FORMALIZACION EN TEORIA DE TIPOS
DEL PREDICADO DE EXISTENCIA DE MARIO BUNGE

María MANZANO

ABSTRACT

Professor Bunge makes the distinction between the logical concept of existence and the ontological one. I agree with him and in this paper I am formalizing his existence predicate into the powerful language of type theory.

I am also proving the logical equivalence of this formulation with a briefer one, which says that to exist conceptually is the same as to be a conceptual object. Accordingly, from this point on I investigate what conceptual objects are. I reach the conclusion that it is better to study a restricted area each time, where existence could even be assigned in different degrees. For instance, in set theory -like in Animal Farm of Orwell- every set exists but some "exist more" than others. Of course, in relating degrees of existence to degrees of definability I am not following Bunge.

El estímulo para realizar este estudio de la existencia, utilizando el lenguaje lógico, partió de la lectura de Mario Bunge, y muy especialmente de su "Naturaleza de los objetos conceptuales"[1]. Le agradezco, por tanto, el haberlo escrito.

Estoy de acuerdo con el profesor Bunge en que hay que distinguir entre la existencia como propiedad y como cuantificador. Creo que es acertada su crítica a la confusión entre el concepto lógico algo y el ontólogico existe. Lo que voy a hacer aquí es utilizar el poderoso lenguaje de la Teoría de Tipos para expresar y distinguir ambos conceptos. De hecho, presentaré dos lenguajes alternativos capaces de referir la jerarquía de tipos. En el primero de ellos, al que llamaré $\mathcal{T}\mathcal{P}$, tanto la existencia como cuantificación, como la ontológica, son expresables mediante predicados específicos. La existencia ontológica se interpretará como una propiedad de los objetos -concretamente, la de existir

THEORIA - Segunda Epoca
Año I (1985), nº 2, pp. 513-534.

en algún conjunto no vacío de objetos físicos o de constructos- y la formalizaré como un predicado monario de entidades del tipo de los objetos cuya existencia afirmamos. La cuantificación será una propiedad no de los objetos cuantificados, sino de la clase formada por ellos; es decir, será un predicado monario de predicados monarios de entidades del tipo de los objetos cuantificados.

En el otro lenguaje de Teoría de Tipos que emplearé el $\mathcal{TE}$, ambas nociones de existencia se reducen a las primitivas de identidad y abstracción.

En cualquiera de estos lenguajes la formalización del predicado de existencia conceptual equivale sencillamente a la de ser un constructo u objeto conceptual. Este es el sentido profundo de la idea de existencia que aquí se discute.

Conforme a este resultado, la investigación debe centrarse en averiguar qué son los constructos. Yo aquí distingo dos aspectos: El primero es saber cómo se construye la jerarquía de tipos sobre una base dada de individuos y cómo, sobre ella, se montan las proposiciones y los contextos. El segundo es el de pensar qué individuos deberían estar en la base de individuos.

No pretendo ya aquí expresar lo que dice Bunge al respecto, sino expresar mis propias ideas. Algunas os parecerán extravagantes, como por ejemplo, la de asignar existencia física a los conjuntos formados por objetos físicos, o la de propugnar grados de existencia.

Creo que es difícil establecer un criterio de existencia único y que lo mejor que se puede hacer es en cada ámbito elaborar el más adecuado a él. Esto es precisamente lo que he hecho, brevemente, al final de este artículo para la Teoría de Conjuntos.

1.- Teoría de tipos

La versión de la teoría de tipos que emplearé es la denominada de tipos simple, que fue ideada por Russell con anterioridad a la versión ramificada. A diferencia de lo que ocurre en lógica de primer orden, no nos basta aquí con un universo y una serie de relaciones y funciones definidas sobre él, sino que precisamos una jerarquía completa de universos. Dejemos al propio Russell presentar su ontología[2]:

> *"A term or individual is any object which is not a range. This is the lowest type of object ... the objects of daily life, persons, tables, chairs, apples etc, ... Individuals are the only objects of which numbers cannot be significantly asserted ...*
>
> *The next type consists of ranges or classes of individuals ...*
>
> *The next type after classes of individuals consists of classes of classes of individuals. Such are, for example, associations of clubs; the members of such associations, the clubs, are themselves classes of individuals."*

Voy a presentar dos lenguajes alternativos que servirán ambos para relatar la jerarquía de tipos: uno de ellos es predicativo y el otro ecuacional. El primero es el que expone Church en su "A formulation of the simple theory of types"[3] y el segundo es una extensión del de Henkin de su "A theory of propositional types"[4].

Para evitar confusiones, tanto las expresiones del lenguaje como los elementos de la jerarquía, llevarán subíndices: los símbolos de tipo.

Los símbolos de tipo son ciertas sucesiones finitas de ceros, unos y paréntesis. Llamaré S.T. al conjunto de los símbolos de tipo. Dicho conjunto se especifica diciendo que $0,1 \in$ S.T., y que cuando $\alpha,\beta \in$ S.T., también $\{\alpha\beta\} \in$ S.T.

Una jerarquía de tipos es una familia de universos $<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha\ \mathrm{S.T}}$ cuyos subíndices son símbolos de tipo. En una jerarquía estandar tenemos:

i) $\mathcal{D}_0 = \{V,F\}$. Este universo está formado por los valores de verdad y a él se referirán las fórmulas del lenguaje.

ii) $\mathcal{D}_1 \neq \emptyset$ es el universo de individuos.

iii) Para cada $\alpha, \beta \in$ S.T., $\mathcal{D}_{\{\alpha\beta\}} = \{ f / f\colon \mathcal{D}_\beta \to \mathcal{D}_\alpha \}$. Es decir, $\mathcal{D}_{\{\alpha\beta\}}$ está formado por todas las funciones de $\mathcal{D}_\beta$ en $\mathcal{D}_\alpha$.

Conforme a lo dicho, $\mathcal{D}_{(0\ 1)}$ está formado por todas las funciones f de $\mathcal{D}_1$ en $\mathcal{D}_0$; es decir, las funciones características que a los elementos de $\mathcal{D}_1$ les asignan valores de verdad. Puesto que las funciones características sobre $\mathcal{D}_1$ y los subconjuntos de $\mathcal{D}_1$ se corresponden biunívocamente, $\mathcal{D}_{(0\ 1)}$ es el universo al que referirán los predicados monarios de individuos. Hubiera sido quizá más intuitivo poner como $\mathcal{D}_{(0\ 1)}$ al conjunto potencia P $\mathcal{D}_1$, pero el tratamiento funcional permite una mayor uniformidad.

