ONTOLOGIA E HISTORIA DEL CALCULUS
(La tarea de Abraham Robinson)

Víctor GOMEZ PIN

ABSTRACT

It is well known that the history of Calculus in the nineteenth century coincides with the process of substitution of infinitesimals by the notion of limit. But it is adviseable to keep in mind the ontological implications of that process.

We can find a background for this ontological approach in Abraham Robinson's *Non-Standard Analysis* and "The Metaphysics of the Calculus". Indeed, by the choice of the word "metaphysics" and by the several recalls of the ontological nature of the arguments, Robinson claims for a filiation which is at the same time fruitful in the mathematical register and necessary for a true philosophical reflection about the infinite.

So far, we have concentrated on the purely mathematical aspects of the development of Analysis. However, the history of the subject cannot be fully understood if we disregard its philosophical background.

(Non-standard Analysis, pp. 279-280)

1. Ontología y Análisis.

La metafísica del Cálculus es el título de uno de los trabajos de Abraham Robinson consagrados esencialmente a una exposición conceptual del devenir del Análisis[1] De hecho, se recogen, con las particularidades propias de una exposición oral, las ideas al respecto expuestas en el capítulo que, bajo el título "Concerning the History of the Calculus", cierra la obra capital de Robinson *Non-standard Analysis*[2]. La elección del título, sin embargo, es significativa de una voluntad del autor de inscribir su reflexión en el arcaico esfuerzo por vincular intrínsecamente trabajo matemático y trabajo filosófico, voluntad presente incluso en algunos capítulos estrictamente técnicos de *Non-standard Analysis*. Introduciendo el término *metaphysics* se hace un guiño a D'Alembert, por Robinson explícitamente citado:"*la théorie des limites* *est la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel*".[3] Pero la complicidad se extiende a Lazare Carnot y sus "Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal";[4] ciertamente a Leibniz, que vincula opositivamente[5] el infinito aceptable o sincategoremático, expresable bajo forma de serie infinita[6] a los *infiniment pétits métaphysiques* excluídos, como muy bien señala Robinson, en función de un a priori precisamente de orden estrictamente metafísico.[7] Complicidad asimismo con Berkeley, cuyas posiciones metafísicas relativas a la percepción se hallan en el origen de su implacable crítica de la teoría de las fluxiones y de la hipótesis de los diferenciales.[8] Complicidad con Lagrange quien, en 1759, anuncia en una carta a Euler que había elaborado un manual de cálculo diferencial y conseguido desarrollar la verdadera metafísica de sus principios.[9] Cabe extender tal filiación evocando a Barrow (que cede la cátedra a Newton a fin de consagrarse a problemas metafísico-teológicos fácilmente vinculables a las aporías del triángulo diferencial), a Newton, a Cantor[10] o aún a Cavallieri, cuya reconstrucción de la geometría en función de la hipótesis de los indivisibles es una operación estrictamente ontológico-metafísica (una ontología, ciertamente, que se desconoce como tal). Introduciendo en uno de sus títulos el término *metafísica* y señalando en múltiples lugares el carácter ontológico de la discusión[11] en torno a los diferenciales, Robinson reivindica una filiación extraordinariamente fértil en el plano matemático;[12] pero asimismo indispensable para una auténtica reflexión filosófica.

Por un lado, en efecto, no ya una filosofía inmediatamente referida a la técnica matemática, sino una convicción filosófica general puede determinar la dirección de fundamentales investigaciones en matemáticas.[13] Por otro lado, sin embargo, Robinson nos ayuda a asumir la problemática complementaria, a saber, que al pensamiento matemático es intrínseco un posicionamiento respecto a algunas de las cuestiones filosóficas troncales, a las que tradicionalmente se atribuye el calificativo de metafísicas. La cuestión del infinito -cuyo esclarecimiento, al decir de Hilbert en su artículo célebre, "*no sólo concierne al ámbito de los intereses especializados, sino que es indispensable a la dignidad misma del espíritu humano*"[14] - es una de ellas; cuestión hasta tal punto vinculante de filosofía y matemáticas que -cabe decir- sólo puede ser planteada en términos ontológicos atravesando el marco estricto del cálculo diferencial.

Al final de este trabajo retomaremos el término *metafísica*, nos preguntaremos qué sentido tiene en boca de un Carnot o de un Lagrange, e intentaremos mostrar que no cabe satisfacerse con una distinción de sentidos que separara una metafísica como fundamentación inherente al campo de la matemática. Sólo entonces aparecerá la verdadera importancia de la reivindicación del término por Abraham Robinson.

2. El devenir histórico del "Calculus" ante Leibniz.

Respondiendo a las intervenciones de Heyting y Bar-Hillel relativas a la conferencia aludida, Robinson precisa que en ella abordó ciertas cuestiones polémicas, situándose "*from the detached point of view of a historian*".[15] Es sin embargo evidente que, al menos en lo que al devenir del análisis se refiere, la visión del autor no es neutra ni meramente descriptiva. Robinson establece, a través de los textos que evoca, un diálogo con sus predecesores, diálogo determinado por la necesidad de mostrar que su propia posición es aquella a la que oscuramente, a través de la diversidad, oposición y aún contradicción de las posturas relativas al estatuto de los diferenciales, apunta la historia del Análisis.

