Applications des logiques modales en physique quantique

Par P. FEVRIER-DESTOUCHES

1. *Propositions expérimentales.*—On sait que l'ensemble des propositions initiales dans une théorie quantique constitue un treillis non distributif, en général non modulaire, et isomorphe au treillis des variétés linéaires d'un espace de Hilbert. Dans une telle logique, il n'y a pas d'opération d'implication parce que (comme Curry, notamment, l'a montré) il faut pour qu'il y ait une implication que le treillis soit distributif.

On peut alors se poser le problème suivant: *est-il possible de considérer ce treillis des propositions comme isomorphe à une partie d'une logique modale?* Plus explicitement, peut-on trouver des opérateurs modalités $A_1, A_2 \ldots, A_n$ tels que, à toute opération binaire Ω du calcul des propositions expérimentales, correspondent des modalités A_1, A_2, A_3 et une opération Ω' du calcul classique des propositions, de telle façon que des expressions $p \Omega q$ aient même propriété que $a_3\ (A_1 p . \Omega' . A_2 q)$, les opérations Ω' satisfaisant à toutes les propriétés du calcul classique des propositions (à la négation p correspondrait évidemment une modalité $A \backsim p'$).

Il n'a été fourni jusqu'ici à ma connaissance aucune réponse à ce problème. Par une telle utilisation des modalités, il n'est pas difficile de parvenir à une treillis non distributif. Mais de là à parvenir à un treillis non modulaire isomorphe au treillis des variétés d'un espace d'Hilbert il y a un grand pas. La question reste donc encore ouverte, de savoir si la logique des propositions expérimentales dans une théorie quantique peut on ou non être représentée au moyen d'une logique de modalités.

2. *Intervention de la modalité "possible".*—Lorsque l'on calcule en tenant compte de conditions de relativité des prévisions pour un système contenant plusieurs corpuscules de même espèce, avec certaines conditions initiales donnant lieu à une ordination, on ne peut fixer, pour un certain intervalle de temps, si les prévisions doivent être faites en supposant l'indiscernabilité ou en supposant que l'ordination s'est maintenue pendant ce temps. Pour tenir compte de ce fait, on est conduit à compléter le calcul des propositions expérimentales en introduisant un opérateur de modalité "possible", que nous désignerons par "Pos". On a donc ainsi une logique de modalité construite à partir d'une logique non classique. Les propriétés qu'on est amené à poser sont les suivantes: tout d'abord, si une proposition est vraie, elle est par là même possible, soit

$$p \Vdash \text{Pos } p$$

Ensuite, si une proposition p entraîne une proposition q, la possibilité de p doit entraîner la possibilité de q, soit

$$\frac{p \Vdash q}{\text{Pos } p \Vdash \text{Pos } q}$$

En outre, si une proposition p est vraie, et si q est possible, leur produit logique p & q doit être possible, à condition que p et q soient composables, soit

$$p = q. \&. p \ \& \ \text{Pos } q \ : \Vdash \ : \text{Pos } (q \ \& \ q)$$

Enfin l'on doit admettre que la possibilité du possible est possible, soit

$$\text{Pos Pos } p \Vdash \text{Pos } p$$

3. *Intervention d'une autre logique de modalité.* Actuellement les physiciens théoriciens sont préoccupés par le problème suivant: peut on interpréter les théories quantiques d'une manière telle qu'on revienne à des théories déterministes ayant la même structure que les théories classiques? Il est évident que, si ceci est possible, on ne peut s'en apercevoir directement puisque la structure des théories quantiques est différente de celle des théories classiques. Au point de vue de la logique, pour que l'on puisse revenir à une théorie de structure classique, il faut d'abord que le treillis des propositions expérimentales soit une Algèbre de Boole. Or on sait que pour une théorie quantique, le treillis des propositions expérimentales est un treillis non modulaire. Un tel treillis contient des sous-treillis qui sont des algèbres de Boole. On peut donc taire correspondre à un sous-treillis de propositions expérimentales d'une théorie quantique qui est une algèbre de Boole un ensemble de propositons expérimentales appartenant à una théorie classique. Mais cette correspondance ne peut pas être étendue au-delà d'un sous-traillis de propositions expérimentales associé à une grandeur complète. Sitôt qu'il intervient deux grandeurs non simultanément mesurables, le treillis de leurs propositions expérimentales n'est plus distributif.

Si l'on se plaçait sur le plan de la physique théorique, on verrait, comme J. L. Destouches l'a montré, que cette correspondance est effectivement possible. Mais, en vertu d'un théorème de von Neumann, le système physique décrit selon les conceptions classiques, contiendra des paramètres inaccessibles à l'expérience. Et d'autre part, comme je l'ai indiqué, le système sera soumis alors à des forces d'un type spécial différentes de celles qui s'exercent entre deux corpuscules (forces quantiques). Par suite de la présence de paramètres inaccessibles à l'expérience, on doit distinguer, d'une part une algèbre de Boole correspondant à l'ensemble de toutes les propositions fixant des conditions initiales, qu'elles soient ou non accessibles à l'expérience, et d'autre part le sous-treillis des propositions expérimentales proprement dites, qui constitue, lui aussi, une algèbre de Boole.