Otra novedad de esta presentación funcional es la reducción de las relaciones n-arias a ciertas funciones monarias. Por ejemplo, $\mathcal{D}_{((0\ 1)1)}$ es el universo al que referirán los predicados binarios de individuos. Los elementos de $\mathcal{D}_{((0\ 1)1)}$ son funciones que a cada individuo $\underline{a}$ de $\mathcal{D}_1$ le asignan una cierta función característica. Si $\underline{R}$ es una relación binaria sobre $\mathcal{D}_1$, decir que $\underline{a}$ y $\underline{b}$ están relacionados equivale a afirmar que en la función correspondiente a $\underline{R}$, al individuo $\underline{a}$ se le asigna una función cuyo valor para $\underline{b}$ es V.

Para hablar acerca de la jerarquía de tipos se introduce un <u>lenguaje apropiado</u>. Cualquiera de los lenguajes apropiados a la jerarquía constará de:

i) tres signos impropios: (,), λ.

ii) para cada $\alpha \in$ S.T., un conjunto infinito-numerable de variables: $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, x^1_\alpha, x^2_\alpha, \ldots$

iii) para cada $\alpha \in$ S.T. un conjunto $\mathcal{K}_\alpha$ de constantes. Algunos de estos $\mathcal{K}_\alpha$ pueden ser $\emptyset$.

La λ de Church, también llamada abstractor, sirve, entre otras cosas, para formar predicados a partir de fórmulas. Si ψ es una fórmula, $\lambda x\ \psi$ será un predicado que represente a la clase de los individuos que cumplan ψ.

Como dije antes, en este artículo utilizaré dos lenguajes. Uno, al que llamaré $\mathcal{TP}$, cuyas constantes son: $\mathcal{K}_{(00)} = \{\sim\}$, $\mathcal{K}_{((00)0)} = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y para cada $\alpha \in$ S.T., $\mathcal{K}_{(0(0\alpha))} = \{\Pi, \Sigma\}$. La idea es que los conectores denoten las nociones usuales y que los predicados Π y Σ sirvan para expresar la cuantificación.

En el otro lenguaje, $\mathcal{TE}$, las únicas constantes son las igualdades, $\mathcal{K}_{((0\alpha)\alpha)} = \{\approx\}$, para cada $\alpha \in$ S.T.. En $\mathcal{TE}$ se pueden definir todos los conectores usando simplemente lambda e igualdad.

En cualquiera de nuestros lenguajes, las expresiones se forman conforme a las reglas siguientes:

i) Una variable o constante sola es una expresión cuyo tipo es el del subíndice.

ii) Si $A_{(\alpha\beta)}$ y B_β son expresiones, entonces $(A_{(\alpha\beta)}\ B_\beta)$ es una expresión de tipo α.

iii) Si A_α es una expresión y x_β una variable, $(\lambda x_\beta\ A_\alpha)$ es una expresión de tipo $(\alpha\beta)$.

A las expresiones de tipo 0 las llamamos fórmulas. Así x_0, $(X_{01}\ x_1)$, $((\lambda\ x_1\ X_0)\ y_1)$ y $((X_{((01)1)}\ x_1)\ y_1)$ son fórmulas tanto de $\mathcal{TP}$ como de $\mathcal{TE}$. Por otra parte, si Φ es una fórmula de $\mathcal{TP}$, $(\sim \Phi)$, $((\wedge\ \Phi)\ \Phi)$, $(\Pi_{(0(01))}\ (\lambda x_1\ \Phi))$ y $(\Sigma_{(0(01))}\ (\lambda x_1\ \Phi))$ son fórmulas de $\mathcal{TP}$.

También, si ψ es una fórmula de $\mathcal{TE}$, $((\approx(\lambda x_1\psi))(\lambda x_1((\approx x_1)x_1)))$ es una fórmula de $\mathcal{TE}$ -que abreviadamente escribiremos

$$(\lambda x_1\ \psi) \approx (\lambda x_1\ \ x_1 \approx x_1).$$

Llamaré predicados a todas las expresiones de tipo

$$((\ldots((0\ \ \alpha_1)\ \alpha_2)\ \ldots)\ \alpha_n) \text{ donde } n \geq 0.$$

Entre ellos se encuentran las fórmulas -que son predicados ceroarios-, los predicados monarios de individuos -de tipo (01)-, los predicados monarios de predicados monarios de individuos -de tipo (0(01))-, los predicados homogéneos binarios de individuos -de tipo ((01)1)-, los predicados heterogéneos binarios de predicados monarios de individuos y de individuos -de tipo ((01)(01))- y muchos otros.

Dado un universo no vacío $\mathcal{D}$, formamos automáticamente la jerarquía $<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha\in ST}$ haciendo $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}$. Decimos que $\Delta = <<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha\in ST}, d>>$ es un sistema estandar adecuado a un lenguaje $\mathcal{L}$, si en Δ, además de la jerarquía, tenemos una función de denotación que asigna valores en $\mathcal{D}_\alpha$ a las constantes de $\mathcal{K}_\alpha$. Concretamente, las constantes de $\mathcal{TP}$ denotan las funciones siguientes:

i) $d(\sim) = \{<V, F>, <F, V>\}$. Es decir, $d(\sim)$: $\mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$

$$\begin{array}{ccc} V & \to & F \\ F & \to & V \end{array}$$

ii) $d(\wedge) = \{<V, \{<V, V>, <F, F>\}>, <F, \{<V, F>, <F, F>\}>\}$

A saber,

$$d(\wedge):\ \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_{(00)}$$

$$\begin{cases} V \to f: \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0 \\ \qquad\quad V \to V \\ \qquad\quad F \to F \\ F \to g: \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0 \\ \qquad\quad V \to F \\ \qquad\quad F \to F \end{cases}$$

iii) $d(\vee) = \{<V, \{<V, V>, <F, V>\}>, <F \{<V, V>, <F, F>\}>\}$

iv) $d(\to) = \{<V, \{<V, V>, <F, F>\}>, <F, \{<V, V>, <F, V>\}>\}$

v) $d(\longleftrightarrow) = \{<V, \{<V, V>, <F, F>\}>, <F, \{<V, F>, <F, V>\}>\}$

vi) $d(\Pi_{(0(0\alpha))}) = \{<f, \underline{a}> \in \mathcal{D}_{(0\alpha)} \times \mathcal{D}_0 \,/\, \underline{a}=V \Longleftrightarrow \forall \underline{b} \in \mathcal{D}_\alpha: f(\underline{b}) = V\}$

