

Gradu Amaierako Lana / Trabajo Fin de Grado

Fisikako Gradua / Grado en Física

---

# Introducción a la Gravedad Cuántica de Lazos

---

Egilea/Autor:

Asier Alonso Bardají

Zuzendaria/Director:

Iñaki Garay Elizondo

Leioa, 2018ko ekaina / Leioa, junio de 2018

## Abstract

One of the most significant open problems in theoretical physics is that concerning the quantum behaviour of gravity. In this work, the theory known as Loop Quantum Gravity is introduced in order to provide a quantum description of the gravitational field.

Loop Quantum Gravity starts from a hamiltonian formulation of General Relativity based on Ashtekar variables. When quantizing in the loop representation, spin networks arise as a way to work with the constraints of the theory. Loop Quantum Gravity provides a picture of the universe in which area and volume take discrete values at very small scales and succeeds in providing a background to study some phenomena (such as black hole entropy or the origin of the universe) where both, gravity and quantum effects, play an important role.

## Resumen

La descripción cuántica de la interacción gravitatoria es uno de los mayores problemas sin resolver en el ámbito de la física teórica. En este trabajo se presenta la teoría conocida como Gravedad Cuántica de Lazos, una de las candidatas a ofrecer una descripción cuántica del campo gravitatorio.

La Gravedad Cuántica de Lazos parte de una formulación hamiltoniana de la Relatividad General elaborada en función de las variables de Ashtekar. Para implementar las ligaduras de la teoría a la hora de cuantizar, se trabaja en la representación de lazos, donde se introducen las estructuras conocidas como redes de spin. La descripción dada por la Gravedad Cuántica de Lazos conlleva una discretización del área y del volumen a pequeñas escalas, lo que puede emplearse para estudiar fenómenos (tales como la entropía de los agujeros negros o el origen del universo) en los que tanto la gravedad como los efectos cuánticos tienen un papel importante.

## Laburpena

Fisika teorikoaren arloan kolokan dagoen arazo garrantzitsuenetariko bat eremu grabitatorioaren kuantizazioa da. Lan honetan grabitatearen azalpen kuantiko bat lortzen saiatzen den teoria bat aurkeztuko da: Kiribilen Grabitate Kuantikoa.

Ashtekar-en aldagaien bidez lortutako Erlatibitate Orokorren adierazpen hamiltondarra dauka Kiribilen Grabitate Kuantikoak abiapuntu. Kuantizatzeko orduan, teoriaren loturekin lan egiteko, kiribilen adierazpena erabili ohi da, non spin-sareak deritzen egiturak agertzen diren. Kiribilen Grabitate Kuantikoak gainazalari eta bolumenari espektro diskretu bat esleitzen die eskala oso txikitik eta zenbait gertakari (zulo beltzen entropia edo unibertsoaren jatorria, besteak beste) aztertze oinarriak ezartzen ditu.

# Índice General

|   |            |
|---|------------|
| <b>Resumen</b>  | <b>II</b>  |
| <b>Índice General</b>   | <b>III</b> |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>1</b>   |
| 1.1. Cuantización de la gravedad . . . . .                          | 1          |
| 1.2. En busca de una teoría adecuada . . . . .                      | 2          |
| 1.3. Gravedad Cuántica... ¿de Lazos? . . . . .                      | 3          |
| 1.4. Principales obstáculos en Gravedad Cuántica de Lazos . . . . . | 4          |
| <b>2. Relatividad General</b>                                       | <b>5</b>   |
| 2.1. Ecuaciones de Einstein . . . . .                               | 6          |
| 2.2. Formulación Hamiltoniana . . . . .                             | 7          |
| 2.2.1. Lagrangiano de la Relatividad General . . . . .              | 8          |
| 2.2.2. Descomposición 3+1 . . . . .                                 | 8          |
| 2.2.3. Formalismo ADM . . . . .                                     | 12         |
| 2.3. Variables de Ashtekar . . . . .                                | 14         |
| 2.3.1. Tríadas . . . . .  | 14         |
| 2.3.2. Conexión de Spin . . . . .                                   | 15         |
| 2.3.3. Hamiltoniano y Ligaduras . . . . .                           | 16         |
| <b>3. Cuantización</b>  | <b>19</b>  |
| 3.1. Principios de la Cuantización Canónica . . . . .               | 19         |
| 3.2. Ecuación de Wheeler-DeWitt . . . . .                           | 20         |
| 3.3. Representación de las Conexiones . . . . .                     | 21         |
| <b>4. Gravedad Cuántica de Lazos</b>                                | <b>23</b>  |
| 4.1. Representación de Lazos . . . . .                              | 23         |
| 4.2. Redes de Spin . . . . .  | 25         |
| 4.3. Operadores Geométricos . . . . .                               | 26         |
| <b>5. Aplicaciones</b>  | <b>29</b>  |
| 5.1. Entropía de Agujeros Negros . . . . .                          | 29         |
| 5.2. Cosmología Cuántica de Lazos . . . . .                         | 31         |
| <b>6. Conclusiones</b>  | <b>34</b>  |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>IV</b>  |

# 1 Introducción

La Relatividad General y la Mecánica Cuántica han revolucionado nuestra forma de entender el universo y han supuesto un importante avance en numerosos ámbitos científicos y tecnológicos. La primera cambió por completo nuestra perspectiva del espacio y del tiempo, mientras que las teorías cuánticas rompieron el determinismo de la dinámica e introdujeron una visión discreta de la realidad a pequeñas escalas. Tecnologías como el GPS o dispositivos como los ordenadores, teléfonos móviles y un largo etcétera serían inconcebibles de no ser por el desarrollo previo de estas teorías. No obstante, ni la Mecánica Cuántica ni la Relatividad General son suficientes a la hora de estudiar fenómenos en los que ambas teorías tienen un papel importante de forma simultánea, como los agujeros negros o el origen del universo. Para ello es necesaria una descripción cuántica del campo gravitatorio. Persiguiendo este objetivo, la Gravedad Cuántica de Lazos (Loop Quantum Gravity, en inglés), propone una cuantización canónica de la Relatividad General.

El objetivo de este trabajo es ofrecer una breve introducción a la Gravedad Cuántica de Lazos. Partiendo de las ecuaciones de campo de la Relatividad General, se buscará una descripción hamiltoniana de la misma para tratar de aplicar las reglas de cuantización canónicas. Para ello, será imprescindible introducir las variables de Ashtekar y trabajar en lo que se denomina la representación de las conexiones. Finalmente, se analizarán las bases de la Gravedad Cuántica de Lazos y se estudiarán ciertas aplicaciones como la cosmología cuántica de lazos y la termodinámica de agujeros negros.

En esta primera sección se recogen las motivaciones que nos impulsan a buscar una teoría cuántica de la gravedad. Se describen brevemente dos enfoques diferentes: las aproximaciones perturbativa y no perturbativa. Tras analizar, en líneas generales, el desarrollo histórico de la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad, se aducen las principales virtudes de la Gravedad Cuántica de Lazos. Finalmente, se destacan las mayores dificultades a las que aún debe enfrentarse esta teoría.

## 1.1. Cuantización de la gravedad

El origen del universo, la estructura del espacio-tiempo a muy pequeña escala, las singularidades de la Relatividad General o la termodinámica de los agujeros negros son solo algunos de los fenómenos que no se entienden completamente por carecer de una base sólida que permita estudiarlos en profundidad. Esto es lo que busca solucionar la gravedad cuántica: ofrecer un marco teórico que permita analizar en detalle estas y otras situaciones.

A finales del siglo XIX, la física podía explicar el mundo observable mediante dos teorías: las Leyes de Newton por un lado y las ecuaciones de Maxwell por otro, describían de manera satisfactoria la mayoría de los fenómenos que se observaban. Había, sin embargo, ciertos fenómenos que no se atenían a estas leyes, como la estabilidad atómica o la precesión del perihelio de Mercurio. Además, existía una clara incompatibilidad entre ambas teorías: las leyes del electromagnetismo no son invariantes bajo transformaciones galileanas, siendo estas un componente clave de la mecánica newtoniana. Al ahondar en dichos problemas, se produjeron dos importantes revoluciones que refutaron dos principios fundamentales de la Mecánica Clásica [1]. La teoría de la Relatividad de Einstein abolió los conceptos de espacio y tiempo absolutos y adujo que la gravedad era una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo. La Mecánica Cuántica estableció que la probabilidad regía la dinámica en el mundo subatómico, rompiendo así con el determinismo del movimiento clásico.

Hoy en día las circunstancias son similares: la Relatividad General y la Mecánica Cuántica coexisten aportando cada una de ellas predicciones fidedignas dentro de sus respectivos rangos de aplicación. Las ecuaciones de Einstein describen correctamente la interacción gravitatoria a escalas energéticas relativamente bajas y las teorías cuánticas predicen adecuadamente el comportamiento de los componentes elementales de la materia en ausencia de la gravedad. Sin embargo, hay límites en los cuales ninguna de las dos arroja resultados satisfactorios. La teoría cuántica está plagada de divergencias a cortas distancias y la Relatividad General presenta singularidades cuando la densidad de energía es lo suficientemente elevada. Podemos encontrar otro problema en las propias ecuaciones de Einstein: estas relacionan la geometría, determinada por una teoría clásica, con la materia, descrita por el Modelo Estándar [1]. El objetivo de la gravedad cuántica es solucionar estos problemas y aportar una descripción consistente de los fenómenos en los que tanto las interacciones cuánticas como la gravedad son relevantes.

Los fenómenos que estas teorías no describen adecuadamente ocurren a escalas energéticas que no se podrán alcanzar en los laboratorios en un futuro cercano [2]. Pero esto no es una razón para cejar en el intento de obtener una teoría cuántica de la gravedad. A principios del siglo pasado tampoco eran realizables experimentos sobre la estabilidad de los átomos. Sin embargo, un desarrollo teórico fue lo que impulsó los avances tecnológicos de los que disfrutamos hoy en día en ámbitos tan diversos como las telecomunicaciones, la medicina, la informática, etc. De la misma forma, no sería de extrañar que una teoría cuántica de la gravedad, además de arrojar luz sobre los fenómenos mencionados anteriormente, contribuyese al desarrollo tecnológico y humano.

## 1.2. En busca de una teoría adecuada

Nada más aparecer la teoría de la Relatividad General se empezó a pensar en cómo los efectos cuánticos podrían modificarla. A mediados de la década de 1930, Bronstein demostró que, al contrario de lo que ocurre en electromagnetismo, los efectos cuánticos impiden que el campo gravitatorio pueda ser medido en una región arbitrariamente pequeña. Este resultado es una de las bases de la gravedad cuántica, ya que implica la necesidad de generalizar los métodos de cuantización [3].

A la hora de cuantizar el campo gravitatorio se puede proceder de dos formas distintas [2,4]: partiendo de una visión perturbativa o a través de un planteamiento no perturbativo. El desarrollo de ambas perspectivas ha seguido un camino similar [6]. Las ideas básicas sobre la cuantización de la gravedad aparecieron en los años treinta y para finales de la década

de los cincuenta, las principales líneas de investigación habían sido establecidas. Durante la siguiente década, ambas ramas experimentaron un gran desarrollo que se vio interrumpido por las dificultades técnicas. En los años ochenta nacieron la Teoría de Cuerdas (en el ámbito perturbativo) y la Gravedad Cuántica de Lazos (en el contexto no perturbativo) que dieron un nuevo impulso a la investigación en este campo. Tras una década de intenso crecimiento, a finales de siglo ambas teorías comenzaron a proporcionar predicciones físicas como, por ejemplo, relaciones entre la superficie de los agujeros negros y su entropía, que reproducen, tras las aproximaciones pertinentes, la fórmula de Bekenstein-Hawking [5].

Pese a haber tenido un desarrollo histórico similar, ambas corrientes parten de ideas diferentes [4]. La visión perturbativa sigue las ideas de las Teorías Cuánticas de Campos que han logrado resultados admirables en física de partículas. Dicho planteamiento consiste en calcular fluctuaciones alrededor de una métrica dada y analizar la gravedad mediante partículas interaccionantes. Por otro lado, la rama no perturbativa considera que toda la métrica está cuantizada y trata de resolver la ecuación de autovalores del hamiltoniano que opera en el espacio de configuraciones de la Relatividad General. Conviene realizar un apunte: mientras que la Teoría de Cuerdas se plantea como una teoría de unificación de las fuerzas, la Gravedad Cuántica de Lazos trata únicamente de cuantizar la gravedad, sin pretender explicar el resto de interacciones fundamentales.

### 1.3. Gravedad Cuántica... ¿de Lazos?

La Gravedad Cuántica de Lazos surgió a finales de los años ochenta siguiendo la línea no perturbativa de cuantización [6]. Un argumento a favor de esta corriente se puede discutir mediante un sencillo ejemplo: el oscilador armónico. Si se plantea el problema de una partícula libre y se añade el potencial como una perturbación, no se puede observar la discretitud del espectro energético, ni siquiera para frecuencias bajas [7]. Esta es una manera fácil de ver que una aproximación perturbativa no siempre es válida.

Además de evitar el problema anterior, la visión no perturbativa respeta en todo momento un aspecto clave de la Relatividad General: la *independencia del fondo* (*background independence*, en inglés). Se llama «fondo» a cualquier entidad inmutable sobre la que se definen las leyes físicas. Por ejemplo, el espacio absoluto en mecánica newtoniana o la métrica minkowskiana en física de partículas [8]. La independencia del fondo busca eliminar esta dependencia de las ecuaciones que describen la teoría. Este es un elemento fundamental [2,9] a la hora de obtener una teoría cuántica de la gravedad. Mientras que las teorías perturbativas sacrifican este concepto al comienzo del desarrollo y tratan de recuperarlo más adelante, la Gravedad Cuántica de Lazos toma la independencia del fondo como eje central de la teoría.

