Kiroletako Matematikak

Carlos Gorria

Matematika Aplikatua eta Estatistika eta Ikerkuntza Operatiboa Saila
Euskal Herriko Unibertsitatea / Zientzi Fakultatea
644 P.K., 48080 BILBO
Posta elektronikoa: mepgococ@lg.ehu.es

Laburpena: Eguneroko bizitzaren zenbait arlotan Matematikak aplika daitezke, eta nola ez, kirol-munduan ere bai. Nabaria denez, kirola ariketa fisikoan oinarrituta dago eta beronen prozesua teorikoki azter daiteke. Kirol bakoitzaren bilakaeran parte hartzen duten baldintzak kontuan hartuz, eredu matematiko baten barruan sar daitezke. Ondorioz, kirolariaren teknika hobetuz, bere indarretik etekin handiagoa aterako du. Gezurra badirudi ere, etekin altuko zentro batzuetan mota honetako ikerketak aplikatzen ari dira kirolariekin. M. Stewart Townend-ek «Mathematics in sport» liburuan kirol ugariri buruz egindako azterketa matematikoak argitaratu zituen oso era ulergarrian. Lan honetatik kirol nagusienetako ondoko hiru adibideak hautatu ditugu azaltzeko: lasterketak, jaurtiketak eta jauziak.

1. LASTERKETAREN MEKANIKA

Helburua: Tarte jakin bat ahal den denbora laburrenean ibili.

Abiadura memperatzen duten eragileak: Urrats-luzera eta urrats-maiztasuna.

1.1. Zenbait berezitasun

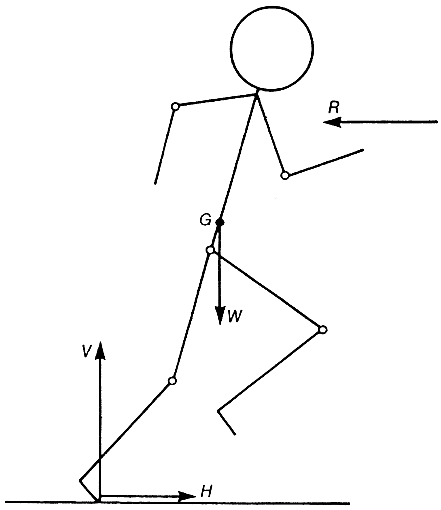
a) Korrikalarien altueraren eta beraien urratsen luzeraren artean proportzioa dagoela estatistikoki frogatu da:

$$\textit{Urrats-luzera} \quad 1.14 \cdot \textit{korrikalariaren altuera}.$$

b) Lasterketa azkarretako korrikalariek (100, 200, 400 m) beren abiadura maximoko jarrera hartzen saiatzen dira, horretarako laguntzaile ezin hobeak dira takoak. Bi takoren arteko distantzia motza (0.3 m), erdikoa (0.4 – 0.5 m) edo luzea (0.6 – 0.7 m) izan daiteke. Motza erabiliz gero, beste aukerekin baino azkarrago aterako ginateke, baina jarrera egokia hartzeko denbora luzeagoa beharko genuke; beraz, lehenengo lau segundoetan (azelerazio-denbora) erdiko teknikarekin distantzia luzeagoa ibiliko dugu. Lau segundo horien ondoren, korrikalariak bere abiadura maximoa hartu du eta adierazitako hiru hasierako kokaeretatik erdikoa da eraginkorrena.

c) 200 eta 400 metroko lasteketetan beste eragile bat kontuan hartu behar dugu, hots, kurbak. Gorputzak, biratzean, abiadura angeluarra eta honekin batera indar zentrifugoa sortzen ditu. Indar hau orekatzeko lurrak indar zentripetoa eragiten du eta berau aplikatzeko oinaren igurtziaren eragina behar dugu. Pista estalietan (kurba itxiak) erradioa txikia da eta ondorioz, abiadura angeluarra eta indar zentrifugoa handiagoak dira, eta orduan, alboko peraltea behar dugu.