Es decir, se trata de la función que manda a F a todos los elementos de $\mathcal{D}_{(0\alpha)}$ excepto a uno: la función constante de valor V. Por tanto, se aplica con verdad solamente cuando se predica del universo total, $\mathcal{D}_\alpha$-considerado como elemento de $\mathcal{D}_{(0\alpha)}$-. De esta forma, anteponer Π a una expresión $A_{(0\alpha)}$ es como afirmar que esta propiedad

$A_{(0\,\alpha)}$ es universal, que todos la cumplen.

vii) $d(\Sigma_{(0(0\,\alpha\,))}) = \{ <f,\underline{a}> \in \mathcal{D}_{(0\,\alpha)} \times \mathcal{D}_0 / \underline{a}=F \iff \forall \underline{b} \in \mathcal{D}_\alpha : f(\underline{b})=F\}$
Por tanto, anteponer Σ a una expresión es afirmar de ella que algunos la cumplen.

Por otra parte, en $\mathcal{T}\,\mathcal{E}$ tenemos la igualdad que denota la identidad; es decir,

$$d(\approx_{((0\,\alpha\,)\,\alpha)}) = \{ <\underline{a},f> \in \mathcal{D}_\alpha \times \mathcal{D}_{(0\,\alpha)} / \forall \underline{b} \in \mathcal{D}_\alpha : (f(\underline{b}) = V \iff \underline{b} = \underline{a})\}$$

Cuando contamos con una jerarquía $<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha \in ST}$ podemos definir las asignaciones. Decimos que I es una <u>asignación</u> sobre $<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha \in ST}$ si para cada x_α su valor mediante I es elemento de $\mathcal{D}_\alpha$; es decir, $I(x_\alpha) \in \mathcal{D}_\alpha$ (para cada $\alpha \in ST$). Por otra parte, dada una asignación I, un elemento $\underline{a} \in \mathcal{D}_\alpha$ y una variable x_α definimos la <u>asignación variante</u> $I^{\underline{a}}_{x_\alpha}$ de la siguiente manera:

$$I^{\underline{a}}_{x_\alpha} = (I - \{ <x_\alpha, I(x_\alpha)>\}) \cup \{ <x_\alpha, \underline{a}>\}$$

Siempre que tengamos un sistema estandar Δ, adecuado a un lenguaje, y una asignación I, sobre la jerarquía de dicho sistema, podemos definir una <u>interpretación</u> ΔI capaz de asignar denotación en Δ a todas las expresiones del lenguaje. Concretamente,

i) Si E_α es una variable x_α entonces $\Delta I(x_\alpha) = I(x_\alpha)$.
Si E_α es una constante, entonces $\Delta I(E_\alpha) = d(E_\alpha)$.

ii) Si E_α es de la forma $(A_{(\alpha\beta)}B_\beta)$, entonces $\Delta I(A_{(\alpha\beta)}B_\beta) = \Delta I(A_{(\alpha\beta)})(\Delta I(B_\beta))$. Es decir, la expresión denotará el valor de la denotación de B_β bajo la función denotada por $A_{(\alpha\beta)}$. En especial, la fórmula $(A_{(0\,\alpha)}B_\alpha)$ será V cuando el individuo de $\mathcal{D}_\alpha$ representado por B_α esté en el subconjunto de $\mathcal{D}_\alpha$ representado por $A_{(0\,\alpha)}$; es decir, significa la pertenencia del primero al segundo.

iii) Si E_α es de la forma $(\lambda x_\beta A_\gamma)$, entonces $\Delta I(\lambda x_\beta A_\gamma) = \{ <\underline{a},\underline{b}> \in \mathcal{D}_\beta \times \mathcal{D}_\gamma / \underline{b} = \Delta I^{\underline{a}}_{x_\beta}(A_\gamma)\}$. Así pues, es una función que asigna a los elementos de $\mathcal{D}_\beta$ ciertos elementos de $\mathcal{D}_\gamma$. Por ejemplo, $\Delta\, I(\lambda x_\beta x_\beta) = \{ <\underline{a},\underline{b}> \in \mathcal{D}_\beta \times \mathcal{D}_\beta / \underline{b} = \Delta\, I^{\underline{a}}_{x_\beta}(x_\beta) = \underline{a} \}$. Se trata, pues, de la función de identidad.

Cuando A_γ es una fórmula -es decir, $\gamma = 0$-, $\Delta\, I(\lambda x_\beta A_0)$ es la función característica que asigna V a los elementos de $\mathcal{D}_\beta$ que verifican A_0; es decir, es el subconjunto de $\mathcal{D}_\beta$ formado por los elementos de $\mathcal{D}_\beta$ que cumplen A_0.

Aunque la teoría de tipos es, naturalmente, incompleta en el sentido estandar, se puede introducir un <u>cálculo</u> deductivo cuyas reglas permiten demostrar como teoremas lógicos las fórmulas válidas en sentido general. Respecto de estos sistemas generales, definidos por Henkin, el cálculo resulta ser completo. En mi <u>Teoría de Tipos</u> [5] presento un cálculo de deducción natural que es completo en el sentido henkiniano. Entre las reglas de dicho cálculo se encuentran las de introducción y eliminación del abstractor, que dicen que la expresión $(\lambda x_\alpha B_\beta)A_\alpha$ y la $\mathsf{S}^{A_\alpha}_{x_\alpha} B_\beta$ coinciden.

2. <u>Cuantificación en Teoría de Tipos</u>

Es bien sabido que el objetivo prioritario al crear la Teoría de Tipos era el de solucionar las paradojas. La tesis de Russell en <u>"Mathematical logic as based on the theory of types"</u> [6] es que en todas las paradojas se da la autorreferencia o reflexividad, y que en cada una de ellas se dice algo de todos los casos de un determinado género, siendo posteriormente agrandada la totalidad con la inclusión del caso que se está tratando, con lo que resulta una nueva totalidad que da lugar a contradicciones.