La historia del Análisis parece de entrada coincidir con la de un rechazo progresivamente argumentado de aquello que, en el registro ontológico o categorial, singularizaría a tal disciplina, a saber, el estatuto *a la vez infinito en acto y meramente cuantitativo de su objeto*. Si Mario Bunge[16] ha podido referirse a la revolución $\varepsilon - \delta$ mediante la expresión "*execution and burial of infinitesimals*", Robinson se complace en recordar que la sentencia se hallaba ya preparada desde Leibniz cuando en 1701 presenta los diferenciales como entidades meramente relativas "*aussi grandes et petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée*",[17] excluyendo su estatuto de "*choses réelles*" y otorgándoles tan sólo el de nociones ideales que simplifican los razonamientos, análogas a las raíces puramente imaginarias tales como $\sqrt{-1}$[18]. Anuncio de la sentencia condenatoria de los diferenciales que se acentúa cuando, en 1716, insistiendo en su carácter de *ficciones útiles*, Leibniz da como razón del por qué en ocasiones pareció sostener lo contrario las presiones del Marqués de l'Hôpital, temeroso de que la clara exposición de sus pensamientos constituyera una traición a la causa.[19] Robinson hubiera podido citar otros textos (por ejemplo, una carta a des Bosses de 1706), igualmente condenatorios de los infinitesimales, mas también algunos que van en el sentido contrario (así, la carta a Fouche del 3 de Agosto de 1693), sin que quepa siquiera distinguir etapas claramente determinadas en la evolución del pensamiento de Leibniz al respecto, lo cual hace particularmente impresionante aquella frase de la carta a Fouche del 2 de Junio de 1692, según la cual, "*le calcul nous mène quelquefois à l'infini sans y penser*".

Y, en efecto, a base de no pensar, de no someter suficientemente a la mediación de la reflexión, a base de no encontrar un concepto propio de lo que designamos como infinito y que el cálculo diferencial actualiza en la plenitud de su operatividad, nos encontramos con que esta disciplina *progresa* desde el principio sumergida en la tiniebla por lo que se refiere a su fundamentación racional.

A diferencia del Marqués de l'Hôpital, Leibniz *parece* otorgar a los infinitesimales un estado ontológico imaginario... ficciones de la mente... aptos para alcanzar la determinación de aquello que tiene entidad cuantitativa, pero carentes de tal entidad en sí mismos; desviaciones útiles en definitiva...

Mas ficticias o no, las "cantidades" infinitesimales se hallan sometidas a leyes. Y aquí sí que Leibniz acarrea la responsabilidad de una aporía de consecuencias gravísimas. Pues una cosa es que los infinitesimales carezcan de entidad "empírica", contrariamente a lo que parece creer de l'Hôpital;[20] otra muy diferente es que carezcan de consistencia lógica. Ahora bien, los infinitesimales se hallan por Leibniz sometidos a una doble determinación que les condena a tal inconsistencia, a saber:

a) por un lado se trata de "cantidades" *incomparables* relativamente a las cantidades propiamente dichas, de tal manera que dos de estas últimas que difieran por una de las primeras serían *salva veritate* reemplazables[21];

b) por otro lado, sin embargo, las cantidades infinitesimales se hallan regidas por las leyes y propiedades que marcan a las cantidades finitas u ordinarias.

Ambas tesis son incompatibles en el seno de un entramado lógico consistente... incompatibles, al menos, mientras el marco de intelección del registro cuantitativo sea la representación *standard* de la recta real...

La originalidad del abordaje por Robinson de esta aporía reside en su esfuerzo por -literalmente- inteligirla, es decir, acceder a la razón que determina el que Leibniz reivindique cada uno de los polos antagónicos, comprender la imposibilidad de excluir cualquiera de ellos, vislumbrar que a la intuición de Leibniz se está revelando una pluralidad de fenómenos irreductibles *a determinado modelo configurador de nuestras representaciones*, y que confrontados a la alternativa entre renunciar a ellos o transformar el modelo, debemos optar por la segunda vía, completando así en el tiempo la tarea del pensador de Hannover.

El *Análisis no-standard* viene a *otorgar razón* a la intuición de Leibniz, a legitimar su instalación en la aporía y, al tiempo, redimirle de ella, a procurar un modelo en el que dos magnitudes que difieren por una magnitud infinitamente pequeña son -en el registro al menos que interesaba a Leibniz- equiparables entre sí, *sin que ello excluya a tal diferencia del concepto propio de magnitud.*

Para ello el *Análisis no-standard* somete la recta real a la conocida re-interpretación mediante la cual caben en ella: un anillo M_1 constituido por números a tales que $|a| < r$ para todo número standard positivo r; un conjunto *N, en el cual se halla incluido N, que contiene números naturales infinitamente grandes y constituye un modelo *no-standard* de la aritmética (modelo, como veremos, garantizador del carácter arquimediano de *R); números infinitamente grandes (en valor absoluto) e inversos de los elementos de M_1, es decir, de la forma a^{-1}; clases de equivalencia en torno a todos y cada uno de los números reales (standard o no), constituídas por una constelación de números a, b verificadores de la relación $a \simeq b$, es decir, números cuya diferencia es infinitesimal... constelación que -nuevo guiño a Leibniz- recibe el nombre de mónada.[22]

La relación de equivalencia verificada por los pares de elementos de una *mónada* garantiza precisamente la primera de las tesis que Leibniz sostenía aporéticamente. Pues, de tratarse de números finitos, dos elementos cualesquiera de la misma mónada tienen en el registro standard un único representante, y ello conlleva que, bajo cierto aspecto, -aquel que precisamente interesaba a Leibniz-, sean homologables. Lo cual no significa homologables en sentido absoluto[23]. Por ejemplo, si a es un infinitesimal, sea cual sea un número positivo no infinitesimal r no existe n standard tal que $na > r$, y en ello a coincide con cero; a es, bajo este aspecto, *salva veritate* equivalente a cero. Por el contrario, si existe un número natural $^*n$ no standard, o sea infinito, tal que

$^{*}na > n$, cosa que sigue excluída para cero.

