

INGENIARITZA ZIBILEKO GRADUA  
**GRADU AMAIERAKO LANA**

***PRESA BATEN APURKETAREN  
EKUAZIOAK: ZENBAKIZKO  
METODOEN BIDEZKO HURBILPENA***

**Ikaslea:** Garitano Larrabe, Asier

**Zuzendaria:** Alberdi Celaya, Elisabete

**Ikasturtea:** 2018-2019

**Data:** Bilbo, 2019ko ekainaren 10a



# Gaien Aurkibidea

<b>Irudien Zerrenda</b>	<b>III</b>
<b>Taulen Zerrenda</b>	<b>V</b>
<b>Laburpena</b>	<b>1</b>
<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>1 Memoria</b>	<b>4</b>
1.1 Sarrera eta motibazioa . . . . .	4
1.2 Testuingurua . . . . .	5
1.3 Lanaren helburua eta irismena . . . . .	6
1.4 Lanak dakartzan onurak . . . . .	7
1.4.1 Uraren jarreraren azterketa . . . . .	7
1.4.2 Presen apurketek dakartzaten arazoak . . . . .	8
1.5 Ekuazio diferentzialak . . . . .	8
1.5.1 Marko teorikoa . . . . .	8
1.5.2 Ekuazio diferentzialen sailkapena . . . . .	8
1.5.3 Inguruneko baldintzak eta hasierako baldintzak . . . . .	10
1.5.4 Zenbakizko metodoak eta analitikoak . . . . .	10
1.6 Zenbakizko metodoen eta metodo analitikoaren arteko alderaketa . . . . .	12
<b>2 Elementu Finituen Metodoa (EFMa)</b>	<b>15</b>
2.1 Elementu Finituen Metodoko formulazioa . . . . .	15
2.2 Formulazio klasikoa edo sendoa . . . . .	16
2.3 Funtzio espazioak . . . . .	16
2.4 Formulazio bariazionala edo ahula . . . . .	17
2.5 Formulazio bariazional diskretua . . . . .	18
2.6 Oinarriko funtzioen aukeraketa . . . . .	19
2.7 Inplementazioa . . . . .	20
2.7.1 Sarea . . . . .	20
2.7.2 Zatika linealak diren EFMko oinarriko funtzioak . . . . .	21
2.7.3 Zenbait ezaugarri . . . . .	22
2.7.4 EFMko ekuazio sistema . . . . .	23
2.7.5 Sistematizazioa . . . . .	24
2.7.6 Elementukako egitura EFMan . . . . .	24

<b>3</b>	<b>Lerroen Metodoa</b>	<b>28</b>
3.1	Beroaren ekuazioa . . . . .	28
3.1.1	Soluzio analitikoa . . . . .	28
3.1.2	Lerroen Metodoaren bidezko soluzioa . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Ekuazio diferentzialak ingeniari-ritza zibilean</b>	<b>31</b>
4.1	Lur azpiko urak presetan . . . . .	31
4.2	Hormigoizko loturak eta mentsulak . . . . .	31
4.3	Makurdura habeetan . . . . .	32
4.4	Gilbordura habeetan . . . . .	33
4.5	Zimenduak . . . . .	34
4.6	Ariete kolpea . . . . .	34
4.7	Asentamenduen kalkulua . . . . .	35
4.8	Hidraulika . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Presak</b>	<b>36</b>
5.1	Presa motak . . . . .	36
5.2	Presen apurketak . . . . .	38
5.3	Presen legedia . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Problemaren garapena</b>	<b>41</b>
6.1	Algoritmoak . . . . .	41
6.2	Garapen matematikoa . . . . .	41
6.2.1	Presa baten apurketaren kasua . . . . .	41
6.3	Presa baten apurketaren simulazioa . . . . .	47
6.3.1	Soluzio analitikoa . . . . .	48
6.3.2	Zenbakizko soluzioak . . . . .	48
6.4	Emaitzak . . . . .	50
6.5	Emaitzen analisisa . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Egin beharrekoen deskribapena, faseak, ekipoak edo prozedurak</b>	<b>56</b>
7.1	Lan taldea . . . . .	56
7.2	Faseak . . . . .	56
7.3	Gantt-en diagrama . . . . .	58
<b>8</b>	<b>Ondorioak</b>	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal bat: <math>u_{xx} = f</math></b>	<b>61</b>
A.1	Problemaren nondik norakoak . . . . .	61
A.2	Problemaren emaitzak . . . . .	62
<b>B</b>	<b>Beroaren problema</b>	<b>65</b>
B.1	Beroaren problemaren nondik norakoak . . . . .	65
B.2	Beroaren problemaren emaitzak . . . . .	66
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Irudien Zerrenda

1.1	$y' = -3y^2$ ekuazioaren emaitza analitikoak eta Eulerren metodo esplizituarekin kalkulatuta $t$ aldiuneetan. . . . .	6
1.2	$y' = -2y$ ekuazioaren emaitzak metodo desberdinak erabiliz kalkulatuta $t$ aldiuneetan. . . . .	13
2.1	Funtzio linealak (kapela funtzioak). . . . .	19
2.2	Funtzio koadratikoak. . . . .	19
2.3	Eremuaren partiketa dimentsio bakarrean. . . . .	20
2.4	2Dko eta 3Dko eremuen partiketa . . . . .	20
2.5	EFM funtzio linealak. . . . .	21
2.6	EFM funtzio linealen deribatuak. . . . .	22
2.7	Forma funtzioak. . . . .	25
2.8	Elementukako matrizeen kalkulua eta mihiztaketa. . . . .	27
4.1	Bi euskarri sinpleko habea. . . . .	32
4.2	Bi aldetan landatutako habea. . . . .	33
4.3	Alde bakarrean landatutako habea. . . . .	33
5.1	Grabitatezko Willow Creek presa, Heppner, Oregon, EEBB. <i>Iturria: damengineer.com</i> . . . . .	36
5.2	Kontrahormadun Wimbledon presa, Dulverton, Ingalaterra, Erresuma Batua. <i>Iturria: Wikimedia commons</i> . . . . .	37
5.3	Ambursen egiturako La Prele presa, Douglas, Wyoming, EEBB. <i>Iturria: trib.com</i> . . . . .	37
5.4	Arku itxurako Chirkey presa, Dubky, Errusia. <i>Iturria: Wikimedia commons</i> . . . . .	38
5.5	Ganga itxurako Susquedako presa, Susqueda, Katalunia, Espaina. <i>Iturria: Susquedako Udala</i> . . . . .	39
6.1	Saint-Venanten ekuazioen sistemaren eskema . . . . .	46
6.2	Espazio-denborako sarea. . . . .	49
6.3	Lax Fiedrichs-en metodoko kalkulua. . . . .	50
6.4	Lax-Fiedrichs-en metodoko pauso bat denboran (tarteko nodoen kalkulua). . . . .	50
6.5	Lax-Fiedrichs-en metodoko pauso bat denboran (muturretako nodoen kalkulua). . . . .	50
6.6	A kasuko altueraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz. . . . .	51

---

6.7	A kasuko abiaduraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz. . . . .	52
6.8	B kasuko altueraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz. . . . .	53
6.9	B kasuko abiaduraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz. . . . .	54
7.1	Gantt-en diagrama. . . . .	59
A.1	$-3u'' = 1$ ekuazioaren ebazpenaren emaitzak. . . . .	63
B.1	Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 2 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz. . . . .	67
B.2	Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 5 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz. . . . .	68

# Taulen Zerrenda

1.1	$y' = -3y^2$ ekuazioaren emaitza analitikoak eta Eulerren metodo esplizituarekin kalkulatuta $t$ aldiuneetan. . . . .	5
1.2	$y' = -2y$ ekuazioaren emaitzak metodo desberdinak erabiliz kalkulatuta $t$ aldiuneetan. . . . .	14
A.1	$-3u'' = 1$ ekuazioaren ebazpenaren emaitzak. . . . .	64
B.1	Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 2 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz. . . . .	67
B.2	Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 5 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz. . . . .	68

# Laburpena

Ekuazio diferentzialak erabiltzen dira gure inguruneko fenomeno asko deskribatzeko. Ekuazio diferentzialetan funtzio ezezagun baten aldaketak (hau da, deribatuetak) agertzen dira, eta helburua ekuazioa betetzen duen funtzioa aurkitzea izaten da.

Beraien konplexutasuna dela eta, gehienetan, ez da posible izaten emaitza zehatza edo analitikoa kalkulatzeko. Ondorioz, metodo matematiko ugari sortu izan dira ekuazio diferentzialen emaitza hurbilduak kalkulatzeko. Metodo horiei zenbakizko metodo deritze, eta lan honetan zehar horietako batzuk aztertu eta landu dira.

Ekuazio diferentzialak ingeniarietza zibileko alorrean ere erabiliak dira. Lan honetan ekuazio diferentzialen bidez deskribatutako ingeniarietza zibileko problema batzuk aurkezten eta garatzen dira. Helburuak honako hauek izan dira:

- Ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko metodoak ulertzea eta aplikatzea.
- Ekuazio diferentzialen bidez deskribatutako ingeniarietza zibileko problema bat ebaztea. Zehazki, presa baten apurketaren ondorioz uraren fluxuak duen portaera aztertu da.

Aipatutako helburuak lortzeko zenbait pauso jarraitu dira. Lehendabizi, aldagai bakarraren menpekotasuna duen problema lineala aztertu eta ebatzi da. Zehazki, espazioan dimentsio bakarrekoa den problema ebatzi da. Jarraian, espazioan dimentsio bakarrekoa izanik denborarekiko menpekotasuna duen problema lineala ulertu eta ebatzi da. Bukatzeko, presa baten apurketaren osteko fluxuaren jarrera aztertu da. Fenomeno hori Saint-Venant-en ekuazioek definitzen dute. Bi ekuazio diferentzialek osatzen dute problema. Espazioan dimentsio bakarrekoak dira, denborarekiko menpekotasuna dute eta problema ez-lineala da.



# Resumen

Se utilizan ecuaciones diferenciales para describir muchos fenómenos de nuestro entorno. En las ecuaciones diferenciales, aparecen derivadas de la función incógnita y el objetivo suele ser hallar la función que satisface dicha ecuación.

Dada su complejidad, en la mayor parte de los casos no suele ser posible encontrar el resultado exacto o analítico de éstas. Por este motivo, se han desarrollado diversos métodos matemáticos para obtener los resultados aproximados de las ecuaciones diferenciales. A estos métodos se los conoce como métodos numéricos y algunos de ellos han sido estudiados y tratados en este trabajo.

Las ecuaciones diferenciales son utilizadas también en el campo de la ingeniería civil. En este trabajo se presentan y desarrollan varios problemas de ingeniería civil descritos mediante ecuaciones diferenciales. Los objetivos han sido los siguientes:

- Entender y aplicar métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales.
- Resolver un problema de la ingeniería civil descrito mediante ecuaciones diferenciales. Específicamente, se ha estudiado el comportamiento del flujo del agua tras la rotura de una presa.

Para conseguir estos objetivos se han seguido varios pasos. En primer lugar, se ha analizado y resuelto un problema lineal dependiente de una sola variable. Más específicamente, se ha resuelto un problema unidimensional en espacio. A continuación, se ha comprendido y resuelto un problema lineal unidimensional que depende del tiempo. Finalmente, se ha analizado el comportamiento del flujo del agua a causa de la rotura de una presa. Este fenómeno viene definido por las ecuaciones de Saint-Venant. El problema lo completan dos ecuaciones diferenciales, siendo estas unidimensionales y dependientes del tiempo, que constituyen un problema no-lineal.

# Abstract

Differential equations are used to describe several phenomena of our environment. Differential equations consist in the derivatives of an unknown function, and the objective is to find the function that satisfies such equation.

Due to their complexity, it is not in general possible to find an exact or analytic solution for these equations. For this reason, several mathematical methods have been developed in order to obtain an approximation of the solutions of differential equations.

Differential equations are also used in the field of civil engineering. In this project, some civil engineering problems described by differential equations are shown and developed. The objectives have been the following ones:

- To understand and apply numerical methods on the resolution of differential equations.
- To solve a problem related to civil engineering described by differential equations. Specifically, the flux of the water after a dam-break has been analysed.

In order to achieve these objectives, the following steps have been followed. On the first place, a linear problem that depends on a single variable has been analysed and solved. Specifically, an unidimensional problem has been solved. Secondly, an unidimensional time-dependent linear problem has been understood and solved. Finally, the behaviour of the flux after a dam-break has been studied. This phenomenon is described by Saint-Venant equations, which are two unidimensional and time-dependent equations that define a non-linear problem.

# Kapitulua 1

## Memoria

### 1.1 Sarrera eta motibazioa

Zientziari eta ingeniartzari esker gure ingurua pertsonon gustura moldatu ahal izan dugu. Beraiei esker gai gara gure inguruko fenomenoen zergatia ulertzeko, gertatuko den edo ez den aurreikusteko eta horiek kontuan hartuta ingurunea gure beharrietara egokitzeko, ingurunean elementu berriak sortuz eta daudenak aldatuz.

Helburu guzti horiek lortu ahal izateko, zientziarentzat eta ingeniartzarentzat ezinbesteko tresna da matematika. Matematika ingeniartzaren oinarria da, hau gabe ezingo liratekeelako ingeniartzako problemak ebatzi, ez ulertu, ezta aurreikusi ere.

Matematikak, sarritan, ekuazio diferentzialak erabiltzen ditu ingurunea deskribatzeko. Ekuazio diferentzialak XVIII. mendearen erdialdean hasi ziren jorratuak izaten, gaur egunera arte asko garatu izan direlarik [1]. Ekuazio diferentzialak oso erabiliak dira, besteak beste, beroaren transmisioarekin edo fluidoaren mekanikarekin erlazionatutako problema konplexuak adierazteko. Ingeniaritza zibilaren alorra ere ez da salbuespena, eta ingeniartzak zibilean ere badute aplikazio ugari, 4 Atalean azalduko den bezala.

Orokorrean, ekuazioak askatzeko metodo arruntena analitikoa izaten da, hau da, lortu nahi den ezezaguna askatzea eta hori zehazki kalkulatzeko. Hala ere, hori ez da ohikoa izaten ekuazio diferentzialetan.

Horregatik, ekuazio diferentzialei emaitza zehatzak topatu ordez, emaitza hurbilduak topatzea izaten da helburua, emaitza hurbildu hauek emaitza zehatzetatik ahal bezain hurbilen egon daitezen saiaturik. Hurbilpen hauek zenbakizko metodoen bidez lortzen dira.

Lan honetan, ekuazio diferentzialetan oinarrituta dagoen ingeniartzak zibilaren munduko problema bati ebazpena emango zaio; presa baten apurketaren ondorioz haran edo ubide batean zehar urak denbora eta distantzian zehar izaten duen jarrera aztertzen duen problemari, hain zuzen ere.

## 1.2 Testuingurua

Ekuazio diferentzial bat funtzio baten deribatuak agertzen diren ekuazio matematika da. Horrela, bi egoera gerta litezke: ekuazioa analitikoki ebatzi ahal izatea, edo analitikoki ebatzea posible ez izatea [2].

Zenbakizko metodoek ekuazio diferentzialen emaitzak aurkitzeko balio dute. Halaber, analitikoki ezin askatzearen arazoari irtenbidea ematen diote zenbakizko metodoek, bere baitan hartzen dituzten metodo ugarietarako. Eulerren metodo esplizitua, Heunen metodoa, Lax-Friedrichs-en metodoa, Lerroen metodoa, etab. dira ekuazio diferentzialen emaitzak aurkitzeko garatutako metodoetako batzuk. Horiek guztiek emaitza zehatz bat eman ordez, zehaztasun handiko emaitza hurbildu bat ematen diote adierazpenari.

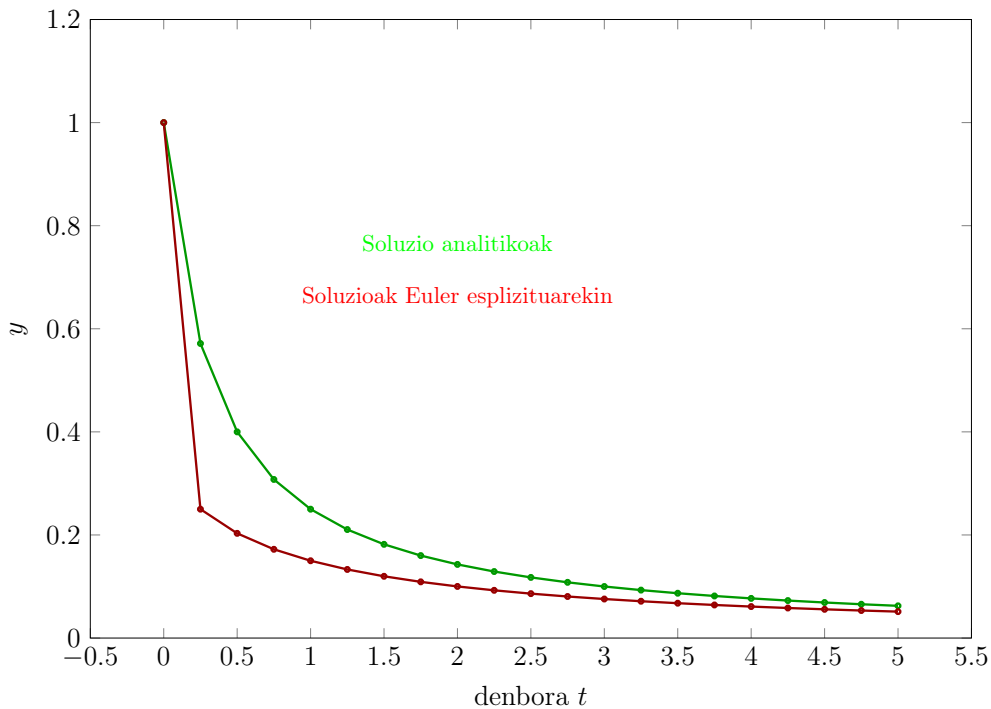
Jarraian, adibide bezala, ekuazio diferentzial bat bi eratan ebatziko da: analitikoki (benetako emaitza zehatz-zehatza lortuz) eta zenbakizko metodoak erabiliz (hurbilpen bat eginez). Zenbakizko emaitza lortzeko erabiliko den metodoa aurrerago azalduko den Eulerren metodo esplizitua izango da eta konparaketa egiteko erabiliko den adierazpena hurrengo hau da:

$$y' = -3y^2 \quad (1.1)$$

1.1 Taulan adierazi dira aipatutako bi metodoak erabiliz lortutako zenbait emaitza. 1.1 Taulako datuak 1.1 Irudian adierazi dira.

$t_n$ aldiuneak	$y_n$ Eulerren metodo esplizituarekin	$y(t_n)$ zehatzak
0.000000	1.000000	1.000000
0.250000	0.250000	0.571428
0.500000	0.203125	0.400000
0.750000	0.172180	0.307692
1.000000	0.149945	0.250000
1.250000	0.133082	0.210526
1.500000	0.119799	0.181818
1.750000	0.109035	0.160000
2.000000	0.100119	0.142857
2.250000	9.260119E-002	0.129032
2.500000	8.616995E-002	0.117647
2.750000	7.572861E-002	0.108108
3.000000	8.060101E-002	0.100000
3.250000	7.142750E-002	9.302325E-002
3.500000	6.760108E-002	8.695652E-002
3.750000	6.417365E-002	8.163265E-002
4.000000	6.108496E-002	7.692307E-002
4.250000	5.828643E-002	7.272727E-002
4.500000	5.5738450E-002	6.896551E-002
4.750000	5.3408369E-002	6.557377E-002
5.000000	5.1269029E-002	6.250000E-002

**Taula 1.1:**  $y' = -3y^2$  ekuazioaren emaitza analitikoak eta Eulerren metodo esplizituarekin kalkulaturak  $t$  aldiuneetan.



**Irudia 1.1:**  $y' = -3y^2$  ekuazioaren emaitza analitikoak eta Eulerren metodo esplizituarekin kalkulaturak  $t$  aldiuneetan.

Emaitzei erreparatuz, esan daiteke analitikoki kalkulaturako ekuazioaren emaitzak eta Eulerren metodo esplizituaren bidez (zenbakizko metodo baten bidez) kalkulaturako emaitzak nahiko antzekoak direla. Modu horretan, zenbakizko metodoen fidagarritasuna frogatzen da.

### 1.3 Lanaren helburua eta irismena

Lan honen helburu nagusia ekuazio diferentziales ingeniariatza zibilean duten garrantzia aztertzea eta azpimarratzea da. Horretarako, dimentsio bakarreko (1D) ekuazio diferentzialen ikasketa eta ebazpena egingo da, ingeniariatza zibileko problema baterako. Hautaturiko problema presa baten apurketaren ondorioz sortzen den ur korrontearen azterketari dagokio. Edonola ere, azken helburu honetaraino iristeko, ekuazio diferentzial ezberdinak aztertu dira: ekuazio sinpleenetatik, azken helburua izango den presaren apurketaren kasua aztertu arte.

Aurrerago azalduko den bezala, helburu honetarako Saint-Venanten ekuazioak erabiliko dira.

Saint-Venanten 1Dko ekuazioak aire zabaleko ubide batean eta era ez egonkorrean, denbora eta dimentsio bakarreko espazio batean zehar fluido baten emari eta ur-maila aldaketak modelizatzen dituzten ekuazio multzo bat dira [3]. Horrenbestez, presa baten apurketaren ondorioz sortzen den ur korrontea Saint-Venanten ekuazioen bidez azter daiteke.

Arro baten zehar euriaren isurketa ikastea edo urak ibai edo ubide baten zehar duen jarrera aztertzea izaten dira ekuazio hauen erabilera nagusiak. Halaber, egoera hauek hiru dimentsiotan gertatu ohi diren arren, bi dimentsiotan aztertu ohi

dira eta dimentsio bakarrera sinplifika edo hurbil litezke, dimentsio horietako batek beste biek baino garrantzi handiagoa izaten duelako. Ur edo euri-uren isurketa motako ikasketetan garrantzi handiena duen dimentsioa ubidearen luzetarakoa da, hau da, fluxuaren norabidearena [4].

Dimentsio bakarrean tratatuak izan daitezten, Saint-Venanten ekuazioek zenbait baldintza ezartzen dituzte. Lehendabizi, presio hidrostatikoa dela gailentzen dena eta azelerazio bertikalak ezeztagarriak direla. Horretaz gain, beharrezkoa da korrante-lerroaren kurbadura txikia izatea, ubide edo haranaren malda txikia izatea eta ubidearen mugak aldaezinak kontsideratzea, hau da, erosioa edo beste antzeko fenomenorik ez pairatzea. Gainera, uraren kontrako erresistentziak Manning-en eta Chezy-ren ekuazioen bidez deskribatzen dira eta fluidoak ura edo bestelako fluido konprimaezina izan behar luke.

Aipatutako Saint-Venanten ekuazioak bi dira: jarraitasunaren ekuazioa eta momentum-aren edo mugimendu kantitatearen ekuazioa.

## 1.4 Lanak dakartzan onurak

Lan honek ekar lezakeen onura nagusia honako hau da: urtegi bateko presa apurtzerakoan sortzen den ur korronteak eragiten dituen arazoak aurreikustea.

Saint-Venant-en ekuazioetatik lortutako informazioari esker, urak ibaiaren haranean luzetara uneoro izango duen altuera ezagutuko denez, zer gertatuko den ezagutzea eta hondamendi kasuetan nola jokatu programatzea posiblea izango da, hein batean bada ere.