El procedimiento para evitar la autorreferencia no es, ni mucho menos, el de explícitamente decir que ésta queda prohibida, sino el de idear un aparato formal que imposibilite la creación de malformaciones autorreflexivas.

Como se ha visto, la teoría de tipos distingue niveles o tipos de variables; variables que se refieren a individuos, a predicados monarios de individuos, a predicados monarios de predicados monarios de individuos etc. La generalización no se extiende más que a un nivel; cualquiera, pero uno sólo. Ya no decimos "todos" sin más, sino "todos los individuos", o "todas las propiedades monarias de individuos", o "todas las propiedades monarias propias de los predicados monarios de individuos" etc. Necesitamos, por consiguiente, cuantificadores $\forall x_\alpha$ y $\exists x_\alpha$ para cada tipo $\alpha \in$ ST.

Ni en el lenguaje $\mathcal{T}\mathcal{P}$ ni en el $\mathcal{T}\mathcal{E}$ tenemos los cuantificadores como signos primitivos. Sin embargo, en los dos casos la cuantificación puede introducirse por definición utilizando el resto de los signos. Concretamente, en $\mathcal{T}\mathcal{P}$ usamos los predicados de predicados Π y Σ.

Suponed que Φ sea una fórmula de $\mathcal{T}\mathcal{P}$ y que queramos expresar que todos los individuos de tipo α cumplen Φ. ¿Cómo lo haremos? En primer lugar, a partir de Φ formamos $(\lambda x_\alpha \Phi)$. Este predicado representa a la clase formada por los individuos de $\mathcal{D}_\alpha$ que cumplen Φ. Al anteponer a este predicado el predicado de predicados $\Pi_{(0(0\alpha))}$, expresamos que la clase representada por $(\lambda x_\alpha \Phi)$ es universal; es decir, que todos los individuos de tipo α cumplen Φ. Por consiguiente, podemos definir

$$\forall x_\alpha \Phi =_{Df} \Pi_{(0(0\alpha))}(\lambda x_\alpha \Phi).$$

De forma similar, para el cuantificador existencial,

$$\exists x_\alpha \Phi =_{Df} \Sigma_{(0(0\alpha))}(\lambda x_\alpha \Phi).$$

O sea, en $\mathcal{T}\mathcal{P}$ para decir que algún individuo de $\mathcal{D}_\alpha$ cumple Φ lo que hacemos es decir que no es vacía la clase formada por los elementos de $\mathcal{D}_\alpha$ que cumplen Φ.

¿Cómo expresamos la cuantificación en $\mathcal{T}\mathcal{E}$? Sea Ψ una fórmula de su lenguaje y formemos $(\lambda x_\alpha \Psi)$. Si A_0 es una fórmula de $\mathcal{TE}$ que es siempre verdadera, $(\lambda x_\alpha A_0)$ representa a todo el universo $\mathcal{D}_\alpha$. Por ejemplo, $(\lambda x_\alpha x_\alpha \approx x_\alpha)$ está formada por todos los individuos de $\mathcal{D}_\alpha$, ya que todos son iguales a sí mismos. Una forma de decir que todos los individuos de un cierto tipo cumplen Ψ es decir que la clase formada por ellos es todo el universo de ese tipo; o lo que es lo mismo, que dicha clase coincide con la definida mediante $(\lambda x_\alpha x_\alpha \approx x_\alpha)$. Es decir, podemos definir

$$\forall x_\alpha \Phi =_{Df} (\lambda x_\alpha \Psi) \approx (\lambda x_\alpha x_\alpha \approx x_\alpha).$$

De manera parecida, podríamos definir

$$\exists x_\alpha \Psi =_{Df} (\lambda x_\alpha \Psi) \not\approx (\lambda x_\alpha x_\alpha \not\approx x_\alpha), \text{ o simplemente}$$

$$\exists x_\alpha \Psi =_{Df} \sim \forall x_\alpha \sim \Psi .$$

Pero, en ambos casos estamos utilizando el negador, que no es ninguno de los signos de $\mathcal{TE}$. Esto no resulta ser un problema serio pues también el negador es definible utilizando λ y $\approx$. Para hacerlo vamos a definir el predicado ceroario f_0 que se interpretará como "lo falso":

$$f_0 =_{Df} \forall x_0 x_0, \text{ que con signos primitivos sería:}$$

$$f_0 =_{Df} (\lambda x_0 x_0) \approx (\lambda x_0 x_0 \approx x_0).$$

Utilizando esta constante definimos,

$$\sim =_{Df} (\lambda x_0 x_0 \approx f_0).$$

También utilizando sólo λ e $\approx$ se definen el resto de los conectores: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$. (Véase, por ejemplo, "Identity as a logical primitive" [7].)

3. Predicado de existencia de Bunge

En su artículo "Naturaleza de los objetos conceptuales" Bunge afirma:

Los filósofos tradicionales han solido sostener que la existencia es una propiedad (o un predicado) ...

En cambio, los lógicos modernos han afirmado que la existencia no es un predicado sino un cuantificador, a saber, el cuantificador existencial $\exists$ *...*

Creo que el problema se resuelve distinguiendo dos conceptos que los lógicos modernos han confundido: el concepto lógico algo y el ontológico existe."

Estoy de acuerdo con él y creo ver la diferencia entre las sentencias "Alí Babá existe", "Zeus existe", "El teorema de Pitágoras existe", "La leyenda de El Dorado existe" y "El número dos existe" por un lado, y "Existe un número natural mayor que uno y menor que tres", "Existe un rey de España", "Existe un único elemento neutro en el grupo aditivo de los enteros" y "No existe ningún sistema de Peano finito", por otro. En los primeros ejemplos la existencia se predica como una propiedad de Alí Babá, Zeus etc ... y en los segundos se habla de algún (o de ningún) individuo con ciertas caracterísiticas.

No es mi intención matizar esta diferencia en lo que se refiere a sus posibles expresiones en castellano. Creo que conceptualmente la diferencia está clara y lo que voy a hacer es formalizar en teoría de tipos la propuesta de Bunge.

En el apartado anterior se ha visto cómo en teoría de tipos expresamos la cuantificación existencial utilizando ciertos predicados. Falta analizar la existencia como propiedad. La idea es la siguiente: Los objetos conceptuales o constructos existen de manera diferente a como lo hacen los objetos físicos. La formalización que Bunge propone es como sigue:

"Si x es un objeto, entonces

(a) x existe conceptualmente $=_{Df}$ Algún conjunto no vacío C de constructos es tal que $E_C x$.