La Gravedad Cuántica de Lazos también emplea otra enseñanza de la Relatividad General: el Principio de Acoplamiento Mínimo [10]. Este es un principio de simplicidad; plantea que no se deben añadir más términos de los esenciales al pasar de la teoría de la relatividad especial a la general. Siguiendo esta pauta, se parte de la teoría de Einstein y, se aplican los principios de la Mecánica Cuántica para obtener una teoría cuántica del campo gravitatorio matemáticamente consistente.

Para obtener una descripción cuántica de la teoría de Einstein, se utilizan los principios de la cuantización canónica; es decir, se busca una formulación hamiltoniana de la Relatividad General, escrita en función de las variables de Ashtekar, y se promueven dichas variables a operadores cuánticos transformando sus corchetes de Poisson en conmutadores.

Recapitulando, desde un punto de vista no perturbativo y siguiendo las líneas marcadas por la cuantización canónica, se busca una teoría matemáticamente consistente que respete en todo momento la independencia del fondo sin requerir nuevas estructuras. La Gravedad Cuántica de Lazos es una propuesta que, partiendo de estas ideas, ofrece un marco para estudiar el comportamiento cuántico del campo gravitatorio.

## 1.4. Principales obstáculos en Gravedad Cuántica de Lazos

Uno de los mayores problemas a los que debe enfrentarse una teoría que describa cuánticamente la gravedad es la unificación de dos teorías tan dispares como son la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. La primera aboga por un espacio-tiempo curvo, continuo y dinámico, en el que el movimiento es determinista, mientras que la segunda da cuenta de un mundo en el que la probabilidad rige la dinámica de partículas cuantizadas sobre un espacio-tiempo fijo. Esta contraposición de ideas hace que la cuantización del campo gravitatorio se haya convertido en uno de los mayores rompecabezas de la física teórica [11], ya que, por ahora, ninguna teoría ha sido capaz de combinar satisfactoriamente ambos principios.

Otra prueba que debe superar cualquier teoría es la de predecir correctamente situaciones físicas. No obstante, la dificultad es doble en el ámbito de la gravedad cuántica. Primero se debe realizar una predicción que no dependa de ningún parámetro libre de la teoría. Esto de por sí no es sencillo pero, además, hay una falta casi absoluta de datos experimentales. Las escalas energéticas a las que los efectos cuánticos de la gravedad comienzan a ser significativos están quince órdenes de magnitud por encima de los experimentos actuales en el LHC [1]. Los datos empíricos que podemos obtener actualmente sobre el comportamiento cuántico en agujeros negros o sobre el origen del universo también son casi nulos. Esta carencia de información observacional limita en gran medida los avances de la teoría. Sin embargo, se está llevando a cabo un amplio trabajo sobre fenomenología de gravedad cuántica y es posible que el análisis de las ondas gravitatorias por medio del futuro detector LISA o el estudio de la cosmología temprana, entre otros, aporten evidencias observacionales en este ámbito.

También se deben destacar las dificultades técnicas debidas al carácter no lineal de las ecuaciones de Einstein. Además, se deben generalizar las técnicas de cuantización para que respeten la independencia del fondo [3]. Todo ello hace de la gravedad cuántica un problema sumamente complejo.

Como se ha mencionado al principio de la sección, la Relatividad General describe un espacio-tiempo continuo y curvo. Pero además de esto, evoluciona en el tiempo; es decir, es dinámico. Este es el principal problema al hablar sobre la Gravedad Cuántica de Lazos y es que aún no se ha podido implementar la dinámica de la teoría.

Por último, una condición necesaria para validar cualquier teoría es que reproduzca los resultados conocidos en el límite apropiado. Así, la Relatividad General reproduce la gravitación newtoniana en la aproximación de campo débil y la Relatividad Especial ofrece las mismas predicciones que la Mecánica Clásica para velocidades bajas. Hasta el momento no se ha podido encontrar un sector semiclásico en el que la Gravedad Cuántica de Lazos recupere la geometría suave predicha por las ecuaciones de Einstein [9].

## 2 Relatividad General

Desde finales del siglo XVII, la Ley de la Gravitación Universal de I. Newton había sido aceptada como la descripción correcta de la fuerza gravitatoria. Esto cambió con la aparición en 1905 de la Relatividad Especial. La acción instantánea a distancia entre dos masas descrita por la gravitación newtoniana era incompatible con los principios relativistas, en los que la velocidad de la luz es la máxima velocidad a la que puede transmitirse información. Tras casi una década de dedicación, A. Einstein presentó la teoría de la Relatividad General [12], que, respetando los preceptos de la Relatividad Especial, ofrecía una nueva descripción del campo gravitatorio en la que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

La teoría de la Relatividad General se basa en dos principios fundamentales: el principio de equivalencia y el principio de covariancia general [10]. El primero estipula que todas las masas experimentan la misma aceleración bajo la atracción gravitatoria, lo que implica que, localmente, son indistinguibles un sistema de referencia acelerado y uno en reposo bajo la acción de un campo gravitatorio. El segundo principio establece que las leyes de la Física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de referencia; es decir, todos los observadores deben poder obtener los mismos resultados al medir una cantidad física.

La comunidad científica recibió inicialmente la teoría de la Relatividad General con aparente frialdad, debido tanto a la complejidad matemática de la misma como al nuevo punto de vista sobre la naturaleza del espacio y del tiempo que aportaba. Además, las evidencias observacionales que se podían obtener eran reducidas en comparación con otras teorías del siglo XX, como la Relatividad Especial, sin ir más lejos. A pesar de ello, con el transcurso de los años el interés por la teoría aumentó. Esto ocurrió gracias a que se pudieron confirmar experimentalmente ciertas predicciones que realizaba, convirtiéndola en la mejor alternativa para describir la interacción gravitatoria. Uno de los primeros respaldos a la teoría fue la correcta descripción de la precesión del perihelio de Mercurio, que la mecánica newtoniana era incapaz de explicar (existía una discrepancia de 43 segundos de arco por cada cien años). No obstante, fue la comprobación de otra predicción por lo que la Relatividad General comenzó a adquirir popularidad: la desviación de la luz provocada por la gravedad. El hecho de que la luz no sigue una trayectoria recta sino que recorre curvas geodésicas del espacio curvo fue confirmado en primera instancia por Eddington durante el eclipse de 1919. La verificación más reciente de la teoría se produjo en el año 2016, cuando se confirmó la primera detección directa de ondas gravitatorias, las perturbaciones del espacio-tiempo producidas por masas aceleradas que predice la Relatividad General.

El objetivo de este capítulo es obtener un formalismo hamiltoniano de la Relatividad General, que será el punto de partida de la cuantización llevada a cabo en el marco de la Gravedad Cuántica de Lazos. Para ello, se seguirá un procedimiento similar al realizado en sistemas mecánicos clásicos: partiendo de las ecuaciones de campo de Einstein primero se calculará un lagrangiano que las describa adecuadamente para obtener, a continuación, el hamiltoniano mediante una transformación de Legendre.

## 2.1. Ecuaciones de Einstein

La gravedad es única entre las interacciones fundamentales, ya que surge como consecuencia de la curvatura del propio espacio-tiempo. Para un correcto análisis de la Relatividad General, es necesario discutir la notación tensorial. En las siguientes líneas se aportan los elementos necesarios para poder seguir el desarrollo posterior<sup>1</sup>.

La Relatividad General describe el espacio-tiempo como una variedad lorentziana de cuatro dimensiones en la que los cuerpos se mueven siguiendo curvas privilegiadas denominadas geodésicas, que extremizan la distancia entre dos puntos de la variedad.

La métrica  $g_{ab}$  define la distancia infinitesimal entre dos puntos del espacio-tiempo:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b , \quad (2.1)$$

con

$$g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c \quad \text{y} \quad g \equiv \det(g_{ab}) . \quad (2.2)$$

Existen dos convenios para definir la métrica: se puede utilizar una signatura  $(+, -, -, -)$  o una  $(-, +, +, +)$ . Siguiendo el libro *General Relativity* de R. M. Wald [13], se empleará el segundo convenio a lo largo de todo el trabajo.

El paso de un espacio-tiempo plano a uno curvo exige generalizar los conceptos de diferenciación. Se define la derivada covariante de un tensor  $T_{b\dots}^{a\dots}$  como:

$$\nabla_c T_{b\dots}^{a\dots} \equiv \partial_c T_{b\dots}^{a\dots} + \Gamma_{dc}^a T_{b\dots}^{d\dots} + \dots - \Gamma_{bc}^d T_{d\dots}^{a\dots} - \dots . \quad (2.3)$$

El objeto  $\Gamma_{ab}^c$  es conocido como la conexión y se dice que se trabaja con la conexión métrica cuando se anula la derivada covariante de la métrica espacio-temporal ( $\nabla_c g_{ab} = 0$ ). Exigiendo además que sea libre de torsión (es decir, simétrica en sus índices inferiores), la conexión se escribe de forma única en términos de la métrica:

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{db} + \partial_b g_{da} - \partial_d g_{ab}) . \quad (2.4)$$

Para introducir el concepto de curvatura se emplea el tensor de Riemann:

$$R^c{}_{dab} = \partial_a \Gamma_{db}^c - \partial_b \Gamma_{da}^c + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ea}^c - \Gamma_{da}^e \Gamma_{eb}^c \quad (2.5)$$

que en los casos que se tratan, en los que la conexión es simétrica en sus índices inferiores (o libre de torsión), es el conmutador de las derivadas covariantes:

$$R^c{}_{dab} X^d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) X^c \equiv 2\nabla_{[a} \nabla_{b]} X^c , \quad (2.6)$$

<sup>1</sup>Se emplea el convenio de sumación de Einstein, que implica sumar sobre los índices repetidos.

Es útil definir también el tensor de Ricci:

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} \quad (2.7)$$

y el escalar de curvatura (o escalar de Ricci):

$$R = R_{ab}g^{ab} \quad (2.8)$$

Con esta base matemática se puede empezar a comprender la teoría de la Relatividad General que Albert Einstein publicó en 1916 [12], extendiendo la Relatividad Especial para incorporar la gravedad en ella. Las ecuaciones de campo de la Relatividad General son:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}, \quad (2.9)$$

siendo  $T_{ab}$  el tensor de energía-momento.

Estas ecuaciones son las que determinan qué geometrías pueden ocurrir en la naturaleza y lo que indican, de forma cualitativa, es lo siguiente: la materia le dice al espacio cómo ha de curvarse y es dicha curvatura la que dicta cómo ha de moverse la materia. La parte izquierda de las ecuaciones está relacionada con la geometría del espacio-tiempo mientras que la parte derecha da cuenta del contenido de materia y energía del mismo.

A pesar de la aparente simplicidad de la fórmula anterior, las ecuaciones de la Relatividad General son notablemente complejas y difíciles de resolver. Son diez ecuaciones en derivadas parciales acopladas y no lineales. Dichas ecuaciones contienen el tensor y el escalar de Ricci, formados por la conexión y sus primeras derivadas (2.5). La conexión a su vez viene dada en función de las primeras derivadas del tensor métrico (2.4). La complejidad matemática de esta teoría será un importante obstáculo a la hora de cuantizarla.

En adelante, se utilizarán unidades en las que  $8\pi G = c = \hbar = 1$ .

## 2.2. Formulación Hamiltoniana

Tal y como se ha mencionado anteriormente, el objetivo en este capítulo es hallar una descripción hamiltoniana de la Relatividad General. Para ello se necesita, en primera instancia, obtener un lagrangiano que reproduzca las ecuaciones de campo de Einstein.

En adelante, se analizarán únicamente las ecuaciones de vacío; es decir:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0 \quad (2.10)$$

donde  $G_{ab}$  es el tensor de Einstein.

Esto permite estudiar la parte geométrica de la Relatividad General, sin entrar en detalles concretos sobre el contenido de materia del universo. Posteriormente se puede acoplar la materia a la teoría introduciendo un término adicional en el lagrangiano que dé cuenta de la misma.

La condición (2.10) implica que  $R_{ab} = 0$ , ya que el escalar de Ricci se anulará:

$$G_{ab}g^{ab} = R_{ab}g^{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}g^{ab} = R - 2R = 0 \rightarrow R = 0. \quad (2.11)$$

### 2.2.1. Lagrangiano de la Relatividad General

El principio variacional precisa de la especificación de una densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  escalar de peso +1 para que se pueda definir la acción sobre una región  $\Omega$  de la variedad.

$$S[g^{ab}] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(g^{ab}, \partial_c g^{ab}, \partial_d \partial_c g^{ab}, \dots) d\Omega. \quad (2.12)$$

El principio de acción estacionaria estipula que si se realizan variaciones arbitrarias sobre la métrica que se anulen sobre la superficie  $\partial\Omega$  de la región  $\Omega$ , entonces  $S$  debe ser estacionaria; es decir:

$$\delta S = \int_{\Omega} \mathcal{L}_{ab} g^{ab} d\Omega = 0. \quad (2.13)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al principio de acción estacionaria vendrán dadas por:

$$\mathcal{L}_{ab} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} = 0. \quad (2.14)$$

Se verifica que la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R \quad (2.15)$$

describe adecuadamente las ecuaciones de vacío de Einstein.

