SOBRE LA ESENCIA DE LO FORMAL

Por MIGUEL SANCHEZ - MAZAS

La Matemática y la Lógica actual—o, mejor, el sistema lógico-matemático entero—suelen hoy estudiarse en relación estrecha con un problema que afecta de manera esencial a los fundamentos del saber teórico: el problema del formalismo.

La palabra «formalismo» debe vincularse aquí al sentido tradicional del término «formal» en la expresión «Lógica formal», si bien el alcance de dicho término ha sido extendido y precisado por las investigaciones lógico-matemáticas del último medio siglo y, singularmente, por los trabajos de Edmundo Husserl y de David Hilbert.

Son usuales dos acepciones distintas. Por una parte, designamos con el nombre de formalismo todo sistema de reglas y de relaciones abstractas, referidas a símbolos puros, que constituye la estructura de una Ciencia deductiva «formalizada». Por otro lado, se entiende también por formalismo aquella particular posición de Teoría de la Ciencia que pretende reducir el saber entero—o alguna rama completa de éste, como la Matemática—a un sistema semejante. Tal la actitud general hilbertiana y, más recientemente, la del grupo Bourbaki.

Hemos estudiado y criticado detenidamente el formalismo como posición científica en un trabajo (*) y en una comunicación—resumen de aquél—leída en el Instituto «Luis Vives» de Filosofía (**). En esta nota queremos apuntar, por el contrario, a la esencia y valor del mecanismo formal mismo, cuando pretende constituirse en sistema completo, o sea al formalismo en la acepción de sistema formalizado, en sí. ¿Cuál en su verdadero papel, desde el punto de vista de los «contenidos» propios de un saber cualquiera? Sugerimos una respuesta.

* * *

A la pregunta ¿qué es una Ciencia absolutamente formal?, pueden darse dos respuestas distintas. Hay dos explicaciones posibles del concepto de Ciencia formal. La primera es fundamentalmente negativa, y podría formularse así:

(1) Formal es toda Ciencia que establece sus axiomas y deduce sus teoremas sin referirlos de ningún modo al valor o contenido previo de los símbolos o de los términos aislados, ni hacer uso jamás—implícita ni explícitamente—de dicho eventual contenido.

Esta explicación es intuitivamente más clara que la explicación clásica, que es la siguiente:

(2) Formal es toda Ciencia cuyas conclusiones dependen exclusivamente de la forma de sus expresiones, por lo cual son válidas sea cual fuere la materia (en sentido lógico) de las expresiones mismas.

La explicación (2) parece deducirse inmediatamente de la (1). En efecto, la Ciencia que prescinde, al establecer sus conclusiones, del contenido previo de los términos de que se vale—se dirá—debe extraer necesariamente dichas conclusiones de la mera «forma» de sus expresiones. Se da por supuesto aquí que «forma» y «contenido previo» son elementos contrapuestos en la Ciencia y son —además—los únicos elementos en que pueden fundarse las conclusiones científicas.

Sin embargo, la explicación (2) es menos determinativa que la (1). ¿Cuál es el ámbito general de las conclusiones que dependen de la mera forma de las expresiones? O también, ¿cómo distinguir con toda certeza, en el caso general, cuándo una conclusión depende de la mera forma y cuándo no? Esta cuestión, que parece relativamente fácil cuando se piensa en la Lógica formal clásica—por ejemplo, en la silogística aristotélica—se complica extraordinariamente al tratar de los sistemas formales modernos, en toda su generalidad.

Una proposición valedera en virtud de su forma, según parece desprenderse de las ideas de Hilbert, es una proposición valedera para todo «modelo»—o sea para toda atribución de contenido a sus términos—: en otras palabras, universalmente valedera (allgemeingültig). Para que la validez universal de una fórmula sea contestada es necesario y suficiente que su opuesta sea realizable (erfüllbar), es decir, que tenga algún «modelo» (***).

Pero una teoría de lo formal será imperfecta siempre que no tenga en cuenta las distintas esferas de «contenidos» y de «modelos» posibles, capaces de rellenar un sistema formal. No es lo mismo rellenar una estructura vacía con contenidos lógicos o con contenidos matemáticos; en c a d a caso, los problemas son distintos. Una teoría unitaria de lo formal es posible, pero siempre que considere la irreductible heterogeneidad de los contenidos de la Matemática y de los de la Lógica.

El formalismo debe interpretarse de distinta manera cuando se examina en relación con la Lógica o cuando se examina en relación con la Matemática. En uno y otro caso, lo que de hecho se entiende por «conclusiones que dependen de la mera forma de las expresiones» es distinto.

El formalismo, aplicado a la Matemática, prescinde, desde luego, como hemos dicho en (1), del contenido previo de los términos aislados. Pero ¿en qué consiste ese contenido?

