UN FAMOSO SIMBOLO MATEMATICO: LA ESPIRAL DE BERNOULLI

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

Colaborador del Instituto de Filosofía «Luis Vives»

Secretario de la Sección de Epistemología

SOBRE la tumba de Jacobo Bernoulli —el más antiguo de una gloriosa estirpe de matemáticos— está grabada la figura de una espiral, acompañada de un breve epitafio latino: *Eadem mutata resurgo.* Diremos, en idioma castellano: *Siempre igual y siempre nueva resucito.*

Jacobo Bernoulli

¿Hay, acaso, un símbolo más bello que éste para sugerir el último, extraño destino del alma humana que, sin dejar de ser ella misma, se dispone, gloriosamente, a ser otra, a emprender el viaje que ha de envolver, en su centrífuga trayectoria, todos los cielos? ¿Hay una imagen más adecuada para hacer sentir al que la contempla la paradoja de un cambiar sin cambiar, el misterio de un ir hacia lo eterno, hacia lo infinito, sin dejar de ser la pobre criatura temporal que se era? Un matemático de Basilea, cabeza de una raza de matemáticos que dominó toda una época, nos ha dejado, en piedra, a principios de siglo XVIII, este hondo tema de meditación: El sublime valor alegórico de las formas geométricas en el humano esfuerzo por expresar lo que trasciende nuestra razón, lo que desborda nuestra esencial finitud y temporalidad.

En la prodigiosa edificación milenaria que es la Ciencia, hay que ver un doble mensaje: por una parte, el mensaje directo de sus proposiciones y de sus demostraciones, entendidas en su estricto sentido racional, que consiste, de ordinario, por desgracia, en una mera relación de carácter formal entre términos en el fondo desconocidos; por otra parte, el mensaje simbólico, poético, que nos sugiere, a través de figuras que debemos entender sólo en un sentido analógico, captando su más íntima cualidad, realidades supra-racionales e inefables.

La representación poética, parabólica de las cosas, no surge sólo del género narrativo y de lo que se llama literatura: también las imágenes de la Ciencia han de ser tomadas, por encima de ese valor de versión precisa de los hechos, en su vertiente universal, que sólo aparentemente tienen, como esquemas cuya verdadera función es sugerir de un modo, ciertamente, remoto, algunos rasgos de los modelos universales empleados por el Creador en la formación de una realidad que, abordada por la razón desnuda, de un modo directo, aparece cruzada por contrastes irresolubles, encabezados por la gran dualidad de lo finito y de lo infinito.

Vamos a adelantarnos unos meses a la conmemoración del tercer centenario del nacimiento de Jacobo Bernoulli, el famoso hombre de ciencia suizo que, al iniciar una de las más largas dinastías de sabios que recuerda la Historia, pone en un verdadero aprieto a los biólogos y sociólogos que menosprecian el valor de la herencia para la vida del espíritu y pretenden explicarlo todo por la influencia del medio ambiente. Entremos en la meditación del extraño símbolo y del extraño epitafio que hay sobre su losa y que acaso puedan hacernos entender, por vía poética, el alma verdadera de la Matemática.

Entre todos los Bernoulli, y contrastando vivamente con su hermano Juan, matemático también, de inteligencia rápida e intuitiva, pero imprecisa y variable, y, como es sabido, peligroso rival, que le disputaba la prioridad en la mayor parte de sus descubrimientos, fué Jacobo el más profundo y dado a la meditación, el más religioso y contemplativo de su familia, uno de esos espíritus egregios que, como Nicolás de Cusa, Leibniz, Bolzano y Jorge Cantor, unieron, de modo admirable y para escándalo a la vez, de cientifistas ateos y de creyentes mezquinos, temerosos de la claridad de la razón y de la Ciencia, el estudio de las Matemáticas con el conocimiento de los principios de la Teología, enlazando así, podemos decir, los dos grandes polos del mundo abstracto.

No fué, sin embargo, de ninguno de esos matemáticos teólogos de quien aprendió nuestro hombre el modo de manifestar, después de muerto, mediante un signo geométrico, el sentido de su vocación y de su vida terrena, a la vez que el anhelo de inmortalidad, sino del gran siracusano Arquímedes, el más célebre de los geómetras paganos, el que murió distraído entre sus figuras, cuando el enemigo entraba en su ciudad, en un bello ejemplo de amor a la Ciencia y desdén por las incursiones bestiales de la violencia humana en el sagrado de la Cultura. Cuentan, en efecto que, ciento cincuenta años después de la conquista de Siracusa por los romanos, Cicerón, inteligentemente, logró descubrir el sepulcro de Arquímedes por la esfera y el cilindro esculpidos en la piedra, en perenne recuerdo de sus gloriosos trabajos.

