Zenbaki irrazional eta transzendenteetatik igarotzen den Matematikaren istorio bat

Joseba Dalmau Cherino, Gorka Kobeaga Urriolabeitia

Laburpena: Testu honetan zehar zenbakiak eta beraien bilakaera izango ditugu ardatz. Matematikariak zenbaki arruntetatik abiatuz, zenbaki irrazionalen eta beranduago transzendenteen kontzeptuak sortzera bultzatu zituen ibilbide historikoa hona ekarriko dugu nonbait, premiazkoak diren emaitzetan sakonduz eta interesgarriak iruditzen zaizkigun alderdi matematikoak garatuz.

Abstract: Throughout this paper we will mainly deal with numbers and with their evolution. We aim to reproduce the historical walkthrough that led mathematicians to create the concepts of both irrational and transcendental numbers, pointing out the important results we find along the way and submerging into those that we consider to be the most interesting mathematical aspects.

1. SARRERA

Zenbakiek, izan dute zeresana matematika eta filosofiaren historian. Beraien definizio egokia emateak, propietateak aztertzeak eta banaketa ulertzeak hamaika buruhauste eragin ditu betidanik. Gutxi dakigu zenbakien adigaiaz eta bere bilakaeraz; Mesopotamian eta Egipton nekazaritzan eta merkataritzan oinarritutako gizarte batek eskatzen duen matematika mailaraino heldu ziren, objektuen zenbaketa hutsetik lurren neurketa eta banaketaraino eta hauen kudeaketa tekniketaraino alegia. Beranduago pitagorastarrekin zenbakia pentsamolde eta bizi eredu baten ardatz bilakatu zen.

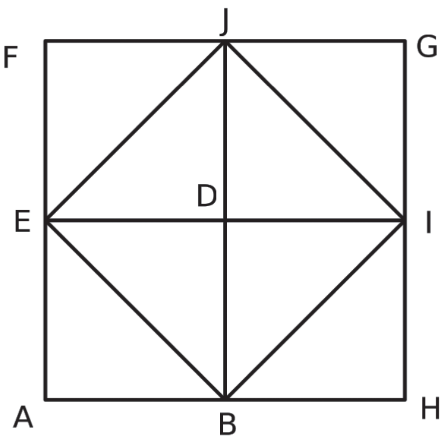
2. ZENBAKI IRRAZIONALAK

Babiloniarrek, taula babiloniar moduan ezagutzen diren buztin zatiak erabili zituzten kalkuluak egiteko, baina bazekiten beraien tauletan agertzen ziren zenbaki arrazional guztien erro karratuak ez zirela bertan agertzen. Balio hurbilduak kalkulatzeari ekin zioten $(a^2 + b^2)^{1/2} \approx a + b^2/2a$ bezalako hurbilpenak erabiliz, eta adibidez, erro bi $1 + \frac{5}{12}$ moduan hurbildu zuten.

Gutxi gorabehera bi mila urte beranduago pitagorastarrek zenbakiei izaera materiala eman zieten; gertakizunen «egitura» formala zenbakien bidez adieraz zitekeela uste zuten eta zenbaki arruntak gauza guztien jatorri moduan jarri zituzten, harmonia, zeruko mugimenduak, arima eta justizia zenbakiekin lotuz. Uste horrek magnitude guztiak elkarrekiko neurgarriak izatea eskatzen zuen, hau da, edozein bi magnitude emanda beraien arteko erlazioa zenbaki osoen bidez adierazi ahal izatea. Azkenean onartu behar izango zuten magnitude elkarrekiko ezneurgarrien existentzia, beraien aurresuposizio filosofikoa baztertuz.

2.1. Karratuaren aldea eta diametroa ez dira elkarrekiko neurgarriak

Platonek dioenez, Sokratesek bere esklaboa zen Menoni, karratu jakin baten bikoitza den karratu bat eraikitzeko eskatu zion. Esklaboak, pare bat saiakera ustelen ostean, emandako karratuaren diagonala alde modura duen karratua zela erantzun zion. Sokratesek Menon karratu berriaren aldea kontatu ezinean ikusi zuenean, erakutsi ei zion bi magnitude hauek ez direla elkarrekiko neurgarriak. Baliteke norbait diagonala neurtzen saiatzen zen lehenengo aldia ez izatea, eta agian gertatu ere ez zen gertatuko, baina karratuaren aldea eta diagonala elkarrekiko neurgarriak diren edo ez galdetzearen arrazoiaren zantzuak eman diezazkigu.



Matematikaren historialariek saiakera eta proposamen ugari egin dituzte aurkitutako aurreneko magnitude elkarrekiko ezneurgarriak zeintzuk izan ziren argitzeko. Gehienek karratuaren aldea eta diagonala izan zirela baieztatu dute, baina hala ere frogapenaren inguruan ez dute horrelako adostasunik aurkitu. Garrantzi historiko handiko frogapenak dira Aristotelesena

—Lehenengo Analitikoak liburuan agertzen dena eta denok ezagutzen duguna— eta Euklidesena —X liburuaren apendizean agertzen dena—, baina hauek ezin izan zituzten aurkitu pitagorastarrek, emandako definizio, argudio eta metodoak ez datozelako bat haien ezagutzarekin. Dena den, Grekoek k.a. V. mendearen amaieran edo IV. mendearen hasieran onartu zuten magnitude horien existentzia.