Para ello se calcula una variación de la densidad lagrangiana:

$$\delta \mathcal{L}_G = \delta(\sqrt{-g}) R + \sqrt{-g} \delta R_{ab} g^{ab} + \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab}, \quad (2.16)$$

con

$$\delta(\sqrt{-g}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \delta g_{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab} \quad (2.17)$$

y el segundo término en (2.16) se descarta ya que, al estar formado únicamente por derivadas totales, contribuye solamente con un término de frontera. Teniendo esto en cuenta, se obtiene:

$$\delta \mathcal{L}_G = \sqrt{-g} (R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}) \delta g^{ab} \quad (2.18)$$

y por el principio de variación estacionaria:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta g^{ab}} = 0 \rightarrow R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0, \quad (2.19)$$

que son las ecuaciones de vacío de Einstein (2.10).

### 2.2.2. Descomposición 3+1

La descripción hamiltoniana describe la evolución temporal de las variables espaciales, lo que choca con el principio de covariancia de la Relatividad General, que trata todas las variables espacio-temporales en pie de igualdad.

Para encarar este problema, es necesario reescribir la Relatividad General como un problema de Cauchy. Para expresar la teoría como un problema de valores iniciales, se emplea la descomposición 3+1, en la que se divide la variedad cuadrdimensional en dos partes: se escoge una dirección «temporal» y una hipersuperficie tridimensional «espacial».

Esto es siempre posible en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, en el que se escogen una función temporal  $t$  y un campo vectorial  $t^a$  tales que las superficies  $\Sigma_t$  a  $t$  constante sean de tipo espacio y se satisfaga la condición  $t^a \nabla_a t = 1$ . De esta manera, se puede interpretar que el vector  $t^a$  describe el «flujo temporal» y relaciona las hipersuperficies  $\Sigma_t$  con la inicial  $\Sigma_0$ . El parámetro  $t$  será el que identifique las distintas hipersuperficies espaciales de la foliación de la variedad.

Sea  $n^a$  el campo vectorial ortogonal a la superficie de Cauchy  $\Sigma$ . Entonces, respetando la signatura  $(-, +, +, +)$ , se puede definir una métrica espacial definida positiva sobre la misma:

$$q_{ab} \equiv g_{ab} + n_a n_b \quad (2.20)$$

que cumpla las condiciones:

$$q_{ab} q^{bc} = \delta_a^c \quad \text{y} \quad q^{ab} \nabla_a t = 0. \quad (2.21)$$

Esto permite descomponer el vector  $t^a$  en dos componentes, normal y tangencial a la hipersuperficie  $\Sigma$ . Se definen la función *lapse*,  $N$ :

$$N = -g_{ab} t^a n^b = -t^a n_a \quad (2.22)$$

y el vector *shift*,  $N^a$ :

$$N^a = -q^a_b t^b. \quad (2.23)$$

Es conveniente obtener también la expresión covariante del vector *shift*:

$$N_a = g_{ac} N^c = g_{ac} q^c_b t^b = q_{ab} t^b. \quad (2.24)$$

El campo vectorial  $t^a$ , separado en sus componentes normal y tangencial a  $\Sigma$  es:

$$t^a = N n^a + N^a. \quad (2.25)$$

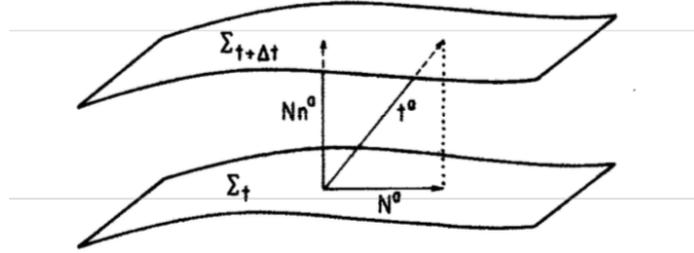


Figura 2.1: Representación esquemática de la descomposición 3 + 1 tomada de la referencia [13]. Diagrama espacio-temporal que muestra el significado geométrico de la función *lapse* ( $N$ ) y el vector *shift* ( $N^a$ ).

El *lapse* ( $N$ ) mide el flujo de tiempo propio ( $\tau$ ) respecto a la coordenada temporal ( $t$ ) al desplazarse de manera ortogonal respecto a la superficie  $\Sigma$ , mientras que el *shift* ( $N^a$ ) aporta la cantidad de desplazamiento tangencial respecto a la misma que contiene el flujo temporal  $t^a$ .

Multiplicando la fórmula (2.25) por el gradiente del tiempo se obtiene otra expresión para la función *lapse*:

$$1 = t^a \nabla_a t = N n^a \nabla_a t + N^a \nabla_a t \quad \rightarrow \quad N = (n^a \nabla_a t)^{-1} \quad (2.26)$$

ya que, debido a la condición (2.21), se tiene que:  $N^a \nabla_a t = 0$ .

El campo vectorial ortogonal a la hipersuperficie de Cauchy  $n^a$  se puede reescribir en función del *lapse* y el *shift* de la siguiente manera:

$$n^a = \frac{1}{N}(t^a - N^a) \quad (2.27)$$

Con esta última expresión se puede escribir la inversa de la métrica espacio-temporal como:

$$g^{ab} = q^{ab} - n^a n^b = q^{ab} - \frac{1}{N^2}(t^a - N^a)(t^b - N^b) \quad (2.28)$$

Invirtiendo la expresión anterior se obtiene la métrica espacio-temporal:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & -N_a \\ -N_a & q_{ab} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

De donde se deduce que la información contenida en  $(q_{ab}, N$  y  $N_a)$  es la misma que la proporcionada por  $g_{ab}$ .

Además, el determinante de la métrica vendrá dado por:

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{q} \quad (2.30)$$

Antes de terminar esta sección es necesario analizar cómo cambian los tensores y operadores de la Relatividad General al trabajar con la descomposición 3+1. También se debe introducir un nuevo concepto, la curvatura extrínseca, relacionada con la «derivada temporal» de la métrica inducida.

La derivada de Lie evalúa la variación de un campo tensorial a lo largo del flujo de otro campo vectorial. El resultado es un tensor independiente de la conexión (siempre que sea libre de torsión). La derivada de Lie de un campo tensorial  $T_{b \dots}^{a \dots}$  a lo largo del campo vectorial  $X^a$  se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_X T_{b \dots}^{a \dots} = X^c \nabla_c T_{b \dots}^{a \dots} + T_{c \dots}^{a \dots} \nabla_b X^c + \dots - T_{b \dots}^{c \dots} \nabla_c X^a - \dots \quad (2.31)$$

La derivada de Lie de la métrica inducida está relacionada con su «derivada temporal»:

$$\dot{q}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t q_{ab} = N \mathcal{L}_n q_{ab} + \mathcal{L}_N q_{ab} \quad (2.32)$$

donde se ha utilizado la igualdad (2.25). El primer término de esta última expresión está relacionado con la curvatura extrínseca de  $q_{ab}$ .

El concepto de curvatura extrínseca proviene de considerar una superficie como parte de un espacio de mayor dimensionalidad. Por ejemplo, la superficie de un cilindro no difiere del espacio plano analizada únicamente desde puntos localizados sobre su superficie, pero vista desde el espacio tridimensional, se aprecia una curva alrededor de una dirección conocida como eje de simetría. La primera noción se refiere a la curvatura intrínseca mientras que la curvatura percibida por observadores en un espacio de dimensiones más altas se denomina curvatura extrínseca.

La curvatura extrínseca representa una noción bien definida de la derivada temporal de la métrica espacial de una hipersuperficie  $\Sigma$  embebida en el espacio-tiempo cuatridimensional. Se define la curvatura extrínseca de la hipersuperficie  $\Sigma_t$  vista desde el espacio-tiempo cuatridimensional como el tensor simétrico:

$$K_{ab} = q_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} = K_{ba} . \quad (2.33)$$

Y mediante la igualdad (2.32) se obtiene:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_N q_{ab}) . \quad (2.34)$$

Aplicando la definición (2.31) y la condición de que la derivada covariante aniquile la métrica, esta expresión se reduce a:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - (N^c \nabla_c q_{ab} + q_{cb} \nabla_a N^c + q_{ac} \nabla_b N^c)] \\ &= \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - (D_a N_b + D_b N_a)] = \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - 2D_{(a} N_{b)}] , \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde se ha utilizado la derivada covariante  $D_a$  definida sobre la hipersuperficie  $\Sigma$ :

$$D_c T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \equiv \left( q_{d_1}^{a_1} \dots q_{d_k}^{a_k} q_{b_1}^{l_1} \dots q_{b_l}^{l_l} \right) q_c^f \nabla_f T_{d_1 \dots d_m}^{c_1 \dots c_n} . \quad (2.36)$$

Esta última expresión es la proyección de la derivada covariante sobre el espacio tangente a la superficie de Cauchy  $\Sigma$ , que es compatible con la métrica  $q_{ab}$ :

$$D_a q_{bc} = q_a^d q_b^e q_c^f \nabla_d (g_{ef} + n_e n_f) = 0 , \quad (2.37)$$

ya que  $q_{ab} n^b = 0$ .

Se ha obtenido una descripción de la curvatura extrínseca de  $\Sigma$  y una expresión para su derivada temporal. Pero es necesario definir también la curvatura intrínseca que en el espacio-tiempo cuatridimensional se mide mediante el tensor de Riemann (2.6). Dentro del formalismo de la descomposición 3+1, se deben utilizar proyecciones del mismo, lo que da lugar a las relaciones de Gauss-Codacci. Para distinguir los elementos definidos solamente en tres dimensiones se escribirán con un superíndice  $(3)$  a la izquierda.

De la definición (2.36) se obtiene el tensor de curvatura intrínseca de manera análoga a como se hacía con el tensor de Riemann en la variedad cuatridimensional (2.6):

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d {}^{(3)}X_d = 2 D_{[a} D_{b]} {}^{(3)}X_c . \quad (2.38)$$

Partiendo de esta ecuación se busca una relación entre  ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$  y  $R_{abc}{}^d$ . Aplicando la definición de la derivada covariante  $D_a$  se tiene que:

$$\begin{aligned} D_a D_b {}^{(3)}X_c &= D_a (q_b^d q_c^e \nabla_d {}^{(3)}X_e) \\ &= q_a^f q_b^g q_c^k \nabla_f (q_g^d q_k^e \nabla_d {}^{(3)}X_e) \\ &= q_a^f q_b^d q_c^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}X_e + q_b^d K_{ac} n^e \nabla_d {}^{(3)}X_e + q_c^e K_{ab} n^d \nabla_d {}^{(3)}X_e , \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde se ha empleado el hecho de que:

$$q_a^b q_c^d \nabla_b q_d^e = q_a^b q_c^d \nabla_b (g_d^e + n_d n^e) = K_{ac} n^e . \quad (2.40)$$

El último término en (2.39) se anulará al antisimetrizar (ya que  $K_{ab} = K_{ba}$ ).

Considerando además que:

$$q_b^d n^e \nabla_d {}^{(3)}X_e = q_b^d \nabla_d (n^e {}^{(3)}X_e) - q_b^d {}^{(3)}X_e \nabla_d n^e = -K_b^e {}^{(3)}X_e, \quad (2.41)$$

se sustituyen estos resultados en (2.38) y antisimetrizando se obtiene:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d {}^{(3)}X_d = q_a^f q_b^d q_c^e 2\nabla_{[f} \nabla_{d]} {}^{(3)}X_e - (K_{ac}K_b^e - K_{bc}K_a^e) {}^{(3)}X_e. \quad (2.42)$$

El primer término de la ecuación anterior es precisamente el tensor de Riemann y como esta igualdad se cumple para cualquier campo vectorial tridimensional se tiene:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = q_a^f q_b^g q_c^k q_j^d R_{fgk}{}^j - K_{ac}K_b^d + K_{bc}K_a^d. \quad (2.43)$$

De un modo similar se demuestra que:

$$R_{cd} n^d q_b^c = D_a K_b^a - D_b K_a^a. \quad (2.44)$$

Estas dos expresiones se conocen como las relaciones de Gauss-Codacci [13].

### 2.2.3. Formalismo ADM

El formalismo ADM, nombrado así por sus autores R. Arnowitt, S. Deser y C. W. Misner, es una formulación hamiltoniana de la Relatividad General publicada en 1962 [14]. El objetivo será reescribir la densidad lagrangiana (2.15) en función de la métrica inducida sobre  $\Sigma$  ( $q_{ab}$ ), la función *lapse* ( $N$ ), el vector *shift* en forma covariante ( $N_a$ ) y sus derivadas temporales, ya que estas serán las variables de configuración en el formalismo ADM. Mediante una transformación de Legendre se podrá obtener una descripción hamiltoniana. Durante el resto de la sección se obviarán los términos de frontera en los desarrollos, ya que al integrar para obtener el hamiltoniano total se anularán.

$$H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_G d^3x. \quad (2.45)$$

Para hallar la densidad lagrangiana en función de  $q_{ab}$ ,  $N$  y  $N_a$  se parte de la expresión (2.15) y se emplean el resultado (2.30) y las relaciones de Gauss-Codacci (2.43) – (2.44). Contrayendo la expresión del tensor de Riemann tridimensional (2.43) se obtiene el escalar de Ricci en tres dimensiones (sin tener en cuenta los términos de frontera) [13]:

$${}^{(3)}R = K^2 - K_{ab}K^{ab} + R. \quad (2.46)$$

Despejando el escalar de Ricci  $R$  de esta última expresión y sustituyendo en (2.15) se obtiene:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R = \sqrt{q} N \left[ {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 \right]. \quad (2.47)$$

El hecho de que  $\mathcal{L}_G$  no contenga ningún término relacionado con las derivadas temporales de  $N$  y  $N_a$  implica que sus momentos conjugados son nulos. Esto quiere decir que no se deben ver como variables dinámicas del sistema sino como multiplicadores de Lagrange. El momento canónico conjugado a la variable de configuración  $q_{ab}$  será:

$$\pi^{ab} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta q_{ab}} = \sqrt{q} [K^{ab} - K q^{ab}]. \quad (2.48)$$

El corchete de Poisson entre la métrica espacial y su momento conjugado será:

$$\{q_{ab}(x), \pi^{cd}(x')\} = \frac{1}{2}(\delta_a^c + \delta_b^d) \delta^{(3)}(x - x'). \quad (2.49)$$

Entonces, la densidad hamiltoniana vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_G &= \pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_G \\
&= -\sqrt{q} N {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{q}} \left[ \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right] + 2\pi^{ab} D_a N_b \\
&= \sqrt{q} \left\{ N \left[ -{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab} \pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right] - 2N_b \left[ D_a \left( \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right] + 2D_a \left( \frac{N_b \pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right\} ,
\end{aligned} \tag{2.50}$$

con  $\pi \equiv \pi^a_a$ . El último término de (2.50) es una derivada total, por lo que no contribuirá al hamiltoniano total.

