los ejes horizontales valen cero y en consecuencia

$$\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds, \quad c > 1.$$

Por consiguiente, cuando retomamos (3.11) sobre la recta  $\sigma = 1$ , si escribimos  $s = 1 + it$  con  $t \in \mathbb{R}$ , entonces se consigue

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-\infty i}^{1+\infty i} x^{s-1} h(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(1 + it) e^{it \log x} dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por último, como  $|h(1 + it)|$  está acotada para todo  $t \in \mathbb{R}$ , por el *Lema de Riemann-Lebesgue*<sup>1</sup>, concluimos que el miembro derecho de (3.12) tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$ . En definitiva,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

□

Gracias a todo el desarrollo anterior finalmente deducimos  $\psi(x) \sim x$ , que equivale a  $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Acabamos de probar el Teorema del Número Primo.

### 3.6. Comentarios adicionales. Término de error

La demostración del Teorema del Número Primo anterior es suficiente para la relación asintótica considerada; no obstante, deja pendiente el análisis del término de error que se comete al considerar el modelo

$$\psi(x) = x + \mathbf{Error}(x).$$

En la literatura matemática existen demostraciones analíticas de este teorema realizando una argumentación mucho más precisa sobre el orden del error del modelo planteado. En particular, en las páginas 151-161 de [11] encontramos una demostración de estas características.

<sup>1</sup>**Lema de Riemann-Lebesgue.** Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , i.e.  $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$ , entonces

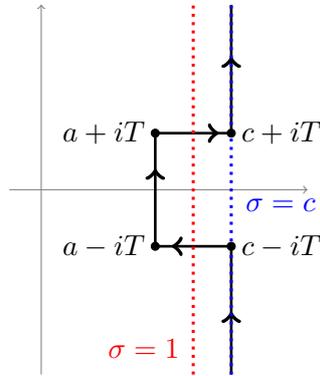
$$\hat{f}(z) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{izx} dx \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } |z| \rightarrow \infty.$$

La idea general en este tipo de demostraciones parte de la igualdad

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds, \quad c > 1. \quad (3.13)$$

El camino de integración en (3.13) es la recta  $\sigma = c$  ubicada dentro del semiplano  $\sigma > 1$ . Supongamos en un primer momento que existen constantes  $T > 0$  y  $1/2 < a < 1$  tales que  $\zeta(\sigma + it) \neq 0$  para cada  $\sigma \geq a$  y  $|t| \leq T$ . A continuación movemos la porción  $|t| \leq T$  de la recta  $\sigma = c$  a la izquierda de la línea  $\sigma = 1$  formando una sección rectangular uniendo los extremos  $a \pm iT$  y  $c \pm iT$ .

Figura 3.3: Camino de integración  $\gamma$



Si denotamos por  $R = R(a, c, T)$  al rectángulo cerrado, orientado positivamente, y con vértices  $a \pm iT$  y  $c \pm iT$ , se deduce la siguiente relación entre integrales:  $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} = \int_R + \int_\gamma$ . Esto implica,

$$\psi_1(x) = \operatorname{Res}_1 \left\{ \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds,$$

ya que  $\frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left( -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right)$  presenta una única singularidad dentro de  $R$  en  $s = 1$ .

Realizando los cálculos y acotaciones oportunas, se obtiene

$$\psi_1(x) = x^2/2 + \mathcal{O}(f(x)),$$

para cierta función  $f(x)$  que depende de  $\gamma$  y tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x^2 = 0$ . Gracias a que  $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t) dt$ , se consigue transmitir este comportamiento de  $\psi_1(x)$  a  $\psi(x)$  de la siguiente manera:

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}(g(x)),$$

con  $g(x)$  un función que depende de  $f(x)$  y tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/x = 0$ .

Enunciamos el siguiente teorema cuya demostración sigue los pasos del esquema anterior para la región libre de ceros probada en el apéndice A:

**Teorema 3.6.1** (Teorema del Número Primo con término de error).

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}\left(x \exp\left(-c (\log x)^{1/10}\right)\right), \quad x \geq 2,$$

donde  $c$  es una constante positiva.

