La teoría del silogismo desarrollada en forma de álgebra

Por MIGUEL SANCHEZ-MAZAS

A Juan David García Bacca, que renovó en la Península, hace veinte años, el gusto por la lógica formal, perdido desde Lulio y Pedro Hispano, y hoy prosigue en nuestra América su alto magisterio filosófico.

1. Preliminares.

Tratamos en este trabajo de dar a conocer a quienes se interesan por los problemas de lógica formal, especialmente en lo relativo a su expresión simbólica y resolución algebraica, el modo sencillo y perfecto en que la teoría del silogismo categórico, fundada por Aristóteles en los Primeros Analíticos (1), puede quedar incorporada a la matemática —en cuanto a su estructura— rigurosamente y en forma definitiva, como lo fué, en su día, el cálculo elemental de clases y proposiciones, a través del Algebra de Boole (2). Hemos logrado, en efecto, desarrollar por entero la silogística como un sistema algebraico independiente de todo supuesto previo, de suerte que la conclusión pueda derivarse de las premisas en todos los modos válidos (3), matemáticamente, por una cadena continua de ecuaciones, de acuerdo con cinco axiomas puramente formales (4), de manera análoga a como una expresión del álgebra ordinaria puede obtenerse a partir de otra en virtud de ciertas leyes de reducción o transformación legítima establecidas en la correspondiente teoría.

Según nuestras noticias (5), que abarcan hasta el año 1953, este resultado es nuevo, no ya meramente en su presentación, sino en su sustancia. La formalización perfecta de la teoría silogística, o sea, su desarrollo como ciencia independiente y autosuficiente acerca de una peculiar estructura de signos puros (6), sin subordinación a los axiomas, reglas, variables y funciones lógicas de un campo más amplio —por ejemplo, a los de la teoría de proposiciones (7) o de clases (8), como ha solido hacerse—, sino fundada en las condiciones estrictamente necesarias y suficientes para caracterizar dicha estructura y deducir como consecuencia directa (9) cada uno de los modos válidos, por un automatismo (10) común a todos, es un intento repetidamente abordado a lo largo de la historia de la lógica, y que, una vez logrado, ofrece, aparte de su interés matemático y didáctico, la pauta para la construcción del más sencillo mecanismo posible para la resolución automática —por vía electrónica, por ejemplo— de cualquier razonamiento silogístico concluyente (y la exclusión de cualquiera no-concluyente), pieza u órgano nada desdeñable para los grandes "computers" o calculadoras electrónicas, que ignoramos si habrá sido ya realizada e incluída en el seno de alguno de estos cerebros gigantes por algún procedimiento distinto, acaso más complicado (y, como consecuencia, más caro, por el uso de un mayor número de tubos o válvulas (11), tan costosos) que el sugerido por nuestra álgebra (12).

En nuestra opinión, el simbolismo y el método matemático, que han alcanzado éxitos resonantes y de valor permanente en distintos sectores de la lógica (13), no han sido aplicados a la silogística hasta el punto de lograr una formulación axiomática definitiva por su simplicidad, aunque lo suficientemente compleja para permitir considerar toda la variedad de los modos clásicos (14). Esto debe extrañar, en cierto modo, si se piensa que desde Leibniz —es decir, desde el nacimiento mismo de la lógica matemática— hasta el presente han sido numerosos los intentos de conversión de la teoría del silogismo en una verdadera álgebra, que facilitara la exposición del más antiguo e ilustre de los sistemas deductivos —sobre cuya importancia pedagógica y formativa se ha insistido siempre— sustituyendo el farragoso y barroco verbalismo, en tanta parte redundante (15), de los textos escolásticos y la pintoresca mnemotécnica de vocales y consonantes del Barbara, Celarent, Darii... (para cuya comprensión intuitiva y unitaria, por parte de las verdes mentes escolares, no basta ni el auxilio de los Círculos de Euler, última modernidad (16) con que transigen aquellos textos) por un "modus operandi" automático, breve y elegante —único para toda suerte de antecedentes silogísticos— el cual no precisara tener en cuenta las reglas especiales de las figuras ni tuviera que considerar, por un privilegio sin sentido desde el punto de vista formal (17), como axiomáticos los modos de la 1.ª figura (por más "naturales") y como derivados los de las restantes; sino que pusiera al descubierto sólo la trama esencial, universal del silogismo, definida por un corto número de axiomas formales, independientes y escritos como ecuaciones matematicas.

Al mismo filósofo de Leipzig, en efecto, se deben varios métodos de representación matemática de la silogística, ya de carácter geométrico (18) ya algebráico y aritmético y fundados en la perspectiva de la comprenhensión (19) que preside el amplio plan en que están incluídos: la Combinatoria Universal (20). Ninguno de estos métodos llega a un resultado completo y definitivo y a la deducción matemática de todos los modos tradicionales (21). No obstante, ellos han dado la pauta para todos los esfuerzos posteriores.

En la lógica matemática actual, la formalización de la teoría del silogismo se ha llevado a cabo, fundamentalmente, por dos caminos: partiendo del cálculo de clases o partiendo del cálculo de proposiciones. Ambas perspectivas incluyen la silogística en sistemas más amplios, subordinando algunos de sus principios o todos ellos a los axiomas de los citados cálculos. Por lo tanto, la estructura del silogismo no aparece definida por un sistema axiomático propio, autosuficiente. Diremos dos palabras de cada uno de estos métodos.