(b) x existe físicamente $=_{Df}$ Algún conjunto no vacío F de entes físicos es tal que $E_F x$."

En donde E_C y E_F son predicados de existencia relativa (o contextual), definidos como funciones proposicionales, y que aplicados a objetos producen proposiciones verdaderas cuando dichos objetos sean elementos de C o de F, respectivamente. Para definir la existencia relativa se utiliza la relación binaria siguiente:

"(a) x <u>existe en</u> A $=_{Df}$ (χ_A (x) = 1)
(b) x <u>no existe en</u> A $=_{Df}$ (χ_A (x) = 0)."

Aquí χ_A es la función característica de A.

Lo que voy a hacer es definir, para cada tipo $\alpha \in$ ST, un predicado monario de individuos de tipo α -es decir, una expresión de tipo (0α)- que sea V solamente cuando se aplique a objetos que existan conceptualmente. De forma similar se definiría el predicado de existencia física.

En primer lugar, defino el predicado binario de existencia en una clase.

(1) <u>En ... existe ...</u> $=_{Df} (\lambda X_{(0\alpha)} (\lambda x_\alpha (X_{(0\alpha)} x_\alpha)))$.
Este predicado binario está escrito con los signos comunes a $\mathcal{TP}$ y $\mathcal{TE}$ y es, por consiguiente, una expresión de ambos. Dada una jerarquía $<\mathcal{D}_\alpha>_{\alpha \in ST}$ este predicado denota la función:

$$\{<f,g> \in \mathcal{D}_{(0\alpha)} \times \mathcal{D}_{(0\alpha)} \ / \ g = \{<\underline{a},\underline{b}> \in \mathcal{D}_\alpha \times \mathcal{D}_0 \ / \underline{b}=V \Longleftrightarrow f(\underline{a})=V\}\}.$$

Aquí a cada función f de $\mathcal{D}_{(0\alpha)}$ -es decir, a cada subconjunto de $\mathcal{D}_\alpha$- se le asigna la función de $\mathcal{D}_\alpha$ en $\mathcal{D}_0$ que manda a V precisamente a los elementos de $\mathcal{D}_\alpha$ cuyo valor mediante f es V. Es decir, se trata de la relación de pertenencia entre subconjuntos de $\mathcal{D}_\alpha$ y elementos de $\mathcal{D}_\alpha$.

Contando con este predicado podemos formalizar la existencia relativa o contextual así:

(2) <u>En $R_{(0\alpha)}$ existe ...</u> = $((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_\alpha (X_{(0\alpha)} x_\alpha))) R_{(0\alpha)})$.

Este predicado se aplica a entidades de tipo α y al interpretarlo en un sistema Δ nos da el valor de la función (1) para el argumento $\Delta(R_{(0\alpha)})$, que es precisamente $\Delta(R_{(0\alpha)})$. Es decir,

$\Delta((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha})))R_{(0\alpha)}) = \{ <\underline{a},\underline{b}> \in \mathcal{D}_{\alpha} \times \mathcal{D}_{0} / \underline{b}=V \Leftrightarrow \Delta(R_{(0\alpha)})(\underline{a})=V \} = \Delta(R_{(0\alpha)})$. Este resultado no debe sorprendernos: evidentemente da lo mismo decir "En $R_{(0\alpha)}$ existe A_{α}", que decir: "A_{α} es $R_{(0\alpha)}$".

En el cálculo, utilizando introducción y eliminación del abstractor, tenemos

$$\vdash ((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha})))R_{(0\alpha)}) \Longleftrightarrow (\lambda x_{\alpha}(R_{(0\alpha)}x_{\alpha}))$$

$$\vdash (\lambda x_{\alpha}(R_{(0\alpha)}x_{\alpha})) \Longleftrightarrow R_{(0\alpha)}$$

Utilizando (2) podemos formalizar:

(3) $\underline{\text{En } R_{(0\alpha)} \text{ existe } A_{\alpha}} = (((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha})))R_{(0\alpha)})A_{\alpha})$.

Evidentemente,

$$\vdash (((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha})))R_{(0\alpha)})A_{\alpha}) \Longleftrightarrow (R_{(0\alpha)}A_{\alpha}).$$

Sea $C_{(0\alpha)}$ un predicado que formaliza el ser un constructo de tipo α ; es decir,

(4) $\underline{\text{... es un constructo}} = C_{(0\alpha)}$

Más adelante volveremos sobre el análisis de este predicado, a qué objetos se aplica con verdad y a su importancia en la formalización del predicado de existencia conceptual. De momento lo utilizaré para definir el predicado,

(5) $\underline{\text{... es un conjunto no vacío de constructos}} =_{Df}$
$=_{Df} (\lambda X_{(0\alpha)}(\exists x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha}) \wedge \forall x_{\alpha}(X_{(0\alpha)}x_{\alpha} \rightarrow C_{(0\alpha)}x_{\alpha})))$.

Evidentemente, esta fórmula puede reescribirse con los signos primitivos de $\mathcal{T}\mathcal{P}$ así:

$$(5.a)\ (\lambda X_{(0\alpha)}(\Sigma X_{(0\alpha)} \wedge \Pi(\lambda x_\alpha(\sim(X_{(0\alpha)}x_\alpha) \vee (C_{(0\alpha)}x_\alpha))))).$$

Si el lenguaje manejado fuera el $\mathcal{T}\mathcal{E}$, escribiríamos:

(5.b)

$$(\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha) \not\approx \lambda x_\alpha(x_\alpha \not\approx x_\alpha) \wedge \lambda x_\alpha(\sim(X_{(0\alpha)}x_\alpha) \vee (C_{(0\alpha)}x_\alpha)) \approx \lambda x_\alpha(x_\alpha \approx x_\alpha))).$$

En donde, a su vez, podríamos sustituir los conectores por sus correspondientes definiciones con identidades y λ.

