

GRADO EN INGENIERÍA EN TECNOLOGÍA  
INDUSTRIAL

**TRABAJO FIN DE GRADO**

***ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN  
CONFIGURACIONES BÁSICAS  
MEDIANTE HERRAMIENTAS DE  
ANÁLISIS DE ELEMENTOS FINITOS***

**Alumno:** Diez, Prieto, Héctor

**Directora (1):** Etxegarai, Madina, Agurtzane

**Director (2):** Mazon, Sainz-Maza, Angel Javier

**Curso:** 2018/2019

**Fecha:** Bilbao, 22 de Julio 2019

## RESUMEN

El campo eléctrico es un campo vectorial, donde una carga puntual  $q$  sufre los efectos de una fuerza eléctrica  $F$ . El objeto de este trabajo es el estudio del campo eléctrico mediante el método de elementos finitos para las configuraciones de esfera y esfera-plano. Los resultados serán comparados y verificados por formulaciones teóricas descritas en diferentes estudios previos realizados acerca de estas dos configuraciones. Las simulaciones correspondientes se harán mediante la herramienta MEF COMSOL Multiphysics, por lo que, también se realizará una comparativa de los valores obtenidos mediante diferentes metodologías de mallado de la herramienta. El análisis de estos resultados se efectuará mediante Excel.

### Palabras clave

Campo eléctrico, línea de campo, elementos finitos, entornos ficticios, mallado

## ABSTRACT

The electric field can be defined as a vector field, where a point charge  $q$  suffers the effect of an electric force  $F$ . The object of this work is the study of the electric field by the finite element method for the sphere and sphere-gap configurations. The results will be compared and verified by theoretical formulations described in different previous studies carried out on these two configurations. The corresponding simulations will be done through COMSOL Multiphysics tool. Therefore, a comparison of the values obtained through different meshing methodologies of the tool will also be carried out. The analysis of these results will be carried out using Excel.

### Keywords

Electric field, Streamlines, FEM, fictional environments, mesh

# ÍNDICE

RESUMEN.....	2
Palabras clave.....	2
ABSTRACT .....	2
Keywords .....	2
LISTA DE TABLAS (INCLUIDO ANEXOS) .....	6
LISTA DE FIGURAS (INCLUIDO ANEXOS) .....	8
1. INTRODUCCIÓN .....	10
2. CONTEXTO .....	12
2.1 Campo eléctrico.....	12
2.1.1 Ley de Gauss.....	12
2.1.2 Potencial eléctrico .....	13
2.1.3 Ecuaciones de Poisson y Laplace .....	14
2.2 Líneas de campo (Streamline).....	15
2.3 Efecto corona .....	16
3. OBJETIVOS Y ALCANCE.....	17
3.1. OBJETIVOS .....	17
3.2. ALCANCE .....	17
4. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO.....	19
4.1. BENEFICIOS TÉCNICOS .....	19
4.2. BENEFICIOS ECONÓMICOS .....	19
4.3. BENEFICIOS SOCIALES .....	20

5.	ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE .....	21
5.1	ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN CONFIGURACIONES BÁSICAS.....	21
5.2	FORMULACIÓN ANALÍTICA PARA EL CAMPO ELÉCTRICO CRÍTICO EN CASO NO UNIFORME.....	24
5.3	LÍNEA CRÍTICA DE DESCARGA .....	25
6.	ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS .....	27
6.1	Alternativas para el cálculo del campo eléctrico .....	27
6.1.1	Simulación por cargas (CSM).....	27
6.1.2	Método de elementos de frontera (BEM).....	28
6.1.3	Método de elementos finitos (FEM).....	28
6.2	Alternativas software de elementos finitos.....	29
8.	METODOLOGÍA .....	32
8.1.	Descripción de tareas.....	32
8.1.1	Modelado de simulación del campo eléctrico en COMSOL .....	32
8.1.2	Verificación y comparación de los resultados.....	39
8.2.	Diagrama de Gantt .....	41
8.3.	Cálculos y descripción de los resultados .....	43
8.3.1	Configuración de simple esfera.....	43
8.3.2	Configuración de esfera-plano ideal.....	50
8.3.3	Configuración de esfera-plano real.....	55
9.	PRESUPUESTO.....	60
9.1.	HORAS INTERNAS.....	60
9.2.	AMORTIZACIONES .....	60

9.3. GASTOS .....	60
9.4. TABLAS .....	61
10. CONCLUSIONES .....	62
11. BIBLIOGRAFÍA.....	64
12. ANEXOS.....	66
12.1 ESFERA.....	66
12.2 ESFERA-PLANO IDEAL.....	69
12.3 ESFERA-PLANO REAL.....	71

## LISTA DE TABLAS (INCLUIDO ANEXOS)

Tabla 1: Longitud del tubo vertical en función de la altura de la esfera .....	37
Tabla 2: del tubo vertical en función del diámetro de la esfera.....	37
Tabla 3: Tensión aplicada en función del diámetro y altura de la esfera .....	38
Tabla 4: Carga horaria de cada tarea .....	42
Tabla 5: Valores del campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera, y un mallado extremadamente fino.....	46
Tabla 6: Valores de campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera y entorno ficticios (mallado exterior “normal”). .....	46
Tabla 7: Valores de campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera y entorno ficticios (mallado exterior “fine”). .....	47
Tabla 8: Valores críticos y máximos de la configuración esfera plano sin entornos ficticios.....	50
Tabla 9: Valores críticos y máximos de la configuración esfera plano con entornos ficticios.....	50
Tabla 10: Errores máximos y mínimos respecto del artículo [6], sin el uso de entornos ficticios.....	56
Tabla 11: Errores máximos y mínimos respecto del artículo [6], con el uso de entornos ficticios.....	56
Tabla 12: Error sin entorno ficticio vs Error con entorno ficticio R= 4mm .....	59
Tabla 13: Error sin entorno ficticio vs Error con entorno ficticio R= 12.5mm.....	59
Tabla 14: Horas Internas .....	61
Tabla 15: Amortizaciones .....	61
Tabla 16: Gastos .....	61
Tabla 17: Subtotal.....	61
Tabla 18: Presupuesto total .....	61
A Tabla 1: del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado grueso (finer) .....	66

A Tabla 2: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado normal (extra fine)	67
A Tabla 3: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado fino (extremely fine)	68
A Tabla 4: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio. R=4mm; 12,5mm H=0,1cm;0,5cm;1,2cm;1,8cm	69
A Tabla 5: Valores del campo eléctrico con entorno ficticio. R=4mm;12.5mm H=0.1cm;0.5cm;1.2cm;1.8cm	69
A Tabla 6: Valores máximos del campo eléctrico vs artículo, sin entornos ficticios	72
A Tabla 7: Valores máximos del campo eléctrico vs artículo, con entornos ficticios	73

## LISTA DE FIGURAS (INCLUIDO ANEXOS)

Figura 1: Líneas de campo causadas por una carga positiva y una negativa [5].....	15
Figura 2: Configuración de esfera plano real, con doble toroide .....	21
Figura 3: Línea de descarga eléctrica a tensión positiva y negativa [6].....	25
Figura 4: Descripción de metodología de cálculo ideal de la Streamline.....	26
Figura 5: Método de simulación por cargas referencia.....	28
Figura 6: Programa FEM Ansys Maxwell [8] .....	29
Figura 7: Programa FEM Dassault Opera [9] .....	30
Figura 8: Programa FEM COMSOL .....	30
Figura 9: Flujograma de tareas .....	32
Figura 10: Flujograma para modelado en COMSOL .....	33
Figura 11: Configuración básica de esfera.....	34
Figura 12: Mallado de configuración básica de esfera con entornos ficticios .....	35
Figura 13: Mallado del entorno ficticio en la configuración esfera-plano ideal .....	35
Figura 14: Montaje de la configuración esfera-plano real.....	36
Figura 15: 2000 Streamlines arbitrarias .....	39
Figura 16: Diagrama de Gantt.....	42
Figura 17: Comportamiento del campo eléctrico para un mallado grueso (finer).....	43
Figura 18: Comportamiento del campo eléctrico para un mallado normal (extra fine) .	44
Figura 19: Comportamiento del campo eléctrico para un mallado fino (extremely fine) .....	45
Figura 20: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 8mm sin entorno ficticio	47
Figura 21: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 8mm con entorno ficticio	48
Figura 22: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 25 mm sin entorno ficticio .....	48
Figura 23: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 25 mm con entorno ficticio .....	49



Figura 24: Rango del campo eléctrico sobre la supercie en el caso esfera-plano ideal .....	50
Figura 25: Streamline (redondeada en rojo) del caso esfera-plano $h=0.1\text{cm}$ $R=4\text{mm}$ . 51	
Figura 26: Streamline vs Linegraph $r=4\text{mm}$ sin entorno ficticio para todas la alturas (esfera-plano ideal).....	52
Figura 27: Streamline vs Linegraph $r=4\text{ mm}$ con entorno ficticio para todas la alturas (esfera-plano ideal).....	52
Figura 28: Streamline vs Linegraph $r=12,5\text{ mm}$ sin entorno ficticio para todas las alturas (esfera-plano ideal) .....	53
Figura 29: Streamline vs Linegraph $r=12,5\text{ mm}$ con entorno ficticio para todas las alturas (esfera-plano ideal) .....	53
Figura 30: Campo eléctrico sobre el montaje esfera-plano real .....	55
Figura 31: Rango del campo eléctrico sobre la superficie en el montaje real esfera-plano.....	55
Figura 32: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas sin entornos ficticios, configuración esfera-plano real $r=4\text{ mm}$ .....	57
Figura 33: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas con entornos ficticios, configuración esfera-plano real $r=4\text{ mm}$ .....	57
Figura 34: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas sin entornos ficticios, configuración esfera-plano real $r=12,5\text{ mm}$ .....	58
Figura 35: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas con entornos ficticios, configuración esfera-plano real $r=12,5\text{ mm}$ .....	58
A Figura 1: Código MATLAB filtrar Streamlines .....	70
A Figura 2: Streamline Esfera-Plano con entorno ficticio .....	71

# 1. INTRODUCCIÓN

En este Trabajo de Fin de Grado (TFG) se estudiará el campo eléctrico y las líneas de campo en configuraciones básicas mediante el método de elementos finitos (en adelante, Finite Element Method), los resultados de estos estudios serán comparados con estudios previos de otros autores para su verificación.

En primer lugar, se introducirá el contexto de este TFG. En este apartado se explicará que es el campo eléctrico, las líneas de campo, las leyes de Gauss, Laplace y Poisson, así como el potencial eléctrico. Para finalizar se describirán resumidamente varios artículos e investigaciones de otros científicos acerca del campo eléctrico y las líneas de campo en las configuraciones básicas de esfera simple y esfera-plano.

Tras exponer el contexto, se procederá a explicar los objetivos y alcances de este trabajo, los cuales enmarcan los estudios realizados. En primer lugar, se hará un listado con todos los objetivos, y posteriormente se nombrará otro listado con los alcances posibles.

Una vez enumerados todos los objetivos y alcances, se explicarán los beneficios sociales, económicos y sociales que supondrá la realización de este trabajo.

El quinto apartado estará compuesto por una explicación acerca de la situación actual o el estado del arte. En él se abordarán las teorías más actuales acerca de la configuración esfera-plano en el estudio del campo eléctrico, explicando dichas teorías aplicadas a nuestra temática.

Posteriormente, se presentará un análisis de las alternativas existentes para estudiar y analizar el campo eléctrico y se compararán mediante diferentes criterios, justificando la elección adoptada.

Una vez seleccionada la alternativa, se realizará una descripción de la solución adoptada y se explicarán brevemente sus componentes principales. Con ello, quedará definido el modelo con el que se va a trabajar y se explicarán las simulaciones que se llevarán a cabo.

Después, en la metodología se expondrán los resultados obtenidos, analizando las causas de los fenómenos y la coherencia de los resultados en base al estado del arte.

Este Trabajo de Fin de Grado contará también con un presupuesto, en el que se englobará la inversión necesaria para realizar el proyecto. Mediante un Diagrama de Gantt se representará la planificación de las tareas que se han llevado a cabo y el orden de ejecución del TFG.

Finalmente, se expondrán unas conclusiones a modo de resumen final que, de acuerdo con los resultados obtenidos en base a las diferentes pruebas y simulaciones

que se ejecutan sobre el fenómeno de estudio, servirán para sintetizar la información obtenida y resumir, en parte, todo el proceso que se ha llevado a cabo durante la realización de este TFG.

## 2. CONTEXTO

En este trabajo se va a estudiar el campo eléctrico para la configuración esfera, esfera-plano y el montaje real de ensayo de una configuración esfera-plano. Por lo que, en este punto se desarrollará una explicación resumida de lo que es y cómo se calcula el campo eléctrico, las líneas de flujo y una breve explicación del efecto corona, puesto que este fenómeno está directamente relacionado con el campo eléctrico en configuraciones de alta tensión.

### 2.1 Campo eléctrico

En electrostática, el campo eléctrico es resultado de la presencia de una partícula, o distribución continua, cargada eléctricamente, lo que matemáticamente se expresa por medio de dos ecuaciones distintas.

El campo eléctrico inducido por un sistema o distribución de cargas puntuales viene dado por:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \quad (1)$$

Donde  $r_i$  es la distancia entre la carga puntual  $q_i$  y el punto P donde se necesite el cálculo del campo eléctrico y  $\epsilon_0$  es la permitividad del medio.

La ecuación general que expresa el campo eléctrico inducido por una distribución continua de carga es la siguiente:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \quad (2)$$

Donde  $dq$  es el diferencial de carga de la distribución continua [1].

#### 2.1.1 Ley de Gauss

Una de las leyes fundamentales que caracteriza a los campos de la electrostática es la ley de Gauss. Esta ley nos permite relacionar el campo eléctrico con la distribución de carga de la configuración [2].

Cuando el vector de campo eléctrico  $\vec{E}$  es constante en todos los puntos de una superficie S, se denomina flujo al producto escalar del vector de campo por el vector superficie [2]:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} \quad (3)$$

El vector superficie S es un vector que tiene por módulo el área de dicha superficie, la dirección es perpendicular al plano que la contiene [2].

Cuando el vector campo  $\vec{E}$  y el vector superficie  $S$  son perpendiculares, el flujo es cero. Si el campo no es constante o la superficie no es plana, se calcula el flujo a través de cada elemento  $dS$  de superficie,  $E \cdot dS$  [2]. El flujo a través de la superficie  $S$ , es:

$$\Phi = \int E \cdot dS \quad (4)$$

La ley de Gauss afirma que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual al cociente entre la carga que hay en el interior de dicha superficie dividido entre  $\epsilon_0$  [2].

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{q_{encerrada}}{\epsilon_0} \quad (5)$$

La ley de Gauss es uno de los teoremas más útiles y flexibles de la electrostática, aunque su aplicación es más sencilla cuando existe una simetría en las formas geométricas utilizadas, como son el caso del cilindro y de la esfera. Pero incluso con este tipo de geometrías existen restricciones. Por ejemplo, para el caso del cilindro sólo podría aplicarse en el caso de que se suponga que la longitud del mismo sea infinita [1].

## 2.1.2 Potencial eléctrico

La ventaja de trabajar con el potencial eléctrico en lugar de con el campo es que este último es una magnitud vectorial y requiere tres componentes, frente a una del potencial [3].

La ecuación que relaciona el campo eléctrico  $E$ , el cual está definido mediante un vector y el potencial eléctrico  $V$ , está representado por el siguiente producto escalar:

$$E = -\nabla V \quad (6)$$

El signo negativo que aparece tanto en la definición integral como en el gradiente, significa que el campo electrostático va siempre en el sentido de mayor a menor potencial eléctrico [3]. El potencial eléctrico también puede ser expresado de la siguiente manera:

$$V = -\int E \cdot dr \quad (7)$$

Esta ecuación es muy útil para calcular el valor de  $V$  cuando conocemos el valor de  $E$  [1].

En el caso de una distribución continua el potencial puede calcularse por integración directa de los potenciales debidos a los elementos de carga, esta expresión se representaría de la siguiente forma [3]:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (8)$$

### 2.1.3 Ecuaciones de Poisson y Laplace

Relacionando la densidad de carga con el potencial eléctrico al que da lugar, podemos hacer una aproximación útil para este último. Mediante la relación de divergencia, se relaciona el campo eléctrico con la densidad de carga [4].

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (9)$$

Donde:

E = Campo eléctrico

$\rho$  = Densidad de carga

$\epsilon_0$  = Permisividad

El campo eléctrico se relaciona con el potencial eléctrico por la relación de gradiente [4]:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (10)$$

Por lo tanto, el potencial está relacionado con la densidad de carga por la ecuación de Poisson [4]:

$$\nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} \quad (11)$$

En una región del espacio libre de cargas, esto se convierte en la ecuación de Laplace [4]:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (12)$$

## 2.2 Líneas de campo (Streamline)

Michael Faraday (1791-1867) fue quien introdujo el concepto de líneas de campo (Streamline). Las líneas de campo, son líneas imaginarias que ayudan a visualizar cómo varía la dirección del campo eléctrico a medida que pasa de un punto a otro del espacio Figura 1. Es decir, indican las trayectorias que seguiría la unidad de carga positiva si se la abandona libremente, por lo que, las líneas de campo salen de las cargas positivas y llegan a las cargas negativas [5]. Además, el campo eléctrico será un vector tangente a la línea en cualquier punto considerado.

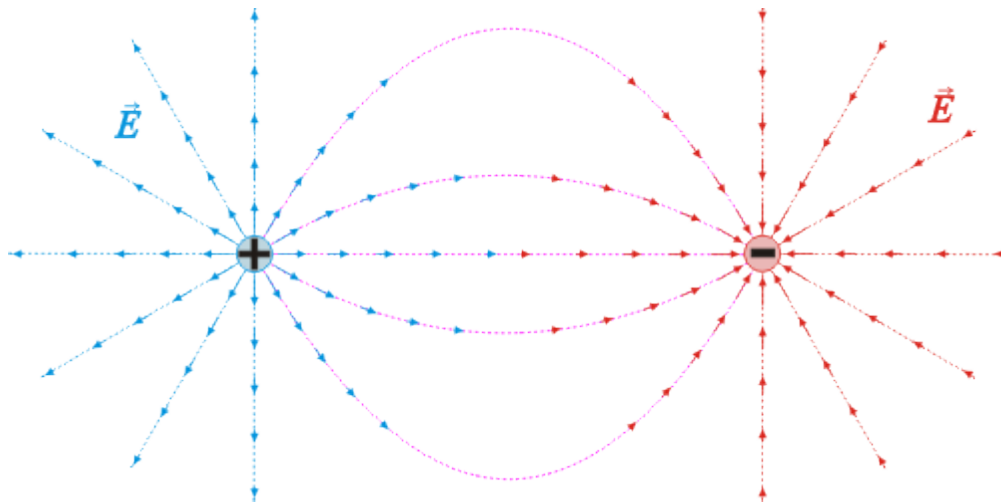


Figura 1: Líneas de campo causadas por una carga positiva y una negativa [5]

Las líneas de campo se caracterizan por tener las siguientes propiedades [5]:

- El vector campo eléctrico es tangente a las líneas de campo en cada punto.
- Las líneas de campo siempre comienzan o salen desde las cargas positivas y finalizan en las cargas negativas, es decir, son abiertas.
- El número de líneas que salen de una carga positiva o entran en una carga negativa es proporcional a dicha carga.
- La densidad de líneas de campo en un punto es proporcional al valor del campo eléctrico en dicho punto.
- Las líneas de campo no pueden cortarse. De lo contrario en el punto de corte existirían dos vectores de campo eléctrico distintos y este es único para cada punto de la configuración.

## 2.3 Efecto corona

La correcta detección y evaluación del efecto corona es de especial interés a la hora de diseñar los componentes eléctricos de líneas de alta tensión [6].