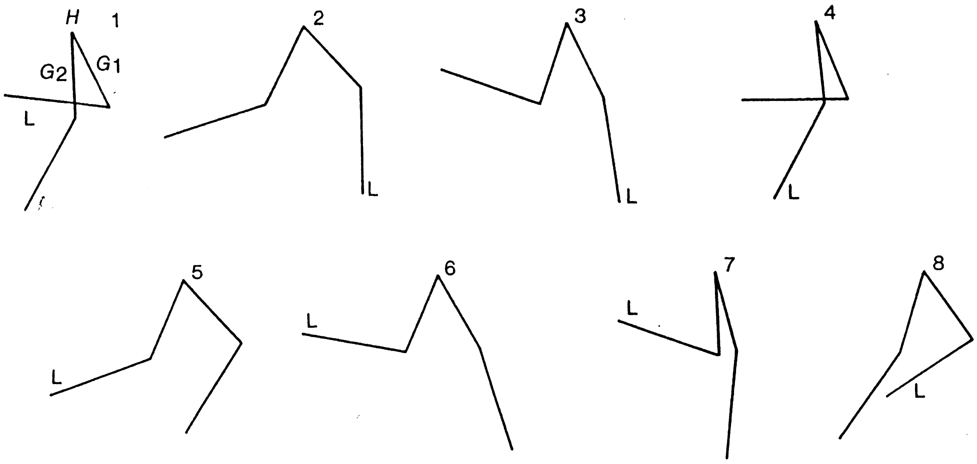
d) Lasterketaren hasieran gorputza horizontalki dago eta zutik jarri arte altxatu behar da; horregatik, hasieran azelerazioak osagai horizontala eta bertikala ditu eta ondoren, soilik horizontala. Baina gorputza ez da zeharo zutik kokatzen haizearen aurkako indarra ere orekatu behar duelako; horregatik, pixka bat aurrerantz mugitu behar du bere burua. Hortaz, gorputzak zutik dagoenean penduluaren portaera du.



e) Urratsa ziklikoa da eta hiru zatitan betetzen da. Lehenengoa euslearena da, lurra zapaltzen denetik masa-erdigunea oinaren gainean egon arte. Bigarrena bulkada da, aurrekoaren amaieratik oina lurretik altxatu arte. Hirugarrena itzuliarena da, airean dagoen tartea.

Lehenengoan ez dugu indarrik egiten oreka ez galtzeko; bigarrenean abiada hartzen da, eta hirugarrenean gorputzak proiektil baten ibilbide parabolikoa hartzen du.

f) Batez ere abiadura-lasterketetan hankaren biraketek aldakaren inguruan inertzia-momentua sortzen dute, eta berau orekatzeko, hurrenez hurren hanka bat atzeratzen den bitartean bestea aurreratzen da eta besoek ere beraien mugimenduarekin oreka mantentzen dute. Hanka, atzetik aurrerako bidaian, makurtuta doa eta azkenean, luzatu egiten da, zenbat eta erradio motzagoa, orduan eta momentu angeluar txikiagoa sortzen duelako ($P = L \cdot \quad$).



1.2. **Eredu matematikoa**

Formula hau betetzen da,

$$\text{Distantzia} = \int_0^T v(t)dt,$$

v abiadura izanik. Haizearen marruskadura-indarra eta abiadura proportzionalak dira, $R = K \cdot v(t)$, eta indarraren ekuazioa erabiliz,

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot a = m \cdot F(t) - m \cdot R,$$

eta hemendik,

$$\frac{dv}{dt} = F(t) - Kv(t),$$

non $v(0) = 0$ den, eta ekuazio diferentzial bihurtu da.

Korrikalariak, gorputzaren arabera, eragin dezakeen indar maximoa F^* da, eta ondorioz, momentu berezi batean egiten duen indarrak $F(t) \quad F^*$ betetzen du.

Odolak muskuluetara daraman oxigenoa masa-unitateko $E(t)$ da eta

$$\frac{dE}{dt} = S - F \cdot v \quad (E(t) \geqslant 0)$$

bete behar du, non S atsedenaldi-egoeran muskuluek jaso beharko luketen oxigeno-kopurua den.

Lasterketa irabazteko T minimizatu behar da aurreko baldintzak kontuan hartuz.

Lasterketa motzetan oxigenoaren gastua txikia delarik, eremua ondokoa da:

$$\frac{dv}{dt} = F^* - Kv(t);$$

ekuazio diferentziala integratuz,

$$\int \frac{dv}{F^* / K - v(t)} = \int K\,dt,$$

lortzen da, edo

$$-\log\left(\frac{F^*}{K} - v(t)\right) = Kt + Q,$$

eta hemendik

$$v(t) = \frac{F^*}{K}(1 - e^{-Kt}).$$

Distantziarako

$$D = \frac{F^*}{K}\int_0^T (1 - e^{-Kt})\,dt = \frac{F^*}{K}\left(T - \frac{1}{K}(1 - e^{-KT})\right)$$

dugu.

