UN APPARENTE PARADOSSO RELATIVISTICO CONNESSO CON LE MASSE IN MOTO

Giuseppe ANTONI

ABSTRACT

No paradox exists in the fact that, in the Special Relativity, for the mass of a material body, considered in motion at constant speed, whose measure is **u**, the formula: $m = m^0/\sqrt{(1-u^2/c^2)}$ can be written, while for a photon the same formula holds, when between its source and the observer a state of relative motion at constant speed, whose measure is **u**, exists and it is observed along the direction perpendicular to the direction of his speed.

Nella teoria della relatività ristretta, dati due riferimenti K e K', in moto inerziale relativo con una velocità costante avente per misura u, la quale velocità sia parallela all'asse delle x' di K', che, a sua volta, sia parallelo all'asse delle x di K, se si considera un corpo materiale X, che abbia, relativamente a questo riferimento, una massa di quiete, la cui misura sia m^0, gli potrà essere attribuita, relativamente a K, una massa di moto, la cui misura m può essere legata ad m^0 dalla relazione:

1) $m = m^0 / \sqrt{(1-u^2/c^2)}$,

essendo c una costante uguale alla misura della velocità della luce nel vuoto.

Si può, ora osservare che, stando a tale teoria, se una sorgente di luce, in quiete in K', emette, relativamente a questo riferimento, per un suo osservatore, un fotone, il cui periodo abbia una misura, che, per ora, sarà da noi indicata con T^0, lo stesso fotone avrà relativamente a K, per un osservatore che gli appartenga, il quale lo riceva lungo la direzione perpendicolare alla direzione della velocità avente per misura u, un periodo la cui misura, per ora, sarà da noi indicata con T, e sarà legata a T^0 dalla relazione:

2) $T = T^0 / \sqrt{\ }(1-u^2/c^2)$.

Questa è la relazione del cosiddetto effetto Doppler trasversale.

$\mathcal{E}'$, però, noto che la misura W dell'energia è legata alla misura m della massa ed alla misura c della velocità della luce nel vuoto dalla relazione:

3) $W = m \cdot c^2$,

e che per i fotoni di frequenza la cui misura sia f, o di periodo la cui misura sia T, se si indica con h la costante di Planck, vale la relazione:

4) $W = hf = h/T$.

Questa formula, per la 3), può essere scritta:

4') $W = hf = h/T = m \cdot c^2$.

Per la 4'), la 2) diventa:

5) $m = m^0 \sqrt{(1-u^2/c^2)}$,

qualora si indichi con m^0 la misura della massa collegabile con i fotoni il cui periodo abbia per misura T^0 e con m la misura della massa collegabile con i fotoni il cui periodo abbia per misura T.

La 1) e la 5) sembrano in contrasto; ma questo contrasto può essere appianato se si osserva che, nella 1), con m^0 è stata indicata la misura della massa di un corpo in quiete in K', mentre, nella 5), con m^0 viene indicata la misura della massa di un fotone, emesso da una sorgente in quiete in K', il quale fotone è in moto con una velocità avente per misura c relativamente a questo riferimento K'. Per la qual cosa, la misura della sua massa, relativamente a K', non dovrebbe essere indicata con m^0, ma potrebbe essere indicata con la lettera m', a cui corrisponderà in K una massa la cui misura potrà essere indicata con m^*.

Per il fotone, quindi, non dovrebbe essere scritta la 5), ma dovrebbe essere scritta la seguente relazione:

6) $m^* = m' \sqrt{(1-u^2/c^2)}$.

La 5) non risulta più in contrasto con la 1), perchè nelle due formule le lettere m ed m^*, come pure m^0 ed m', hanno un significato diverso.

Se indichiamo con T^* la misura del periodo dei fotoni la cui massa abbia per misura m^* e con T' quella dei fotoni la cui massa abbia per misura m', tenendo presente la 4'), dalla 5') si ricaverà:

6') $T^* = T' / \sqrt{(1-u^2/c^2)}$,

e non la 2), ad essa analoga.