Obviando este último término, la densidad hamiltoniana resultante es:

$$\mathcal{H}_G = N\sqrt{q} \left[ -{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab} \pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right] - 2N_b \sqrt{q} \left[ D_a \left( \frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right] . \tag{2.51}$$

El *lapse* y el *shift* son ligaduras, ya que sus momentos conjugados no aparecen en la densidad hamiltoniana.

$$C^a \equiv \frac{\delta H_G}{\delta N_a} = -2D_a \pi^{ab} = 0 , \tag{2.52}$$

$$C \equiv \frac{\delta H_G}{\delta N} = \sqrt{q} \left( -{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab} \pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right) = 0 . \tag{2.53}$$

La ecuación (2.53) se conoce como la ligadura hamiltoniana mientras que la (2.52) es la ligadura de difeomorfismos. Introduciendo estas dos ecuaciones en la expresión (2.51) se obtiene:

$$\mathcal{H}_G = NC + N_a C^a = 0 . \tag{2.54}$$

Es decir, el hamiltoniano de la Relatividad General es una ligadura, pero esto no implica que la teoría carezca de dinámica [11]. De hecho, esto era de esperar: en la teoría de Einstein no existe la noción de un observador privilegiado respecto al cual se pueda definir una evolución temporal. El hamiltoniano obtenido da cuenta de la «evolución temporal» en función de un parámetro arbitrario sin significado físico. Resulta que el propio hamiltoniano es una ligadura y la dinámica del sistema se encuentra codificada en las relaciones entre las variables físicas que lo constituyen.

Las ecuaciones canónicas de Hamilton proporcionan las ecuaciones dinámicas de la Relatividad General:

$$\dot{q}_{ab} \equiv \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ab}} = \frac{2N}{\sqrt{q}} \left( \pi_{ab} - \frac{1}{2} q_{ab} \pi \right) + 2D_{(a} N_{b)} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_{ab} \equiv -\frac{\delta H_G}{\delta q^{ab}} &= -N\sqrt{q} \left( {}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R q^{ab} \right) + \frac{N}{2\sqrt{q}} q^{ab} \left( \pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\
&\quad - \frac{2N}{\sqrt{q}} \left( \pi^{ac} \pi_c^b - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) + \sqrt{q} \left( D^a D^b N - q^{ab} D^c D_c N \right) \\
&\quad + \sqrt{q} D_c \left( \frac{N^c \pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) - 2\pi^{c(a} D_c N^{b)} .
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Las ecuaciones (2.55) y (2.56) junto con las ligaduras (2.53) y (2.52) son equivalentes a las ecuaciones de vacío de Einstein (2.10).

En resumen, partiendo de la densidad lagrangiana de la Relatividad General, se ha obtenido una descripción hamiltoniana de la misma en la que la métrica espacial tridimensional inducida sobre las superficies de Cauchy es la variable de configuración y su momento canónicamente conjugado está relacionado con la curvatura extrínseca (2.48).

## 2.3. Variables de Ashtekar

En la sección anterior se ha obtenido una descripción satisfactoria de la Relatividad General mediante el formalismo hamiltoniano. No obstante, la cuantización llevada a cabo sobre esta formulación no aporta resultados satisfactorios, como se verá en el siguiente capítulo. En 1987, Ashtekar [15] introdujo unas nuevas variables, las tríadas y las conexiones, que dieron un nuevo empuje a la línea canónica de cuantización de la gravedad.

### 2.3.1. Tríadas

Las tétradas son un conjunto de campos vectoriales que relacionan el espacio-tiempo curvo con el de Minkowski en cada punto de la siguiente manera:

$$g_{ab} = E_a^i E_b^j \eta_{ij} . \quad (2.57)$$

Estos cuatro campos vectoriales ( $E_a^i$ ) forman una base del espacio tangente a la variedad en cada punto de la misma. Constan de dos índices: los representados por  $a$  y  $b$  son índices relacionados con la métrica espacio-temporal que se comportan de la misma manera que en el resto de tensores vistos hasta ahora. Por otro lado, aparecen los índices internos  $i$  y  $j$  debido a los grados de libertad extra introducidos en esta representación.

Se puede realizar la misma definición con la métrica inducida sobre la hipersuperficie tridimensional, dando lugar a las tríadas:

$$q_{ab} = E_a^i E_b^j \delta_{ij} . \quad (2.58)$$

En este último caso, tanto los índices espaciales  $a, b$  como los internos  $i, j$  pueden tomar valores que van de 1 a 3. Para subir o bajar índices internos se utiliza la métrica plana euclídea ( $\delta_{ij}$ ) en lugar de la espacial.

A la hora de trabajar con los índices internos, se debe definir una nueva derivada de manera similar a la realizada al comienzo de este capítulo (2.3):

$$D_a T_j^{i\dots} = \partial_a T_j^{i\dots} + \Gamma_{ak}^i T_j^{k\dots} + \dots - \Gamma_{aj}^k T_k^{i\dots} - \dots . \quad (2.59)$$

Cuando los índices son mixtos; es decir, aparecen tanto índices espaciales como internos, se deben utilizar ambas expresiones (2.3) y (2.59). En el caso de las tríadas esto resulta en:

$$D_a E_i^b = \partial_a E_i^b + \Gamma_{ac}^b E_i^c - \Gamma_{ai}^j E_j^b . \quad (2.60)$$

La conexión de spin se obtiene exigiendo que la anterior derivada aniquile la tríada:

$$D_a E_i^b = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_{aj}^i . \quad (2.61)$$

A la hora de integrar densidades tensoriales en un elemento de volumen, estas deben ser densidades escalares de peso +1. Para lograrlo, se multiplica (divide), las veces que sea necesario, por la raíz cuadrada del determinante de la métrica y se indica mediante la cantidad de tildes correspondientes en la parte superior (inferior) de la densidad. Para una función escalar  $f$  se tiene que:

$$\tilde{f} \equiv \sqrt{q} f \quad \text{y} \quad \underline{f} \equiv \frac{f}{\sqrt{q}}. \quad (2.62)$$

En el caso de las tríadas estas se deben multiplicar por el determinante de la métrica espacial para poder integrarlas. Llamaremos tríada densitizada a:

$$\tilde{E}_i^a = \sqrt{q} E_i^a. \quad (2.63)$$

Con las tríadas densitizadas la expresión (2.58) se convierte en:

$$\tilde{q}^{ab} = q q^{ab} = \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \delta^{ij}. \quad (2.64)$$

### 2.3.2. Conexión de Spin

Las conexiones serán las variables de configuración en la nueva representación. Una de las ventajas que aportan estas nuevas variables es que se comportan como una conexión de Yang-Mills  $SU(2)$ , por lo que se podrán utilizar ciertas técnicas útiles de dichas teorías para analizar la Relatividad General.

Las teorías de Yang-Mills son una generalización de la teoría electromagnética de Maxwell y han tenido un gran éxito a la hora de describir las interacciones débil y fuerte dentro del Modelo Estándar de partículas. Estas teorías se basan en una invariancia gauge local, que en el caso del electromagnetismo viene descrita por el grupo  $U(1)$ . La Relatividad General escrita en términos de las variables de Ashtekar responde a un gauge  $SU(2)$ , al igual que la interacción débil.

El elemento del álgebra  $A_a$  se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$A_a = \sum_{i=1}^3 A_a^i \sigma^i, \quad (2.65)$$

donde  $A_a^i$  son las componentes en la base dada y  $\sigma^i$  son las matrices de Pauli, generadoras del álgebra  $su(2)$ . Siguiendo con la analogía del electromagnetismo, se denomina «potencial vector» a este elemento.

Las constantes de estructura del álgebra  $su(2)$  son proporcionales a los símbolos de Levi-Civita en tres dimensiones:

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \epsilon^{ijk} \sigma^k. \quad (2.66)$$

Se define la derivada covariante asociada a la teoría de Yang-Mills como:

$$D_a \equiv \partial_a - ig \sigma^i A_a^i, \quad (2.67)$$

siendo la constante  $g$  un parámetro de acoplo.

Al igual que se hace con la derivada covariante espacio-temporal, se puede calcular el conmutador de estas nuevas derivadas, como es habitual en las teorías de Yang-Mills:

$$[D_a, D_b] = -igF_{ab}^i \sigma^i \quad (2.68)$$

donde las cantidades  $F_{ab}^i$  vienen dadas por:

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g \epsilon^{ijk} A_a^j A_b^k. \quad (2.69)$$

Las variables de conexión de Ashtekar se definen de la siguiente manera:

$$A_a^i \equiv \Gamma_a^i + \beta K_a^i. \quad (2.70)$$

La cantidad  $\beta$  es el parámetro de Barbero-Immirzi. Este parámetro puede tomar cualquier valor complejo no nulo, lo que indica que existe toda una familia monoparamétrica de variables de Ashtekar.  $\Gamma_a^i$  es la conexión de spin y  $K_a^i$  está relacionada con la curvatura extrínseca:

$$\Gamma_a^i = \Gamma_{ajk} \epsilon^{jki}, \quad (2.71)$$

$$K_a^i = \frac{K_{ab} \tilde{E}^{ai}}{\sqrt{q}}. \quad (2.72)$$

La conexión da cuenta de la evolución temporal de la métrica tridimensional, como se puede apreciar por la inclusión de la curvatura extrínseca en la expresión (2.70).

### 2.3.3. Hamiltoniano y Ligaduras

En la nueva representación las conexiones serán las variables de configuración y las tríadas densitizadas sus momentos canónicos conjugados. Esto es un cambio importante respecto al formalismo ADM, ya que la métrica pasa de ser una variable de configuración a un momento (la información referida a la métrica se encuentra codificada en las tríadas).

El corchete de Poisson de las nuevas variables es:

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(x')\} = \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(x - x'), \quad (2.73)$$

siendo  $\beta$  el parámetro de Barbero-Immirzi.

La densidad lagrangiana en función de las variables de Ashtekar que se obtiene es [16]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & \frac{1}{\beta} \left[ \tilde{E}_i^a \dot{A}_a^i + N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i \left( D_a \tilde{E}^a \right)^i \right. \\ & \left. + \mathcal{N} \left( \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} \left( \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b \right) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.74)$$

El parámetro  $\lambda^i$  es un multiplicador de Lagrange.

El primer término de la expresión (2.74) es claramente el producto de la derivada temporal de la variable de configuración ( $\dot{A}_a^i$ ) y su momento conjugado ( $\tilde{E}_i^a$ ). Por tanto, la densidad hamiltoniana será:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G = \frac{1}{\beta} & \left[ N^a \tilde{E}_i^b F_{ab}^i + \lambda^i (D_a \tilde{E}^a)^i + \mathcal{N} \left( \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) \right) \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

e integrando esta última expresión se obtiene el hamiltoniano total de la Relatividad General en función de las variables de Ashtekar:

$$H_G = \int \mathcal{H}_G d^3x. \quad (2.76)$$

Las ecuaciones canónicas obtenidas de este hamiltoniano (junto con las ligaduras, que se analizarán a continuación) reproducen, al igual que ocurría en el formalismo ADM, las ecuaciones de vacío de la Relatividad General (2.10).

La Relatividad General describe un sistema completamente ligado, en el que el propio hamiltoniano es una ligadura del sistema. Por ello, conviene destacar los distintos tipos de ligaduras que emergen de la teoría. Volviendo a la expresión (2.75) se observa que no aparecen los momentos conjugados de las variables  $\mathcal{N}$ ,  $N^a$  ni  $\lambda^i$ , indicando que son multiplicadores de Lagrange. Cada uno de ellos dará cuenta de una clase de ligadura.

Las variables de Ashtekar amplían el espacio de fases de la Relatividad General, como se puede apreciar en la expresión (2.58). Es por ello que, además de las dos ligaduras discutidas en el apartado 2.2.3 (ecuaciones (2.53) y (2.52)), aparece una nueva restricción, la conocida como ligadura gaussiana y que es análoga a la Ley de Gauss en electromagnetismo:

$$\mathcal{G}^i = D_a(\tilde{E}_i^a) = 0. \quad (2.77)$$

Esta relación da cuenta de los grados de libertad adicionales que aportan las tríadas respecto a la métrica espacial inducida, relacionados con las simetrías gauge de la descripción hamiltoniana dada por las variables de Ashtekar.