Lasterketa luzeetan oxigenoaren gastua ere kontuan hartu beharko dugu eta, etekin handiena lortzeko, helmugara arnasarik gabe iritsi behar da, hau da, $E(T) = 0$. Orduan,

$$\int_{E(0)}^{0} dE = \int_0^T (S - Fv)\,dt$$

eta hemendik,

$$0 - E(0) = \int_0^T (S - Kv^2)\,dt = (S - Kv^2)T,$$

eta

$$v^2 = \frac{1}{K}\left(S + \frac{E(0)}{T}\right);$$

hau 0 eta T artean integratuz distantzia lortuko dugu:

$$D^2 = T^2\,\frac{S}{K} + T\,\frac{E(0)}{K}.$$

Baldin kirolariaren ezaugarri fisikoak ezagutzeko indar-proba bat egiten bazaio eta oxigenoaren galeraren parametroak eredu honen barruan sartzen badira, lasterketa-taktika egokia presta daiteke emaitzarik hoberena lortzeko.

2. JAURTIKETAK

Sail honetako kiroletan funtsezkoa da jaurtiketa parabolikoaren teoria.

2.1. Pisu-jaurtiketa

Lurraren mailatik jaurtiketa batek egingo duen ibilbidea (kanoiaren bala) jaurtiketa parabolikoaren araberakoa izango da:

$$x = v\,t\cos\quad,$$
$$y = v\,t\sin\quad - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2,$$

non v hasierako abiadura,   jaurtiketaren angelua lurrarekiko, g grabitatearen indarra, eta t jaurtiketaren iraupena diren. Lurrera heltzean $y = 0$ izango da, hots,

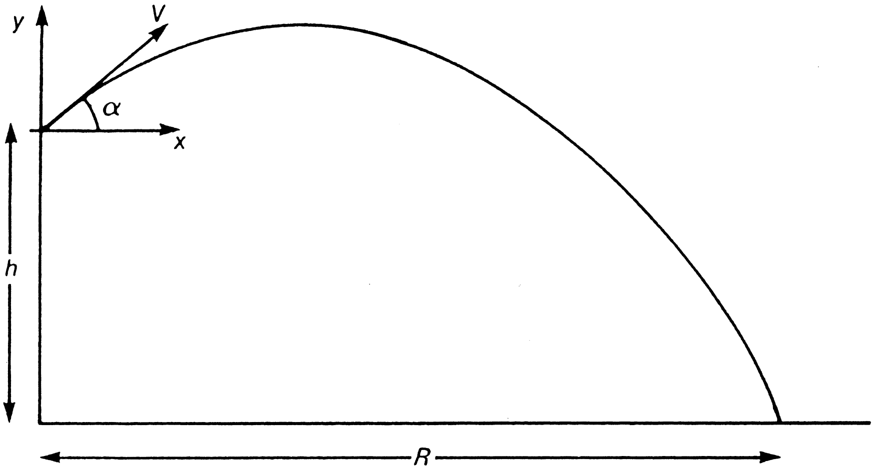
$$t = \frac{2v\sin\quad}{g};$$

beraz, betetako distantzia

$$x(t) = \frac{2v^2\sin\quad\cos\quad}{g}$$

izango da.

Baldin adierazpen hau deribatzen badugu eta 0-rekin berdintzen badugu, ondoriozta dezakegu distantzia maximoa lortzeko angelurik egokiena = /4 rad = 45° dela.