El efecto corona es una descarga eléctrica auto sostenida, que ioniza una pequeña región alrededor de los electrodos de alta tensión. Esto ocurre cuando el campo eléctrico de la superficie supera un valor crítico. Así, las moléculas de aire pueden ionizarse debido a la colisión de electrones, generando una avalancha de electrones. Sin embargo, debido a las complejas reacciones moleculares del gas durante la descarga, el mecanismo físico de las descargas es todavía incierto [6].

El efecto corona es un criterio importante a tener en cuenta a la hora de diseñar dispositivos en alta tensión, tanto para corriente continua (DC) como para corriente alterna (AC). Este efecto produce pérdidas innecesarias de energía o descargas luminosas y audibles (contaminación acústica). Además, el efecto corona también genera interferencias de TV y radio principalmente debido a los impulsos durante el hemicycle positivo. También produce reacciones de ozono y químicas, las cuales provocan efectos químicos en las superficies cercanas, cambios en el campo ionizado en los alrededores, y finalmente, la degradación del aislamiento [6].



## 3. OBJETIVOS Y ALCANCE

### 3.1. OBJETIVOS

El objetivo principal de este TFG es verificar la efectividad del cálculo del campo eléctrico sobre superficies en configuraciones básicas y el cálculo de las líneas de campo, mediante el método de elementos finitos con el software COMSOL. Para ello habrá que cumplir los siguientes objetivos parciales.

1. En primer lugar, calcular el campo eléctrico en configuraciones más simples, como es el caso de la esfera para diferentes tamaños. Así se verificará el uso de las herramientas en COMSOL para configuraciones posteriores.
2. Constatar si la introducción de un entorno ficticio para mejorar la malla en los puntos críticos tiene una influencia positiva en los resultados del campo eléctrico calculado en geometrías simples.
3. En la configuración de esfera-plano, calcular tanto el campo eléctrico sobre la superficie como en las líneas de campo y se verificará con la formulación establecida por estudios previos.
4. Realizar los cálculos antes mencionados (campo eléctrico sobre la superficie como en las líneas de campo) para el caso de un montaje real esfera-plano de ensayo, tomando como referencia los datos aportados en el siguiente artículo [6].

### 3.2. ALCANCE

Están fuera de alcance de este TFG:

1. No es objeto de este trabajo, configuraciones que no sean esfera o esfera-plano. Es decir, toda geometría compleja que salga de estas dos simples configuraciones no serán abordadas.
2. Dado que todos los parámetros que vamos a estudiar pueden ser calculados mediante la herramienta software COMSOL, se prescinde el uso de otras herramientas software como ASYS, Nastran o RFEM.
3. Se consideran condiciones de entorno a condiciones normales de temperatura, densidad, presión etc. Por lo que, no se va a tomar en cuenta ningún otro factor como la humedad, viento...
4. El gas utilizado para simular el entorno es el aire, por lo que, no se tiene en cuenta ningún otro gas para la definición del entorno.

5. En un modelo real, el material utilizado para definir la esfera sería de metal, pero en nuestro caso se considera que está formado por aire debido a que la permitividad eléctrica en ambos casos es la misma.

## 4. BENEFICIOS QUE APORTA EL TRABAJO

La implementación de este proyecto supondrá una serie de beneficios los cuales pueden clasificarse en tres grupos: beneficios técnicos, económicos y sociales. Teniendo en cuenta las características de este TFG, podríamos afirmar que los beneficios técnicos son los más importantes, ya que, estos derivan en beneficios sociales y económicos.

### 4.1. BENEFICIOS TÉCNICOS

La posibilidad de poder calcular el campo eléctrico u otros parámetros eléctricos mediante un software de elementos finitos como lo es COMSOL, supone que se pueden analizar modelos reales de manera simplificada. Por lo que, significa un importante beneficio de tiempo, ya que, no se tendría que calcular de manera experimental o analítica y se reduciría el número de ensayos considerablemente.

De esta manera se pueden analizar efectos relacionados con el campo eléctrico como el efecto corona de manera más efectiva y sencilla. Esto supone comprender y cuantificar de la forma más adecuada los efectos negativos del efecto corona sobre los elementos involucrados en los sistemas de alta tensión, y evitarlos de la forma más eficaz posible. Ejemplo de ello serían las interferencias de radio y TV, las pérdidas de energía o las reacciones químicas que pueden dañar el aislamiento del conductor [6].

### 4.2. BENEFICIOS ECONÓMICOS

El poder modelizar y cuantificar el fenómeno del campo eléctrico, agiliza el estudio de dicho fenómeno y sus consecuentes efectos negativos, haciendo posible que las empresas encuentren soluciones mejores y más económicas para evitar o reducir los efectos negativos.

Estos beneficios económicos se traducen en no tener que calcularlo de una manera experimental, lo cual supondría la compra de generadores de AC y DC, la compra de una cámara fotográfica de última generación o la necesidad de utilizar un laboratorio dotado para este tipo de simulaciones.

Por otro lado, el uso de software de elementos finitos a largo plazo supone un importante beneficio económico para las empresas dedicadas a la producción de aparatos u otros elementos eléctricos que componen los sistemas de transmisión y distribución eléctrica. Ya que, el hecho de poder analizar y cuantificar los efectos negativos de fenómenos relacionados con el campo eléctrico como el efecto corona,

supondrían un ahorro económico en materia de pérdidas de potencia o reemplazos de aislamientos en conductores.

### **4.3. BENEFICIOS SOCIALES**

Este trabajo supone un avance en el conocimiento de la temática. Por lo que, es un punto de inflexión para estudios posteriores relacionados con el campo eléctrico y utilización de esta herramienta software.

A su vez, aunque en este proyecto solo se trabaje con configuraciones básicas como el caso de la esfera o esfera-plano, ayuda a la predicción de geometrías hasta ahora no estudiadas y a considerar efectos que hasta ahora no se han considerado.

Por otro lado, en lo que se refiere al ciudadano de a pie, el hecho de poder analizar de manera más rápida y eficaz el campo eléctrico y los efectos negativos de los fenómenos relacionados con el mismo, supone la disminución de interferencias en TV y radio y de la contaminación acústica relacionada con este fenómeno, lo cual tiene un impacto positivo en la vida de la población.

## 5. ANÁLISIS DEL ESTADO DEL ARTE

### 5.1 ESTUDIO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN CONFIGURACIONES BÁSICAS

En este apartado se explican los estudios previos realizados hasta hoy acerca del campo eléctrico sobre superficie y las líneas de campo en la configuración esfera-plano.

Uno de los estudios más relevantes acerca de esta temática es el trabajo de fin de master publicado por Michelarakis [1]. El autor, al igual que en el presente trabajo, utiliza COMSOL para la realización de sus simulaciones. Realiza los cálculos en una configuración en dos dimensiones de esfera-plano y utiliza una tensión impulso. Este tipo de tensión, tiene la característica de que llega al valor de pico rápidamente y decae a cero en cuestión de muy poco tiempo por lo que su simulación no es estacionaria.



*Figura 2: Configuración de esfera plano real, con doble toroide [1]*

Para la realización de sus cálculos elige una configuración de esfera-plano compuesta por un tubo cilíndrico vertical, que termina en un doble toroide (Figura 2) en su punto de fijación con la fuente de tensión. Hace sus simulaciones en base a diferentes tamaños de esfera. Por un lado, para esferas de un diámetro menor que un metro ( $D_{esfera} < 1m$ ), supone un diámetro de 0,1 m y 1 m de longitud para el tubo cilíndrico. Por otro lado, para el caso de diámetros de esferas mayores de un metro ( $D_{esfera} > 1m$ ) supone un diámetro de 0,45 m y 3 m de longitud para el tubo.

En lo que se refiere al valor máximo del campo eléctrico en la superficie, el autor afirma que para una relación entre la altura de la esfera ( $d_{gap}$ ) y el diámetro del mismo

$(d_{gap}/D_{sphere})$  de entre 0 y 25, la siguiente expresión obtiene resultados con menos de 1 % de error respecto de los resultados obtenidos mediante simulaciones en COMSOL.

$$E_{max} = \frac{V_{applied}}{d_{gap}} \left[ \frac{\left( \frac{4d_{gap}}{D_{sphere}} + 1 \right) \pm \sqrt{\left( \frac{4d_{gap}}{D_{sphere}} + 1 \right)^2 + 8}}{4} \right] \quad (13)$$

Donde  $d_{gap}$  representa la altura y  $D_{sphere}$  el diámetro de la esfera. Según el autor esta expresión sólo es válida para la configuración esfera-plano sin ningún tipo de montaje.

A modo de conclusión, asegura que a la hora del diseño del montaje en el modelo de simulación, puede observarse la influencia del diámetro del tubo en el campo eléctrico máximo ( $E_{MAX}$ ). Un tubo relativamente pequeño en comparación con el diámetro de la esfera, puede hacer que el valor máximo aparezca en la superficie del tubo. Por lo tanto, con el hecho de conocer el diámetro de la esfera resultaría fácil calcular el diámetro del tubo correspondiente, para así poder obtener el valor máximo del campo eléctrico en el punto de la esfera más cercano al plano.

Como alternativa al cálculo del campo eléctrico mediante el método de elementos finitos, Donohoe [18] realiza el cálculo del campo eléctrico mediante el método de las imágenes [10]. Para ello considera un electrodo esférico en el aire sobre un plano conectado a tierra. El electrodo se mantiene a un potencial constante  $V_0$  en relación con el plano de tierra. El espacio entre el electrodo y el plano a tierra está expresado mediante  $g$ . Su trabajo está orientado a demostrar que la validez del método de las imágenes para el caso esfera-plano está condicionado al tamaño del plano aterrizado.

Según este método, el campo de un electrodo sobre un plano con área infinita, es equivalente al campo del electrodo y su imagen en un espacio homogéneo. El método de las imágenes implica la conversión de un campo eléctrico en otro equivalente más fácil de calcular. En ciertos casos es posible sustituir un conductor por una o más cargas puntuales, de modo que las superficies conductoras se sustituyen por superficies equipotenciales a los mismos potenciales.

En lo que se refiere al montaje y simulación experimental, Donohoe utiliza una alimentación en tensión continua, un electrodo y un plano de tierra metálico. Los electrodos están formados por, una esfera de 3 cm de diámetro y un cilindro vertical de

3,9 cm de diámetro y 1,9 cm de altura. La dimensión de la placa metálica es de 61 cm x 45,7 cm y la tensión que aplica es de  $V_0 = 200 V$ .

Inicialmente, coloca la esfera a una altura de 6 mm sobre el plano, extendiéndolo hasta 12 mm, es decir, una relación  $d_{gap}/D_{sphere}$  de entre 0,02 y 0,04, el cual coincide con el rango aportado por Michelarakis ( $\frac{d_{gap}}{D_{sphere}} \leq 25$ ) y realiza el cálculo del campo eléctrico teórico mediante la herramienta de software MATLAB.

La comparación entre los resultados obtenidos y los teóricos tienen un error de entorno al 5-7 %. Sugiere que, para minimizar los efectos de los bordes de la lámina puesta a tierra, esta debe de ser lo suficientemente grande en relación al tamaño la esfera.

Otros datos experimentales a partir de la configuración esfera-plano son los obtenidos por Riba et al. [6]. Sus ensayos buscan obtener la tensión de ruptura a tensión constante y alterna, para estimar una fórmula general de predicción en configuraciones simples con características industriales, a diferencia de Donohoe, cuyo montaje tiene un carácter más educativo. Para ello utilizan un generador de alimentación alterna Phenix BK-130 calibrado a 130kV (frecuencia industrial 50Hz), y dos generadores de polaridad positiva y negativa Phenix DC calibrado a 120kV.

En el ensayo no disponen de instrumentos de medición de campo eléctrico para esos valores de tensión, por lo cual, proceden a realizar un modelo simplificado, para la realización de los cálculos mediante FEM o método de elementos finitos.

Al igual que Michelarakis utilizan la herramienta computacional COMSOL. Sin embargo, la configuración utilizada es tridimensional, a tensión constante y la fijación de la esfera la realizan mediante dos tubos en vez de uno: uno vertical y otro horizontal. Mediante este módulo resuelven las siguientes ecuaciones en todos los puntos (x, y, z):

$$\nabla^2 V(x, y, z) = -\rho/\epsilon_0 \quad (14)$$

$$E(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z) \quad (15)$$

Donde  $V$  y  $E$ , son el potencial eléctrico y el campo eléctrico, respectivamente.  $\epsilon_0$  la permitividad del aire, y  $\rho$  la densidad de carga.

Las dimensiones utilizadas para definir las esferas son de 3 mm a 25 mm, el diámetro del cilindro vertical es de 1,5 mm a 5,8 mm respectivamente, y el espacio de la esfera al plano varía desde 10 cm a 75 cm. Esto nos da en este estudio un rango de  $2 \leq \frac{D_{esfera}}{D_{tubo}} \leq 4.3$  y una relación de  $4 \leq \frac{d_{gap}}{D_{esfera}} \leq 250$ . Los cuales difieren de la relación

aportada por Michelarakis, la cual no va más allá de 25, adicionalmente, está relación de Michelarakis es sólo para configuraciones de esfera-plano sin ningún tipo de montaje.

## 5.2 FORMULACIÓN ANALÍTICA PARA EL CAMPO ELÉCTRICO CRÍTICO EN CASO NO UNIFORME

Existe una fórmula analítica obtenida mediante resultados de datos experimentales establecidos por Peek [6] para líneas de transporte, que permite calcular el campo eléctrico crítico para la ruptura dieléctrica del aire. Esta ley es aplicada en cilindros o conductores, en el cual relaciona el radio del conductor o del cilindro y la condición de su superficie, con el gradiente de tensión en la superficie  $E_c$  en el comienzo del efecto corona. Esta es la expresión para el cálculo del mismo:

$$E_c = E_0 * m * \delta(1 + a/\sqrt{\delta * r}) \quad (16)$$

Donde  $E_0$  (kV/cm) es el gradiente de tensión crítico a condiciones atmosféricas,  $r$ (cm) es el radio del cilindro,  $m$  el factor de rugosidad de la superficie y  $\delta$  la densidad relativa del aire ( $\delta = 1$  bajo condiciones atmosféricas).

Michelarakis propone para este cálculo la siguiente expresión, la cual sólo es válida para relaciones entre el espacio de aire entre la esfera y el plano y el diámetro de la misma, en un rango de 0.2 a 9 ( $\frac{d_{gap}}{D_{esfera}}$ ), en ensayos a tensión impulso:

$$E_c = \frac{(1+d_{gap}/Resfera)}{0.42+0.3(\frac{d_{gap}}{Resfera})} \quad (17)$$

Por otro lado, Riba et al. Proponen una expresión similar a la ley de Peek para el caso de electrodos esféricos:

$$E_c = b * (1 + c/\sqrt{r}) \quad (18)$$

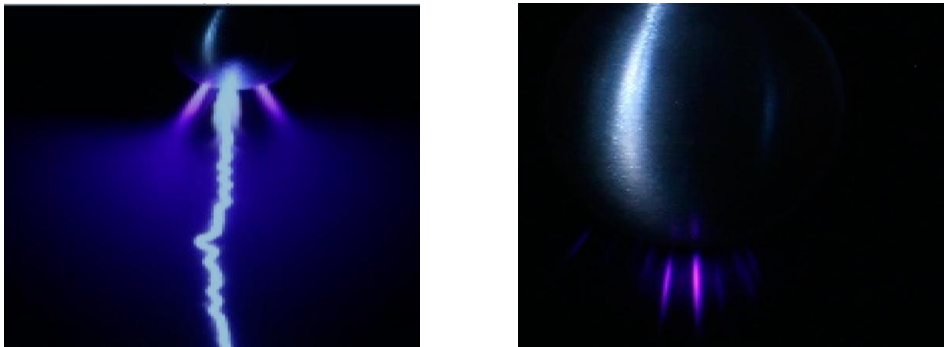
Donde  $b$  (kV/cm) y  $c$  ( $cm^{1/2}$ ) son obtenidos mediante cálculos experimentales, y dependen de la naturaleza de la tensión aplicada, es decir, corriente continua (DC) positiva o negativa y corriente alterna (AC). Esta formulación no ha sido validada mediante ensayo.



### 5.3 LÍNEA CRÍTICA DE DESCARGA

Para un pequeño espacio de aire entre el electrodo y el plano, el resultado del campo eléctrico se concentra en el punto más cercano de la esfera al plano. Posteriormente, decae rápidamente a cero en las direcciones radiales a lo largo del plano [10].

Se aprecia que el fenómeno puede ser observado en las capturas realizadas en el ensayo por [6] para tensión continua positiva y donde la línea de descarga parte de la parte inferior de la esfera hacia el plano. En el caso de tensión continua negativa, se observa que no existe una línea de descarga clara, aunque sí muy próximos a ella. Esto puede observarse en la Figura 3.



*Figura 3: Línea de descarga eléctrica a tensión positiva y negativa [6]*

No existe una manera analítica, ni iterativa de calcularlo, aunque se asume que por su proximidad a la línea de campo que se inicia en punto del valor máximo del campo eléctrico de la superficie de la esfera, ambas son iguales.

El método numérico del cálculo de la línea de campo eléctrico (Streamline) está oculta para los usuarios ya que se trata de licencias comerciales y poseen derechos de autor sobre la metodología. Pero en esencia su cálculo busca reproducir el siguiente fenómeno: se libera una partícula con carga eléctrica y masa despreciable para no alterar el campo eléctrico original y la fuerza aplicada sobre ella. Al introducir esta partícula en el campo eléctrico calculado por COMSOL, se estima la magnitud y dirección de la fuerza sobre ella. Con estos valores y con un paso diferencial de tiempo  $dt$ , se calcula la nueva posición que va a tener esta partícula. Se realiza el mismo procedimiento en la nueva posición calculada lo cual hace el proceso iterativo, esto termina cuando se calcula toda la línea de campo o una sección de ella (Figura 4).

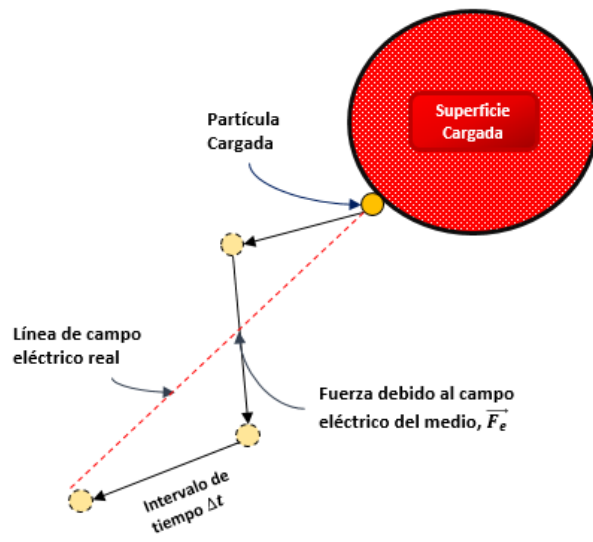


Figura 4: Descripción de metodología de cálculo ideal de la Streamline

## 6. ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS

En este apartado se desarrollarán las posibles alternativas para el análisis del presente trabajo, donde concluiremos cuál de ellos determinará de la forma más eficaz el cálculo del campo eléctrico y las líneas de campo.

### 6.1 Alternativas para el cálculo del campo eléctrico

Para el presente trabajo se barajan tres alternativas diferentes para el cálculo del campo eléctrico y las líneas de campo.

- Simulación por cargas (CSM).
- Resolución mediante el método de fronteras finitas (BEM).
- Resolución mediante herramienta software de elementos finitos (FEM).

#### 6.1.1 Simulación por cargas (CSM)

El método de simulación por cargas (CSM) pertenece a la familia de métodos integrales para el cálculo de los campos electromagnéticos. Existen dos variantes de este método: simulación de cargas discretas y simulación por cargas de área. Sólo se explicará el primer método.