### 1.4.1 Uraren jarreraren azterketa

Gaur egun, laneko kasukoa bezalako problemen ikasketarako arazo nagusia fluidoaren jarrera berezian dago. Fluidoaren ezaugarri nagusia fluidotasuna da. Honen arabera, fluido batek bere itxura era konstantean aldatzen du esfortzu ebakitzailen baten menpe baldin badago. Hau da, fluido bat ez da mugitu gabe esfortzu ebakitzailen bat jasateko gai, denbora tarte batean ere ez [5].

Ondorioz, zaila da fluidoaren edo gure kasuko likidoaren jarrera aztertzea espazio aske eta irregularretan. Presa baten azpialdean dagoen haranaren itxura ez da sekula izango ez erregularra (haran baten itxura naturala delako, eta, ondorioz, haren itxura ausazkoa delako) ezta estatikoa ere (presa baten apurketaren osteko ur fluxu handiak, presaren egituratik bertatik ekar litzakeen elementuekin bat eginik, uneoro bailararen itxura aldatuko bailukete).

Gaur egun uraren kudeaketaren programentzat eta hiru dimentsioko kartografia zehatzarentzat garatutako teknologiarik esker, horrelako problemak zehaztasun handiz ebatz daitezke. Hala ere, honelako ikasketek betiere emaitza hipotetiko bat emango dute, presaren apurketa egoera desberdin askotan gerta litekeelako eta ezinezkoa delako emaitza zuzenarekin ematea, nahiz eta saiakera ugari egin. Gainera, honelako ikasketen kostua handia da, bai baliabide, baita denbora aldetik ere, lan honetan aurkezten den irtenbidearekin alderatuz.

Lan honen metodologia sinpleagoa da, baina gutxi gora behera gertatuko denaren ideia bat eman dakiguke.

## 1.4.2 Presen apurketek dakartzaten arazoak

Lanaren helburua den presaren apurketa osteko fluxuaren jarrera ezagutzerakoan, ur masak zein lurralde eremuri eta zenbateko indarrarekin eragingo dion jakin ahalko da. Honi esker, eremu horien erabilera kontrolatu ahalko litzateke.

Presaren apurketa, presaren azpian dauden tokietan era desberdinetako arazoak gerta litezke, garrantzi edo inpaktu ezberdinetakoak, bertan aurrera eramaten diren jardueren arabera.

Horrenbestez, espainiar legediak, presaren apurketak sortuko lituzken arazoaren arabera sailkatzen ditu presak: garrantzi txikikoetatik, garrantzi handikoetaraino. Hauek hiru klasetan (A,B,C) sailkatzen dira, eta 5.3 Atalean azalduko dira.

Hau kontuan izanik, lan honi esker, dagoeneko eraikita dauden presetako arriskuak identifika litezke, baita eraikiko diren obra berrietarako arazo posibleen aurreikuspen bat egin ere.

## 1.5 Ekuazio diferentzialak

### 1.5.1 Marko teorikoa

Zenbakizko metodoak, ekuazio diferentzial konplexuen ebazpenak eta emaitzen hurbilpenak lortzeko erabiltzen diren metodo matematikoak dira. Ingeniaritzan ere erabiltzen dira. Orokorrean, esan daiteke zenbakizko metodoek problema baten emaitza lortzen laguntzen dutela, aztertutako elementua beste elementu txikiago askotan deskonposatuz eta hauen hurbilpena eginez.

Zenbakizko metodoak ekuazio diferentzialetan daude oinarrituta eta hauen itxura, egitura edo konplexutasunaren arabera ebazteko era asko daude. Zenbakizko metodoak ez dira metodo bakar bat, bere barnean metodo edo prozedura ugari biltzen dituen metodo sorta zabal bat baizik, eta aurretik aipaturiko helburu bera dute guztiek: ekuazio diferentzial konplexuen ebazpena.

Aurretik aipatu bezala, ekuazio diferentzial bat funtzio ezezagun bat eta funtzio horren deribatu bat (edo gehiago) aldagai independente bat edo gehiagorekiko erlazionatzen dituen ekuazio mota da. Ekuazio honen deribatua aldagai bakarrarekikoa bada, Ekuazio Diferentzial Arrunta (EDA) deritzogu. Aldiz, aldagai bat baino gehiagorekiko menpekotasuna badu, Deribatu Partzialeko Ekuazioa (DPE) deritzogu.

Lehenengo deribatua agertzen den EDA baten egitura orokorra hurrengoa da:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (1.2)$$

non  $y(t)$  funtzioaren balioa zein den jakin nahi dugun.

### 1.5.2 Ekuazio diferentzialen sailkapena

Ekuazio diferentzialak ebazterako orduan, hauen ezaugarri ugari hartu behar dira kontuan, zeintzuen arabera metodo bat edo beste aplikatuko den erabakiko den. Sailkapena egiteko azter daitezkeen parametroen artean daude, besteak beste, deribatuak, ordena edo linealtasuna.

## Motaren arabera

Ekuazio diferentzialak dauzkaten deribatu motaren arabera bi talde nagusitan sailkatu ohi dira: EDAk (Ordinary Differential Equations, ODE ingelesez) eta DPEak (Partial Differential Equation, PDE ingelesez).

Baldin eta ekuazio batek aldagai independente bakar batekiko deribatu arrunt bat (edo gehiago) baditu, ekuazio diferentzial honi arrunt (EDA) deritzogu. EDA bat litzateke, adibidez:

$$\frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2} = x \quad (1.3)$$

Aldiz, baldin eta ekuazio batek bi aldagai independente edo gehiagorekiko deribatu partzialak baditu, ekuazio diferentzial mota honi deribatu partzialeko ekuazio (DPE) deritzogu. DPE bat litzateke, adibidez:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.4)$$

Ingurunean agertzen diren egoera gehiago deskriba litezke DPE-ekin EDA-ekin baino, hau da, bizitza errealean aplikazio gehiago dituzte.

## Ordenaren arabera

Ekuazio diferentzialak sailkatzeko ezaugarri garrantzitsuenetariko bat hauen ordena da. Ekuazioan edo ekuazioetan agertzen den ordenarik altueneko deribatuak emango dio ekuazio diferentzial arruntari bere ordena. Ordenaren arabera, lehen ordenakoak eta bigarren ordenakoak izango lirateke sinpleenak, eta hortik aurrera ordena altuagoko ekuazioak topa genitzake. Bat ordena baino altuagoko ekuazio diferentzialak, sarritan bat ordenara murrizten dira.

## Linealtasunaren arabera

Ekuazio diferentzial bat lineala da, baldin eta hurrengo itxura baldin badu:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (1.5)$$

Linealak baldin badira, ekuazio diferentzialek hurrengo propietateak izan behar dituzte:

1.  $y$  aldagai dependenteak, bere deribatu guztiekin batera, lehen mailakoa izan behar du. Hau da, gai bakoitzaren berreturak 1 izan behar du.
2. Koefiziente bakoitza,  $a_i(x)$  bakoitza,  $x$  aldagai independentearekiko soilik da menpekoa.

Bestalde, baldintza hauek betetzen ez dituzten ekuazioak ez dira linealak.

## Homogeneotasunaren arabera

Ekuazio diferentzialak homogeneoak eta ez-homogeneoak ere izan daitezke. Homogeneoak izateak bere elementu guztiak diferentzialak direla esan nahi du, hau da, ez duela deribaturik ez duen terminorik.



### 1.5.3 Inguruneko baldintzak eta hasierako baldintzak

Edonola ere, daukaten deribatu izaeraren erruz, inolako informazio gehigarririk gabe ez dago ekuazio diferentzialen emaitzak ematerik. Emaitza hauek lortu ahal izateko, ezinbestekoa da ekuazio diferentzialak jarduten duen inguruaren informazioa izatea, hau da, ekuazioaren balioen bat puntu zehatz batean edo batzuetan ezagutzea. Informazio hauei inguruneko baldintzak deritzegu (Inguruneko Baldintzak, IB).

Inguruneko baldintzak bi motatakoak izan daitezke orokorrean, aurkeztuta datozen eraren arabera: Dirichlet edo Neumann.

Dirichlet motako baldintzetan, muturretako menpeko aldagaien balioa ezartzen da. Neumann motako inguruneko baldintzetan, aldiz, muturreko menpeko aldagaien deribatuen balioa ezartzen da. Halaber, bi hauetatik eratortzen diren mota mistoko edo Robin motako muturreko baldintzak ere ezar daitezke. Robin motako inguruneko baldintzen kasuan muturreko menpeko aldagaien eta haien deribatuen arteko konbinazio linealak ezagutzen dira.

Inguruneko baldintzetaz gain, hasierako baldintzak (Hasierako Baldintzak, HB) ere aipagarriak lirateke. Kasu hauetan, aldagai independenteetako baten (denbora, adibidez) hasierako aldiuneko balioak ezagutuko dira.

### 1.5.4 Zenbakizko metodoak eta analitikoak

Ekuazio diferentzialei deboraren arabera soluzioak emateko bi metodo existitzen dira: metodo analitikoak edo zenbakizko metodoak.

#### Metodo analitikoak

Ekuazio diferentzial baten soluzio analitikoa era analitikoan emandako formula bat da. EDA-en kasuan, emaitza hau, funtzio elementalak erabiliz eman ohi da, hau da, polinomioak, funtzio esponenzialak, logaritmikoak edo trigonometrikoak, esate baterako. Horregatik, EDA baten soluzio analitikoa izanik, aldagai independenteari balioak emanez soluzioak edozein aldiunetan izango lukeen balioa kalkulatzeko posiblea da.

Kasu gehienetan, EDA batentzako emaitza analitiko bat ematea posiblea ez den arren, kasu zehatz batzuetan bada posiblea. Emaitza analitiko bat lor daiteke, baldin eta ekuazio diferentziala zehatza, homogenea, aldagai bananduetakoa eta lineala denean (edo linealetara murriztea posible denean) [6].

Aipatu izan den bezala, deribatu partzialeko ekuazioak erabiliagoak dira EDAK baino, eta kasu batzuetan ere, posible da DPEen emaitza analitikoak aurkitzea.

Hala ere, aplikazio errealetan ageri diren ekuazio diferentzialak ez dira era honetan askatzeko modukoak izaten eta, horrenbestez, ez dute interes handirik ingeniariaren ikuspuntutik.

#### Zenbakizko metodoak

Metodo hauen bidez lortutako emaitza ez da ekuazio zehatz bat, baizik eta ekuazio hipotetiko baten puntu diskretu batzuetako balio hurbilduen taula. Metodo honetan, aurretiaz aztertuta eta ezarrita dauden pauso batzuk jarraituz lortzen

da emaitza. Ekuazio diferentzialak ebazteko zenbakizko metodo ugari existitzen dira, ekuazioaren ordenaren arabera alda litezkenak.

Lan honetan, proiektuan zehar erabili diren metodoak sakonago azalduko dira aurrerago. Metodo hauek Elementu Finituen Metodoa (EFM), Lerroen Metodoa eta Lax Friedrichs-en metodoak dira.

Hala ere, badaude denboraren menpe dauden ekuazio diferentzialei emaitza hurbilduak emateko sortuak izan diren metodo ugari, sinpleagoak direnak. Horietako batzuk jarraian azalduko dira.

### Eulerren metodo esplizitua

Metodo honetan, lehen ordenako hasierako balioko ekuazio diferentzial arrunta izanik  $y' = f(t, y(t))$ ,  $t_0$  aldiunean  $y(t_0)$  eta  $y'(t_0)$ -ren balioak ezagutzen dira. Eulerren metodoan, ekuazio diferentzialak funtzioaren malda ematen du puntu guztietan eta informazio horretaz baliatuz tangente bat sor daiteke puntu guztietan. Honela, puntu batetik hurrengo puntua kalkula daiteke. Aitzitik, tangenteak ematen digun hurbilpena soilik tarte txikietan da matematikoki onargarria, ondorioz tarte txikiak erabili behar dira eta puntu bakoitzean tangentea birkalkulatu beharra dago [7].

Pausoek (aldiune batetik besterako tarteek) ez dute zertan konstanteak izan; beraien luzera aldakorra izan daiteke, horrela emaitza hobea lortu ahal izateko efizienteki.

Hurrengo adierazpena da Eulerren metodo esplizituarena:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (1.6)$$

$h = t_{n+1} - t_n$  pauso tamaina izanik.

Soluzio hauen zehaztasuna ezagutzeko, errorea neurtzeko neurri ezberdinak erabiltzen dira:

- Mozketa errore globala:  $GTE = |y(t_n) - y_n|$
- Mozketa errore global erlatiboa:  $ER = \left| \frac{y(t_n) - y_n}{y(t_n)} \right|$
- Mozketa errore global erlatiboaren ehunekoa:  $ERP = \left| \frac{y(t_n) - y_n}{y(t_n)} \right| \cdot 100$

Eulerren metodo esplizitua lehen ordenako metodo bat da.

### Eulerren metodo hobetua edo Heun-en metodoa

Eulerren metodo hobetua, esplizituaren modifikazio bat besterik ez da. Metodo honetan, pausoko puntuaz gain aurreko puntuko deribatua ere erabiltzen da hurrengo puntuko balioa kalkulatzeko.

Kasu honetan hauek lirarteke metodoaren adierazpenak:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) \end{cases} \quad (1.7)$$

eta  $t_{n+1} = t_n + h$  izanik.

Eulerren metodo hobetua bigarren ordenako metodo bat da.

### Runge-Kutta metodoak

Runge-Kutta metodoetan, pauso bakoitzean tarteko zenbait puntutako deribatuak erabiltzen dira. Honi atal anitz izatea deritzo.

Bi ataleko Runge-Kutta metodoak, tarteko bi puntutako deribatuak erabiltzen ditu. Ondorioz, bi ataleko Runge-Kutta metodoetako bat Eulerren metodo hobetua izango litzateke.

### Eulerren metodo implizitua

Eulerren metodo implizitua (Eulerren atzerakako metodoa izenez ere ezaguna) ekuazio diferentzialak ebazteko beste metodo bat da. Kasu hau, aurretik aipatutako bi metodoak ez bezala, metodo implizitu bat da. Eulerren metodo implizitua metodo esplizituaren antzekoa da, baina  $t_{n+1}$  aldiuneko deribatua erabiltzen du. Ondorioz, sistema implizitua bihurtzen da.

Sistema ebazteko, puntu berri bakoitzean hurbilpen bat egiten da, hurbilpenen artean lortzen den balioen diferentzia txikia izan arte eta orduan kontsideratuko da balioa nahiko hurbiltzen zaiola benetakoari [7].

Hurrengo hau da Eulerren metodo implizituaren adierazpen orokorra:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (1.8)$$

Eulerren metodo implizitua lehen ordenako metodo bat da.

### Metodo trapezoidala

Metodo trapezoidala edo arau trapezoidala, integralak kalkulatzeko erabiltzen den trapezioaren legetik dago eratorria [8]. Aipatutako azken metodoa bezala, hau ere metodo implizitua da eta hurrengo ekuazioaren bidez dator adierazia:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})) \quad (1.9)$$

## 1.6 Zenbakizko metodoen eta metodo analitikoaren arteko alderaketa

Jarraian, aurretiaz aipatutako metodo batzuen arteko alderaketa egingo da, haien arteko ezberdintasunak ikusteko. Honetarako, hurrengo ekuazio diferentziala hartuko da adibide:

$$y' = -2y \quad (1.10)$$

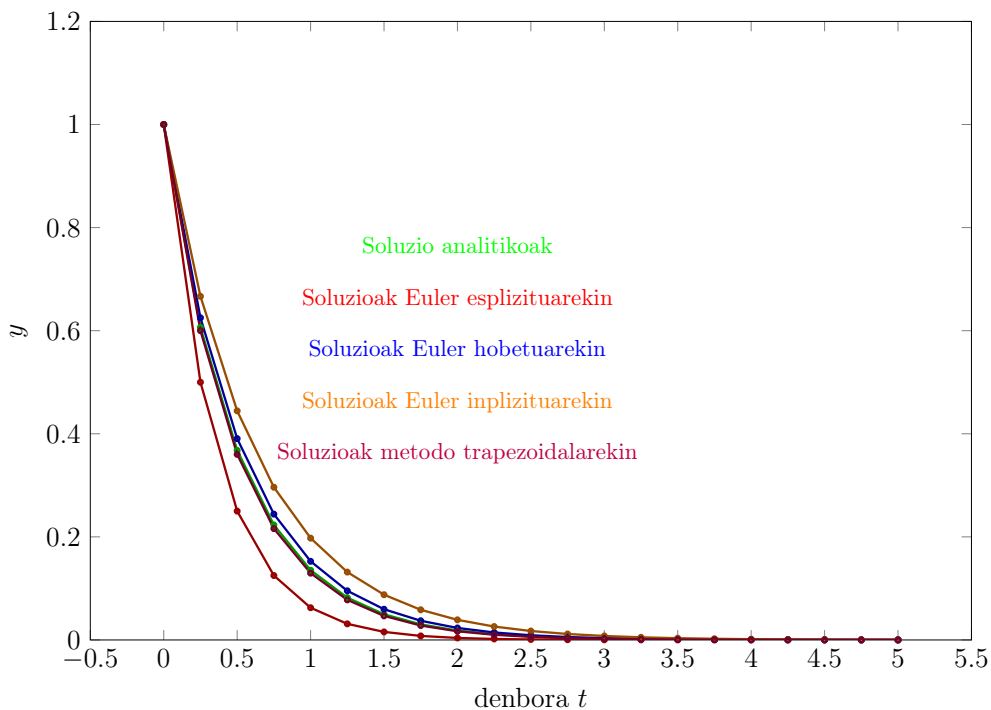
Emitza analitikoa kalkulatzeko, hurrengo garapena egin da:

$$\begin{aligned}
 y' &= -2y \\
 \frac{dy}{dt} &= -2y \\
 \int \frac{dy}{y} &= \int -2dt \\
 \ln y &= -2t + k \\
 y &= e^{-2t+k}
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

$k$  konstantea zein den jakiteko,  $y(0) = 1$  dela hartuko dugu kontutan eta, ondorioz:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= e^{0+k} = e = 1 \rightarrow k = 0 \\
 y(t) &= e^{-2t}
 \end{aligned}
 \tag{1.12}$$

Adierazpen honi esker, aurretik azaldutako zenbakizko metodoekin egiteaz gain, analitikoki ere ebatz liteke ekuazio diferentziala. Horrela, 1.2 taulan jaso dira lau zenbakizko metodoren bidez eta analitikoki lortutako emaitzak eta 1.2 Irudian adierazi dira.



**Irudia 1.2:**  $y' = -2y$  ekuazioaren emaitzak metodo desberdinak erabiliz kalkulaturik  $t$  aldiuneetan.

$t$ aldiuneak	$y_n$ Eulerren metodo esplizitua	$y_n$ Eulerren metodo hobetua	$y_n$ Eulerren metodo inplizitua	$y_n$ medodo trapezoidala	$y(t_n)$ zehatzak
0.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
0.250000	0.500000	0.625000	0.666666	0.599999	0.606530
0.500000	0.250000	0.390625	0.444444	0.359999	0.367879
0.750000	0.125000	0.244140	0.296296	0.216000	0.223130
1.000000	0.062500	0.152587	0.197530	0.129599	0.135335
1.250000	3.125E-002	9.536E-002	0.131687	7.775E-002	8.208E-002
1.500000	1.562E-002	5.960E-002	8.779E-002	4.665E-002	4.978E-002
1.750000	7.812E-003	3.725E-002	5.852E-002	2.799E-002	3.019E-002
2.000000	3.906E-003	2.328E-002	3.901E-002	1.679E-002	1.831E-002
2.250000	1.953E-003	1.455E-002	2.601E-002	1.007E-002	1.110E-002
2.500000	9.765E-004	9.094E-003	1.734E-002	6.046E-003	6.737E-003
2.750000	4.882E-004	5.684E-003	1.156E-002	3.627E-003	4.086E-003
3.000000	2.441E-004	3.552E-003	7.707E-003	2.176E-003	2.478E-003
3.250000	1.220E-004	2.220E-003	5.138E-003	1.306E-003	1.503E-003
3.500000	6.103E-005	1.387E-003	3.425E-003	7.836E-004	9.118E-004
3.750000	3.051E-005	8.673E-004	2.283E-003	4.701E-004	5.530E-004
4.000000	1.525E-005	5.421E-004	1.522E-003	2.821E-004	3.354E-004
4.250000	7.629E-006	3.388E-004	1.014E-003	1.692E-004	2.034E-004
4.500000	3.814E-006	2.117E-004	6.766E-004	1.015E-004	1.234E-004
4.750000	1.907E-006	1.323E-004	4.510E-004	6.093E-005	7.485E-005
5.000000	9.536E-007	8.271E-005	3.007E-004	3.656E-005	4.539E-005

**Taula 1.2:**  $y' = -2y$  ekuazioaren emaitzak metodo desberdinak erabiliz kalkulaturik  $t$  aldiuneetan.

# Kapitulua 2

## Elementu Finituen Metodoa (EFMa)

### 2.1 Elementu Finituen Metodoko formulazioa

Elementu Finituen Metodoa (EFM) ekuazio diferentzialen emaitza hurbilduak lortzeko erabiltzen den metodo bat da, ingeniartzako eta fisikako arloetan erabili ohi dena. Honi esker, deribatu partzielako ekuazioei emaitzak eman dakizkieke. Metodo hau XX. mendearen erdialdean hasi zen garatua izaten, eta oraindik ere erabilia da gaur egunean [9].

Atal honetan zehar, ekuazio diferentzialak EFM-aren bidez nola ebazten diren aztertuko da.

Dimentsio bakarreko eta inguruneko baldintzadun bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineala honela emana dator:

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (2.1)$$

Helburua da ekuazioa betetzen duen  $u(x)$  soluzioa aurkitzea  $x \in [0, l]$  eremuan (dimentsio bakarra denez, tartean). Ekuazio diferentzialaz gain inguruneko baldintzak behar dira soluzioa aurkitu nahi bada. Inguruneko baldintzek esango digute  $[0, l]$  eremuko ingurunean (1Dko problema landuko denez,  $x = 0$  eta  $x = l$  muturretan) zenbat balio duen  $u$  ezezagunak edo bere deribatuak,  $u'$  funtzioak alegia. Hau da, datu hauek beharko ditut:

- Dirichlet motako inguruneko baldintzak (IB):  $u(0) = u_0$  edo  $u(l) = u_l$ .
- Neumann inguruneko baldintzak (IB):  $-a(0)u'(0) = \gamma_0$  edo  $a(l)u'(l) = \gamma_l$ .

Beraz, (2.1) problemako datuak honako hauek dira:

- Operatzaile diferentzialeko koefizienteak  $(a(x), b(x), c(x))$ .
- Iturria  $(f(x))$  eta dauden inguruneko baldintzak  $(u_0, u_l, \gamma_0, \gamma_l)$ .

Datuek honako baldintza hauek bete beharko dituzte:  $a(x)$ ,  $a'(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$  eta  $f(x)$  jarraiak izatea. Matematikoki idatzita:

$$a(x) \in C^1[0, l], \quad b(x), c(x), f(x) \in C^0(0, l) \quad (2.2)$$

2D edo 3Dko problemetan, ingurunea lerro bat edo gainazal bat izango da. 1Dko problemetan, aldiz, eremua tarte lineal bat da eta ingurunea tarte horretako puntuek osatzen dute.