En esencia, la mejora en el orden del término de error dependerá principalmente del camino de integración  $\gamma$  escogido, es decir, de los valores  $T > 0$  y  $1/2 < a < 1$ . Es aquí donde yace el principal problema de nuestro argumento; ya que para que el procedimiento anterior sea válido, es imprescindible que  $\gamma$  no interseque o contenga a su derecha ceros de la función  $\zeta$ .

De esta forma, una mejora en la región libre de ceros por la izquierda de la recta  $\sigma = 1$  se transmitiría en una mejora significativa en el orden del término de error del TNP.

El siguiente resultado muestra la relación entre la existencia de una región libre de ceros del tipo  $\sigma > \theta$  con  $1/2 < \theta < 1$  y el orden del término de error del TNP:

**Teorema 3.6.2.** *Sea  $1/2 < \theta < 1$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *La función  $\zeta$  de Riemann no posee ceros en el semiplano  $\sigma > \theta$ ,*
- (ii) *Para todo  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}(x^{\theta+\varepsilon}), \quad x \geq 2.$$

Finalmente, si la hipótesis de Riemann fuera cierta, su impacto sobre el orden del término de error del Teorema del Número Primo sería del tipo  $\mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon})$  con  $\varepsilon > 0$ . Se deduce así la siguiente formulación equivalente para la hipótesis de Riemann:

**Corolario 3.6.3.** *La hipótesis de Riemann es cierta si y solo si para todo  $\varepsilon > 0$ ,*

$$\psi(x) = x + \mathcal{O}(x^{1/2+\varepsilon}), \quad x \geq 2.$$

## Apéndice A

# Cota superior de $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ . Demostración

Para controlar el orden de  $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$  en la parte izquierda de la banda crítica, tendremos por objetivo encontrar una cota superior de  $|\zeta'(s)|$  y otra inferior de  $|\zeta(s)|$  adecuadas para posteriormente multiplicarlas y generar esa cota común enunciada en el Teorema 3.4.4.

### A.1. Cota superior de $|\zeta'(s)|$

Con el objeto de facilitar el estudio del comportamiento de  $\zeta$  en las proximidades de la recta  $\sigma = 1$ , preferiremos considerar su siguiente representación como integral válida sobre el semiplano  $\sigma > 0$ .

**Proposición A.1.1.** *Para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  se cumple*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - s \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx - \frac{N^{1-s}}{1-s}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\{x\} := x - [x]$ .

*Demostración.* Si consideremos el Lema 3.1.2 con  $a(n) = 1$  e  $y = N \in \mathbb{N}$ , entonces  $A(t) = [t]$  y

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq x} f(n) &= xf(x) - Nf(N) - \int_N^x [t]f'(t)dt = \\ &= \int_N^x \underbrace{f(t) + tf'(t)}_{\frac{d}{dt}(tf(t))} dt - \int_N^x [t]f'(t)dt = \int_N^x f(t) + \{t\}f'(t)dt. \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos  $f(t) = t^{-s}$  y hacemos  $x \rightarrow \infty$ , entonces

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_N^{\infty} \frac{1}{t^s} + \frac{(-s)\{t\}}{t^{s+1}} dt = -\frac{N^{1-s}}{1-s} - s \int_N^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt.$$

Notando que  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^N n^{-s} + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-s}$ , se consigue la identidad deseada.

Además, si  $\delta > 0$ , la integral de la expresión está dominada (absolutamente) por  $\int_N^{\infty} t^{-\delta-1} dt$ ; lo que se traduce en que converge uniformemente para todos los  $s$  complejos tales que  $\sigma \geq \delta$ . Entonces, esta nueva expresión representa a una función analítica sobre el semiplano  $\sigma > 0$ . Por prolongación analítica coincide con  $\zeta(s)$  sobre el semiplano  $\sigma > 0$ .  $\square$

**Teorema A.1.2** (Cotas superiores para  $|\zeta(s)|$  y  $|\zeta'(s)|$ ). *Si  $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ , entonces*

- (i)  $|\zeta(s)| \leq 4 \frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}$  sobre la región  $|t| > 2$ ,  $1/2 \leq \sigma_0 < 1$  y  $\sigma \geq \sigma_0$ .
- (ii)  $|\zeta(s)| \leq A_1 \log |t|$  sobre la región  $|t| > 2$  y  $\sigma \geq 1 - \frac{1}{4 \log |t|}$ .
- (iii)  $|\zeta'(s)| \leq A_2 \log^2 |t|$  sobre la región  $|t| > 2$  y  $\sigma \geq 1 - \frac{1}{12 \log |t|}$ .