Baina jaurtitzaileak ez du bola lurretik botatzen, bere besotik baizik, eta orduan, hasierako altuera adierazgarria da jaurtiketaren distantziarekin konparatuta. Ondorioz, erabili behar dugun eredua ez da jaurtiketa paraboliko arruntarena. Orain ekuazio diferentzialek parte hartuko dute, eta angelu egokiaren hautaketa kirolariaren altuera eta bolaren abiaduraren araberakoa izango da. Jaurtiketa h altueratik egiten bada, ekuazio-sistema aldatu egin behar da,

$$x = v\,t \cos \quad ,$$
$$y = h + v\,t \sin \quad - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2,$$

eta oraingoan, distantzia

$$x(t) = \frac{v^2 \cos}{g} \quad \sin \quad + \sqrt{\sin^2 \quad + \frac{2gh}{v^2}}$$

izango da. Ohiko balioak v 10 – 14m/s, 40 – 45°, h 1.8 – 2.5 m dira. Distantziaren balio maximoa jakiteko, aurreko adierazpena deribatu eta 0-rekin berdindu beharko genuke; horrela,

$$\frac{\partial x}{\partial} = \frac{v^2}{g} \quad -\sin^2 \quad -\sin \quad \sqrt{\sin^2 \quad + \frac{2gh}{v^2}} + \cos^2$$
$$+ \frac{\sin \quad \cos^2}{\sqrt{\sin^2 \quad + \frac{2gh}{v^2}}} \quad = 0$$

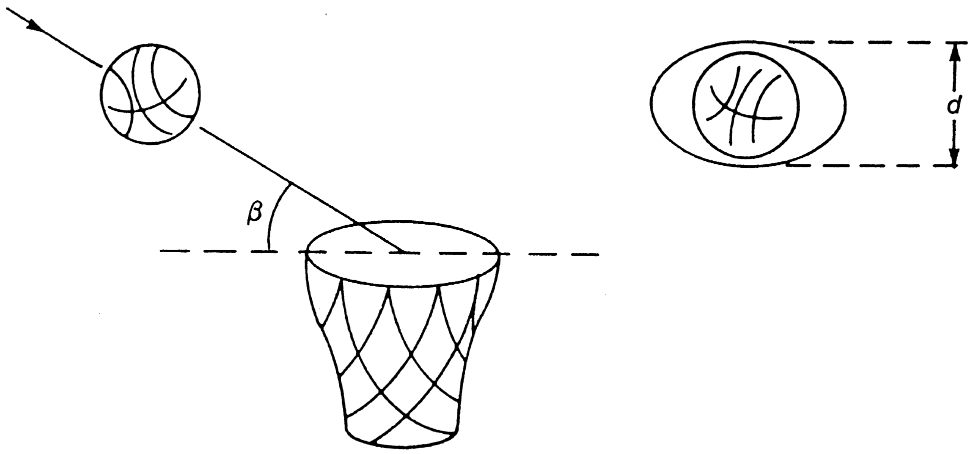
izango da eta -ren funtziopeko ekuazio hau zenbakizko kalkulua erabiliz bakarrik aska daiteke, v eta h parametro ezberdinetarako.

Baldin sistemari haizearen marruskadura-indarra gehitzen badiogu ($0.2\, d^2\, v^2$, d bolaren diametroa izanik), orduan x eta y aldagaiekin ekuazio diferentzialeko sistema izango genuke eta beronen ebazpena askoz zailagoa litzateke.

Etekin altuko zentroetan pisu-jaurtitzaileei besoetan sentsoreak jartzen zaizkie bolaren ibilbideari ordenagailuz jarraitzeko eta kirolariaren teknika zuzentzeko.

2.2. **Saskibaloiko baloiaren jaurtiketa**

Saskibaloiaren jaurtiketetan aurreko kirolaren alderantzizko kasua gertatzen da, baloia saskiaren mailaren azpitik botatzen delako.



Baloiak 24.6 cm-ko diametroa du eta saskiak 45 cm-koa. Saskia baloia baino askoz zabalagoa bada ere, ez da erraza barruan sartzea, baloiak ez baitu saskiaren planoarekiko ibilbide perpendikularra jarraitzen. Baldin baloiaren ibilbide-kurbaren sarrera-angelua β bada, saskiaren itxura elipse bat izango da angelu horretatik ikusita eta elipse honen ardatz txikiena $45 \cdot \sin \beta$ cm-koa izango da. Beraz, baloia ez da sartuko baldin sarrera-angelua $\beta < 33^\circ\, 8'$ bada.