El método de simulación por cargas discretas está basado en aproximar el campo en la región bajo estudio con el campo formado por un grupo de cargas discretas, ubicadas dentro del conductor. La posición y el tipo de cargas viene predeterminado, pero las magnitudes de las cargas son desconocidas. Las magnitudes de estas cargas tienen que calcularse de modo que su efecto integrado satisfaga las condiciones de frontera. Una vez determinadas las magnitudes mediante un conjunto de ecuaciones lineales, estas tienen que ser verificadas mediante la selección de un número de puntos adecuados, e imponiendo las condiciones de frontera [7].

El potencial y campo eléctrico en un punto cualquiera del campo del dominio, puede ser calculado analíticamente mediante superposición de las funciones de potencial y gradiente [7]. El método gráfico a seguir sería el de la Figura 5.

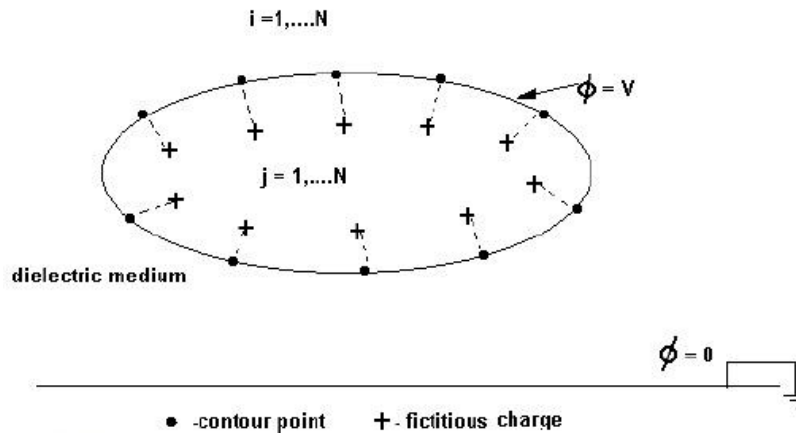


Figura 5: Método de simulación por cargas [19]

### 6.1.2 Método de elementos de frontera (BEM)

El método de elementos de frontera o BEM (Boundary element method), en un principio es muy similar al método CSM de elementos de área. Como en el método de CSM, el método de elementos de frontera usa áreas de carga para reemplazar las cargas reales. El BEM, al contrario del CSM no requiere que los componentes del sistema tengan una simetría axial. La discretización de las cargas reales, generalmente se consigue mediante tres o cuatro elementos de frontera, los cuales aproximan la distribución de carga interna mediante funciones lineales [7].

Para hacer coincidir las superficies exteriores de las geometrías, pueden añadirse puntos intermedios adecuados. Por otro lado, este método es válido para cualquier tipo de geometría predefinida como, las geometrías cilíndricas, esféricas y toroidales. La evaluación de las funciones potenciales resultantes de los elementos de frontera, generalmente requieren de integración numérica. Solamente para los casos de esferas y cilindros, la resolución analítica es factible debido al ahorro de tiempo [7]

### 6.1.3 Método de elementos finitos (FEM)

El método de los elementos finitos FEM (Finite element method) es un método numérico, que se utiliza generalmente para aproximar soluciones de ecuaciones

diferenciales parciales [7] demasiado complejas como para resolverlas de manera analítica. Este método es utilizado mayormente para problemas de ingeniería y física.

Este método originalmente fue aplicado en el campo de la estática y evaluación dinámica de la seguridad en componentes mecánicos. Posteriormente, este método se extendió para incluir el estudio del flujo de calor, campos eléctricos y magnéticos, flujo de fluidos y problemas en otros campos [7].

En el caso del campo eléctrico, el campo es representado mediante un número individual de elementos, cada uno de ellos conectados entre sí mismos por los extremos de sus nodos. Para campos 3-D, se construye mediante cubos o tetraedros [7].

## 6.2 Alternativas software de elementos finitos

Existen varios softwares diseñados para este tipo de simulaciones:

### ANSYS MAXWELL

ANSYS Maxwell (Figura 6) es un software de simulación en el campo de la electromagnética, esta aplicación es usada para el diseño y análisis de motores eléctricos, actuadores, sensores, transformadores y otros aparatos electromagnéticos y electromecánicos [8].

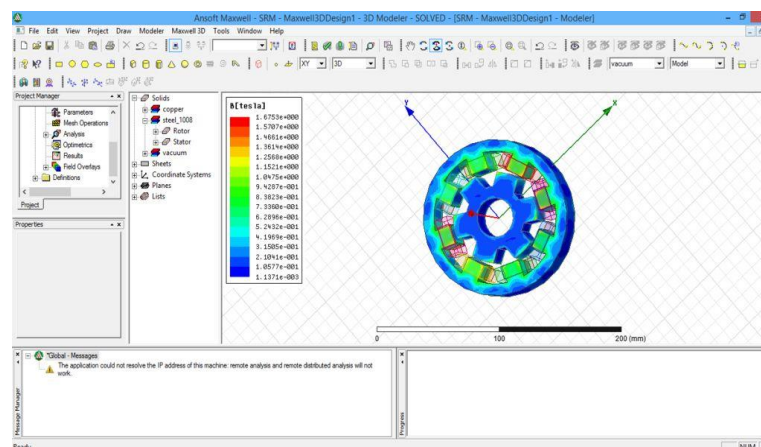


Figura 6: Programa FEM Ansys Maxwell [8]

### DASSAULT OPERA

Dassault opera es una tecnología de simulación electromagnética que permite hacer simulaciones metafísicas/ multiescala realistas [9] (Figura 7).

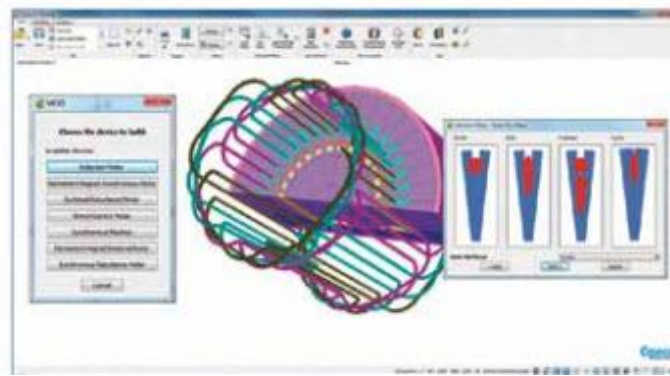


Figura 7: Programa FEM Dassault Opera [9]

## COMSOL

COMSOL (Figura 8) es un software CAE para modelado, análisis y simulación de fenómenos físicos 3D en ingeniería, como problemas con fluidos, estructurales, térmicos, electromagnéticos entre otros, que permite definir la geometría 3D o 2D especificando el mallado, cargas y la visualización previa del análisis para luego ejecutar el post-proceso y ver reportes finales [12].

Tiene interfaces con diferentes programas CAD, tiene además una serie de módulos por aplicación y “solvers” específicos que se pueden agregar, como MATLAB.

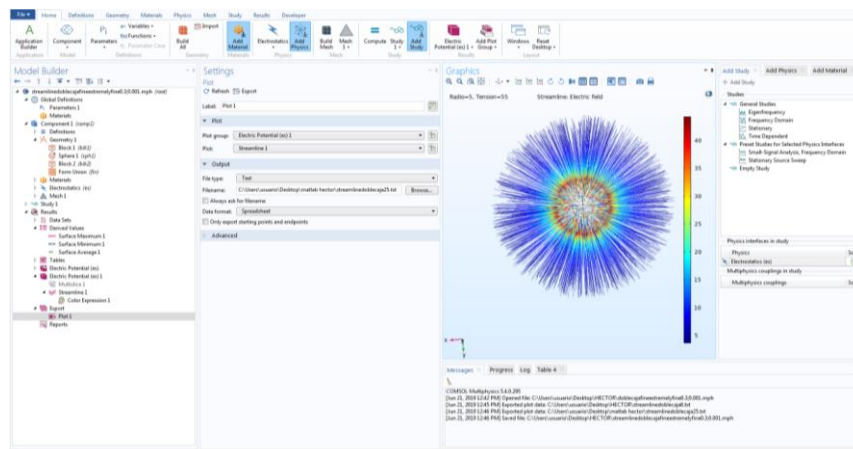


Figura 8: Programa FEM COMSOL

En nuestro caso tenemos la disponibilidad de utilizar las herramientas COMSOL Multiphysics y ANSYS.

## 7. DESCRIPCIÓN DE LA SOLUCIÓN PROPUESTA

En este apartado se hará un análisis de cuál de las alternativas posibles para el cálculo del campo eléctrico es la más adecuada.

Para el cálculo del campo eléctrico, los métodos de CSM y BEM sólo sirven para el cálculo del campo eléctrico sobre la superficie de la geometría. Por lo que, para ese cálculo sí que sería posible utilizar cualquiera de estas dos alternativas.

Debido a que también se está estudiando las líneas de campo alrededor de estas superficies, mediante estos dos últimos métodos no sería posible realizar dicho cálculo.

Por lo tanto, se concluye que la herramienta software o de elementos finitos (FEM) es el mejor método para la evaluación del campo eléctrico y las líneas de campo para configuraciones básicas, además, de ser este TFG un estudio en que se quiere reafirmar que los métodos de elementos finitos son útiles para la resolución de esta clase de problemas.

En lo que se refiere a nuestra elección del software de elementos finitos, de los softwares ya mencionados solo se tiene disponibilidad de ANSYS y COMSOL, por lo que, se descarta el uso del resto de softwares.

Comparando estos dos softwares, COMSOL ofrece un número de herramientas más intuitivas y fáciles de uso que ANSYS, como por ejemplo, un modelado físico más sencillo y elaboración de mallado semiautomatizado. Por otro lado, ANSYS está más orientado al diseño industrial, mientras que COMSOL posee geometrías simples predefinidas, tales como esferas, cilindros y paralelepípedos.

Por lo tanto, la elección adoptada para el cálculo del campo eléctrico en las superficies y a lo largo de las líneas de campo mediante el método de elementos finitos es, COMSOL Multiphysics.

## 8. METODOLOGÍA

### 8.1. Descripción de tareas

El primer paso a realizar para la ejecución de este TFG ha sido la planificación. En esta sección se ha estructurado en base a los contenidos a analizar. Posteriormente se han analizado diferentes estudios y artículos relacionados con el cálculo del campo eléctrico y las líneas de campo en geometrías diferentes y métodos, para así poder tener un contexto teórico acerca de la temática. Estos conocimientos teóricos adquiridos se han extendido mediante la búsqueda de información adicional. Finalmente, mediante las herramientas COMSOL Multiphysics y Excel se han realizado los cálculos correspondientes, siguiendo las pautas que mencionaremos más adelante. Con el objetivo de resumir estas pautas del trabajo, se han representado las tareas mediante un diagrama de flujo (Figura 9).

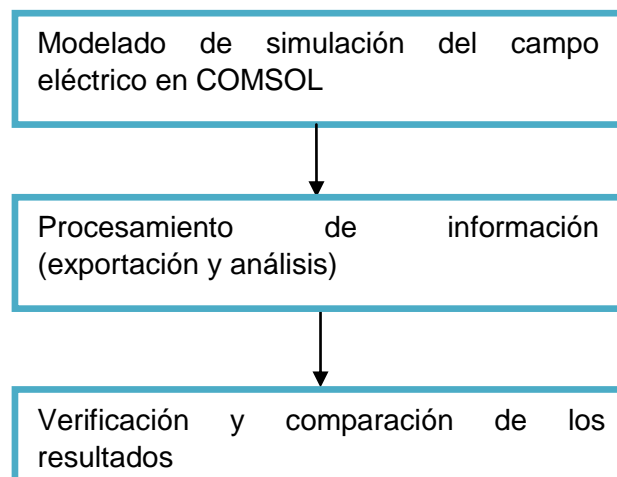
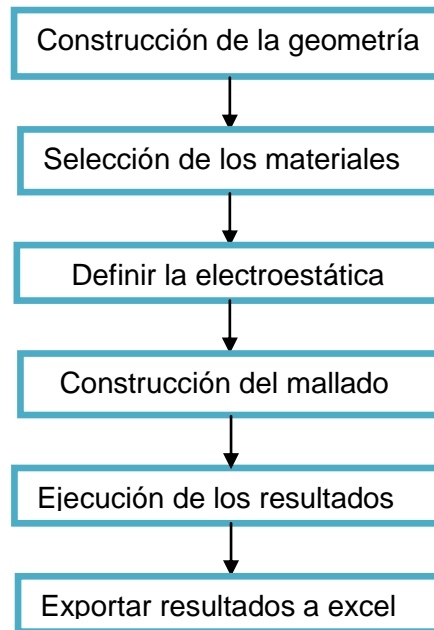


Figura 9: Flujograma de tareas

#### 8.1.1 Modelado de simulación del campo eléctrico en COMSOL

En la primera fase del trabajo, se calculó el campo eléctrico de las distintas configuraciones mediante la herramienta computacional COMSOL. En lo que se refiere a los pasos seguidos para el cálculo del campo por método de elementos finitos, se representa mediante el siguiente diagrama de flujo. Este procedimiento se ha seguido para las todas las configuraciones (Figura 10).





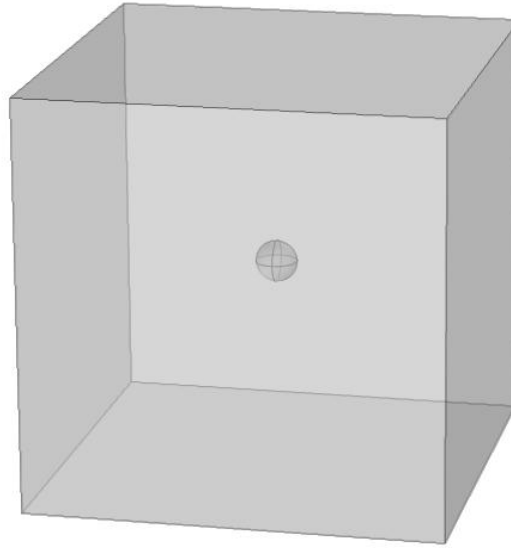
*Figura 10: Flujograma para modelado en COMSOL*

Para todas las configuraciones el material que ha formado todas las geometrías ha sido el aire, con una permitividad relativa unitaria. Las paredes del entorno se han puesto a tierra ( $V=0$ ), mientras que los electrodos han tenido una tensión aplicada continua positiva o negativa, según el caso de estudio.

También se ha hecho uso de entornos ficticios, estos engloban la parte de la geometría de interés, y las subdividen en un mayor número de elementos comparado con el resto de la geometría. Los mismos no tienen carga electrostática alguna. El hecho de disminuir el tamaño de los elementos podría mejorar los resultados, puesto que “a priori” el uso de los mismos supone una mejora de mallado y disminución del tiempo de simulación, aunque no esté demostrado. Los valores obtenidos mediante esta metodología han sido comparados con los datos obtenidos sin el uso de dichos entornos ficticios.

Para la reproducción de las líneas del campo eléctrico se ha hecho uso del comando “Streamline”, el cual permite calcular el campo eléctrico en el aire alrededor de la configuración. Por otro lado, también se ha calculado el campo eléctrico máximo sobre la superficie de los electrodos. Todas las simulaciones han sido realizadas mediante un barrido paramétrico.

### 8.1.1.1 Caso simple de esfera

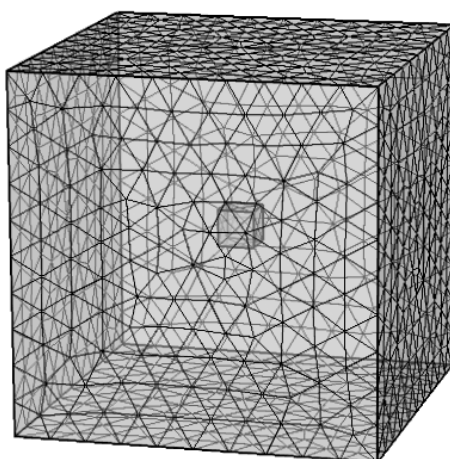


*Figura 11: Configuración básica de esfera*

Para definir la geometría se han supuesto 5 diámetros diferentes para la esfera (8 mm; 10 mm; 15 mm; 20 mm y 25 mm) y 4 entornos diferentes (lado de cada cubo: 12,5 cm; 15 cm; 20 cm y 25 cm). Es decir, se ha supuesto que el entorno varía de 5 a 10 veces el diámetro de la esfera más grande. En lo que se refiere a la electrostática, la tensión aplicada para la esfera ha sido de 55 kV.

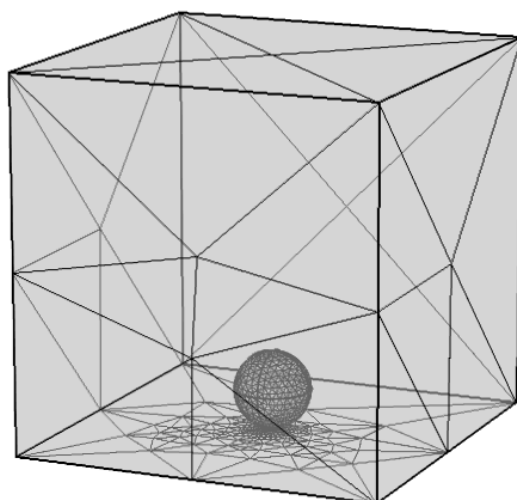
Una vez se han definido las geometrías y la electrostática, se ha construido el mallado, para el cual se han supuesto 3 tipos de mallado (finer, extra fine y extremely fine). La elección del mallado es de vital importancia, puesto que mediante este se define el contorno de la esfera de mejor o peor manera, y podría influir en la calidad de los resultados. Como norma general, nos han valido todos los resultados con un error igual o inferior a 5% (se ha determinado como criterio para validar los resultados) en el campo eléctrico sobre la superficie, respecto del valor calculado teóricamente mediante la fórmula (1).

Para la selección del mallado en el caso de uso de entornos ficticios, se ha realizado un número de ensayos variando el mallado del entorno exterior, manteniendo un mallado lo más fino posible en el interior del entorno ficticio.



*Figura 12: Mallado de configuración básica de esfera con entornos ficticios*

### **8.1.1.2 Caso esfera-plano ideal**



*Figura 13: Mallado del entorno ficticio en la configuración esfera-plano ideal*

Para el caso de la configuración esfera-plano, se ha hecho una comparativa de cómo influye la altura de la esfera respecto del plano, en el campo eléctrico sobre la superficie en un entorno cúbico. Ya que, hasta ahora sólo se ha trabajado con la esfera centrada en el entorno.

Los parámetros de dichos entornos han venido condicionados por el primer caso de estudio realizado, es decir, que el lado del cubo debía de ser mínimo 16,66 veces el diámetro de la esfera más grande. Por lo tanto, se ha tomado como referencia 15 m por cada lado del cubo, lo cual cumplía esa condición. Las alturas que se han trabajado han sido las siguientes: 0,1 cm; 0,5 cm; 1,2 cm y 1,8 cm. Estas alturas

entran dentro del rango descrito por Michelarakis [1] en la fórmula (12), es decir, entre 0 y 25 de la relación  $\frac{d_{gap}}{D_{sphere}}$ .

Los resultados obtenidos se han verificado mediante esta expresión, tanto para el caso de uso de entornos ficticios y sin el uso de ellos. Para las dimensiones de esfera, se han utilizado las anteriormente descritas en el caso de esfera, aunque para este caso sólo se han analizado los casos extremos, es decir, las esferas de 8 mm y 25 mm de diámetro respectivamente. La tensión aplicada ha sido de 55 kV.

En lo que se refiere a los datos de campo eléctrico máximo en la superficie de la esfera podrían no aparecer en la parte más baja debido al mallado de la misma, por lo que, mediante el comando "Domain Point Probe" se ha obtenido el valor del campo eléctrico en dicho punto en concreto, el cual teóricamente es el punto máximo.