Cuando se parte del cálculo de clases, se representa cada término por un símbolo, sin usar cuantificadores, sino dando por supuesto que los términos se toman en toda su universalidad. Se usan, como operadores básicos, los de negación, alternativa o suma lógica y conjunción o producto lógico; con su ayuda, las cuatro clases de proposición que se precisan en la teoría del silogismo categórico. universal afirmativa, universal negativa, particular afirmativa y particular negativa, quedan expresadas del siguiente modo:

Todo A es B: **no-A o B.** En símbolos: **A'vB**

Ningún A es B: **no-A o no-B.** En símbolos· **A'vB'**

Algún A es B: **no-(no-A o no-B).** En símbolos: **(A' v B')**, equivalente a **A & B.**

Algún A no es B: **no-(no-A o B)** En símbolos: **(A' v B)'.**

donde el símbolo de alternativa es "v", el de conjunción es "&" y la clase complementaria (o negación) de una clase X se prepresenta por "X'". Aplicando ahora las leyes del cálculo de clases, pueden deducirse de todas las posibles parejas de premisas del tipo indicado, que sean concluyentes, las respectivas conclusiones, salvo para el caso de los cuatro modos válidos Darapti, Bamalip, Felapton y Fesapo que no pueden demostrarse —y éste es un defecto grave que invalida esencialmente el método— partiendo del cálculo de clases. Hilbert y Ackermann, en sus famosos "Grundzüge der theoretischen Logik", reconocen este grave fallo del método que ellos mismos usan y lo explican indicando que el sentido clásico de la universal afirmativa "Todo A es B", no queda exactamente traducido por la fórmula **A'vB,** ya que la proposición "Todo A es B" es, en el pensamiento de Aristóteles válida sólo si hay objetos de la clase A (o sea, si A no es una clase "vacía"), mientras que en el cálculo de clases no se hace este supuesto (22).

Análogo defecto encontramos en una nueva variante de la fundamentación de la silogística en el cálculo de clases, expuesta por Basson y O'Conner en una obra de lógica matemática aparecida en Londres el año pasado (23). Su intento consiste en reducir la deducción de la conclusión a partir del antecedente al Algebra de Boole (24) y se basa en la siguiente representación de las cuatro especies de proposición categórica:

Todo S es P: **SP' = O** (25).

Ningún S es P: **SP = O** (26).

Algún S es P: **SP ≠ O** (27).

Algún S no es P: **SP' ≠ O** (28).

Ahora bien, con este punto de partida, la deducción de los modos es larga y laboriosa sin admitir, además, una expresión totalmente matemática en una cadena continua de implicaciones o equivalencias (29); por el contrario, debe intervenir continuamente el razonamiento lógico; con lo cual la formalización no puede considerarse completa. Por otra parte, los autores se ven también obligados a admitir, al igual que Hilbert y Ackermann, que dos modos válidos de la 3.ª figura y dos de la 4.ª son indemostrables por este camino (30).

Si no existieran estos inconvenientes, y la silogística se redujera de modo perfecto al Algebra de Boole, la inclusión de la deducción silogística en las máquinas de calcular tendría una solución inmediata y simple, fundada en el hecho de que todas las funciones y operadores booleanos ya han sido realizados físicamente. Tuve ocasión de hacer esta observación al ilustre matemático don Pedro Puig Adam, a la terminación de una interesante conferencia en que el señor Puig expuso precisamente la relación entre las conexiones eléctricas y el Algebra de Boole. Pero, según hemos visto, por desgracia no es éste el caso y de ahí el interés que pueda tener el sistema que exponemos en nuestro trabajo, el cual puede ofrecer los medios, como ya hemos indicado, para resolver de otra manera el problema de la más simple máquina silogística.

Si atendemos ahora a la otra perspectiva señalada, la fundamentación de la teoría del silogismo en el cálculo general de proposiciones, nos encontraremos con otro tipo de inconvenientes. Digamos, en primer lugar, cómo aquí cabe hacer dos cosas distintas: o tratar sólo proposiciones in-analizadas (es decir, no considerando los términos de que se componen) o tener en cuenta la estructura última de las mismas, es decir, los términos, así como su cantidad y el carácter afirmativo o negativo de la enunciación. En el primer caso, sólo estaremos en condiciones de establecer ciertas leyes generales, independientes de la ulterior estructura proposicional (31), pero nos será imposible llegar al examen de las figuras y modos y deducir las conclusiones correspondientes a cada uno de éstos. En el segundo caso, no nos bastará con asumir ciertos axiomas del cálculo proposicional general (32), sino que habremos de añadir a estos otros axiomas que enuncien leyes relativas a las proposiciones analizadas en términos y susceptibles de cuantificación (33). Los modos válidos podrán ser demostrados rigurosamente a partir de las dos clases de axiomas y haciendo uso de las reglas de deducción establecidas en el cálculo proposicional —principalmente, las reglas de sustitución (34) y de conclusión (35)—, pero de aquí se deducen varios inconvenientes, desde el punto de vista del desarrollo unitario independiente y puramente matemático de la teoría del silogismo: Primero, los modos no se demuestran directamente a partir de leyes específicas del silogismo, sino de un cuerpo de leyes más amplio, por lo que los fundamentos de la silogística no aparecen aislados y claros, sino confundidos con otros principios que permiten deducir otras muchas tesis distintas de las silogísticas. Segundo, como consecuencia, el método de demostración, que es el método general usado en la lógica de las proposiciones, es más complejo de lo que sería preciso, y no permite ser expresado en una cadena continua, análogamente a lo que ocurría con el método fundado en el cálculo de clases (36). Ambos métodos incluyen, pues —para resumir—, la teoría del silogismo en una axiomática rigurosa y expresada totalmente en símbolos, pero no hacen de la silogística una teoría independiente ni logran demostrar los modos por un camino puramente algebráico, es decir, a través de una cadena continua de equivalencias.