La siguiente ligadura, relacionada con el *shift*, se denomina ligadura de momento o ligadura vectorial:

$$V_b = \tilde{E}_i^a F_{ab}^i = 0. \quad (2.78)$$

Combinando las dos anteriores se recupera la ligadura de difeomorfismos (dada por (2.52) en el formalismo ADM), que da cuenta de la invariancia de la teoría frente a reparametrizaciones de las variables espaciales:

$$C_a = V_a - A_a^i \mathcal{G}^i = \tilde{E}_i^b F_{ba}^i - A_a^i (D_b \tilde{E}_i^b) = 0. \quad (2.79)$$

Finalmente, aparece la ligadura relacionada con el *lapse* y las simetrías temporales: la ligadura hamiltoniana.

$$C = \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k + 2 \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2} (\tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b - \tilde{E}_j^a \tilde{E}_i^b) (A_a^i - \Gamma_a^i) (A_b^j - \Gamma_b^j) = 0. \quad (2.80)$$

A la hora de realizar los cálculos puede parecer prometedor escoger  $\beta = \pm i$ , ya que simplifica en gran medida la expresión anterior:

$$C = \epsilon_{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k = 0. \quad (2.81)$$

No obstante, a la hora de cuantizar la teoría, hay que asegurarse de que esta recupera la Relatividad General en lugar de una variante compleja de la misma. Por ello no conviene tomar un valor complejo del parámetro de Barbero-Immirzi y se considera  $\beta \in \mathbb{R}$ .

El hamiltoniano total de la Relatividad General seguirá siendo una ligadura:

$$\mathcal{H}_G = \frac{1}{\beta} [\tilde{N}C + N^a V_a + \lambda^i \mathcal{G}^i] = 0. \quad (2.82)$$

Cabe destacar que, sin considerar las ligaduras de difeomorfismos, el espacio de fases de la Relatividad General en función de las variables de Ashtekar coincide con el espacio de una teoría de Yang-Mills. Por lo tanto, si se considera la Relatividad General como una teoría de Yang-Mills con cuatro ligaduras extra y un hamiltoniano nulo, se pueden incorporar ciertas técnicas útiles de las teorías de Yang-Mills al estudio de la Relatividad General.

## 3 Cuantización

La Mecánica Cuántica surgió a principios del siglo XX para ofrecer una descripción de la naturaleza a pequeña escala. Para esa época ya se conocían ciertos fenómenos sobre los cuales la Física Clásica no aportaba predicciones adecuadas, como la radiación de cuerpo negro, la estabilidad atómica, las líneas espectrales o la naturaleza dual de la luz, entre otras. Las teorías cuánticas ahondan un poco más en nuestra comprensión del universo, describiendo las leyes físicas que rigen el comportamiento de los átomos y las partículas elementales.

La descripción cuántica difiere de la clásica en ciertos aspectos fundamentales, entre los que se puede destacar la discretitud de ciertas cantidades físicas, como la energía o el momento, lo que choca de frente con el concepto continuo establecido anteriormente. Además, se abandona el determinismo de las teorías clásicas; en Mecánica Cuántica la probabilidad es la que rige la dinámica. También se habla sobre la dualidad onda-partícula, que estipula que los elementos de la teoría poseen características tanto corpusculares como ondulatorias. Finalmente, un concepto fundamental en física cuántica es el principio de incertidumbre, que impone un límite a la precisión con la que se pueden medir simultáneamente dos cantidades físicas complementarias, como la posición y el momento de una partícula.

A finales de los años treinta, para conciliar la Mecánica Cuántica con la Relatividad Especial, se comenzaron a aplicar las técnicas de cuantización a los campos físicos. Este fue el inicio de las Teorías Cuánticas de Campos (Quantum Field Theories) que tanto éxito han cosechado en el ámbito de la física de partículas. La primera teoría en ser cuantizada con éxito fue el campo electromagnético, sirviendo de guía para los siguientes intentos de cuantización.

En este capítulo se presentan las bases del procedimiento conocido como cuantización canónica y se aplica a las dos formulaciones hamiltonianas estudiadas en el capítulo previo. El formalismo ADM desembocará en la ecuación de Wheeler-deWitt mientras que la cuantización de la Relatividad General escrita en función de las variables de Ashtekar irá orientada hacia la formulación de la Gravedad Cuántica de Lazos.

### 3.1. Principios de la Cuantización Canónica

La cuantización canónica es un procedimiento empleado para obtener una descripción cuántica que conserve la estructura dada por los corchetes de Poisson de la teoría clásica [17]. El apelativo «canónico» se debe al papel central que juegan las variables canónicamente conjugadas de la formulación hamiltoniana.

El formalismo hamiltoniano ofrece un marco para describir la evolución de las variables del sistema en función del tiempo. Para ello, es útil mencionar el corchete de Poisson de dos funciones en el espacio de fases, que en el caso unidimensional<sup>1</sup> se define como:

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}, \quad (3.1)$$

donde  $q$  y  $p$  son la variable de configuración y su momento canónicamente conjugado.

La evolución temporal de una función  $A$  vendrá dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3.2)$$

siendo  $H$  el hamiltoniano del sistema.

La cuantización canónica promueve las variables dinámicas clásicas a operadores lineales que actúan sobre funciones de onda que pertenecen a un espacio de Hilbert. El conmutador entre dos operadores se define como sigue:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (3.3)$$

Y se relaciona con el corchete de Poisson de la formulación clásica de la siguiente manera:

$$\{A, B\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \widehat{\{A, B\}}, \quad (3.4)$$

donde se ha reintroducido la constante  $\hbar$  por claridad. La evolución temporal viene dada por la ecuación de Heisenberg que, de forma análoga a la expresión (3.2), determina cómo varían los operadores en función del tiempo:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Las ligaduras también deben cuantizarse y para ello se promueven a operadores que aniquilen las funciones de onda del espacio de Hilbert. A dichas funciones de onda se les denomina estados físicos, ya que las que no satisfagan esta condición no representarán una situación física real.

$$\mathcal{C}(q, p) = 0 \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0. \quad (3.6)$$

## 3.2. Ecuación de Wheeler-DeWitt

Para tratar de obtener una descripción cuántica del campo gravitatorio, se puede aplicar el procedimiento del apartado anterior al formalismo ADM explicado en la sección 2.2.3. Esta es la idea detrás de la ecuación de Wheeler-DeWitt: ofrecer la versión cuántica de la ligadura hamiltoniana utilizando las variables métricas.

Se toman la métrica tridimensional  $q_{ab}$  como variable de configuración y su momento canónico conjugado  $\pi^{ab}$ , relacionado con la curvatura extrínseca. Las funciones de onda dependientes de la métrica espacial  $\Psi[q_{ab}]$  se pueden interpretar como las amplitudes de probabilidad de una geometría determinada.

<sup>1</sup>La generalización a sistemas de más dimensiones y a teorías de campos se realiza siguiendo un procedimiento similar pero por simplicidad no se analiza en estas líneas. El libro *Field Quantization* de G. Reinhardt [18] presenta un desarrollo más detallado.

Como se ha visto, el propio hamiltoniano es una ligadura, por lo que los estados físicos estarán descritos por aquellas funciones que formen parte de su núcleo. De las ecuaciones (2.52 – 2.53) obtenemos:

$$\widehat{C}_a \Psi[q_{ab}] = 0, \quad (3.7)$$

$$\widehat{C} \Psi[q_{ab}] = 0. \quad (3.8)$$

La primera de estas ecuaciones está asociada con la invariancia bajo difeomorfismos espaciales, mientras que la segunda es conocida como la ecuación de Wheeler-DeWitt [19]. Esta es una ecuación diferencial funcional en el espacio de fases de la métrica tridimensional. El funcional de onda  $\Psi[q_{ab}]$  representa la «función de onda del universo», que especifica en cada punto la geometría de las foliaciones espaciales.

Sin embargo, en general, las ecuaciones (3.7 – 3.8) no definen un espacio de Hilbert adecuado sobre el que desarrollar la descripción cuántica, ya que, entre otros aspectos, no tiene un producto interno asociado.

### 3.3. Representación de las Conexiones

El problema que se acaba de mencionar impide obtener una descripción cuántica satisfactoria. La introducción de las variables de Ashtekar plantea un cambio en la representación: la métrica asociada a las tríadas pasa a ser una variable de momento y se considera que las funciones de onda dependen de la conexión  $A_a^i$ . Promoviendo las variables canónicas a operadores, se obtienen las expresiones:

$$\widehat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A), \quad (3.9)$$

$$\widehat{E}_i^a = -i \beta \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}. \quad (3.10)$$

Las relaciones de conmutación entre ambos operadores serán:

$$\left[ \widehat{A}_a^i(x), \widehat{E}_j^b(x') \right] = i \beta \delta_a^b \delta_j^i \delta^{(3)}(x - x'). \quad (3.11)$$

El siguiente paso es promover las ligaduras a operadores que den un valor nulo al actuar sobre las funciones de onda que describan estados físicos. A la hora de promover variables a operadores se debe tener cuidado con el orden de los factores, ya que cantidades que conmutan clásicamente no tienen por qué hacerlo en la descripción cuántica. En el desarrollo que sigue, se han colocado las tríadas a la derecha de las conexiones.

Comenzando por la ley de Gauss, dada por la expresión (2.77), se obtiene:

$$\widehat{G}^i \Psi(A) = -i \beta D_a \frac{\delta \Psi(A)}{\delta A_a^i}. \quad (3.12)$$

La acción de este operador impone la misma simetría que a nivel clásico: las funciones  $\Psi(A)$  deben ser invariantes gauge de la conexión.

Para comprobarlo, es suficiente observar que el efecto producido por  $\widehat{\mathcal{G}}^i$  equivale a una transformación gauge infinitesimal y que la acción de este operador aniquila la función de onda:

$$\left[1 + \int d^3x \lambda^i(x) \widehat{\mathcal{G}}^i\right] \Psi(A) = \Psi(A + D\lambda) = \Psi(A). \quad (3.13)$$

Se realiza la misma operación con la ligadura de momentos, dado por la ecuación (2.78):

$$\widehat{V}_b \Psi(A) = -i\beta \widehat{F}_{ab}^i \frac{\delta\Psi(A)}{\delta A_a^i}. \quad (3.14)$$

Combinando este último resultado con la ley de Gauss se obtiene el operador de difeomorfismos:

$$\widehat{C}_a \Psi(A) = \left(\widehat{V}_a - \widehat{A}_a^i \widehat{\mathcal{G}}^i\right) \Psi(A) = -i\beta \left(\widehat{F}_{ab}^i - A_a^i D_b\right) \frac{\delta\Psi(A)}{\delta A_b^i}, \quad (3.15)$$

que, al igual que en la formulación clásica, implica invariancia bajo difeomorfismos espaciales. Esto se puede comprobar de manera análoga al caso anterior, aplicando un difeomorfismo infinitesimal sobre el estado  $\Psi$ :

$$\left[1 + \widehat{C}(\vec{N})\right] \Psi(A) = \Psi(A + \mathcal{L}_{\vec{N}}A) = \Psi(A), \quad (3.16)$$

donde

$$C(\vec{N}) \equiv \int d^3x N^a C_a \quad (3.17)$$

y el corchete de Poisson entre  $C(\vec{N})$  y una función de las variables canónicas es proporcional a su derivada de Lie:

$$\{C(\vec{N}), f(\vec{E}, A)\} \sim \mathcal{L}_{\vec{N}}f. \quad (3.18)$$

El mayor problema surge cuando consideramos la ligadura hamiltoniana. Clásicamente esta ligadura está asociada con los difeomorfismos temporales, lo que no genera una acción geométrica clara sobre las variables espaciales de la foliación. También es destacable la presencia de pares de tríadas en cada uno de los términos de la ligadura (2.80) que implican derivadas funcionales de segundo orden sobre los estados  $\Psi(A)$ , lo que conlleva productos de distribuciones, operaciones que no están bien definidas [16].

En la sección 3.1 se ha hablado sobre un espacio de Hilbert formado por las funciones de onda y sobre el que se definen los operadores de la teoría cuántica. No obstante, para considerarlo un espacio de Hilbert, debe tener un producto interior. Sin dicho producto, la teoría carece de poder predictivo, ya que no se pueden calcular probabilidades ni valores esperados. Este es un serio problema a la hora de obtener una descripción cuántica de la Relatividad General, ya que hasta mediados de la década de los años noventa no se encontró un producto interior invariante bajo transformaciones gauge y difeomorfismos [16]. Como se verá en el siguiente capítulo, son las técnicas de la Gravedad Cuántica de Lazos las que permiten definir esta operación.

## 4 Gravedad Cuántica de Lazos

La Gravedad Cuántica de Lazos trata de desarrollar una descripción cuántica de la gravedad basándose en la visión geométrica dada por la Relatividad General. De acuerdo con la teoría de Einstein, la gravedad es una manifestación de la geometría del espacio-tiempo y será esta la que deba ser cuantizada. La Gravedad Cuántica de Lazos predice que cantidades tales como el área y el volumen adquieren un espectro discreto de la misma manera en que lo hacen otras variables en Mecánica Cuántica.

En este capítulo se explican las bases de la representación de lazos y qué ventajas supone respecto al planteamiento realizado con la conexión. La base en la representación de lazos es sobrecompleta, por lo que se introducirá el concepto de redes de spin, que minimizan el grado de sobrecompletitud de la misma. Por último, se examina cómo estas consideraciones conducen a la cuantización de la geometría.

