El sistema Bp_+: una lógica positiva mínima para la negación mínima

(The system Bp_+: a minimal positive logic for minimal negation)

José M. MÉNDEZ, Francisco SALTO y Gemma ROBLES

Recibido: 10.10.2005
Aceptado: 13.11.2006

BIBLID [0495-4548 (2007) 22: 58; pp. 81-91]

RESUMEN: Entendemos el concepto de "negación mínima" en el sentido clásico definido por Johansson. El propósito de este artículo es definir la lógica positiva mínima Bp_+, y probar que la negación mínima puede introducirse en ella. Además, comentaremos algunas de las múltiples extensiones negativas de Bp_+.

Descriptores: negación constructiva, negación mínima, semántica relacional ternaria, lógicas de la relevancia.

ABSTRACT: *"Minimal negation" is classically understood in a Johansson sense. The aim of this paper is to define the minimal positive logic Bp_+ and prove that a minimal negation can be inroduced in it. In addition, some of the many possible negation extensions of Bp_+ are commented.*

Keywords: *constructive negation, minimal negation, ternary relational semantics, relevance logics.*

1. Introducción

El concepto de negación mínima puede entenderse clásicamente de dos modos:

a) La negación característica del cálculo mínimo de Johansson, Im (cfr. Johansson (1936), Georgacarakos (1982) o Méndez (2006), muy accesibles) descriptible sintácticamente con las tesis de doble negación $[A \to \neg\neg A]$, contraposición $[(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)]$ y reductio $[(A \to B) \to [(A \to \neg B) \to \neg A]]$ débiles.

b) El resultado de añadir a cualquier lógica positiva S_+ una constante de falsedad F, definir $\neg A = A \to F$, sin añadir axioma alguno, y dejar que sea la lógica positiva S_+ la que se encarge, diríamos, de proporcionar la negación subyacente a S_+.

Si el sistema en el que se introduce la negación del modo descrito en (b) es la lógica positiva intuicionista I_+, el resultado es el intuicionismo mínimo de Johansson Im al que nos hemos referido más arriba. Pero la lógica I_+ es una lógica muy potente. ¿Qué ocurre con lógicas más débiles si queremos introducir en ellas la negación mínima de Johansson?

Nuestro grupo de investigación se ha dedicado últimamente al estudio de este problema. Primero, hemos mostrado cómo introducir una negación mínima en el sentido de (b) en cualquier lógica modelizable con la semántica relacional ternaria (cfr. Robles, Méndez y Salto (2005)). Además, y en segundo lugar, hemos estudiado cómo introducir la negación mínima en el sentido de (a) en lógicas muy débiles. A este respecto, en

Méndez, Salto y Robles (2002) se muestra cómo introducir este tipo de negación en una lógica tan débil como la lógica positiva mínima de Anderson y Belnap. Pero en Robles, Méndez y Salto (2005) generalizamos este resultado. Mostramos cómo definir la negación mínima en el sentido de (a) en la lógica positiva básica B_+ de Routley y Meyer; es decir, en cualquier lógica representable en la semántica relacional ternaria.

Ahora bien, en este último trabajo hemos probado que si a B_+ se le añaden los axiomas de doble negación, contraposición y la regla de reductio

Rd. Si $A \to B$, entonces $(A \to \neg B) \to \neg A$

el axioma completo de reductio citado más arriba no es derivable. Nos preguntamos entonces en ese mismo artículo si es posible introducir los axiomas completos de reductio como axiomas adicionales. Conjeturamos allí que no, porque el sistema positivo parecía insuficiente para fundamentar la validez de los postulados que dan razón de las validez de estos axiomas. Y lo curioso del caso es que dichos axiomas siguen sin ser derivables (y sin, parece, ser introducibles adicionalmente) cuando la negación que añadimos a B_+ no es la negación constructiva sino la negación de De Morgan típica de la lógica de la relevancia (Robles y Méndez (2004)).