Demagun jaurtiketa librea 2.15 m-ko altueratik egiten dela eta saskia 3.05 m-an dagoela kokatuta. Haizearen eragina alde batera utziz, irteera-angeluaren menpeko ibilbidearen ekuazioak ondokoak izango dira:

$$x_1 = v\, t \cos \quad ,$$

$$y_1 = v\, t \sin \quad - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2 .$$

Bietan t berdinduz,

$$y_1 = x_1 \tan \quad - \frac{g x_1^2}{2v^2} \sec^2$$

dugu eta $\sec^2 \quad = 1 + \tan^2$ erabiliz, aska daiteke,

$$\tan \quad = \frac{v^2}{g x_1} \quad 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2g}{v^2} \quad y_1 + \frac{g x_1^2}{2v^2}} \quad .$$

Baloia saskian sartzerakoan, angeluak ondoko berdintza beteko du:

$$- \tan \beta = \frac{dy}{dx} = \tan \quad - \frac{gx}{v^2} \sec^2 \quad .$$

Kasu errealean jaurtiketa librerako marra saskitik 4.6 m-ra dago eta baloiak 0.9 m igo beharko du. Baloiaren ohiko irteera-abiadura 8 m/s izan daiteke. Datu hauek tan -ren ekuazioan sartu ondoren, -ren bi balio emango dizkigute, $_1$ = 64º 28' eta $_1$ = 36º 36'. Balio hauek tan β-ren ekuazioan ordeztuz, β-rako emaitzak emango dizkigute: β = 59º 34' eta β = 19º 21'. Bi emaitza horietatik soilik lehenengoa amaituko da saskiaren barruan.

Baloia igotzen den altuerarik handiena kalkulatuz, polikiroldegiaren argiak zein altuera minimoan kokatu behar diren jakingo dugu. Jaurtiketaren altuera maximoa aurkitzeko y_1-en adierazpena t-rekiko deribatuz eta 0-rekin berdinduz,

$$T = \frac{v \sin}{g} \qquad \text{eta} \qquad y(T) = \frac{v^2 \sin^2}{2g}$$

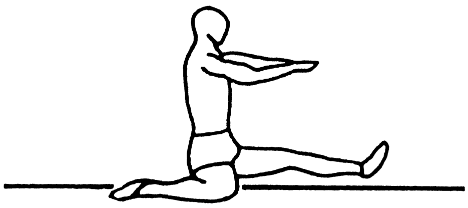
lortzen dira; h = 2.15 m, v = 8 m/s eta = 4º 28' datuak erabiliz, altuera $h + y(T)$ = 4.81 m ateratzen da. Erne ibili!

3. **JAUZIAK**

Jauzietan masa-erdigunearekin jokatu beharko dugu.

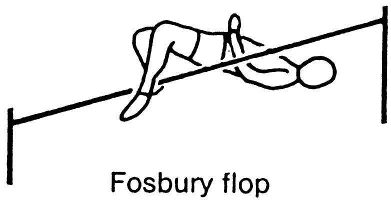
3.1. **Altuera-jauzia**

Altuera-jauzia altuera maila jakin bat mugatzen duen marraren gainean igarotzean datza. Urteetan zehar gorputzarekin marra hori gainditzeko zenbait teknika garatu dira. Hasieran kirolariek zutik jauzi egiten zuten, baina teknika hau ez zen batere eraginkorra masa-erdigunea gorputzaren erdialdean dagoelako eta marra baino askoz gorago altxatu behar zelako. Beranduago, «biraketa» teknika garatu zuten kirolariek: gorputzak horizontalki gainditzen zuen marra eta masa-zentroak maila hori baino ez zuen gainditu behar. Azkenik, 1968 urtean, Richard Fosbury-k iraultza berria ekarri zuen bere teknikari esker. Orain jauzilari guztiek Fosbury-ren modura jauzi egiten dute. Kirolaria bizkarrez altxatzen da eta marra gainditzerakoan makurtuz doa, gorputzaren zati batzuk marraren azpian dauden bitartean; beraz, masa-erdigunea beste teknikekin baino beherago mantentzen da eta marka hobeak lor daitezke bulkada berbera eginez.