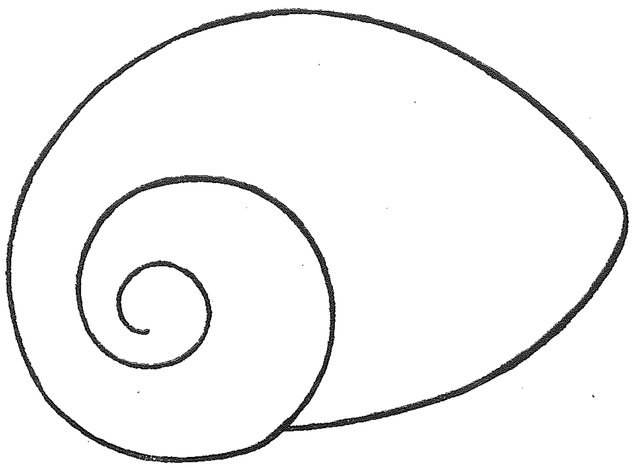
Hallamos, pues, en el más ilustre matemático de la Antigüedad, un precedente del geométrico epitafio que comentamos. Pero una más viva esperanza de sobrevivir, de trascender, que mediante la pagana inmortalidad de la gloria ha quedado grabada sobre la losa de Jacobo Bernoulli. Una esperanza de hondas raíces cristianas, expresada en lengua matemática. Para el gran matemático de Basilea, la espiral no fué sólo una glosa lapidaria de sus geniales investigaciones en el campo de las curvas: fué, principalmente, un misterioso símbolo de la Resurrección que su alma hondamente sentía y esperaba. Cada mentalidad, cada inteligencia, expresa a su modo los arcanos misterios que hay en las fronteras de la razón y de la vida. Los hombres se reparten, según sus vocaciones, los símbolos capaces de manifestar su peculiar intuición de lo inexpresable, como niños que se repartieran unos juguetes. Alguien cogerá una estríada concha, entre la arena, a la orilla del mar, y hablará —como en el *Eupalinos*, de Paul Valery— de la acción de un orden a través del movimiento de la naturaleza; alguien llevará al pentagrama, como Kepler, la armonía de las esferas que ha creído escuchar; otros, por fin, trazarán con la tiza en la pizarra, llenos de sublime, maravillosa ingenuidad, las ecuaciones y las curvas que, a su juicio, explican esquemáticamente el curso del mundo y dan la clave de un fenómeno físico, económico o estético. Así apareció ante los ojos extrañados de los alumnos la campana de Gauss, que es la gran imagen representativa del pensamiento estadístico. Así fué también cómo el franciscano Lucas Pacioli sintió, en el momento más hermoso del Renacimiento del Arte, frente a la expresión algebraica y geométrica de la áurea razón, que una de las leyes del inefable mundo de la belleza se le entregaba.

Fueron los poliedros regulares, en el *Timeo*, de Platón, el símbolo de los elementos fundamentales del Universo. Dominaba entonces el pensamiento la helénica identificación de perfección y finitud. Nada podía ser perfecto si no estaba definido con precisión, y estar definido era lo mismo que estar limitado, como los poliedros por sus caras. Y el movimiento perfecto debía ser aquel que se cerrara sobre sí mismo, es decir, el circular, representativo, según Aristóteles, de la Física propia del mundo sidéreo e incorruptible, el mundo superior de los astros.

Pero, frente al concepto cerrado e inmanente de la perfección mantenido por la corriente filosófica central del mundo clásico, un impulso de abertura, de trascendencia, de fuga hacia lo infinito se apodera, en los comienzos de lo que puede llamarse Europa, del espíritu del ser fi-

Leibniz.