De cette façon, quan on considère la théorie quantique, d'une part sous la forme phénoméniste usuelle, et d'autre part sous la forme réaliste à structure classique, la correspondance entre le treillis de propositions fixant des conditions initiales dans l'une ou dans l'autre n'est que partielle. Une correspondance n'est possible qu'entre un sous-treillis (constituant une algèbre de Boole) du treillis non modulaire de l'ensemble des propositions expérimentales dans l'interprétation phénoméniste, et un sous-treillis (correspondant aux propositions effectivement expérimentales) de l'algèbre de Boole constituée par les propositions fixant des conditions initiales dans l'interprétation réaliste.

En effet, on ne peut pas étendre la correspandance du côté du treillis des propositions expérimentales de la forme phénoméniste, car il y a non distributivité dès que l'on considère des propositions se rapportant à des paires de grandeurs non simultanément mensurables. On ne peut pas l'étendre non plus du côté des propositions fixant des conditions initiales dans la forme réaliste, mais liées à des grandeurs inaccessibles, car ces propositions n'ont pas de contre-partie dans la forme phénoméniste, qui écarte tout ce qui, en droit, est inaccesible à l'expérience.

Cependant, le but de ceux qui sont revenus en physique à des conceptions réalistes n'était pas uniquement philosophique; il était avant tout de parvenir à une nouvelle théorie physique. On peut alors, en supposant que ce but ait été atteint, se poser le problème suivant: est-il nécessaire d'adopter ces conceptions et de faire intervenir dans la théorie des grandeurs inaccessibles à l'expérience, donc métaphysiques? Ou bien peut-on revenir à une théorie purement phénoméniste évitant l'appel à des éléments inaccessibles à l'expérience, en ayant une structure semblable à celle des théories quantiques? Autrement dit, *peut-on établir la réciproque du théorème concernant la correspondance envisagée ci-dessus?*

J'y suis parvenue en utilisant une logique de modalités. En effet, il faut, dans l'algèbre de Boole des propositions fixant des conditions initiales, distinguer celles qui correspondent à l'accessibilité de la mesure; il faut donc considérer une logique qui transmette aux propositions le caractère "accessible à l'expérience", ou "expérimentable" comme la déduction classique transmet aux propositions le caractère de vérité. En raison des règles spéciales du produit logique pour les propositions incomposables, on ne peut pas considérer troujours comme expérimentable le produit de deux propositions qui, prises séparément, sont expérimentables. Si l'on cherche à écrire cette logique conformément à la méthode de déduction naturelle de Gentzen, on est conduit à une logique qui n'admet qu'une seule prémisse. Voici les schémas que l'on peut accepter:

Assertations primitives:

(1) $p \Vvdash p$

(2) $p \Vvdash p, q$

1) *Conversion* $$\frac{r \Vvdash p,\ q,\ M}{r \Vvdash q,\ p,\ M}$$

2) *Contraction* $$\frac{q \Vvdash p,\ p,\ M}{q \Vvdash p,\ M}$$

3) *Atténuation* $$\frac{p \Vvdash M}{p \Vvdash q,\ M}$$

4) r) $$\frac{r \Vvdash p,\ Z\quad r \Vvdash q,\ Z}{r \Vvdash p \wedge q,\ Z}$$

5) r) $$\frac{r \Vvdash p,\ Z}{r \Vvdash p \vee q,\ Z}\ ;\ \frac{r \Vvdash q,\ Z}{r \Vvdash p \vee q,\ Z}$$

6) Pr) $$\frac{p \Vvdash q}{\Vvdash p \supset q}$$

$$\neg p =_d p \supset F$$

où F est une proposition inexpérimentable, modèle d'énoncé de propriété inaccessible à l'expérience.

4. *Introduction de la modalité "expérimentable"*. Mais de cette façon on ne décrit pas toutes les propriétés des propositions. En effet, on n'a pas tenu compte du fait que ces propositions expérimentales font partie de l'algèbre de Boole des propositions fixant des conditions initiales. Pour distinguer donc dans cette algèbre les propositions expérimentables, on est conduit alors à introduire un opérateur de modalité, "p expérimentable" pouvant être considéré comme une proposition que nous désignerons par Ep. Cette fois nous allons avoir des schémas de déduction plus forts que les précédents. Nous pourrons en effet poser:

$$\frac{\Vvdash p}{\Vdash Ep}\ ;\ \frac{\Vdash Ep}{\Vvdash p}\ ;\ \frac{Ep \Vdash M}{p \Vvdash E\,M}\ ;\ \frac{Ep \Vdash E\,M}{p \Vvdash M}$$

Assertions

(1) $E\,(p \wedge q) \Vdash Ep \wedge Eq$

(2) $Ep \vee Ep \Vdash E\,(p \vee q)$

Schémas

1) $$\frac{\Vdash E\,(p \wedge q);\ Ep \Vdash E\,M}{E\,(p \wedge q) \Vdash E\,M}\ ;\qquad \frac{\Vdash E\,(p \wedge q)\ ;\ Eq \Vdash E\,M}{E\,(p \wedge q) \Vdash E\,M}$$

Nous pourrons alors considérer ces propositions expérimentales comme constituant un sous-ensemble du treillis non modulaire des propositions expérimentales d'une théorie phénoméniste.