Estos son los dos resultados nuevos que aporta nuestra teoría, con lo cual llega al término la formalización de la silogística. Y es curioso que, habiendo sido Pedro Hispano el sistematizador de los modos silogísticos y el inventor de los curiosos nombres usados por los escolásticos para recordar, casuísticamente, por las vocales y consonantes, la estructura peculiar y la vía de justificación lógica de cada uno de ellos, sea también hispana esta modesta contribución que viene, precisamente, a superar ese casuísmo y ese verbalismo por la simplicidad, brevedad y elegancia del álgebra.

2. Las formulaciones clásicas de la teoría del silogismo categórico.

Dentro de la obra inmensa de Aristóteles, la teoría del silogismo categórico ha sido considerada, a lo largo de los siglos, como la construcción más perfecta, desde el punto de vista formal, y, a la vez, como el ejemplo más antiguo de sistema teórico absolutamente terminado, o sea cerrado. La mayor parte de las teorías matemáticas, basadas en un sistema de axiomas, pueden desarrollarse indefinidamente, porque las consecuencias que pueden deducirse de un sistema tal y que interesan en la ciencia no tienen, en general, un límite cognoscible. Pero la teoría del silogismo categórico se marca un límite desde el comienzo, (el establecimiento de las subestructuras (o modos) válidas, pertenecientes a una estructura denominada silogismo) y lo alcanza. Aristóteles, además, desarrolló dicha teoría en forma axiomática, es decir, fundando rigurosamente todas las tesis afirmadas en unas leyes básicas (axiomas) que, en la formulación preliminar y más conocida, eran los modos de la primera figura.

"El silogismo asertórico —dice Bochenski en su reciente obra sobre la lógica formal antigua (37)— es con toda probabilidad el descubrimiento más importante de toda la lógica formal, pues no es sólo la primera teoría formal con variables, sino también el primer sistema axiomático construído." En la evolución del pensamiento lógico del Estagirita hacia el formalismo se halla en los últimos escalones, sólo superado, acaso, por las teorías de la modalidad y el empleo de letras para indicar variables proposicionales que figuran en sus últimos escritos (38), entre los que conocemos.

En efecto, la cronología hoy más probable de las obras de Aristóteles corresponde al siguiente orden de escritos (39):

1) Los Tópicos y las Refutaciones de los Sofistas (40). Estas obras no contienen letras —como símbolos— en absoluto, el silogismo no es aún conocido y el análisis de una proposición es rudimentario.

2) El libro 4.° (gamma) de la Metafísica. Aristóteles trata el problema de la contradicción con o sin el uso de letras, cometiendo errores lógicos que más tarde no comete (41).

3) De Interpretatione. Contiene teorías esencialmente platónicas acerca de la sintaxis, los símbolos y expresiones y, aunque no usa letras ni parece conocer el silogismo, el nivel es superior al de los Tópicos (42).

4) Los Analíticos Posteriores, B. Aristóteles conoce el silogismo y se sirve de las letras, pero generalmente como abreviaturas; el nivel formal es inferior al de las otras partes de los Analíticos (43).

5) Los primeros Analíticos A 1, 2 4-7, 23-46 y los Analíticos Posteriores, A. Tenemos variables que representan clases y la teoría del silogismo es desarrollada. El nivel técnico es muy superior a los períodos anteriores (44).

6) Finalmente, los Primeros Analíticos A, 3, 8-22 y B. Aquí están —dice Bochenki— las más refinadas doctrinas aristotélicas, desde el punto de vista formal (45).

En todo caso, hay, con certeza, dos grandes etapas: la primera incluye Tópicos, Refutaciones de los Sofistas, libro 4.° de la Metafísica y De Interpretatione; la segunda, los Analíticos.

En la última fase, Aristóteles descubrió algunas reglas meta-lógicas (46) y algunas leyes de la lógica de las proposiciones, pero no logró sistematizar e s t o s descubrimientos. Teofrasto, que avanza aún más en la dirección formalista marcada por su maestro (47), es quien se encarga, en parte, de ello.

Consideremos ahora la silogística. Bajo este nombre general se incluyen las teorías del silogismo categórico de Aristóteles, que abarcan el silogismo asertórico y el modal, y también las del silogismo hipotético elaboradas principalmente por Eudemo, Teofrasto y Boecio (48). Los estudios acerca de todas estas ramas de la silogística clásica se han intensificado enormemente en los últimos años, por obra de las Escuelas de Lukasiewicz, Scholz y Bochenski (49). Las investigaciones de estos maestros, así como las de A. Becker (50), K. Dürr (51), R. Van den Driessche (52) y J. W. Stakelum (53) son de tal importancia que sin ellas no se domina el panorama de la silogística tradicional, con tanta frecuencia ignorado en su verdadera faz, incluso en los medios escolásticos. Pero entre todas estas investigaciones descuellan las realizadas por Jan Lukasiewicz en su revolucionaria obra de 1950 (54), en las que descubre el verdadero sentido del silogismo categórico aristotélico.