Ahora contamos ya con todos los ingredientes para poder definir el predicado de existencia conceptual,

$$(6)\ \underline{\ldots\text{ existe conceptualmente}} =_{Df} (\lambda y_\alpha(\exists Z_{(0\alpha)}(((\lambda X_{(0\alpha)}(\exists x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge \forall x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha \rightarrow C_{(0\alpha)}x_\alpha)))Z_{(0\alpha)}) \wedge (((\lambda X_{(0\alpha)}(\lambda x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha)))Z_{(0\alpha)})y_\alpha)))).$$

Esta expresión equivale a

$(\lambda y_\alpha(\exists Z_{(0\alpha)}(((\lambda X_{(0\alpha)}(\exists x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge \forall x_\alpha(X_{(0\alpha)}x_\alpha \rightarrow C_{(0\alpha)}x_\alpha)))Z_{(0\alpha)}) \wedge (Z_{(0\alpha)}y_\alpha)))$ -utilizando las reglas de introducción y eliminación del abstractor-, que a su vez equivale a

$$(\lambda y_\alpha(\exists Z_{(0\alpha)}(\exists x_\alpha(Z_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge \forall x_\alpha(Z_{(0\alpha)}x_\alpha \rightarrow C_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge (Z_{(0\alpha)}y_\alpha))))$$

Sea A_α una expresión de tipo α. Para formalizar que A_α existe conceptualmente escribimos:

$$(7)\ \underline{A_\alpha\text{ existe conceptualmente}} = ((\lambda y_\alpha(\exists Z_{(0\alpha)}(\exists x_\alpha(Z_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge \forall x_\alpha(Z_{(0\alpha)}x_\alpha \rightarrow C_{(0\alpha)}x_\alpha) \wedge (Z_{(0\alpha)}y_\alpha))))A_\alpha).$$

Pero se puede demostrar lo siguiente,

$$\vdash ((\lambda y_{\alpha} (\exists Z_{(0\alpha)} (\exists x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge \forall x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha} \rightarrow C_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge$$
$$\wedge (Z_{(0\alpha)} y_{\alpha})))) A_{\alpha}) \leftrightarrow \exists Z_{(0\alpha)} (\exists x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge \forall x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha} \rightarrow$$
$$\rightarrow C_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge (Z_{(0\alpha)} A_{\alpha}))$$

y también,

$$\vdash \exists Z_{(0\alpha)} (\exists x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge \forall x_{\alpha} (Z_{(0\alpha)} x_{\alpha} \rightarrow C_{(0\alpha)} x_{\alpha}) \wedge (Z_{(0\alpha)} A_{\alpha})) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (C_{(0\alpha)} A_{\alpha})$$

(piénsese en $\lambda x_{\alpha} (x_{\alpha} \approx A_{\alpha})$).

¿Qué es lo que hemos demostrado? Hemos visto que el existir conceptualmente equivale a ser un constructo. Este es, creo yo, el sentido profundo de la existencia conceptual que Bunge formaliza en su artículo.

Pero, ¿qué es ser un constructo? Veamos qué dice Bunge:

"Por 'constructo' u 'objeto conceptual' entendemos una creación mental (cerebral), aunque no un objeto mental o psíquico tal como una percepción, un recuerdo, o una invención. Distinguiremos cuatro clases básicas de constructo: conceptos, proposiciones, contextos y teorías.

Los <u>*conceptos*</u> *son las unidades con que se construyen las proposiciones: son los átomos conceptuales ...*

Las <u>*proposiciones*</u> *son los constructos que satisfacen algún cálculo proposicional y que, por añadidura, pueden ser evaluados en lo que respecta a su grado de verdad, ...*

Un <u>*contexto*</u> *es un conjunto de proposiciones formadas por conceptos con referentes comunes ...*

Una <u>*teoría*</u> *es un contexto cerrado respecto de las opera-*

raciones lógicas ...

En definitiva tenemos la siguiente partición de la clase de los conceptos:

- *Conceptos*
  - *Individuos*
  - *Conjuntos*
  - *Relaciones*
    - *No funcionales*
    - *Funcionales*
      - *Proposicionales*
      - *No proposicionales."*

Conceptos. Considerad que en la jerarquía de tipos $< \mathcal{D}_\alpha >_{\alpha \in ST}$ aparecen todos los constructos de esta clase y todos los objetos físicos y que además hemos podido distinguir entre estos últimos -integrantes, cuanto menos, de parte del universo $\mathcal{D}_1$ - y los conceptuales. (Estoy aplazando esta parte del estudio de los constructos, rehuyéndolo).

Para cada tipo $\alpha \in ST$, en $\mathcal{C}_\alpha$ están todos los elementos de $\mathcal{D}_\alpha$ que son constructos y en $\mathcal{F}_\alpha$ los que existen físicamente. Se cumple,

$$\mathcal{C}_\alpha \cap \mathcal{F}_\alpha = \emptyset \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_\alpha \cup \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha$$

Para representarlos, extendamos el lenguaje $\mathcal{TP}$ con una colección de constantes: c_1^1, c_1^2, c_1^3, ..., $c_{(01)}^1$, $c_{(01)}^2$, ..., en general c_α^1, c_α^2, ...

Proposiciones. Todas las proposiciones son constructos. Unas tratan de objetos físicos y otras de objetos conceptuales, pero en cualquier caso son objetos conceptuales.

Llamando $\mathcal{TP}^*$ al lenguaje extendido, SENT $\mathcal{TP}^*$ representa a las proposiciones.

Contextos. Yo me inclino a pensar que cualquier conjunto de proposiciones constituye un contexto. Lo de los referentes comunes tiene el problema de que es difícil establecer cuánto tienen que solaparse las proposiciones para que consideremos que sus conceptos tienen referentes comunes. Además, ¿por qué no admitir los contextos dispersos?

P(SENT $\mathcal{TP}^*$) representa a los contextos. Es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de sentencias de $\mathcal{TP}^*$.

<u>Teorías.</u> Una teoría es sencillamente un contexto cerrado respecto de la noción de consecuencia lógica. Dado un conjunto Γ, definimos

$$\text{CONS}(\Gamma) =_{\text{Df}} \{ \Phi \in \text{SENT } \mathcal{TP}^* / \ \Gamma \models \Phi \}$$

Las teorías están representadas en $\{ \text{CONS}(\Gamma) \ / \ \Gamma \subseteq \text{SENT } \mathcal{TP}^* \}$. Evidentemente, en este conjunto está también SENT $\mathcal{TP}^*$, que es una teoría contradictoria. De hecho, es la única teoría contradictoria que existe, pues si CONS(Γ) es contradictoria, todas las sentencias de $\mathcal{TP}^*$ están en CONS(Γ). Claramente, el conjunto de las teorías es un subconjunto del de los contextos.