Pues bien, el propósito del presente trabajo es presentar la lógica Bp_+ (B_+ más el axioma de "prefijación"). Esta lógica es la extensión de B_+ con el axioma de "prefijación"

$(B \to C) \to [(A \to B) \to (A \to C)]$

Basta esta extensión de B_+ para que los axiomas de completos de reductio puedan introducirse sin dificultades. Más aún, son derivables a partir de las reglas correspondientes. Presentaremos, pues, la lógica Bp_+ y sus diversas extensiones con las reglas y teoremas de doble negación, contraposición y reductio. A partir de estas extensiones pueden definirse multitud de lógicas con negación mínima (en el sentido de (a)) simplemente añadiendo axiomas positivos a Bp_+. De este modo puede construirse fácilmente cualquier lógica incluida en el intuicionismo mínimo (en el apéndice proporcionamos algunos ejemplos). En particular, la estructura del presente trabajo es como sigue. En § 2 recordamos la lógica B_+ y en § 3 definimos la lógica Bp_+. En § 4 definimos la lógica Bpm, es decir, la lógica Bp_+ con negación mínima en el sentido de (b) explicado más arriba. En § 5 y § 6 definimos las lógicas Bpmdn' y Bpmdn, es decir, Bpm con doble negación como regla y como teorema respectivamente. En § 7 se introducen los axiomas de contraposición en Bpm, lo que nos da como resultado la lógica Bpmc. En § 8 se introduce el principio de no contradicción en Bpmc. Definimos así la lógica Bpmcr'. Por último, en § 9 se muestra cómo introducir la negación mínima en el sentido de Johansson en la lógica Bp_+.

Incluimos resultados previos (especialmente Méndez, Salto y Robles (2002) y Robles Méndez y Salto (2005)) pero los exponemos de un modo unitario y general con especial énfasis en la aplicabilidad. Además, se presentan resultados nuevos como la definición de las lógicas Bpmdn', Bpmcr', Bpmdn'r y Bpmdn'r'. Finalizamos con un diagrama con el que es sencillo visualizar las relaciones entre todas las lógicas discutidas y con el apéndice mencionado más arriba que puede ser, pensamos, especialmente útil para el lector.

2. La lógica B_+

B_+ se axiomatiza con:

A1. $A \to A$

A2. $(A \wedge B) \to A$ / $(A \wedge B) \to B$

A3. $[(A \to B) \wedge (A \to C)] \to [A \to (B \wedge C)]$

A4. $A \to (A \vee B)$ / $B \to (A \vee B)$

A5. $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to [(A \vee B) \to C]$

A6. $[A \wedge (B \vee C)] \to [(A \wedge B) \vee C]$

Reglas de derivación:

Modus ponens (MP): si $A \to B$ y A, entonces B.

Adjunción (Adj.): si A y B, entonces $A \wedge B$.

Sufijación (Suf.): si $A \to B$, entonces $(B \to C) \to (A \to C)$

Prefijación (Pref.): si $B \to C$, entonces $(A \to B) \to (A \to C)$

Un *modelo* B_+ es una estructura del tipo < K, O, R, > donde K es un conjunto, O es un subconjunto de K y R una relación ternaria en K que están sujetos a las siguientes definiciones y postulados:

d1. $a \leq b =_{df} (\exists x \in O)\ Rxab$

d2. $R^2abcd =_{df} (\exists x \in K)\ [Rabx$ and $Rxcd]$

P1. $a \leq a$

P2. $(a \leq b$ y $Rbcd) \Rightarrow Racd$

es una relación de evaluación entre K y las fórmulas del lenguaje positivo que satisface las siguientes condiciones para todas las variables proposicionales p, f.b.f A, B y $a, b, c \in K$:

i. $(a \quad p$ y $a \leq b) \Rightarrow b \quad p$

ii. $a \quad A \vee B$ syss $a \quad A$ ó $a \quad B$

iii. $a \quad A \wedge B$ syss $a \quad A$ y $a \quad B$

iv. $a \quad A \to B$ syss para todo $b, c, e \in K$, $(Rabc$ y $b \quad A) \Rightarrow c \quad B$

A es válida ($_{B+}$ A) syss *a* A para todo $a \in$ O de todos los modelos. En Robles (2005) se estudia con detalle B_+ y se prueba la corrección y la completud de B_+ respecto de la semántica anterior (i.e, A es teorema de B_+ syss $_{B+}$ A).