En cuanto a la afirmación de que las cantidades infinitesimales responden a las propiedades de las cantidades finitas, ello se halla garantizado por un principio fundamental del análisis no-standard, a saber:

Si K es el conjunto de proposiciones verificables en el modelo que constituye la recta real standard, entonces dicho conjunto de proposiciones se verifica asimismo en el modelo que constituye el "enlargement" o extensión transgresiva $^{*}R$ de R; los axiomas, reglas y teoremas expresivos de la coherencia de R siguen siendo expresivos de la coherencia de $^{*}R$.[24]

La legítima arquitectura natural y real.

Ciertamente ello mediante una reinterpretación de las proposiciones que son "*meaningful and true for the system of Real Numbers*".[25] Veamos un ejemplo: Sea la proposición verdadera en R:

"para todo número positivo a existe un número n perteneciente a N tal que $a + a + \dots + a$ (n *veces*) > 1".

¿Es tal proposición verdadera en $^{*}R$? En modo alguno, pues si a es infinitesimal, cualquiera que sea n perteneciente a N, $a + a + \dots + a$ (n veces) sigue siendo infinitesimal, por ende menor que 1. La proposición es, sin embargo, legítima si introducimos la modificación siguiente:

"para todo número positivo a existe un número n perteneciente a $^{*}N$ tal que $a + a + \dots a$ (n veces) > 1".

Modificación auténticamente restauradora del axioma de Arquímedes en la medida en que del análisis no-standard se desprende que $^{*}N$ es el conjunto *concreto* de los números naturales como $^{*}R$ lo es de los números reales.[26] Intentemos justificar este extremo:

La inmersión de N y R respectivamente en $^{*}N$ y $^{*}R$ supone no ya tan sólo que a estos últimos corresponde ahora el ser modelos verificadores del *conjunto* de proposiciones relativas a los números naturales y a los números reales, sino, en cierto sentido, verificadores *exclusivos*; de tal manera que, si los axiomas, reglas y teoremas cuyo modelo es el marco real o natural, son intrínsecos al modelo mismo, entonces cabe decir: N y su complemento en $^{*}N$, R y su complemento en $^{*}R$ son tan sólo abstracciones a partir de los objetos matemáticos auténticos que son $^{*}N$ y $^{*}R$; pseudo-conjuntos por un prestigio de la imaginación *representados* pero carentes de la pluralidad de determinaciones definidoras del orden numérico y, por ende, *externals*, por decirlo como Robinson, al registro de la magnitud real.

Se dan en la recta real *R números naturales finitos o standard, pero no cabe -es allí external- *el conjunto* de los números naturales finitos[27].

Se dan en la recta real *R números naturales infinitos o no standard pero no cabe -es allí external- el conjunto de los números naturales infinitos[28].

Se dan en la recta real *R números reales (naturales o no) que responden al registro standard (es decir, números ateniéndonos a los cuales no tiene legitimidad la proposición: existe a tal que para todo natural $n > 0$, $| a | < \frac{1}{n}$), pero no cabe -es allí external- el conjunto de tales números[29].

Externals son asimismo el conjunto M_0 de los números reales finitos, standard o no, y el conjunto de los números reales infinitos[30]. De lo cual se infiere algo que puede resultar más sorprendente:

a) el conjunto $\mu(a)$ de los números infinitamente próximos a un número $a \in$ *R (o sea, la mónada de a) es asimismo *external*[31].

Sería laborioso sintetizar aquí, en términos técnicos, el concepto de entidad *external*, pues ello implicaría una exposición de la construcción y la simbología conforme a la teoría de modelos presente en la primera parte de *N.S.A.* Retengamos el hecho de que *external* viene a ser toda entidad que, en la extensión transgresiva del viejo modelo, no responde a una ley o determinación que le correspondía en éste. Dado, por retomar el ejemplo de 3.1.7., que N verifica la proposición: '*todo* subconjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo,' el hecho de que *N no garantice tal cosa para N_i (conjunto de los números naturales infinitos) excluye a esta entidad de la condición de subconjunto intrínseco de *N exclusión que arrastra asimismo la de N. Los elementos de N sí pertenecen a *N y, por ende, a *R, pero N como tal no está intrínsecamente incluído en *N ni en *R, sino tan sólo en el lenguaje bajo forma de proposición "conjunto N de todos los elementos finitos de *N", proposición a la que propiamente ninguna entidad responde en *N.

Si consideramos el número de subconjuntos puramente lingüísticos que así se establecen, si consideramos en particular que R mismo es uno de ellos, veremos hasta qué punto la subversión de la recta real de Abraham Robinson tiene caracteres radicales. No es la ley que rige los números reales lo que se halla puesto en tela de juicio, sino el conjunto en que tal ley se proyecta y despliega. R aparece como una especie de usurpador al que la pluralidad de fenómenos dependientes del cálculo diferencial desenmascara. Pues (y ahí reside la trascendencia ontológica de la obra de Robinson) una de dos: o el cálculo diferencial carece de fundamento y legitimidad que no sean puramente fenoménicos, o la recta real es sustancialmente diferente de lo que nuestra heredada y obediente intuición nos muestra. Antes de abordar este extremo, consideremos otro ejemplo del acercamiento ontológico a la historia del *Calculus* que caracteriza a Robinson.