## 2.2 Formulazio klasikoa edo sendoa

(2.1) ekuazioaren formulazio klasikoa edo sendoa honela emana dator:

$$\begin{cases} -(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in (0, l) \\ u(x) = g_D, & x \in \Gamma_D \\ u'(x) = h_N, & x \in \Gamma_N \end{cases} \quad (2.3)$$

Datu funtzioek (2.2) betetzen dute. Helburua da ekuazioa betetzen duen eta bigarren deribatua jarraia duen  $u(x)$  funtzioa aurkitzea ( $u(x) \in C^2[0, l]$ ).  $u(x)$  funtzioak ekuazioa bete duenez, bere bigarren deribatua funtzio jarraia da,  $f(x)$  funtzioa bezala. Ondoren ikusiko den formulazio ahulean, ekuazio diferentziala eremuan integratuko da eta, horrela,  $u(x)$  ezezagunari eskatuko zaizkion baldintzak nasaiagoak izango dira, hau da, baldintza gutxiago izango ditu. Problema berbera planteatzeko beste era bat da formulazio ahula edo formulazio bariazionala eta aurrerago aztertuko da.

## 2.3 Funtzio espazioak

Hona iritsita egokia da zenbait funtzio espazio definitzea:

- Funtzio jarraien espazioa,  $C^0$ ,  $\Omega$  eremuan:

$$C^0(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ jarraia}\}$$

$C^0$  espazio bektoriala denez, honako hau betetzen da:

$$f, g \in C^0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

- Karratu integragarriko funtzioen espazioa,  $L^2$ ,  $\Omega$  eremuan:  $L^2$  espazioan daude: funtzio jarraiak ( $C^0$ ), zatika jarraiak direnak, etab. Bertako funtzioen ezaugarria da karratu integragarria dutela. Espazioa  $L^2$  edo  $H^0$  denotatzen da:

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} f(x)^2 dx < \infty \right\}$$

- Soboleven espazioa,  $H^1$ ,  $\Omega$  eremuan:

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f' \in L^2(\Omega)\},$$

- $H_0^1(\Omega)$  espazioa  $\Omega$  eremuan:  $H^1(\Omega)$  espazioaren azpiespazio bat da:

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) \mid f(x) = 0 \quad \partial\Omega \text{ eremuan}\},$$

## 2.4 Formulazio bariazionala edo ahula

Izan bedi  $u(x)$  hasierako problemaren emaitza. (2.1) ekuazioa test funtzioekin,  $v(x)$ -ekin, biderkatuz eta  $(0, l)$  eremuan integratuz honako hau daukagu:

$$\int_0^l -(a(x)u'(x))' v(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx = \int_0^l f(x)v(x)dx \quad (2.5)$$

Zatikako integrazioa erabilita (2.5) adierazpeneko lehenengo terminoa integratuko dugu:

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU \quad (2.6)$$

non,  $U = v(x)$ ,  $dV = (a(x)u'(x))'$ . Honako adierazpen hau lortuko da:

$$\int_0^l -(a(x)u'(x))' v(x)dx = \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx - a(l)u'(l)v(l) + a(0)u'(0)v(0) \quad (2.7)$$

Orduan, (2.5) adierazpenean (2.7) ordezkatzuz, beste hauxe lortuko da:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \quad (2.8) \\ \forall v(x) \in H^1((0, l)) \end{aligned}$$

Ohartu (2.8) adierazpeneko integralek zentzua izan dezaten  $v(x) \in H^1((0, l))$  bete behar dela.

Oraindik ere, formulazio ahula lortzeko azken pausoak falta zaizkigu.

(2.8) adierazpenean  $u(x)$  ez ezik  $u'(x)$  ere ez dugu ezagutzen  $\Gamma_D$  eremuan (Dirichlet baldintzadun ingurunean). Gabezia horri aurre egiteko test funtzioak honako  $V$  espazio honetan aukeratuko dira:

$$V = \{v(x) \in H^1((0, l)) : v(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\} \quad (2.9)$$

Horrela, (2.8) adierazpenak forma hau hartuko du:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \quad \forall v(x) \in V \quad (2.10) \end{aligned}$$

Beraz, funtzio batek (2.10) betetzen badu, inguruneko Dirichlet baldintzak betetzea baino ez zaio falta ( $\Gamma_D$  eremuan definituak) (2.3) problemaren soluzioa izateko. Beste era batean esanik, soluziogaia ondoko  $U$  espaziokoa izango da:

$$U = \{u(x) \in H^1(\Omega) : u(x) = g_D \quad \forall x \in \Gamma_D\} \quad (2.11)$$



Eta inguruneko baldintzadun (2.3) ekuazio diferentzialak formulazio bariazional edo ahul hauxe dauka:

Inguruneko baldintzadun (2.3) ekuazio diferentziala emanik, soluziogaien espazioa,  $U$ , eta test funtzioen espazioa,  $V$ , definitzen dira:

$$\begin{cases} U = \{u(x) \in H^1((0, l)) : u(x) = g_D \forall x \in \Gamma_D\} \\ V = \{v(x) \in H^1((0, l)) : v(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\}, \end{cases} \quad (2.12)$$

helburua (2.10) beteko duen  $u \in U$  soluzioa aurkitzea da:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l b(x)u'(x)v(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v(x)dx + a(l)u'(l)v(l) - a(0)u'(0)v(0), \forall v(x) \in V \end{aligned} \quad (2.13)$$

$U$  multzoa  $H^1$ eko azpimultzoa da, baina orokorrean ez da azpiespazioa. Problema inguruneko baldintzak Dirichlet motako baldintza nuluak (homegenoak) direnean izango da  $U$   $H^1$ eko azpiespazio bat. Beste kasu guztietan, nahikoa da soluzioa bi partetan banatzea:

$$u(x) = w(x) + g(x) \quad (2.14)$$

$g(x)$  izanik inguruneko Dirichlet baldintzak bete behar dituen funtzio laguntzaile bat.  $w(x)$  deitu dugun parteak inguruneko Dirichlet baldintza nuluak beteko ditu, eta  $V$  espazioko funtzioa izango da. Gainera,  $w(x)$  funtzioa oinarriko funtzioen konbinazio lineal gisa definituko da. Horrela, nahikoa izango da test funtzioen  $V$  espazioa eta  $g(x)$  funtzio laguntzailea definitzea.

## 2.5 Formulazio bariazional diskretua

Formulazio bariazionalen test funtzioen  $V$  espazioak dimentsio infinitua dauka. Formulazio bariazional diskretura pasatzeak esan nahi du dimentsio finituko test funtzioen espazio bat aukeratuko dela. Dei diezaiogun espazio horri  $V^h \subseteq V$ . Era berean, soluziogaien multzo diskretua eraikiko da,  $U^h \subseteq U$ :

$$u^h(x) = w^h(x) + g^h(x) \quad (2.15)$$

Ohartu  $w^h(x) \in V^h \subseteq V$  betetzen dela eta, beraz,  $w^h(x)$  funtzioek  $w^h(x) = 0$  beteko dute  $\Gamma_D$  eremuan, hau da, Dirichlet baldintza homogeneousak. Eta  $g^h$  funtzio laguntzaileak honako hau beteko du:

$$g^h(x) \approx g(x), \forall x \in \Gamma_D \quad (2.16)$$

Hortaz, problemaren formulazio bariazional diskretua honako hau da:

Inguruneko baldintzadun (2.3) problema emanik, kalkulatu  $u^h(x) = w^h(x) + g^h(x)$  non:

$$\begin{aligned} w^h(x) \in V^h \subseteq V = \{v(x) \in H^1((0, l)) : v(x) = 0 \text{ en } \Gamma_D\} \\ g^h(x) \approx g(x), \forall x \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ondoko hau betetzeko eran:

$$\begin{aligned} \int_0^l a(x)(u^h)'(x)(v^h)'(x)dx + \int_0^l b(x)(u^h)'(x)v^h(x)dx + \int_0^l c(x)u^h(x)v^h(x)dx \\ = \int_0^l f(x)v^h(x)dx + a(l)(u^h)'(l)v^h(l) - a(0)(u^h)'(0)v^h(0), \\ \forall v^h(x) \in V^h \end{aligned} \tag{2.18}$$

Eta falta direnak dira:  $g^h$  era egokian adieraztea,  $V^h$  espazioko oinarriko funtzioak  $N_j(x)$  aukeratzea, soluzioaren hurbilpena adieraztea eta bertako  $d_j$  koefizienteak kalkulatzeko.

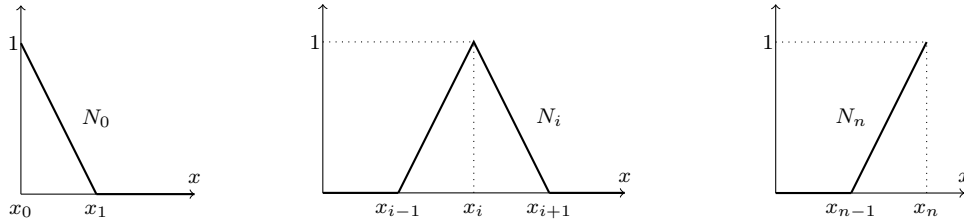
Soluzioa test funtzioen konbinazio lineal gisa idazten denean, Bubnov-Galerkin izeneko EFMa deitzen zaio:

$$u \approx \sum_{j=1}^N d_j N_j(x), \tag{2.19}$$

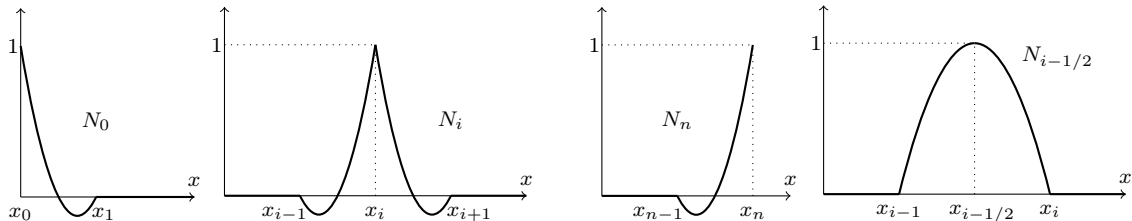
eta hemen, Bubnov-Galerkinen garapena egingo da.

## 2.6 Oinarriko funtzioen aukeraketa

Oinarriko funtzio bezala familia ezberdinak erabil daitezke (polinomioak, sinusoidalak, esponentzialak, etab.). Baina EFMan funtzio polinomikoak erabiltzen dira. Horiek linealak, koadratikoak, hirugarren mailakoak, etab. izan daitezke. Funtzio linealei kapela funtzioak deritze eta 2.1 Irudian ikus daitezke. Funtzio koadratikoak 2.2 Irudian marraztu dira. Aurrerantzean funtzio linealekin egingo da lana.



**Irudia 2.1:** Funtzio linealak (kapela funtzioak).



**Irudia 2.2:** Funtzio koadratikoak.

EFMan erabiltzen diren funtzioek honako baldintza hauek betetzen dituzte:

- Eremuko (tarteko) azpitarte ezberdinetan definituta dauden funtzioak dira.
- $H^1(\Omega)$  espazioko funtzioak dira.
- Kalkulatu behar diren  $d_j$  koefizienteak  $u(x_j) = d_j$  baldintza betetzeko eran aukeratzen diren funtzioak dira,  $1 \leq j \leq N$  izanik.

## 2.7 Inplementazioa

Atal honetan EFMaren garapena egingo da. Sarearekin eta EFMko funtzioen azalpenarekin hasiko da.

### 2.7.1 Sarea

$\Omega = [0, l]$  tartea zatituko dugu  $n$  azpitartetan:

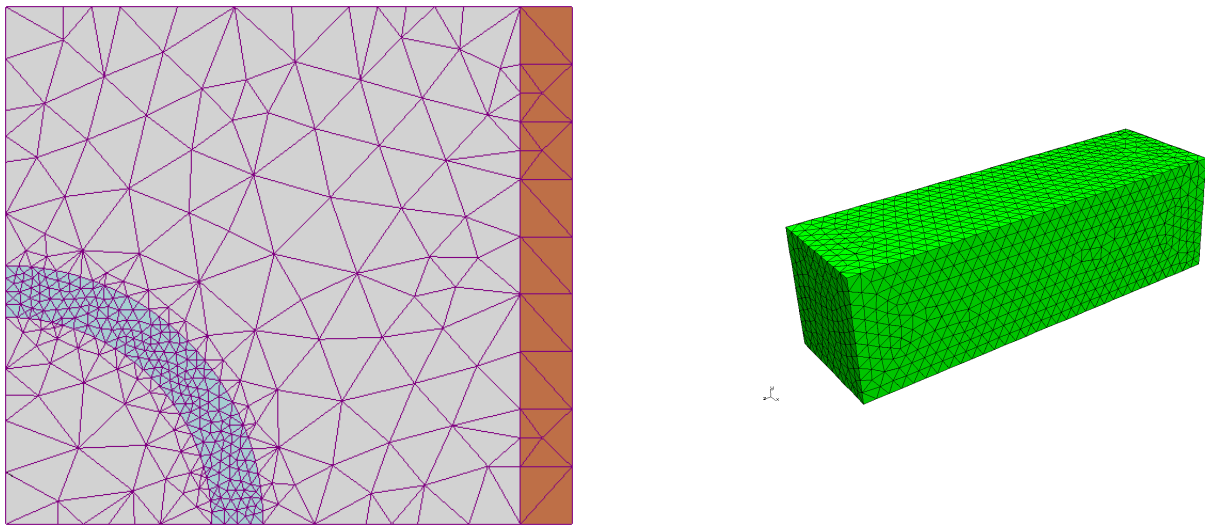
$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = l \quad (2.20)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$  izanik  $i$  azpitartearen luzera.

- Nodoak deritze  $(n + 1)$  puntuei  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .
- Elementu finitu deritze  $n$  azpitarteei  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, (n - 1)$ .
- Nodoeak eta elementuek sarea edo eremuaren diskretizazioa osatzen dute.



**Irudia 2.3:** Eremuaren partiketa dimentsio bakarrean.



**Irudia 2.4:** 2Dko eta 3Dko eremuen partiketa

## 2.7.2 Zatika linealak diren EFMko oinarriko funtzioak

$V^h$  espazioko oinarri bat aukeratu behar da test funtzioak izan nahi badira. Funtzio linealak erabiliz  $V^h$  nola osatzen den azalduko da.

Kasu linealean honela definituta dago  $V_h$ :

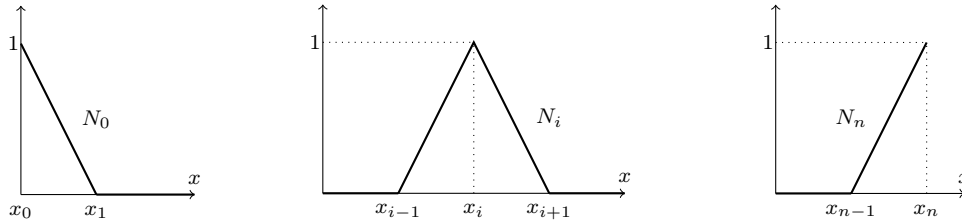
$$V_h = \{v_h(x) \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v_h(x) \text{ lineala elementuka eta } v_h(x) = 0, \Gamma_D \text{ eremuan}\}.$$

$N_i(x)$  deituko diegu  $V^h$ ko oinarriko funtzioei. Tarteko  $x_i$  nodoetan  $N_i(x)$  funtzioak era honetan kalkulatu daude:

$$N_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_i}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

Muturretako nodoetan  $N_i(x)$  funtzioak honela definitzen dira:

$$N_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_0}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad N_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$



**Irudia 2.5:** EFM funtzio linealak.

Funtzioek honako baldintza hau betetzen du

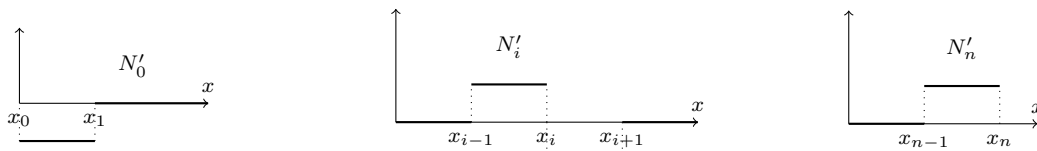
$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.21)$$

Hau da,  $N_i(x)$  funtzioak 1 balio du  $x_i$  nodoan eta 0 gainontzekoetan.

Gainera  $N_i(x) \neq 0$  da  $x_i$  barnean daukaten azpitarteetan. Oinarriko funtzioen deribatuak ondokoak dira:

$$N'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{i-1}}, & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{-1}{h_i}, & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, n-1,$$

$$N'_0(x) = \begin{cases} \frac{-1}{h_0}, & \text{si } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{bestela,} \end{cases} \quad N'_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_{n-1}}, & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{bestela.} \end{cases}$$



Irudia 2.6: EFM funtzio linealen deribatuak.

Gainera,  $|i - j| > 1$  deneak ondokoak betetzen dira:

$$\begin{cases} N_i(x)N_j(x) = 0, \\ N_i(x)N'_j(x) = 0, \\ N'_i(x)N'_j(x) = 0, \end{cases} \quad (2.22)$$

### 2.7.3 Zenbait ezaugarri

Eman daitezkeen inguruneko baldintzen arabera  $V^h$  espazioko oinarriko funtzioak zeintzuk diren zehaztuko dugu. Har dezagun  $\Omega$  eremuaren diskretizazio bat  $(n+1)$  nodotan eta, beraz,  $(n+1)$  funtzio izango ditugu  $\{N_0(x), N_1(x), \dots, N_n(x)\}$ . Funtzio hauek beraien artean linealki independenteak dira. Funtzio horiek eta beraien deribatuak karratu integragarrikoak dira, beraz,  $H^1(\Omega)$  espazioan daude.  $V^h$  espazioaren oinarri bat honela osatuta dago:

1. Mutur bietan Dirichlet inguruneko baldintzak (IB-DD):

$$V^h = \text{span}\{N_1(x), \dots, N_{n-1}(x)\}. \quad (2.23)$$

2. Mutur batean Dirichlet eta bestean Neumann. Bi kasu bereiz daitezke:

- Dirichlet-Neumann kasuan (IB-DN):

$$V^h = \text{span}\{N_1(x), \dots, N_n(x)\}. \quad (2.24)$$

- Neumann- Dirichlet kasuan (IB-ND):

$$V^h = \text{span}\{N_0(x), \dots, N_{n-1}(x)\}. \quad (2.25)$$

EFM funtzio bat  $V^h$ ko oinarrian egoteko baldintza da Dirichlet baldintza duen muturrean zero izatea. Funtzioak aipatutako baldintza betetzen ez badu, ez da egongo  $V^h$ ko oinarrian. Ohartu mutur bietan Dirichlet baldintza dagoenean, bakarrik funtzi hauek betetzen dutela baldintza:

$$N_i(x_0) = N_i(x_n) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.26)$$

Goian aipatutako kasuetako bakoitzean  $u^h(x)$  soluzioa era honetan definitzen da:

$$u^h = w^h + g^h = \begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j N_j(x) + g_0 N_0(x), & \text{IB-DN problemen} \\ \sum_{j=0}^{n-1} d_j N_j(x) + g_n N_n(x), & \text{IB-ND problemen} \\ \sum_{j=1}^{n-1} d_j N_j(x) + g_0 N_0(x) + g_n N_n(x), & \text{IB-DD problemen} \end{cases} \quad (2.27)$$

Eta  $N_i(x_j) = \delta_{ij}$  betetzen dela kontuan hartuz, nodo bakoitzean  $u^h(x_i)$  balio hurbildua honako hau da:

$$u^h(x_i) = \begin{cases} \begin{cases} d_i, & i \neq 0 \\ g_0, & i = 0 \end{cases}, & \text{IB-DN problemen} \\ \begin{cases} d_i, & i \neq n \\ g_n, & i = n \end{cases}, & \text{IB-ND problemen} \\ \begin{cases} d_i, & i \neq 0, n \\ g_0, & i = 0 \\ g_n, & i = n \end{cases}, & \text{IB-DD problemen} \end{cases} \quad (2.28)$$

#### 2.7.4 EFMko ekuazio sistema

Edozein inguruneko baldintzetara orokor daiteke egin den (2.27) hurbilpena:

$$u^h = w^h + g^h = \sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \quad (2.29)$$

non, inguruneko baldintzen kudeaketa egitea faltako den.

(2.29) adierazpena (2.18) adierazpenean ordezkatzuz eta  $V^h$  espazioan definitu den oinarriko funtzioak erabiliz honakoa lortzen da:

$$\begin{aligned} & \int_0^l a(x) \left( \sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right)' N_i'(x) dx + \int_0^l b(x) \left( \sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right)' N_i(x) dx + \\ & + \int_0^l c(x) \left( \sum_{j=0}^n d_j N_j(x) \right) N_i(x) dx = \\ & = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \text{ para } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.30)$$

Batukariak integraletatik kanpora aterata, honako hau lortuko da:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^n \left[ \int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + b(x) N_j'(x) N_i(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx) \right] d_j \\ & = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0), \text{ para } i = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eta matrize eran honela idatziko da (2.31) adierazpena:

$$\sum_{j=0}^n K_{ij} d_j = F_i, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n+1 \Rightarrow K \cdot d = F \quad (2.32)$$

$K = (K_{ij})$  eta  $F = (F_i)$  ondokoak izanik:

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l (a(x) N_j'(x) N_i'(x) dx + b(x) N_j'(x) N_i(x) dx + c(x) N_j(x) N_i(x) dx) \\ F_i = \int_0^l f(x) N_i(x) dx + a(l)(u^h)'(l) N_i(l) - a(0)(u^h)'(0) N_i(0) \end{cases} \quad (2.33)$$

$K$  matrizea  $(n + 1)$  dimentsioko matrize karratua da, eta zurruntasun matrize globala deritzo.  $F$  bektoreak  $(n + 1)$  elementu ditu, eta indarren bektore globala deritzo. Ezezagunen bektorea  $d$  da.

Ohartu, EFMko funtzio guztiak kontsideratzen direneko matrize orokorra dagoela  $((n+1) \times (n+1))$  dimentsioa duena), eta inguruneke edozein baldintzatarako matrize horren parte bat hartzen dela: DN kasuan matrize orokor horretako lehenengo errenkada eta zutabea kentzen dira; ND kasuan matrize orokor horretako azken lerroa eta zutabea kentzen dira; eta DD kasuan lehenengo errenkada eta zutabea eta azkenak kentzen dira.

Ohartu  $K$  matrizeko  $N_i N_j$ ,  $N_i N'_j$  eta  $N'_i N'_j$  biderkaketak zero direla  $|i - j| > 1$  denean. Ondorioz,  $K$  matrizea tridiagonala da dimentsio bakarrean.

### 2.7.5 Sistematzazioa

Elementu Finituen Metodoan zenbait pauso ezberdindu behar dira:

1. Geometriaren definizioa: nodoak eta elementuak, ezaugarri fisikoak ( $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $c(x)$ ,  $f(x)$ ) eta inguruneke baldintzak.
2.  $K$  matrizearen eta  $F$  bektorearen kalkulua.
3. Inguruneke baldintzen kudeaketa.  $K$  matrizearen eta  $F$  bektorearen dimentsioen egokitzapena.
4. Ekuazio sistemaren ebazpena.

Ondoko ataletan 2 eta 3 puntuak garatuko ditugu.