3. La lógica Bp_+

La lógica Bp_+ es el resultado de añadir el axioma

A7. $(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

a B_+.

Un *modelo* Bp_+ es exactamente igual que un modelo B_+ salvo por la adición del postulado

P3. $R^2abcd \Rightarrow (\exists x \in K)$ [R*bcx* and R*axd*]

Este postulado es el "postulado correspondiente" a A7 en el sentido de que la validez de A7 se demuestra con P3 y la adecuación canónica del postulado se demuestra con A7 (véase, p. ej., Dunn y Restall (2002) o Robles (2005)).

La completud de Bp_+ respecto de la semántica anterior se sigue inmediatamente de la completud de B_+ y de la correspondencia entre A7 y P3 y a la que se alude más arriba.

Hacemos notar que Bp_+ es un sistema más débil que la lógica positiva mínima de Anderson y Belnap ML_+ (cfr. Méndez, Salto y Robles (2002)): ML_+ se axiomatiza añadiendo

A7'. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

a Bp_+.

4. Bp_+ *con negación mínima: la lógica Bpm*

Para definir la lógica Bpm añadimos al lenguaje positivo la constante de falsedad F junto con la definición

$\neg A =_{df} A \rightarrow F$

Pero no añadimos axioma adicional alguno. Así pues, Bpm es una extensión definicional de Bp_+.

Los siguientes esquemas

T1. Si $A \rightarrow B$, entonces $\neg B \rightarrow \neg A$

T2. Si $\neg B$, entonces $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$

T3. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

T4. $(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

son derivables en Bpm puesto que son derivables en Bm (Bm se construye a partir de B_+ como Bpm a partir de Bp_+ (cfr. Robles, Méndez y Salto (2005)). Además tenemos ahora

T5. $\neg B \to [(A \to B) \to \neg A]$

que es el teorema correspondiente a la regla de derivación T2. El teorema T5 es (aunque una tesis constructiva) un fuerte teorema de la contraposición que no es, en general, derivable en las lógicas modales. Así, p. ej., T5 no es derivable ni en la lógica de la implicación E ni en la lógica modal S5 (cfr., p. ej., Dunn y Restall (2002); Hughes y Cresswell (1996) sobre estos dos sistemas) a pesar de que la negación en estos sistemas es de tipo De Morgan.

Un *modelo Bpm* es una estructura del tipo < K, O, S, R, > donde < K, O, R, > es un modelo Bp_+ y S es un subconjunto de K tal que $S \cap O \neq \varnothing$. Añadimos también las cláusulas

v. $(a \leq b$ y a $F) \Rightarrow b$ F

vi. a F syss $a \notin S$

$_{Bpm}$ A (A es Bpm válida) syss a A para todo $a \in O$ de todos los modelos.

Para demostrar la completud de Bpm definimos la estructura ("modelo canónico") < K^C, O^C, S^C, R^C, ^{C} > donde < K^C, O^C, R^C, ^{C} > se define al modo habitual en las lógicas positivas de la relevancia (cfr. Dunn y Restall (2002), Robles (2005)) y S^C se interpreta como el conjunto de todas las teorías consistentes siendo *a* una teoría inconsistente syss $F \in a$ (o sea, "*a* es inconsistente" equivale a "*a* contiene la constante de falsedad F").