3. El devenir histórico del Cálculus ... ante Cauchy.

As the theory of limits became firmly established, the use of infinitely small and infinitely large quantities in Analysis became discredited and survived only as a manner of speaking e.g., in the statement that a variable tends to infinity. (N.S.A. p. 261)

La historia del *Cálculus* (a la que, decíamos, Robinson se acerca en actitud ni neutra ni meramente descriptiva) parece coincidir con el proceso de sustitución de una posición matemático- filosófica privilegiadora de las nociones de aproximación y límite. Dos frases de D'Alembert, una de ellas ya evocada[32], sirven perfectamente para expresar esta tendencia:

"*Ainsi la Métaphysique de l'infini et des quantités infiniment petites plus grandes ou plus petites les unes que les autres est totalement inutile au calcul différentiel*"

Por el contrario:

"*La théorie des limites est à la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel*"[33].

Entre metafísicas, pues, anda el juego .[34] Una metafísica de los infinitesimales que agoniza frente a una metafísica de la vinculación y de la relatividad que se abre camino... En este proceso Cauchy aparece de ordinario como el legitimador cuasi-definitivo de la tendencia triunfante. Con él la técnica *standard* moderna de tratamiento de los problemas analíticos quedaría fundada y la expresión infinitesimal relegada a simple "*manière de parler*".

Nos proponemos, siguiendo la lectura de Robinson, mostrar que, en realidad, la actitud de Cauchy es mucho más compleja y su rechazo de los infinitesimales bastante menos transparente. Nos preguntaremos entonces por las razones de esta fundamental ambigüedad, y pondremos de relieve que, por razones fundadas, Cauchy se sostiene en una posición aporética de la que -como hemos visto respecto a Leibniz- de alguna manera el *Análisis no-standard* vendría a liberarle.

Tras reivindicar [35] el rigor del método geométrico por oposición a las razones excesivamente genéricas utilizadas en álgebra, señalar que tal ha de ser el que se introduzca en los problemas del cálculo y presentar la noción de *límite* como valor al cual se aproximan indefinidamente los sucesivos puntos de estabilización de una variable, el *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* nos ofrece la siguiente definición de cantidad infinitamente pequeña:

"*Lorsque les valeurs numériques succesives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser au dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un* <u>*infiniment petit*</u> *ou une quantité* <u>*infiniment petite*</u>. *Une variable de cette espèce a zéro pour limite*" [36].

Ce qu'on nomme... infinitamente pequeño. Eco de la frase de D'-Alembert a continuación del párrafo anteriormente citado del artículo *Différentiel*: "*on ne se sert du terme d'infiniment petit que pour abréger les expressions*."

Basta con calificar de *infinitamente pequeño* la variable y de una función $y=f(x)$ en el caso, por ejemplo, en que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ para tener ya un *infinitamente pequeño* (asimismo puramente nominal) funcional. El camino queda abierto a la consideración de la derivada a partir de la relación variable entre el *infinitamente pequeño* de la variable dependiente y el de la variable independiente, tomando tal relación en su límite (y en modo alguno la relación de ambos límites). Y, sin embargo, no está absolutamente claro que Cauchy se haya liberado de los infinitamente pequeños como auténticas magnitudes. Robinson cita al respecto su definición derivada[37]:

"Lorsque la fonction $y=f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on asigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l' on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du <u>rapport aux différences</u>

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit negative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x..."

Empecemos por señalar el punto más encomiable del párrafo, a saber, la extraordinaria precisión a la hora de determinar la autonomía del lazo mismo respecto a lo en él vinculado: la tendencia del vínculo no se explica a partir de la tendencia de los vinculados, puesto que es constante (a cero) y aquélla, variable o dependiente de la función[38].

Lo problemático en esta definición procede de la expresión "*un accroissement infiniment petit*", sorprendente tras las consideraciones que preceden. Cabría, en efecto, esperar del barón de Cauchy una presentación de la derivada más acorde con los actuales manuales *standard*, que precisamente en Cauchy encuentran su origen, a saber: límite cuando i tiende a cero de

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Dada la definición de '*infiniment petit*,' debemos en principio ver en '*accroissement infiniment petit*' una expresión meramente redundante respecto a '*ces deux termes s'approchent indéfiniment et simultanément de la limite zéro.*' Lamentaríamos, en todo caso, que en un momento clave de su construcción Cauchy no haya preferido excluir la expresión equívoca utilizando directamente los términos de la segunda. Robinson constata, sin embargo, que, lejos de constituir una imprecisión pasajera, la fidelidad de Cauchy a la expresión problemática es constante: en 1829 y 1844, la derivada sigue vinculada a la noción (ya forzosamente equívoca) de incremento infinitamente pequeño; Robinson cita asimismo[39] esta presentación (1823) de la integral definida:

> "*D'après ce qui a été dit dans la dernière leçon, si l'on divise* $x-x_0$ *en éléments infiniment petits* x_1-x_0, x_2-x_1,..., $x-x_{n-1}$, *la somme*
>
> (1) $S = (x_1-x_0)\ f(x_0) + (x_2 - x_1)\ f(x_1) + \ldots + (x-x_{n-1})\ f(x_{n-1})$
>
> *convergera vers une limite représentée par l'intégrale définie*
>
> $\int_{x_0}^{x} f(x)\, d(x)$

De donde esta espectacular re-interpretación de la obra de Cauchy: "*...in Cauchy's mind a function did not approach its limit directly, but only via expressions involving infinitesimals*"

Re-interpretación de Cauchy, relectura que, tras las ambigüedades del texto, busca el sustrato que las legitima, que las hace trascender el carácter de mera expresión de una debilidad subjetiva.