*Demostración.* Sea  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma > 0$  y  $t \neq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} \right| + |s| \left| \int_N^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx \right| + \left| \frac{N^{1-s}}{1-s} \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\sigma} + |s| \int_N^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} dx + \frac{N^{1-\sigma}}{|1-s|} \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\sigma} + \frac{|s| N^{-\sigma}}{\sigma} + \frac{N^{1-\sigma}}{|t|}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

ya que  $|1-s| = |(1-\sigma) - it| \geq |t|$ .

Fijamos ahora  $1/2 \leq \sigma_0 < 1$  y consideramos  $\sigma \geq \sigma_0$ . Entonces,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{\sigma_0}} \leq 1 + \int_1^N \frac{1}{x^{\sigma_0}} dx = 1 + \frac{N^{1-\sigma_0} - 1}{1-\sigma_0} \leq \frac{N^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}$$

y  $\frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{\sigma+|t|}{\sigma} \leq 1 + \frac{|t|}{\sigma_0}$ . Por consiguiente, de (A.2) llegamos a

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \frac{N^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} + \left(1 + \frac{|t|}{\sigma_0}\right) N^{-\sigma_0} + \frac{N^{1-\sigma_0}}{|t|} = \\ &= \frac{N^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} \left\{ 1 + \frac{1-\sigma_0}{N} + \frac{(1-\sigma_0)|t|}{\sigma_0 N} + \frac{1-\sigma_0}{|t|} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

(i) Elegimos  $N = \lceil |t| \rceil \geq 2$ . Como  $1/2 < \sigma_0 < 1$ , se tiene  $N^{1-\sigma_0} \leq |t|^{1-\sigma_0}$ . En consecuencia, de (A.3) se consigue

$$|\zeta(s)| \leq \frac{|t|^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0} \left\{ 1 + \frac{1-\sigma_0}{\lceil |t| \rceil} + \frac{(1-\sigma_0)|t|}{\sigma_0 \lceil |t| \rceil} + \frac{1-\sigma_0}{|t|} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Puesto que  $|t| > 2$ , se tiene

$$\frac{1 - \sigma_0}{|t|} \leq \frac{1 - \sigma_0}{\lceil |t| \rceil} \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lceil |t| \rceil \geq \frac{|t|}{2} \implies \frac{(1 - \sigma_0)|t|}{\sigma_0 \lceil |t| \rceil} \leq 2 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{2} \leq \sigma_0 < 1.$$

Consecuentemente, el factor entre llaves de la expresión (A.4) queda acotado superiormente por  $1 + 1/2 + 2 + 1/2 = 4$ .

(ii) Establecemos  $\sigma_0 = 1 - \frac{1}{4 \log |t|}$  con  $|t| \geq 2$ . Entonces  $4 \log |t| \geq 4 \log 2 > 2$  y en consecuencia  $1/2 < \sigma_0 < 1$ . Como estamos en un caso particular de (i), podemos usar su cota notando que  $1 - \sigma_0 = \frac{1}{4 \log |t|}$ :

$$\zeta(s) \leq 4 \frac{|t|^{1/(4 \log |t|)}}{1/(4 \log |t|)} = 16 e^{1/4} \log |t|, \quad A_1 = 16 e^{1/4} \approx 20,5,$$

ya que  $|t|^{1/(4 \log |t|)} = \exp\left(\log |t| \frac{1}{4 \log |t|}\right) = e^{1/4}$ .