Teorema

Karratuaren aldea eta diagonala ez dira elkarrekiko neurgarriak.

Frogapena

Egin dezagun frogapena aurreko orrialdean agertzen den irudian oinarrituz. Absurdora eramanez suposa dezagun AH eta EB elkarrekiko neurgarriak direla. Orduan, existitzen da bien zati komun bat gutxienez. Har dezagun zati komunetatik handiena unitatetzat. Orduan EBIJ karratuaren eta AHGF karratuaren azalerak zenbaki osoak dira. AHGF karratua EBIJ karratuaren bikoitza denez, AH aldea zenbaki bikoitia da, eta beraz AHGF karratua lau karratu osotan banatzen da. ABDE karratua AHGFren laurdena denez, osoa da. Orain EBIJ karratua ABDEren bikoitza denez, EB aldea ere bikoitia da, AH den bezala. Orduan, AH eta EB aldeen zati komuneta-ko handiena bikoitia izango da. Baina hori ezinezkoa da, unitatea ez delako bikoitia. ■

Ziurtasun osoz dakigu denbora laburrean Matematikaren oinarrietan krisi sakona sortu zuela aurkikuntza honek eta Zenonen paradoxekin batera, matematikaren lehen oinarri sendoen sorrera eragin zutela. Aristotelesek, esan zuen ezin zirela aplikatu aritmetikako emaitzak magnitudeetan, hauek zenbakiak ez ziren bitartean behintzat. Horrela Euklidesek, Aristotelesen hitzei jarraituz, zenbakiak eta magnitudeak banatu zituen bere Elementuetan, lehenengoei I-VI liburuak eskainiz eta bigarrenei berriz XI-XIII liburuak eskainiz. Orduko matematikariek nahitaez egin beharreko bereiztea izan zen, baldin eta matematikak oinarri sendoen gainean eraiki nahi izan baziren.

Euklidesek egin behar izan zuen desberdintze hori, guztiz gaindituta gelditu zen analisiaren aritmetizazio prozesua burutu zenean. Aurretik, Platonen ikasle zen Eudoxiok proposatu bazuen ere arazoa gainditzeko bidea, magnitude elkarrekiko ezneurgarriak neurgarrien bidez hurbiltzea alegia, XIX. mendearen erdira arte ez zen ikerketa sistematiko bat egin. Zenbaki errealak definitu behar izan zituzten aurretik. Cantorrek zenbaki errealak, zenbaki arrazionalen segiden klase modura definitu zituen. Cantorrek bezala Dedekindek eta Weierstrassek analisirako zenbaki sistema osatu zuten, zenbaki naturaletatik abiatuta.

2.2. **Zenbaki irrazionalak arrazionalak baino gehiago dira**

Cantorrek XIX. mendean multzo transfinituen teoria garatu zuenean, infinitu elementu zituzten multzoen kardinalaren kontzeptua eman zuen, multzo infinitu kontagarriak eta ezkontagarriak desberdinduz. Emaitza harrigarriak azaleratu ziren, teoria berria loratzen hasi zenean, esate baterako pitagorastarren amesgaiztorik txarrena izan zitekeena, hots, zenbaki irrazionalak zenbaki arrazionalak baino «askoz» gehiago izatea. 1891. urtean Cantorrek Diagonalaren Frogapena deritzoguna erabiliz, frogatu zuen $\mathbb{R}$ eta $\mathbb{N}$ multzoen artean bijekziorik ez dela, hots, berauen kardinala ezberdina dela. $\mathbb{R}$-ren kardinalari $\aleph_0$, aleph-0 deitzen diogu eta $\mathbb{R}$-renari berriz $\mathfrak{c}$, continuumaren kardinala. Continuumaren kardinala $\mathbb{N}$-rena baino «handiagoa» da, hau da, $\mathbb{R}$-k elementu gehiago ditu $\mathbb{N}$-k baino. Frogapena, (0, 1) multzoaren gainean egingo dugu, izan ere $f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$ funtzioak bijekzio bat definitzen du horren eta zenbaki errealen multzoaren artean.

TEOREMA

[0, 1] tarteko zenbaki errealen multzoa ez da kontagarria.

FROGAPENA

Absurdura eramanez, suposa dezagun [0, 1] kontagarria dela, hau da, zenbaki arruntekin bijekzioan jarri daitekeela, edo bestela esanda, [0, 1] tarteko zenbaki guztiak zerrenda ditzakegula:

$$1- > a_1 = 0,\, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}.....$$

$$2- > a_2 = 0,\, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}.....$$

$$3- > a_3 = 0,\, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}.....$$

Izan bedi $b = 0.b_1b_2b_3b_4...$, non $b_i = a_{ii}$ eta $c = 0.c_1c_2c_3c_4...$, non $c_i \neq a_{ii}$. Ikusi b-k gutxienez digitu bat komun bat duela listako elementu bakoitzarekin. Eta b-k eta c-k ez dute digitu komun bat ere, eta beraz c ez dago [0, 1] tartean, baina hau absurdua da. Ondorioz, [0, 1] ez da kontagarria. ■

2.3. π **irrazionala da**

> «Egutegi bat erabiltzen zuen edozein jendarte zibilizatuk, arinago edo beranduago, jakin behar zuen, edo behintzat suposatu, konstante bat existitzen dela, izan bedi *k*, edozein zirkunferentziaren luzera, *k* aldiz erradioa dena. Bestela, beraien astronomia gero eta zehatzagoa izatean, beraien egutegiak gorabehera latzak izatearen beldurrez biziko ziren, eta ondorioz merkataritzarenak eta nekazaritzarenak.»
>
> E.T. Bell.