En Aristóteles no encontramos una definición del silogismo analítico (55). Lo que se ofrece, en sustitución de esto (56) está tomado casi literalmente de los Tópicos (57). Pero hay, sin embargo, una descripción metalógica del silogismo (58). Según la interpretación de Lukasiewicz, puede ser precisada de esta manera:

El silogismo es una proposición condicional cuyo antecedente es el producto lógico (conjunción) de dos proposiciones elementales y cuyo consiguiente es una proposición elemental. Es decir, es una sustitución del principio formal 'p.q → r' ('p y q implica r'): cada variable es sustituída en esta ley lógica general por una proposición elemental del tipo 'B pertenece a A' o 'B conviene a A' (59), donde A y B son términos (60). Además, debe haber sólo tres términos distintos: uno, en una de las proposiciones del antecedente (premisa) y en la conclusión; uno, en la otra premisa y la conclusión; y el tercero, en ambas premisas (61).

Examinemos en qué consiste, desde un punto de vista formal, la doctrina silogística o ciencia del silogismo y cuál es su desarrollo clásico.

Llamamos teoría silogística al estudio de una estructura lógica general denominada silogismo y de las subestructuras o 'modos' de ésta que pueden admitirse como válidos —de acuerdo con ciertas leyes del pensamiento formalmente establecidas— entre todos los 'modos' teóricamente posibles.

Dentro de la teoría pueden distinguirse, por lo tanto, dos partes:

1. Definición de la estructura denominada silogismo.
2. Determinación de los modos válidos entre todos los modos posibles de esa estructura.

Ahora bien, el primer paso en la definición del silogismo consiste —según hemos visto— en la clasificación de esa estructura como un caso peculiar de la forma general lógica que llamamos 'proposición condicional', cuya expresión simbólica es 'A→C', donde A (antecedente) y C (consiguiente) son enunciados parciales vinculados por la relación de implicación lógica. Usando la terminología tradicional, diremos: 'Si A, entonces C'.

La definición se completa luego, indicando la diferencia específica que caracteriza al silogismo dentro del género lógico de las proposiciones condicionales, diferencia que es la particular forma asignada en él al antecedente A y al consiguiente C.

El primer paso, sin embargo, permite ya

comprender que el objeto de la teoría silogística puede formularse de otra manera más simple que la establecida anteriormente. Es decir:

Hay una forma lógica (antecedente silogístico) de la que, en algunos casos, puede deducirse, de acuerdo con ciertas leyes del pensamiento, otra forma lógica (consiguiente) derivada de ella. Establecidas formalmente esas leyes o principios generales de deducción, ¿como determinar cuales son esos casos, entre todos los posibles, y cual el consiguiente derivado en cada uno de ellos?

Si especificamos ahora que la peculiaridad del silogismo, entre todas las estructuras condicionales, consiste en el hecho de que el antecedente es siempre en él la conjunción de dos proposiciones atómicas (o elementales) con un término común y el consiguiente siempre una tercera proposición elemental que relaciona los términos restantes de aquéllas, podemos llegar a una formulación mas precisa:

Dado un par de proposiciones con un término común, hay casos en que es lícito deducir de su conjunción lógica otra proposición —como conclusión— que relaciona los términos restantes. ¿Cómo determinar esos casos y la conclusión adecuada en cada uno?

Pueden seguirse varios caminos, formalmente diferentes, para responder metódicamente a la cuestión planteada. Es decir, caben desarrollos distintos de la teoría del silogismo. Desde el punto de vista de la fundamentación axiomática, los desarrollos clásicos han seguido uno cualquiera de los dos criterios siguientes:

1. Tomar los modos de la primera figura —o los de cualquier otra, como se vió más tarde (62)— como axiomas y reducir todos los modos restantes a ellos, una vez establecidas las leyes de reducción o transformación legítimas. Este ha sido el criterio preferido por Aristóteles (63).

2. Deducir directamente cada uno de los modos de las leyes generales del silogismo, a través de las leyes específicas de cada figura (64).

El primer criterio otorga a algunos modos un carácter preferente o de 'mayor' evidencia que el mismo Aristóteles, y sobre todo Teofrasto —según indica Bochenski— acabaron por superar, atribuyendo a todos los modos válidos, sin distinción, un valor equivalente, desde el punto de vista formal, apoyado en la sustituibilidad de un grupo de modos por otro, como axiomas (65). Y, puesto que, por otra parte, el método de reducción, fundado en las cuatro vías indicadas por las cuatro letras S, P, M y C, o sea, conversión simple (S), conversión 'per accidens' (P), permutación de premisas (M) y demostración por reducción al absurdo, o reducción 'indirecta' (C), es sobradamente conocido, vamos a examinar cuál es la estructura de la teoría silogística cuando se sigue el segundo criterio, o sea, la deducción directa de cada uno de los modos válidos, partiendo de las leyes generales del silogismo.

Como ya hemos indicado, determinar los modos válidos equivale a determinar aquéllos tipos de antecedente —dentro de la estructura general dada— que admiten un consiguiente de la forma dada. Lógicamente, los pasos necesarios son:

a) Consideración del conjunto total de tipos diferentes de antecedente, dentro de la estructura dada.

b) Enunciado de los principios lógicos que rigen o limitan la consecuencia válida, para dicha estructura.

c) Aplicación de los principios anteriores a cada uno de los tipos diferentes de antecedente, de donde ha de deducirse, primero, si el tipo considerado es concluyente o no, es decir admite o no un consiguiente de la forma establecida, y, segundo, en caso favorable, de qué tipo es dicho consiguiente.