### 4.1. Representación de Lazos

Las dificultades que surgen en la representación de las conexiones a la hora de implementar los operadores que definen las ligaduras del sistema llevaron a la elaboración de una nueva imagen de la gravedad cuántica: la representación de lazos. Para discutirla en detalle es necesario introducir la noción de holonomía. La idea que se persigue es generalizar el concepto de circulación del potencial vector que surge en electromagnetismo a teorías de Yang-Mills basadas en grupos de simetrías más complejos.

La holonomía es un concepto que surge en geometría diferencial como una consecuencia de la curvatura de la conexión de una variedad suave. Esta mide cómo varían los datos geométricos al ser transportados paralelamente alrededor de circuitos cerrados. Se dice que una cantidad  $E^b$  se transporta paralelamente por la curva  $\gamma$  si:

$$\dot{\gamma}^a(t) D_a E^b(t) = 0 , \quad (4.1)$$

siendo  $\dot{\gamma}^a(t)$  el vector tangente a la curva y  $D_a$  la derivada covariante asociada a la conexión. En el caso que se está analizando, la derivada covariante será aquella relacionada con la teoría de Yang-Mills (2.67), por lo que la expresión anterior conduce a:

$$\dot{\gamma}^a(t) \partial_a E^b(t) = -ig \dot{\gamma}^a(t) A_a(t) E^b(t) . \quad (4.2)$$

Esta ecuación puede resolverse iterativamente para obtener:

$$E^b(t) = \mathcal{U}_{||}(t) E^b(0) . \quad (4.3)$$

El operador de transporte paralelo  $\mathcal{U}_{\parallel}(t)$  viene dado por:

$$\mathcal{U}_{\parallel}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ (-ig)^n \int_{t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \dot{\gamma}^{a_1}(t_1) A_{a_1}(t_1) \cdots \dot{\gamma}^{a_n}(t_n) A_{a_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n \right]. \quad (4.4)$$

La suma converge para potenciales vectores suaves y finitos. Esta última expresión puede reescribirse de forma más compacta definiendo el producto ordenado en el camino:

$$\mathcal{P} [x_2(t_2) x_1(t_1) \cdots x_n(t_n)] = x_1(t_1) x_2(t_2) \cdots x_n(t_n), \quad (4.5)$$

siempre y cuando  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ .

De esta forma, se puede expresar la fórmula (4.4) como una exponencial ordenada en el camino:

$$\mathcal{U}_{\parallel}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ig)^n}{n!} \mathcal{P} \left[ \int_0^t \dot{\gamma}^a(t) A_a(t) dt \right]^n = \mathcal{P} \left[ \exp \left( -ig \int_0^t \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) ds \right) \right]. \quad (4.6)$$

En el caso particular en el que la curva sea cerrada ( $\dot{\gamma}^a(t) = \dot{\gamma}^a(0)$ ) este propagador es conocido como holonomía:

$$\mathcal{P}_{\gamma}[A] \equiv \mathcal{P} \left[ \exp \left( -ig \oint_{\gamma} \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) ds \right) \right]. \quad (4.7)$$

Sabiendo que  $A_a$  es una matriz (2.65), se puede ver que la holonomía no será más que una matriz y su traza, un escalar. Además, dicha traza será invariante bajo transformaciones gauge, al igual que ocurre con la circulación del potencial vector en electromagnetismo. Por lo tanto, es una buena candidata para ser un observable en las teorías de Yang-Mills.

De hecho, es más que eso. Toda la información invariante gauge de la conexión viene dada por la traza de la holonomía de una conexión para todos los lazos posibles en una variedad. Como la ley de Gauss (3.12) impone una invariancia gauge de la conexión sobre las funciones de onda, las trazas de las holonomías serán una base para cualquier observable que sea únicamente función de la conexión.

Las implicaciones de este resultado son extremadamente importantes y, de hecho, son la base de la representación de lazos que se quiere introducir. Sea  $W_{\gamma}[A]$  la traza de la holonomía (4.7). Como estas forman una base para todos los observables dependientes de la conexión, se pueden escribir las funciones de onda  $\Psi[A]$  como:

$$\Psi[A] = \sum_{\gamma} \Psi[\gamma] W_{\gamma}[A], \quad (4.8)$$

donde  $\Sigma$  indica una suma formal sobre todos los lazos cerrados posibles y los coeficientes son funciones dependientes del lazo  $\Psi[\gamma]$ . Esta expresión se conoce como la transformada de lazos.

Al igual que en Mecánica Cuántica usual, donde se puede trabajar indistintamente en el espacio de posiciones o en el espacio de momentos, la transformada de lazos (4.8) implica que se obtendrá la misma información si en lugar de emplear las funciones  $\Psi[A]$  se utilizan los coeficientes  $\Psi[\gamma]$ . La representación de lazos consiste en trabajar con estos coeficientes y posee la particularidad de que es sencillo resolver la ligadura de difeomorfismos en dicho espacio [16]. No obstante, la base de lazos es una base sobrecompleta, ya que las trazas de holonomías en una variedad no son independientes entre sí. Además, se puede demostrar que existen relaciones no lineales entre ellas, lo que restringe notablemente las funciones de lazos  $\Psi[\gamma]$  que se pueden emplear.

## 4.2. Redes de Spin

Para tratar con la sobrecompletitud de la base en la representación de lazos, es conveniente estudiar las distintas representaciones del álgebra  $su(2)$ . La representación fundamental viene dada por las matrices de Pauli:

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k, \quad (4.9)$$

pero existen infinitas matrices que satisfacen estas relaciones de conmutación y están, por tanto, caracterizadas por la misma constante de estructura. La diferencia radica en la dimensión de las matrices, siendo las de Pauli las más compactas.

Se pueden utilizar matrices de cualquier representación para construir una conexión y obtener operadores de transporte paralelo a lo largo de curvas. En las intersecciones entre las curvas se contraen los índices de las matrices mediante entrelazadores (*intertwiners*) y el objeto resultante se denomina «red de spin». Expresándolo de manera más formal, una red de spin es un grafo que representa de forma concisa funciones entre distintas representaciones de grupos de matrices. En el caso particular que se está analizando, las aristas llevarán asociado un «spin» dado por la representación irreducible del grupo  $SU(2)$  correspondiente. Esto, junto con los entrelazadores en los vértices, formará la red de spin.

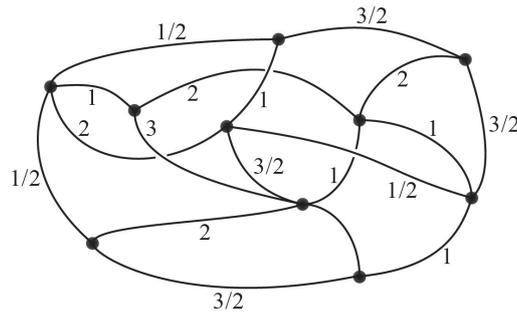


Figura 4.1: Un ejemplo de red de spin [20]. Las cifras asociadas a cada arista caracterizan las dimensiones de las representaciones irreducibles de  $SU(2)$  a lo largo de cada línea. Dicha dimensión será  $2j + 1$ , siendo  $j$  el valor de la etiqueta. La red también consta de entrelazadores en los vértices.

Un aspecto importante es que las representaciones de dimensión más alta de  $su(2)$  se pueden expresar mediante productos tensoriales de la representación fundamental, por lo que una holonomía en una representación de alta dimensionalidad puede entenderse como un conjunto de holonomías en la representación fundamental actuando en paralelo.

Las redes de spin forman una base de las funciones invariantes gauge que minimiza el grado de sobrecompletitud de la base en la representación de lazos, por lo que son útiles a la hora de representar los estados en gravedad cuántica.

En Gravedad Cuántica de Lazos, una red de spin representa un estado cuántico del campo gravitatorio sobre una hipersuperficie tridimensional. El conjunto de las posibles redes de spin forma una base del espacio de Hilbert de la teoría e implementan de forma sencilla tanto la ligadura gaussiana como la ligadura de difeomorfismos espaciales.

Las redes de spin permiten definir un producto interno que tenga en cuenta la invariancia bajo difeomorfismos. Dadas dos redes de spin  $s$  y  $s'$ , se construyen los estados de red correspondientes  $\psi_s$  y  $\psi_{s'}$ . El producto interno entre ambos estados será 1 si ambas redes están relacionadas mediante un difeomorfismo y 0 en cualquier otro caso:

$$(\psi_s, \psi_{s'}) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \text{ y } s' \text{ son difeomorfas} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.10)$$

Esta operación se conoce como el producto de Ashtekar-Lewandowski y presenta cierto interés, ya que permite ver fácilmente que los estados de red de spin no difeomorfos son independientes entre sí. Para demostrarlo, es suficiente considerar que la afirmación anterior es falsa y que existe un estado  $\psi_s$  no independiente. Entonces se podría escribir como una combinación lineal de estados no difeomorfos a  $\psi_s$ :

$$\psi_s = \sum_m c_m \psi_{s_m} \quad (4.11)$$

Considerando ahora el producto interno con  $\psi_s$ , el lado izquierdo dará 1 mientras que el miembro derecho será 0. Por lo tanto, los estados de red no difeomorfos deben ser independientes entre sí, al menos para redes de spin trivalentes (redes en cuyas intersecciones convergen como máximo tres líneas). Para valencias (número de líneas intersecantes) de mayor orden existe cierta ambigüedad a la hora de escoger los entrelazadores, por lo que se debe elegir una base adecuada de redes de spin independientes que reproduzca el resultado anterior [16].

A pesar de la apariencia simple del producto de Ashtekar-Lewandowski, este tiene importantes implicaciones. Este producto interno implica que distintas curvas arrojan el mismo resultado si son difeomorfas entre sí o producen un efecto totalmente distinto en caso de no serlo. Esto parece chocar de frente con el concepto de holonomía definido en la sección anterior, donde pequeñas deformaciones de la trayectoria significaban un ligero cambio en el resultado, ya que se estaba midiendo la curvatura de la región. La última afirmación es cierta si la conexión es una función suave en dicha región. El producto de Ashtekar-Lewandowski indica que las conexiones con las que se trabaja no son suaves y, por tanto, no serán operadores cuánticos bien definidos. Tampoco lo serán las tríadas. La solución a este problema surge al considerar dos cantidades que sí serán operadores cuánticos bien definidos: la holonomía y el flujo de la tríada a través de una superficie bidimensional.

### 4.3. Operadores Geométricos

En las dos secciones anteriores se han introducido los conceptos de holonomía y red de spin. Ahora es el momento de analizar la acción de ciertos operadores en la representación de lazos. En una teoría con simetría gauge, los observables (operadores con interpretación física) deben ser invariantes gauge, lo que quiere decir que sus corchetes de Poisson con las ligaduras tienen que ser nulos. Este es un grave problema en el ámbito de la gravedad, ya que no se conoce ninguna cantidad que satisfaga estas condiciones.

Ignorando de momento esta última cuestión es posible empezar a considerar operadores cuánticos asociados con ciertos aspectos geométricos como el área y el volumen.

Dada una superficie  $\Sigma$  y escogiendo un sistema de coordenadas que la caracterice por  $x^3 = 0$  (lo que implica que el operador que se obtenga no será invariante bajo difeomorfismos), su área vendrá dada por:

$$A_\Sigma = \int_\Sigma dx^1 dx^2 \sqrt{\det q^{(2)}} = \int_\Sigma dx^1 dx^2 \sqrt{\widetilde{E}_i^3 \widetilde{E}^{3i}}, \quad (4.12)$$

donde  $q^{(2)}$  es la métrica en el espacio descrito por las coordenadas  $x^1$  y  $x^2$ .

Para evitar los problemas inherentes al tratar con el producto de dos operadores y su raíz cuadrada, se define una nueva operación: el suavizado. La función  $g$  suavizada vendrá dada por la expresión

$$[g]_f(x) = \int_\Sigma d^2y f_\epsilon(x, y) g(y), \quad (4.13)$$

siendo  $f_\epsilon$  una función que cumpla:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x, y) = \delta^2(x - y), \quad (4.14)$$

por lo que:

$$g(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [g]_f(x). \quad (4.15)$$

Considerando la cuantización de una tríada densitizada y suavizada, su acción sobre un estado de la red de spin será (se reintroduce la constante  $8\pi G$ ):

$$\left[ \widehat{\widetilde{E}_i^3} \right]_f(x) \psi_s = -8i\pi G\beta \int_\Sigma d^2y f_\epsilon(x, y) \frac{\delta\psi_s}{\delta A_3^i(y)}. \quad (4.16)$$

El estado  $\psi_s$  está formado por operadores de transporte paralelo a lo largo de curvas abiertas y entrelazadores en sus intersecciones. Dicho estado depende de la conexión  $A_3^i$  únicamente en los puntos de las curvas, por lo que la derivada funcional de la expresión anterior se anulará en todos los puntos  $y$  que no estén sobre las líneas de la red de spin. Esto significa que solamente se obtendrá un resultado no nulo en aquellos puntos en los que una línea de la red atraviese la superficie  $\Sigma$ .

La acción de la derivada funcional sobre el estado de la red de spin en el punto que atraviesa la superficie  $\Sigma$  viene dada por el generador del álgebra correspondiente  $T^i$  multiplicado por la tangente a la curva en dicho punto [16]. La segunda tríada suavizada contribuye de manera similar y, teniendo en cuenta que:

$$T^i T^i = j(j+1)\mathbb{1}, \quad (4.17)$$

se realiza el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y se convierte la integral sobre la superficie  $\Sigma$  en la suma sobre los puntos de intersección ( $I$ ) de la misma con la red de spin, obteniendo que la acción del operador de área viene dada por:

$$\hat{A}_\Sigma \psi_s = 8\pi \ell_p^2 \beta \sum_I \sqrt{j_I(j_I+1)} \psi_s, \quad (4.18)$$

donde la cantidad  $\ell_p \equiv \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$  m es la longitud de Planck.