Konstante horren existentziaz ohartu ostean kalkulatzen saiatuko ziren. Babiloniarrak, k.a 2200. urte inguruan π-ren hurbilpen moduan 3 erabiltzen hasi ziren, Egipton urte batzuk beranduago, $256/81 = (4/3)^4$ erabiltzen zuten jada k.a. 1850. eta 1650. urteen artean. Arkimedesek π-ren balioa goitik eta behetik bornatu zuen, $3 + 10/71$ baino handiagoa eta $3 + 1/7$ baino txikiagoa zela esan zuen, exhauszio metodoarekin unitatea erradiotzat zuen zirkuluaren azalera 96 aldeko polinomio erregular inskribatu eta zirkunskribatuekin hurbildu zuenean. Hala ere, π zenbakiaren garrantzia hurbilpenen historia baino sakonagoa da. 1853. urtean Shanksek eman zituen 707 dezimalek edo gaur egun ordenagailuek ematen dizkiguten milioika dezimalek ezer gutxi balio dute; zirkunferentziaren diametroa eta zirkunferentzia bera elkarrekiko ezneurgarriak dira. Lambertek eman zuen 1767. urtean π-ren irrazionaltasunaren lehenengo froga formala.

Frogapenean sartu baino lehen, ohar pare bat egingo ditugu. Izan bitez

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Funtzio honen propietate garrantzitsu bat da $x^n(1-x)^n$ ren garapena egiterakoan x-en mailarik txikiena n izango dela eta handiena $2n$. Orduan, f_n honela idatzi daiteke:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

non c_i guztiak osoak diren. Erraza da ohartzea

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \quad \text{baldin} \quad k < n \quad \text{edo} \quad k > 2n$$

dela. Gainera,

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \frac{1}{n!}\left[n!c_n + xK_n(x)\right], \\ f_n^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!}\left[(n+1)!c_{n+1} + xK_{n+1}(x)\right], \\ &\vdots \\ f_n^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!}\left[(2n)!c_{2n} + xK_{2n}(x)\right]. \end{aligned}$$

Ohartu $K_{2n}(x) = 0$ dela. Beraz,

$$f_n^{(n)}(0) = c_n,$$
$$f_n^{(n+1)}(0) = (n+1)c_{n+1},$$
$$\vdots$$
$$f_n^{(2n)}(0) = (2n)(2n-1)\ldots(n+1)c_{2n}.$$

Eta eskuineko zenbaki guztiak osoak dira. Orduan,

$$f_n^{(k)}(0) \text{ osoa da edozein } k\text{–rako.}$$

Hurrengo erlazioak

$$f_n(x) = f_n(1 - x)$$

adierazten du:

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1 - x).$$

Orduan $f_n^{(k)}(1)$ ere osoa da. Azken ohar bat π irrazionala dela frogatu baino lehen. Edozein $\varepsilon > 0$ hartuta, existitzen da n bat behar beste handia, non

$$\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$$

den, $\forall a \in \mathbb{R}$. Hau frogatzeko, ohartu baldin eta $n \geq 2a$ orduan

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1} \cdot \frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2} \cdot \frac{a^n}{n!}$$

dela. Izan bedi n_0 zenbaki arrunt bat $n_0 \geq 2a$ betetzen duena. Orduan edozein delarik $\frac{a_0^n}{n_0!}$ ren balioa,

$$\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!},$$

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!},$$

$$\vdots$$

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} \leq \frac{1}{2^k} \cdot \frac{a^{n_0}}{n_0!}.$$

betetzen da. Eta k behar bezain handia bada $\frac{1}{2^k} < \varepsilon \frac{n_0!}{a^{n_0}}$ betetzen da, eta orduan

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon,$$

da, behar genuen moduan.

TEOREMA

π irrazionala da.

FROGAPENA

Alde batetik,

$$\left[a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{Q}\right] \Rightarrow \left[\pi^2 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \Rightarrow \pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\right].$$

Beraz, π^2 irrazionala dela frogatzeari ekingo diogu.

Izan bedi

$$\pi^2 = \frac{a}{b},$$

non $a,\ b \in \mathbb{N}$. Gogora dezagun $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ dela. Izan bedi

$$G(x) = b^n\left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right].$$

Ohartu,

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n\left(\pi^2\right)^{n-k} = b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k} b^k$$

zenbaki oso bat dela. Eta $f_n^{(k)}(0)$ eta $f_n^{(k)}(1)$ osoak direnez,

$G(0)$ eta $G(1)$ osoak dira.