Probamos entonces

PROPOSICIÓN 1. $S^C \cap O^C \neq \varnothing$

Esta proposición se sigue fácilmente de la no validez de F. Demostramos ahora la adecuación canónica de las cláusulas. Esta prueba es trivial pues v y vi se leen, respectivamente,

v'. $(a \subseteq b$ y $F \in a) \Rightarrow F \in b$

vi'. $F \in a$ syss $a \notin S^C$

La completud de Bpm se sigue entonces inmediatamente de la completud de Bp_+.

5. Bpm con la regla de doble negación débil: la lógica Bpmdn'

La lógica Bpmdn' se axiomatiza añadiendo a Bpm la regla

Rdn: Si A, entonces $(A \to F) \to F$ (i.e, Si A, entonces $\neg\neg A$)

Por otro lado, un *modelo Bpmdn'* es en todo igual a un modelo Bpm salvo por la adición del postulado

P9. $a \in S \Rightarrow (\exists x \in O)(\exists y \in S)\ Raxy$

Dejamos al lector la prueba de que, dado este postulado, la regla Rdn preserva la validez. Por nuestra parte demostraremos que el postulado es válido canónicamente.

PROPOSICIÓN 2. $a \in S^C \Rightarrow (\exists x \in O^C)(\exists y \in S^C)\ R^C axy$

Prueba. Supongamos que $a \in S^C$. Definimos los conjuntos de fórmulas $z = \{A: \quad A\}$, $u = \{B: A \to B \in a \text{ y } A \in z\}$. Es fácil demostrar que z y u son teorías (es decir, conjuntos de fórmulas cerrados por la adjunción y la implicación) y tal que $R^C azu$. Es claro que z es una teoría normal (cfr. sobre todos estos conceptos Robles (2005)). Falta por demostrar que u es consistente. Supongamos, como hipótesis de reductio, que $F \in u$. Entonces $A \to F \in a$ para algún teorema A. Por Rdn, $\quad (A \to F) \to F$. Pero, entonces, $F \in a$ contrariamente a la suposición de que a es consistente. Por último, z y u se extienden a teorías primas x, y tales que $R^C axy$, $x \in O^C$ y $y \in S^C$.

Ahora, la completud de Bpmdn' se sigue de la de Bpm.

6. Bpm con doble negación débil: la lógica Bpmdn

La lógica Bpmdn se axiomatiza añadiendo el axioma

A8. $A \to [(A \to F) \to F]$ (i.e., $A \to \neg\neg A$)

a Bpm. Los siguientes (además de T1-T5) son teoremas de Bpmdn:

T6. Si $A \to \neg B$, entonces $B \to \neg A$

T7. $B \to [(A \to \neg B) \to \neg A]$

Un *modelo Bpmdn* es en todo igual a un modelo Bpm salvo por la adición del postulado

P5. $(Rabc \text{ y } c \in S) \Rightarrow (\exists x \in S)\ Rbax$

Es claro que para demostrar la completud de Bpmdn sólo hay que probar que el postulado P5 es válido canónicamente (cfr. Méndez, Salto y Robles (2002)).

7. Bpm con contraposición débil: la lógica Bpmc

La lógica Bpmc se axiomatiza añadiendo el axioma

A9. $[A \to (B \to F)] \to [B \to (A \to F)]$ (i.e., $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$)

a Bpm. Tenemos entonces (además de T1-T5) que A8 es derivable. Por tanto T6, T7 y, además, T8 (que anotamos más abajo) son también teoremas de Bpmc.

T8. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Un *modelo Bpmc* es exactamente igual que un modelo Bpm salvo por la adición del postulado

P6. $(R^2abcd$ y $d \in S) \Rightarrow (\exists y \in S)\ R^2acby$

Para demostrar la completud de Bmpc hay que probar la adecuación canónica de P6 (Robles, Méndez y Salto (2005)).