(iii) Si  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma \geq 2$ , entonces  $\zeta'(s)$  admite la representación (2.1) y en consecuencia  $|\zeta'(s)| \leq \zeta'(2)$ ; por lo que la cota enunciada es trivial en este semiplano. Además, la analiticidad de  $\zeta(s)$  en  $\sigma > 0$  con  $s \neq 1$  implica la acotación uniforme de  $|\zeta'(s)|$  en cada compacto contenido en dicha región. En particular, la cota se verifica cuando  $2 \leq |t| \leq 3$  y  $\sigma \geq 1/2$ . Nos queda ver entonces la acotación (en función de  $t$ ) cuando  $|t| \geq 3$ .

Sea  $\delta = \delta(t) = 1/(12 \log |t|)$  y sea  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma \geq 1 - \delta(t)$  y  $|t| \geq 3$ . Como en particular  $t > e$ , tenemos  $\sigma > 1 - 1/12$  y  $0 < \delta < 1/12$  y en consecuencia el disco  $D_\delta(s) = \{z \in \mathbb{C} : |s - z| \leq \delta\}$  está contenido en la región de analiticidad considerada. Por la *Fórmula Integral de Cauchy* podemos escribir  $|\zeta'(s)|$  mediante

$$|\zeta'(s)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-s|=\delta} \frac{\zeta(z)}{(z-s)^2} dz \right| \leq \frac{1}{\delta} \max_{|z-s|=\delta} |\zeta(z)|. \quad (\text{A.5})$$

Para acotar  $|\zeta'(s)|$  vamos a controlar el crecimiento de  $|\zeta(z)|$  para los  $z \in S_\delta(s) := \{s' \in \mathbb{C} : |s' - s| = \delta\}$ . Sea  $z = \sigma' + it' \in S_\delta(s)$ . Entonces

$$|s - s'| = |(\sigma - \sigma') + i(t - t')| \leq \delta \implies |t - t'| \leq \delta \implies \begin{cases} |t| - |t'| \leq \delta \\ |t'| - |t| \leq \delta, \end{cases}$$

y por nuestras consideraciones anteriores ( $|t| \geq 3, 0 < \delta < 1/12$  y  $\sigma \geq 1 - \delta$ ), se consigue

$$|t'| \geq |t| - \delta \geq |t| - 1/12 \geq 3 - 1/12 > 2$$

y

$$|t'| \leq |t| + \delta \leq |t| + 1/12 \leq |t| + 1/12|t| \leq \frac{13}{12}|t| \leq |t|^{3/2}.$$

Por lo tanto,

$$\sigma' \geq \sigma - \delta \geq 1 - \delta - \delta = 1 - \frac{1}{6 \log |t|} \geq 1 - \frac{1}{6 \log |t'|^{2/3}} = 1 - \frac{1}{4 \log |t'|}.$$

Obtenemos así que  $z$  yace sobre el rango de (ii); lo que se traduce en que

$$|\zeta(z)| \leq A_1 \log |t'| \leq \frac{3}{2} A_1 \log |t|, \quad |z - s| = \delta.$$

Retomando (A.5), se concluye

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{1}{\delta} \frac{3}{2} A_1 \log |t| = 18 A_1 \log^2 |t|, \quad A_2 = 288 e^{1/4} \approx 370.$$

□

## A.2. Cota inferior de $|\zeta(s)|$ . Región libre de ceros

En el Teorema 3.4.3 ya hemos mostrado que  $\zeta$  no se anula en las rectas  $\sigma = 1$  y  $\sigma = 0$ . Por continuidad, podemos afirmar que para cada  $t$  real, existe una bola abierta con radio  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  y centro  $1 + it$  donde  $\zeta$  tampoco se anula. En esta sección vamos a dar una expresión explícita de cota inferior positiva de  $|\zeta(s)|$  (dependiente de  $t$ ) a la izquierda de la recta  $\sigma = 1$ .