G birritan deribatuz hurrengoa lortzen dugu:

$$G''(x) = b^n\left[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right].$$

Non azken gaia, $(-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)$, zero den. Beraz,

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x).$$

Orain, defini dezagun

$$H(x) = G'(x) \sin \pi x - \pi G(x) \cos \pi x.$$

Hortaz,

$$\begin{aligned} H'(x) &= \pi G'(x) \cos \pi x + G''(x) \sin \pi x - \pi G'(x) \cos \pi x + \pi^2 G(x) \sin \pi x \\ &= [G''(x) + \pi^2 G(x)] \sin \pi x = \pi^2 a^n f_n(x) \sin \pi x. \end{aligned}$$

Eta $[0, 1]$ tartean integratuz,

$$\begin{aligned} \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x\, dx = H(1) - H(0) = \\ &= G'(1)\sin\pi - \pi G(1)\cos\pi - G'(0)\sin 0 + \pi G(0)\cos 0 = \\ &= \pi\left[G(1) + G(0)\right]. \end{aligned}$$

Ondorioz,

$$\pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x\, dx \quad \text{osoa da.}$$

Bestalde, $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$, $0 < x < 1$. Beraz,

$$0 < \pi\, a^n f_n(x) \sin \pi x < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Eta n behar bezain handia aukeratuz,

$$0 < \pi a^n f_n(x) \sin \pi x < \frac{\pi a^n}{n!} < 1, \quad \forall x \in (0,1) \Rightarrow 0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin \pi x\, dx < 1.$$

Baina integrala zenbaki osoa izanik, azken hau absurdua da, ez baitago zenbaki osorik $(0, 1)$ tartean. Hortaz, π^2 irrazionala da. ■

2.4. *e* **irrazionala da**

e zenbakia problema oso arruntetan agertu izan da eta sarritan erabili izan zuten matematikariek bere existentzia jakin aurretik. Babiloniarrek, diru kopuru bati tasa jakin bat ezarriz, diru kopurua bikoizteko behar den denbora kalkulatzen saiatu ziren. John Napier matematikari eskoziarrak

1618. urtean logaritmoen inguruan idatzitako lan batean zenbait zenbakiren logaritmo naturalaren balio hurbildua eman zuen, *e* inon aipatu gabe.

Aurrerantzean hainbat matematikarik erabiliko zuten logaritmoaren kontzeptua eta haietako asko *e* zenbakia aurkitzetik hurbil izango ziren. Haatik, 1683. urtean *e* konstantea Jacob Bernoulli matematikari suitzarrak deskubritu zuen, logaritmoekin zerikusirik ez zuen zerbait aztertzen zebilela, interes konposatuari buruzko lan bat idazten ari zela hain zuzen ere; babiloniarrek 4000 urte arinago planteatu zuten problema ebazterakoan egin zuen. Honela definitu zigun berak:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n ,$$

eta binomioaren teorema erabili zuen 2 eta 3 arteko balio bat dela frogatzeko. Bernoullik ez zion ordea konstante honi logaritmoekin inongo loturarik aurkitu.

Seguru aski kasualitatez, Eulerrek eman zion *e* zenbakiari gaur duen izena, *e* alegia, Goldbachi 1731. urtean idatzitako gutun batean. Era berean, Euler izan zen *e* zenbakia irrazionala dela frogatzen lehena. Frakzio jarraituen bitartez hurrengo garapenak lortu baitzituen:

$$\frac{e-1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}; \quad e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Honek, mende bat beranduago matematikariak eraman zituen zenbaki errealak, zenbaki arrazionalen batura infinitu moduan edo gauza bera dena zenbaki arrazionalen segida moduan definitzera, gorago erakutsi dugun moduan. Zenbaki arrazional bat frakzio jarraituen bidez garatzeko prozesua finitua da, baina zenbaki irrazional batena ordea, infinitua. Eulerrek garapen hauek infinituak direla frogatu zuen ekuazio diferentzialez baliatuz, bereziki Ricattiren ekuazioaz:

$$ady + y^2 dx = x^{\frac{-4n}{2n+1}} dx,$$

eta hau izan zen e zenbakiaren irrazionaltasunaren lehen frogapena. Urte batzuk beranduago, 1768. urtean, Lambertek Berlineko Akademian aurkeztu zuen paper batean e^x irrazionala dela frogatu zuen baldin eta x zenbaki arrazional eznulu bat bada.

Guk emango dugun e-ren irrazionaltasunaren froga, Fourierri zor dioguna, modernoagoa eta sinpleagoa da.

TEOREMA

e irrazionala da.

FROGAPENA

Taylorren garapena erabiliz badakigu

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

non $0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$.

Absurdura eramanez demagun e arrazionala dela, hau da, $e = \frac{a}{b}$ non a eta b zenbaki osoak diren. Aukeratu dezagun $n > b$ eta $n > 3$. Orduan,

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n,$$

eta

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \ldots + \frac{n!}{n!} + n!R_n.$$

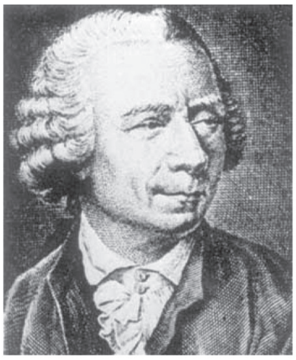
Berdintza honetako gai guztiak osoak dira agian $n!R_n$ izan ezik (berdintzaren ezkerrekoa osoa da, $n > b$ denez b-k $n!$ zatitzen duelako). Ondorioz, $n!R_n$ ere osoa izan behar da, baina