Para finalizar este apartado, hacemos notar que aunque, como hemos visto, Bpmdn está incluido en Bpmc, la inversa no se cumple. Es decir, podemos aislar doble negación débil de contraposición débil. Por otro lado, el teorema T8 no puede sustituir a A9: el resultado sería un sistema más débil. Tendría contraposición sólo en la forma T8 (no A9) y doble negación débil no sería derivable ni como axioma ni como regla. De hecho, podríamos definir el sistema Bpmc' añadiendo T8 a Bpm. Definiríamos entonces los modelos Bpmc' como los modelos Bpm salvo por la adición del postulado

P7. $(R^2abcd$ y $d \in S) \Rightarrow (\exists x \in K)(\exists y \in S)\ [Racx$ y $Rbdy]$

Dejamos al lector la demostración de que P7 es el postulado correspondiente a T8 (sobre estas dos últimas observaciones cfr. Méndez, Salto y Robles (2002)).

Extendemos a continuación la lógica Bpmc con dos versiones de la regla de reductio.

8. Bpmc con el principio de no contradicción: la lógica Bpmcr'

Para definir la lógica Bpmcr' añadimos a la lógica Bpmc el axioma (principio de no contradicción)

A10. $[A \wedge (A \to F)] \to F$ (i.e., $\neg(A \wedge \neg A)$)

Entonces, la regla de reductio es derivable en la forma

Rr'. Si $A \to B$ y $A \to \neg B$, entonces $\neg A$

Dejamos al lector la comprobación de que Rr' puede axiomatizar Bpmcr' (es equivalente a A10).

Un *modelo Bpmcr'* es en todo igual a un modelo Bpmc salvo por la adición del postulado

P8. $a \in S \Rightarrow (\ x \in S)\ Raax$

Con este postulado puede demostrarse la validez de A10 (y también la de Rr'). Demostramos a continuación que P8 es válido canónicamente.

PROPOSICIÓN 3. $a \in S^C \Rightarrow (\ x \in S^C) R^C aax$

Prueba. Supongamos $a \in S^C$. Defínase $y = \{B: A \rightarrow B \in a \text{ y } A \in a\}$. Se prueba que y es una teoría tal que $R^C aay$. Supongamos $F \in y$ (y no es consistente). Entonces para alguna $B \in a$, $B \rightarrow F \in a$. Por tanto, $F \in a$ por A10 contradiciendo la consistencia de a. Se extiende ahora y a una teoría prima consistente x tal que $R^C aax$.

De este modo, queda demostrada la completud de Bpmcr'.

9. Bpmc con la regla de reductio: la lógica Bpmcr

Definimos la lógica Bpmcr añadiendo a Bpmc el axioma

A11. $[A \rightarrow (A \rightarrow F)] \rightarrow (A \rightarrow F)$ (i. e, $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$)

Obviamente T1-T8 son derivables. Es fácil ver, por otro lado, que A10 es también derivable. De modo que Bpmcr' está contenido en Bpmcr. Tenemos, además,

Rra. Si $(A \rightarrow B)$, entonces $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

Rrb. Si $(A \rightarrow \neg B)$, entonces $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$

T9. $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

T10. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B)$

T11. $\neg\neg(A \vee \neg\neg A)$

y, sobre todo (utilícense A7, T8, A11 y A8)

T12. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A]$

T13. $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow \neg A]$

Puede demostrarse que cualquiera de Rra, Rrb, T9, T10, T12 y T13 puede axiomatizar Bpmcr en lugar de A11 (cfr. aunque en un contexto no constructivo, Robles y Méndez (2004), Proposición 1, p. 90).