### 8.1.1.3 Caso esfera-plano real

Para representar el conjunto completo de lo que sería el montaje real esfera-plano, se ha basado en el artículo realizado por Riba et al. [6]. Debido a que no se dan datos sobre las dimensiones de ninguno de los entornos utilizados, basándose en el primer estudio del campo eléctrico de la esfera, del cual se sabe que el entorno debe ser al menos 16,66 veces el diámetro de la esfera más grande, se ha supuesto una base del entorno de 15 m x 15 m. La altura, se ha determinado de manera que el eje de revolución del conductor estuviera a una distancia de 7,5 m de la parte superior del entorno, por lo que, se ha tomado 9,16 m de altura para el prisma rectangular. El montaje tiene un aspecto como el de la Tabla 14.

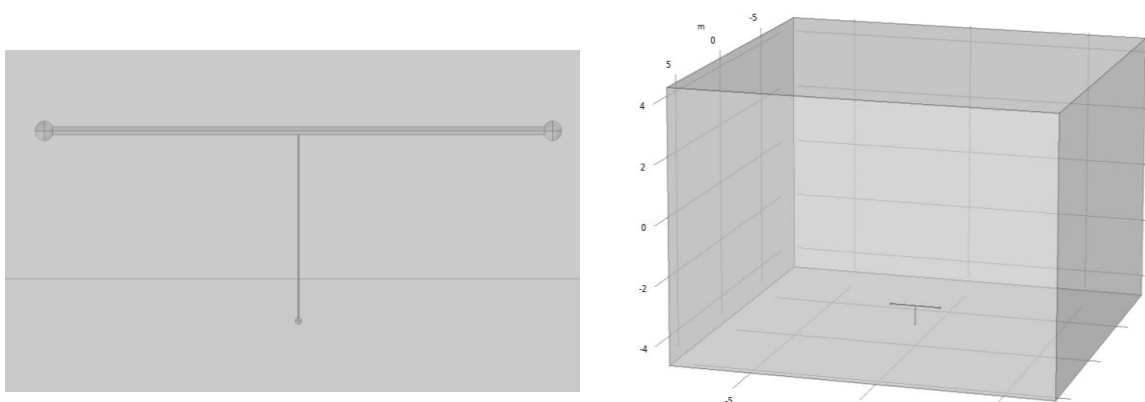


Figura 14: Montaje de la configuración esfera-plano real

El conjunto ha estado formado por una esfera, un cilindro vertical, un cilindro horizontal que representa el conductor y dos esferas que representan el apantallamiento. Todos ellos han estado sometidos a una tensión continua tanto negativa como positiva, que ha variado según la dimensión de la esfera.

La esfera al igual que en la configuración esfera-plano, solo se han tomado los casos críticos, es decir, las esferas de 8 mm y 25 mm de diámetro. Las alturas de las esferas han sido las siguientes: 10 cm; 15 cm; 25 cm; 50 cm y 75 cm. Las dimensiones del tubo vertical han variado según la dimensión de la esfera y su altura, estas vienen determinadas en la Tabla 1 y Tabla 2.

Altura esfera (cm)	Altura tubo vertical (cm)
10	79,5
15	79,5
25	79,5
50	145,0
75	166,0

*Tabla 1: Longitud del tubo vertical en función de la altura de la esfera*

Diámetro esfera (mm)	Radio cilindro vertical (mm)
25	2,9
8	1,355

*Tabla 2: del tubo vertical en función del diámetro de la esfera*

Las tensiones han dependido tanto del tamaño de la esfera y de la altura de la misma, como se puede ver en la Tabla 3.

Diámetro (mm)	Altura (m)	Tensión aplicado (kV) (dc+)	Tensión aplicado (Kv) (dc-)
25mm	0,1	NO	-56,4
	0,15	64,5	-57
	0,25	67,5	-60,5
	0,5	70,3	-62,2
	0,75	73,8	-62,4
8mm	0,1	25,8	-23
	0,15	26,9	-24,7
	0,25	29,2	-27,1
	0,5	29,4	-28,4
	0,75	30,8	-31

*Tabla 3: Tensión aplicada en función del diámetro y altura de la esfera*

El tubo horizontal, ha tenido una longitud de 2 m y un radio de 14.25 mm. Y finalmente, las esferas que simulan los apantallamientos han tenido un radio 2,5 veces mayor que el radio del conductor, esto ha venido determinado por la norma UNE-61284 [11].

En lo que se refiere a los datos de campo eléctrico máximo en la superficie se ha calculado mediante el comando “Max/Min” y mediante el comando “Domain Point Probe” se ha obtenido el valor del campo eléctrico en el punto más bajo de la esfera, puesto que teóricamente es donde tiene que aparecer el valor máximo.

## 8.1.2 Verificación y comparación de los resultados

### 8.1.2.1 Caso simple de esfera

En el caso de la configuración de esfera, se ha verificado el valor promedio del campo eléctrico mediante la fórmula teórica (1). En lo que refiere a la “Streamline” se ha verificado mediante una variación de la misma fórmula teórica (1). Se han escogido 6 “Streamlines” ortogonales, al no poder definir los puntos exactos de las mismas, se ha tenido que hacer la simulación de 2000 líneas arbitrarias, para poder así abarcar la gran mayoría de la superficie de la esfera (Figura 15).

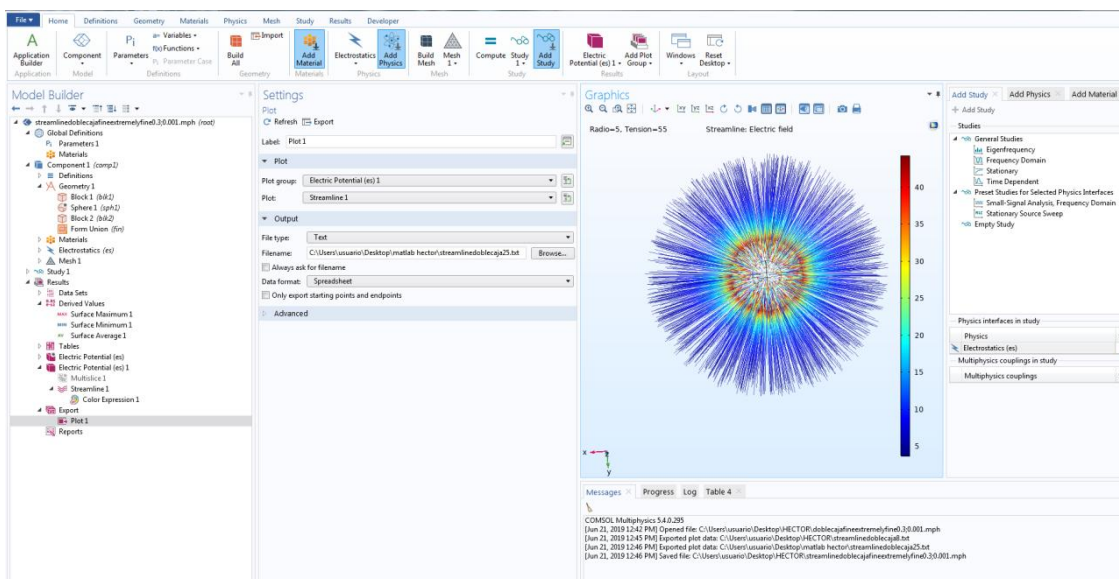


Figura 15: 2000 Streamlines arbitrarias

Estos resultados han sido filtrados mediante el uso de un código (A Figura 1) en MATLAB para poder analizar y graficar en Excel.

Por otro lado, se han comparado los datos obtenidos mediante el uso de entornos ficticios y sin el uso de ellos. Para poder validar cual de los dos ha obtenido mejores resultados.

### 8.1.2.2 Caso esfera-plano ideal

Para el caso de la configuración de esfera-plano, se ha verificado los resultados del campo eléctrico máximo en la superficie y los obtenidos mediante el “Domain Point Probe” con la formulación descrita por Michelarakis (13).

En lo que refiere a la “Streamline” se ha verificado mediante el uso del comando “Linegraph”, el cual traza una línea recta desde el punto más bajo de la esfera al plano.

Finalmente, al igual que en caso de la esfera, se han comparado los resultados con los obtenidos mediante el uso de entornos ficticios, para así poder verificar la influencia de su uso.

### 8.1.2.3 Caso esfera-plano real

Para el caso de la configuración de esfera-plano, se han verificado los resultados del campo eléctrico máximo en la superficie y los obtenidos mediante el “Domain Point Probe” con los resultados que obtuvieron en el artículo [6].

En lo que se refiere a la “Streamline” al igual que para el caso esfera-plano ideal, se ha validado mediante el uso del comando “Linegraph”, el cual traza una línea recta desde el punto más bajo de la esfera al plano. El cálculo de la desviación, se ha realizado mediante la siguiente ecuación:

$$e = \frac{\int_0^l (E_{linegraph} - E_{streamline})^2 dx}{\int_0^l E_{linegraph}^2 dx} \quad (19)$$

Finalmente, al igual que en caso de la esfera, se han comparado los resultados con los obtenidos mediante el uso de entornos ficticios, para así poder verificar la influencia de su uso.



## 8.2. Diagrama de Gantt

En este apartado se describe el programa de trabajo que se ha seguido durante la realización del TFG. El equipo de trabajo que ha participado en el desarrollo del mismo, se compone de un Ingeniero Sénior (Tutor del TFG) y un Ingeniero Júnior (alumno realizador del TFG). El programa de trabajo es el siguiente:

- **Búsqueda de información (P.T.1):** Comienza el 9 de junio, fecha de comienzo del proyecto, tras una reunión (R.1) entre el Ingeniero Sénior y el Ingeniero Júnior, donde el Ingeniero Sénior define las pautas de trabajo y las diferentes tareas a realizar. Esta fase está destinada a la búsqueda por parte del Ingeniero Júnior de información relacionada con la temática del TFG. Esta fase concluye el 12 de junio, con una carga de trabajo de 20 horas.
- **Análisis de información (P.T.2):** Comienza el 13 de junio tras la segunda reunión (R.2) entre el Ingeniero Sénior y el Ingeniero Júnior, donde el primero comprueba la validez de la documentación recopilada por el segundo. Esta fase se dedica al análisis de la información recogida por parte del Ingeniero Júnior, para sintetizar y seleccionar aquella potencialmente útil de cara al TFG. La segunda fase finaliza el 14 de junio, habiendo supuesto una carga de trabajo de 20 horas.
- **Desarrollo del modelo en COMSOL (P.T.3):** El 14 de junio se celebra la tercera reunión (R.3). En ella se verifica la información analizada y se comprueba su utilidad de cara al TFG. Con ello comienza la tercera fase, donde se diseña el modelo eléctrico en COMSOL, con las consiguientes simulaciones. Esta fase finaliza el 15 de junio, habiendo conllevado 10 horas de trabajo.
- **Ejecución de simulaciones (P.T.4):** Esta fase sucede entre los días 15 de Junio y 1 de Julio, y en ella el Ingeniero Junior, tras haber desarrollado el modelo de simulación en COMSOL, procede a realizar las baterías de simulaciones pertinentes. Esta fase supone una carga de trabajo de 110 horas.
- **Redacción de la memoria (P.T.5):** Tras una cuarta reunión (R.4) el 1 de Julio, se verifica la validez de las simulaciones realizadas, y se procede a la escritura de la memoria del TFG. Esta fase abarca 40 horas de trabajo y finaliza el 14 de Junio cuando, tras una última reunión (R.5) con el

Ingeniero Senior, el TFG se da por finalizado y se da luz verde a su entrega.

A través del Diagrama de Gantt (Figura 16) y la Tabla 4, se muestra esquemáticamente el diagrama de tareas seguido durante la realización del TFG.

Nombre Actividad	Fecha Inicio	Duración en horas	Fecha fin	Duración en días
Búsqueda de Información	9-jun	20h	13-jun	2
Análisis de información	13-jun	20h	14-jun	2
Desarrollo del modelo en COMSOL	14-jun	10h	15-jun	2
Ejecución de simulaciones	16-jun	110h	1-jul	14
Redacción de la memoria	30-jun	40h	14-jul	14

Tabla 4: Carga horaria de cada tarea

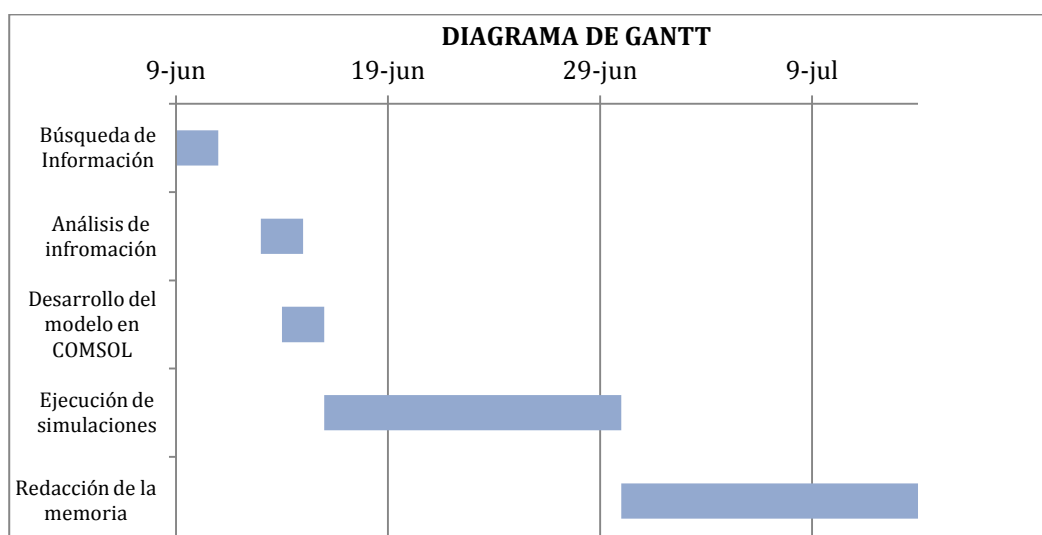


Figura 16: Diagrama de Gantt

## 8.3. Cálculos y descripción de los resultados

### 8.3.1 Configuración de simple esfera

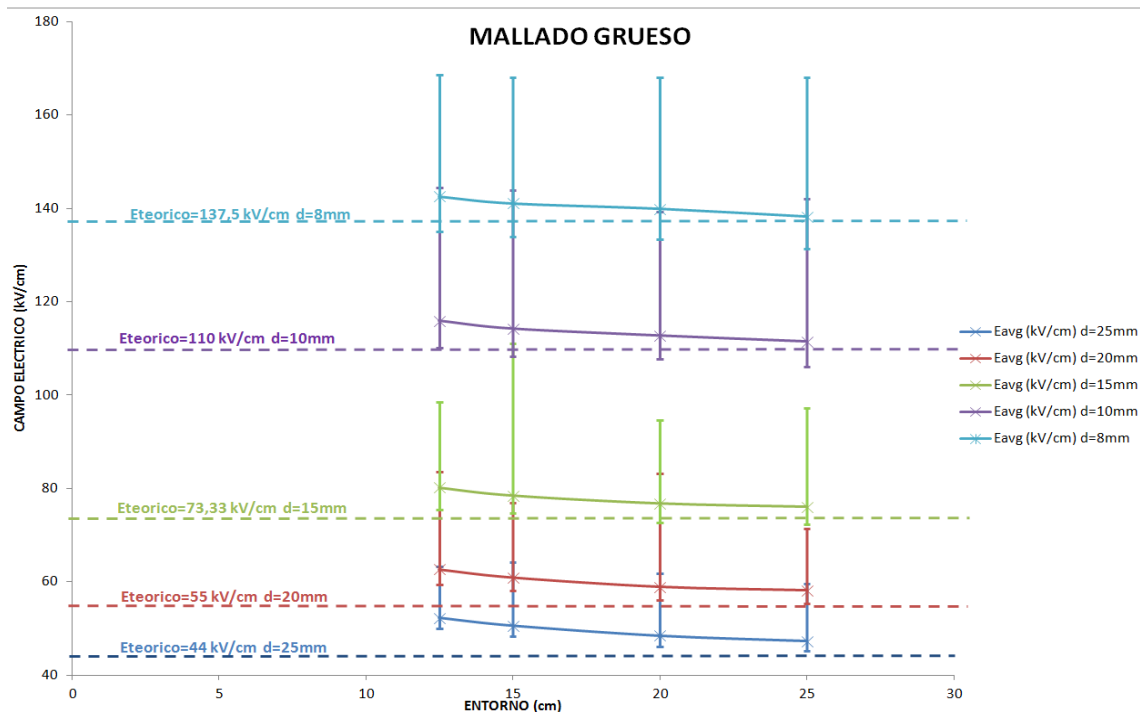


Figura 17: Valores promedio del campo eléctrico sobre la superficie de la esfera (máximos y mínimos) para un mallado grueso (finer)

Para el caso del uso de un mallado grueso (normal), como puede observarse en la Figura 17, debido a que el mallado no es lo suficientemente fino las diferencias entre los valores máximos de campo y los mínimos han sido muy grandes. Estos valores de error han variado desde 18,75 % para el caso de la esfera más grande y el entorno más pequeño, hasta 0,55 % en el caso de la esfera más pequeña y entorno más grande. Por otro lado, se ha podido apreciar que el error del valor promedio respecto del teórico disminuye a medida que el entorno es más grande y el diámetro de la esfera es más pequeño.

El hecho de no ser un mallado lo suficientemente fino, ha supuesto que el contorno de la esfera no estuviera correctamente definido, derivando en resultados con errores bastante altos.

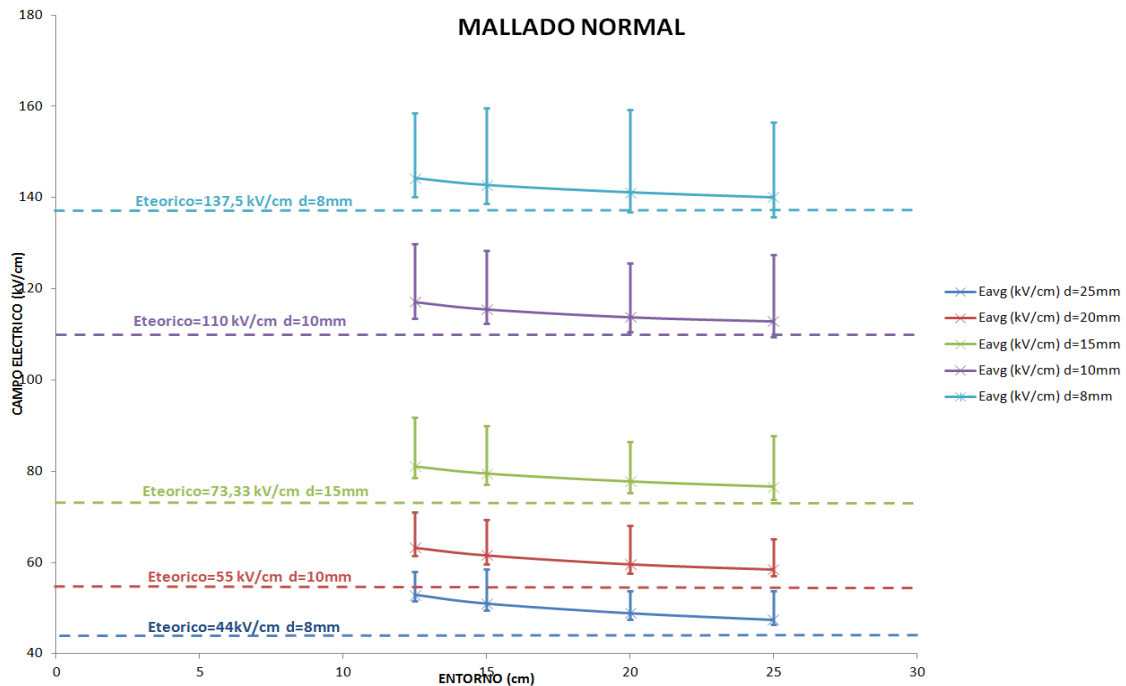


Figura 18: Valores promedio del campo eléctrico sobre la superficie de la esfera (máximos y mínimos) para un mallado normal (extra fine)

En este tipo de mallado (extra fine) se han obtenido unos resultados algo mejores respecto a los del mallado grueso como puede verse en la Figura 19, puesto que hay menores diferencias entre los valores máximos y mínimos, aunque en lo que se refiere al porcentaje del error promedio se ha mantenido bastante parecido al del caso anterior. Este error promedio ha variado desde un 20 % para el caso de la esfera más grande y entorno más pequeño, hasta un error mínimo de 1,85 % para el caso de la esfera más pequeña y el entorno más grande (A Tabla 1).