El barón de Cauchy abre la vía a la reconstrucción del análisis en base a los conceptos de límite y de variable y, aún, a su instrumentalización, mediante el juego ε-δ.[41] Cauchy, sin embargo, no renuncia a la expresión '*infinitamente pequeño*.' Ciertamente, da de ella una definición que le hace perder su mordiente, que la reduce a la tendencia de una variable, al límite cero. Mas entonces, ¿por qué no, pura y simplemente, suprimirla?. ¿Por qué, incluso, reutilizarla con años de intervalo y en múltiples contextos? La presencia de la expresión, *aún cuando no se toma la precaución de recordar la definición que la hace inofensiva,* hace que, ante la presentación por Cauchy de la derivada, dudemos entre:

$$\underset{i \to 0}{\text{Límite}} \frac{f(x_0 + i) - f(x_0)}{i}$$ donde i es una variable numérica ordinaria.

y

$$\underset{i \to 0}{\text{Límite}} \frac{f(x_0+i) - f(x_0)}{i}$$ donde i es una cantidad infinitamente pequeña.

La palabra *límite* tiene sentido pleno en la primera lectura; no lo tiene en la segunda.

O Límite, en el registro numérico ortodoxo, o infinitamente pequeño. Ello no puede escapar al barón de Cauchy y, sin embargo...

Aunque oscuramente, viene a decir Robinson, Cauchy lleva razón al referirse al límite sin renunciar a lo infinitamente pequeño; pues en la *cosa misma* de ambos forzosamente se trata. Simplemente es necesaria una reordenación: el marco en el que el *límite* expresa la verdad en juego es correlativo del marco en que lo infinitamente pequeño rige. Contemplemos, en efecto, las condiciones que el *análisis no-standard* asigna a la derivada:

$f(x)$ is differentiable at x_0 if and only if the rations

$$\frac{f(x_0+i) - f(x_0)}{i}$$

have the same standard part d, for all infinitesimal $i \neq 0$, and d is then the derivative of $f(x)$ at x_0 in the ordinary sense[42].

d es la derivada en sentido ordinario; o sea, llamémosle $f'(x_0)$, y es tal que:

$$\underset{h \to 0}{\text{Límite}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

El *análisis no-standard* no pretende desautorizar las proposiciones de los manuales standard, sino por el contrario legitimarlas, mostrando su correlato, sombra o fundamento, que, naturalmente, no puede coincidir con lo fundado. La verdad única del análisis tiene una doble expresión: continuista, relacional, cualitativa, donde sólo la tendencia y el límite de la relación de las variables en juego rigen, por un lado; discontinuidad, salto a un orden irreductible al registro numérico heredado, infinitud y, sin embargo, anclaje en la magnitud, por otro lado.

Toda proposición relativa al marco standard es reformulable en términos de $^*R$. Y en tal caso, la verificación en R supone en el registro *no-standard* determinaciones que son asimismo condiciones suficientes.

¿Condiciones de posibilidad y de necesidad de que una sucesión $\{s_n\}$ de números standard se halle acotada? Pues que, tras reinterpretar $\{s_n\}$ de tal manera que n recorre $^*N$ (y no solamente N), los elementos s_n para n no standard sean finitos (standard o no).[43]

¿Condiciones en las cuales un número standard b es límite de una sucesión de números asimismo standard? Pues que tras la reinterpretación no standard de la sucesión $|s_n - s|$ sea infinitamente pequeño para todo índice n infinito.[44]

¿Expresión en el plano no standard del criterio de convergencia de Cauchy (a saber, $\lim_{n,m\to\infty}(s_n - s_m) = 0$)? Para cualesquiera números naturales infinitos n y m tendremos $|s_n - s_m|$ es infinitamente pequeño.[45]

¿Expresión en el plano no standard de la continuidad de una función según el propio Cauchy? Para todo infinitesimal i tendremos $f(x_0 + i)-f(x_0)$ es infinitesimal asimismo.[46]

Y así sucesivamente... Un modelo enriquecido de la recta real nos permite contemplar la vertiente infinitesimal de los fenómenos relativos a la tendencia, la continuidad y el límite que el cálculo diferencial standard explora y consigna... en un marco categorial no estrictamente cuantitativo.

Sozein ta fainomena

"*Cette science, si c'en est une, n'est nullement de mon gibier.*"

Citando más arriba esta frase peyorativa de Lagrange respecto a la Metafísica, la oponíamos a otra afirmación relativa al desarrollo por el propio Lagrange del Análisis y de la *verdadera metafísica de sus principios*. Si la Metafísica merece tan poca consideración, ¿por qué conservarla a la hora de referirse a la fundamentación de la disciplina?

Ciertamente -respondería con probabilidad Lagrange- una cosa es cimentar una reflexión que en cualquier caso se verá confrontada a la severidad e intransigencia de su objeto; otra muy diferente es aventurarse en un proceso en el que el pensamiento no encuentra como lugar de confrontación sino a sí mismo.

Cabe no obstante dudar de que tal distinción de sentidos respecto al término *metafísica* permita salvar a Lagrange del reproche de incoherencia en sus propósitos. De hecho, una observación cuidadosa de ciertos presupuestos en la "*Théorie des fonctions analytiques*" (por no hablar de la construcción de Cavallieri) dificulta el establecimiento de una frontera rigurosa entre fundamentación trascendente o especulativa y fundamentación inmanente al campo de la matemática. Al menos la determinación se borra cuando en el campo de la matemática incluímos el entramado lógico y categorial que en todo momento a la vez la alimenta y la interpela.

Más la razón fundamental que se opone a la distinción procede, en el caso del Análisis, no ya de la metateoría, ni siquiera de la teoria misma, sino del objeto de ésta. Nada más problématico, en efecto, que el estatuto de ese '*infinito*' en el que el *Calculus* intenta introducir un orden, es decir: hacer emerger determinaciones precisas y, a la vez, servirse de lo así establecido, mostrar su operatividad en el registro *finito*! Problemático, como hemos visto, para el propio Leibniz, problemático, asimismo, para Cauchy.