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}$$

denez, orduan

$$0 < n!R_n < \frac{3}{n+1} < \frac{3}{4} < 1,$$

eta hau kontraesan bat da. ■



Leonhard Euler

3. ZENBAKI TRANSZENDENTEAK

Zenbaki transzendenteen aferak, irrazionalenak bezala, Antzinako Grezian dauka jatorria; izan ere, Greziarren hiru problema klasikoen ebazpenek lotura zuzena dute zenbaki transzendenteekin. Angeluaren trisekzioa, kuboaren bikoiztea eta zirkuluaren koadratura, Platonek proposatu zuen moduan, konpasa eta erregela erabiliz lortzen saiatu ziren Greziarrak eta hauen ondorengoak. Lehenengo bi problemak ebatzita gelditu ziren 1837. urtean P.L. Wantzel frantziarrak koefiziente arrazionaletako ekuazio aljebraikoak erregela eta konpasarekin ebatzi ahal izateko baldintza beharrezkoak lortu zituenean. Biak hirugarren mailako ekuazio baten soluzio dira eta ez batak ez besteak ez dituzte betetzen Wantzelen baldintzak, eta beraz frogatua gelditu zen bi problemen soluzioa Platonek eskatzen zuen moduan ezinezkoa zela.

Problema hauek, zirkuluaren koadraturarekin batera, ebazkarriak dira zirkunferentziaz gain beste kurba batzuk erabiltzea onartuz gero; hala ere, problema hauek duten garrantzia zenbaki transzendenteekin duten lotura da. Ekuazio hauen erroei zenbaki aljebraiko deitu zitzaien, eta aljebraikoak ez ziren zenbakiei transzendente. Horrela deitu zitzaien Eulerrek honela esan zuelako behin: «hauek metodo aljebraikoak transzenditzen dituzte». Eulerrek ezagutzen zuen jada zenbaki aljebraikoen eta transzendenteen bereizketa. 1744. urtean, hau menturatu zuen: zenbaki arrazional baten logaritmoa oinarri arrazional bat hartuta, arrazionala edo transzendentea izan behar da.

Guk zenbaki transzendenteen existentzia eta hauen ugaritasuna aztertuko ditugu, tartean *e* transzendentea dela frogatuz.

3.1. Liouvilleren zenbaki transzendenteak

Joseph Liouville matematikari frantziarrak, Dirichlet eta Goldbachen arteko gutunetako pasarte batzuk irakurriz, zenbaki transzendenteak sortzeko formula batekin eman zuen.

3.1.1. *Emaitza garrantzitsu batzuk*

Izan bitez α zenbaki aljebraiko ezarrazional bat eta $f(x)$ α zenbakiaren $\mathbb{Z}$ gaineko polinomio minimoa:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Orduan:

(i) $\forall p/q \in \mathbb{Q}$, $f(p/q) \neq 0$.

Frogapena: Absurdura eramanez, suposa dezagun existitzen dela $p/q \in \mathbb{Q}$, non $f(p/q) = 0$ den. Orduan, $\exists g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ eta $k \in \mathbb{Z}$, non $kf(x) = (x - p/q)g(x)$ eta beraz $g(\alpha) = 0$ den. Baina hau absurdua da, $f(x)$ baita α-ren polinomio minimoa.

(ii) $\forall p/q \in \mathbb{Q}$ non $q > 0$, $|f(p/q)| \geq 1/q^n$.

Frogapena: $0 \neq f(p/q) = \frac{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n}{q^n}$ non $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} q + \cdots + a_o q^n \in \mathbb{Z}$, beraz $|f(p/q)| \geq 1/q^n$.

(iii) Izan bedi $M = sup\{|f'(x)| : |x - \alpha| < 1\}$. Orduan, $\forall p/q \in \mathbb{Q}$ non $|\alpha - p/q| < 1$, $|\alpha - p/q| > \frac{1}{Mq^n}$.

Frogapena: Batez besteko balioaren teorema erabiliz,

$$|f(p/q) - f(\alpha)| = |p/q - \alpha||f'(\delta)|,$$

non $|\alpha - \delta| < 1$, beraz,

$$|p/q - \alpha| > |1/q^n - 0|\frac{1}{M} = \frac{1}{q^n M}.$$

Izan bedi Liouvilleren zenbakia, l, hurrengo erara definitutako zenbaki irrazionala:

$$l = 0{,}110001000... = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

hots, $n!$ posizio dezimaletan 1 balioa eta gainontzekoetan 0 duen zenbakia.

TEOREMA

Liouvilleren zenbakia transzendentea da $\mathbb{Q}$-ren gainean.

FROGAPENA

Izan bitez

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = \frac{\sum_{k=1}^{n} 10^{n!-k!}}{10^{n!}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Absurdura eramanez, suposa dezagun l aljebraikoa dela, hots, existitzen dela $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ l zenbakiaren polinomio minimoa, eta suposa dezagun beronen maila m dela.