### 2.7.6 Elementukako egitura EFMan

(2.32) ekuazio-sistemaren eraketa bi zatitan egingo dugu:

- Lehenengo zatian, dimentsiorik handieneko problema kontsideratuko dugu dikretizazioko  $(n+1)$  nodoak (guztiak) kontuan hartuz. Horrela,  $K$  matrizea  $((n+1)$  dimentsioko matrize karratua) eta  $F$  bektorea  $((n+1)$  dimentsiokoa) kalkulatu ditugu, inguruneke baldintzak kontuan izan gabe. Gainera, suposatuko dugu NN inguruneke baldintza nuluak daudela. Hau da, (2.33) sistema era honetan geratuko litzateke NN inguruneke baldintza nuluen kasurako:

$$\begin{cases} K_{ij} = \int_0^l (a(x)N'_j(x)N'_i(x)dx + b(x)N'_j(x)N_i(x)dx + c(x)N_j(x)N_i(x)dx) \\ F_i^* = \int_0^l f(x)N_i(x)dx \end{cases} \quad (2.34)$$

Azaldutako eran lortutako  $K$  matrizeari eta  $F^*$  bektoreari zurruntasun-matrize eta indarren bektore oso deritze. Horien eraketak bi parte ditu: elementukako integralak kalkulatu behar dira (horrela elementukako zurruntasun-matrizea eta indar-bektorea lortzen dira); eta elementukako matrizeen mihiztaketa (nodoek eremu osoan daukaten posizioa kontuan hartuz).

- Bigarren partean, problemako inguruneko baldintzak izango dira kontuan  $K$  matrizean eta  $F$  bektorean (Dirichleten baldintzak eta Neumannen baldintza ez-nuluak kontuan hartuz, baleude).

### Elementukako zurruntasun-matrizea eta indarren bektorea

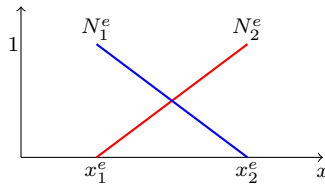
Edozein elementu (azpitarte) kontsideratzen dugunean,  $[x_k, x_{k+1}]$ , elementu horretako soluzio hurbildua  $u^h$  era honetan idazten da:

$$u^h(x) = d_k N_k(x) + d_{k+1} N_{k+1}(x), \quad x_k \leq x \leq x_{k+1} \quad (2.35)$$

$[x_k, x_{k+1}]$  elementuan oinarriko beste funtzioak nuluak baitira. Aurrerantzean  $[x_k, x_{k+1}]$  elementu orokorrai  $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$  deituko diogu, eta  $n$  elementu ditugunez, orduan,  $e = 1, \dots, n$ . Forma funtzioak definituko ditugu  $N_1^e(x)$  eta  $N_2^e(x)$ , oinarriko funtzioen murrizketa izanik elementuan:

$$N_1^e(x) = \frac{x_2^e - x}{h^e}, \quad N_2^e(x) = \frac{x - x_1^e}{h^e}, \quad x_1^e \leq x \leq x_2^e, \quad (2.36)$$

non  $h^e = x_2^e - x_1^e$ .



**Irudia 2.7:** Forma funtzioak.

Notazio berdinarekin jarraituz,  $d_1^e$  eta  $d_2^e$  deituko diegu  $d_k$  eta  $d_{k+1}$  ezezagunek hurrenez hurren elementuan dituzten balioei. Orduan:

$$(u^h(x))^e = d_1^e N_1^e(x) + d_2^e N_2^e(x) \quad (2.37)$$

Orduan,  $K$  zurruntasun matrizearentzat zein  $F^*$  bektorearentzat 0 eta  $l$  balioen arteko integrala kalkulatu behar da, eta era honetan egin daiteke:

$$\int_0^l (\cdot) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega^e} (\cdot) \quad (2.38)$$

non  $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$ . Eta  $K$  rentzat eta  $F^*$  rentzat elementukako aprotazioen batuketa kontsidera daiteke:

$$K = \sum_{i=1}^n K^e, \quad F^* = \sum_{i=1}^n (F^*)^e \quad (2.39)$$

$K^e$  eta  $(F^*)^e$ ,  $K_n$  eta  $F^{*n}$   $e$  elementuaren gainean egindako integralek aportatzen duten partea izanik.

Aurrerantzean  $K^e$  eta  $(F^*)^e$  deituko diegu,  $K$  matrizean eta  $F^*$  bektorean  $e$  elementuaren gainean egindako integralek aportatzen duten parteei. Beraien elementuak nola kalkulatu diren (2.34) adierazpenean ikus daiteke, baina kasu



honetan, integralen eremua  $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$  elementura mugatzen da. EFM funtzioen murrizketa guztiak  $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$  elementuan nuluak dira bi izan ezik: elementuko muturrei lotutako EFM funtzioak. Horien murrizketak  $e$  elementuan forma funtzioak dira  $N_1^e(x)$  eta  $N_2^e(x)$ . Beraz,  $\Omega^e = [x_1^e, x_2^e]$  elementuak  $K$  matrize globalean egiten duen aportazioa  $N_1^e(x)$  eta  $N_2^e(x)$  funtzioen bidezkoa da.

$K^e$  elementukako zurruntasun-matrizean nuluak ez diren lau elementu egongo dira bakarrik. Dei diezaiegun osagai horiei  $K_{11}^e$ ,  $K_{12}^e$ ,  $K_{21}^e$ ,  $K_{22}^e$ . Aipatutako osagaiak (2.34) adierazpeneko integraletatik eratortzen dira, zeintzuetan  $e$  elementuaren  $N_1^e(x)$  eta  $N_2^e(x)$  forma funtzioak agertzen diren. Hau da,  $e$  eta  $e + 1$  ekuazioetan (errenkadak), eta  $e$  eta  $e + 1$  batugaietan (zutabeetan):

$$\begin{cases} K_{11}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_1^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + b(x)(N_1^e)'(x)N_1^e(x)dx + c(x)N_1^e(x)N_1^e(x)dx) \\ K_{12}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_2^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + b(x)(N_2^e)'(x)N_1^e(x)dx + c(x)N_1^e(x)N_2^e(x)dx) \\ K_{21}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_2^e)'(x)(N_1^e)'(x)dx + b(x)(N_1^e)'(x)N_2^e(x)dx + c(x)N_2^e(x)N_1^e(x)dx) \\ K_{22}^e = \int_{\Omega^e} (a(x)(N_2^e)'(x)(N_2^e)'(x)dx + b(x)(N_2^e)'(x)N_2^e(x)dx + c(x)N_2^e(x)N_2^e(x)dx) \end{cases} \quad (2.40)$$

Era berean,  $(F^*)^e$  elementukako indarren bektorean, bakarrik bi elementu ez-nulu egongo dira. Dei diezaiegun elementu horiei  $(F_1^*)^e$  eta  $(F_2^*)^e$ . Bi terminoak (2.34) adierazpenean  $e$  elementuari dagozkion  $N_1^e(x)$  eta  $N_2^e(x)$  forma funtzioak agertzen diren integraletatik eratortzen dira. Zehazki,  $e$  eta  $e + 1$  ekuazioetatik (errenkadetatik):

$$\begin{cases} (F_1^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_1^e(x)dx \\ (F_2^*)^e = \int_{\Omega^e} f(x)N_2^e(x)dx \end{cases} \quad (2.41)$$

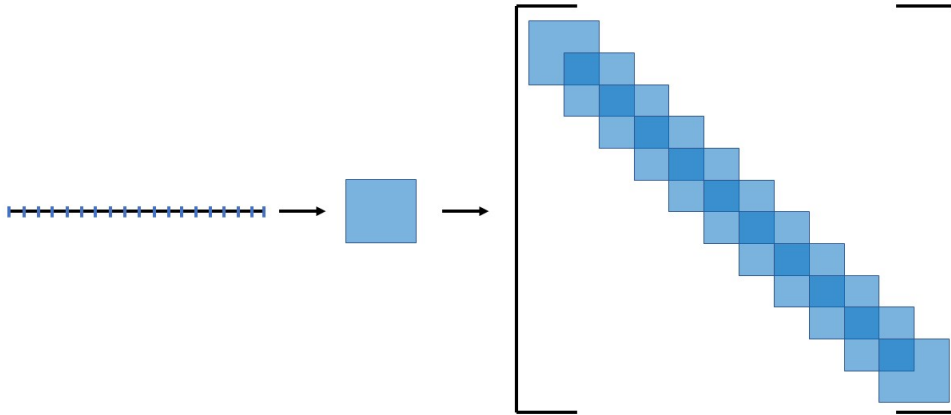
Ohartu elementukako formulatan ez dela agertzen inguruneko baldintzei lotutako terminorik. Horiek geroago txertatuko dira maila globalean, inguruneko baldintzak tratatzen direnean.

## Zurruntasun-marizearen eta indar-bektorearen mihiztaketa

Mihiztaketa prozesuan (2.39) sortu behar da, elementukako aportazioak,  $K^e$  eta  $(F^*)^e$  kontuan hartuta. Dimentsio bakarreko problemetan nodoen zenbaketa sekuentziala da eta mihiztaketa egitea erraza da. Aurretik esan da  $e$  elementuaren aportazioa  $K^e$  dela eta,  $e$  eta  $e + 1$  errenkadetan (ekuazioetan) eta zutabeetan (batugaietan) gertatzen da. Ondorioz, elementukako zurruntasun-matrizeak era mailakatuan gainezartzen dira  $K$  matrizean (diagonal nagusian, eta bere gaineko eta azpiko diagonaletan). Batzen diren termino bakarrak diagonalekoak dira (lehenengoa eta azkena salbu).  $F^*$  matrizeko elementukako aportazioak era berean gainezartzen dira:

$$K = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 + k_{11}^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{22}^{n-2} + k_{11}^{n-1} & k_{12}^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{21}^{n-1} & k_{22}^{n-1} + k_{11}^n & k_{12}^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{21}^n & k_{22}^n \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$F^* = \begin{pmatrix} (F_1^*)^1 \\ (F_2^*)^1 + (F_1^*)^2 \\ (F_2^*)^2 + (F_1^*)^3 \\ \vdots \\ (F_2^*)^{n-1} + (F_1^*)^n \\ (F_2^*)^n \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$



**Irudia 2.8:** Elementukako matrizeen kalkulua eta mihiztaketa.

# Kapitulua 3

## Lerroen Metodoa

Espazioaren eta denboraren menpeko Deribatu Partzialeko Ekuazioak (DPE) ebazteko erabiltzen den teknika da Lerroen Metodoa izenekoa (ingelesez *Method of Lines, MoL*). Lehenengo, espazioko aldagaiak diskretizatzen dira EFMa erabilia, eta ondorioz, Ekuazio Diferenzial Arrunten (EDA) sistema bat lortzen da. Ondoren, denborako diskretizazioa egiten da hasierako baliodun EDAk ebazteko metodoak erabilia (Eulerren metodoak, etab.).

Atal honetan beroaren ekuazioari Lerroen metodoa aplikatuko zaio. Formulazio matematikoa azalduko dugu eta ordenagailu bidezko simulazioetan lortutako emaitza batzuk ere aurkeztuko dira.

### 3.1 Beroaren ekuazioa

Beroaren ekuazioa edo difusio ekuazioa kontsideratuko da dimentsio bakarrean.  $L$  luzeradun eremua eta inguruneko Dirichleten baldintza nuluak kontsideratuko dira.

$$\blacksquare \text{ Beroaren ekuazioa: } \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \\ IB : u(0, t) = 0 = u(L, t) \\ HB : u(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

$\alpha^2 = \frac{k}{c\rho}$  difusibitate termikoa izanik,  $k$  eroankortasun termala,  $c$  gaitasun termala eta  $\rho$  dentsitatea.

#### 3.1.1 Soluzio analitikoa

Beroaren ekuazioaren soluzio analitikoa edo zehatza aldagaien banaketaren metodoa erabilia lor daiteke [10]. (3.1) problemaren soluzio analitikoa ondoko autofuntzio hauen serie bidezko garapen gisa emana dago ( $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ):

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-(\alpha k\pi)^2 t} \quad (3.2)$$

non  $A_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx$ .

Hasierako baldintza autofuntzioren baten berdina denean, hau da,  $g(x) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)$ , orduan:  $A_k = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k \\ 1, & \text{si } i = k \end{cases}$ . Eta orduan, batugai bakarrak osatzen du emaitza:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) e^{-(\alpha i\pi)^2 t} \quad (3.3)$$

$L = 8$  luzeradun eta  $\alpha^2 = 1$  kasuan, ondoko hasierako baldintza kontsideratuz:

$$g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right), \quad \forall x \in [0, 8] \quad (3.4)$$

soluzio analitikoak ondokoa litzateke:

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right) e^{-64\pi^2 t} \quad (3.5)$$

### 3.1.2 Lerroen Metodoaren bidezko soluzioa

$\Omega = [0, l]$  tartea zatituko dugu  $n$  azpitartetan (2.20) adierazpenean bezala:  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$ .

Soluzio hurbildua  $t$  aldagaiaren menpekotasuna duten koefizienteen bidez definitzen da:

$$u(x, t) \approx u^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j(x) \quad (3.6)$$

(3.6) denborarekiko eta espazioarekiko deribatuz, honakoak ditugu:

$$\frac{\partial u^h(x, t)}{\partial t} = \sum_{j=0}^n d_j'(t) N_j(x); \quad u_{xx}^h(x, t) = \sum_{j=0}^n d_j(t) N_j''(x) \quad (3.7)$$

(3.7) adierazpenak (3.1) adierazpenean ordezkatzuz, eta 2 Atalean bezala  $N_i(x)$  test funtzioekin biderkatuz eta  $\Omega = [0, L]$  tartean espazioarekiko integratuz honako hau lortzen da:

$$\int_{\Omega} \sum_j d_j'(t) N_j(x) N_i(x) dx = \alpha^2 \int_{\Omega} \left( \sum_j d_j(t) N_j''(x) N_i(x) \right) dx, \quad i = 0, \dots, n \quad (3.8)$$

(3.8) adierazpena honela berrordena daiteke:

$$\sum_j \left( \int_0^L N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j'(t) = \alpha^2 \sum_j \left( \int_0^L N_j''(x) N_i(x) dx \right) d_j(t), \quad i = 0, \dots, n \quad (3.9)$$

Espazioarekiko bigarren deribatua agertzen den terminoari zatikako integrazioa aplikatuz, honakoa lortzen da:

$$\sum_j \left( \int_0^L N_j(x) N_i(x) dx \right) d_j'(t) = -\alpha^2 \sum_j \left( \int_0^L N_j'(x) N_i'(x) dx \right) d_j(t), \quad i = 0, \dots, n \quad (3.10)$$

(3.10) adierazpenean agertzen diren integralei honela deituz:

$$m_{ij} = \int_0^L N_j(x)N_i(x)dx, \quad k_{ij} = \int_0^L N'_j(x)N'_i(x)dx, \quad (3.11)$$

honakoa daukagu:

$$\sum_j \left( \underbrace{\int_0^L N_j(x)N_i(x)dx}_{m_{ij}} \right) d'_j(t) = -\alpha^2 \sum_j \left( \underbrace{\int_0^L N'_j(x)N'_i(x)dx}_{k_{ij}} \right) d_j(t), \quad i = 0, \dots, n \quad (3.12)$$

Bukatzeko, (3.12) adierazpena matrize eran idatziko dugu:

$$\sum_{\forall j} m_{ij}d'_j(t) = -\alpha^2 \sum_{\forall j} k_{ij}d_j(t), \quad i = 0, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \boxed{M\mathbf{d}'(t) = -\alpha^2 K\mathbf{d}(t)} \quad (3.13)$$

(3.13) Ekuazio Diferentzial Arrunten sistema bat da, hasierako baldintza  $\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_{n-1}), g(x_n))^T$ . (3.13) EDA sistema  $y' = f(t, y)$  eran honela idatz daiteke::

$$\mathbf{d}'(t) = -\alpha^2 M^{-1} K \mathbf{d}(t) = 0, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{d}_0 = (g(x_0), g(x_1), \dots, g(x_{n-1}), g(x_n))^T \quad (3.14)$$

Hasierako baliodun (3.14) EDA sistema Eulerren metodoak, etab. erabilia ebatz daiteke.

# Kapitulua 4

## Ekuzio diferentzialak ingeniaria zibilean

Ekuzio diferentzialek aplikazio ugari izan ditzakete ingeniaria zibilean, besteak beste, analisi estrukturalan, hondoko zimenduetan, ariete kolpearen kalkuluan, hidraulikaren ekuzioetan, asentamenduen kalkuluan, etab. Hauei esker, aztertzeke zailak diren problemei emaitza hurbildu bat eman dakieke edota metodo tradizionalen bidez jasotako emaitzak baino emaitza hobekak lortu.

Esan den bezala, lan honen helburu nagusia ingeniaria zibilean ekuzio diferentzialek duten garrantzia aztertzea da. Hori dela eta, jarraian ingeniaria zibilean zenbakizko metodoek dituzten aplikazio batzuk azalduko dira.

### 4.1 Lur azpiko urak presetan

Presetarako, beharrezkoa da ur azpiko lurren filtrazio propietateak ezagutzea eta bertatik filtratuko den uraren jarrera ezagutzea presaren sikatzerik gerta ez dadin. Hau ezagutu ahal izateko balagarriak dira ekuzio diferentzialak.

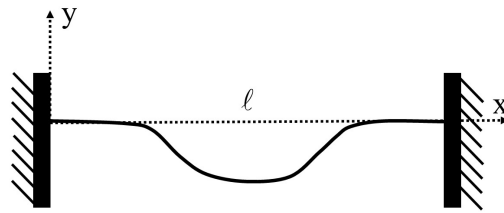
Metodoa erabiltzeko hiru ekuzio erabiltzen dira: masaren kontserbazioaren ekuzioa, lur-azpiko uren fluxuaren ekuzioa eta energiaren ekuzioa. Lehen biek Darcy-ren legea sortzen dute, zeinek uraren jarrera aztertzen duen lur porotsu batean zehar. Ekuzio hauek zehaztasun maximoz askatu ahal izateko beharrezkoa litzateke zenbakizko metodoak erabiltzea [11].

### 4.2 Hormigoizko loturak eta mentsulak

Modelazio estrukturala egitura konbentzionalen analisisian (portikoak edo armadurak, adibidez) zentratu ohi da da gaur egun, nahiz eta egitura konplexuagoak kalkulatzeko metodoak existitzen diren. Zenbakizko metodoak konputazionalki implementatu ahal izateko aukerak, edozein modutako hormigoizko egiturak diseinatzeke aukera ematen du, baita egoera batzuetan zein jarrera izango duten ezagutzeko ere. Hauetako batzuk mentsulak, piloteen gaineko zapatak eta bestelako hormigoizko loturak dira. Kasu hauentzako, ekuzio diferentzialen bidezko modelizazioan espezializatutako programek egituren jarrera modu grafikoan aztertzen dute, honela gune kritikoek ezagupen hobea izateke.



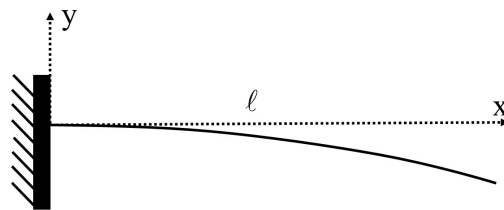
- Habe landatua:



**Irudia 4.2:** Bi aldetan landatutako habea.

$$y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) = 0.$$

- Hegal-habea:



**Irudia 4.3:** Alde bakarrea landatutako habea.

$$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0.$$

## 4.4 Gilbordura habeetan

Gilbordura elementu lerdenetan gertatzen den ezegonkortasun elastikoa da, zeinetan luzetarako ardatzarekiko paraleloa den konpresio baten ondorioz zeharkako desplazamendu nabarmenak sortzen diren. Elastikaren ekuazio diferentzialari esker, zutabe biartikulatu batetan gilborduraren eragina ikas daiteke. Hurrengoa da:

$$E \cdot I_Z \cdot y(x)'' = -M_Z \quad (4.2)$$

non  $y(x)$  gezia edo desplazatutako balioa izango den  $x$  puntu batean.  $E \cdot I_Z$  zutabearen makurdurarekiko zurruntasuna izango da planorik ahulenean, hau da, aztertuko den planoan (OXY planoan).

$$M_Z = P \cdot y \quad (4.3)$$

delarik, adierazpen hau aurrekoan ordezkatzuz azken honetara irits daiteke:

$$E \cdot I_Z \cdot y(x)'' + P \cdot y = 0 \quad (4.4)$$



Ekuazio hau bigarren ordenako ekuazio diferentzial homegeneoa da, lineala eta koefiziente konstanteduna.

Hala ere, gilbordurarako elastikaren ekuazio diferentziala erabiltzeko, beharrezkoa da hipotesi batzuk kontuan hartzea:

- Deformazioak txikiak izango dira.
- Materialak Hooke-ren legea eta Navierren hipotesia bete behar izango ditu.
- Aztertu beharreko zutabearen ardatza guztiz zuzena izan beharko da eta aplikatuko zaion P karga zutabearen guztiz zentratuta egon beharko da.
- Zutabeak zeharkako sekzio konstantea izango du eta bere muturrean artikulazio perfektuak izango ditu, hau da, ez du marruskadurarik izango.
- Piezak tentsio egoera neutro bat izango du, hau da, ez du inolako hondar tentsiorik jasango.

Hurrengo hauek izango lirateke habe biartikulatu batentzat ingurune baldintzak:

$$y(0) = 0 = y(l). \quad (4.5)$$

## 4.5 Zimenduak

Zimenduak orokorrean eta zimendu laminarrak batez ere, ekuazio diferentzialen bidez azter daitezkeen elementu estrukturalak dira. Duela hiru hamarkada baino gehiagotik (Naylor, 1981), geotekniarekin erlazionatutako problemak ebatzi izan dira metodo honen bidez. Besteak beste, luraren eta egituraren arteko interakzioa, lan geoteknikoen eraikuntza eta hauen faseak lantzen dituzten gaiak aztertu izan dira.

Jakina da metodo tradizionalak sinplifikazioetan oinarrituak egon ohi direla problemak ebatzi ahal izateko. Ondorioz, zimenduak kalkulatzeko orduan kontuan hartu beharko liratekeen parametro ugariekin ez-ikusi egin behar izaten da. Ekuazio diferentzialen bidez, berriz, posiblea da parametro gehiago kontuan hartu ahal izatea, besteak beste geometria konplexuak, kargen edozein aplikazio mota eta baldintza, materialen jarrera ez lineala, lurreko materialen distribuzio ez lineala eta luraren eta egituraren arteko interakzioa [14].

## 4.6 Ariete kolpea

Presiopeko instalazio hidraulikoetan oso arrunta den fenomeno da ariete kolpearena. Hodi bateko fluidoaren abiadura bat-batean moteltzen denean gertatzen den presio handitzearen ondorioz, presio uhina instalaziotik hedatzen da soinuaren abiaduran, eta arazoak sortzen ditu sekzio aldaketak edo adarkatzeak dauden puntuetan.

Fenomeno hau aztertu ahal izateko gaiaren inguruko ekuazio diferentzialen bidezko formulazioa garatu izan da, zenbakizko metodoen bidez ebatz daitekeena.

Honi esker ariete kolpeak dakartzan arazoak azter daitezke, baita izan ditzakeen onurak ere. Onuren artean ariete bonba aurki genezake, zeinekin fluido bat maila altuagoetara desplazatu genezake, honen energia zinetikoaz baliatuz [15].

## 4.7 Asentamenduen kalkulua

Asentamenduen kalkulua ere, zimenduetan bezala, hurbilpenen bidez kalkulatu ohi den problema mota bat da. Hala ere, ekuazio diferentzialen bidez posiblea da asentamenduak ebaztea.