Con esto termina la descripción de las cuatro clases básicas de constructos, construídos a partir de un universo $\mathcal{D}_1$ de individuos.

4. <u>La jerarquía</u> $< \mathcal{D}_\alpha >_{\alpha \in ST}$

En el apartado anterior consideré que sobre una cierta base $\mathcal{D}_1$ de individuos -materiales y conceptuales- se forma la jerarquía de tipos de los universos $\mathcal{D}_\alpha$, y que ellos constituyen el substrato de nuestras proposiciones y contextos. Todo lo existente debería estar en alguno de estos universos, o formar parte de las proposiciones -o de los contextos- generadas con sus elementos. Sin embargo, me parece que en un estudio más detallado se manifiestan muchas dificultades. Yo distinguiría dos aspectos bien diferenciados: una cosa es saber cómo se articula la jerarquía sobre una cierta base de individuos, y otra es saber cómo consiguen carta de ciudadanía los objetos individuales, qué posibles objetos conceptuales llegan a serlo.

Un problema importante es que se puede hablar de, y describir a objetos inexistentes, no siendo en algunos casos obvia su inexistencia. No obstante, elaborar un criterio que nos permita saber si un objeto existe o no, es un problema que reviste cierto interés y dificultad. ¿Cómo determinarlo? Un criterio único de existencia, aparte de difícil, es improductivo.

Así, por ejemplo, en Mitología basta con haber sido mencionado para existir: acostarse con Zeus, morir en Troya, ser ninfa o arpía, es más que suficiente. Creo que en los contextos abiertos la existencia está casi regalada. Sin embargo, ¿admitiríamos como existente al famoso barbero, el que afeita a todos los que no se afeitan a sí mismos y sólo a ellos?

Creo que lo mejor es establecer criterios útiles para cada contexto. En el apartado siguiente veremos qué sucede en Teoría de conjuntos. Llegaré incluso a decir que aunque todos los conjuntos existen, en el Universo de los conjuntos -como en la granja de Orwell- unos conjuntos existen más que otros. Esto, evidentemente, no lo ha dicho Bunge y no sé qué le parecerá.

Por lo que hace referencia al otro aspecto mencionado, el de la articulación de la jerarquía sobre una cierta base $\mathcal{D}_1$ de individuos, creo que lo fundamental es la distinción entre objetos físicos y conceptuales. Considerad que en $< \mathcal{D}_\alpha >_{\alpha \in ST}$ aparecen todos los objetos físicos y todos los conceptos. En $\mathcal{D}_1$ sólo hay dos clases de individuos: los materiales y los conceptuales. No creo que en $\mathcal{D}_1$ deban incluirse objetos inexistentes -de definición contradictoria, por ejemplo-. Siendo así, todos los objetos de $\mathcal{D}_1$ existen, aunque los de cada clase a su estilo. Por otra parte, puesto que un mismo objeto no puede ser físico y conceptual simultáneamente, la intersección entre ambos conjuntos es vacía.

En todos los niveles de la jerarquía son constructos los miembros que no son objetos físicos, y puesto que me parece más sencillo describir a estos últimos, hay que considerar que en cada nivel α, el conjunto $\mathcal{C}_\alpha$ de constructos es la diferencia $\mathcal{D}_\alpha - \mathcal{F}_\alpha$ (siendo $\mathcal{F}_\alpha$ el conjunto de los objetos físicos de nivel α).

A mí me gusta considerar que un conjunto de objetos físicos es, en cierto modo, un objeto físico. Mi idea es asignar existencia física a todo conjunto cuyos ingredientes últimos -los elementos de $\mathcal{D}_1$ - sean todos objetos físicos. Es decir, todo conjunto de, conjunto de conjuntos de, o relación entre objetos físicos, existe físicamente. Sé que de esta manera asigno existencia física a una infinidad de objetos. Esto que pienso se parece en algún sentido a la teoría nominalista de Goodman y Quine, pero para mí -que en esto me atengo a la distinción estandar- no es lo mismo un individuo que el conjunto cuyo único elemento sea ese individuo. Esta es la razón por la que existen físicamente infinitos objetos.

Concretamente, $\mathcal{D}_0 = \{ V,F \}$. $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_0$ y $\mathcal{F}_0 = \emptyset$

$\mathcal{D}_1 = \{ a \ / \ a$ es un individuo $\}$. $\mathcal{C}_1$ es el conjunto de los constructos y $\mathcal{F}_1$ el de los objetos físicos. Se cumple que

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{C}_1 \text{ y que } \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{F}_1 = \emptyset$$

Por lo que he comentado anteriormente, $\mathcal{F}_\alpha = \emptyset$ excepto para 1 y los que correspondan a universos de relaciones. Considerad que $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_n}$ sean conocidos, entonces

$$\mathcal{F}_{(\ldots(0\,\alpha_1)\ldots\alpha_n)} = \{ f \in \mathcal{D}_{(\ldots(0\,\alpha_1)\ldots\alpha_n)} \ / \ \forall \underline{a}_n \in \mathcal{D}_{\alpha_n} \ldots$$
$$\ldots \forall \underline{a}_1 \in \mathcal{D}_{\alpha_1} ((\ldots(((f(\underline{a}_n))(\underline{a}_{n-1}))\ldots)(\underline{a}_1)) = V \Rightarrow \{ \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \} \subseteq \mathcal{F}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathcal{F}_{\alpha_n} \}$$

Concretamente,

$$\mathcal{F}_{(01)} = \{ f \in \mathcal{D}_{(01)} \ / \ \forall \underline{a} \in \mathcal{D}_1 \ (f(\underline{a}) = V \Rightarrow \underline{a} \in \mathcal{F}_1) \} .$$

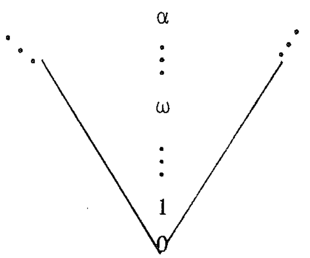
$$\mathcal{F}_{((01)1)} = \{ f \in \mathcal{D}_{((01)1)} \ / \ \forall \underline{a} \in \mathcal{D}_1 \ \forall \underline{b} \in \mathcal{D}_1 \ ((f(\underline{a}))(\underline{b}) = V \Rightarrow \{\underline{a},\underline{b}\} \subseteq \mathcal{F}_1 \}$$

Es decir, en el universo $\mathcal{D}_{(01)}$ hay funciones f constituídas exclusivamente por objetos físicos -es decir, que sólo son V para objetos físicos-. Pues bien, esas son las que integran $\mathcal{F}_{(01)}$. Del mismo modo, las relaciones binarias entre objetos físicos son las que forman $\mathcal{F}_{((01)1)}$, etc...