Para andar el paso a), es necesario tener en cuenta cuáles son aquéllos elementos variables dentro de la estructura general del silogismo, cuya variación conjunta engendra precisamente las subestructuras o tipos que consideramos "diferentes" desde el punto de vista formal adoptado: éstos elementos son los que con su variación, pueden hacer variar el tipo del consiguiente o conclusión. La estructura del antecedente se considera referida, como es sabido, simultáneamente a su materia próxima (las proposiciones) y a su materia remota (los términos): según la perspectiva primera, el antecedente se compone de dos proposiciones, cada una de las cuales puede, en principio, por un lado ser afirmativa o negativa, y por otro, universal o particular; según la perspectiva segunda, el antecedente comprende cuatro términos ordenados de cierta manera, pero sólo tres esencialmente diferentes o heterogéneos, de modo que los dos homogéneos pueden ocupar distintos lugares en la ordenación dicha. La consideración de todos los tipos de antecedentes diferentes teóricamente posibles se hace, según esto, teniendo en cuenta las posibilidades de variación simultánea de los tres factores cuya concreción conjunta determina el tipo de antecedentes de que se trata:

1. Posición del término medio en las premisas.

2. Cantidad de las premisas (es decir, si son universales o particulares).

3. Cualidad de las premisas (es decir, si son afirmativas o negativas).

Las posibilidades aisladas de variación de cada uno de estos factores son, como inmediatamente se ve, las siguientes:

1. Para la posición del término medio, 4, o sea: como sujeto y como predicado, respestivamente, de la primera (mayor) y de la segunda (menor) premisa; como predicado y predicado; como sujeto y sujeto; y como predicado y sujeto.

2. Para la cantidad de las proposiciones, 4, o sea: universal y universal; universal y particular; particular y universal; y particular y particular.

3. Para la cualidad, 4, o sea: afirmativa y afirmativa; afirmativa y negativa; negativa y afirmativa; y negativa y negativa.

Teniendo en cuenta que las posibilidades de variación de cada factor son independientes entre sí, obtendremos como número de tipos diferentes de antecedentes el de 4. 4. 4 = = 64.

Entre todos estos tipos de antecedentes, ¿cuáles tienen un consiguiente? Como hemos dicho, el segundo paso de la teoría silogística es el enunciado de los principios lógicos generales que rigen o limitan la consecuencia válida, en la estructura denominada silogismo. Estos principios, como se recordará son ocho, divididos en dos grupos heterogéneos, de cuatro principios cada uno: el primer grupo contiene leyes relativas a los términos, que constituyen la 'materia remota' del silogismo, el segundo contiene leyes que se refieren a las proposiciones, denominadas la 'materia próxima'. He aquí los dos grupos:

(I)

1. Los términos (diferentes) deben ser tres (66).
2. Ningún término puede tener en el consiguiente una cantidad superior a la que tiene en el antecedente.
3. El término medio no debe estar en el consiguiente (67).
4. El término medio debe ser al menos una vez universal.

(II)

5. Ambas premisas no pueden ser negativas.
6. Si las premisas son ambas afirmativas, la conclusión no puede ser negativa.
7. Si alguna de las premisas es negativa, la conclusión lo será; si alguna premisa es particular, la conclusión lo será.
8. Las dos premisas no pueden ser particulares a la vez.

¿Pueden considerarse estas ocho leyes como un sistema axiomático, desde el punto de vista de las exigencias modernas? La primera condición para ello es que todo el desarrollo ulterior de la teoría silogística repose deductivamente sobre aquéllas. ¿Ocurre así? Advirtamos que para poder combinar las leyes del primer grupo con las del segundo, es decir, para tener un sistema unitario, con un objeto único, es preciso admitir como supuesto una relación o nexo entre los valores posibles de las proposiciones —elementos a que se refieren las leyes del segundo grupo— y los de los términos —elementos básicos del primero—. En una palabra, para que el desarrollo deductivo de la teoría pueda enlazar condiciones impuestas por los cuatro primeros axiomas (expresadas en lenguaje de términos) con condiciones impuestas por los cuatro últimos (expresadas en lenguaje de proposiciones), es preciso apoyarse en ciertas leyes de equivalencia que permitan traducir o interpretar condiciones de las proposiciones en condiciones de los términos y viceversa. ¿Se cumple esta exigencia?

Podemos ver que sí de un modo implícito pero no explícitamente. Examinando el desarrollo demostrativo de la teoría silogística, vemos que hace uso no sólo de los ocho axiomas, sino de otros principios de equivalencia aunque no enunciados de un modo expreso entre aquéllos, por considerar que pertenecen a una teoría de la proposición previamente establecida. Estos principios, que pueden considerarse axiomas complementarios de la teoría silogística, son los siguientes:

9. Una proposición universal tiene como sujeto un término universal, y viceversa.
10. Una proposición particular tiene como sujeto un término particular y viceversa.
11. Una proposición afirmativa tiene como predicado un término particular y viceversa.

12. Una proposición negativa tiene como predicado un término universal y viceversa.

Estas cuatro equivalencias entre valores de las proposiciones y valores de sus términos enlazan los dos grupos de leyes anteriormente enunciados, y el conjunto de los doce axiomas o leyes básicas constituye un sistema axiomático unitario.