La expresión (4.18) indica que los estados de la red de spin  $\psi_s$  son autoestados del operador área. Dicha expresión está bien definida y no presenta divergencias. Además, los autovalores de área no son equidistantes, en particular para pequeños valores de  $j_I$ .

También cabe destacar que la cuantización del área surge en unidades de la longitud de Planck al cuadrado, lo que implica que los «cuantos» de área son extremadamente pequeños, tal y como era de esperar. Asimismo, es necesario mencionar la presencia del parámetro de Barbero-Immirzi en los autovalores de área, lo que implica que distintos valores de  $\beta$  no conducen a la misma descripción física. La determinación de dicho parámetro es, por tanto, imprescindible para ofrecer predicciones físicas en Gravedad Cuántica de Lazos. Por último, hay que resaltar que esta construcción respeta la independencia del fondo que exige la teoría: el operador de área solamente depende de la punción de la arista con la superficie, sin precisar una estructura de fondo.

El siguiente paso consiste en obtener un operador asociado con el volumen de una determinada región. Dicho volumen vendrá dado por la siguiente expresión:

$$V(R) = \int_R d^3x \sqrt{q} = \int_R d^3x \sqrt{\left| \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b \tilde{E}_k^c \right|}. \quad (4.19)$$

De forma análoga al caso anterior, se puede promocionar esta expresión a un operador cuántico. No obstante, la fórmula explícita es más complicada, ya que depende del tipo de entrelazador y de las valencias entrantes. Sin entrar en detalles, el operador de volumen se puede escribir como:

$$\hat{V}_R \psi_s = (8 \pi \ell_p^2 \beta)^{3/2} \sum_I \sqrt{|\hat{q}_I|} \psi_s, \quad (4.20)$$

donde el operador  $\hat{q}_I$  contiene las particularidades que se acaban de mencionar [21]. Nótese que los autovalores de volumen dependen de la longitud de Planck al cubo.

La visión que se presenta en esta sección relaciona directamente la geometría espacio-temporal con las redes de spin. Estas últimas están asociadas con los «ladrillos elementales» que forman el espacio-tiempo [16]. La imagen que se obtiene es que las líneas de la red acarrean «cuantos» de área y sus intersecciones «cuantos» de volumen. Una superficie adquirirá área siempre y cuando sea atravesada por una arista de la red de spin, mientras que cierta región adquirirá volumen cuando contenga un vértice de la misma. Esto se puede entender mediante la imagen dual correspondiente a la red de spin:

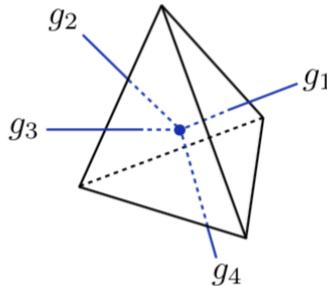


Figura 4.2: Un vértice tetravalente de la red de spin representado en la imagen dual por un tetraedro [9]. Las líneas azules son las aristas de la red de spin y cada una lleva asociada una cara del tetraedro. El vértice genera el volumen de la figura.

La imagen dual permite ver que se necesitan vértices de valencia cuatro como mínimo para que la expresión (4.20) sea distinta de cero. Para vértices trivalentes, el volumen es nulo.

## 5 Aplicaciones

En el capítulo anterior se han analizado las bases de la Gravedad Cuántica de Lazos, estudiando las redes de spin y la forma en que surge la cuantización de la geometría. El objetivo de las siguientes líneas es ver cómo se pueden aplicar estas ideas para tratar de resolver dos importantes cuestiones abiertas en el ámbito de la gravedad cuántica. En primer lugar, se analizará la relación entre el área y la entropía de un agujero negro y qué modificaciones conlleva aplicar las técnicas proporcionadas por la Gravedad Cuántica de Lazos. A continuación, se examinarán los modelos cosmológicos homogéneos e isótropos que predicen una singularidad al comienzo del universo y se estudiará cómo varía esta predicción al tener en cuenta los efectos cuánticos.

### 5.1. Entropía de Agujeros Negros

Todos los agujeros negros pueden caracterizarse por tres parámetros observables: su masa  $M$ , su carga  $Q$  y su momento angular  $L$ . Esto es conocido como *no-hair theorem* [22]. La presencia del horizonte de sucesos impide obtener datos sobre el interior de un agujero negro y sobre la información de la materia que lo constituye, aparte de los tres parámetros que se han mencionado. La falta de información de un sistema se encuentra asociada con una magnitud llamada entropía.

Volviendo a las tres características observables de un agujero negro, se puede obtener la superficie espacial<sup>1</sup> del mismo mediante la siguiente fórmula:

$$A = 4\pi \left[ \left( M + \sqrt{M^2 - Q^2 - \left(\frac{L}{M}\right)^2} \right)^2 + \left(\frac{L}{M}\right)^2 \right], \quad (5.1)$$

La superficie de un agujero negro posee una característica muy particular y es que no puede reducirse perturbando el sistema (modificando su masa, carga o momento angular). En particular, si dos agujeros negros se fusionan, el área del agujero negro resultante será igual o mayor que la suma de las superficies de los objetos que han colisionado. Esta propiedad también recuerda el concepto de entropía y el Segundo Principio de la Termodinámica, que estipula que, en un sistema aislado, ningún proceso puede ocurrir si lleva asociada una disminución de la entropía.

---

<sup>1</sup>Al mencionar la superficie de un agujero negro se está hablando sobre el área de su horizonte de sucesos.

Esta última analogía, junto con la idea expresada en el primer párrafo, conduce a asociar la superficie del horizonte de sucesos de un agujero negro con la entropía del mismo. De hecho, es la conocida fórmula de Bekenstein-Hawking [5] la que relaciona la entropía de un agujero negro<sup>2</sup> con su área:

$$S_{BH} = \frac{A}{4 \ell_p^2} . \quad (5.2)$$

La frontera entre el interior y el exterior de un agujero negro viene dada por el horizonte de sucesos. Para estudiar dicha frontera, se emplea el concepto de horizonte aislado que se define utilizando únicamente estructuras locales en el espacio-tiempo [23]. Para que la frontera sea un horizonte aislado, el *lapse* ( $N$ ) debe anularse [16]. Esto significa que la ligadura hamiltoniana no genera una evolución en la misma, lo que convierte el área del horizonte en un posible observable de la teoría. Este hecho también indica que no hay necesidad de considerar la dinámica de la Gravedad Cuántica de Lazos y los cálculos se podrán realizar con las redes de spin, que implementan tanto la Ley de Gauss como la invariancia bajo difeomorfismos espaciales.

Por otro lado, la Gravedad Cuántica de Lazos propone que la superficie de un agujero negro está formada por pequeños «cuantos» de área cuyo valor viene dado por la expresión (4.18), lo que incita a analizarla mediante técnicas extraídas de la física estadística. La entropía vendrá dada por el logaritmo del número de microestados posibles :  $S = \ln \Omega$ .

Un estado cuántico del horizonte se caracteriza por un conjunto de punciones entre la red de spin y la superficie del agujero negro. Teniendo en cuenta el valor de los «cuantos» de área y con herramientas de combinatoria se puede calcular el número de configuraciones posibles que hay para un área  $A$  total fija.

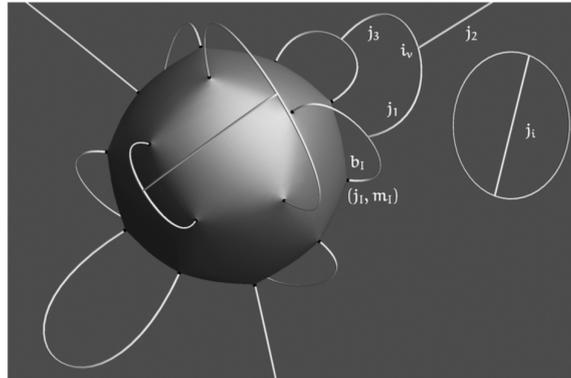


Figura 5.1: Representación esquemática del espacio de Hilbert de un agujero negro tomada de la referencia [24]. La superficie representa el horizonte de sucesos.

Mediante este procedimiento [25] se obtiene el siguiente resultado para la aproximación de áreas grandes (no se consideran agujeros negros del tamaño de Planck):

$$S(A) = \frac{\beta_c}{\beta} \frac{A}{4 \ell_p^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{A}{\ell_p^2} , \quad (5.3)$$

donde  $\beta_c \approx 0,274$  es una constante numérica [26].

<sup>2</sup>En esta sección se trabajará con unidades adimensionales ( $k_B = 1$ ). Para obtener las unidades termodinámicas habría que multiplicar cada expresión de la entropía por la constante de Boltzmann  $k_B$ .

Observando la expresión (5.3), se puede ver que el primer término es proporcional a la fórmula de Bekenstein-Hawking, mientras que el segundo es la corrección dada por la Gravedad Cuántica de Lazos ( $S_{LQG}$ ). El primer sumando reproduce la fórmula semiclásica (5.2) para un valor del parámetro de Barbero-Immirzi  $\beta = \beta_c$ . Este resultado fija el valor del parámetro libre de la teoría sin tener que medir directamente los cuantos de área o volumen. No obstante, y a pesar de que el resultado obtenido en todos los cálculos realizados para distintos agujeros negros es el mismo [16], este es el único indicio del que se dispone, por lo que sería necesaria otra predicción física para confirmar el valor del parámetro de Barbero-Immirzi.

La longitud de Planck al cuadrado es del orden de  $10^{-70}$  m<sup>2</sup>. Tal y como era de esperar, la corrección será pequeña en comparación con la predicción semiclásica, ya que la función  $x^{-1} \ln(x)$  tiende rápidamente a cero al aumentar  $x$ .

$$\left| \frac{S_{LQG}}{S_{BH}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} \ln \frac{A}{\ell_p^2}}{\frac{A}{4\ell_p^2}} \right| \ll 1. \quad (5.4)$$

## 5.2. Cosmología Cuántica de Lazos

La Relatividad General puede aplicarse para describir el universo en su conjunto. La cosmología cuántica de lazos plantea reducir los grados de libertad para, a continuación, proceder a la cuantización del sistema. Desde luego, este procedimiento no equivale a cuantizar la teoría y después realizar las simplificaciones pertinentes, pero puede resultar un método interesante para probar las técnicas proporcionadas por la Gravedad Cuántica de Lazos y profundizar en ciertos aspectos de la gravedad cuántica. Además, está proporcionando resultados útiles en el ámbito cosmológico.

Hoy en día se cree que, a grandes escalas, el universo está muy próximo a ser homogéneo e isótropo. Aplicando estas dos condiciones se obtiene la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuyo elemento de línea viene dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2) \right), \quad (5.5)$$

donde  $k$  es la constante de curvatura y puede tomar los valores  $+1$ ,  $0$  y  $-1$ , dependiendo de la topología global del universo [10]. La función  $a(t)$  se conoce por el nombre de «factor de escala» y viene determinada por el contenido de materia del universo.

En el caso de un universo plano ( $k = 0$ ), la expresión anterior puede reescribirse como:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.6)$$

En particular, el universo a grandes escalas puede aproximarse adecuadamente como un gas de partículas de densidad  $\rho$  con velocidades mucho menores que  $c$ . En este caso, el factor de escala toma un valor

$$a(t) = t^{2/3}, \quad (5.7)$$

lo que conduce a una singularidad esencial en  $t = 0$ . Esto se conoce como la teoría del *Big Bang* y es una predicción que realizan la mayoría de los modelos cosmológicos actuales: el universo se ha expandido partiendo de un estado de densidad extremadamente elevada. No obstante, en esta situación la curvatura del espacio-tiempo es muy grande y es presumible que los efectos cuánticos cobren importancia a medida que uno se acerca a la singularidad inicial.

Siguiendo con el tratamiento clásico, se define el parámetro de Hubble como:

$$\mathcal{H}(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (5.8)$$

que, teniendo en cuenta la ecuación (5.7), será inversamente proporcional a  $t$ .

El procedimiento a seguir para realizar un análisis cuántico es similar al que se ha realizado en los capítulos anteriores: se escogen variables canónicamente conjugadas y se calcula la ligadura hamiltoniana. La teoría en vacío tiene como única solución el espacio plano, por lo que se debe acoplar la materia para obtener predicciones más realistas. Los corchetes de Poisson entre las variables canónicas y el hamiltoniano total proporcionarán las ecuaciones de movimiento.

Para el caso homogéneo e isótropo al que se acopla un campo escalar para describir el contenido de materia, la «ecuación de movimiento» del universo puede escribirse en función del parámetro de Hubble [16] y se conoce como la ecuación de Friedmann:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\rho}{3}. \quad (5.9)$$

En esta expresión se observa que la densidad del gas con el que se ha modelizado el contenido de materia del universo es proporcional al cuadrado del parámetro de Hubble y, por tanto, varía como  $t^{-2}$ . Al acercarse a  $t = 0$  cantidades tales como la densidad o la curvatura del espacio-tiempo divergen.

El siguiente paso es promocionar las variables canónicas a operadores cuánticos y estudiar su acción sobre las funciones de onda del sistema. La cuantización tradicional por medio de la ecuación de Wheeler-deWitt no elimina los problemas en  $t = 0$  [16], ya que los paquetes de onda centrados en una solución clásica evolucionan siguiendo la trayectoria clásica hasta alcanzar la singularidad [27].