Nos mantenemos fieles a la exigencia de una base intuitiva para la Matemática. No vamos a precisar aquí el sentido en que debe entenderse lo «intuitivo»: baste decir que se opone, de dos maneras distintas, por un lado a lo «significativo» y por otro a lo «formal puro».

Así, responderemos a la cuestión anterior, afirmando que el contenido previo de los términos matemáticos debe ser un valor intuitivo matemático por el que éstos—líneas, números, funciones—se nos representan en una esfera imaginativa especial. El formalismo en la Matemática prohibe toda referencia a esa esfera imaginativa y desarraiga esta Ciencia de su raíz de intuiciones propias. Reduciendo los teoremas matemáticos a las consecuencias de la forma o estructura de un sistema de axiomas, la Matemática se formaliza. Entonces «punto» no es el «punto» de la intuición, «entre» el «entre» de la intuición, «línea» la «línea» de la intuición (****), sino los sujetos de unas leyes que sólo establecen sus relaciones mutuas. ¿Cómo interpreta esto el matemático? Diciendo que **«la Matemática se ha reducido a Lógica formal».**

Pasemos a examinar ahora en qué consiste la aplicación del formalismo a la Lógica, o sea qué valor tiene la formalización de esta Ciencia. La Ló-

---

(*) Miguel Sánchez-Mazas: *El formalismo y el problema de los fundamentos de la Ciencia*, en prensa en el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas.

(**) *Consideraciones en torno al formalismo en la Ciencia*, comunicación leída en sesión científica de la Sección de Filosofía e Historia de la Ciencia del Instituto «Luis Vives» de Filosofía, el 9 de marzo de 1951.

(***) Cf. D. Hilbert W. Ackermann: *Grundzüge der theoretischen Logik*, dritte Auflage, Berlín-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1949 págs. 18, 37, 41, 95, 109.

(****) Cf. D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, sechste Auflage, Leipzig und Berlín, Teubner, 1923, pág. 2; «Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie *liegen, zwischen, parallel, kongruent, stetig*: die genaue, und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*».

gica formal aristotélica no era formalismo puro—en el sentido moderno—porque en ella, aunque se prescindía de algunos contenidos, se mantenían, no obstante, los esencialmente lógicos—las 'constantes lógicas'—como son los de los términos **verdad, significado, inferencia, negación,** etc. En la Lógica moderna plenamente formalizada, por el contrario, se prescinde incluso de éstos. Las conclusiones deben ser verdaderas sean cuales fueren los pensamientos que se sustituyan en el lugar del símbolo de implicación, verdadero, falso, etc. Unas matrices (*****) o unas reglas indican cómo debe operarse con estos símbolos. Las conclusiones se deducen en virtud de un mecanismo formal. El formalismo dispensa al lógico de pensar y le prohibe toda referencia a su esfera de pensamiento propia. ¿Cómo interpreta esto el lógico? Diciendo que **«la Lógica se ha reducido a Matemática formal.»**

Vamos a intentar comprender los anteriores hechos. Por una parte, es evidente que tanto la Matemática como la Lógica son algo más que el formalismo. A nuestro juicio, la primera no puede prescindir de intuiciones o contenidos intuitivos, ni la segunda de pensamientos o contenidos significativos. Podemos decir que la Matemática aplica un mecanismo formal a una esfera de constantes intuitivas (línea, número, correspondencia biunívoca), mientras que la Lógica aplica ese mismo mecanismo formal a una esfera de constantes lógicas (verdad, falsedad, consecuencia). En uno y otro caso son necesarios, pues, contenidos previos.

Pero la dificultad que aquí nos ocupa no es cómo puedan ambas Ciencias, en la concepción formalista, desarraigarse de sus esferas propias, sino cómo es posible que el formalismo convierta, por un lado la Matemática en Lógica formal, y por otro, la Lógica en Matemática formal. La reducción de una Ciencia a formalismo no parecía legítima; pero esta operación del formalismo no parece siquiera posible. En efecto, ¿de qué modo conciliar la interpretación del lógico y la del matemático? ¿No se trata en uno y otro caso de un mismo mecanismo formal? Ese mecanismo ¿es en sí matemático o lógico?

No se suele plantear, de ordinario, esta cuestión en los términos en que lo estamos haciendo, o sea dirigiendo la mirada, al mismo tiempo, a la esencia de la Lógica y a la esencia de la Matemática. Según la perspectiva de la Matemática tradicional y verdadera, con su exigencia de una base intuitiva o imaginativa (******), el mecanismo formal representa en ella el elemento lógico, y el formalismo significaría, por lo tanto, su reducción a la Lógica. Según la perspectiva de la Lógica tradicional—por otra parte—, con su exigencia de una base significativa, el mecanismo formal representa (en ella) el elemento matemático, y el formalismo sería entonces su reducción a la Matemática. Pero ambas interpretaciones no parecen admitir inmediatamente una conciliación.