Scissors

Straddle



Fosbury flop

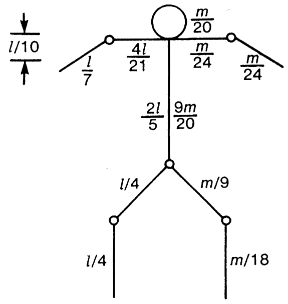
Kirolariaren bilakaera jauzi egiten duenean proiektil batena da. Ibilbidea parabolikoa da, masa-erdigunea $y\,(0) = h$ izanik. Lasterketa horizontala da eta gainera, azkenean gorako bulkada egiten du, $I = v \cdot m$. Beraz, aurrerako abiadurak marraren beste aldera igarotzen ahalbidetuko du eta bulkadan hartutako gorako abiadurak, v, Newton-en bigarren legea beteko du; orduan,

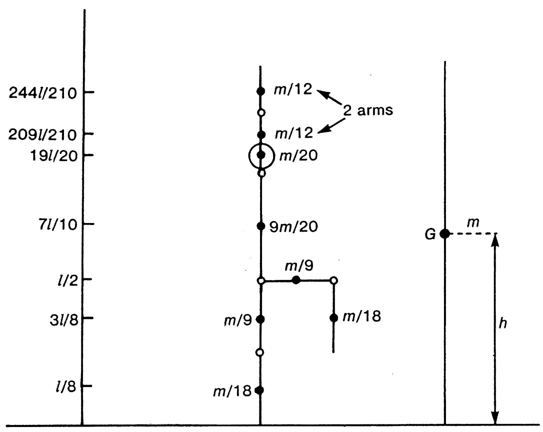
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h \qquad \text{eta} \qquad v = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0.$$

Hemendik, masa-erdiguneak gainditzen duen altuera.

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + h$$

izango da. Baina h-ren balioa bulkada ematerakoan gorputzak eratzen duen jarreraren araberakoa da eta masa-erdigunearen bidaia gorputzaren pisuaren banaketa eta makurketaren menpean dago. Noski, komenigarria da kirolaria altua izatea.





Baldin kirolariaren altuera l eta masa m badira, eta irudiko banaketa kontuan hartuz, jauzi egiteko unean masa-erdigunea, gutxi gora behera, ondoko altueran kokatuko da:

$$h = \frac{m}{18} \cdot \frac{l}{8} + \frac{m}{9} \cdot \frac{3l}{8} + \frac{m}{18} \cdot \frac{3l}{8} + \frac{m}{9} \cdot \frac{l}{2} + \frac{9m}{20} \cdot \frac{7l}{10} + \frac{m}{12} \cdot \frac{209l}{210} +$$

$$+ \frac{m}{12} \cdot \frac{19l}{20} + \frac{m}{12} \cdot \frac{244l}{210} = 0.667l.$$

Adibidez, 1.98 m-ko kirolariaren masa-erdigunea 1.32 m-an dago eta 1.83 m-ko batena, 1.22 m-an.

Orain, masa-zentroak altuera jakin bat gainditzeko behar duen bulkada kalkula daiteke: $I^2 = 2m^2\, g\, (y_{\max} - h)$. Adibidez, 1.98 m-ko kirolariaren masa-erdiguneak 2.13 m-tik gora igarotzeko behar duen bulkada $I^2 = 2m^2\, g \cdot 0.81$ da.

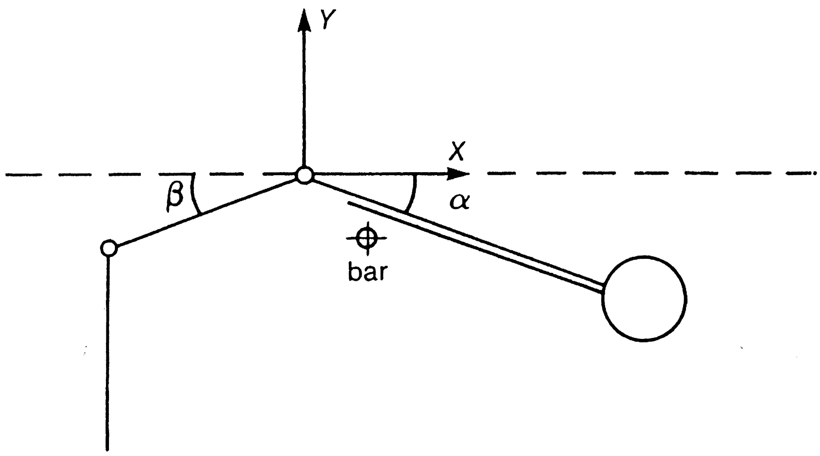
Gorputzaren jarrera ere aztertuko dugu, gerriak marra gainditzen duenean. Gorputzak eta hankek gerriarekin eratzen duten angeluak eta β badira, masa-zentroaren koordenatuak hauek izango dira:

$$(\overline{X}, \overline{Y}) = \left(\frac{251}{1680}\,l\cos \quad - \frac{1}{18}\,l\cos\beta, - \frac{251}{1680}\,l\sin \quad - \frac{1}{18}\,l\sin\beta - \frac{1}{72}\,l\right).$$