Aurreko atalean aipatutakoaren arabera, badakigu, $\forall p/q \in \mathbb{Q}$, non $|l - p/q| < 1$

$$|l - p/q| > \frac{1}{Mq^m} \quad \text{non} \quad M = \sup\{|f'(x)| \text{ non } |x - l| < 1\}.$$

Bereziki,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |l - l_n| > \frac{1}{Mq^m} = \frac{1}{M\left(10^{n!}\right)^m} = \frac{1}{M10^{m \cdot n!}}.$$

Ohar gaitezen,

$$|l - l_n| = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} - \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} < 10^{-(n+1)!+1}.$$

Beraz,

$$|l - l_n| > \frac{1}{Mq^m} \Leftrightarrow M > \frac{1}{|l - l_n| q^m} > \frac{1}{10^{-(n+1)!+1} 10^{m \cdot n!}} = \frac{1}{10^{n!(m-n-1)+1}} =$$
$$= 10^{(n+1-m)n!-1} \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

Azken adierazpen honek infiniturantz jotzen du n igotzen dugun heinean, m zenbaki finko bat baita.

Alabaina, hau kontraesan bat da, $M = sup\{|f'(x)| \text{ non } |x - l| < 1\}$ izanik, zenbaki erreal bat izan behar da, bestela ez zen f $C^\infty(\mathbb{R})$ klasekoa izango.

Beraz, l, Liouvilleren zenbakia transzendentea da. ■

Joseph Liouville

3.2. Cantorren lana eta zenbaki transzendenteak

Liouvillek baino zenbait urte beranduago, Georg Cantor matematikari germaniarrak ere zenbaki transzendenteen existentzia frogatu zuen, oraingoan Liouvillek erabilitakoaren ikuspuntu zeharo desberdinarekin. *Zenbaki erreal aljebraiko guztien propietate bati buruz* izeneko artikulua argitaratu zuen Journal de Crellen 1874. urtean. Tartean, hurrengo emaitzak lortu zituen aipatu lanean.

TEOREMA

Zenbaki erreal aljebraiko guztien multzoa segida infinitu bat bezala idatz daiteke.

TEOREMA

Izan bitez $\{a_n\}_{n\geq 1}$ zenbaki errealen segida bat eta $[\alpha, \beta]$ tarte erreal bat. Orduan, existitzen da $\eta \in [\alpha, \beta]$, non $\eta \neq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Izan ere, honelako zenbakien kopurua $[\alpha, \beta]$ tartean amaigabea da.

KOROLARIOA

Edozein $[\alpha, \beta]$ tarte erreal izanda, infinitu zenbaki transzendente existitzen dira bertan.

Bigarren teoremaren frogapena emango dugu hemen, eta besteak aurrerago landuko ditugu.

FROGAPENA

Izan bitez $\{a_n\}_{n\geq 1}$ zenbaki erreal ezberdinen segida bat eta $[\alpha, \beta]$ tartea.

Izan bitez α_1, β_1, $[\alpha, \beta]$ tartean dauden segidako lehen bi zenbakiak $\alpha_1 < \beta_1$ hartuz. Orain har dezagun $[\alpha_1, \beta_1]$ tarte berria eta errepika dezagun prozesua.

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots$$

tarteen segida lortuko dugu. Bi aukera ditugu orain,

$\exists N \in \mathbb{N}$ non $[\alpha_N, \beta_N]$ azken tartea den. Kasu honetan, gehien jota segidako elementu bakar bat izango dugu $[\alpha_N, \beta_N]$ tartean, eta elementu hau ez den beste edozein $\eta \in [\alpha_N, \beta_N]$ har dezakegu.

Tarteen segida infinitua bada, α_i zein β_i zenbaki errealen segida monotono eta bornatuak izanik, limitea izango dute. Izan bitez bada,

$$\alpha_\infty = \lim_{x\to\infty} \alpha_n, \quad \beta_\infty = \lim_{x\to\infty} \beta_n$$

$\alpha_\infty = \beta_\infty$ betetzen bada $\eta = \alpha_\infty = \beta_\infty$ har dezakegu, ez baita segidako elementu bat; bestela, $\alpha_\infty < \beta_\infty$ izango dugu eta η hauen bitarteko edozein zenbaki har dezakegu. ■

TEOREMA

Zenbaki transzendenteen kopurua aljebraikoena baino handiagoa da.

FROGAPENA

$\mathbb{Z}[x]$ eraztuneko n mailako polinomio bakoitzak gehien jota n erro ditu, eta n mailako polinomioen kopurua kontagarria da, multzo kontagarrien biderkadura kartesiar finitua delako. Beraz, n mailako polinomioen erroen kopurua ere kontagarria da. Bestalde, $\mathbb{Z}[x]$ eraztuneko polinomio guztien erroen multzoa aurrekoen bildura kontagarria izango da, hots, multzo kontagarria berau ere. Hemendik, zenbaki aljebraikoen multzoa kontagarria izatea.

Badakigu ordea $\mathbb{R}$ multzoa ez dela kontagarria, eta zenbaki transzendenteen multzoa ere ez da kontagarria izango orduan. Eta bistakoa denez, zenbaki transzendenteen multzoa, aljebraikoena baino handiagoa da. ■

3.3. *e* zenbakiaren transzendentzia.