Al igual que en el caso del mallado grueso, se ha reafirmado el hecho de que los mejores resultados se obtienen a medida que el entorno es más grande y el diámetro de la esfera más pequeño.

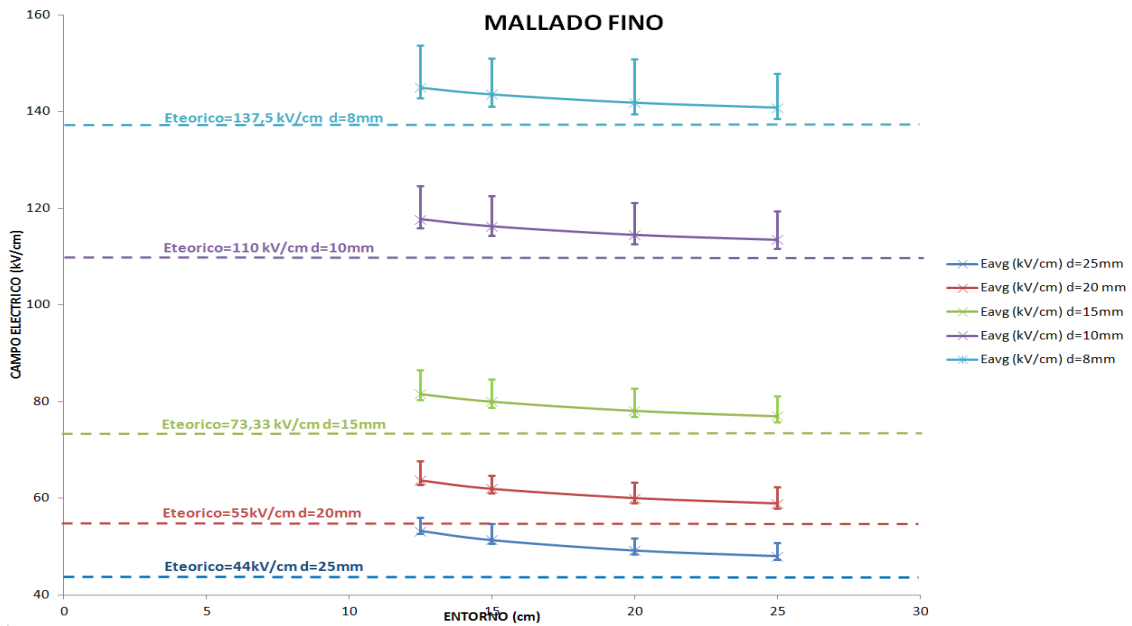


Figura 19: Valores promedio del campo eléctrico sobre la superficie de la esfera (máximos y mínimos) para un mallado fino (extremely fine)

Finalmente, con este tipo de mallado (Figura 19) se han conseguido los mejores resultados tanto en la diferencia entre valores máximos y mínimos, y el porcentaje de error entre el valor promedio respecto del valor del campo eléctrico calculado teóricamente mediante (1), siendo el caso con mejores resultados el de la esfera más pequeña (d=8 mm) y el entorno más grande (25 cm), con un error del valor promedio de 2,4 % (A Tabla 2).

Por lo que, se observó como criterio para conseguir los mejores resultados, que el entorno tiene que ser alrededor de 30 veces el valor del diámetro de la esfera (lo que sería la división del valor del entorno y el valor del diámetro de la esfera).

Aun así, como criterio general se ha aceptado todo resultado que no superara un 5% de error, por lo que, el caso límite de referencia ha sido el caso de la esfera de 15mm de diámetro y el entorno de 25 cm de lado. En conclusión, se ha tomado como referencia limite que el valor del lado del entorno tiene que ser mínimo  $16,66 \left( \frac{L_{entorno}}{D_{esfera}} = \frac{25}{1,5} \right)$  veces el diámetro de la esfera.

Una vez se ha sabido que se obtienen mejores resultados con este tipo de mallado y que el tamaño mínimo del entorno tiene que ser mínimo 16,66 veces el tamaño de la esfera, se ha procedido a modificar manualmente el tamaño del elemento máximo a 0,3 m y el tamaño del elemento mínimo a 0.001 m, como también el tamaño del entorno a 15 m por cada lado. El hecho de cambiar el tamaño máximo y mínimo de los elementos de mallado, supone subdividir el mallado en un mayor

número de elementos, pudiendo así conseguir un mayor grado de precisión en los resultados.

Diámetro (mm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>teo</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
8	147,64	133,3	136,51	137,5	8,15%	2,35%	-0,72%
10	116,15	107,73	109,58	110	6,00%	1,69%	-0,38%
15	77,45	71,907	73,087	73,3333	5,97%	1,61%	-0,34%
20	57,974	53,917	54,814	55	5,76%	1,64%	-0,34%
25	46,176	43,156	43,87	44	5,26%	1,63%	-0,30%

*Tabla 5: Valores del campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera, y un mallado extremadamente fino*

En este último caso como puede observarse en la Tabla 5, se han obtenido mejores resultados que los obtenidos con el mallado fino (extremely fine) predefinido por el sistema. En este caso, el error máximo del valor promedio del campo eléctrico no ha superado el 0,72% de error, y el error del valor máximo no ha superado el 8%.

En lo que se refiere a los resultados obtenidos mediante el uso de entornos ficticios, nos hemos basado en el mallado y dimensionamiento utilizado en el último caso. Para el tamaño del entorno ficticio de ha supuesto 152,5 cm por cada lado del cubo.

En primera instancia se ha mantenido el mallado extremadamente fino para el mallado de la esfera y el entorno ficticio (tamaño del elemento máximo a 0,3 m y el tamaño del elemento mínimo a 0.001 m), y un mallado normal para el entorno exterior.

Diámetro (mm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>teo</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
8	160,62	130,77	139	137,5	15,55%	5,92%	1,09%
10	129,67	102,99	111,33	110	16,47%	7,49%	1,21%
15	90,964	67,979	74,587	73,3333	21,96%	8,86%	1,71%
20	64,903	51,471	55,691	55	16,54%	7,58%	1,26%
25	51,963	40,845	44,743	44	16,14%	8,71%	1,69%

*Tabla 6: Valores de campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera y entorno ficticios (mallado exterior "normal").*

En este caso como puede apreciarse en la Tabla 6, el error promedio se ha mantenido en torno al 1 % para todos los tamaños de esfera, pero el error del valor máximo ha variado entre 15 y 20 %, dependiendo del tamaño de la esfera.

Por lo tanto, se procedió a refinar el mallado exterior a "fine" predefinido por el sistema.

Diámetro (mm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>exp</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
8	150,53	132,65	136,27	137,5	10,46%	2,66%	-0,89%
10	116,26	107,42	109,42	110	6,25%	1,83%	-0,53%
15	77,531	71,832	72,995	73,3333	6,21%	1,59%	-0,46%
20	58,43	53,907	54,776	55	6,67%	1,59%	-0,41%
25	46,699	43,028	43,823	44	6,56%	1,81%	-0,40%

Tabla 7: Valores de campo eléctrico sobre la superficie en configuración de esfera y entorno ficticios (mallado exterior "fine").

En este caso, como puede verse en la Tabla 7 se han obtenido resultados mejores en comparación a los obtenidos con un mallado normal en exterior, asemejándose a los resultados obtenidos sin el uso de los entornos ficticios.

Para el caso del campo eléctrico en el aire alrededor de la esfera, los modelos utilizados han sido los mejores mallados para cada caso. Es decir, un mallado fino en el entorno exterior y un mallado extremadamente fino para los dos elementos del interior (tamaño del elemento mínimo=0,001 m y tamaño del elemento máximo=0,3 m) para el caso de entornos ficticios y un mallado extremadamente fino (tamaño del elemento mínimo=0,001 m y tamaño del elemento máximo=0,3 m) para toda la geometría sin entornos ficticios.

En las siguientes gráficas, las leyendas X1, X2, Y1, Y2, Z1 Y Z2 representan cada una de las 6 Streamlines ortogonales obtenidas. En ellas, se observan las diferencias comparadas con el valor teórico calculado mediante (1).

Para el caso de una esfera de 8 mm de diámetro sin entorno ficticio (Figura 20):

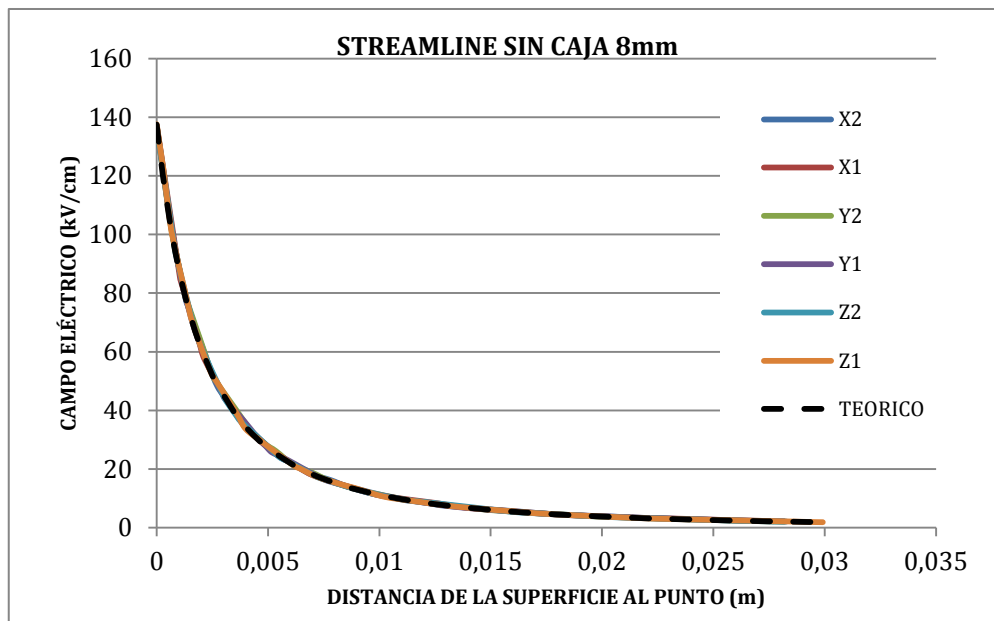


Figura 20: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 8mm sin entorno ficticio

Para el caso de una esfera de 8 mm de diámetro con entorno ficticio (Figura 21):

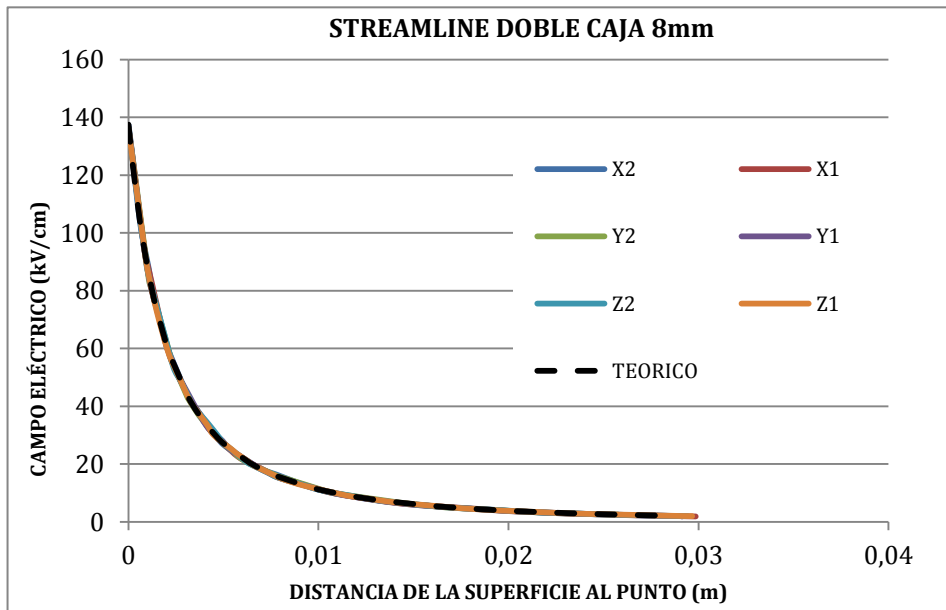


Figura 21: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 8mm con entorno ficticio

La línea teórica ha sido la misma para ambos casos. La diferencia visual entre las Streamlines con y sin entorno ficticio con este valor teórico ha sido prácticamente inapreciable, lo cual significa que la calidad de la malla en ambos casos ha sido similar, y ofrecen el mismo grado de precisión.

Para el caso de una esfera de 25 mm de diámetro (Figura 22 y Figura 23):

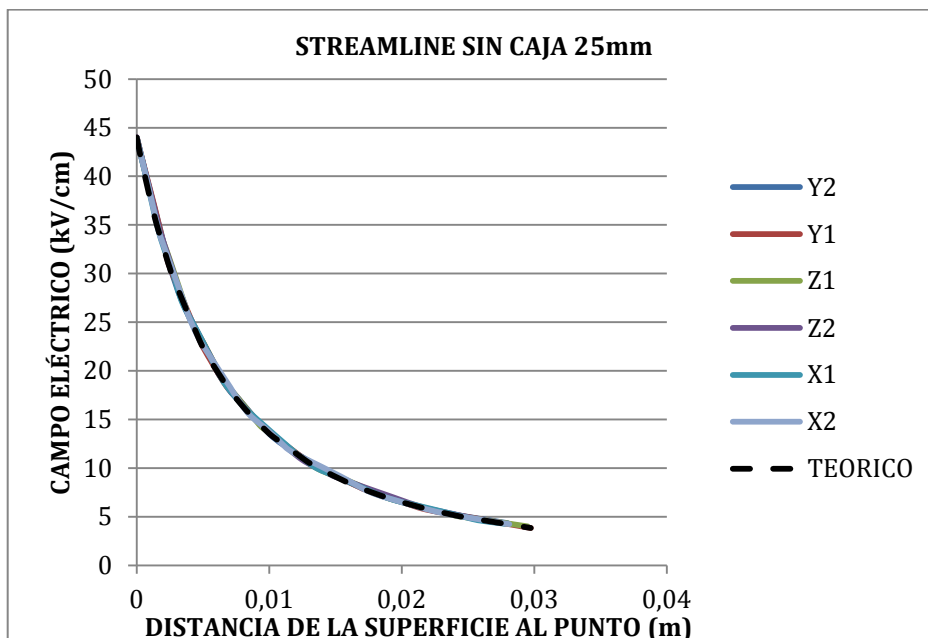


Figura 22: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 25 mm sin entorno ficticio



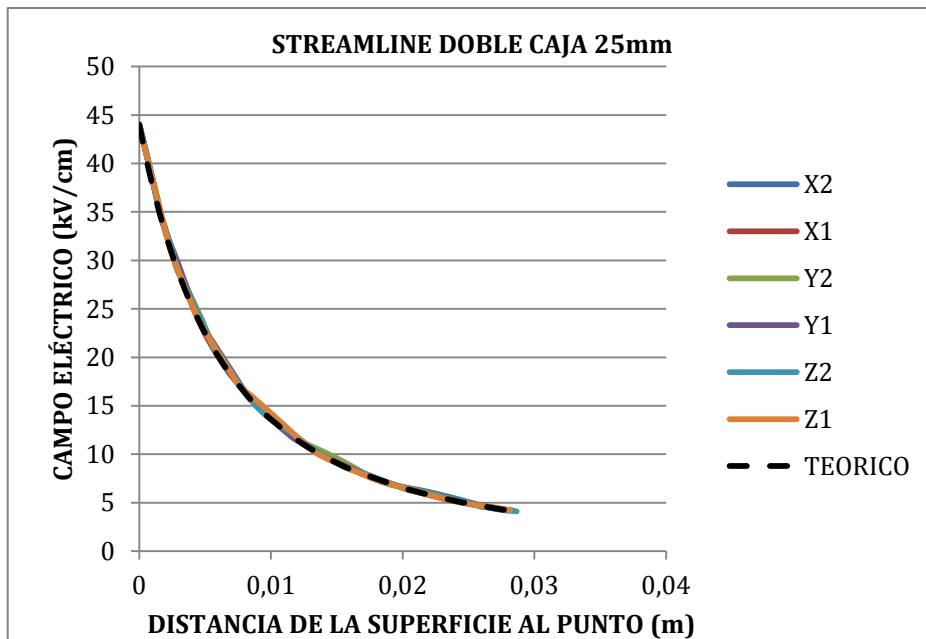


Figura 23: Streamline vs Valores teóricos, para la esfera de 25 mm con entorno ficticio

Al igual que en el caso de la esfera de 8 mm la diferencia visual entre las Streamlines con y sin entorno ficticio con este valor teórico ha sido prácticamente inapreciable, lo cual significa que la calidad de la malla en ambos casos es similar, y ofrecen el mismo grado de precisión.

Por lo que, la calidad del mallado no es dependiente del tamaño del objeto en este caso.

### 8.3.2 Configuración de esfera-plano ideal

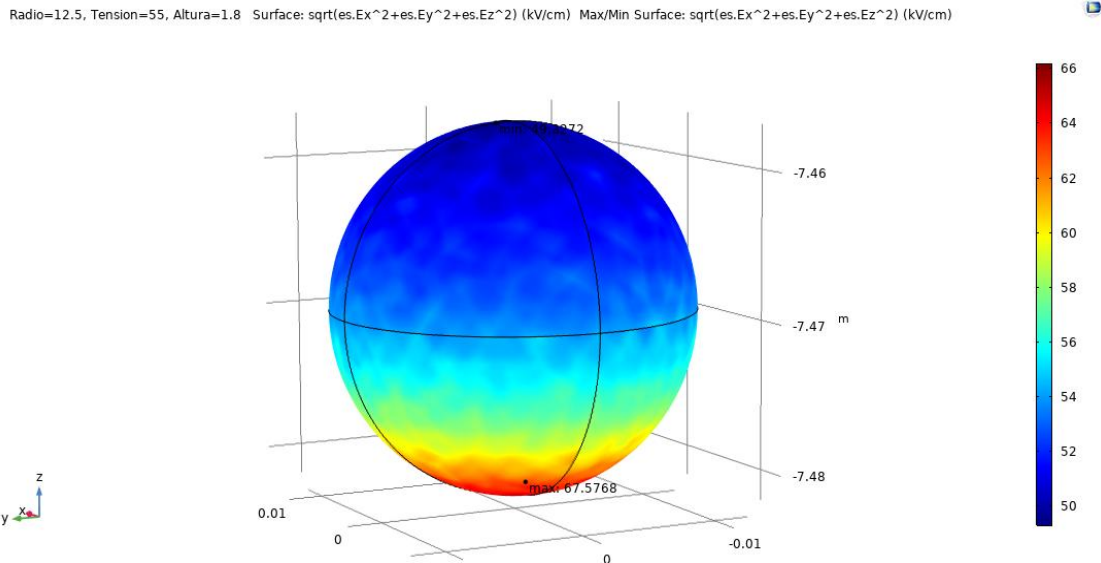


Figura 24: Rango del campo eléctrico sobre la superficie en el caso esfera-plano ideal

En la Tabla 8 se han podido apreciar los datos obtenidos para el valor máximo del campo eléctrico en la superficie de la esfera, el valor que se ha obtenido en el punto más bajo de la esfera mediante el “Domain Point Probe” y su comparación con el valor obtenido mediante la formulación (13) de Michelerakis.