La trascendencia ontológica del *análisis no-standard* reside en el hecho de que, por vez primera desde que la *aproximación infinita* ocupa a la ciencia y a la filosofía (desde, en suma, Arquímedes, Eudoxo y el método de exhaución), el carácter numérico de los diferenciales es afirmado en un marco teórico irreprochable. Con A. Robinson el registro de la cantidad recupera un material cuyo estatuto ontológico era oscuro desde el propio Leibniz y, en todo caso, desde que el barón de Cauchy, aún sin renunciar de manera clara a lo infinitamente pequeño, parece reducirlo a expresión convencional designativa de una variable cuyos valores sucesivos se aproximan progresivamente a cero. Y decimos que el registro de la cantidad recupera ese material porque de atenernos al simple límite del cociente incremental variable, entonces en el resultado, la derivada, $\frac{dy}{dx}$, hemos trascendido el marco estricto de la magnitud:

"*No es necesario decir que las diferentes partes de la expresión* $\frac{dy}{dx}$ *carecen de sentido si se las considera por separado; los d no son números, no pueden simplificarse y la expresión completa no es el cociente de dos números dy, dx*",

nos dice el autor de un sencillo y excelente manual standard[47].

Ateniéndonos a $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h)-f(x_0)}{h}$ en el marco standard, entonces la fórmula de la derivada expresa un lazo en el cual aquellos dy, dx que se hallan vinculados no poseen subsistencia fuera del lazo mismo: ni números, ni funciones, ni límites por separado de variables *incremento*; irreductibles al registro categorial de la magnitud, sólo cabría atribuirles el calificativo de infinito, entendiendo por tal no una cantidad infinita, en pequeñez, sino la infinitización de la cantidad misma, es decir, su cualificación, pues "*propio de la cualidad es la emergencia de un lazo en el cual los vinculados no poseen subsistencia*".

Robinson encuentra en la historia y en la práctica del *Calculus* razones para no *limitarse* a una concepción estrictamente cualitativa del vínculo diferencial, razones para mostrar tras éste una sombra de infinitud. De ahí que, para dar sostén a la disciplina de la magnitud infinita y a la pluralidad de fenómenos que ella determina,[48] parezca imprescindible violentar el marco teórico que determina esta representación, ofrecer al discurso sobre la recta real un nuevo modelo.

Sozein ta fainomena, dar cuenta de lo que se muestra, encontrar aquello de lo que no cabe prescindir un sostén que le arranque a la contingencia; tal es la misión fundamental de la filosofía.

NOTAS

1 Ponencia recopilada en *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1967; pp. 28-46

2 North-Holland Publishing Company, 1966. En lo sucesivo nos referiremos a esta obra mediante las siglas N.S.A.

3 Artículo *Limite* de la "*Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières*," Paris-Lieja, 1784-1789.

4 Esta obra del político francés, miembro de la Convención, ministro de la Guerra y del Interior de Napoleón, fue escrita

en Alemania aprovechando un exilio en 1797. La *Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard* efectuó una cuidada reedición en 1970.

5 Concretamente en el Journal de Trévoux de 1701. *Mathematische Schriften* (Gerhardt 5, 1858, p. 350)

6 Por ejemplo, en la ecuación $2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

7 A saber que si se dieran indivisibles metafísicos, "*il n'aurait point de science ni règle, ce qui ne serait point conforme avec la nature du souverain principe*"(idem). Comentario pertinente de Robinson: "*...although Leibniz assures us that the infinitely large numbers are ideal elements which are only introduced for convenience..., there is no attempt to justify this claim except for the appeal to the 'sovereign principle'*". (N.S.A. p. 263)

8 G. Berkeley, The Analyst 1734, *Collected Works* vol. 4 (ed. A.A. Luce and T.E. Jessop), Londres 1951).

9 Véase René Taton "Lagrange et Leibniz. De la Théorie des Fonctions au principe de raison suffisante", *Actas del Internationale Leibniz-Kongress*, Hannover, 1983, p. 750.

10 Aunque en este caso se dé una verdadera quiebra entre rigor matemático y construcción ontológica arbitraria.

11 En ocasiones para poner de relieve la actitud contraria de la epistemología positivista: "*We should add that, to a logical positivist, a discussion of the ontological significance of infinitary notions of any kind is meaningless*"; N.S.A. p. 281.

12 Contribuyendo de paso a superar las consecuencias de un malentendido filológico. Malentendido que tiene origen en el deslizamiento de sentido en el prefijo '*meta*'; de tal manera que *metafísica* pasa de ser disciplina que se sitúa en la ordenación del conocimiento tras la reflexión física, a ser disciplina cuyo objeto sería un eventual ente que trascendería el horizonte físico. Aunque ciertamente Aristóteles mismo da en ocasiones pie a tal deslizamiento, sólo en la lectura onto-teológica posterior de la obra del Estagirita se consolida el equívoco, clave del desprestigio progresivo al que se vió abocado el

término *metafísica.* Véase al respecto la obra capital de Pierre Aubanque *Le problème de l'Etre chez Aristote,* Paris, P.U.F., múltiples ediciones.

13 En ocasiones una convicción a-crítica, la simple creencia aparecería como motor del progreso en el Análisis: "*As the Calculus continued to develop and thrive, the logical and philosophical weaknesses of the system were overlooked for a period. Indeed, the great success of the theory was ascribed by some to the acceptance of the reality of the infinitely small and large, by contrast with its rejection by Archimedes and his predecessors*"(N.S.A. p. 281).