nito, del hombre. La conciencia del contraste radical entre el Creador y la creación, traída por la filosofía religiosa de Plotino y, sobre todo, por el Cristianismo, infunde en el alma humana, por un lado, la certeza de que las medidas de nuestra razón son insuficientes para medir el Ser Perfecto y definir la verdadera perfección y, a la vez, el ansia de ascenso, de «ascesis», hacia dicha perfección supra-racional, situada a una distancia infinita. Esa distancia es infinita aún para la gran mente armonizadora de San Agustín, que hace perfectamente compatible el nuevo espíritu infinitista con la exigencia platónica de que todo verdadero ser posea una medida, un número. Pues, según su imagen, inspirada en Plotino, la escala ascendente de los números llega a un término, correspondiente a Dios, que es numerador de todos los restantes, pero no numerado; en otras, y más claras palabras: que es sujeto de numeración y de medida, pero no objeto; capaz de medir, pero no de ser medido. Este número, por no ser conmensurable con los restantes, aparece como infinito. Y así lo infinito adquiere un carácter positivo, es el término perfecto al que aspira todo lo finito: y el movimiento universal ya no será cerrado, como la cir-



Dolium galea

cunferencia, sino abierto, como la espiral, que en el siglo en que culmina la nueva fase de la Cultura, y en los años en que Leibniz inventa el cálculo infinitesimal, cuando los estudios sobre las curvas están en su apogeo, es elevada por Jacobo Bernoulli a la dignidad de figura representativa del espíritu que ansía resucitar y trascender.

Hizo bien el matemático suizo en desoír los consejos de su padre, que le dirigían a la vida de predicador y teólogo en la ciudad de Estrasburgo. Su vocación era marcadamente la de matemático y, sin duda, a través de la Matemática, llegó mucho mejor que de otro modo al mundo de la religión y del misterio. A cada uno, lo suyo.

Pero veamos hasta qué punto, por coincidencias muy curiosas, es la espiral de Bernoulli la figura realmente más propia para simbolizar, no ya sólo el escape hacia lo infinito, de que hemos hablado, sino además —y de un modo muy peculiar— la aptitud para resucitar, para reaparecer de nuevo en toda transformación; en una palabra, para resurgir de sí misma o de sus cenizas, como verdadero Ave Fénix de la Geometría.

La espiral de que hablamos no debe confundirse con la de Arquímedes, descrita por el sabio de Siracusa en su tratado *Sobre espirales*. Esta se define como la curva engendrada por el extremo de un radio vector cuya longitud crece proporcionalmente al ángulo recorrido. Tampoco es la espiral llamada hiperbólica. La espiral de Bernoulli es la que se conoce con el nombre de espiral logarítmica, cuyas sorprendentes propiedades, como veremos, desbordan ampliamente la región del interés propiamente matemático.

Se debe a Evangelista Torricelli y a Descartes el descubrimiento de esta curva. Al parecer, los dos grandes sabios llegaron a ella independientemente en 1640, como les ocurrió a Leibniz y a Newton con el cálculo infinitesimal. No obstante, los peculiares caracteres y propiedades geométricas de la espiral logarítmica no fueron revelados hasta que Jacobo Bernoulli no les dedicó dos artículos en 1691 y 1692 en las *Acta Eruditorum*, de Leipzig. Desde entonces, la extraña línea fué para el matemático suizo la «spira mirabilis», la maravillosa figura que hoy vigila el sueño de su cuerpo en espera del último día.

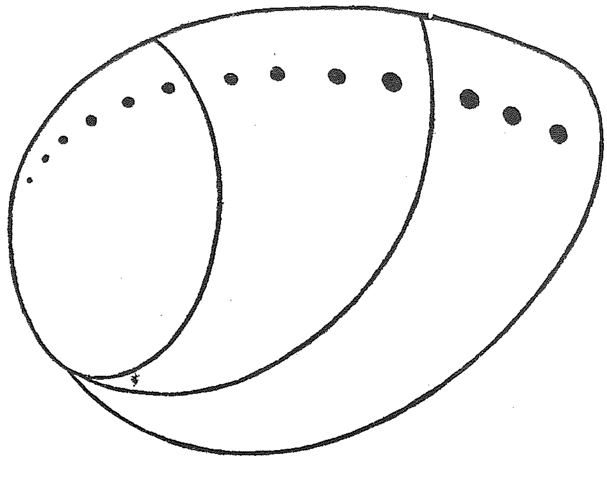
Primeramente se encontró en la espiral logarítmica una propiedad que no se halla en otras curvas. Si se aplica a dicha espiral cualquiera de las principales transformaciones geométricas u ópticas, la curva que resulta es todavía una espiral logarítmica. Si se halla la curva que en Geometría se llama envolvente de la espiral de Bernoulli, aparece otra espiral de Bernoulli. Si se busca la evoluta, reaparece la misma curva. La figura llamada cáustica por reflexión, derivada de la espiral logarítmica, es otra espiral logarítmica. Del mismo modo la cáustica por refracción. Si se hace rodar una espiral logarítmica móvil sobre otra fija, la ruleta engendrada por el polo de la primera es también una espiral logarítmica, semejante a las dos. Parece que, cualesquiera que sean las operaciones a que se la someta, la curva de Bernoulli no se resigna a desaparecer, dando origen a otra curva distinta. Esto ya sería suficiente para ver en la curva un bello símbolo de permanencia y de inmortalidad. Pero Jacobo Bernoulli se hubiera admirado extraordinariamente si hubiera llegado a conocer otras circunstancias, descubiertas mucho más tarde, que han hecho de su espiral, sin duda alguna, la figura más rica de sugerencias y valor alegórico de todas las que pueden estudiarse en la Geometría.