Adibidez, $= \beta = 20^{\circ}$ eta $l = 1.98$ datuak erabiliz $(\overline{X}, \overline{Y}) = (0.175, -0.166)$ izango da. Masa-zentroa gerritik 16.6 cm behera dagoenez, jauzilariak 2.13 m gainditzeko egin behar duen bulkada.

$$I^2 = 2\,m^2\,g\,(1.964 - 1.32) = 2\,m^2\,g \cdot 0.644$$

izango da, beste teknikak erabiliz baino askoz txikiagoa.



3.2. **Luzera-jauzia**

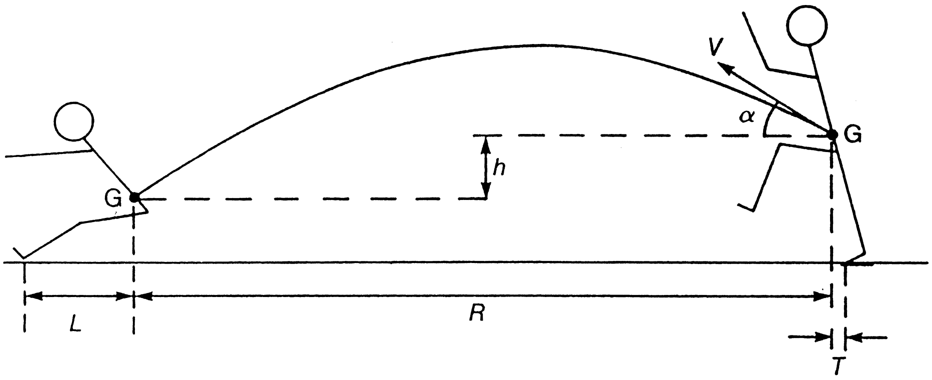
Luzera-jauzian ez dugu haizearen eragina kontuan hartuko, eta beraz, grabitazioaren menpeko gorputzaren mugimenduaren ekuazioak eta momentuaren kontserbazioaren legea baino ez dugu erabiliko. Hegaldian zehar jauzilariaren hankek txirrindulari batenak bezalako jarrera dute eta jarrera osoaren azalpena emango dugu.

Kirolariaren hegaldiak jaurtiketa parabolikoaren portaera du baina irteeran masa-erdigunea irteera-oina baino pixka bat aurrerago egoten da eta erorketan iriste-oina baino atzerago eta irteeran baino maila beheragoan amaitzen da. Beraz, jauzitako distantzia $D = T + R + L$ da (ikus irudia), eta

$$D = \frac{v^2\cos}{g} \quad \sin \quad + \sqrt{\sin^2 \quad + \frac{2gh}{v^2}} \quad ,$$

non v kirolariaren irteera-abiadura eta horizontalarekiko angelua diren. Parametro hauen ohiko balioak v 8 – 10 m/s, 18º – 22º, h 0.4 – 0.6 m, L 0.75 – 1 m eta T 0.3 – 0.4 m izan daitezke. Nabaria da kirolariaren abiadaren garrantzia, luzeraren formulan honen berbidura azaltzen baita.

Adibidez, v = 9 m/s, = 20º eta h = 0.5 m datuak erabiliz, R = 6.44 da eta guztira, L = 0.8 eta T = 0.35 hartuta, D = 0.35 + 6.44 + 0.8 = 7.59 m ateratzen da.



Jauziaren teknikari begiratuz:

— azken urratsa aurrekoak baino pixka bat motzagoa da eta beheragotik hartzen da masa-erdiguneari bulkada handiagoa emateko;
— hanka askeak aurrera jotzen du eta bulkada-hankari kontrako noranzkoan eragiten dio, jauzi unean indar gehiago egiteko eta masa-erdigunea aurreratzeko;
— hankaren aurreratzeak inertzia-momentua sortzen du aldakaren gainean, eta beraz, hegaldian beste hanka eta besoak ziklikoki mugituko dira orekatzeko;
— azkenean, bi hankak buelta eta erdi eman ondoren, aurreratu egiten dira iriste-puntuak masa-erdigunearen bidaia luzatzeko.