En ocasiones, por el contrario, la fertilidad surge de la fidelidad a una exigencia de rigor introducida por la reflexión genuinamente filosófica. Ningún filósofo, en el sentido convencional del término (con excepción de Demócrito), aportó resultados directos importantes en matemáticas y, no obstante: "*...by laying bare some important characteristics of mathematical thougt, both he (Plato) and Aristotle exerced considerable influence on later generations*". A. Robinson, "Some thoughts on the history of mathematics" *Compositio Math.* 20 (1968, pp. 188-193.

14 "Über das Unendliche" *in Mathematische Annalen,* vol. 95, 1925, pp. 161-190. Nuestra cita se encuentra en la p. 163.

15 *The metaphysics of the Calculus,* intervención final.

16 Intervención tras la conferencia aludida de Robinson.

17 *Journal de Trévoux* 1701; citado en N.S.A., p. 262.

18 Veremos más adelante que de esta tentación de apartar a los diferenciales de la recta real nos liberará el *Non-standard Analysis* precisamente mediante una reinterpretación de R que proporciona la base conceptual a partir de la cual quedaría realmente fundada la pluralidad de fenómenos dependientes del Análisis superior.

19 Conviene transcribir enteramente el texto citado por Robinson N.S.A. p. 263: "*Pour ce qui est du calcul des inifinitésimales, je ne suis pas tout à fait content des expressions de Monsieur*

Herman dans sa réponse à Monsieur Nieuwentijt ni de nos autres amis. Et M. Naudé a raison d'y faire des oppositions. Quand ils se disputèrent en France avec l'Abbé Gallois, le Père Gouge et d'autres, je leur témoignai que je ne croyais point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinetésimales, que ce n'était que des finctions mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement ... Mais comme M. le Marquis de l'Hôpital croyait que par là je trahissais la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que j'en avais dit dans un endroit des actes de Leipsic, et il me fut aisé de déférer à leur prière".
Triste razón mediante la cual se explica el que Leibniz hubiera confiado a sus discípulos la profundización en la disciplina. Como el propio Robinson apunta en otro lugar ya evocado, quizás el progreso de ésta exigió el sacrificio del espíritu crítico. Incapaz de ello, pero carente de un *modelo* satisfactorio, Leibniz se veía abocado, de alguna manera, a la renuncia. La presión del Marqués de l'Hôpital, de ser cierta, muestra hasta qué extremo la 'severidad' de la ciencia encubre en ocasiones la simple ambición de regir en el seno de una secta.

20 *In order to appreciate the significance of these lines,* Robinson se refiere a los axiomas establecidos por de l'Hôpital, " *we have to remember that, when they were written, mathematical axioms still were regarded, in the tradition of Euclid and Archimedes, as empirical facts from which other empirical facts could be obtained by deductive procedures; while the definitions were intended to endow the terms used in the theory with an empirical meaning. Thus (contrary to what a scheme of this kind would signify in our time) de l'Hôpital's formulation implies a belief in the reality of the infinitely small quantities with which it is concerned."* <u>*The Metaphysics ...*</u>, p. 32.

21 "*... et je compte pour égales les quantités dont la différence leur est incomparable. J'appelle grandeurs incomparables dont l'une multipliée par quelque nombre fini que ce soit, ne saurait excéder l'autre, de la même façon qu'Euclide l'a pris dans sa cinquième définition du cinquième livre."* Leibniz, en carta

de 1695 a de l'Hôpital, citada en N.S.A., p. 265.

22 "*For any finite real number a in $^*R$ we call the uniquely determined standard real number which is infinitely close to a (r in the above proof) the standard part of a, in symbols $r=st(a)$ or, more briefly, $r={}^*a$. Moreover, given any real number in $^*R$ we call the set of real numbers which are infinitely close to a, the monad of a, to be denoted by $\mu(a)$.*" N.S.A., p. 57.

23 "*... instead of claiming that two quantities which differ only by an infinitesimal amount, e.g. x and x+dx, are actually equal, we find only that they are equivalent in a well defined sense, $x+dx \simeq x$ and can thus be substituted for one another in some relations but not in others.*" *The Metaphysics...*, p. 34.

24 "*Let $^*R$ be a higher order non-standard model of Analysis. Thus $^*R$ is a mathematical structure which possesses the following properties:*

(1) Every mathematical notion wich is meaningful for the system of Real Numbers is meaningful also for $^*R$. In particular, addition, multiplication, and order are defined for $^*R$.

(2) Every mathematical statement wich is meaningful and true for the system of Real numbers is meaningful and true also for $^*R$: provided that we interpret any reference to entities of any given type, e.g. sets, or relations, or functions, in $^*R$ not in terms of the totality of entities of that type, but in terms of a certain subset, called the set of internal entities of that type. For exemple, if the statement contains a phrase 'for all sets of numbers' we interpret this as 'for all internal sets of numbers'. Similarly the phrases 'there exists an internal set', 'there exists a function', as 'there exists an internal set', 'there exists an internal function'. However all individuals of $^*R$ are internal: the phrase 'for all numbers' is interpreted in $^*R$ as 'for all individuals of $^*R$'.

(3) The system of internal entities in $^*R$ has the following property. If S is an internal set of relations, then all elements

of S are internal..

*(4) *R properly contains the system of real numbers R; there is an individual in *R which, according to the relation of order defined in R and *R, is greater than all numbers of R.*"(N.S.A. p. 49,) sustituyendo, según lo establece el propio autor, pp. 55, *natural numbers* por *real numbers.*

25 N.S.A., p. 49.

26 "*From now on, we shall refer to all individuals of *R as real numbers, reserving the name of standard real numbers to the individuals of R,*" (N.S.A. p. 55). De ahí que (reservando la expresión 'conjunto de números naturales' a N),
"*If by Archimides axiom we mean... that for any a > 0 there exists a natural number* <u>*n*</u> *(which may be infinite) and that n.a > 1 then Archimides axiom does hold in* *R." *The Metaphisics...* p. 34.)