Pues si, desde un punto de vista geométrico y óptico, la curva que nos ocupa representa la reaparición incesante de la misma forma, a través del cambio, cuando salimos del campo de las figuras abstractas, es decir, de la Geometría, y entramos en el terreno de los objetos concretos, en el dominio de la Naturaleza, ocurre algo semejante. Se tiene la impresión de que esa reaparición continua de lo idéntico no es una propiedad inherente sólo geométricamente a la espiral de Bernoulli, no es una cualidad accesoria, sino que se trata de la verdadera esencia de la curva, representa lo que ella es en su más íntimo sentido, y, como natural consecuencia, deberá manifestarse en todas partes. El investigador inglés Hambidge intuyó con toda claridad esto que decimos cuando encontró que la espiral logarítmica es la ley que rige todo crecimiento vegetal, y también el de las conchas y caracoles marinos —crecimientos en los cuales se mantiene invariable la forma inicial—. «Esta espiral es en la Naturaleza —dice en su obra *Dynamic Symmetry,* que pretende ser una interpretación del concepto de «simetría dinámica» al que alude, misteriosamente, Platón, en un pasaje— el resultado de un proceso de crecimiento proporcional continuo». En efecto, «la misma curva persiste en el desarrollo de la planta y en el de la concha». Por su parte, otro investigador, D'Arcy Thompson, hace notar en una de sus obras, *Growth and Form,* o sea, *Crecimiento y forma,* lo siguiente: «La concha mantiene invariable su forma, a pesar del crecimiento asimétrico. Del mismo modo que los cuernos de los animales crece sólo por una extremidad, y esta notable propiedad de aumentar por crecimiento terminal, sin modificación de la figura total, es característica de la espiral logarítmica». Henos, pues, ante un nuevo aspecto del dinamismo reproductor de la curva de Bernoulli.

Pero las cosas interesantes no acaban aquí. Matila Ghyka, el genial rumano que ha estudiado a fondo el tema de las proporciones matemáticas en la Naturaleza y en la Estética, a través de dos libros decisivos en este asunto, ha relacionado muy justamente el «crecimiento isomorfo», es decir, «sin cambio de forma», con la antigua teoría de los «gnomones», a la que con frecuencia alude Aristóteles, y cuyo origen es, ciertamente, pitagórico. El «gnomon» de una figura cualquiera puede definirse como aquella otra figura que, al ser yuxtapuesta a la dada, en la forma de dos piezas de un rompecabezas, compone una nueva —la figura total— cuya forma es idéntica a la de aquélla. La figura inicial y la que resulta al añadir a ésta su gnomon, constituyen lo que se llama en Geometría «figuras semejantes». Puede decirse también que, si se separa de una figura su gnomon, queda otra figura semejante a la primera. Tal vez esto se entienda si decimos que el gnomon de un triángulo es un trapecio, pues, cortado éste, queda otro triángulo semejante al de partida. El rectángulo armónico se define, empleando este concepto, como el rectángulo cuyo gnomon es un cuadrado. Pues bien, D'Arcy Thompson señala cómo en la concha —y cita el ejemplo de la *Haliotes Splendens,* por él estudiada— las generatrices, que son espirales logarítmicas, determinan superficies gnomónicas curvas. He aquí, de nuevo, la curva de Bernoullia, vinculada a un fenómeno de permanencia de la forma originaria.

Resumiendo todos estos resultados, Matila Ghyka enuncia un teorema que nos muestra, bien a las claras, el carácter de la espiral de que tratamos: «Si una estructura cualquiera está compuesta de partes sucesivas semejantes y semejantemente situadas, podemos siempre trazar por los puntos correspondientes una espiral logarítmica». Queda, pues, establecido el papel de la «spira mirabilis» de Jacobo como ley general del crecimiento o cambio isomorfo, o sea, sin variación de la forma total; o, si preferimos usar la terminología del autor rumano, como ley del crecimiento armónico. Existen también muy estrechas conexiones matemáticas entre la famosa espiral, el Número de Oro y la sucesión de Fibonacci. Si la importancia de un tema científico depende —como cree Rey Pastor— del número y la variedad de hechos, concretos o abstractos, que es capaz de poner en relación, se comprenderá que la importancia de la curva de Bernoulli es de primer orden.