¿Cumple este sistema de axiomas otra condición fundamental de la teoría axiomática, la de la independencia? Es fácil ver que no. La ley 8.ª, considerada como axioma, pudiera haberse deducido perfectamente de las restantes, siendo, pues, superflua en un sistema rigurosamente mínimo. He aquí la correspondiente deducción.

Si las dos premisas son particulares a la vez, sus dos sujetos son particulares (por 10); como debe haber al menos un término universal —pues el término medio debe ser universal al menos una vez (por 4)—, uno de los predicados del antecedente al menos debe ser universal, y, como consecuencia, la premisa que lo contiene debe ser negativa (por 12); al ser una de las premisas al menos negativa, la conclusión será negativa (por 7), y su predicado universal (por 12); como dicho predicado no puede ser término medio (por 3), no coincide en el antecedente con aquel predicado de una de las premisas que, según el supuesto inicial, debía ser universal; luego, por ser, en el supuesto, los sujetos particulares, este nuevo término universal es el predicado de la otra premisa, la cual, entonces (por 12) es negativa; de modo que ambas premisas serían negativas, lo que contradice a 5. Luego, como hemos llegado a una contradicción usando sólo los axiomas y el supuesto, el supuesto es falso. Por tanto, ambas premisas no pueden ser a la vez particulares C. Q. D.

Es ésta una grave imperfección del sistema si quiere tomarse como sistema axiomático. Por otra parte, la ley 1.ª pertenece a la definición de silogismo, y no es un axioma. El sistema puede, pues, reducirse. Luego veremos cómo el sistema mínimo es, en efecto, mucho más reducido.

Sea como fuere, aplicando estos axiomas a las diferentes figuras silogísticas, se obtienen las llamadas reglas de figura, de donde se deducen ulteriormente los modos válidos. Figuras son, como se recordará, las cuatro estructuras diferentes que puede presentar el silogismo —o mejor, aquí, su antecedente—, atendiendo sólo a la posición del término medio como sujeto o como predicado en cada una de las premisas. He aquí las cuatro figuras y sus reglas correspondientes, deducidas de los axiomas:

1.ª figura. En ella el término medio M figura como sujeto de la mayor y como predicado de la menor. Reglas: a) La menor es afirmativa. b) La mayor es universal.

2.ª figura. En ella el término medio M figura, respectivamente, como predicado y como predicado. Reglas: a) Una de las premisas es negativa. b) La mayor es universal.

3.ª figura. En ella el término medio M figura, respectivamente, como sujeto y como sujeto. Reglas: a) La menor es afirmativa. b) La conclusión es particular.

4.ª figura. En ella el término medio M figura, respectivamente, como predicado y como sujeto. Reglas: a) Si la menor es afirmativa, la conclusión es particular; b) si la conclusión es negativa, la mayor es universal. c) si la mayor es afirmativa, la menor es universal.

Para el estudio en detalle de la deducción de las reglas de figura a partir de las leyes generales y el hallazgo de los modos válidos por eliminación en virtud de dichas reglas de figura, véase el lugar de Couturat, citado en nota 64, y las observaciones de la nota 9.

3. Fundamentos de nuestra teoría.

Sin entrar en más detalles, para lo cual remitimos a las exposiciones de la silogística que figuran en los textos clásicos (68), hemos podido comprobar la imperfección del desarrollo tradicional de la teoría del silogismo categórico, desde el punto de vista de la teoría axiomática. En resumen, el sistema de leyes generales (I) y (II), considerado como sistema de axiomas, tiene los siguientes defectos:

1) No es unitario ni completo si no se le añaden explícitamente las equivalencias expresadas por los axiomas 9 a 12.

2) Los axiomas no son independientes entre sí.

3) Conduce a una deducción de los modos válidos larga y laboriosa.

4) No se presta a una representación matemática simple y unitaria, por la complejidad a que necesariamente lleva la consideración simultánea de la cantidad y cualidad de las premisas, la cual no permite directamente la adopción de una única categoría de símbolos básicos, los términos, ya que la cualidad, o sea, el carácter afirmativo o negativo de las proposiciones, afecta, según la pers-

pectiva tradicional, a la cópula 'es', y es, por tanto, irreductible a algún carácter de los términos.

Esta irreductibilidad fundamental es responsable de la heterogeneidad de los grupos (I) y (II) de axiomas, tanto como de la dificultad de simbolización. ¿Pueden superarse tales obstáculos? ¿Puede desarrollarse la teoría silogística totalmente como una teoría matemática axiomatizada, fundada en la adopción de una única categoría de símbolos básicos o elementales, de manera que se deduzcan las conclusiones de los modos válidos, como en álgebra, a través de una cadena de ecuaciones que vinculan expresiones compuestas de símbolos de la categoría señalada? Esta pregunta nos lleva al problema siguiente: ¿Cómo presentar en forma de variables matemáticas los elementos lógicos integrantes del antecedente de un silogismo cuya variación decide el hecho de que el antecedente considerado tenga o no tenga conclusión válida y cúal sea sea conclusión? Y, ¿cómo establecer las leyes que fundamentan la teoría silogística en forma de leyes algebráicas referidas a expresiones compuestas por variables del tipo dicho?

Nos parece haber resuelto este problema gracias a la adopción inicial de un simbolismo basado en la consideración siguiente, que arranca de las equivalencias 9 a 12.