Kalkulu hauek Terzaghi-ren teoriaren bidez garatzen dira. Teoria hau aplikatzeko baldintza batzuk bete behar dituzte problemek: lurra homogeneous izatea eta lurreko eta uretako partikulak konprimaezinak izatea, Darcy-ren legea baliagarria izatea eta  $k$  iragazkortasunaren koefizientea konstantea izatea, bestek beste. Beharrezkoa da baita ere lurra asetuta egotea eta horrela jarraitzea kontsolidazio prozesu osoan zehar, bestela metodo honek ez duelako nahiko fidagarritasun izango.

Honela, lortutako emaitzak  $x$  dimentsio bertikalean lortuko dira, hau izaten delako asentamenduetan garrantzi handiena duen norabidea [16].

## 4.8 Hidraulika

Ingeniaritza hidraulikoaren esparruan ere ekuazio diferentzialek badute euren tokia. Ugariak dira ekuazio diferentzialen bidez modela daitezkeen ingeniaritzako problemak eta jarraian ekuazio hauek erabiltzen dituzten teorema batzuk aurkeztuko dira.

Navier-Stokes ekuazioak fluidoaren mugimendu edo fluxu ez-lineala deskribatzen duten DPEak dira. Deribatu hauek abiadura eta presioa zehaztea ahalbideratzen dute. Navier-Stokes ekuazioak erabilgarriak dira kostaldeko ingeniaritzaren kalkuletan, adibidez, olatuen jarrera ezagutzeko balio baitute [17].

Ekuazio diferentzialen bidez askatzen den beste ekuazio batzuk Reynolds ekuazioak dira. Nahiz eta Navier-Stokes ekuazioak baliagarriak diren fluxu laminar zein turbulenturako, azken honetan, kasu batzuetan fluidoaren abiadura ezegonkorra bihurtzen da eta jarrera ia ausazkoa izaten du. Kasu hauetarako, Reynolds ekuazioak hobeto egokitzen dira.

Azkenik, hidraulikaren esparruan Saint-Venanten ekuazioak topa genitzake. Ekuazio hauek Navier-Stokes ekuazioen sinplifikazioetatik datoz, eta azaleko urentzako uhin ekuazioak bezala ezagutzen dira. Ekuazio hauek dira lan honetan zehar aplikatuko direnak, eta aurrerago garapen zehatzago bat emango zaie.

Inguruneke baldintzei dagokienez, ekuazio diferentzialak fluidoaren dinamikaren problemetara aplikatzerako orduan ez da ohikoa izaten Dirichlet eta Neumann motako baldintzak nahastea. Ondorioz, ingurunean Dirichlet motakoak soilik erabili ohi dira [18].

# Kapitulua 5

## Presak

Presa horma edo eraikin sendoa da, ibaietan ura biltzeko egiten dena. Urtegiek lurra ureztatzeko, biztanleriaren hornidurarako edo energia elektrikoa sortzeko balio dute, orokorrean. Gainera, presei esker uhaldiak eta lehorreak kontrolatzen dira pertsonen beharrianetara moldatuz.

### 5.1 Presa motak

Presa moten inguruan formaren eta materialaren arabera sailkatu ohi dira, nagusiki. Formaren arabera hauek topa litezke [19]:

- Grabitatezkoak: Tamaina handiko egiturak dira, material trinko eta pisutsuz eraikiak. Pesa hauek gai dira beraien pisuarekin soilik uraren bultzada horizontala jasateko [20].



**Irudia 5.1:** Grabitatezko Willow Creek presa, Heppner, Oregon, EEBB. *Iturria:* [damengineer.com](http://damengineer.com)

Grabitatezko presa trinkoez gain, arindu bezala ezagutzen diren beste batzuk ere badaude. Hauek kotrahormadunak eta pantaila lauekoak edo Ambursen motakoak izan daitezke.

Kotrahormadunak grabitate presen antzekoak dira, baina aurrekaldean zutabe gehigarri batzuk dituzte, uraren bultzada zuzenean jasotzen dutenak.

Hauei esker grabitatezkoek material gutxiago behar dute, baina eraikuntza zailtasunen ondorioz garestiagoak dira.



**Irudia 5.2:** Kontrahormadun Wimbleball presa, Dulverton, Ingalaterra, Erresuma Batua. *Iturria: Wikimedia commons*

Bestalde, Ambursen presa kontrahormadun presa da, zein presatik ur gora dagoen pantaila fina den eta orokorrean hormigoi armatuz egina dagoen.



**Irudia 5.3:** Ambursen egiturako La Prele presa, Douglas, Wyoming, EEBB. *Iturria: trib.com*

- Arku itxurakoak: Presa mota hauek beraien itxurari esker jasaten dute uraren indarra. Arku sistemari esker, uraren bultzada indar axial bihurtzen da presan zehar eta indarra estriboetara transmititzen dute, zeintzuek erresistentzia handia izan behar duten. Arku itxurako presek kurbadura horizontal sinplea izan dezakete edo kurbadura bikoitza izan dezakete. Azken horiei ganga itxurakoak deritzegu.



**Irudia 5.4:** Arku itxurako Chirkey presa, Dubky, Errusia. *Iturria: Wikimedia commons*

Bestalde, materialaren arabera hauek dira presa mota nagusiak:

- Hormigoizkoak: Trinkoak eta urak eramateko oso zailak. Gainera, estankotasun ona dute eta oso iraunkorrak dira.
- Material askekoak: Ez dira hormigoizkoak bezain trinkoak eta, ondorioz, urak erraztasun handiagoz apur ditzake. Horrez gain, hormigoizkoak baino iragazgarriagoak dira. Material askedun presen artean material uniformekoak, material heterogeneokoak eta pantaila edo diafragmadunak topa genitzake.

Sailkapen hauetaz gain, espainiar legediak presak bi taldetan banatzen ditu, tamainaren arabera [21]:

- Presa handia: Presak 15 metroko altuera baino handiagoa baldin badu edota 10 eta 15 metro arteko altuera baldin badu eta honen bolumena  $1\text{Hm}^3$  baino handiagoa bada.
- Presa txikia: Presa handien taldeko ezaugarriak betetzen ez dituzten presa guztiak presa txikiak izango lirateke.

## 5.2 Presen apurketak

Presa baten apurketa arazo katastrofiko bat izan ohi da uraren bapateko irteera arin eta kontrol-gabekoaren ondorioz. Horregatik, nahiz eta oso gutxitan gertatzen den arazoa izan, garrantzi handiko afera da gertatzen denean. Besteak beste, estatu batuetan 2005 eta 2013 urteen artean 173 presa apurketa gertatu ziren, zeinetan kasu baten ere ez ez ziren bi hildako baino gehiago egon [19].

Presak apurtzearen arrazoi ugari daude eta jarraian arrazoi nagusietako batzuk azalduko dira [22].



**Irudia 5.5:** Ganga itxurako Susquedako presa, Susqueda, Katalunia, Espaina.  
*Iturria: Susquedako Udala*

- Gainezka egitea: Hau ura presaren gainaldetik irtetzen denean gertatzen da, euri jasa bizien ondorioz. Gainezka egitea presa horren apurketaren lehen arrazoa izan ohi da. Arazo hau gainezka bideen kalkulu txarraren ondorioz, gainezka bideetan hondakinak metatzearen ondorioz eta presaren gailurraren asentamenduaren ondorioz gertatu ohi da kasu gehienetan Estatu Batuetako presen Segurtasunerako Elkartearen (ASDSO) arabera kasuen %34an, hain zuzen ere [19].
- Arazo estrukturalak: Bai zimenduetan gertatzen diren arazoak, bai asentamenduei baita ezponden kalkuluei dagozkien akatsak ere kontenplatu dira atal honetan eta arazoaren %30a suposatzen dute [19].
- Mentenimendu eta eraikuntza txarrak: Presek mantenimendu ugari eta erregularra behar dute haien segurtasuna ziurtatzeko. Arazo honengatik akatask izan dituzten presen adibide ugari daude, aurretik aipatutako arazoekin konbinatuz emaitza katastrofikoak izan dituztenak.
- Filtrazio arazoak: Honelako arazoak presaren barneko filtrazioa zuzena ez denean gertatzen dira. Material partikulek aurrera egiten dute filtrazio bideetan zehar eta hutsuneak sortzen dituzte erosioaren bitartez egituretan. EEBBetako presa apurketen %20an gertatzen da hau [19].

### 5.3 Presen legedia

Presen segurtasuna ziurtatzen duen legedi zabala dago garatuta Espainian. Lehen legea 1879. urteko uraren legea izan zen, baina ez zen 1905. urtera arte izan eksklusiboki presen nondik-norakoak aztertzen zituen lege bat sortu zen arte, Urtegien proiekturako instrukzioa, hain zuzen ere. Horren ostean 1960ko Presa handientzako Arau iragankorra eta aipagarria den 1967. urteeko Presa Handien Proiektu, Eraikuntza eta Ustiaketarako instrukzioa.

Behin demokrazia garaian, 1985. urtean Uraren legea berritu zen eta 1994. urtean Babes Zibileko Oinarrizko Plangintza araua onartu zen. Presen segurtasunaren inguruan sortu izan diren azken legediak 1996. urteko Presa, Urtegien Segurtasunerako Erregulamendu teknikoa eta 2011. urteko Presa eta Urtegien Segurtasunerako arau teknikoak daude.

Presak, haien apurketak izan lezakeen inpaktuaren arabera sailkatzen dira Espainian, aipatutako Presa, Urtegien Segurtasunerako Erregulamendu teknikoaren arabera [21]. Sailkapenak egiteko kontuan hartzen diren faktoreak hurrengoak dira: biztanleria arriskuan jartzea, ezinbesteko zerbitzuei eragitea, kalte materialak eta ingurugiroarekiko kalteak. Legediak arriskuaren arabera hurrengo hiru taldeetan sailkatzen ditu:

- A kategoria: Presaren apurketak edo funtzionamendu txarrak ezinbesteko zerbitzu edo hiriguneei eragingo lizkiekeen edota kalte material edo ingurugiro kalte oso larriak sortuko lituzketen presei dagokie. Giza bizitzak arrisku zuzenean egongo liriateke.
- B kategoria: Presaren apurketak edo funtzionamendu txarrak kalte material edo ingurugiro kalte garrantzitsuak sortuko lituzketen edota etxebizitza gutxi batzuei eragingo lieketen presei dagokie. Ezinbesteko zerbitzuei modu ez-larrian soilik eragin liezaieke
- C kategoria: Presaren apurketak edo funtzionamendu txarrak kalte material edo ingurugiro kalte txikiak sortuko lituzketen edota giza bizitzaren nahigabeko galerak soilik sortuko lituzketen presei dagokie. Maila honetako presek ezin dute etxebizitzetan eragin apurtzeko eran, eta kalte ekonomiko txikiak sortitzakete soilik.

A eta B kategorietako presak behartuta daude larrialdi plan bat izatera matxura edo haustura kasuetarako.

# Kapitulua 6

## Problemaren garapena

### 6.1 Algoritmoak

Lanean aurkeztuko diren problemak ebazteko, bi algoritmo ezberdin erabili izan dira.

Alde batetik, lehen bi problemak ebazteko (hau da, bi problema linealak ebazteko) erabili den algoritmoak pFEM du izena. pFEM, Basque Centre for Applied Mathematics-en (BCAM) David Pardoren ikerketa taldeak elementu finituen metodoa jorrazteko sortutako algoritmoa da. Algoritmo honek EMFaren bidez ebazteko balio du. Honen adibideak eranskinetan topa daitezke.

Beste aldetik, presaren apurketei dagokion problema ebazteko Lax Friedrichsen metodoa inplementatu dugu lan honetan MATLAB softwarea erabilia.

### 6.2 Garapen matematikoa

Ingeniaritza zibilerako ekuazio diferentzialen aplikazioaren ikasketaren prozesuan, hiru motako adierazpenak hartu izan dira adibide bezala. Adierazpen hauek dimentsio bakarreko hiru ekuazio diferentzialen modeloak dira konplexutasunaren arabera ordenatuak.

Hiru hauek ekuazio diferentzialak aztertzerakoan emandako pausoak izan dira; ekuazio diferentzial eredu sinpleenetik hasita, denborarekiko menpekota den ekuazio diferentzialen sistema ez-lineal bateraino.

Hiru ereduak era ezberdinean landuak izan dira, baina 6.2.1 Atalean, problema nagusia nola kudeatu den azalduko da. Beste bi kasuak eranskinetan topa daitezke. Hala ere, hiru adibideen kasuan, daukaten konplexutasunaren ondorioz kasu gehienetan analitikoki ebatzi ezingo lirakeenez, zenbakizko emaitzak emango zaizkie.

#### 6.2.1 Presa baten apurketaren kasua

Presen apurketek eragindako uholdeek beti sortzen dituzte ondasun-kalte garrantzitsuak eta giza bizitzaren galerak. Beraz, esfortzu nabarmenak egin izan dira azken urteetan zehar arazo honentzako soluzio egokiak topatzeko.



Nahiz eta presa baten apurketaren ondorioz sortutako jario olatuari dagozkien hasierako eta ingurune baldintzak dituzten jario ez-egonkorreko dimentsio-bakarreko ekuazioak erabat ebazteko zenbakizko teknikak existitu, metodo hauek garestiak eta oso zailak dira ubide edo haran naturaletan aplikatzeko [23].

Aurrerago sakonduko den bezala, batimetria konplexuarengatik eta zeharkako geometriarengatik kalkulatzeko orduan zailtasunen batzuk dituzten problemak konpondu egin daitezke jario-ekuazioak bi espazio-dimentsiotara luzatuz. Alabaina, behar den ordenagailu-exekuzio denbora luzearengatik eta behar izandako algoritmo-komplexutasunarengatik, ikertzaileen eta ingeniarien tendentzia kontra-koa izan da, hau da, uholde hauek aztertzeke metodo sinpleak garatzea. Metodo hauek ondo ikasita daude, merke samarrak dira eta funtsean exekutatzeko orduan arazo gutxi ematen dituzte, nahiz eta errealitatean dimentsio bakarreko fluxurik existitzen ez den [23].

Matematikoki, presen apurketaren arazoa azaleko uren ekuazioekin aurkeztu ohi da, dimentsio bakarrean Saint-Venanten ekuazio bezala ezagutzen diren adierazpenekin, hain zuzen ere. Adierazpen hauek XIX. mendean izan ziren formula-tuak Saint-Venant eta Bousinesque matematikarien eskutik [24].

Aire libreko ubideetako jario ezegonkorra Saint-Venanten ekuazioen bidez deskribatua izan daiteke, zeintzuk astindu handiko jarioentzako erabiliak izan daitezkeen ekuazio hiperboliko ez-lineal multzo bat diren [25].

Egin izan diren ikerketa ugarritan [26], Godunov metodoan edo Riemannen hurbilpenetarako ebazpenean oinarrituz (Alcrudo eta García-Navarro 1993; Zhao et al. 1996; Anastasiou eta Chan 1997; Hu et al. 1998; Mingham eta Causon 1998), bolumen finituen metodoa erabiliz emaitza onak lortu ahal izan dira ubide natural batentzako aplikaziorako.

Orokorrean, fluido baten fluxua aztertzen duen problema batek kontuan hartzen dituen fenomenoak hurrengoak dira: fluidoaren presioa, tenperatura, dentsitatea eta fluxuaren abiadura.

Ubideentzako fluxu ez-egonkorreko ekuazioek fluidoaren fluxuaren modelizazio matematikoaren hipotesi eta kontzeptu nagusiak kontuan hartzen dituzte. Hala ere, ekuazio hauek fluxuari eragin gehien egiten dioten influentziak solik hartzen dituzte kontuan, bigarren mailako influentziak kontutan hartu gabe. Horrela, hau bezalako fenomeno zail baten eredu sinple bat sor daiteke.

Hori lortzeko, lau ekuazio nagusi hartzen dira kontuan: jarraitasunaren ekuazioa, momentuaren ekuazioa, energia termikoaren ekuazioa eta egoeraren ekuazioa, fluido baten presioa, dentsitatea eta tenperatura enpirikoki erlazionatzen dituenak.

Ubideetan zehar doazen fluxuen problemek ez dute azken bi ekuazio horien beharrik eta, ondorioz, jarraitasunaren ekuazioaren bidez eta momentuaren ekuazioaren bidez ebaztea posiblea da, betiere dentsitatea eta tenperatura konstantea

direla kontsideratuz.

Esan bezala, Saint-Venanten ekuazioak bi dira: jarraitasunaren ekuazioa eta momentum-aren edo mugimendu kantitatearen ekuazioa.

Presaren apurketaren osteko denbora tarte labur baten ostean, fluxua bi ekuazio hauen arabera dago gobernatua, zeintzuek gradualki aldatzen doan fluxu ez-egonkorra deskribatzen duten.

### Jarraitasunaren ekuazioa

Lehen ekuazio hau masaren kontserbazioaren ekuaziotik dago eratorria.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (6.1)$$

Era kontserbakorrean idatzita,  $Q$  emariaren eta  $A$  sekzioaren azaleraren menpe, agertzen den adierazpena. Aldi berean, ubidearen geometria aldakorra izango den arren, sinplifikazio bat eginez,  $A = h \cdot B$  dela suposa daiteke, ondorioz:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (6.2)$$

Gainera, posible da ekuazioa emariaren ordean  $q$  fluxuaren metro karratuko deskargaren arabera adieraztea, honela  $B$  sinplifikatuz:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (6.3)$$

Halaber,  $q = u \cdot h$  delarik, honela geratuko litzateke jarraitasunaren ekuazioa:

$$\frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (6.4)$$

Era ez kontserbakorrean idatzita  $u$  batez-besteko luzetarako abiaduraren eta  $h$  uraren sakoneraren menpe. Bi kasuetan,  $t$  eta  $x$  denbora eta distantzia dira, hurrenez hurren, ubidean zehar.

Edozein ubidetan gertatzen den bezala, sistema honetan ere ibaian edo fluxuan doan emarian gorabeherak ager litezke. Alde batetik, emaria handitu liteke baldin eta ubidean akuifero positibo bat baldin balego, euria ariko balu edo beste erreka bat baldin balego. Bestetik, emari hau txikitu ere egin liteke baldin eta akuiferoa ubidearekiko negatiboa balitz, hau da, ubideko ura xurgatuko balu.

Masaren kontserbazioaren edo jarraitasunaren (6.1)ekuazioa 0-ra dago berdinduta bukaeran. Horrek esan nahi du sistema ideal bezala kontsideratzen ari dela, non ez den uraren inongo galerarik ezta irabazirik egongo. Aitzitik, ur sarrerak edo ur irteerak adierazi nahiko balira, adierazpenak hurrengo itxura hartuko luke:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_1 \quad (6.5)$$

Non,  $q_1 > 0$  bada, ura sistemara sartzen ari dela adierazten ari den eta  $q_1 < 0$  bada, ura sistematik irtetzen ari dela.

Edozein eratan, galera hauen kalkulua zaila da eta presa baten apurketa baten ondorioz sortzen den ur fluxuarekin konparatuz aski txikia da.

### Momentuaren edo mugimendu kantitatearen ekuazioa

Bigarren ekuazio hau momentu linealaren kontserbazioaren ekuaziotik (Navier-Stokes) dago eratorria.

Kontrol-bolumen batean momentua konstante mantentzen da eta honek momentuaren kontserbazioa dakar berarekin, Navier-Stokesen Momentuaren kontserbazioaren ekuazioan dagoena adierazia:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) A \delta x \quad (6.6)$$

Adierazpen hau, aldi berean, Newtonen indarren bigarren legean dago oinarritua:  $F = m \cdot a$ .

Presioaren osagaia hurrengo hau da:

$$- \rho g \frac{\partial h}{\partial x} \delta x A \quad (6.7)$$

Grabitatearen osagaia beste hau da:

$$\rho g A \delta x S_0 \quad (6.8)$$

Adierazpenaren atal honetan,  $S_0$ -k ubidearen malda adierazten du. Aldapa hau aldakorra izan ohi den arren, zaila da lurzoruaren aldapa zehaztasunez definitzea tarte bakoitzean. Gainera, esan den bezala problema hau dimetsio bakarrean ebaztearen helburuetako bat ahalik eta problema sinpleena lortzea da eta, horregatik, aldapa hau konstantea kontsideratuko da luzetarako  $OX$  ardatzean ubide edo haranean zehar.

Indar ebakitzaila frikzioaren ondorioz:

$$- \rho g A \delta x S_f \quad (6.9)$$

Grabitatearekin batera, marruskadurak sortzen duen eragina momentumaren ekuazioan agertuko den beste balio konstantea izango da. Marruskaduraren balioa  $S_f$ -ren bidez dator adierazita eta grabitatearekin gertatzen den bezala, haran edo ubide osoan konstantea izan ez litekeen arren, sinplifikazio bat eginez konstantea dela kontsideratuko da.  $S_f$  hurrengo adierazpenaren bidez dator emana:

$$S_f = \frac{n^2 u^2}{C u^2 R^{4/3}} \quad (6.10)$$

Non,  $n$  Manningen zimurdura koefizientea den,  $Cu = 1$  koefizientea den sistema metrikoan eta  $R$  ubidearen erradio hidraulikoa den. Aldi berean, erradio hidraulikoa  $R = A/P$  moduan defini daiteke non  $P$  ubidearen perimetro bustia den eta  $A$  sekzioaren azalera.

Guztira, orduan, momentumaren edo masaren kontserbazioaren ekuazioa hurrengoa litzateke, era kontserbakorrean idatzita:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (6.11)$$

Eta era ez-kontserbakorrean idatzita:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_0 - S_f) = 0 \quad (6.12)$$

Izango luketen inpaktu txikiaren ondorioz, bai haizearen eragina baita Coriolis indarrarena ere ez dira kontuan hartzen.

Momentuaren adierazpenean agertzen diren grabitatearen (6.8) eta marruskaduraren (6.9) osagaiak konstanteak dira. Ondorioz, hauentzako hurrengo sinplifikazioa egin liteke:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} = gZ' \quad (6.13)$$

Era hauetaz gain, Saint-Venanten ekuazioak idazteko beste era batzuk ere existitzen dira:

#### Jarraitasunaren ekuazioa

Deribatuak itxuraz aldatuz:

$$h_t + (uh)_x = 0 \quad (6.14)$$

#### Jarraitasunaren ekuazioa:

Lehendabizi deribatuak itxuraz aldatu:

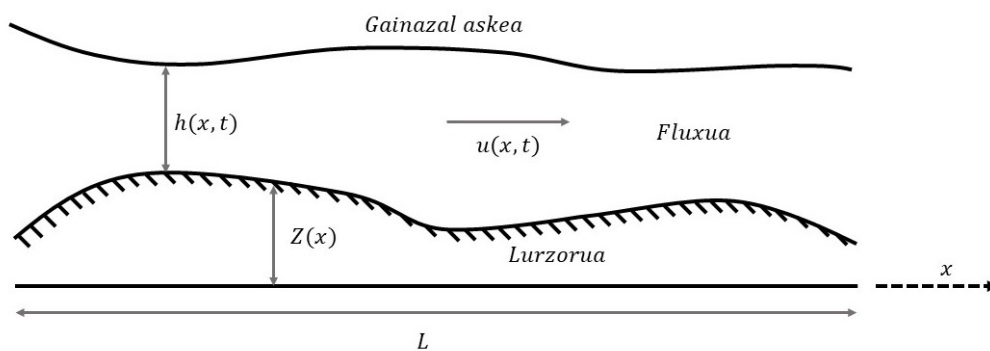
$$u_t + u \cdot u_x + gh_x = gZ' \quad (6.15)$$

Ondoren,  $h$ -rengatik biderkatu eta dena deribatuekiko jarri nahi dugun era lortzeko:

$$(hu)_t + (hu^2 + \frac{g}{2}h^2)_x = ghZ' \quad (6.16)$$

6.1 Irudian probleman parte hartzen duten aldagaiak azaldu dira, era orokorrean.

Aldagai bakoitza hurrengoa da:  $h$  uraren maila izango da  $x$  ardatzeko puntu bakoitzean  $t$  momentu puntual batetan adierazita.  $u$  uraren abiadura izango da



**Irudia 6.1:** Saint-Venanten ekuazioen sistemaren eskema

$OX$  ardatzean zehar eta  $Z$  lurzorua maila bezala kontsidera daiteke. Hau ez da guztiz zuzena, zeren eta  $Z$ , aurretik egindako sinplifikazioan adierazi den bezala, lurzorua mailaz gain ( $S_0$ ) lurzorua marruskadura ( $S_f$ ) du bere baitan. Ondorioz, grafikoan irudikatua konstante bien batura izango litzateke.