Behin lehen zenbaki transzendenteak aurkituta, hurrengo erronka matematikan arruntagoa den e zenbakia transzendentea dela frogatzea dugu. Hau, lehen aldiz Hermitek lortu zuen 1873. urtean; guk emango dugun frogapena, halere, Hilbertek egindako sinplifikazio bat da.

Charles Hermite eta David Hilbert

TEOREMA

e zenbakia transzendentea da.

FROGAPENA

Absurdura eramanez, suposa dezagun existitzen direla a_0, a_1, ..., a_n, $a_0 \neq 0$ delarik, non

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad (*)$$

den.

Izan bitez M, M_1, ..., M_n eta ε_1, ..., ε_n hurrengo erara definitutako zenbakiak:

$$M = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx,$$

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx,$$

$$\varepsilon_k = e^k \int_0^k \frac{x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx.$$

p zenbaki lehen indeterminatua delarik; aurrerago aukeratuko dugu hau.

Jabetu gaitezen, hurrengo erlazioa betetzen dela:

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M}, \text{ non } k = 1, \ldots, n.$$

Beranduago erabiliko dugu hau.

Begira diezaiogun M -ri aurrena. $(x - 1) \cdots (x - n)$ garatuz,

$$x^n + \cdots \pm n!$$

koefiziente osoak dituen polinomioa lortzen dugu. Eta beraz,

$$[(x - 1) \cdots (x - n)]^p = x^{np} + \cdots \pm (n!)^p,$$

orain M honela berridatz dezakegularik:

$$M = \sum_{i=0}^{np} \frac{1}{(p-1)!} C_i \int_0^\infty x^{p-1+i} e^{-x}\, dx,$$

non C_i zenbaki osoak diren eta $C_0 = \pm(n!)^p$. Alabaina, zatika integratuz hurrengoa dugu:

$$\int_0^\infty x^{p-1+i} e^{-x}\, dx = (p-1+i)!$$

eta orduan:

$$M = \sum_{i=0}^{np} C_i \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!}$$

dugu. Orain, $i = 0$ denean ondoko gaia lortzen dugu:

$$\pm(n!)^p \frac{(p-1)!}{(p-1)!} = \pm(n!)^p.$$

Orain, har ditzagun kontutan bakarrik $p > n$ betetzen duten zenbaki lehenak; orduan gai hau ez du zatitzen p-k. Bestetik, $i > 0$ bada

$$C_i \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!} = C_i (p+i-1)(p+i-2) \cdots p,$$

eta hau p-k zatitzen du. Beraz, M zenbaki osoa ez du zatitzen p-k. Orain har dezagun M_k:

$$M_k = e^k \int_k^\infty \frac{x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p e^{-x}}{(p-1)!} dx = \int_k^\infty \frac{x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p e^{-(x-k)}}{(p-1)!} dx.$$

$u = x - k$ eta $du = dx$ aldagai aldaketa eginez M -ren adierazpen antzekoa lortuko dugu. Integralaren mugak 0 eta ∞ izatera aldatzen dira.

$$M_k = \int_0^\infty \frac{(u+k)^{p-1}\left[(u+k-1)\cdots u \cdots (u+k-n)\right]^p e^{-u}}{(p-1)!} du.$$

Hala ere badago desberdintasun nabari bat M_k -ren eta M -ren adierazpenen artean: M_k -ren kasuan parentesi arteko adierazpenak u faktorea du, gai askerik gabekoa. Hori dela-eta,

$$M_k = \sum_{i=1}^{np} \frac{1}{(p-1)!} D_i \int_0^\infty u^{p-1+i} e^{-u}\, du = \sum_{i=1}^{np} D_i \frac{(p-1+i)!}{(p-1)!},$$

non D_i osoak diren. Ohartu $i = 1$ hasten dela batura, eta kasu honetan baturako gai bakoitza p-k zatitzen duela. Beraz, M_k oso bakoitza p-k zatitzen du.

Gogora dezagun

$$e^k = \frac{M_k + \varepsilon_k}{M}, \quad \text{non} \quad k = 1, \ldots, n.$$

dela. Eta (*) adierazpenean ordezkatuz eta M-rekin biderkatuz, ondokoa lortzen dugu:

$$[a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n] + [a_1 \varepsilon_1 + \cdots + a_n \varepsilon_n] = 0.$$

$p > n$ izateaz gain demagun baita $p > |a_0|$ dela. Orduan M zein a_0 ez ditu p-k zatitzen, eta beraz $a_0 M$ ere ez du zatitzen p-k. Eta M_k bakoitza p-k zatitzen duenez,

$$a_0 M + a_1 M_1 + \cdots + a_n M_n$$

ez du zatitzen p-k. Bereziki zenbaki oso eznulua da. (*) ekuazioan kontraesan bat aurkitzeko eta e-ren transzendentzia frogatzeko, ikusi behar dugu

$$|a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n|$$

nahi dugun bezain txikia egin daitekeela, behar bezainbesteko p handia aukeratua. Agerikoa denez, nahikoa da $|\varepsilon_k|$ bakoitza nahi bezain txikia dela frogatzea. Honek ez du hurbilketa erraz batzuk besterik eskatzen. Hasteko, $1 \le k \le n$, orduan

$$|\varepsilon_k| \le e^k \int_0^k \frac{\left|x^{p-1}\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p\right| e^{-x}}{(p-1)!} dx \le \int_0^n e^k \frac{n^{p-1}\left|\left[(x-1)\cdots(x-n)\right]^p\right| e^{-x}}{(p-1)!} dx.$$