Quand on ne reste pas au niveau logique, mais qu'on se place au niveau de la physique théorique, on constate que la correspondance dont nous avons parlé tout-à-l'heure entre théorie phénomeniste et théorie réaliste, s'effectue de la façon suivante: au système microphysique S, en observation au moyen d'un appareil $\mathfrak{a}$, correspond un système $S/\mathfrak{a}$ décrit dans la théorie réaliste. Et que la correspondance entre propositions expérimentales considérée plus haut a lieu entre les propositions concernant la grandeur A mesurée au moyen de l'appareil $\mathfrak{a}$.

Dans la recherche poursuivie ici d'une réciproque à ce résultat, les propositions expérimentales concernant un système S′ sont celles qui correspondent à une grandeur A pour un certain système $S/\mathfrak{a}$.
Si l'on change le dispositif considéré, sans en modifier la partie microphysique, le système S′ est devenu un autre système S″, mais sa partie microphysique est la même que celle de S′, et on peut la désigner par S. Si alors on cherche une description phénoméniste du système microphysique considéré, c'est S qui devra être envisagé comme système observé, et, un type de grandeur étant défini par un appareil de mesure, le système S′ pourra être consi-

déré comme un système $S/\mathfrak{a}'$ fournissant une mesure d'une grandeur A pour S.

Et de même S″ paurra être considéré comme un système $S/\mathfrak{a}''$ fournissant une mesure d'une grandeur B pour S. Si les deux dispositifs S′ et S″ ne peuvent pas être réalisés simultanément avec la même partie microphysique S, les grandeurs A et B sont non simultanément mesurables. Comme c'est toujours de la même partie microphysique S qu'il s'agit, aussi bien avec S′ qu'avec S″, les propositions expérimentales pour S′ et les propositions expérimentales pour S″ appartiendront chacune à un sous-treillis du treillis des propositions expérimentales de S. Si A et B sont non simultanément mesurables, ces deux sous-treillis mis ensemble constitueront un sous-treillis non distributif et, en groupant ainsi tous les sous-treillis de propositions expérimentales venant de systèmes S′, S″, S‴..., etc., on constituera un treillis non distributif de propositions expérimentales d'un système S dans une théorie phénoméniste. Et on peut démontrer par ce procédé la réciproque du théorème énoncé tout-à-l'heure: *Toute théorie microphysique réaliste, contenant par là même des éléments inaccessibles à l'expérience, peut être ramenée à une théorie purement phénoméniste sans éléments inaccessibles à l'expérience et ayant même structure qu'une théorie quantique.* Si bien qu'il n'est nullement nécessaire d'adopter les conceptions réalistes en physique théorique. Les mêmes résultats peuvent être obtenus au moyen des méthodes quantiques phénoménistes.

Ce qui est intéressant pour nous ici, c'est que, dans cette démonstration, il a fallu utiliser une logique de modalité. En effet il était nécessaire de distinguer entre l'affirmation simple, d'une part, et l'affirmation avec expérimentabilité. La description d'un tel caractère, plus fort, ne peut se faire qu'en utilisant une modalité.

5. *Logique du probable.*—On cite souvent le cas de la logique du probable, et celui de logiques distinguant différentes valeurs de vérité entre zéro et un, qu'on peut interpréter comme des probabilités. On peut de cette façon considerer certains aspects du calcul des probabilités comme s'exprimant au moyen de logiques du probable avec divers degrés de probabilités.

Un choix de probabilités peut être considéré comme une valuation dans un treillis métrique (treillis nécessairement modulaire, mais pouvant être non distributif). Et une valuation peut être considérée comme faisant correspondre un élément d'un treillis à un énoncé de valeur d'un nombre. L'opérateur qui décrit cette correspondance peut être assimilé à un opérateur de modalité lorsque le treillis considéré est un treillis de propositions. De cette façon on aura un cas particulier de logique de modalités.

Conclusion.—Nous avons cité différents exemples d'utilisation de logiques de modalités en physique quantique. Ces exemples semblent prouver l'utilité de certaines logiques de modalités. La plupart des auteurs qui ont construit de telles logiques se sont laissé guider soit par la considération de modalités aristotéliciennes, soit par des suggestions des formalismes qu'ils considéraient. De ce fait, on pouvait se demander si les logiques de modalités présentaient ou non un intérêt réel pour les applications. En montrant sur des exemples tirés de la physique l'utilité de certaines de ces logiques, on prouve tout l'intérêt des recherches les concernant.

Rue Thénard, 4. PARIS 5e.