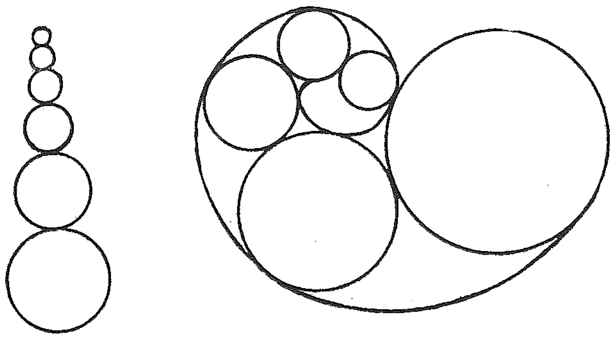
Aún nos detendremos en otra consideración más. La espiral logarítmica representa, en una carta geográfica, la ley de navegación sin cambio de rumbo. En efecto, hay una curva descu-



Haliotes Splendens

bierta por el gran matemático portugués Pedro Núñez, cuya importancia para la navegación y para la Matemática ha sido puesta de relieve por el mismo Rey Pastor en su libro *Ciencia y técnica en el descubrimiento de América.* Esta curva se denomina *loxodromía,* y podría definirse como la línea alabeada que indica, sobre la esfera terráquea, la trayectoria seguida por un barco cuya brújula marque siempre la misma dirección. Ahora bien, la proyección estereográfica de la loxodromía, según explica Gallego Díaz en su *Curso de Matemáticas en forma de problemas,* es la espiral logarítmica.

Después de esto, ¿no hemos llegado a comprender un poco, en su más profundo sentido, el papel de la Matemática, entre los diversos modos de explicación del mundo? ¿No distinguimos el plano en que los matemáticos operan, aquello que buscan, su estilo de pensamiento? Acaso pudiera representar la famosa espiral de que hemos hablado no el alma de Jacobo Bernoulli y sus vivas ansias de inmortalidad, sino el alma misma de la Matemática, que no es otra cosa que el afán de reducir hechos, fenómenos distintos, a las mismas formas generales. Pero no se trata aquí de las formas concretas, que se dan en la Naturaleza, no se trata del reino de las puras apariencias sensibles —el reino del color, del sonido, del movimiento—, ni estamos tampoco en el dominio de las puras esencias, el mundo de la Filosofía. Estamos en un terreno intermedio, en un terreno de formas, desde luego, pero de formas abstractas: no encontraremos en él la concha *Haliotes Splendens*, ni las curvas de la navegación con rumbo fijo, ni los cuernos de los animales. Hay sólo un dibujo común a todas estas cosas. Pero ni aun este dibujo cabe tomarlo en serio: sólo las relaciones que él expresa, que en él están implíci-



tas, deben interesarnos. También son nuestro objeto las expresiones algebraicas, pero no del todo, pues podríamos escribirlas de distintas maneras, sin que la realidad matemática cambiara en absoluto. Podemos decir que *la Matemática considera distintos planos de formas y estudia qué cosas de uno de los planos mantienen su forma cuando las que están situadas en el plano inferior la varían.* Es, acaso, el saber que mejor ha sabido estratificar en capas sucesivas los objetos, según su mayor o menor capacidad de variar, para disponerlos adecuadamente ante el que ha sido definido como el verdadero fin de la Ciencia entera: El hallazgo de los invariantes en un mundo que varía. Desde este punto de vista, el famoso *Programa de Erlangen,* de Klein, es la mejor ordenación que se conoce de los invariantes según su jerarquía, y de las ramas de la Ciencia según los invariantes de que se ocupen.

Sin embargo, aun los *invariantes últimos* que alcanza la Matemática —incluso considerando toda la lógica formal moderna como una de sus partes—, ¿expresan un conocimiento verdaderamente definitivo y exacto del mundo? ¿O será su valor meramente alegórico, como una parábola, como un verso, como la pura manifestación de esperanza en la inmortalidad que es la espiral del epitafio de Jacobo Bernoulli?

Madrid, 28 de octubre de 1952.