Por otro lado, los resultados sobre la cuantización de la geometría en Gravedad Cuántica de Lazos se materializan en una diferencia en la ecuación de evolución cosmológica y predicen un «rebote cuántico» al alcanzar la escala de Planck. Los aspectos claves de dicha evolución se pueden reproducir mediante un modelo efectivo, basado en una cuantización de tipo *loop*, que incorpora los efectos gravito-cuánticos dominantes y que viene descrito por la siguiente ecuación [16, 27]:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\rho}{3} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (5.10)$$

siendo  $\rho_c$  la densidad crítica del orden de la densidad de Planck:  $\rho_c \approx 0,41\rho_p \sim 10^{96} \text{ kg/m}^3$ .

La corrección cuántica es de segundo orden en la densidad, con un signo negativo. De la expresión (5.10) se pueden extraer inmediatamente dos conclusiones. La primera es que se recupera la ecuación clásica (5.9) para densidades pequeñas en comparación con la densidad crítica. La segunda está relacionada con el signo negativo de la corrección: cuando la densidad es igual a la crítica ( $\mathcal{H}^2 = 0$ ), la compresión del universo se detiene y, si se sigue retrocediendo en el tiempo, el sistema comienza a expandirse de nuevo [27]. Por lo tanto, los efectos cuánticos son considerables en las inmediaciones del «rebote» y desaparecen rápidamente cuando la curvatura del espacio-tiempo disminuye. Una posible forma de visualizarlo [16] es considerar que los «cuantos» de área y volumen alcanzan ciertos valores mínimos y no es posible comprimirlos más.

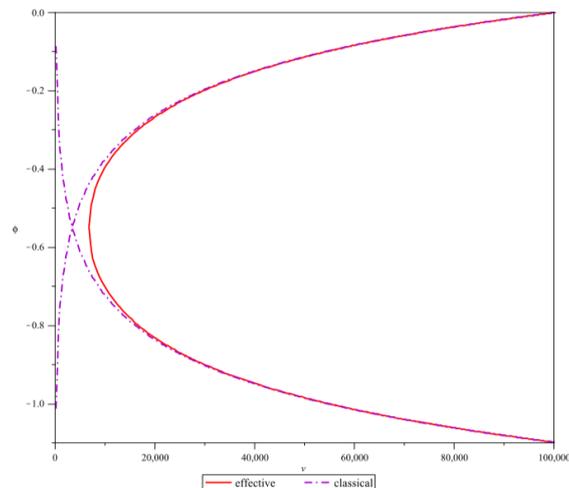


Figura 5.2: Comparación entre las trayectorias clásicas (morado y discontinuo) y el modelo efectivo (rojo y continuo) descrito por la ecuación (5.10). En el eje horizontal se representa el volumen del universo y el tiempo en el vertical [28]. Para grandes volúmenes, ambas trayectorias coinciden pero difieren a medida que aumenta la densidad. En lugar del colapso predicho por la teoría clásica, la Gravedad Cuántica de Lazos describe un «rebote» o *Big Bounce*.

En esta sección se han discutido las ideas generales sobre cosmología cuántica de lazos sin entrar en detalles del desarrollo cuántico completo<sup>3</sup>. A pesar de la incertidumbre sobre si este análisis desembocará en una aproximación a la Gravedad Cuántica de Lazos, se están obteniendo resultados relevantes en este ámbito [27].

<sup>3</sup>Las referencias *Loop Quantum Cosmology: A brief review* [27] o el capítulo 9 del libro *Un primer curso en gravedad cuántica de lazos* [16] presentan un análisis más detallado.

## 6 Conclusiones

La cuantización de la gravedad es uno de los mayores problemas abiertos actualmente en el campo de la física teórica. A día de hoy, la Mecánica Cuántica y la Relatividad General son dos teorías que han superado con éxito todos los experimentos a los que han sido sometidas. No obstante, ambas fallan en un aspecto crucial: no ofrecen predicciones adecuadas para fenómenos en los que tanto la gravedad como los efectos cuánticos son de significativa importancia. Entre ellos se podrían destacar la termodinámica de los agujeros negros, la estructura a pequeña escala del espacio-tiempo o el origen del universo. Dar una descripción adecuada a estas situaciones es el objetivo de una teoría cuántica de la gravedad consistente y completa.

La Relatividad General expone que el contenido de materia y energía del universo determina la curvatura del espacio-tiempo: la materia le indica al espacio cómo ha de curvarse y dicha curvatura establece el movimiento de la materia. Las Teorías Cuánticas de Campos, como el Modelo Estándar, describen con precisión la materia observable y todas sus interacciones no gravitatorias, pero no dicen nada sobre la geometría del espacio-tiempo. La Gravedad Cuántica de Lazos surge para ofrecer una descripción consistente del comportamiento cuántico del campo gravitatorio, respetando en todo momento la independencia del fondo que exhibe la Relatividad General.

Como punto de partida de la teoría, se ha desarrollado una formulación hamiltoniana de la Relatividad General, descomponiendo el espacio-tiempo cuadridimensional en dos partes: una dirección temporal y una hipersuperficie espacial tridimensional. El resultado obtenido es que el hamiltoniano total es una ligadura, lo que era de esperar ya que la Relatividad General trata en pie de igualdad todas las variables espacio-temporales. Pero esto no implica que no exista una evolución, sino que los cambios de unas variables respecto a otras deben obtenerse directamente de las ligaduras del sistema.

Por lo tanto, el papel que tienen las ligaduras es esencial, ya que son las que imponen la invariancia bajo difeomorfismos. Existen tres ligaduras de difeomorfismos «espaciales» (2.52) y una que da cuenta de los difeomorfismos «temporales» (2.53). A esta última se la conoce con el nombre de ligadura hamiltoniana. Los estados físicos serán aquellos que satisfagan estas ligaduras.

A continuación, se trata de cuantizar la Relatividad General empleando las técnicas de la cuantización canónica. El procedimiento «clásico» plantea tomar como variable fundamental la métrica inducida sobre la hipersuperficie tridimensional, lo que desemboca en la ecuación de Wheeler-deWitt (3.8). Por otro lado, la Gravedad Cuántica de Lazos parte de una formulación hamiltoniana de la Relatividad General en base a las variables de Ashtekar (2.58 y 2.70). Esto aumenta los grados de libertad del sistema, siendo necesario introducir tres nuevas ligaduras que vienen dadas por la ley de Gauss (2.77) y están relacionadas con las simetrías gauge de la teoría.

No obstante, este no es exactamente el planteamiento que realiza la Gravedad Cuántica de Lazos. Antes de proceder a la cuantización se realiza un nuevo cambio de variables para trabajar en la conocida como representación de lazos (4.8), que es equivalente a la formulación anterior pero con la particularidad de que se puede introducir un producto interno que define correctamente el espacio de Hilbert.

Con esta base, se restringe la atención a las foliaciones espaciales y, resolviendo las ligaduras gaussianas, se obtiene una estructura reticular conocida como red de spin. Además se puede implementar la invariancia bajo difeomorfismos espaciales definiendo un producto interno. Las redes de spin son herramientas útiles ya que forman una base en la representación de lazos que minimiza la sobrecompletitud de la misma.

La descripción obtenida hasta el momento posibilita obtener ciertos resultados relacionados con la geometría espacial de la hipersuperficie tridimensional, entre los que destaca la discretización de los espectros de los operadores de área (4.18) y volumen (4.20). La relación de los mismos con las redes de spin es bastante clara: a las líneas de la red se les asignan «cuantos» de área, que le serán proporcionados a cierta superficie cuando sea atravesada por las mismas, mientras que una determinada región espacial adquirirá volumen cuando contenga un vértice de la red de spin.

Uno de los problemas más serios dentro de la Gravedad Cuántica de Lazos es el referido a la dinámica de la teoría. Todavía no se ha podido implementar la ligadura hamiltoniana, por lo que no se conocen los efectos de los difeomorfismos temporales; es decir, las transformaciones que involucran la coordenada temporal.

Otro acuciante problema es la ausencia de un límite clásico: no se ha encontrado una aproximación que reproduzca las predicciones de la Relatividad General a baja energía. Sin duda esta es una exigencia que debe satisfacer cualquier teoría candidata a explicar el comportamiento cuántico de la gravedad.

A pesar de los problemas abiertos, la Gravedad Cuántica de Lazos arroja ciertos resultados alentadores. Es el caso, por ejemplo, del estudio de la entropía de los agujeros negros. Los cálculos obtenidos concernientes a la relación entre el área del horizonte de sucesos de un agujero negro y su entropía ofrecen correcciones (5.3) a la predicción semiclásica dada por la fórmula de Bekenstein-Hawking (5.2). Este resultado permite fijar también el valor del parámetro de Barbero-Immirzi, que aparece en las expresiones de los autovalores de área y volumen, y que surgía como un parámetro libre de la teoría.

También se ha realizado un análisis cosmológico en el que se ha estudiado el origen del universo y cómo, mediante las técnicas proporcionadas por la Gravedad Cuántica de Lazos, se consigue eludir la singularidad inicial. El estudio realizado indica que, al retroceder en el tiempo y alcanzar una densidad crítica, el universo vuelve a expandirse en lugar de continuar comprimiéndose hasta alcanzar la singularidad.

Tras más de un siglo desde la presentación de la Relatividad General, y con las teorías cuánticas en boga, todavía no se ha conseguido ofrecer una descripción cuántica de la gravedad, pero cada nuevo paso nos acerca un poco más a la solución. La Gravedad Cuántica de Lazos ofrece un marco para progresar en esta dirección. Mediante una descripción hamiltoniana de la Relatividad General en función de las variables de Ashtekar y trabajando en la representación de lazos, muestra un posible camino para cuantizar la teoría.

# Bibliografía

- [1] T. Thiemann. “Lectures on Loop Quantum Gravity”, *Lect. Notes Phys.* **631** (2003) 41-135.
- [2] T. Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge University Press (2007).
- [3] M. Bronstein. “Quantentheorie schwacher Gravitationsfelder” (Quantum theory of weak gravitational fields), *Phys. Z. Sowjetunion*, **9** (1936), 140–157.
- [4] E. Álvarez. “Loops versus strings”. *Bled Workshops Phys.* **4** (2003) no.2-3, 117-128.
- [5] J. Bekenstein “Black holes and entropy”, *Phys.Rev. D* **7** (1973) 2333-2346.
- [6] C. Rovelli. “Notes for a brief history of quantum gravity” (2000). *The Ninth Marcel Grossmann Meeting*, arXiv:gr-qc/0006061.
- [7] A. Ashtekar, T. A. Schilling. “Geometry of Quantum Mechanics”, *AIP Conf. Proc.* **342** (1995) 471-478.
- [8] L. Smolin. “The case for background independence” (2005), arXiv:hep-th/0507235.
- [9] N. Bodendorfer. “An elementary introduction to loop quantum gravity” (2016), arXiv:gr-qc/1607.05129.
- [10] R. d’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press (1992).
- [11] C. Rovelli, F. Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity: An elementary introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press (2014).
- [12] A. Einstein. “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie” (The Foundation of the General Theory of Relativity), *Annalen der Physik* **354** (1916) (7), 769-822.
- [13] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press (1984).
- [14] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner. *Gravitation: an introduction to current research (Chap. 7)*. John Wiley & Sons Inc. (1962) 227–265.
- [15] A. Ashtekar. “New Hamiltonian formulation of general relativity”, *Phys. Rev. D* **36** (1987) 1587-1602.

- [16] R. Gambini, J. Pullin. *Un primer curso en Gravedad Cuántica de Lazos*. Editorial Reverté (2012).
- [17] P. A. M. Dirac. “The Fundamental Equations of Quantum Mechanics”, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **109** (1925) 642-653.
- [18] G. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer-Verlag (1996).
- [19] B. S. DeWitt. “Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory”, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113-1148.
- [20] J. Engle. “Spin Foams” (2013), arXiv:gr-qc/1303.4636.
- [21] H. Nicolai, K. Peeters, M. Zamaklar. “Loop quantum gravity: an outside view”, *Class. Quant. Grav.* **22** (2005) R193.
- [22] C. Misner, K. S. Thorne, J. Wheeler. *Gravitation* W. H. Freeman (1973) 875-876.
- [23] A. Ashtekar, C. Beetle, J. Lewandowski. “Geometry of generic isolated horizons. Classical and Quantum Gravity”, *Phys.Rev. D* **62** (2000) 104025.
- [24] J. F. Barbero G. “Black hole entropy: lessons from loop quantum gravity”, *J. Phys.: Conf. Ser.* **314** (2011) 012003.
- [25] H. Sahlmann. “Toward explaining black hole entropy quantization in loop quantum gravity”, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 104050.
- [26] K. A. Meissner. “Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity”, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) 5245-5252.
- [27] I. Agullo, P. Singh. “Loop Quantum Cosmology: A brief review” (2016), arXiv:gr-qc/1612.01236.
- [28] J. Yang, Y. Ding, Y. Ma. “Alternative quantization of the Hamiltonian in loop quantum cosmology II: Including the Lorentz term”, *Phys. Lett. B* **682** (2009) 1-7.
- [29] S. Carroll. *Spacetime and Geometry. An introduction to General Relativity*. Pearson Education (2014).
- [30] D. Wallace. “The Quantization of Gravity – an introduction”, *Class. Quant. Grav.* **22** (2000) R193.
- [31] A. Perez. “Introduction to Loop Quantum Gravity and Spin Foams” (2005), *ICFI 2004: “2nd International Conference on Fundamental Interactions”* arXiv:gr-qc/0409061.