Condición necesaria y suficiente —desde el punto de vista formal— para que una proposición sea universal o particular, es, respectivamente, que sea universal o particular su sujeto y viceversa; condición necesaria y suficiente —desde el mismo punto de vista— para que una proposición sea afirmativa o negativa, es que su predicado sea, respectivamente, particular o universal y viceversa. Por tanto, todo cuanto en el desarrollo de la teoría del silogismo se enuncie o se concluya en relación con el carácter universal o particular, afirmativo o negativo de las proposiciones, puede enunciarse o concluirse refiriéndose a la cantidad de los términos de dichas proposiciones, sujeto y predicado. En una palabra, las citadas equivalencias formales permiten fundamentar y desarrollar toda la teoría del silogismo, considerando exclusivamente la cantidad de los términos y sin referirse a ninguna propiedad ulterior de las proposiciones, tomadas como un todo, o de la cópula 'es'.

He aquí el modo de representación simbólica que permite extraer las consecuencias de la anterior consideración:

Términos.—Representaremos los términos por símbolos literales (letras) o numéricos (números). Usaremos números 1, 2, 3... cuando no sea preciso especificar la cantidad o extensión de los terminos; letras mayúsculas: A, B, C, S, M, P, X, Y..., expresarán términos universales; letras minúsculas: a, b, c, s, m, p, x, y..., expresarán términos particulares; dos términos homogéneos, que sólo se diferencian en la cantidad, pero no en el contenido, serán expresados por letras homogéneas, como A y a, B y b, etc...

Proposiciones.—Una proposición se representará por una secuencia de dos símbolos literales o numéricos; Por ejemplo, 12, 1 x, Y2, etcétera. El primer símbolo de la secuencia expresará el sujeto, el segundo el predicado; la cópula no estará representada explícitamente, pero se supone entre ambos términos por el mero hecho de la yuxtaposición de los símbolos respectivos, al igual que en álgebra la yuxtaposición de los símbolos de dos variables indica el producto de éstas.

Teniendo en cuenta que la cantidad del sujeto determina la de la proposición y la del predicado indica la cualidad de la misma, según hemos visto antes, veremos que las cuatro especies de proposición categórica quedan expresadas muy simplemente. En efecto, representemos por sus iniciales los términos 'hombre' y 'mortal' (en el primer caso, H o h, según la cantidad, y en el segundo, M o m). Tenemos que:

Hm es la expresión de 'Todo hombre es mortal'.

HM es la expresión de 'Ningún hombre es mortal'.

hm es la expresión de 'Algún hombre es mortal'.

hM es la expresión de 'Algún hombre no es mortal'.

Antecedente silogístico. Un antecedente silogístico es la conjunción o producto lógico o afirmación simultánea de dos proposiciones con un término común. Expresando dicha conjunción por el signo de multiplicación '.' o sea, por un punto colocado entre las expresiones que representan las proposiciones, tendremos que una expresión del tipo 'Xy.XZ' será la traducción en simbolismo algebraico de un antecedente cuyas dos premisas están representadas aisladamente por 'Xy' y por 'YZ', el cual se leerá así: 'Todo X es Y, y ningún Y es Z'.

Figuras.—No teniendo en cuenta ahora la cantidad o extensión de los términos y usando, por tanto para representarlos símbolos numéricos, y significando por 1 y 2 los términos extremos del silogismo —respectiva mente, sujeto y predicado de la conclusión— así como por 3 el término medio —término común a ambas premisas—, quedarán representados los antecedentes de las cuatro figuras de la siguiente manera:

(primera)	(segunda)	(tercera)	(cuarta)
32.13	23.13	32.31	23.31

Pudiendo, pues, simbolizar todos los elementos variables del antecedente que influyen en la conclusión (tanto en la existencia de ésta como en su carácter), a saber: figura (situación del símbolo que expresa el término medio en la expresión del antecedente) cantidad de las premisas (hecho de ser mayúsculas o minúsculas las letras que expresan los sujetos), cualidad de las premisas (hecho de ser mayúsculas o minúsculas las letras que expresan los predicados), no hay más que expresar en forma de sistema axiomático las leyes generales de la deducción silogística necesarias y suficientes para llevar a cabo demostrativamente la selección de los antecedentes de los modos válidos, entre todos los antecedentes posibles, y deducir algebraicamente la conclusión respectiva en cada caso.

Representaremos por el signo '=', colocado entre dos expresiones E y F, el hecho de que de la primera de éstas (E) es lícito deducir la segunda (F), pero no necesariamente viceversa. En otras palabras, la expresión "E=F" se leerá: 'De E se deduce F'.

Veamos ahora cuáles son nuestros axiomas.

Tenemos, en primer lugar, los que expresan aquellas transformaciones que no alteran el valor lógico de una expresión. Así, el axioma:

$$\text{I)} \quad 12.34 = 34.12$$

indica que el valor lógico del antecedente no varía al permutar entre sí las premisas. Por su parte, el axioma

$$\text{II)} \begin{cases} \text{IIa)} & XY = YX \\ \text{IIb)} & xy = yx \end{cases}$$

expresa la posibilidad de lo que en el lenguaje tradicional se denomina la 'conversión simple' de una preposición, o sea, la permutación de sujeto y predicado en el caso de una proposición universal negativa —IIa)— o de una particular afirmativa —IIb)— (69).