27 N.S.A. Teorema 3.1.9, p. 54.

28 La demostración de este teorema es, de hecho, la base de la del anterior. (reducida a mostrar que si el conjunto de los números naturales finitos fuera *internal* lo sería asimismo el de los números naturales infinitos). Su articulación fundamental es la siguiente:

La proposición 'todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo' es verdadera en N. Por ende, es verdadera en *N, ya que *N es un modelo no-standard de la aritmética. Ahora bien, se demuestra en N.S.A. pp. 51, que no existe ningún número natural infinito más pequeño que todos los demás. Por tanto, el conjunto N_i de los números naturales infinitos es forzosamente extrínseco al modelo *N.

29 Teorema 3.2.2., p. 58

30 Teorema 3.2.3., p.58

31 Teorema 3.2.4., p. 58. Conviene transcribir la demostración:
"*Suppose that $\mu(a)$ is an internal set for some a. Then the set $\mu_0 = \{b / b = c - a,\ c \in \mu(a)\}$ also is internal in *R. μ_0 consists of all numbers which are infinitely close*

to 0 i.e. it is the monad of 0. But if μ_0 were internal the set of reciprocals of elements of μ_0 other than 0 also would be internal. But this is precisely the set of infinite real numbers. This proves the theorem!"

32 Artículos 'Differentiel 'y 'Limite' en la *Enciclopedia"*. Citados por Robinson, respectivamente, en N.S.A., p. 268 y *The Metaphysics..* p. 28.

33 El espacio no nos permite considerar la construcción de Lagrange, sustentada en el despliegue tayloriano de las funciones continuas, y que rechaza, tanto la hipótesis de las cantidades infinitamente pequeñas como la teoría del límite. El título de su obra fundamental es, al respecto, significativo:

"*Théorie des fonctins analytiques contenant les principes du calcul différentiel, degagés de toute considération d'infiniment petits, d'evanouissants, de limite, de fluxions, et réduite à l'analyse algébrique de quantités finies.*"

34 Juego en el que Lagrange parece negarse a entrar, puesto que escribe al propio D'Alembert: "*Vous aviez bien raison de croire que je n'ai aucune part au programme de Métaphysique. Cette science, si c'en est une, n'est nullement de mon gibier. Il me semble que chaque pays a presque sa Métaphysique particulière comme sa langue, et la question proposée est de Métaphysique allemande et leibnizienne,*" citado por René Taton en el artículo antes evocado. La actitud despectiva de Lagrange sería más convincente si, como hemos visto, en 1759 no hubiera anunciado a Euler que, tras elaborar un manual de cálculo infinitesimal, había conseguido '*desarrollar la verdadera metafísica de sus principios.*' Nos ocuparemos de esta incoherencia al final de este artículo.

35 "Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique", 1ère *partie* 1821, *Oeuvres Complètes, sec.* 2 vol. 3.

36 Citado por Robinson, N.S.A., pp. 269-270 y, en traducción inglesa, *The Metaphysics..* p. 36.

37 N.S.A., p. 273; *The Metaphysics...,* p. 37, evocado en inglés.

38 Señalemos que en este punto sustenta Hegel su tesis de que en la derivada tenemos un paradigma de lazo cualitativo.

39 N.S.A., p. 275.

40 N.S.A., p. 274. Asimismo: *Thus, it would appear that to his mind, a variable does not attain the limit zero directly but only after travelling through a region of infinitesimals. The Metaphysics...* p. 37.

41 Sobre este último extremo, N.S.A. p. 271.

42 *The Metaphysics...,* p. 31. La redacción en N.S.A. p. 68 es la siguiente: Teorema 3.4.9. "*In order that the standard number* c *be the derivative of $f(x)$ at x_0 it is necessary and sufficient that* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} \neq c$ *for all $x \neq x_0$ in the monad of x_0.*"

43 El enunciado exacto del teorema 3.3.3. N.S.A., pp. 59 '*In order that a sequence $\{s_n\}$ in R be bounded in R, it is necessary and sufficient that the elements of $\{s_n\}$ in $^*R$ are all finite.*' Ahora bien, dado que para n finito s_n lo es por hipótesis, la condición sólo determina realmente a los n infinitos, es decir, no standard.

Conviene recordar el principio fundamental utilizado en la demostración del teorema, así evocado por el propio Robinson pp. 60: "*... if X is admissible in R and holds in $^*R$ then X holds also in R. For if not, then $\neg X$ is admissible and holds in R and hence, holds also in $^*R$, contrary to assumption*".

44 N.S.A. Teorema 3.3.7. p. 60

45 N.S.A. p. 65.

46 *The Metaphysics...,* p. 36.

47 M. Spivak, *Calculus*, W.A. Benjamin, Inc. Nueva York. Hay edición española publicada por Ed. Reverte, Zaragoza.

48 *... Indeed he (the physicist) has never ceased to use infinitesimals, e.g. in setting up differential equations representing physical processes. But he has done it with a bad conscience ever since rumours of the Dedekind-Weierstrass revolution reached his*

ear. He can now refer to non-standard analysis for the rigorous justification of his intuitive infinitesimals, just as he refers to the theory of distributions for the legalization of the various delta "functions" which his physical intuition led him to introduce". M. Bunge, intervención tras la exposición de Robinson : (*The Metaphysics...*, p. 45).

Departamento de Filosofía
Universidad del País Vasco. San Sebastián