### Ekuaioen sistema

Aipatutako bi ekuaio hauek, (6.4) masaren kontserbazioaren ekuaioak eta (6.11) momentuaren ekuaioak ekuaio diferentzialen sistema bat osatzen dute. Horregatik, posible da ekuaio bi horiek sistema bezala idaztea, era matrizialean:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (6.17)$$

non

$$\mathbf{U} = (h, q)^T \quad (6.18)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \left( q, \frac{q^2}{h} + 0.5gh^2 \right)^T \quad (6.19)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{U}) = [0, gh(S_0 - S_f)]^T \quad (6.20)$$

### Bi dimentsiotan

Lan honetan aztertuko diren Saint-Venanten ekuaioak dimentsio bakarrekoak izango dira. Hala ere, posiblea da ekuaio hauek bi dimentsiotarako aztertzea.

Fluxu aldakorreko bi dimentsioko eredu batek fluxuaren mugimendua erreprezentatzen du ibai baten ibilguan plano horizontal batean, bi norabide ortogonaletan aztertua dagoelarik.

Bi dimentsiotan,  $OX$  ardatzeko abiadura aztertzeaz gain, beste ardatz kartesiar bateko abiadura ikasiko da,  $OY$  ardatzekoa, hain zuzen ere.

Hau horrela izanik, (6.4) dimentsio bakarreko jarraitasunaren ekuaioan oinarriturik, horrela formulatuko litzateke bi dimentsioko ekuaioa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (6.21)$$

Momentuaren ekuazioari dagokionez, bi dimentsioko kasuan ekuazio bat izatetik bi izatera igaroko litzateke: ekuazio bat  $OX$  ardatzari dagokiolarik eta bestea  $OY$  ardatzari.

$OX$  ardatzarentzat:

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h + \frac{g}{2}h^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (6.22)$$

$OY$  ardatzarentzat:

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h + \frac{g}{2}h^2) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (6.23)$$

Dimentsio bakarreko kasuan egin izan den bezala, kasu honetan ere Coriolis indarren eragina ez da kontutan hartuko.

Saint-Venanten ekuazioak diren bezalako sistema batetan, bi dimentsioko kasuan inguruneko baldintzak ezartzea ez da lan erraza, linearizatzen ez bada, behintzat. Gainera, lurzoruaren malda ezberdinak erlacionatzearen arazoa ere sortzen da, ardatz bakoitzak berea baitu.

Arazoi hauengatik, zehaztasun falta eta zailtasun posible hauek aurrekusita, dimentsio bakarrekoa bezalako eredu errazagoen erabilera gomendagarriagoa litzateke.

### 6.3 Presa baten apurketaren simulazioa

Atal honetan presa baten apurketako ekuazioak ebatziko ditugu. Esanda geratu da presa baten apurketa (6.17) deribatu partzialetako ekuazio sistemaren bidez emana datorrela,  $\mathbf{U} = (h, q)^T$  ezezagunen bektorea izanik,  $\mathbf{E}(\mathbf{U}) = (q, \frac{q^2}{h} + 0.5gh^2)^T$  eta  $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = [0, gh(S_0 - S_f)]^T$ .

Problema ebazteko ondoko hipotesiak egingo ditugu: presaren apurketa berehalakoa edo bat-batekoa da, presaren azpiko aldea laua da (hau da,  $S_0 = S_f$  eta beraz  $\mathbf{S}(\mathbf{U}) = [0, 0]^T$ ), eta ez dago inolako marruskadurarik. Ondorioz, ebatziko dugun problema honako hau da:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

non  $\mathbf{0} = [0, 0]^T$ .

(6.24) sistema deribatu partzialeko bi ekuaziok eta bi ezezagunek osatzen dute. Ezezagunak uraren altuera  $h = h(x, t)$  eta uraren abiadura  $v = v(x, t)$  dira. Ezezagun biek espazioaren eta denboraren menpekotasuna daukate. Riemann-en problema klasikoa da. Hasierako baldintza bezala altuera eta abiadura hauek kontsideratuko dira:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_l, & 0 \leq x \leq x_0 \\ h_r, & x_0 < x \leq L \end{cases} \quad (6.25)$$

$x_0$  izanik presaren posizioa,  $h_l \geq h_r$  izanik eta hasierako abiadura

$$u(x, 0) = 0. \quad (6.26)$$

### 6.3.1 Soluzio analitikoa

(6.24) problemaren soluzioa aurkitu nahi da dimentsio bakarreko  $\Omega = [0, L]$  eremuan eta  $T = [0, t_{end}]$  denbora tarte batean, hasierako baldintzak (6.25) eta (6.26) izanik. [27] erreferentzian eman ziren lehen aldiz (6.24) problemaren emaitza analitikoak edo zehatzak. Hori kontuan hartuz, edozein  $t \geq 0$  aldiunerako,  $x$  puntuaren posizioaren arabera  $h = h(x, t)$  eta  $v = v(x, t)$  ezezagunak, eta ekuazio hauen bidez emanak datoz (ikus [28, 29]):

$$h(x, t) = \begin{cases} h_l, & 0 \leq x \leq x_A(t) \\ \frac{4}{9g} \left( \sqrt{gh_l} - \frac{x - x_0}{2t} \right)^2, & x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ \frac{c_m^2}{g}, & x_B(t) \leq x \leq x_C(t) \\ h_r, & x_C(t) \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.27)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_A(t) \\ \frac{2}{3} \left( \sqrt{gh_l} + \frac{x - x_0}{2t} \right), & x_A(t) \leq x \leq x_B(t) \\ 2(\sqrt{gh_l} - c_m), & x_B(t) \leq x \leq x_C(t) \\ 0, & x_C(t) \leq x \leq L \end{cases} \quad (6.28)$$

non:

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_0 - t\sqrt{gh_l} \\ x_B(t) &= x_0 + t(2\sqrt{gh_l} - 3c_m) \\ x_C(t) &= x_0 + t \left( \frac{2c_m^2(\sqrt{gh_l} - c_m)}{c_m^2 - gh_r} \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

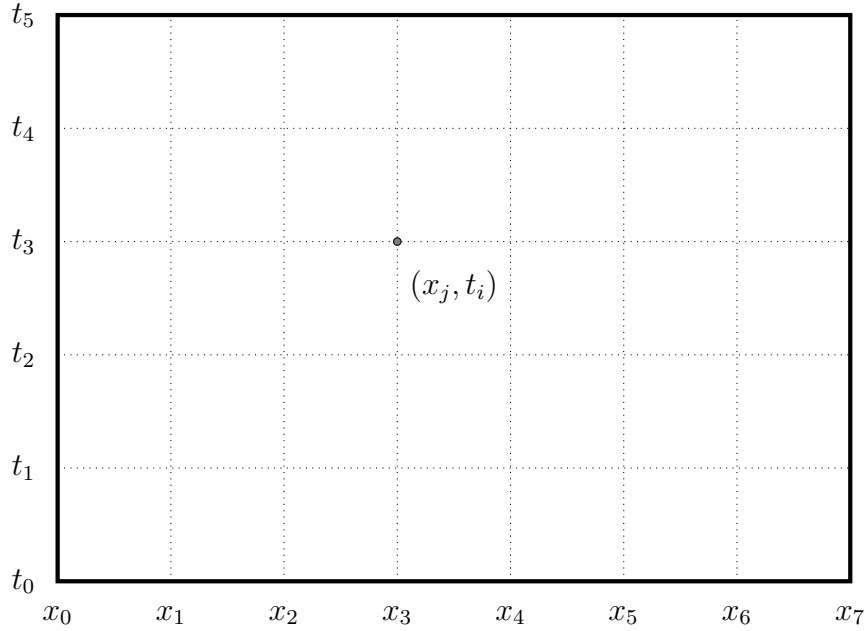
$c_m = \sqrt{gh_m}$  izanik eta  $h_m$  ondoko ekuazio honen soluzioa izanik:

$$-8gh_r c_m^2 \left( \sqrt{gh_l} - c_m \right)^2 + (c_m^2 - gh_r)^2 (c_m^2 + gh_r) = 0. \quad (6.30)$$

### 6.3.2 Zenbakizko soluzioak

(6.24) problemaren zenbakizko soluzioak (edo soluzio hurbilduak) Lax Fiedrichsen metodoa erabilia kalkulatu ditugu. Honako ekuazioen bidez emana dator metodoa:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_{i+1}^n + \mathbf{U}_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{E}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{E}(\mathbf{U}_{i-1}^n)) \quad (6.31)$$



**Irudia 6.2:** Espazio-denborako sarea.

non  $\mathbf{U}_j^k \approx \mathbf{U}(x_j, t_k)$  eta:

$$\begin{aligned} x_j &= x_0 + j \cdot \Delta x, & j &= 0, 1, \dots, n \\ t_k &= t_0 + k \cdot \Delta t, & k &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Gure problemako kasuan  $x_0 = 0$  eta  $t_0 = 0$ .

Lax Fiedrichs-en metodoa diferentzia finituetako metodo bat da eta bere zehastasun ordena bat da. Honelako metodoetan espazio-denborari dagokion sare bat sortzen da, ikus 6.2 Irudia.

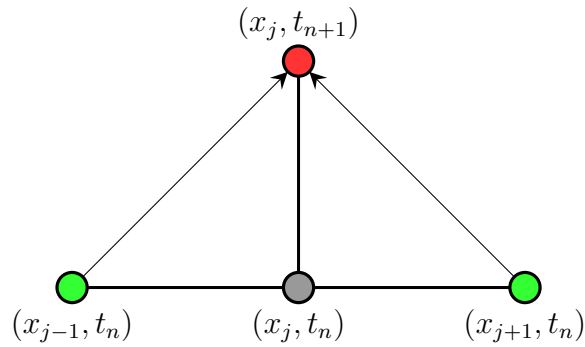
Lax Fiedrichs-en metodoan,  $t_0$  aldiunean nodo guztietako balioak ezagutzen ditugu. Hau da,  $(x_j, t_0)$   $j = 0, 1, \dots, n$  balio guztietan ezagutzen dugu  $\mathbf{U}$ . Balio hauek erabilia denboran aurrera egiten da, eta  $t_1$  aldiuneko balioak kalkulatu dira.  $t_1$  aldiuneko tarteko nodoen balioak, hau da,  $(x_j, t_1)$   $j = 1, \dots, n - 1$  nodoetakoak, aurreko aldiunean (hau da,  $t_0$  aldiunean)  $(x_{j-1}, t_0)$  eta  $(x_{j+1}, t_0)$  nodoetako balioak erabiliz kalkulatu dira, ikus 6.3 Irudia. Behin tarteko balio guztiak kalkulatu direnean, muturretako nodoetako balioak ( $(x_0, t_1)$  eta  $(x_n, t_1)$  nodoetakoak) era honetan kalkulatu dira:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(x_0, t_1) = \mathbf{U}(x_0, t_0), \\ \mathbf{U}(x_n, t_1) = \mathbf{U}(x_n, t_0). \end{cases} \quad (6.33)$$

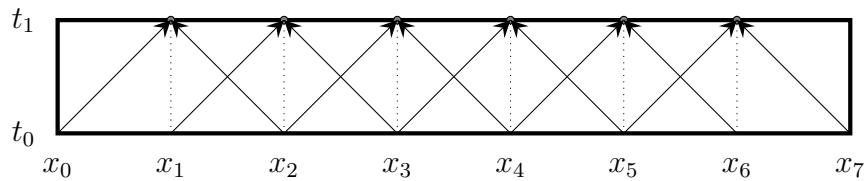
6.4 Irudian  $t_0$  aldiuneko balioetatik abiatuta  $t_1$  aldiuneko tarteko nodoak nola kalkulatu diren adierazi da. Behin  $t_1$  aldiuneko tarteko nodo guztietan ezezagunaren balioak kalkulatu direnean, (6.33) adierazpena jarraituz muturretako nodoetako balioak kalkulatu dira, ikus 6.5 Irudia.

Eta deskribatutako prozesua errepikatzen da:  $t_1$  aldiunetik  $t_2$  aldiunera,  $t_2$ tik  $t_3$ ra, etab. Azken pausoa  $t_{m-1}$  aldiunetik  $t_m$  aldiunera pasatuz.

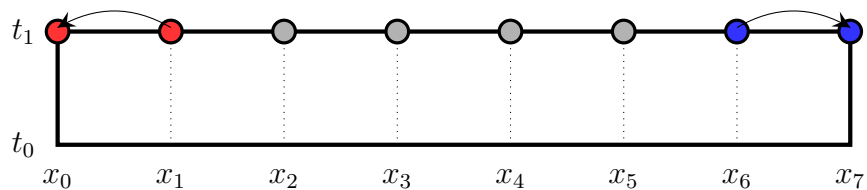




**Irudia 6.3:** Lax Fiedrichs-en metodoko kalkulua.



**Irudia 6.4:** Lax-Fiedrichs-en metodoko pauso bat denboran (tarteko nodoen kalkulua).



**Irudia 6.5:** Lax-Fiedrichs-en metodoko pauso bat denboran (muturretako nodoen kalkulua).

## 6.4 Emaitzak

Ekuazio hauen emaitzak, edozein unitate sistematan egon litezke emanak, sistema horietako unitateak ondo baldin badatoz lotuak bata bestearekin. Kasu honetarako, sistema internazionalako unitateak izan dira aukeratuak, hau da, denborarentzat segundoak, luzerentzat metroak eta abiadurentzat metroak segunduko.

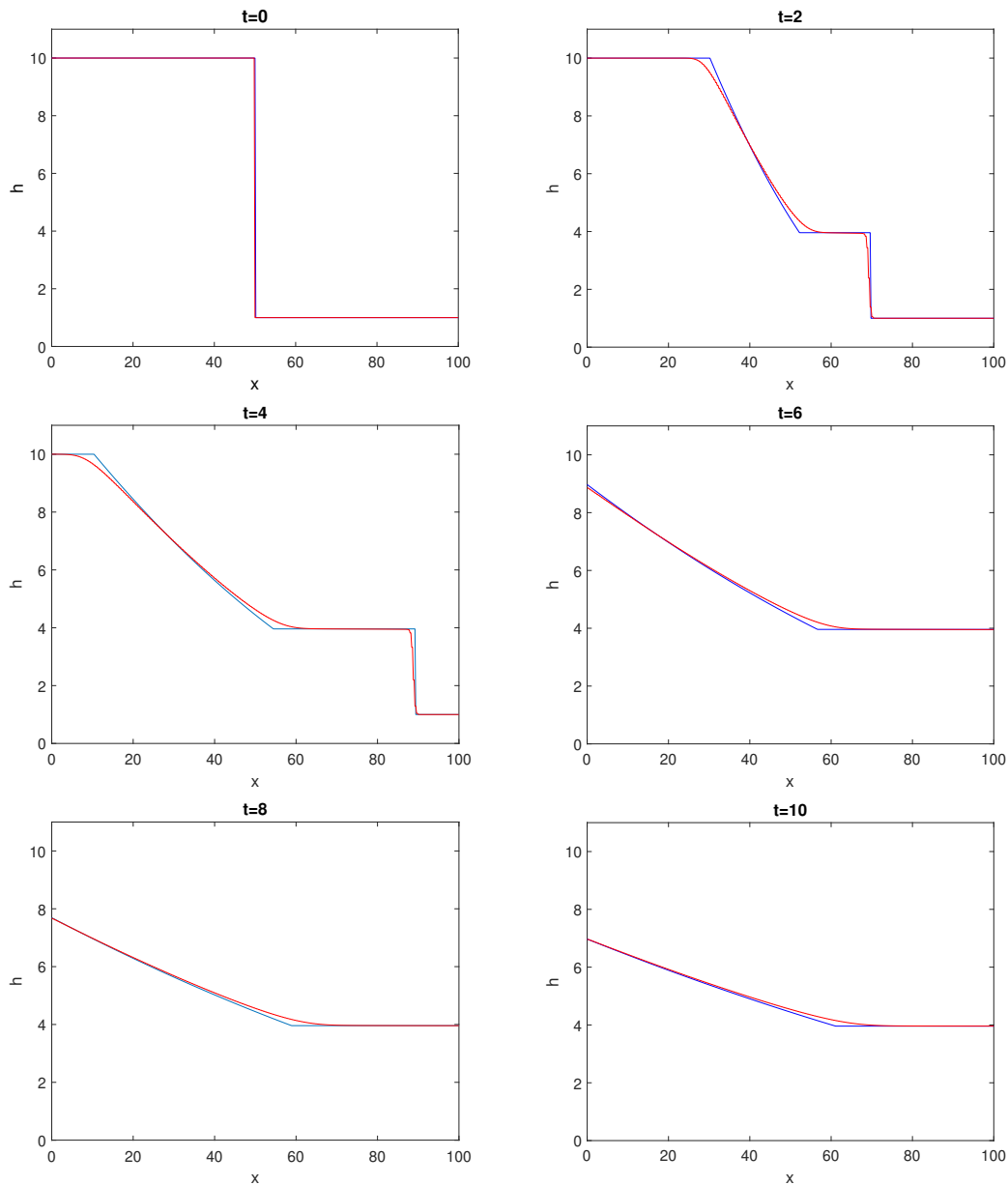
Jarraian, presa baten apurketaren bi kasu ezberdinetarako emaitzak adieraziko dira, analitikoki kalkulatu lehendabizi eta zenbakizko metodoen bidez ondoren.

Bi kasuak hurrengoak dira:

- A kasua: Urtegiko uraren maila 10 metrokoa, ibilguaren uraren maila metro batekoa.
- B kasua: Urtegiko uraren maila 15 metrokoa, ibilguaren uraren maila metro batekoa.

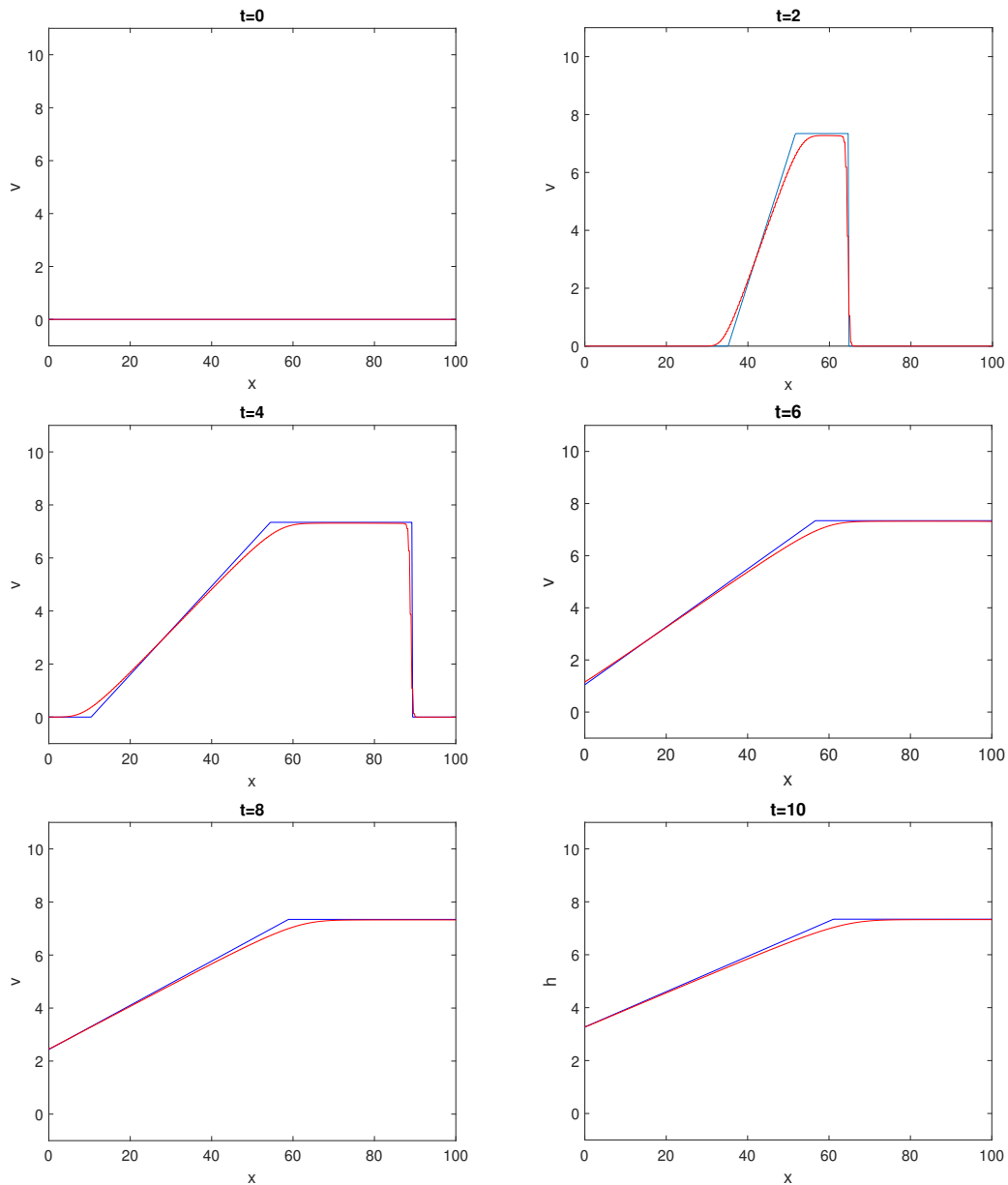
Bi kasuetarako, lehen hamar segundotako denbora tartea aztertuko da 100 metrotako aztergune batentzat, non presa erdian (50 metrotan) kokaturik dagoen.

A kasuko uraren altuerak aldiune ezberdinetarako 6.6 Irudian ikus daitezke.  $OX$  ardatzean luzetarako distantziak agertzen dira, eta  $OY$  ardatzean uraren altuera.