**Teorema A.2.1** (Cota inferior de  $|\zeta(s)|$ ). *Existen constantes  $c_1 > 0$  y  $A_3 > 0$  tales que  $\zeta(s)$  no posee ceros en la región  $\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log^9 |t|}$  y  $|t| \geq 2$  y además satisface la desigualdad*

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq A_3 \log^7 |t|.$$

*Demostración.* En el semiplano  $\sigma \geq 2$  la desigualdad se satisface trivialmente. De hecho,

$$\zeta(s) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) \geq 0 \implies \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \left( 2 - \frac{\pi^2}{6} \right)^{-1}, \quad \sigma \geq 2.$$

Consideremos así  $\sigma \leq 2$  y  $|t| \geq 2$ . Sea  $A > 0$  una constante fija que determinaremos después y establezcamos el rango

$$1 + \frac{A}{(\log |t|)^9} \leq \sigma \leq 2 \quad \text{y} \quad |t| \geq 2. \quad (\text{A.6})$$

Por el Lema 3.4.2, cuando  $\sigma > 1$ ,

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{1}{\zeta^{3/4}(\sigma) \zeta^{1/4}(\sigma + 2it)} = \left( \zeta(\sigma) \right)^{-3/4} \left( \zeta(\sigma + 2it) \right)^{-1/4}. \quad (\text{A.7})$$

Puesto que  $\zeta(s)$  posee un polo simple en  $s = 1$ , existe alguna constante  $c_2 > 0$  tal que

$$\zeta(\sigma) \leq \frac{c_2}{\sigma - 1}, \quad 1 < \sigma \leq 2. \quad (\text{A.8})$$

Por la acotación (ii) del Teorema A.1.2,

$$|\zeta(\sigma + 2it)| \leq A_1 \log |2t| \leq 2A_1 \log |t|, \quad |t| \geq 2, \quad (\text{A.9})$$

donde hemos usado que  $\log |2t| = \log 2 + \log |t| \leq 2 \log |t|$  porque  $|t| \geq 2$ . Insertando (A.8) y (A.9) en (A.7), obtenemos

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\geq c_3^{-3/4} (\sigma - 1)^{3/4} (2A_1)^{-1/4} (\log |t|)^{-1/4} \geq \\ &\geq c_4 (\sigma - 1)^{3/4} (\log |t|)^{-1/4} \geq c_4 A^{3/4} (\log |t|)^{-7}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

pues  $\sigma - 1 \geq A(\log |t|)^{-9}$  y donde hemos establecido  $c_3 := c_2^{-3/4}(2A_1)^{-1/4}$ . Por construcción, la cota (A.10) es válida en el rango (A.6) para cualquier elección de  $A$ . Veamos que si  $A$  es suficientemente pequeño, entonces el rango se amplía a

$$1 - \frac{A}{(\log |t|)^9} \leq \sigma \leq 2 \quad \text{y} \quad |t| \geq 2. \quad (\text{A.11})$$

Sean  $\sigma_1 = \sigma_1(A, t) = 1 - A(\log |t|)^{-9}$  y  $\sigma_2 = \sigma_2(A, t) = 1 + A(\log |t|)^{-9}$ . Vamos a considerar ahora el rango  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  con  $|t| \geq 2$ . Notemos que sobre esta región

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &= \left| \zeta(\sigma_2 + it) - \int_{\sigma}^{\sigma_2} \zeta'(u + it) du \right| \geq \\ &\geq |\zeta(\sigma_2 + it)| - (\sigma_2 - \sigma_1) \max_{\sigma_1 \leq u \leq \sigma_2} |\zeta'(u + it)|. \end{aligned}$$

Como  $\sigma + it$  está en el rango (A.6), el primer sumando del miembro derecho de la cota superior puede ser estimado por (A.10).

Por el apartado (iii) del Teorema A.1.2,

$$|\zeta'(s)| \leq A_2(\log |t|)^2, \quad \sigma \geq 1 - (12 \log |t|)^{-1}, \quad |t| \geq 2. \quad (\text{A.12})$$

Si la constante  $A$  es suficientemente pequeña, el rango  $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$  y  $|t| \geq 2$  se incluye en (A.12) y en consecuencia la cota superior para  $|\zeta'(s)|$  mencionada es válida. Se consigue entonces

$$\begin{aligned} |\zeta(\sigma + it)| &\geq c_3 A^{3/4} (\log |t|)^{-7} - 2A(\log |t|)^{-9} A_2 (\log |t|)^2 = \\ &= A^{3/4} (c_3 - 2A^{1/4} A_2) (\log |t|)^{-7} = c_4 (\log |t|)^{-7}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

donde  $c_4 := A^{3/4}(c_3 - 2A^{1/4}A_2)$ . Eligiendo  $A > 0$  pero adecuadamente pequeño (tanto para que se cumpla (A.12) como para que  $c_4 > 0$ ), se llega a la cota inferior válida sobre la región (A.11). Para finalizar, establecemos  $c_1 := A$  y  $A_3 := 1/c_4$  y concluimos así el resultado enunciado.  $\square$