Radio esfera (cm)	Altura (cm)	E Max (kV/cm)	E Critico (Kv/cm)	Emax Michelerakis	Error E Max	Error E Critico
0,40	0,10	651,02	645,40	646,46	-0,70%	-0,16%
1,25	0,50	143,04	138,38	141,70	-0,94%	-2,34%
0,40	1,80	163,81	155,35	155,77	-4,91%	-0,27%

Tabla 8: Valores críticos y máximos de la configuración esfera plano sin entornos ficticios

Como puede observarse, los valores máximos del campo eléctrico han diferido de los obtenidos mediante la formulación entre un 0,7 y 4,9 %. Mientras que para el “Domain Point Probe” los valores han diferido entre un 0,16 y 2,34 %. Por lo que, los resultados sugieren que el “Domain Point Probe” ofrece valores más precisos.

En la Tabla 9 se puede apreciar los datos obtenidos para el caso de entornos ficticios.

Radio esfera (cm)	Altura (cm)	E Max (kV/cm)	E Critico (Kv/cm)	Emax Michelerakis (kV/cm)	Error E Max	Error E Critico
0,40	0,10	638,91	620,92	646,46	1,18%	3,95%
0,40	0,50	224,42	219,60	220,00	-1,97%	0,18%
0,40	1,80	162,11	155,28	155,77	-3,91%	0,32%
1,25	0,10	583,39	583,38	579,85	-0,61%	-0,61%

Tabla 9: Valores críticos y máximos de la configuración esfera plano con entornos ficticios

En esta configuración no se ha observado una mejora en el error sustancial, puesto que los valores máximos del campo eléctrico han diferido de los obtenidos mediante la formulación (13) entre un 0,61 y 3,91 %. Mientras que para el “Domain Point Probe” los valores han diferido entre un 0,18 y 3,95 %. Nuevamente, los resultados sugieren que el “Domain Point Probe” ofrece valores más precisos al igual que en caso anterior.

Por lo que, se concluye que el valor máximo del campo eléctrico en el punto teórico en la superficie de la esfera, puede ser verificado mediante la formulación de Michalarakis.

En lo que se refiere a la línea de campo eléctrico crítica (Streamline) se visualiza en la Figura 25.

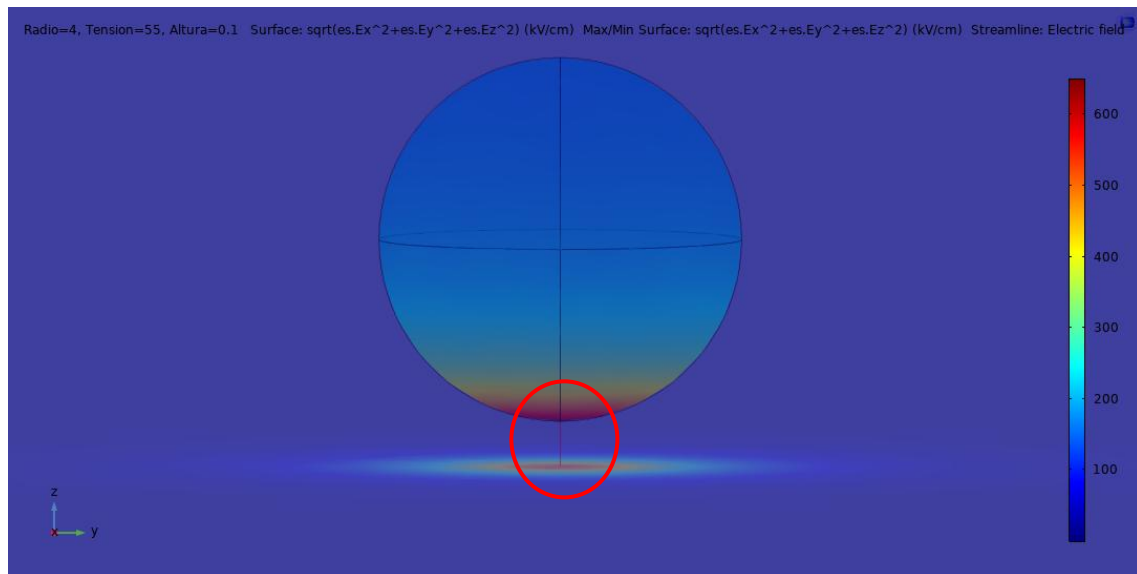


Figura 25: Streamline (redondeada en rojo) del caso esfera-plano  $h=0.1\text{cm}$   $R=4\text{mm}$

Se observa en las siguientes 4 figuras (Figura 26, Figura 27, Figura 28, Figura 29) la comparación de la Streamline crítica con una línea recta trazada (Linegraph) entre el punto más bajo de la esfera al plano. Dependiendo de la altura de la esfera.

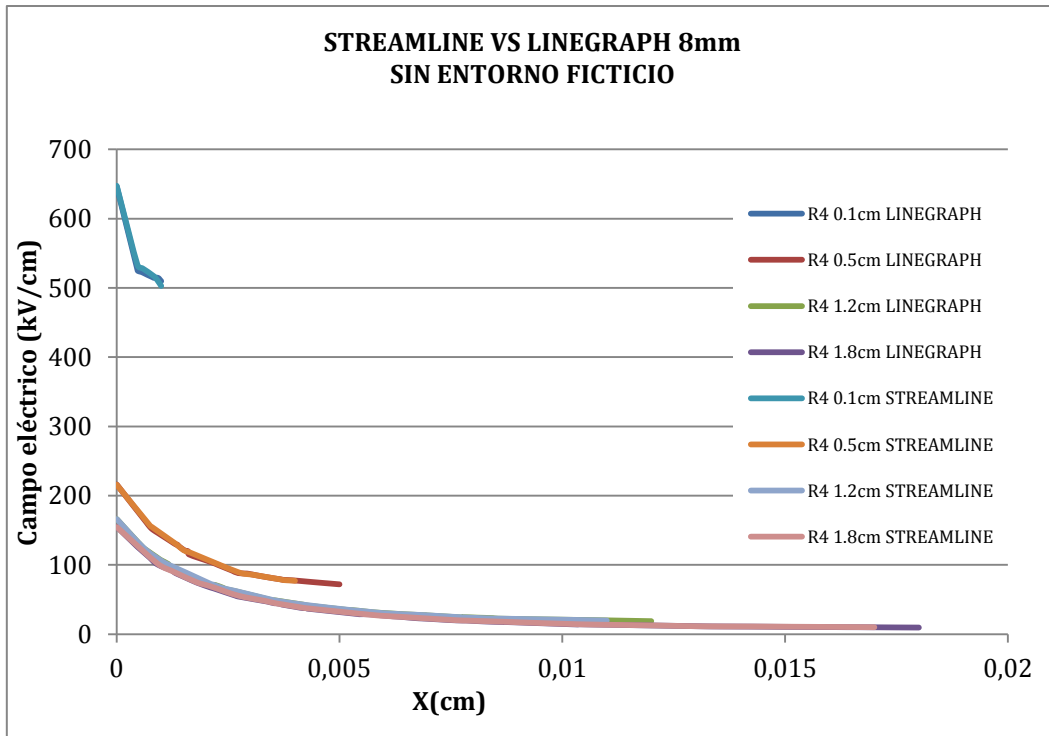


Figura 26: Streamline vs Linegraph  $r=4\text{mm}$  sin entorno ficticio para todas la alturas (esfera-plano ideal)

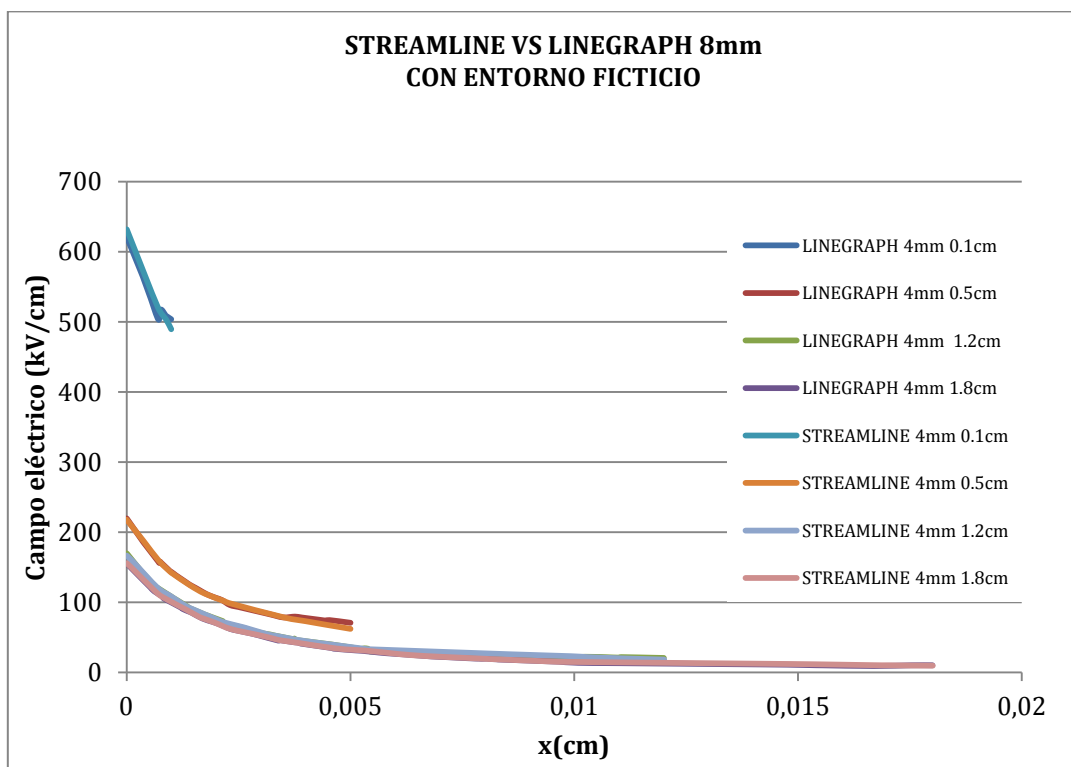


Figura 27: Streamline vs Linegraph  $r=4\text{ mm}$  con entorno ficticio para todas la alturas (esfera-plano ideal)

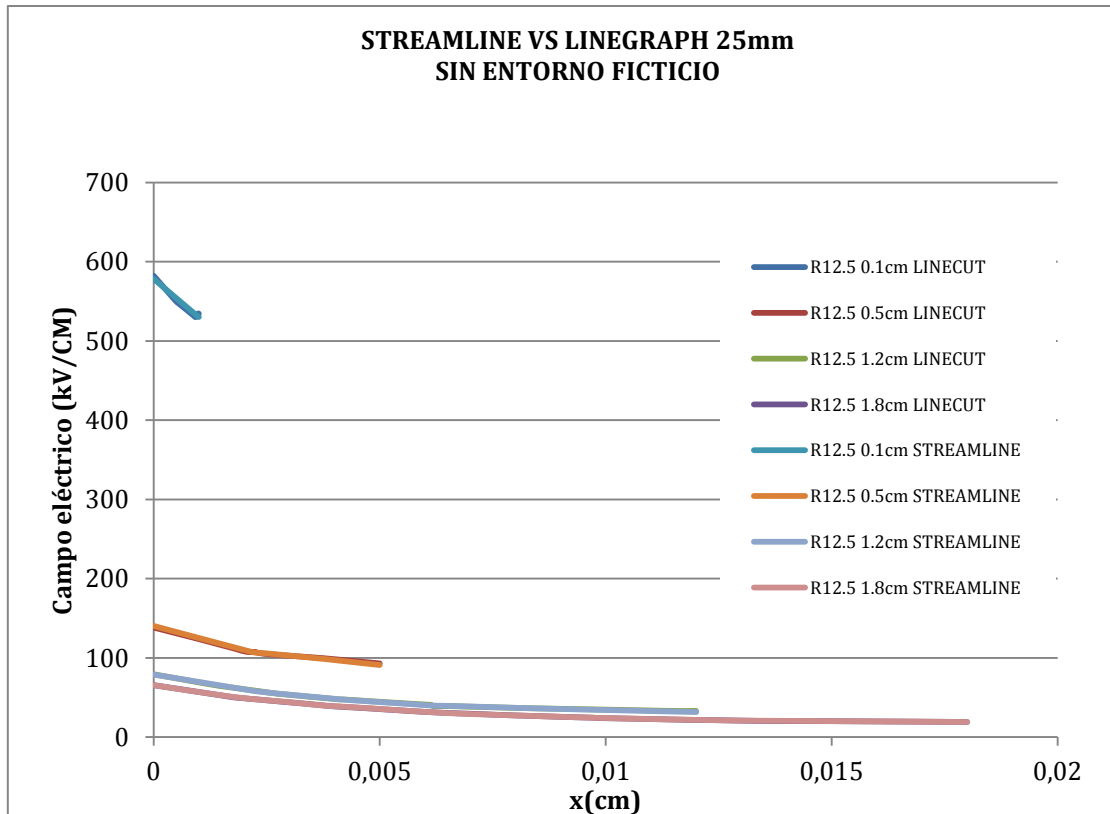


Figura 28: Streamline vs Linegraph  $r=12,5$  mm sin entorno ficticio para todas las alturas (esfera-plano ideal)

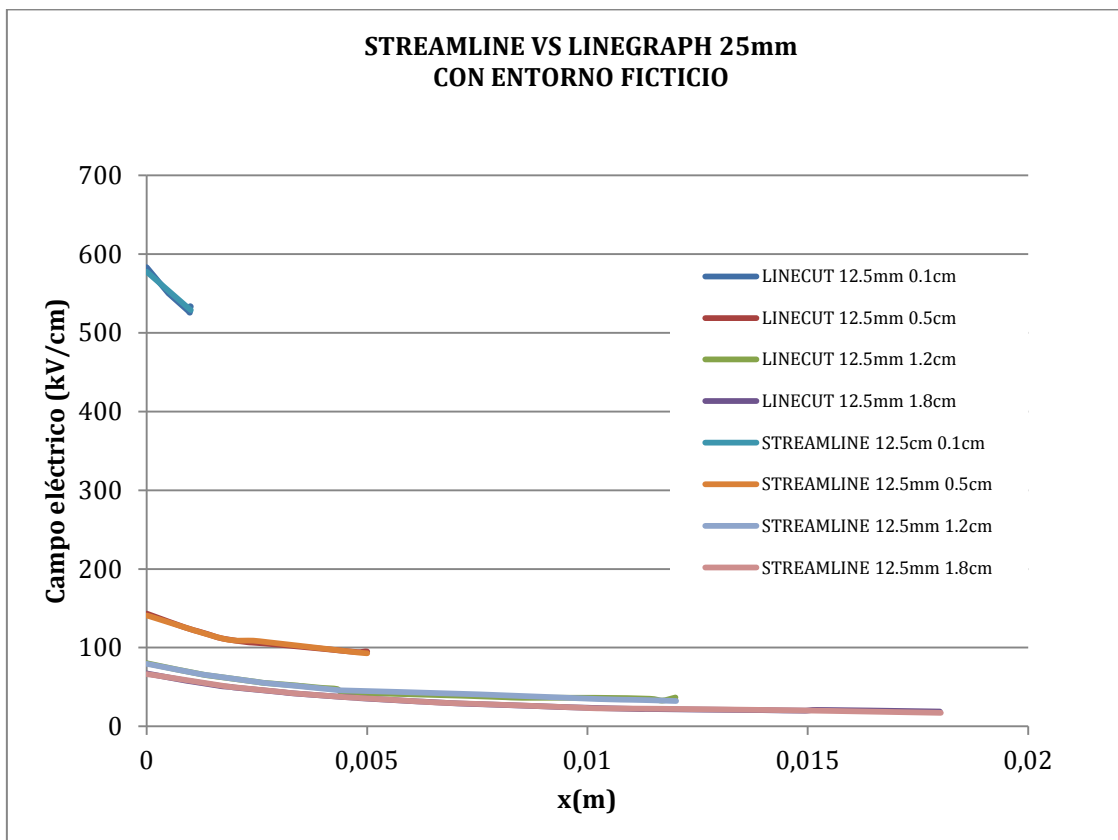


Figura 29: Streamline vs Linegraph  $r=12,5$  mm con entorno ficticio para todas las alturas (esfera-plano ideal)

Como se ha podido observar, las diferencias entre la Streamline y el Linegraph apenas difieren visualmente. Tanto para el caso de las esferas de 8 mm y 25 mm, y las configuraciones de uso de entorno ficticio y sin el uso de los mismos.

La diferencia en la longitud de las curvas representadas, se debe a que la distancia entre la esfera y el plano va en aumento. También se observa que, a menor altura de la esfera, el campo eléctrico tiene una magnitud mayor.

### 8.3.3 Configuración de esfera-plano real

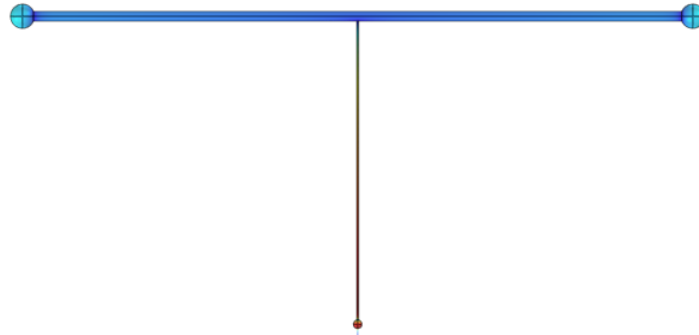


Figura 30: Campo eléctrico sobre el montaje esfera-plano real

En lo que se refiere al campo eléctrico máximo en la superficie de la esfera, en el caso en el que no se ha tenido en consideración el uso de entornos ficticios, se ha utilizado un mallado extremadamente fino (extremely fine), considerando un tamaño máximo de cada elemento de 0,3 m y un tamaño mínimo de 0,001 m. El resultado gráfico de la simulación se puede apreciar en la Figura 31.

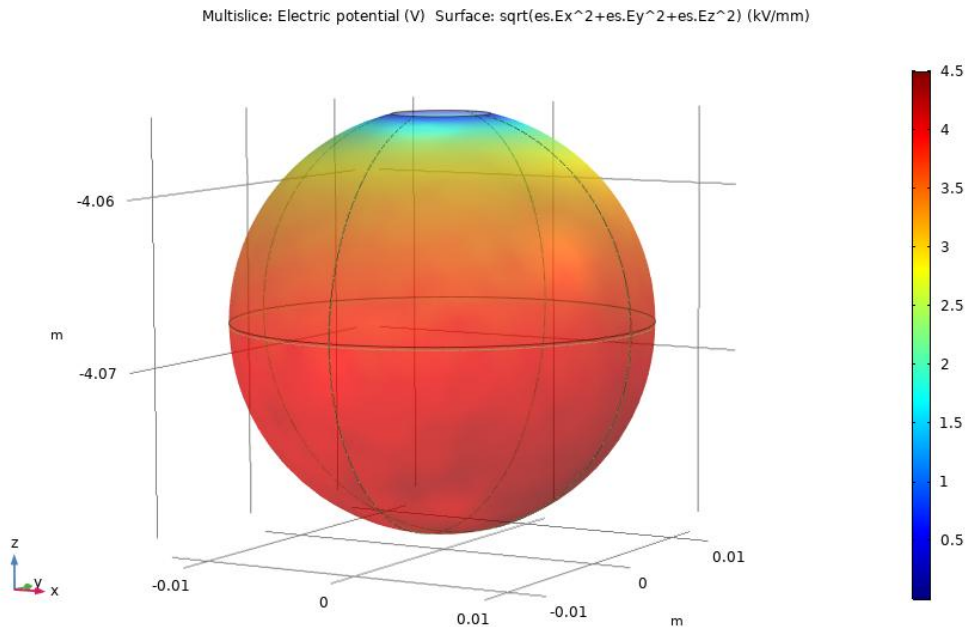


Figura 31: Rango del campo eléctrico sobre la superficie en el montaje real esfera-plano

Los errores máximos y mínimos de los valores obtenidos respecto de los valores que se obtuvieron en el artículo [6] en el caso sin entornos ficticios, vienen representados en la Tabla 10.