Por otro lado, un *modelo Bpmcr* es en todo igual a un modelo Bpmc salvo por la adición del postulado

P9. $(Rabc \text{ y } c \in S) \Rightarrow (\exists x \in K)(\exists y \in S) [Rabx \text{ y } Rxby]$

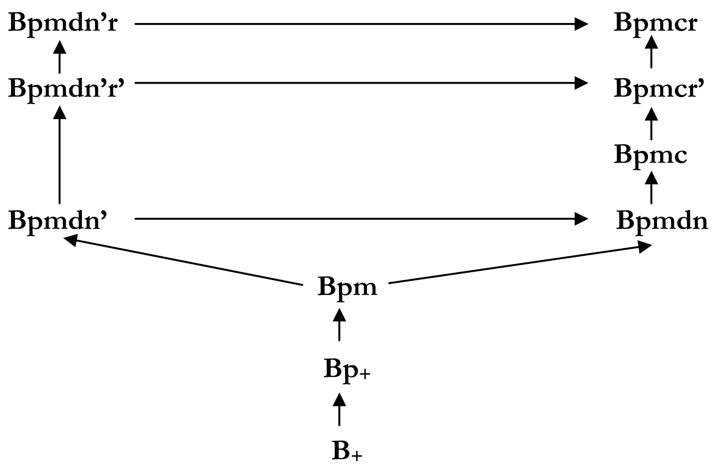
Puede encontrarse en Méndez, Salto y Robles (2002) una prueba de la correspondencia entre A11 y P9 y, por tanto, de la completud de Bpmcr.

10. Las lógicas Bpmdn'r' y Bpmdn'r

Dos últimas lógicas son reseñables, los sistemas Bpmdn'r' y Bpmdn'r. La primera es, claro, el resultado de añadir A10 a Bpmdn'. La semántica se define añadiendo el postulado P8 a los modelos para Bpmdn'. Por tanto, la completud de Bpmdn'r' se sigue inmediatamente de la completud de Bpmdn' y de la correspondencia entre A10 y P8.

Por otro lado, el sistema Bpmdn'r se define añadiendo A11 a Bpmdn'. La semántica es, entonces, el resultado de añadir P9 a los modelos para Bpmdn'; la completud se sigue inmediatamente de la completud de Bpmdn' y de la correspondencia entre A11 y P9.

Finalizamos este apartado con el siguiente diagrama en el que se resumen las relaciones deductivas entre los diez sistemas estudiados en este trabajo (la flecha representa la inclusión entre sistemas: "$x \rightarrow y$" significa "x está incluido en y"):



Es posible demostrar que no se dan otras relaciones de inclusión que las representadas en el diagrama anterior. Pero ocuparnos aquí de esta cuestión desbordaría los límites de este trabajo.

Apéndice

Mostramos con algunos ejemplos cómo definir cualquier lógica (con negación mínima) incluida en la lógica intuicionista mínima, Im.

EJEMPLO 1. *La lógica de la relevancia R con negación mínima (el sistema Rm).*
Para definir Rm basta con añadir a Bpmcr los axiomas

a1. $[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [B \rightarrow (A \rightarrow C)]$

a2. $[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$

EJEMPLO 2. *La lógica intuicionista sin contracción con negación mínima (el sistema Iwm).*
Para definir Iwm basta añadir a1 y

a3. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

a Bpmcr.

EJEMPLO 3. *El intuicionismo mínimo Im.*
Im se define añadiendo a1, a2 y a3 a Bpmcr.

Además de sistemas con negación mínima, podemos, naturalmente, construir lógicas sobre cualquiera de los subsistemas de Bpmcr. Así, por ejemplo,

EJEMPLO 4. *La lógica de la implicación E con negación constructiva (el sistema Ec).*
El sistema Ec se define añadiendo a Bpm el axioma a2 y la regla

a4. Si A, entonces $(A \rightarrow B) \rightarrow B$

EJEMPLO 5. *La lógica de la implicación por "tickets" T con negación constructiva (el sistema Tc).*
El sistema Tc se define añadiendo a Bpmdn' los axiomas a2 y

a4. $(A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]$

Estos son sólo algunos de los muchos ejemplos que podrían proponerse (basta siempre con añadir axiomas positivos (sin negación)). Respecto de la semántica de estos nuevos sistemas sólo sería necesario encontrar los postulados correspondientes a los axiomas positivos introducidos (en relación con a1-a4 puede consultarse Robles (2005)).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto HUM2005-05707.