**Corolario A.2.2** (Cota superior de  $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ ). *Existen valores absolutos  $0 < c_5 < 1/2$  y  $A_4 > 0$  tales que para cada  $s \in \mathbb{C}$  con  $\sigma \geq 1 - c_5 (\log |t|)^{-9}$  y  $|t| \geq 2$ , se cumple*

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq A_4 (\log |t|)^9.$$

*Demostración.* Basta considerar las cota superior de  $|\zeta'(s)|$  y  $1/|\zeta(s)|$  en los Teoremas A.1.2 y A.2.1 con sus respectivas regiones. Se escoge entonces  $c_5$  lo suficientemente pequeño para que el rango  $\sigma \geq 1 - c_5 (\log |t|)^{-9}$  sea válido para ambas cotas. A continuación, basta tomar  $A_4 := A_2 \cdot A_3$  y se obtiene la cota deseada,

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| = |\zeta'(s)| \cdot \left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq (A_2 \log^2 |t|) (A_3 \log^7 |t|) = A_4 \log^9 |t|.$$

□

# Bibliografía

- [1] C. Ivorra, *Funciones de Variable Compleja con aplicaciones a la Teoría de Números*. <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Varcom.pdf>.
- [2] H. M. Edwards, *Advanced Calculus*. Springer, 2014.
- [3] A. J. van der Poorten, *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$* . *An informal report*. *Math Intelligencer* **1**, 1979. p. 195-203.
- [4] K. B. T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs*. *Inventiones Mathematicae* **146**, 2001. p. 193-207.
- [5] V. V. Zudilin, *One of the numbers  $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$  is irrational*. *Uspekhi Mat. Nauk* **56**, 149–150, 2001. Traducción al inglés en *Russian Math. Surveys* **56**, 2001, p. 774–77.
- [6] B. Riemann, *On the Number of Prime Numbers less than a Given Quantity*. (*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*). *Monatsberichte der Berliner Akademie*, November 1859. Translated by David R. Wilkins in 1998. <https://www.claymath.org/sites/default/files/ezeta.pdf>.
- [7] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction  $\zeta$  de Riemann*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. **158**, 1914. p. 1012-1014.
- [8] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line*. *Math.Z.* **10**, 1921. p. 283-317.
- [9] H. Bohr and E. Landau, *Ein satz über dirichletsche reihen mit anwendung auf die  $\zeta$ -funktion und die  $l$ -funktionen*. *Rend. Circ. Mat. Palermo*. **37**, 1914. p. 269-272.
- [10] LMFDB Collaboration, "The Zeros of the Riemann Zeta-function. Database." <http://www.lmfdb.org/zeros/zeta/>, 2013. [Online; accessed 19 June 2018].

- 
- [11] A. J. Hildebrand, *Introduction to Analytic Number Theory. Lecture Notes, Fall 2005*. University of Illinois, 2013. <https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/>.
- [12] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*. Academic Press, 1974.
- [13] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Oxford: Clarendon Press, 2 ed., 1986.
- [14] A. Ivic, *The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*. John Wiley & Sons, 1985.
- [15] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 2000.
- [16] M. D. Coleman, *Analytic Number Theory Lecture Notes*. 2018. <http://www.maths.manchester.ac.uk/~mdc/MATH41022.htm>.
- [17] R. V. Churchill, *Variable Compleja y Aplicaciones*. Springer, 5 ed., 1992.
- [18] H. Davenport, *Multiplicative Number Theory*. Springer, 2 ed., 1980.
- [19] H. Iwaniec and E. Kowalski, *Analytic Number Theory*. Board, 1969.
- [20] W. Narkiewicz, *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*. Springer, 1991.