Para resolver esta aparente dificultad, hemos de llegar a la esencia del mecanismo formal y a la explicación de la verdadera situación del pensamiento humano respecto de él.

El formalismo, abstractamente considerado, es, como hemos dicho, la Ciencia que pretende fundarse enteramente sobre relaciones formales puras, sin alusión a ninguna especie de contenidos. Pero este concepto no se aplica en cada Ciencia concreta, en particular, de **un modo absoluto,** sino **relativamente a la esfera de los contenidos específicos de la Ciencia en cuestión.** En otras palabras, el mecanismo formal puro, sin referencia a **ninguna suerte** de contenidos, en absoluto, no puede dar origen a ninguna Ciencia particular. No decimos que el intento sea ilegítimo, sino algo más. Decimos que **encierra una imposibilidad intrínseca.** Así, de hecho, ese mecanismo formal, cuando se aplica a la Matemática, **se contenta, en el caso extremo, con inhibirse de los contenidos específicos de la Matemática, o sea de las representaciones intuitivas, como las sugeridas por 'número', 'línea', etc., pero entonces se apoya en constantes lógicas, cuyo contenido se supone, tales como verdad, contradicción, implicación, etc.** Suele decirse que en la Matemática formal no se toleran intuiciones ni representaciones imaginativas, sino sólo pensamientos. Esta Matemática se ha hecho, pues, Lógica.

Viceversa, cuando el mismo mecanismo formal se aplica a la Lógica, **se contenta, en el caso extremo, con inhibirse de lo que significan, en definitiva, los conceptos de verdad, contradicción, etc., pero esto ocurre a expensas del empleo de los recursos imaginativos o gráficos de la Matemática, tanto aritmético-combinatorios como geométricos.** No son lícitos pensamientos, como verdadero, falso, etcétera, pero sí en su lugar las intuiciones propias del operar con números, como la propiedad asociativa, conmutativa—que expresan hechos intuitivos—y las leyes generales algebráicas, o las del operar con conjuntos de puntos o figuras, etc. En la Lógica de clases, basada en la Teoría de conjuntos, el contenido previo de términos como 'contiene', 'interior', 'pertenece' debe ser poseído al comenzar. Este contenido es intuitivo, matemático, no lógico. Es por eso por lo que la Lógica se hace entonces Matemática.

De un modo análogo ocurre dentro de cada rama. Hilbert ya observó que la formalización integral de la Geometría, si es que logra la independización de esta Ciencia respecto de los conceptos geométricos básicos, debe dar por supuestos, no obstante, ciertos conceptos aritméticos.

Este es el significado último de lo formal, que decide del valor del formalismo. El formalismo se inhibe de los contenidos propios de la Ciencia a que en cada momento se aplica, pero no en absoluto de toda suerte de contenidos, lo cual sería imposible, sino apoyándose en los contenidos de otra Ciencia. En el caso de la Lógica y de la Matemática, su papel consiste en referirse intencionalmente en sus conclusiones a una de las dos esferas, empleando un mecanismo formal basado en los contenidos de la otra.

En una palabra, Lógica y Matemática permutan entre sí, gracias al formalismo, el sistema de sus fundamentos. Parece que, cansadas de apoyar siempre en la misma base, han decidido dedicarse a este juego.

(*****) Como es sabido, la única *explicación* que en Lógica formalizada puede obtenerse de un símbolo es una *explicación operativa*; es decir, relativa al modo en que dicho símbolo interviene en las *operaciones lógicas*. Los principales conceptos de la Lógica se convierten aquí en *operadores*, representados por una matriz. Así, (0,1) representa la *negación*; (1, 1, 1, 0) la *alternativa*; (1, 0, 0, 0,) la *conjunción*; (1, 0, 1, 1,) la *implicación material*; (0, 1 ,1, 1,) la *disyunción*; (1, 0, 0, 1,) la *equivalencia*; (1, 1, 1, 1,) la *tautología*, etcétera. (El lector no iniciado puede consultar, por ejemplo, Bochenski: *Précis de Logique mathématique*, Bussum, Kroonder, 1949, págs. 15-22 o, en castellano, A. Tarski: *Introducción a la Lógica y a la metodología de las Ciencias deductivas*. Buenos Aires, Espasa Calpe, 1951, págs. 56-62.)

(******) La concepción de la Matemática como Ciencia de la imaginación, familiar al aristotelismo, fué recogida y formulada con singular claridad e insistencia por Leibnitz. Cf., por ejemplo, el opúsculo de 1683 sobre el Cálculo de alternativas (Cat. Bodemann, Math. I, 26 a), donde dice: *Mathesis est scientia rerum imaginabilium*, y el titulado *Elementa nova Mathesos Universalis* (Cat. Bodemann, Phil. VII, B VI, 9-12), en que declara: *Mathesis Universalis tradere debet Methodum aliquid exacte determinandi per ea quae sub imaginationem cadunt.*