	ERROR DEL VALOR MÁXIMO		ERROR DOMAIN POINT PROBE	
	Max	Min	Max	Min
ESFERA 8mm	3,3%	0,02%	8,0%	3,7%
ESFERA 25mm	7,0%	1,9%	3,6%	0,2%

Tabla 10: Errores máximos y mínimos respecto del artículo [6], sin el uso de entornos ficticios

En conclusión, aunque haya habido mayores o menores errores dependiendo de la tensión aplicada, se han podido validar los resultados logrados en relación a los obtenidos en el artículo [6].

En lo que se refiere a la utilización de entornos ficticios, se han utilizado diferentes mallados para el caso de la esfera pequeña de 8mm de diámetro, puesto que, al ser una geometría más pequeña, se tiene la necesidad de refinar el mallado para conseguir definir el entorno de una mejor manera. Por lo tanto, para el caso de la esfera de 25 mm diámetro, se ha utilizado un mallado extrafino predefinido por la herramienta para el mallado del entorno exterior, un mallado extremadamente fino (0,3 m de tamaño máximo y 0,003 m de tamaño mínimo de cada elemento) para el entorno ficticio y un mallado extremadamente fino para la esfera y el conjunto (0.3 m de tamaño máximo y 0,001 m de tamaño mínimo de cada elemento). Por el contrario, para la esfera de 8 mm de diámetro se ha utilizado un mallado normal para el entorno exterior predefinido por la herramienta, un mallado extremadamente fino (0,05 m de tamaño máximo y 0,005 m de tamaño mínimo de cada elemento) para el entorno ficticio y un mallado extremadamente fino para la esfera y el conjunto (0,001 m de tamaño máximo y 0,0001 m de tamaño mínimo de cada elemento).

En lo que se refiere a lo errores máximos y mínimos obtenidos en el caso de entornos ficticios, vienen representados en la Tabla 11.

	ERROR VALOR MÁXIMO		ERROR DOMAIN POINT PROBE	
	Max	Min	Max	Min
ESFERA 8mm	4,49%	0,18%	5,99%	3,44%
ESFERA 25mm	15,40%	4,40%	8,00%	0,81%

Tabla 11: Errores máximos y mínimos respecto del artículo [6], con el uso de entornos ficticios

Por lo que, según los resultados obtenidos, se dan mejores valores de campo eléctrico en la superficie sin el uso de entornos ficticios que con el uso de los mismos.

Por otro lado, en lo que se refiere al campo eléctrico en las líneas de campo, las siguientes figuras (Figura 32, Figura 33, Figura 34, Figura 35) muestran los resultados



obtenidos. En ellas se puede apreciar como varía en campo eléctrico a tensión continua positiva y negativa y diferentes alturas de la esfera.

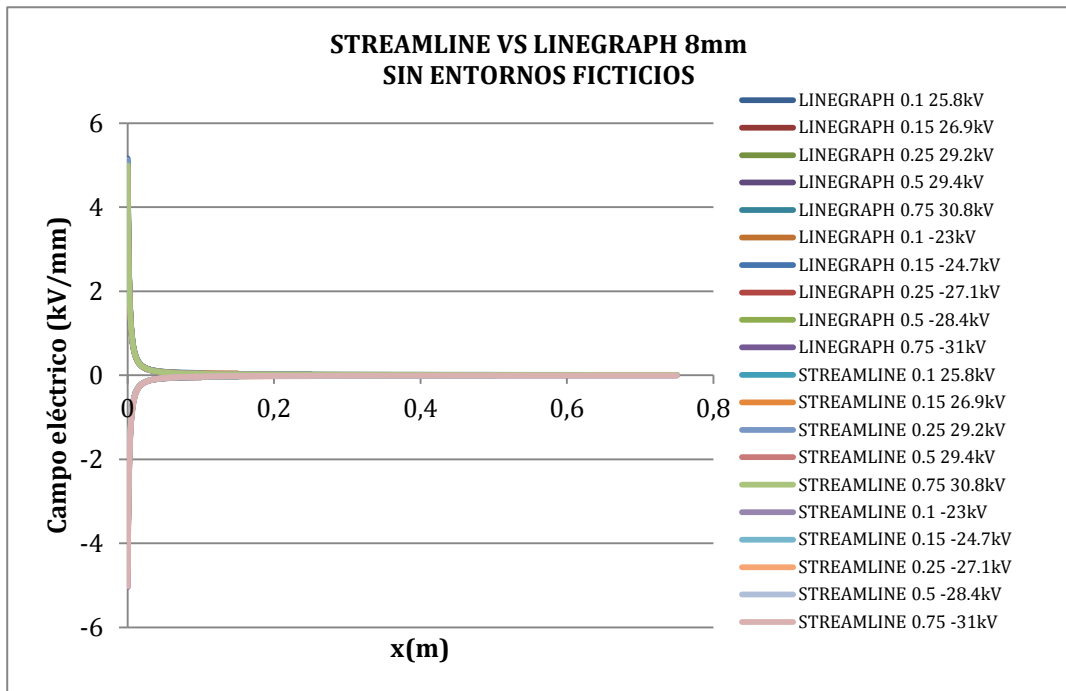


Figura 32: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas sin entornos ficticios, configuración esfera-plano real  $r=4$  mm

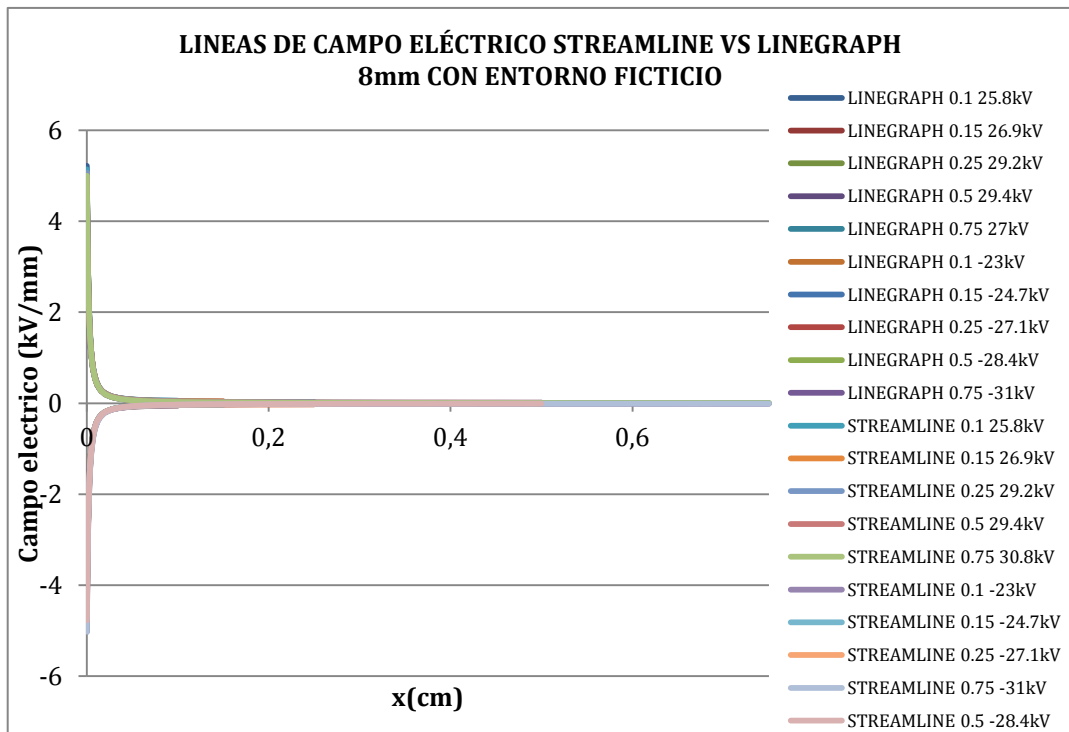


Figura 33: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas con entornos ficticios, configuración esfera-plano real  $r=4$  mm

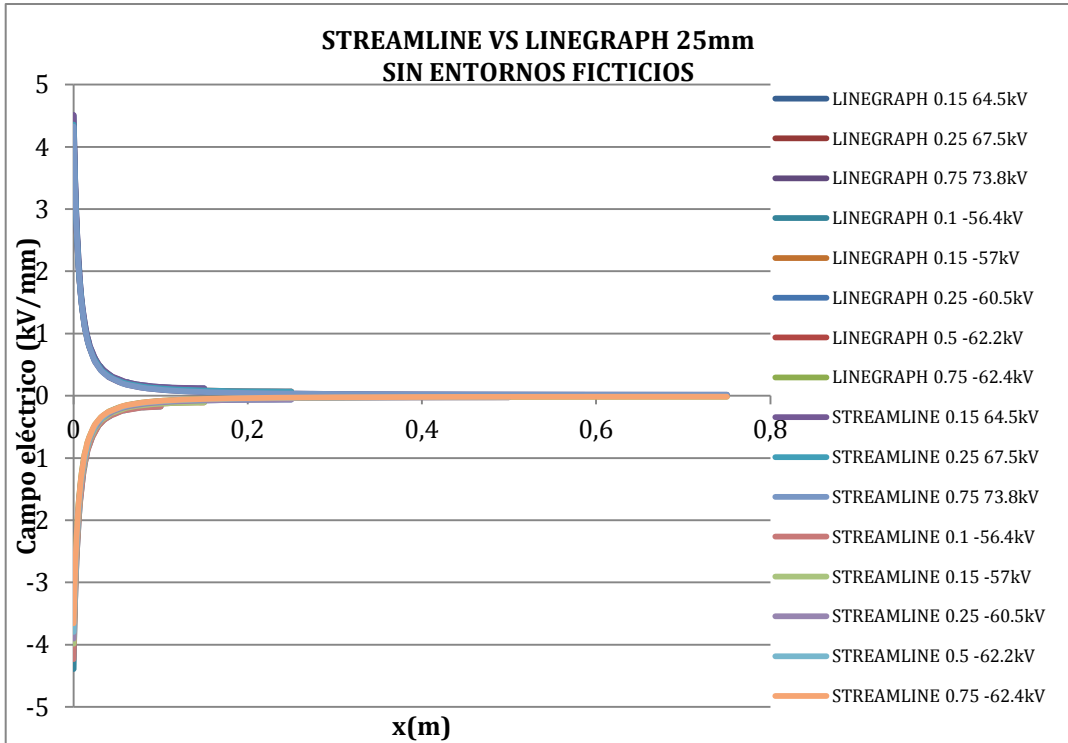


Figura 34: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas sin entornos ficticios, configuración esfera-plano real  $r=12,5$  mm

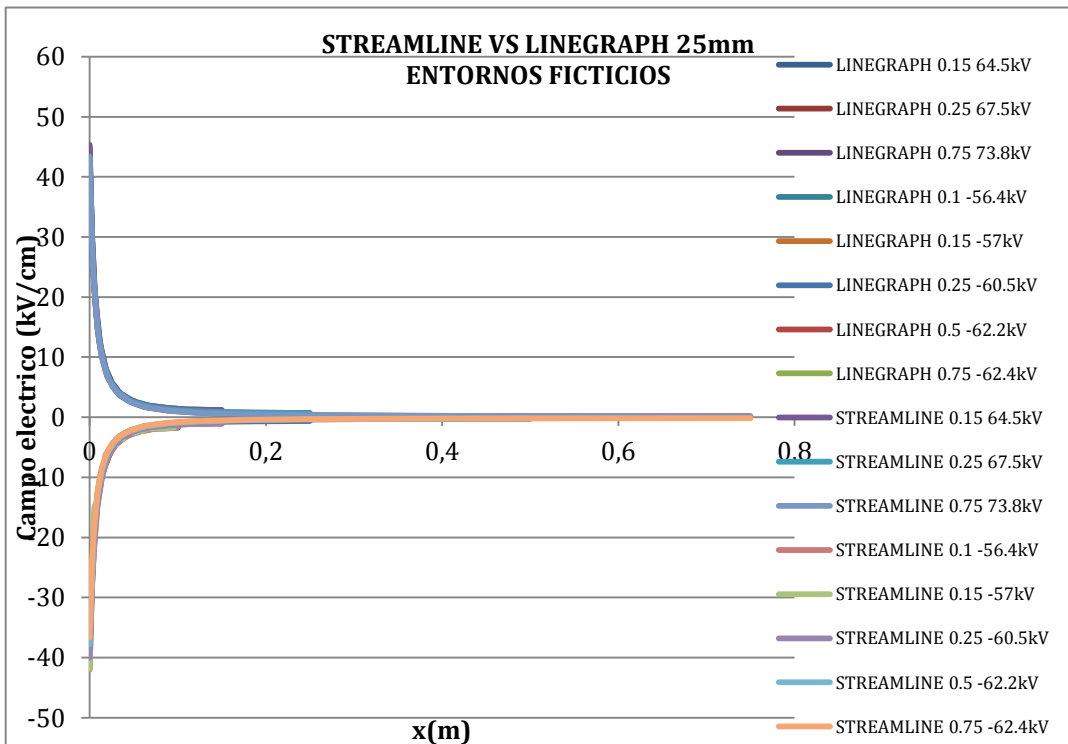


Figura 35: Streamline vs Linegraph para tensiones positivas y negativas con entornos ficticios, configuración esfera-plano real  $r=12,5$  mm

La tendencia de todas las líneas de campo converge de manera tal visual, que no se ha podido apreciar un error significativo entre la “Streamline” y el “Linegraph”, tanto para el caso con entornos ficticios y sin ellos.

El error estimado en base a la ecuación (19) se aprecian en las siguientes dos tablas (Tabla 12 y Tabla 13). Esta expresión se ha basado en un criterio cuantitativo para evaluar más allá del aspecto visual las líneas del campo eléctrico a lo largo de las líneas presentadas. Sin embargo, no se puede inferir que sea una desviación hacia un valor real, puesto que carece de modelo teórico o experimental para su comparación.

ERROR x 10 <sup>^</sup> (-5) (ESFERA 8mm)		
x(m)	Error Sin Ent. Ficticio	Error con Ent.Ficticio
0,1	13,52238651	12,11197486
0,25	9,376669261	5,367036498
0,75	4,343970123	9,92737041

Tabla 12: Error sin entorno ficticio vs Error con entorno ficticio R= 4mm

ERROR x 10 <sup>^</sup> (-5) (ESFERA25mm)		
x(m)	Error Sin Ent. Ficticio	Error con Ent.Ficticio
0,15	5,684540908	8,3240236
0,25	3,170574882	8,168953508
0,75	2,981760438	13,98382278

Tabla 13: Error sin entorno ficticio vs Error con entorno ficticio R= 12.5mm

## **9. PRESUPUESTO**

A continuación, se realiza una breve explicación del presupuesto necesario para la realización de este TFG, junto con su posterior desglose definiendo cada partida, los conceptos que lo componen y su correspondiente coste (Tabla 18).

### **9.1. HORAS INTERNAS**

En esta partida se incluyen las horas de trabajo realizadas por el equipo que ha desarrollado el TFG. Este equipo se constituye por un Ingeniero Sénior y un Ingeniero Júnior (Tabla 14).

En la tabla asociada se incluyen las horas trabajadas por cada miembro del equipo, el coste horario y el coste total de cada miembro, para sumarlos finalmente en el subtotal correspondiente.

### **9.2. AMORTIZACIONES**

En esta partida se engloba el coste de amortización de los elementos utilizados en el desarrollo del TFG, como son la licencia de uso de la herramienta software COMSOL y el equipo informático empleado (Tabla 15).

Para ello se relaciona el coste que ha supuesto el uso de cada elemento relacionando las horas que han sido utilizados con las que se estima que componen su vida útil.

### **9.3. GASTOS**

En esta partida se contemplan los gastos correspondientes a material de oficina (material fungible, etc.) cuya utilización ha sido necesaria para el desarrollo del TFG (Tabla 16).

## 9.4. TABLAS

HORAS INTERNAS			
Concepto	Horas	€/ hora	
Ingeniero Sénior	25 h	50€/h	1.250 €
Ingeniero Júnior	200 h	25€/h	5.000 €
<b>SUBTOTAL</b>			<b>6.250 €</b>

Tabla 14: Horas Internas

AMORTIZACIONES				
Concepto	Coste	Vida útil (h)	Uso (h)	TOTAL
Ordenador	2.000 €	4800 h	200 h	83,33€
Licencia COMSOL	7.000 €	1600 h	120 h	525 €
Licencia Microsoft Office	450 €	3000 h	40 h	6 €
<b>SUBTOTAL</b>				<b>614,33 €</b>

Tabla 15: Amortizaciones

GASTOS		
Concepto	Coste	TOTAL
Material de oficina	120 €	120 €
<b>SUBTOTAL</b>		<b>120 €</b>

Tabla 16: Gastos

RESUMEN	
HORAS INTERNAS	6.250 €
AMORTIZACIONES	614,33 €
GASTOS	120 €
<b>SUBTOTAL</b>	<b>6.984,33 €</b>

Tabla 17: Subtotal

SUBTOTAL	6.984,33 €
COSTES INDIRECTOS (5%)	349,22 €
<b>TOTAL</b>	<b>7.333,55 €</b>

Tabla 18: Presupuesto total

## 10. CONCLUSIONES

En base a los resultados obtenidos, en el cálculo del campo eléctrico sobre la superficie y las líneas de campo en configuraciones básicas, se ha demostrado que es factible calcularlo en base al método de elementos finitos con gran precisión y tiempo reducido.

En lo que se refiere a la configuración básica de esfera, para obtener un error igual o menor del 5 % respecto a una carga en un entorno libre, en el campo eléctrico calculado en su superficie, se necesita un entorno al menos 16,66 veces más grande que la geometría a estudiar, condicionado a tener una malla fina que defina con precisión la curvatura del objeto.

En la configuración esfera-plano ideal, se obtuvo que en el cálculo del campo eléctrico máximo en su superficie por medio de elementos finitos es bastante similar, con un error máximo de 4,9 % utilizando la herramienta “Max/Min” de COMSOL, al valor obtenido por medio de formulaciones analíticas. Sin embargo, se concluye que la precisión es mejor si se conoce la ubicación teórica del punto máximo, cuyo valor de campo eléctrico se obtuvo por medio de la herramienta “Domain Point Probe”. El mejor valor del error obtenido mediante el mismo es de 0,16 %. La diferencia entre estas dos herramientas de cálculo, se debe a valores puntuales artificiales producto de la calidad de la malla.

De igual manera, se espera que el valor del campo eléctrico en el aire tenga igual o mejor precisión, aunque en este trabajo no se disponía de una formulación analítica para verificarlo.

Los resultados numéricos obtenidos de la configuración esfera plano real, comparados con un estudio previo, concuerdan con una precisión máxima de hasta 0,18 % dependiendo del tipo de herramientas utilizadas en COMSOL, y de la calidad de la malla. Debe considerarse que los estudios previos no revelaban una información detallada acerca de la definición del mallado y las dimensiones del entorno. Por lo que, como método de verificación se debió recurrir a otras herramientas que demostraban que se habían obtenido resultados con buena precisión, tales como la comparación de la línea de campo ideal más corta entre las superficies y la Streamline trazada entre ellas.

En función de los resultados obtenidos, y del método utilizado para calcular el error entre la Streamline y Linegraph se observa que la introducción de un entorno

ficticio para mejorar la calidad de los elementos de la esfera y alrededor de ella no necesariamente produce resultados más óptimos que el mallado natural que realiza COMSOL automáticamente. Se concluye que para buscar el valor óptimo se debe realizar ambas simulaciones, aunque aumenta el tiempo de simulación considerablemente.