Per chiarire meglio la questione, passiamo a considerare un corpo materiale X in moto, relativamente a K', con una velocità costante la cui misura sia w, la quale velocità formi con l'asse delle x' di K' e con l'asse delle x di K un angolo la cui misura sia a'. Il corpo materiale X avrà, relativamente a K, una opportuna velocità la cui misura sia V, la quale può essere opportunamente collegata ad u ed a w. La misura V è, in generale, diversa dalla misura della risultante galileiana delle velocità che hanno per misura u e w. La velocità avente per misura V formerà con l'asse delle x di K un angolo, la cui misura, che può essere indicata con a, in generale sarà diversa da a'.

Se si esprime la misura m^* della massa di moto di X relativamente a K in funzione di a, si trova che essa è legata alla misura m^0 della sua massa di quiete, relativamente a K', dalla seguente relazione:

7) $m^* = m^0\{\sqrt{(1-u^2/c^2)} \pm (uw \cos a/c^2) \cdot \sqrt{[(u^2/w^2-u^2/c^2)\cos^2 a +}$
$+ 1-u^2/w^2]\} / (1-u^2\cos^2 a/c^2) \cdot \sqrt{(1-w^2/c^2)}$,

la quale può essere scritta:

7') $m^* = m' \{\sqrt{(1-u^2/c^2)} \pm (uw \cos a/c^2) \cdot \sqrt{[(u^2/w^2-u^2/c^2)\cos^2 a +}$
$+1-u^2/w^2]\} / (1-u^2\cos^2 a/c^2)$,

qualora si ponga:

8) $m' = m^0 / \sqrt{(1-w^2/c^2)}$.

La 7) può essere ottenuta ricordando che la V è espressa dalla seguente relazione:

9) $V = \sqrt{[u^2 + w^2 + 2uw \cos a' - (u^2 w^2 \sin^2 a')/ c^2]} / [1+(uw \cos a')/c^2]$.

Sostituendo questa V al poste di u nella 1), in cui si ponga anche m^* al posto di m, si ottiene:

10) $m^* = m^0 [1 + (uw \cos a')/c^2] / \sqrt{(1-u^2/c^2)} \cdot \sqrt{(1-w^2/c^2)}$.

Se, in questa relazione, si esprime $\cos a'$ in funzione di $\cos a$ me-- diante la seguente formula dell'aberrazione

11) $\sin a / \cos a = \sin a' \sqrt{(1-u^2/c^2)}/(u/w+\cos a')$,

con un semplice calcolo, anche se un pò laborioso, si perviene, appunto, alla 7).

La 7'), come la 7), ci dànno la misura della massa di un corpo materiale X in moto con una velocità avente la misura w relativamente al riferimento K', a sua volta in moto con una velocità avente la misura u relativamente a K.

La 7'), per $a = 90^0$ ($\cos a = 0$), ci dà:

12) $m^* = m' \sqrt{(1-u^2/c^2)}$,

in cui compare m', che non è uguale ad m^0, ma, come abbiamo visto, le risulta legata dalla 8).

La 1) e la 12), che, per la 4'), si può trasformare nella 6'), risultano, quindi, diverse, perchè m' è diversa da m^0, così come m^* è diversa da m; di modo che non si verifica alcun paradosso, nè alcuna contraddizione.

Per i fotoni, stando ai nostri simboli, non è lecito scrivere la 2), quando sono emessi da una sorgente di K' e sono ricevuti da un osservatore di K lungo una direzione perpendicolare alla velocità che ha per misura u, ma va scritta soltando la 6'), ad essa analoga.

Mentre un corpo materiale può avere una massa di moto avente per misura $m = m^0 / \sqrt{(1-u^2/c^2)}$ rispetto a K', perchè ha una massa di quiete avente la misura m^0 ed una velocità, relativamente a tale riferimento, avente la misura w, un fotone, emesso da una sorgente in quiete in K', può avere, relativamente a questo riferimento, per un suo osservatore, una massa la cui misura sia m', esclusivamente perchè è una opportuna quantità di energia in moto con una velocità la cui misura è c relativamente a tale riferimento.

La giustificazione della possibilità di prendere in considerazione, per i fotoni, la formula 7) si può trovare, ad es., al § 58 del Vol. II della *Theorie der Elektrizität* (Berlin) di R. Becker, il quale perviene, appunto, ad una formula analoga ad essa, prendendo in considerazione il volume (mobile) di un treno di onde luminose.