3.3. **Munduko errekorraren azterketa**

1968. urtean Bob Beamon estatubatuarrak Mexikoko Olimpiadan luzera-jauziaren marka izugarria egin zuen, 8.90 m-ra iritsi zen eta 30 urte behar izan zituen Mike Powell-ek errekor berria ezartzeko. Denbora aurrera joan ahala, Mexiko hiriaren goitasunarengatiko aire bereziaren eraginari buruz asko eztabaidatu da, baina hona hemen egoera hartako faktoreen ikerketa.

Newtonen azelerazioaren legea $m \cdot a = m \cdot g + D$ da, non D-k haizearen marruskadura-indarra adierazten duen. Indar hau ondoko faktoreen araberakoa da: airearen dentsitatea, , (itsasoaren mailan 1.225 kg/m^3 da eta Mexiko hirian, 0.984 kg/m^3); gorputzaren abiaduraren berbidura v^2, eta airearen aurkako gorputzaren azalera, A. Zehatz-mehatz,

$$D = \frac{1}{2} M \cdot \quad \cdot A \cdot v^2,$$

non M konstante bat den.

Gorputzaren ibilbidea jaurtiketa parabolikoarena da $\vec{V} = (u, v)$ norabidean, eta ondorioz, aireak gorputzari eragiten dion indarra $D = -\frac{1}{2}\ M \quad A\, v^2\, \vec{V}$ da.

Ibilbide bertikalak ez du gorabehera handirik, eta orduan hegaldiaren iraupena, T, aurreko ataletik ondorioztа dezakegu. Abiadura horizontala epe horretan integratuz, jauziaren luzera kalkulatuko dugu:

$$m \cdot a = m \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}\ M \quad A\, u^2.$$

Aldagaiak banatu eta integratu egingo dugu,

$$^{u}_{u(0)}\ \frac{du'}{u'^{\,2}} = -\frac{M \quad A}{2m}\ ^{t}_{0}\ dt'$$

eta hemendik,

$$\frac{1}{u} = \frac{M \quad A}{2m} t + \frac{1}{u(0)},$$

non $u(0)$ irteera-abiadura horizontala den.

Orain $u = dx/dt$ dela kontuan hartuz, emaitzari berriro aldagai-banaketa aplika diezaiokegu,

$$^{R}_{0}\,dx = \ ^{T}_{0}\ \frac{dt}{\dfrac{M \quad A}{2m} t + \dfrac{1}{u(0)}}$$

hemendik

$$R = \frac{2m}{M \quad A} \log\ 1 + \frac{M \quad A u(0) T}{2m}$$

lortuz.

Hegaldiaren iraupena eta irteera-abiaduraren ohiko balioak 1 s eta 10 m/s dira. Ondorioz,

$$0 \quad \frac{M \quad A u(0) T}{2m} << 1$$

eta logaritmoaren serieko garapena baliagarria da. Lehenengo bi gaiak soilik izango dira esangarriak eta

$$R = \frac{2m}{M\ \ A} \quad \frac{M\ \ Au(0)T}{2m} - \frac{1}{2} \quad \frac{M\ \ Au(0)T}{2m} \quad ^{2} + \dots$$

$$u(0)T - \frac{M\ \ A}{4m}\ u(0)^2T^2$$

dugu.

Amaitzeko, formula honetan Mexikoko eta itsasoaren mailako airearen dentsitateak sartuko ditugu eta emaitzak konparatuko ditugu:

$$R_2 - R_1 \quad \frac{MAu(0)^2T^2}{4m}\ (\ \ _1 - \ \ _2) = 0.042 \text{ m.}$$

Baldintza ezberdinetan jauzi horrek 4 zentimetroko aldea baino ez luze izango, eta beraz, aitortu beharra dago Bob Beamon-en jauzia benetan paregabea izan zela.

Oharra: Idazlan honetan aurkeztutako eredu teorikoak M. Stewart Townend-en «Mathematics in sport» [1] liburutik atera ditugu, baita marrazkiak liburu beretik kopiatu ere.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. STEWART TOWNED, *Mathematics in sport,* Jon Wiley & Sons, 1984.