En este punto, el de atribución de existencia física a ciertos conjuntos, sé que me alejo enormemente de la ontología de Bunge. Si os molesta mucho, considerad que $\mathcal{F}_{\alpha} = \emptyset$ excepto en el nivel $\mathcal{D}_1$.

5. La existencia en Teoría de conjuntos

Yo creo que en Teoría de conjuntos un análisis interesante del concepto de existencia es definirla como sinónimo de ser un conjunto, como equivalente a aparecer en alguno de los "pisos" del Universo en vértice de los conjuntos.



Es decir, en donde:
$V_0 = \emptyset$, $V_1 = \{\emptyset,\}$ $V_2 = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}$, ...
..., $V_{n+1} = PV_n$, ...
$V_{\omega} = \bigcup_{n \in \omega} V_n$, $V_{\omega+1} = PV_{\omega}$, ..., y en general, para cada ordinal sucesor $\beta = \alpha + 1$, formamos $V_{\beta} = PV_{\alpha}$ y para cada ordinal límite λ, $V_{\lambda} = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_{\alpha}$

Conforme a este criterio de existencia, decimos que $\emptyset$ existe, pero que no existe la colección formada por todos los conjuntos: en ningún momento cerramos formando el conjunto de todos los conjuntos. (Este Universo de conjuntos es una obra en construcción continua, una progresión inacabable). Tampoco existen los átomos, pues hemos abandonado la idea de tomar en la base a elementos que no sean conjuntos: en este Universo todo miembro de un conjunto es un conjunto.

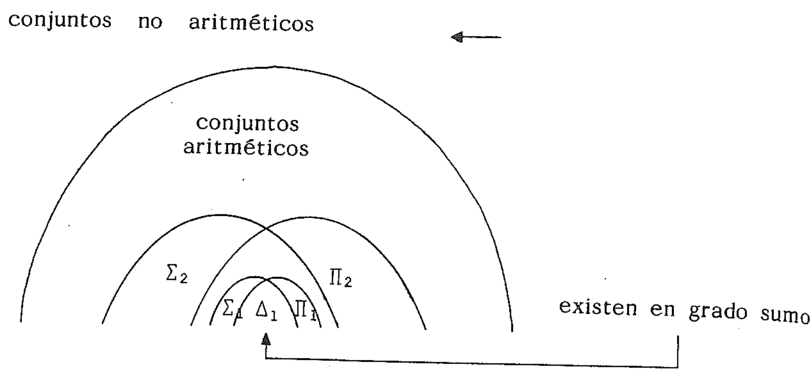
En la teoría de Zermelo, puesto que sólo se habla de conjuntos, los dos conceptos de existencia -como predicado y como cuantificador- casi coinciden. Siempre que se puede probar que hay un cierto x cuyos elementos se caracterizan por cumplir unas condiciones determinadas; es decir, cuando se puede demostrar $\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \Phi(y))$, es porque es un conjunto y por tanto existe. (Para demostrarlo normalmente utilizamos el axioma de separación: vemos que sus elementos están ya en un conjunto)

En la teoría de Von Neumann, puesto que hablamos de clases y de conjuntos, el predicado de existencia equivale a no ser una clase última, o lo que es lo mismo, a pertenecer a alguna clase. Es decir, x es un conjunto $=_{Df}\ \exists y\ x \in y$. Esto correspondería también un poco a la idea de Bunge de existencia como pertenencia a una clase no vacía de constructos.

¿Se puede matizar más el concepto de existencia?

Yo pienso que dentro del Universo de los conjuntos, hay diferencias entre el modo de existencia de unos conjuntos y otros. Parece que conforme se sube, los conjuntos "existen menos", son más abstractos. Pero incluso dentro de un mismo nivel los hay con "más entidad" que otros, "existen más". Pensad en $V_{\omega+1} = PV_{\omega}$. Sabemos que $V_{\omega+1}$ no es vacío, que su cardinalidad es incluso superior a la de los naturales, y sin embargo no podemos definir individualmente a casi ninguno de sus miembros. Aquí lo que sucede es que PV_{ω} se define mediante la categoría de subconjunto, que es muy poco descriptiva. Basta con observar la variedad de subconjuntos que tiene el conjunto de los naturales para percatarse de lo que digo: los hay finitos e infinitos, recursivos, recursivamente enumerables y a partir de ahí toda la gama de Π, Σ y Δ que integran la jerarquía aritmética; pese a todo, la mayoría de los subconjuntos de los naturales no son definibles [8].

Yo creo que del mismo modo que admitimos grados de definibilidad, fijándonos -grosso modo- en la complejidad de las sentencias, podemos admitir grados de existencia basados en los de definibilidad. Como muestra el siguiente gráfico de PN:



REFERENCIAS

1 M. BUNGE: "Naturaleza de los objetos conceptuales" en Epistemología. Ariel, 1980.

2 B. RUSSELL: "The doctrine of types" en The principles of Mathematics. 1903.

3 A. CHURCH: "A formulation of the simple theory of types". J.S.L. vol. 5, 1940.

4 L. HENKIN: "A theory of propositional types". Fundamenta Mathematical, LII, 1963.

5 M. MANZANO: Teoría de Tipos. Ediciones de la Universidad de Barcelona, 1980.

6 B. RUSSELL: "Mathematical Logic as based on the theory of types". American Journal of Mathematics, vol. 30, 1908. Hay traducción castellana de Javier Muguerza en Lógica y conocimiento. Taurus, 1966

7 L. HENKIN: "Identity as a logical primitive". Philosophia, vol. 5, 1975.

8 De forma bastante sencilla lo cuenta H. Enderton: A mathematical introduction to logic, pág. 235, Academic Press. N.Y. 1972.

Dpto. de Lógica
Universidad de Barcelona