Izan bedi orain A, $|(x-1)\cdots(x-n)|$-ren maximoa, $x \in [0, n]$ denean. Orduan,

$$|\varepsilon_k| \le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^n e^{-x}\, dx \le \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{e^n n^{p-1} A^p}{(p-1)!} \le \frac{e^n n^p A^p}{(p-1)!} = \frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}.$$

Baina n eta A finkoak dira, eta hortaz, $\frac{e^n (nA)^p}{(p-1)!}$ nahi bezain txikia egin dezakegu, p behar bezain handia eginez. ■

3.4. Liouvilleren zenbakiak, *e* eta *π*. Ezagutzen ditugun transzendente bakarrak?

Espero zitekeen bezala, erantzuna ezezkoa da. Lindemannek π zenbakiaren transzendentziaren galderari baiezko erantzuna eman zion, eta hori lortze bidean, hurrengo teorema frogatu zuen.

TEOREMA

$z \in \mathbb{C}$ zenbakia aljebraikoa bada, $e^z + 1 \neq 0$ da.

Hemendik berehala ondorioztatzen da π transzendentea dela, izan ere, Eulerren formula ospetsuak honela dio:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

eta teoremaren arabera $i\pi$ transzendentea dugu halabeharrez; i aljebraikoa izanik, ordea, π transzendentea dela berehala ikusten da (ez da zaila frogatzea α, β aljebraikoak izanik, $\alpha + \beta$ eta $\alpha\beta$ ere aljebraikoak direla, errotzat dituzten polinomioak aurkituz).

Jarraian teorema baten berri emango dugu. Lindemannek teorema egiazkoa zela uste izan zuen eta Weierstrassek 1885.ean frogatu zuen:

TEOREMA

Izan bitez $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ zenbaki aljebraiko desberdinak eta $N_1, \dots N_n$ zenbaki aljebraikoak. Orduan,

$$N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0 \Rightarrow N_1 = \cdots = N_n = 0.$$

Honek zenbaki transzendente gehiago eraikitzeko bidea ematen digu; esate baterako, edozein z zenbaki aljebraiko eznulu hartuta,

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z$$

transzendenteak dira, badugulako

$$e^z e^0 + (-1)e^z = 0;$$
$$\sin z + \left(-\frac{1}{2i}\right)e^{iz} + \frac{1}{2i}e^{-iz} = 0; \quad \cos z + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{iz} + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-iz} = 0.$$

Teorema garrantzitsu hau frogatu eta bost urtera, David Hilbertek aurrerago aurkeztuko zituen 23 problema ospetsutatik 10 ezagutzera eman zituen Matematikarien Nazioarteko Biltzarrean. Problema hauetako zazpigarrenak ondokoa eskatzen zuen:

HILBERTEN 7. PROBLEMA

Izan bitez $a \notin \{0, 1\}$ zenbaki aljebraiko bat eta b zenbaki aljebraiko irrazional bat. Ba al da a^b zenbaki transzendente bat?

Honi erantzuna emateko, Aleksandr Gelfond matematikari errusiarrak eta Theodor Schneider germaniarrak hurrengo emaitza frogatu zuten bakoitzak bere aldetik, 1934. urtean:

TEOREMA

α eta β zenbaki aljebraikoak badira, $\alpha \notin \{0, 1\}$ eta β irrazionala izanik, orduan α^β transzendentea da.

Horrela ebatzi zen Hilberten zazpigarren problema. Eta noski, honek zenbaki transzendente andana eraikitzeko bidea ematen digu, Hilberten zenbakia deritzogun $2^{\sqrt{2}}$, e^π edota i^i esate baterako.

Badira teorema honen orokorpenak ere. Hauen artean garrantzitsuenak Bakerren teorema eta oraindik frogatu gabe dagoen Schanuelen aierua daude.

Ezaguna dugu zenbaki transzendenteak direla matematiketan esanguratsuak diren beste zenbait konstante ere. Adibidez Champernowneren zenbakia $C_{10} = 0.1234567891011121314...$, $\zeta(3)$ non ζ Riemannen zeta funtzioa den, Feigenbaumen konstanteak...

Badira era berean oraindik misteriotsu dirauten beste zenbait zenbaki. Eulerren γ konstantea $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$, Catalanen G konstantea $G = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$, edota π^e zenbakiak aljebraiko edo transzendenteak ote diren oraindik erantzunik ez duten galderak dira.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] BELL, E.T. 1949. *Historia de las Matematicas*. McGraw-Hill Book Co.

[2] KATZ, Victor J. 1998. *A History of Mathematics, an introduction. Second Edition*.Addison-Wesley.

[3] KNORR, W.R. 1975. *The evolution of the Euclidean Elements. A study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. D. Reidel Publishing Company.

[4] LÜTZEN, Jesper. 1990. *Joseph Liouville 1809-1882 Master of Pure and Applied Mathematics*. Springer-Verlag.

[5] SANDIFER, Ed. *How Euler Did It: Who proved e is irrational?* MAA online, February 2006.

[6] SPIVAK, Michael. 1970. *Calculus*. Reverté.