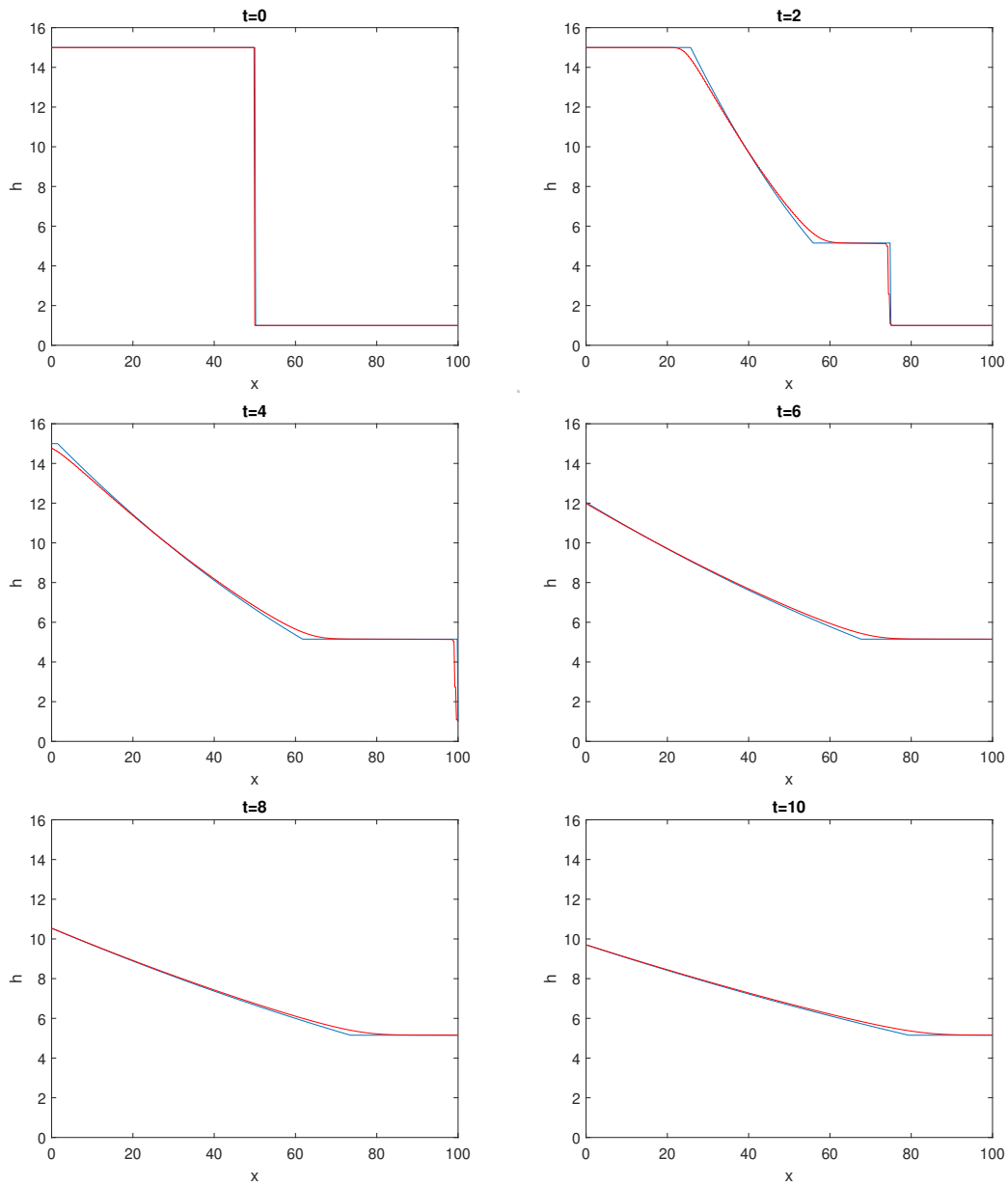
**Irudia 6.6:** A kasuko altueraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz.

A kasuko uraren abiadurak aldiune ezberdinetarako 6.7 Irudian ikus daitezke.  $OX$  ardatzean luzetarako distantziak agertzen dira, eta  $OY$  ardatzean uraren abiadura.

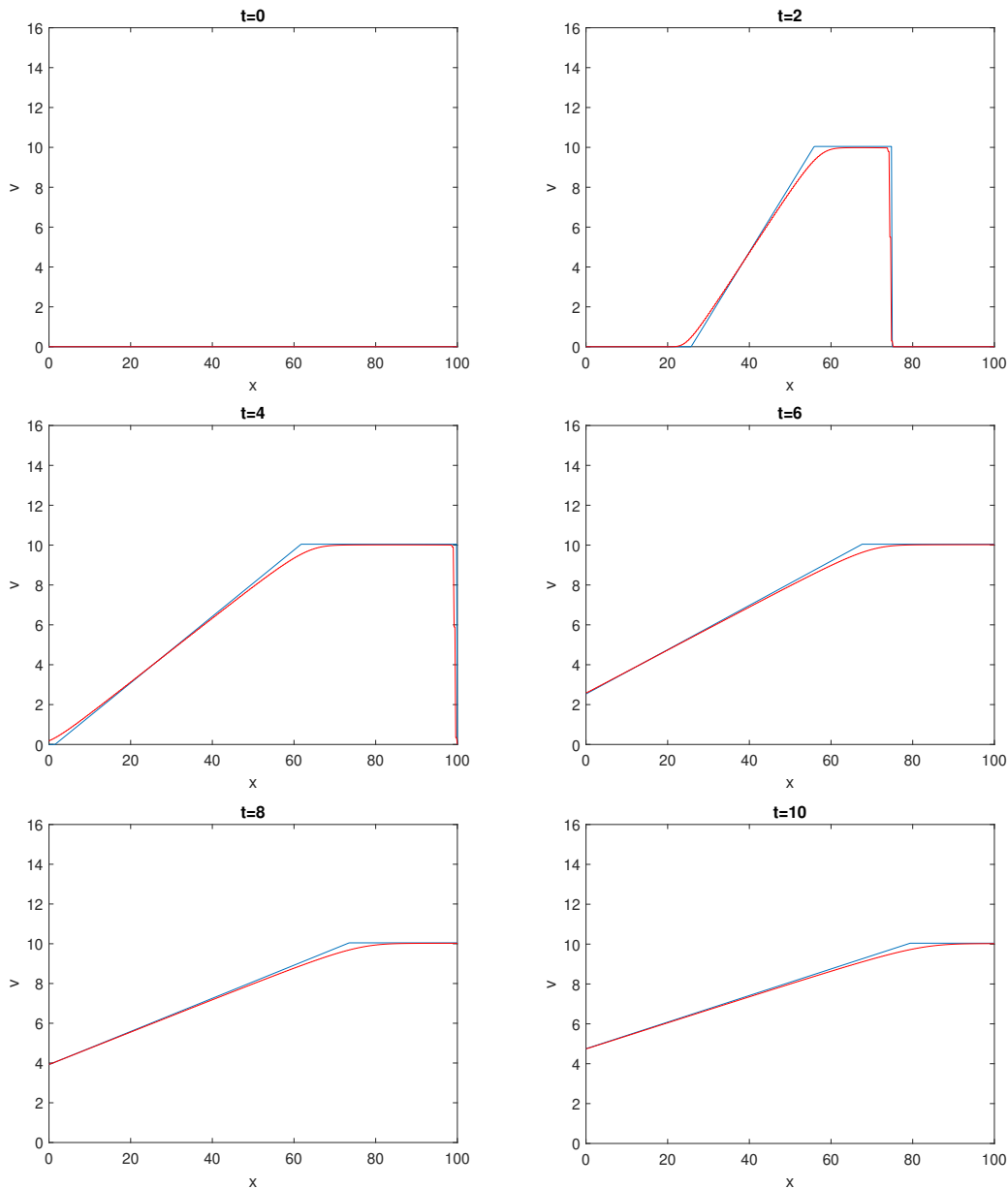


**Irudia 6.7:** A kasuko abiaduraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorritz.

B kasuko uraren altuerak aldiune ezberdinetarako 6.8 Irudian ikus daitezke.  $OX$  ardatzean luzetarako distantziak agertzen dira, eta  $OY$  ardatzean uraren altuerak. Kasu honi dagozkion abiadurak 6.9 Irudian adierazi dira.



**Irudia 6.8:** B kasuko altueraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz.



**Irudia 6.9:** B kasuko abiaduraren emaitza analitikoak urdinez eta zenbakizko emaitzak gorriz.

## 6.5 Emaitzen analisia

A eta B kasuetarako, uraren jarrera orokorra berdintsua da. Hasierako egoeran, bi kasuetan uraren mailak egonkorrak direla ikusten da, presaren kokapena zein den argi eta garbi ikusten delarik.

Behin presa apurtzen delarik, olatu bat sortzen da ur masaren azpiko metroetan, zein, altuera irabazten edo galtzen joan ordez, konstante mantentzen den.

Olatu hau luzetara arin doa hedatzen, baina oraindik ere presako ura hasieran zegoen kokapenean, olatuaren altueraren gaintetik dagoen ura gutxika doa jaisten.

Ur honek luzetara uraren maila igotzen du olatuaren altueratik gora, baina astiro doan prozesu bat da.

Abiadurak aztertzen badira, esandakoarekin bat datorrela ikusten da. Olatuaren parte den ur masaren abiadura konstantea da, baina abiadura hau presaren kokapenean jarraitzen duen urarena baino handiagoa da. Horrenbestez, altueraren grafikoan aztertzen denarekin bat dator, hau da, presaren kokapenean geratzen den urak dituen aldaketak olatu nagusiak dituenak baino motelagoak dira eta horregatik aipatu izan den uraren mailaren igoera hori beranduago gertatzen da.

Bi kasuak beraien artean alderatzen badira, ikus daitekeena da A kasurako olatuaren altuera 4 metrotan dela konstantea eta B kasurako, berriz, 5 metrotan. Gainera, uraren abiadura handiagoa da olatuan B kasurako A kasurako baino. Honenbestez, uraren olatua arinago desplazatzen dela ikus daiteke altueren grafikoan baita presaren kokapenean uraren masa arinago leuntzen dela ere.

# Kapitulua 7

## Egin beharrekoen deskribapena, faseak, ekipiak edo prozedurak

Atal honetan proiektua nola garatu dena azalduko da, hau da, lanean parte hartu duten pertsonak eta haien betebeharrak eta proiektuko faseen azalpena.

### 7.1 Lan taldea

Lan hau aurrera eramanean dutenak eta lana aurrera eramaten lagundu dutenak aipatuko dira, bakoitzak lanean izan dituen erantzukizunak eta zereginak aipatuz.

- **Elisabete Alberdi Celaya:** *Lanaren zuzendaria.*  
Proiektua planteatzeaz, eman beharreko pausoak adierazteaz eta dokumentua zuzentzeaz eta gainbegiratzeaz arduratu da.
- **Ángel Javier Omella Milián:** *pFEM kodearen garatzaileetako bat.*  
BCAM-eko ikerlari bezala, pFEM kodearen garatzaileetako bat izan da eta lan honetan pFEM instalatzen eta kodeak nola funtzionatzen duen argitzen lagundu du.
- **Asier Garitano Larrabe:** *Ikaslea.*  
Proiektua garatzeaz eta idazteaz arduratu da.

### 7.2 Faseak

Proiektua aurrera eramateko jarraitu diren fase ezberdinak definituko dira jarraian, eginkizun bakoitza deskribatuz eta horien iraupena zehaztuz.

#### Proiektuaren kudeaketa

*1-19 asteak*

*Elisabete Alberdi Celaya eta Asier Garitano Larrabe*

Proiektuaren kudeaketa eta planteamendu orokorra dagozkion aspektuak biltzen dituen atala. Bi azpifasetan dago banatua:

- Aurkezpena eta planifikazioa: *1. astea* Proiektu zuzendariak lanaren nondik norakoak azaldu dizkio ikasleari. Proiektuan zehar jarraituko diren pausoak eta metodologia planifikatu dira.
- Kudeaketa eta jarraipena: *1-19 asteak* Aste guztietan zehar zuzendariaren aldetik jarraipena egin da ikaslearen lanaren aurrerapenak aztertzeko. Jarraipen hau presentziala izan da hein handian, baina baita internet bidezkoa, proiektuaren testua eta algoritmoaren kodearen aurrerapenak saretik konpartituz.

## Gaiaren inguruko ikasketa

*2-6 asteak*

*Elisabete Alberdi Celaya eta Asier Garitano Larrabe*

Lana ekuazio diferentzialen aplikazioan oinarritzen denez, horien inguruko ikasketa bat egin behar izan da. Honetarako, zuzendariak eskainitako eta ikasleak topaturiko testuen bidez, ikasleak gaia landu du, bere kabuz hasiera batean eta tutoretzetan zuzendariarekin ondoren.

## Problemaren aukeraketa

*5-6 asteak*

*Elisabete Alberdi Celaya eta Asier Garitano Larrabe*

Ingeniaritza zibilerako ekuazio diferentzialen aplikazio baten bilaketa egin da. Bilaketa hau bai unibertsitateko liburuetan baita sareko artikuluetan egin da. Azkenik, aipatu izan den Saint-Venanten ekuazioen problema aukeratu da.

## Algoritmoa

*7-9 asteak*

*Elisabete Alberdi Celaya, Ángel Javier Omella Milián eta Asier Garitano Larrabe*

Bai proiektuaren azken helburua lantzeko, baita erdibideko pausuak egiteko ere, ekuazio diferentzialak zenbakizko metodoak erabiliz askatzeko beharrezana egon da. Honetarako erabili den algoritmoa Basque Centre for Applied Mathematics-en (BCAM) garatuta izan den *pFEM* algoritmo matematikoa da. Ángel Javier Omella Milián BCAM-eko ikerlaria da eta *pFEM*-aren garatzaileetako bat. Bere laguntza ezinbestekoa izan da atal honetan zehar. Fase hau ere bi azpifasetan bana daiteke:

- Algoritmoaren instalazioa: *7-8 asteak*  
Algoritmoaren instalaziorako pauso ugari eman behar izan dira, besteak beste ikaslearen ordenagailuan Ubuntu sistema eragilea instalatzea edo *PETSc* ekuazio diferentzialen ebazlea. Fase hau esperotakoa baino



denbora gehiagoan egin izan da, *PETSc*-ak batez ere arazoak eman baititu instalazioan.

- Algoritmoaren ikasketa: *9 astea*  
Orokorrean, *pFEM* algoritmoa erabiltzaile bezala erabiltzen ikasi da. Gainera, gure lanaren helburura iristeko kodean inplementazio batzuk egin behar izan dira.

## Lanaren garapena

*10-18 asteak*

*Elisabete Alberdi Celaya eta Asier Garitano Larrabe*

Lanaren garapena hiru fase nagusitan egin da:

- $u_{xx} = f$ : *10-12 asteak*

Ekuazio diferentzialen emaitzak kalkulatzeko, hasiera batetan  $u_{xx} = f$  itxurako ekuazioak aztertu dira, hau da, denboraren menpe ez daudenak eta linealak direnak. Hauen hurbilpenak kalkulatzeko *pFEM* algoritmoa erabili da.

- $u_{xx} = u_t$ : *13-17 asteak*

Lanaren garapenaren beste periodo honetan zehar, denborarekiko menpekoak diren ekuazio diferentzialak izan dira kontutan. Kasu honetarako 1Dko beroaren ekuazioaren emaitzak kalkulatu dira *pFEM* algoritmoa prestatuz eta erabiliz. Denborari dagokion inplementazioa egin da *pFEM*en.

- Presaren apurketaren problema: *17 astea*

Azkenik, presaren apurketaren problemara iritsi da eta zuzendariaren laguntzari esker, kode bat inplementatu da *MATLAB* erabilia.

## Proiektuaren dokumentazioa

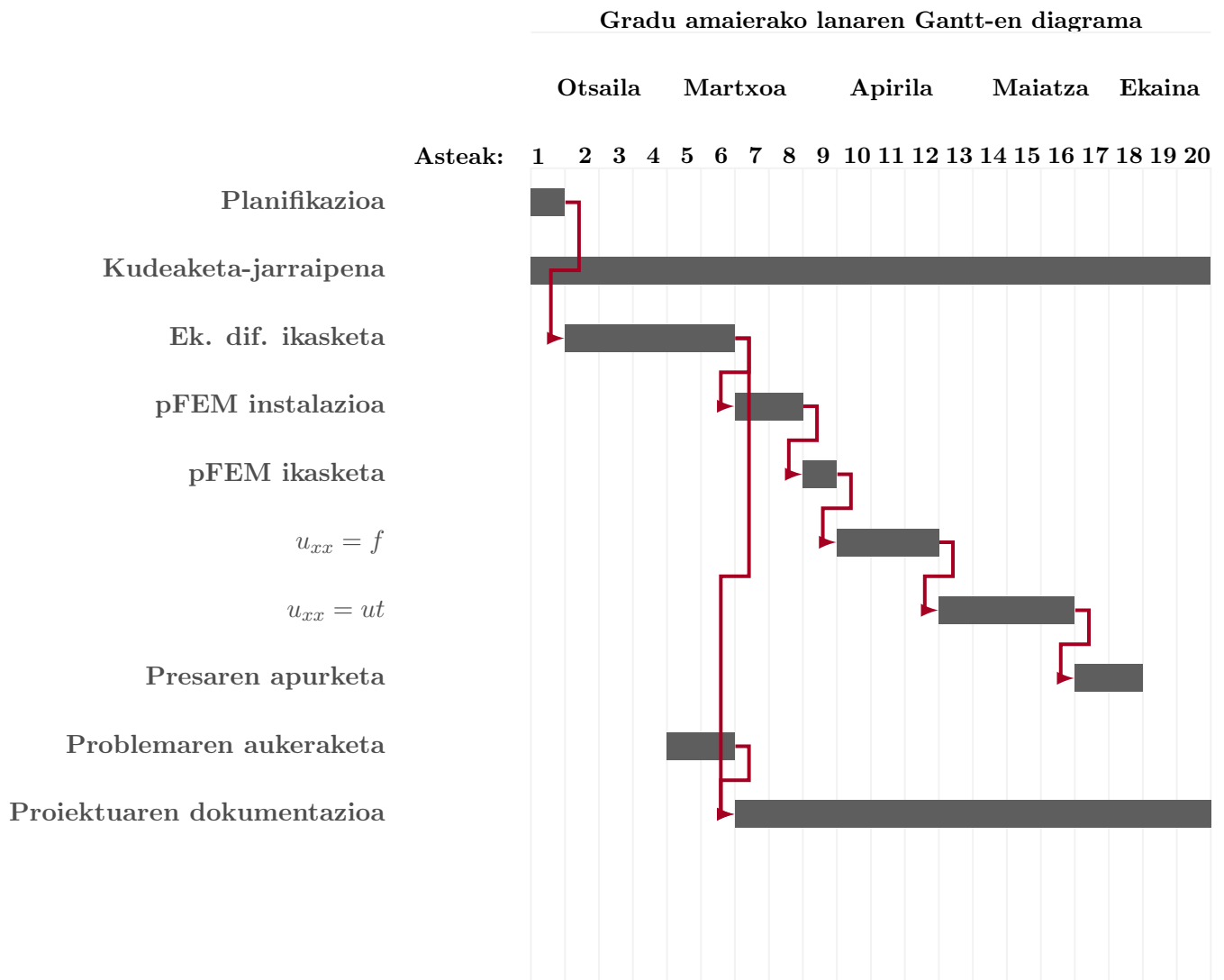
*5-19 asteak*

*Asier Garitano Larrabe*

Proiektua aurrera joan den heinean, ikaslea lana idazten joan da. Lanean bildu dira proiektuaren fase guztietako gorabeherak.

## 7.3 Gantt-en diagrama

7.1 Irudiko Gantt-en diagraman adierazi dira lan honetako ekintzak eta beraien denboralizazioak.



Irudia 7.1: Gantt-en diagrama.

# Kapitulua 8

## Ondorioak

Lan honen helburua zenbakizko metodoak aztertzea eta hauen bidez presa baten apurketan uraren jarrera aztertzea izan da.

Erdibideko adibideetan zein presaren apurketaren probleman ikusi izan den bezala, ekuazio diferentzialen bidez deskribatutako problemak askatzeko zenbakizko metodoak erabiltzea nahiko eraginkorra da. Kasu guztietan, emaitza analitikoa eta zenbakizko metodo ezberdinen bidez lortutako emaitza hurbilduak antzekoak izan dira.

Hala ere, 1.6 Atalean adibidez ikusi den bezala, metodo guztiak ez dira berdinak. Orokorrean, kalkulatzeko den orduan metodoak zenbat eta konplexutasun handiagoa izan, orduan eta eraginkorrago izango da hurbilpena ematerako orduan, metodo inplizitu eta esplizituen artean ikusten den bezala.

Edonola ere, beti ez da posible metodo analitikoak erabiltzea ekuazio diferentzialen askapenerako eta horregatik metodo hauek ezagutzea eta eraginkorrak direla jakitea ezinbestekoa da garapen matematikoetarako.

Presaren apurketaren ostean sortzen den fluxuaren azterketari dagokionez, hurrengoa aipa liteke:

- Metodoak eskatzen dituen sinplifikazio eta orokortasunetaz gain, metodoa nahiko eraginkorra da haranean kontuan izan beharreko lurzorurekiko maila minimoa determinatzeko, uraren olatuak busti ez dezan.
- Ekuazio diferentzialen sistema honi esker, posiblea da presaren apurketaren ondorioz uraren eraginaren menpe geratuko den lurzoria determinatzea.
- Honen inguruan, esan daiteke presa zenbat eta altuagoa izan, sortuko den uraren olatuak altuera handiagoa izango duela. Hala ere, olatu hau konstante mantenduko da orokorrean. Gainera, uraren abiadura ere konstante mantenduko da arroan zehar, eta abiadura hau handiagoa izango da presa zenbat eta handiagoa izan.

# Eranskina A

## Bigarren ordenako ekuazio diferentzial lineal bat: $u_{xx} = f$

### A.1 Problemaren nondik norakoak

Lehenik aztertutako problema hurrengo itxurakoa izan da:

$$u_{xx} = f \tag{A.1}$$

Ekuazio hau dimentsio bakarreko problema bati dagokio, zeinetan  $x$ -ren menpeko deribatua agertzen den. Mota honetako ekuazioak problema estatikoei dagozkie, hau da, denborarekiko menpekotasunik ez duten problemei.

Sarreran aipatu izan den moduan, ekuazioaren soluzioa zenbakizko metodoen bidez emango da, hau da, ekuazio zehatz bat lortu ordez eta bertan balioak ordezkatu ordez, aurretik zehaztuta dauden modeloen bidez hurbilpenak egingo dira. Kasu honetan, ekuazioa ez da denboraren menpekoa izango eta ondorioz lortutako emaitzen formatua hurrengo izango da:  $x$  bakoitzarekiko  $u(x)$  emaitza bakarra egongo da.

6.1 Atalean adierazi den bezala, problema hau pFEM elementu finitoen metodoak ebazteko algoritmoaren bidez ebatziko da. Erabiltzailearen erraztasunerako eta problemaren errendimendu hobea lortzeko, kodean aldaketa txiki batzuk egin dira. Hasiera batean, kodeak emaitza bezala nahi beste puntu pantailaratzen zituen arren, puntu horien zehaztasuna ez zen zertan ona izan. Aipatutakoaren arrazoia, algoritmoak iterazio prozesua beti puntu kopuru zehatz baterako egiten zuelako zen. Horrela, erabiltzaileak eskatutako emaitza kopurua prozesu iteratiboko kopurua baino handiagoa zen kasuetan, programak puntu gehigarri horiek kalkulatu zituen erdibideko puntuak proportzionalki kalkulatu.

Honek zehaztasuna kentzen zion algoritmoari. Hori ekiditeko, algoritmoari eskatu zaio kalkuluak egin dituen puntuetako emaitzak bakarrik inprimatzeko.

Aldaketa horretaz gain, kodean beste aldaketa batzuk egin dira erabiltzaileen erraztasunerako. Alde batetik, aztertuko den eremua definitzeko  $x$ -ren lehen eta azken balioak ezartzeko erraztasun handiagoko era bat ezarri da, eta horretaz gain, tarte horretan aztertuko den elementu bakoitzaren dimentsioaren ordez, nodo kopurua sartu ahalko da. Honi esker, ez da problemarik egongo  $x$ -ren lehen eta azken balioen eta elementuen luzeraren artean egon behar den erlazioaren artean, kalkulu hau algoritmoak automatikoki egingo baitu.

Kalkulu hauek elementu finituen metodoaren bidez egingo dira, pFEM algoritmoaren bidez. Atal honetarako lortutako balioak jarraian adieraziko dira, erabiliko den ekuazioaren nondik norakoekin batera.