## 11. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Michelarakis, M. (2016). Electric field distribution of sphere-plane gaps: A SIMULATION APPROACH (Disertación).
- [2] Franco, A. (s.f.). Ley de Gauss. Recuperado 19 julio, 2019, de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/electrico/gauss/gauss.html>
- [3] Potencial y energía electrostática (GIE)+. (2018, 4 abril). Recuperado 19 julio, 2019, de [http://laplace.us.es/wiki/index.php/Potencial\\_y\\_energ%C3%ADa\\_electrost%C3%A1tica\\_\(GIE\)+](http://laplace.us.es/wiki/index.php/Potencial_y_energ%C3%ADa_electrost%C3%A1tica_(GIE)+)
- [4] Olmo, M., & Nave, R. (s.f.). LaPlace's and Poisson's Equations. Recuperado 19 julio, 2019, de <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/electric/laplace.html>
- [5] Martín, T., & Serrano, A. (s.f.-b). Electrostática. Campo eléctrico y líneas de campo. Recuperado 19 julio, 2019, de [http://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/electro/campo\\_electr.html](http://www2.montes.upm.es/dptos/digfa/cfisica/electro/campo_electr.html)
- [6] Riba, J. R., Morosini, A., & Capelli, F. (2018). Comparative study of AC and positive and negative DC visual corona for sphere-plane gaps in atmospheric air. *Energies*, 11(10), 2671.
- [7] Steinbigler, H., Haller, D., & Wolf, A. (1991). Comparative analysis of methods for computing 2-D and 3-D electric fields. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, 26(3), 529-536.
- [8] ANSYS Inc. (2019, 25 febrero). ANSYS Maxwell. Recuperado 19 julio, 2019, de <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell>
- [9] Opera FEA Simulation Software. (2019, 7 enero). Recuperado 19 julio, 2019, de <https://operafea.com/>
- [10] Donohoe, J. P. (2008). A laboratory experiment to demonstrate Gauss's law for electric fields. *American Journal of Physics*, 76(10), 963-967.
- [11] UNE-61284
- [12] COMSOL. (s.f.). Software para Analisis y simulacion en ingenieria CAE. Recuperado 19 julio, 2019, de <http://www.3dcadportal.com/3d-software/cae/Page-2.html>
- [13] Beasley, M. D. R., Pickles, J. H., Gallet, G., Gregoire, J. P., Morin, M., Beretta, L. & d'Amico, G. (1979, January). Comparative study of three methods for computing electric fields. In *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers* (Vol. 126, No. 1, pp. 126-134). IET Digital Library.
- [14] Bellaschi, P. L., & Teague, W. L. (1934). Impulse and 60 cycle strength of air. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 53(12), 1638-1645.
- [15] Wais, S. I., & Giliyana, D. D. (2013). Sphere-to-plane electrodes configuration of positive and negative plasma corona discharge. *Am. J. Mod. Phys*, 2, 46.
- [16] Carter, G. W., & Loh, S. C. (1959). The calculation of the electric field in a sphere-gap by means of dipolar co-ordinates. *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs*, 106(9), 108-111.



- [17] Shallal, M. A., & Harrison, J. A. (1969, June). Electric field, potential and capacitance of a sphere-plane electrode system. In Proceedings of the Institution of Electrical Engineers (Vol. 116, No. 6, pp. 1115-1118). IET Digital Library.
- [18] UPV-EHU. (s.f.). El método de las imágenes. Recuperado 19 julio, 2019, de [http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo\\_electrico/imagenes/imagenes.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/electromagnet/campo_electrico/imagenes/imagenes.htm)
- [19] Cedeño, M. (2017). MÉTODOS NUMÉRICOS PARA EL CÁLCULO DE CAMPOS ELÉCTRICOS. Recuperado de <https://es.scribd.com/document/367688651/Metodos-numericos-para-el-calculo-de-campos-electricos>

## 12. ANEXOS

### 12.1 ESFERA

En este apartado vienen incluidas todos los resultados obtenidos para los diferentes mallados utilizados en el caso básico de esfera. Es decir, los valores obtenidos para mallados “finer” (A Tabla 1), “extra fine” (A Tabla 2) y “extremely fine” (A Tabla 3).

Diámetro (cm)	Lado cubo (cm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>exp</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
0,8	25	168,15	131,29	138,25	137,50	22,29%	4,52%	-0,55%
1	25	142,11	106,05	111,52	110,00	29,19%	3,59%	-1,38%
0,8	20	168,06	133,43	139,94	137,50	22,23%	2,96%	-1,77%
1	20	139,21	107,71	112,78	110,00	26,55%	2,08%	-2,53%
0,8	15	168,01	134,02	141,08	137,50	22,19%	2,53%	-2,60%
1,5	25	97,15	72,232	76,014	73,33	32,48%	1,50%	-3,66%
0,8	12,5	168,69	135,13	142,57	137,50	22,68%	1,72%	-3,69%
1	15	143,96	108,37	114,27	110,00	30,87%	1,48%	-3,88%
1,5	20	94,626	72,752	76,746	73,33	29,04%	0,79%	-4,65%
1	12,5	144,42	110,12	115,94	110,00	31,29%	-0,11%	-5,40%
2	25	71,369	55,31	58,094	55,00	29,76%	-0,56%	-5,63%
2	20	83,241	55,98	58,862	55,00	51,35%	-1,78%	-7,02%
1,5	15	110,99	74,64	78,483	73,33	51,35%	-1,78%	-7,02%
2,5	25	59,634	45,099	47,283	44,00	35,53%	-2,50%	-7,46%
1,5	12,5	98,54	75,366	80,205	73,33	34,37%	-2,77%	-9,37%
2,5	20	61,836	46,088	48,414	44,00	40,54%	-4,75%	-10,03%
2	15	76,88	58,092	60,896	55,00	39,78%	-5,62%	-10,72%
2	12,5	83,568	59,458	62,655	55,00	51,94%	-8,11%	-13,92%
2,5	15	64,111	48,332	50,582	44,00	45,71%	-9,85%	-14,96%
2,5	12,5	63,23	49,978	52,251	44,00	43,70%	-13,59%	-18,75%

A Tabla 1: del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado grueso (finer)

Diámetro (cm)	Lado cubo (cm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>exp</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
2,5	25	53,751	46,368	47,47	44,00	22,16%	-5,38%	-7,89%
2	25	65,114	56,987	58,50	55,00	18,39%	-3,61%	-6,37%
1,5	25	87,738	73,855	76,59	73,33	19,64%	-0,71%	-4,44%
1	25	127,4	109,39	112,91	110,00	15,82%	0,55%	-2,65%
0,8	25	156,47	135,67	140,05	137,50	13,80%	1,33%	-1,85%
2,5	20	53,717	47,603	48,91	44,00	22,08%	-8,19%	-11,16%
2	20	68,069	57,668	59,65	55,00	23,76%	-4,85%	-8,45%
1,5	20	86,487	75,34	77,75	73,33	17,94%	-2,74%	-6,02%
1	20	125,67	110,56	113,81	110,00	14,25%	-0,51%	-3,46%
0,8	20	159,25	136,74	141,14	137,50	15,82%	0,55%	-2,65%
2,5	15	58,622	49,626	51,00	44,00	33,23%	-12,79%	-15,92%
2	15	69,297	59,684	61,58	55,00	25,99%	-8,52%	-11,97%
1,5	15	89,903	77,066	79,52	73,33	22,60%	-5,09%	-8,44%
1	15	128,37	112,4	115,54	110,00	16,70%	-2,18%	-5,04%
0,8	15	159,66	138,64	142,74	137,50	16,12%	-0,83%	-3,81%
2,5	12,5	57,996	51,652	52,90	44,00	31,81%	-17,39%	-20,23%
2	12,5	70,953	61,547	63,23	55,00	29,01%	-11,90%	-14,97%
1,5	12,5	91,828	78,629	81,08	73,33	25,22%	-7,22%	-10,57%
1	12,5	129,93	113,46	117,12	110,00	18,12%	-3,15%	-6,47%
0,8	12,5	158,49	140,2	144,21	137,50	15,27%	-1,96%	-4,88%

A Tabla 2: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado normal (extra fine)

Diametro (cm)	Lado cubo (cm)	E <sub>max</sub> (kV/cm)	E <sub>min</sub> (kV/cm)	E <sub>avg</sub> (kV/cm)	E <sub>exp</sub> (kV/cm)	Error max	Error min	Error avg
0,8	25	147,84	138,56	140,78	137,50	7,52%	-0,77%	-2,39%
0,8	20	150,89	139,51	141,82	137,50	9,74%	-1,46%	-3,14%
1	25	119,4	111,73	113,48	110,00	8,55%	-1,57%	-3,16%
1	20	121,16	112,62	114,50	110,00	10,15%	-2,38%	-4,09%
0,8	15	150,98	141,00	143,57	137,50	9,80%	-2,55%	-4,41%
1,5	25	81,065	75,79	77,02	73,33	10,54%	-3,35%	-5,03%
0,8	12,5	153,66	142,81	144,96	137,50	11,75%	-3,86%	-5,43%
1	15	122,63	114,27	116,28	110,00	11,48%	-3,88%	-5,71%
1,5	20	82,745	76,84	78,13	73,33	12,83%	-4,78%	-6,55%
2	25	62,324	57,95	58,87	55,00	13,32%	-5,36%	-7,03%
1	12,5	124,65	115,89	117,73	110,00	13,32%	-5,35%	-7,03%
2	20	63,314	58,93	60,01	55,00	15,12%	-7,15%	-9,10%
2,5	25	50,769	47,23	48,01	44,00	15,38%	-7,35%	-9,11%
1,5	15	84,615	78,72	80,01	73,33	15,38%	-7,35%	-9,11%
1,5	12,5	86,477	80,30	81,54	73,33	17,92%	-9,50%	-11,19%
2,5	20	51,798	48,44	49,17	44,00	17,72%	-10,09%	-11,76%
2	15	64,755	61,00	61,96	55,00	17,74%	-10,91%	-12,65%
2	12,5	67,625	62,81	63,71	55,00	22,95%	-14,20%	-15,84%
2,5	15	54,744	50,62	51,34	44,00	24,42%	-15,04%	-16,67%
2,5	12,5	56,068	52,60	53,23	44,00	27,43%	-19,55%	-20,97%

A Tabla 3: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio, mallado fino (extremely fine)

## 12.2 ESFERA-PLANO IDEAL

En este apartado vienen incluidos todos los resultados obtenidos del campo eléctrico máximo en la superficie (mediante herramienta “Max/Min”), en el punto teórico crítico (“Domain Point Probe”) y el obtenido mediante la formulación teórica de Michelerakis (13), así como el error de los mismos para las diferentes alturas de las esferas utilizadas en la configuración esfera-plano ideal. Los valores obtenidos sin entornos ficticios (A Tabla 4) y los obtenidos mediante el uso de entornos ficticios (A Tabla 5).

Radio esfera (cm)	Altura (cm)	E Max (kV/cm)	E Critico (Kv/cm)	Emax Michelerakis	Error E Max	Error E Critico
0,40	0,10	651,02	645,40	646,46	-0,70%	-0,16%
1,25	0,50	143,04	138,38	141,70	-0,94%	-2,34%
1,25	0,10	585,64	582,23	579,85	-0,99%	0,41%
1,25	1,20	81,31	79,36	80,04	-1,56%	-0,85%
1,25	1,80	67,58	65,58	66,32	-1,86%	-1,11%
0,40	0,50	229,81	216,13	220,00	-4,27%	-1,76%
0,40	1,80	163,81	155,35	155,77	-4,91%	-0,27%
0,40	1,20	174,85	166,27	166,72	-4,65%	-0,27%

A Tabla 4: Valores del campo eléctrico sin entorno ficticio. R=4mm; 12,5mm H=0,1cm;0,5cm;1,2cm;1,8cm

Radio esfera (cm)	Altura (cm)	E Max (kV/cm)	E Critico (kV/cm)	Emax Michelerakis (kV/cm)	Error E Max	Error E Critico
0,4	0,1	638,91	620,92	646,46	1,18%	3,95%
0,4	0,5	224,42	219,60	220,00	-1,97%	0,18%
0,4	1,2	172,37	169,77	166,72	-3,28%	-1,83%
0,4	1,8	162,11	155,28	155,77	-3,91%	0,32%
1,25	0,1	583,39	583,38	579,85	-0,61%	-0,61%
1,25	0,5	143,37	143,35	141,70	-1,17%	-1,17%
1,25	1,2	81,21	80,11	80,04	-1,44%	-0,09%
1,25	1,8	68,91	67,24	66,32	-3,76%	-1,39%

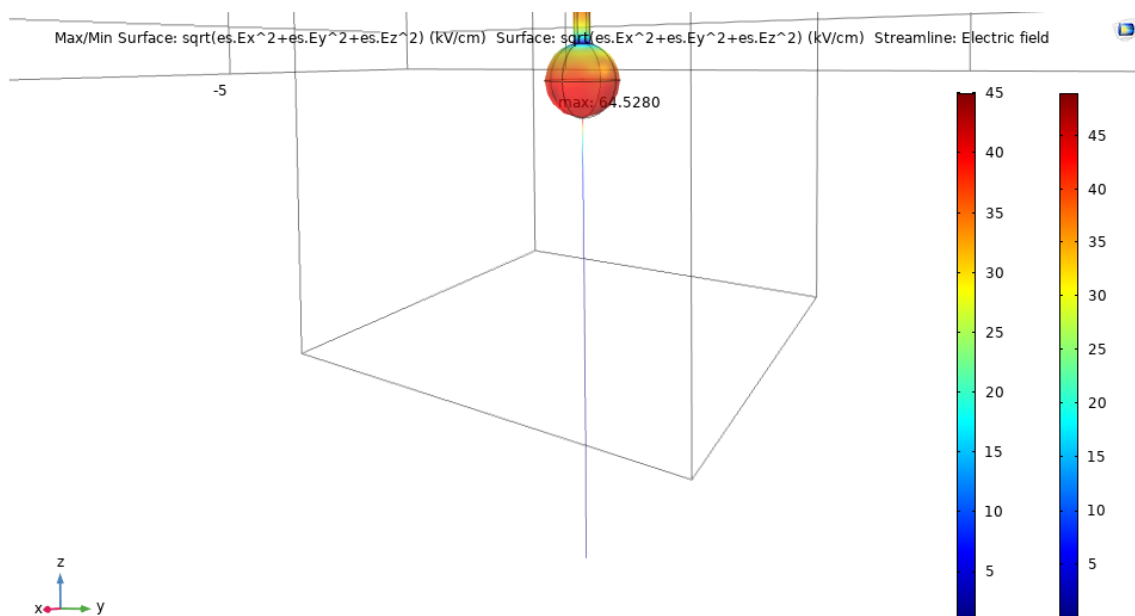
A Tabla 5: Valores del campo eléctrico con entorno ficticio. R=4mm;12.5mm H=0.1cm;0.5cm;1.2cm;1.8cm

```
1 % Inicialización de contadores y acumuladores
2 i=1;
3 j=2;
4 x(1,:)=streamlinedoblecaja25(1,:);
5
6 % Se hace todo el barrido en el archivo de entrada de un tamaño n-1 y se
7 % acumula cada vez que cambia de streamline
8 while i<51164
9     if streamlinedoblecaja25(i,4)~= streamlinedoblecaja25(i+1,4)
10        x(j,:)=streamlinedoblecaja25(i+1,:);
11        j=j+1;
12    end
13    i=i+1;
14 end
```

A Figura 1: Código MATLAB para filtrar Streamlines

## 12.3 ESFERA-PLANO REAL

En este último apartado vienen incluidos todos los resultados obtenidos del campo eléctrico máximo en la superficie (mediante herramienta “Max/Min”) y en el punto teórico (“Domain Point Probe”), así como el error de los mismos respecto de los valores que obtuvieron en el artículo [6] para las diferentes alturas de las esferas en la configuración esfera-plano real. Los valores obtenidos sin entornos ficticios (A Tabla 6) y los obtenidos mediante el uso de entornos ficticios (A Tabla 7).



A Figura 2: Streamline Esfera-Plano con entorno ficticio

Diámetro esfera (mm)	Voltaje Aplicado (kV)	Ec max (kV/mm)	Valor artículo	Error E max	Ec critico (kV/mm)	Valor artículo	Error Ec Critico
25mm	64,5	4,6826	4,5	4,06%	4,509	4,5	0,20%
	67,5	4,5246	4,2	7,73%	4,3512	4,2	3,60%
	70,3	4,4637	4,3	3,81%	4,3428	4,3	1,00%
	73,8	4,4232	4,3	2,87%	4,347	4,3	1,09%
	-56,4	-4,3903	-4,2	4,53%	-4,195	-4,2	-0,12%
	-57	-4,1381	-4	3,45%	-3,9847	-4	-0,38%
	-60,5	-4,0554	-3,8	6,72%	-3,9	-3,8	2,63%
	-62,2	-3,9494	-3,8	3,93%	-3,8424	-3,8	1,12%
	-62,4	-3,7737	-3,7	1,99%	-3,6755	-3,7	-0,66%
8mm	25,8	5,3748	5,5	-2,28%	5,1613	5,5	-6,16%
	26,9	5,4022	5,3	1,93%	5,0018	5,3	-5,63%
	29,2	5,3452	5,3	0,85%	5,1011	5,3	-3,75%
	29,4	5,1989	5,2	-0,02%	4,9234	5,2	-5,32%
	30,8	5,2842	5,2	1,62%	5,0071	5,2	-3,71%
	-23	-4,7915	-4,9	-2,21%	-4,6011	-4,9	-6,10%
	-24,7	-4,9604	-4,8	3,34%	-4,5927	-4,8	-4,32%
	-27,1	-4,9608	-4,9	1,24%	-4,7342	-4,9	-3,38%
	-28,4	-4,8452	-5	-3,10%	-4,5884	-5	-8,23%
	-31	-5,3185	-5,3	0,35%	-5,0397	-5,3	-4,91%

A Tabla 6: Valores máximos del campo eléctrico vs artículo, sin entornos ficticios



Diametro esfera (mm)	Voltaje Aplicado (kV)	Ec max(kV/mm)	Valor artículo	Error E max	Ec critico (kV/mm)	Valor artículo	Error Ec Critico
25mm	64,50	4,79	4,50	6,44%	4,64	4,50	3,07%
	67,50	4,85	4,20	15,47%	4,55	4,20	8,43%
	70,30	4,74	4,30	10,12%	4,25	4,30	-1,17%
	73,80	4,57	4,30	6,25%	4,41	4,30	2,59%
	-56,40	-4,59	-4,20	9,20%	-4,25	-4,20	1,29%
	-57,00	-4,23	-4,00	5,82%	-4,10	-4,00	2,48%
	-60,50	-4,35	-3,80	14,39%	-4,08	-3,80	7,42%
	-62,20	-4,19	-3,80	10,25%	-3,76	-3,80	-1,05%
	-62,40	-3,86	-3,70	4,41%	-3,73	-3,70	0,81%
8mm	25,80	5,36	5,50	-2,61%	5,17	5,50	-5,99%
	26,90	5,31	5,30	0,18%	5,05	5,30	-4,76%
	29,20	5,52	5,30	4,09%	5,04	5,30	-4,92%
	29,40	5,22	5,20	0,46%	4,94	5,20	-4,91%
	30,80	5,23	5,20	0,67%	4,99	5,20	-3,97%
	-23,00	-4,78	-4,90	-2,54%	-4,61	-4,90	-5,93%
	-24,70	-4,88	-4,80	1,56%	-4,64	-4,80	-3,44%
	-27,10	-5,12	-4,90	4,49%	-4,68	-4,90	-4,56%
	-28,40	-5,05	-5,00	0,92%	-4,78	-5,00	-4,47%
	-31,00	-5,27	-5,30	-0,59%	-5,03	-5,30	-5,17%

A Tabla 7: Valores máximos del campo eléctrico vs artículo, con entornos ficticios