Un resumen de este artículo se presentó en las *Jornadas de Homenaje a Miguel Sánchez-Mazas* "Característica, Pluralismo y Libertad", celebradas en Madrid los días 10 y 11 de marzo de 2005. El artículo (así como la comunicación en las Jornadas citadas) es nuestra modesta prenda (mínima) de gratitud al insigne lógico y filósofo español.

REFERENCIAS

Dunn, J.M., and G. Restall (2002). "Relevance Logic", en D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic* , vol. 6. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 1-128.

Georgakarakos, G. (1982). "The semantics of minimal intuitionism", *Logique et Analyse* 100, pp. 383-397.

Hughes, G.H., and M.J. Cresswell (1996). *A new introduction to modal logic*. London: Routledge.

Johansson, I. (1936). "Der Minimal Kalkül, ein reduzierte intuitionistischer Formalismus", *Compositio Mathematica*, 119-136.

Méndez, J.M. (ed.) (2006a). *Artículos de Segunda Mano*. Salamanca: Universidad de Salamanca.

——— (2006b). "A note on the semantics of minimal intuitionism", en J.M. Méndez (ed.), *Artículos de Segunda Mano*. Salamanca: Universidad de Salamanca, pp. 11-15.

Méndez, J.M., F. Salto y G. Robles (2002). "Anderson and Belnap's minimal positive logic with minimal negation", *Reports on Mathematical Logic* 36, pp. 117-130.

Robles, G. (2005). *Semántica relacional ternaria para lógicas positivas con la CAP*. Salamanca: Área de Lógica y Filosofía de la Ciencia (Universidad de Salamanca).

———, y J.M. Méndez (2004). "The logic B and the reductio axioms", *Bulletin of the Section of Logic* 33, pp. 43-54.

———, J.M. Méndez y F. Salto (2005). "Minimal negation in the ternary relational semantics", *Reports on Mathematical Logic* 39, pp. 47-65.

José M. MÉNDEZ es Catedrático de lógica en la Universidad de Salamanca. Desde los años ochenta del pasado siglo viene estudiando las lógicas de la relevancia y otros sistemas implicativos. Desde comienzos de los años noventa trabaja con Francisco Salto y/o Gemma Robles en lógicas sin contracción y en los diferentes conceptos de negación constructiva. En la actualidad los tres autores mencionados trabajan sobre negaciones submínimas en la semántica relacional ternaria. Sus resultados han sido publicados en revistas como *Journal of Philosophical Logic*, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *Journal of Symbolic Logic*, *Bulletin of the Section of Logic*, *Studia Logica*, *Logique et Analyse*, etc.

DIRECCIÓN: Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Salamanca. Campus Unamuno, Edificio FES, 37007 Salamanca. E-mail: sefus@usal.es.

Francisco SALTO es Profesor Titular de Lógica en la Universidad de León. Ha publicado numerosos artículos sobre lógicas subestructurales, el problema de las paradojas, el concepto de identidad y, en general, sobre otros temas de la filosofía de la lógica y de las matemáticas en revistas como *Journal of Philosophical Logic*, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, *Studia Logica*, etc.

DIRECCIÓN: Departamento de Filosofía y CCEE, Universidad de León. Campus Vegazana, 24071, León. E-mail: dfcfsa@unileon.es.

Gemma ROBLES es Doctora por la Universidad de Salamanca. Ha publicado numerosos artículos sobre lógicas sin contracción, negación constructiva y otras lógicas subestructurales en revistas como *Logique et Analyse*, *Reports on Mathematical Logic*, *Journal of Applied Non-Classical Logics*, *Logic and Logical Philosophy*, *Bulletin of the Section of Logic*, *Theoria*, *Teorema*, etc.

DIRECCIÓN: Departamento de Filosofía y Lógica y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Salamanca. Campus Unamuno, Edificio FES, 37007 Salamanca. E-mail: gemm@usal.es.