Representando ahora por X' el término negación de X, o sea no-X —lo que en cálculo de clases se llama clase complementaria—, (por ejemplo, si X expresa 'mortal', X' espresará 'no-mortal') tendremos un nuevo axioma:

$$\text{III)} \quad 1x = 1X'.$$

que nos indica que cualquier proposición (universal o particular) afirmativa, puede transformarse legítimamente en la correspondiente (universal o particular) negativa, con tal de sustituir el predicado por su negación o término complementario. Así, 'Todo hombre es mortal', puede transformarse en 'Ningún hombre es no-mortal', y análogamente. 'Algún hombre es justo' en 'Algún hombre no es no-justo (injusto)'. Como el principio de la doble negación es valedero (o sea, siempre X'' = X), tenemos también como consecuencia inmediata de III):

$$1x' = 1X'' = 1X$$

Otro axioma expresa la posibilidad que en lenguaje tradicional se indica con la palabra 'subalternación'

$$\text{IV)} \quad X1 = x1$$

que significa que de una proposición universal cualquiera, afirmativa o negativa, se deduce la correspondiente particular. Por ejemplo, de 'Todo hombre es mortal' se deduce 'Algún hombre es mortal'. etc. Es esta una transformación lícita, pero irreversible.

Expresemos, finalmente, como último axioma el principio fundamental de la deducción silogística:

$$\text{V)} \quad 1m.M2 = 12$$

el cual significa que el antecedente en el cual el término medio figure como predicado particular de la primera premisa (la cual es, por tanto, afirmativa) y como sujeto universal de la segunda (la cual es así, universal), puede "reducirse" en todo caso, dando origen, como conclusión, a una proposición que tiene, como sujeto el de la primera premisa y como predicado el de la segunda. O sea, que al grupo m.M puede "eliminarse" siempre en un antecedente, dejando sin modificar lo restante. Es una ley o regla análoga a las que indican las posibilidades de simplificación de las expresiones algebraicas; del tipo de las que permiten transformar $(x + y)(x - y)$ en x^2-y^2.

Puede verse que este último axioma es un modo de escribir el 'dictum de omni et nullo' escolástico y el principio del silogismo de Leibniz (70).

4. Desarrollo de la teoría algebraica del silogismo categórico.

Resumamos brevemente el simbolismo anterior.

Términos

Letras o números.
- X, Y, S, M, P. universales.
- x, y, s, m, p. particulares.
- 1, 2, 3, 4. cantidad no especificada.

Proposiciones

Secuencias de dos letras o números.
- Xy, universal afirmativa.
- XY, universal negativa.
- xy, particular afirmativa.
- xY, particular negativa.
- X1, universal sin cualidad especificada.
- 1Y, negativa sin cantidad especificada, etc.

Antecedente:

Conjunción de dos proposiciones con término común; por ejemplo, Sm.PM.

Axiomas:

I) **12.34=34.12**

II) **XY = YX , xy = yx**

III) **1x = 1X' , 1X = 1x'**

IV) **X1 = x1**

V) **1x.X2 = 12**

donde x' es la negación de x y el signo '=' colocado entre dos expresiones significa que de la situada a su izquierda se deduce la situada a su derecha.

Añadamos dos reglas de deducción:

R1) El signo de deducción '=' es transitivo, o sea, que si A = B y B = C, entonces A = C, para cualquiera A, B, C.

R2) Si A = B, puede sustituirse A por B en toda ecuación del tipo E = F, permaneciendo su validez.

Hecho esto, nuestra teoría está acabada, en el sentido de que, dado cualquier antecedente, si es reductible, gracias a los axiomas I — V y las reglas R1 y R2, a una proposición que enlace los extremos, corresponderá a un modo concluyente, y la conclusión será la proposición obtenida en dicha reducción.

Demostremos como ejercicio los 19 modos clásicos.

Primera figura.
- Mp.Sm=Sm.Mp=Sp (Barbara).
- MP.Sm=Sm.MP=SP (Celarent).
- Mp.sm=sm.Mp=sp (Darii).
- MP.sm=sm.MP=sP (Ferio).

Segunda figura.
- Pm.SM=Pm.MS=PS=SP (Camestres.)
- PM.Sm=Sm.PM=Sm.MP=SP (Cesare).
- Pm. sM = PM'.sm' = M'P.sm' = sm'.M'P=sP (Baroco).
- PM.sm=MP.sm=sm.MP=sP (Festino).

Tercera figura.
- Mp.Ms=Mp.ms=Mp.sm=sm.Mp=sp (Darapti).
- MP.Ms=MP.ms=MP.sm=sm.MP = sP (Felapton).
- Mp.ms=Mp.sm=sm.Mp=sp (Datisi).
- MP.ms=MP.sm=sm.MP=sP (Ferison).
- mp.Ms=pm.Ms=ps=sp (Disamis).
- mP.Ms=mp'.Ms=p'm.Ms=p's=sp'= sP (Bocardo).

Cuarta figura.
- Pm.Ms=Ps=ps=sp (Bamalip).
- Pm.MS=PS=SP (Calemes).
- PM.Ms=MP.Ms=MP.ms=MP.sm = sm.MP=sP (Fesapo).
- PM.ms=MP.ms = MP.sm=sm.MP= sP (Fresison).
- pm.Ms=ps=sp (Dimatis) (71).

Los llamados modos subalternos se deducen de las conclusiones de Bárbara, Celarent, Cesare y Calemes, por aplicación a las mismas del axioma IV) (72).

Como es trivial la realización de los operadores físicos correspondientes a los axiomas y reglas de esta álgebra, la construcción de la más sencilla máquina de resolver silogismos es inmediata (73).

Seminario de Lógica Matemática
Instituto "Luis Vives", del C. S. I. C.
Serrano, 127. Madrid.
Abril 1954.