Dimentsio bakarreko eta bigarren mailako ekuazioak definitzeko ekuazio orokorra hurrengo hau da:

$$(-a(x)u)'(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), x(0, l) \quad (\text{A.2})$$

Ekuazio generiko horretan oinarriturik, adibide bezala lan honetan aztertu den  $u_{xx} = f$  motako ekuazio diferentziala hurrengo hau da:

$$(-3u'(x))' = 1 \quad (\text{A.3})$$

Inguruneko baldintzei dagokienez, ekuazio diferentzial guztiei bezala, mota honetakoei ere ezarri behar zaizkie. Gure kasuan, Dirichlet motako inguruneko baldintzak ezartzea erabaki da, zeinek hasierako eta bukaerako muturrean zero balioa izango duten:

$$u(0) = u(l) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Buluak hartu dira, pFEM-ek ez baitu inguruko baldintzentzat beste balio bat ezartzen uzten.

Aurretik esan den bezala, problema hau pFEM kodearen bidez ebatziko da. Ebazteko, eremuko lehen balioa eta azken balioa ezarri behar izan dira, aztertu nahi diren nodo kopuruaz gain. Gainera, aurretik aurkeztutako atal honetarako adibidea den ekuazio diferentziala ere definitu da algoritmoan.

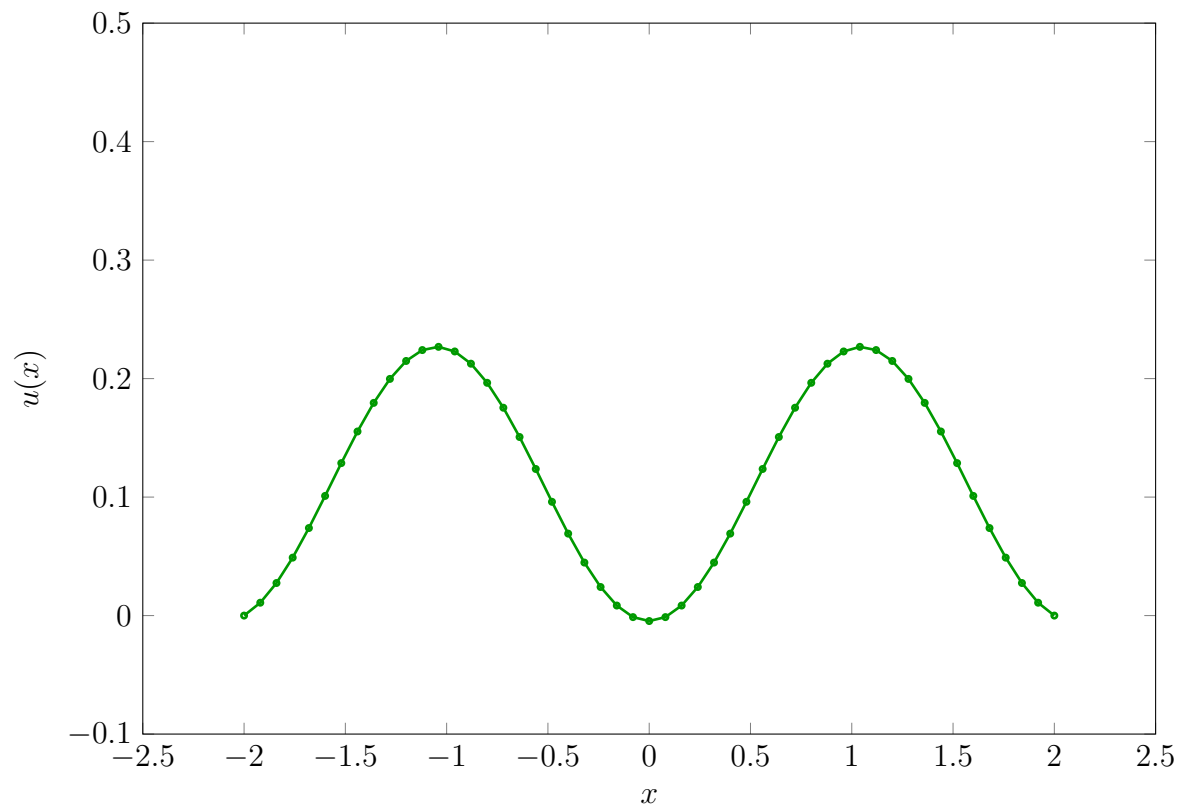
Aukeratutako balioak hurrengoak izan dira:

- Hasierako puntua: -2
- Bukaerako puntua: 2
- Nodo kopurua: 51

Hau eginda, taulan aurkezten dira lortutako emaitzak eta jarraian balio horiek grafikaturuta.

## A.2 Problemaren emaitzak

A.1 Irudian ikus daiteke ebatzitako problemaren emaitza. Era berean, A.1 Taulan jaso dira lortu diren zenbakizko balioak.



**Irudia A.1:**  $-3u'' = 1$  ekuazioaren ebazpenaren emaitzak.

$x_i$ nodoak	$u(x_i)$
-2.0000000000000000	0.0000000000000000
-1.8400000000000001	2.7487976217836708E-002
-1.6799999999999999	7.3875544914409716E-002
-1.5200000000000000	0.12867869176086685
-1.3599999999999999	0.17951140488056322
-1.2000000000000000	0.21488502669354884
-1.0400000000000000	0.22680479549164809
-0.8799999999999989	0.21257673462578686
-0.7199999999999997	0.17541651584123780
-0.5600000000000005	0.12372268808435451
-0.3999999999999991	6.9178528710356693E-002
-0.2399999999999999	2.4111516060967331E-002
-8.0000000000000071E-002	-1.2927932664129635E-003
8.0000000000000071E-002	-1.2927932664120560E-003
0.2400000000000021	2.4111516060969902E-002
0.3999999999999991	6.9178528710360190E-002
0.5600000000000005	0.12372268808435820
0.7200000000000020	0.17541651584124088
0.8799999999999989	0.21257673462578852
1.0400000000000000	0.22680479549164828
1.2000000000000002	0.21488502669354922
1.3599999999999999	0.17951140488056377
1.5200000000000000	0.12867869176086744
1.6800000000000002	7.3875544914410105E-002
1.8399999999999999	2.7487976217837020E-002
2.0000000000000000	0.0000000000000000

**Taula A.1:**  $-3u'' = 1$  ekuazioaren ebazpenaren emaitzak.

# Eranskina B

## Beroaren problema

### B.1 Beroaren problemaren nondik norakoak

Atal honetan aztertuko den beroaren hedapenaren ekuazioak hurrengo itxura orokorra izango du:

$$u_{xx} = u_t \quad (\text{B.1})$$

Ekuazio hau dimentsio bakarreko problema bati dagokio, baina kasu honetan  $u$  ezezaguna  $x$  aldagaiarekiko eta  $t$  denborarekiko deribatua dago. Mota honetako ekuazioak problema dinamikoetara dagozkie, hau da, denborarekiko aldakorrak diren problemei. Horregatik, problema mota honetan emaitzak  $t$  ezberdinekiko emango dira, betiere emaitzak zenbakizko metodoen bidez kalkulatuak izan direlarik.

1.5.4 Atalean aipatu izan den bezala, zenbakizko metodoen bidez ekuazio diferentzialak askatzeko era ugari daude denborarekiko menpekoak direnean. Lerroen metodoa erabiliz problema bat askatzea litzateke atal honen helburu nagusia. Horretarako, lehendabizi espazioko aldagaiak diskretizatzen dira EFMa erabilia eta 1.6 Atalean erabili diren metodoen bidez, dimentsio bakarrarekiko eta denborarekiko menpekoa den ekuazio diferentziala askatuko da.

Beroaren transmisioaren ekuazioa denborarekiko menpekoa den ekuazio bat da eta guk, aurretik aipatu bezala, dimentsio bakarrerako aztertuko dugu. Hau izango litzateke adierazpenaren itxura, 3.1 Atalean adierazi den bezala:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad (\text{B.2})$$

Beroaren kasuan aztertuko dena denboran zehar  $l$  luzerako  $x$ -ren tarte desberdinetan beroa zen izango den da.

Ekuazio hau ebazteko, 3 Atalean garatutako lerroen metodoa erabili da, hurrengo itxurako adierazpena iritsi arte:

$$M\mathbf{d}'(t) = -\alpha^2 K\mathbf{d}(t) \quad (\text{B.3})$$

Azkenik, adierazpen honi denboraren arabera ebazteko metodo bat aplikatu zaio, Euler esplizituarena, hain zuzen ere, baina matrizeentzat egokituta.

Hau egiteko, lehenik, pFEM algoritmoaren kodean prozesu berri batzuk gehitu dira, zeintzuek aipatutako denborarentzat zenbakizko metodo horiek ebazten dituzten. Kode hauek funtzionarazteko, beharrezkoa da ekuazio diferentziala



idaztea, baita hasierako puntua, bukaerakoa eta hasierako aldiuneko egoera. Gainera, zein denbora tartetan ebatzi nahi den zehaztu behar da.

Behin metodo hauek ekuazio bakarrerako prest izan ostean, matrizeentzat egokitu dugu Eulerren metodo esplizitua. Metodo hau aukeratu da bere sinpletasunarengatik, baina beste metodoak antzekoak direnez, erraztasunez garatuak izan zitezkeen.

Algoritmoak emaitza zerrenda edo bektore bat eskaintzen du guk ezarritako nodoetan eta aldiuneetan. Denborarekiko menpekotasunik ez zuten ekuazioetan ez bezala, orain guk ezarritako aldiune bakoitzerako, nodo bakoitzean ezezagunak hartzen duen balioa jasotzen dituen bektore bat lortuko dugu. Hau da, emaitza matrize bat izango da, aldiune bakoitzean (hau da, lerro bakoitzean), nodo guztietan ezezagunak dituen balioak izango dira. Matrizearen zutabekako irakurketa hau da: zutabe bakoitzean, denbora tarte osoan nodo bakoitzak duen portaera (ezezagunaren balioa) jasotzen da.

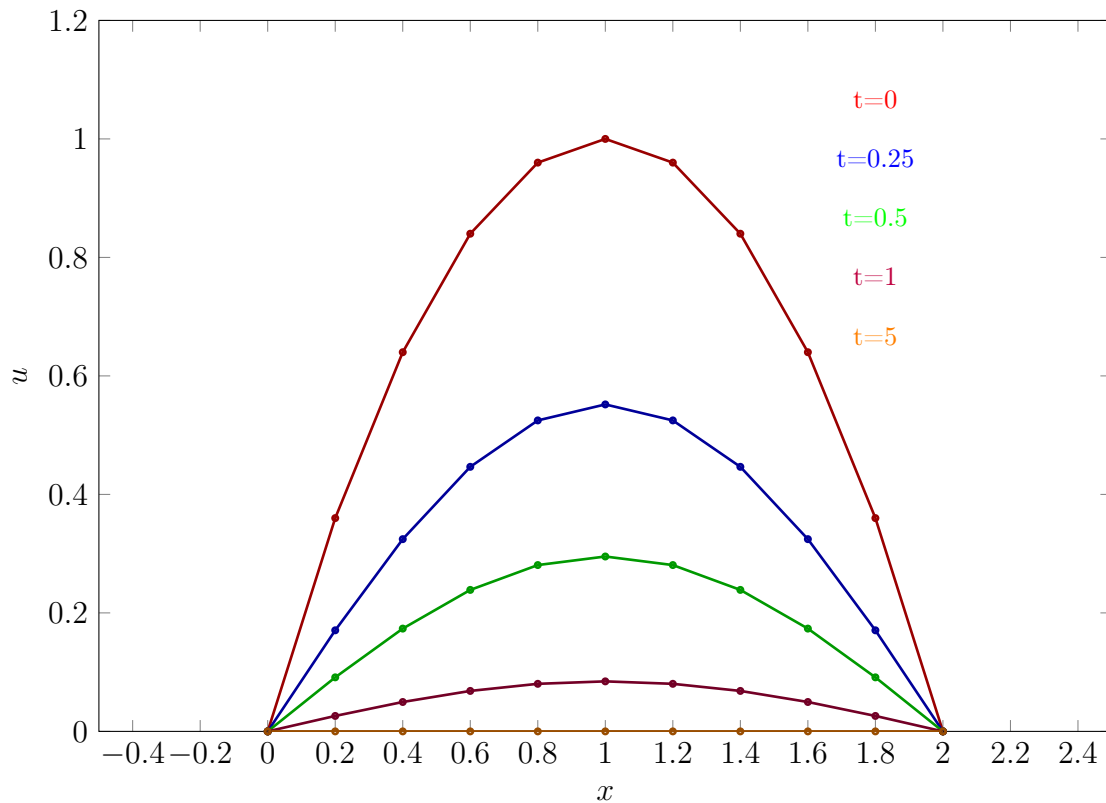
## B.2 Beroaren problemaren emaitzak

Bi kasu desberdin aztertu dira:

- Lehen problemaren barraren luzera 2 unitatekoa dela kontsideratuko da eta denbora tarte 5 segundukoa dela. 11 nodo kontsideratu dira eta denboran 1000 pauso eman dira Eulerren metodo esplizitua erabilita. Dirichlet ingurune baldintza nuluak kontsideratu dira, eta hasierako baldintza  $u(x, 0) = (x - 0) \cdot (x - 2)$ . B.1 Taulan jaso dira zenbait nodotako eta zenbait aldiunetako ezezagunaren balioak. Era berean B.1 Irudian adierazi dira emaitzak.
- Bigarren problemaren luzera 5 unitatekoa dela eta denbora 5 segundu dela kontsideratuko da. 11 nodo kontsideratu dira eta denboran 1000 pauso eman dira Eulerren metodo esplizitua erabilita. Dirichlet ingurune baldintza nuluak kontsideratu dira, eta hasierako baldintza  $u(x, 0) = (x - 0) \cdot (x - 5)$ . Kasu honetan ere B.2 Taulan eta B.2 Irudian adierazi dira zenbait nodotako eta zenbait aldiunetako ezezagunaren balioak.

Nodoak	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 1$	$t = 5$
x=0.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
x=0.200	0.360000	0.170608	0.091215	0.026089	0.000001
x=0.400	0.640000	0.324478	0.173501	0.049625	0.000002
x=0.600	0.840000	0.446540	0.238804	0.068303	0.000003
x=0.800	0.960000	0.524877	0.280731	0.080295	0.000004
x=1.000	1.000000	0.551863	0.295178	0.084427	0.000004
x=1.200	0.960000	0.524877	0.280731	0.080295	0.000004
x=1.400	0.840000	0.446540	0.238804	0.068303	0.000003
x=1.600	0.640000	0.324478	0.173501	0.049625	0.000002
x=1.800	0.360000	0.170608	0.091215	0.026089	0.000001
x=2.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

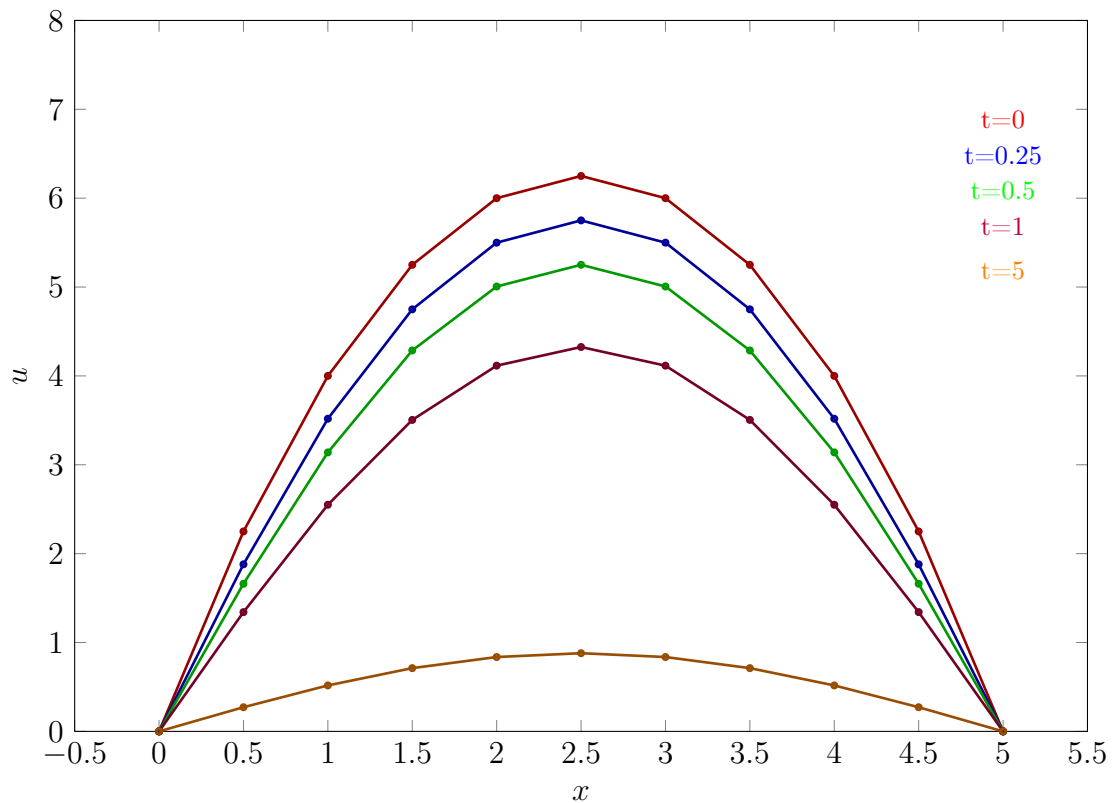
**Taula B.1:** Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 2 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz.



**Irudia B.1:** Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 2 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz.

Nodoak	$t = 0$	$t = 0.25$	$t = 0.5$	$t = 1$	$t = 5$
x=0.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
x=0.500	2.250000	1.879851	1.661203	1.342209	0.271861
x=1.000	4.000000	3.518040	3.139291	2.550085	0.517110
x=1.500	5.250000	4.749224	4.286208	3.504876	0.711741
x=2.000	6.000000	5.499459	5.005998	4.115460	0.836702
x=2.500	6.250000	5.750079	5.250523	4.325335	0.879761
x=3.000	6.000000	5.499459	5.005998	4.115460	0.836702
x=3.500	5.250000	4.749224	4.286208	3.504876	0.711741
x=4.000	4.000000	3.518040	3.139291	2.550085	0.517110
x=4.500	2.250000	1.879851	1.661203	1.342209	0.271861
x=5.000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

**Taula B.2:** Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 5 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz.



**Irudia B.2:** Beroaren ekuazioaren emaitzak barraren luzera ezberdinetarako, luzera 5 eta denbora tartea 5 direla kontsideratuz.

# Bibliografía

- [1] Juan E. Náípoles Valdés eta Carlos Negrón Segura. La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, 2002.
- [2] Elizabeth Cervantes Flores eta Bani Jazael Ramírez Reyes Miguel Ángel Vidal Arango. *Comparación de diferentes metodos numéricos por inversión de Laplace para aplicaciones en ingeniería*. PhD thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2016.
- [3] Knut Vaagsaether eta Bernt Lie Prasanna Welahettige. A solution method for one-dimensional shallow water equations using flux limiter centered scheme for open venturi channels. *Journal of computational multiphase flows*, 10(4):228–238, 2018.
- [4] Thomas Edison Guerrero Barbosa eta Edgar Antonio Sánchez Ortiz Gloria Estefany Amarís Castro. Comportamiento de las ecuaciones de Saint-Venant en 1D y aproximaciones para diferentes condiciones en régimen permanente y variable. *Revista Tecnura*, 2015.
- [5] Agustín Martín Domingo. *Apuntes de Mecánica de Fluidos*. Creative Commons, 2011.
- [6] N. María Liriano Paredes. Solución numérica y analítica de problema matemático. Master's thesis, Universidad autónoma de Santo Domingo, 2012.
- [7] María Josefa Gonzalez Gomez eta Elisabete Alberdi Celaya. *Ekuzazio diferentzialak erabiliz modelatzen diren ingeniartzako fenomenoak: Mathematica programaren bidezko ebazpena*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, 2019. Argitaratzeko onartua.
- [8] Wikipedia.org. Regla trapezoidal (ecuaciones diferenciales), 2019.
- [9] Radu Crahmaliuc. 75 years of the finite element method (FEM). SimScale, 2019.
- [10] S. J. Farlow. *Partial differential equations for Scientists & Engineers*. Dover, New York, 1993.
- [11] Mutua Nicholas Muthama eta Sakayo Nicodemus Muoki Koros Kiplangat. Darcy's law equation with application to underground seepage in earth dams in calculation of the amount of seepage. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 2(3):143–149, 2014.

- [12] Diego Velandia Manchego eta Wilmer Julián Carrillo León Giovanni González Penuela. Algunas aplicaciones de los elementos finitos en el análisis estructural de una ménsula, una zapata sobre pilotes, cascarones y conexiones en concreto. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 2007.
- [13] Manuel Calixto. *Ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones a la Ingeniería Civil*. Editorial Académica Española (EAE-Publishing), 2012.
- [14] Xavier Ricardo Cárdenas Haro. *Análisis del comportamiento resistente y deformacional de cimientos laminares utilizando el Método de los Elementos Finitos*. PhD thesis, Universidad de Cuenca, 2010.
- [15] G. Kaless. Una nueva aproximación para la evaluación del golpe de ariete incluyendo la condición inicial de presurización de la instalación y del fluido. *Ingeniería del Agua*, 2016.
- [16] Mauro Poliotti eta Pablo Sierra. Consolidación unidimensional de suelos. Technical report, Universidad de Rosario, 2011.
- [17] Adrián Pedrozo-Acuna eta Alec Torres-Freyermuth. Sobre el uso de las ecuaciones de Navier-Stokes con el promedio de Reynolds en el campo de la ingeniería de costas. *Tecnología y ciencias del agua*, 2011.
- [18] Julio Hernandez Rodríguez. *Teoría del Método de los elementos finitos aplicada a la mecánica de fluidos*. UNED, 2001.
- [19] ASDSO. <https://damsafety.org/dam-failures>, [Azken bisita 2019ko maiatzak 16an].
- [20] Instituto español del cemento y sus aplicaciones. Presas. <https://www.ieca.es>, Azken bisita 2019ko Maiatzaren 25ean.
- [21] Ministerio de Medio Ambiente. Guía técnica: Clasificación de presas en función del riesgo potencial, 1996.
- [22] Joseph Kiprof. What are the primary causes of dam failure. [www.worldatlas.com](http://www.worldatlas.com), June 2018.
- [23] Nikolaos D. Katopode eta David R. Schamber. Applicability of dam-break flood wave models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1983.
- [24] Elisa Aldrighetti. *Computational hydraulic techniques for the Saint Venant Equations in arbitrarily shaped geometry*. PhD thesis, Università degli Studi di Trento, 2007.
- [25] Zhilian Wang eta Hung Tao Shen. Langrangian simulation of one-dimensional dam-break flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1999.
- [26] H. G. Ni eta Y. S. He J. S. Wang. Finite-difference TVD scheme for computation of dam-break problems. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(4):253–262, 2000.

- [27] J. J. Stoker. *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications, volume 4 of Pure and Applied Mathematics*. Interscience Publishers, New York, USA, 1957.
- [28] Olivier Delestre, Carine Lucas, Pierre-Antoine Ksinant, Frédéric Darboux, Christian Laguerre, Thi Ngoc Tuoi Vo, and Stephane James, Francois eta Cordier. SWASHES: a compilation of shallow water analytic solutions for hydraulic and environmental studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 72(3):269–300, 2013.
- [29] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.