En el tercer centenario de la obra capital de Newton

PARA UNA LECTURA DE PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA

Javier de LORENZO

El 28 de Abril de 1686 Newton, por intermedio del doctor Vincent, entrega a la Real Sociedad de Londres el manuscrito de *Philosophiae Naturalis principia mathematica* -citado, de ahora en adelante, PM-. En él, según el comentario que recoge Birch en su *History of the Royal Society of London*,

> suministra una demostración matemática de la hipótesis copernicana tal como es propuesta por Kepler, resolviendo todos los fenómenos de los movimientos celestes mediante la sola suposición de una gravitación hacia el centro del Sol que decrece inversamente como los cuadrados de la distancias.

Lo que Newton entrega es el Libro I de PM, *De motu corporum*. Tres meses después, envía el Libro II donde se estudia el movimiento de los cuerpos en medios resistentes y, meses más tarde, el Libro III, *De mundi systemate*. La obra se edita al cuidado y expensas del astrónomo Halley aunque oficialmente aparece a cargo de la Real Sociedad, y sale a la luz pública el 6 de Julio de 1687, cincuenta años después de la aparición de *La Geometría*, del *Discurso del Método* de Descartes. La primera edición carece de fechas pero en la segunda, al cuidado de Cotes y expensas de Bentley, el Prefacio a la primera edición se acompaña de la indicación '8 de Mayo de 1686'.

PM constituye una de las grandes obras del pensamiento. Por serlo, ha provocado cambios en la estructura conceptual del mismo, y la aparición de gran cantidad de obras 'acerca de'. Pocas son las proposiciones contenidas en PM que no tengan su correspondiente comentario en una Bibliografía newtoniana que este año se verá, sin duda, aumentada ampliamente. A pesar de esa abundancia me arriesgo, aquí, a esbozar unas líneas para una lectura de PM, desde la perspectiva matemática.

THEORIA - Segunda Época - Año II
Curso 1986-87, nº 5-6, pp. 257-284

Javier DE LORENZO

Una obra matemática

Matemática porque Newton, en el Prefacio a la primera edición formula como propósito

He querido en este trabajo cultivar la Matemática en tanto en cuanto se relaciona con la Filosofía.

Según el autor, PM es obra de Matemática en relación con la Física, con la naturaleza. Algo que un lector actual podría interpretar como 'Matemáticas para economistas', '... para física'...

Ahora bien, esa declaración de cultivar la matemática no es en sí y por sí, sino como base y apoyatura para el hacer filosófico, para la física, no es una declaración inocua, y mucho menos en el momento en el que Newton la hace, sino que es una auténtica declaración de principios. Al plasmar su pensamiento de forma matemática Newton va a manejar, al menos, cuatro aspectos del hacer matemático. Y ello de tal forma que, en su interrelación, condicionarán la estructura de PM tanto en el aspecto expositivo como en el de su ordenación interior y en el del instrumental matemático empleado. Y un esquema de esos cuatro aspectos en el que utiliza la Matemática es el siguiente:

1. *Críptico.* Se utiliza la Matemática no vaya a ser que todos se enteren. Sólo quienes conozcan el lenguaje matemático podrán comprender el contenido de la obra; sólo los 'elegidos' podrán entenderla. Los demás habrán de admitir los resultados dada la convicción de que el hacer matemático es un hacer de certeza absoluta, no cuestionable. Con ello, además, se evitarán posibles polémicas, siempre estériles, entre los no entendidos, entre los eruditos a la violencia. Posición que ya mantuviera Copérnico y que retomaría Descartes en cuanto a *La Geometría.* Con ello, PM no se lee, se admite, sin más. Y las críticas posteriores de Castel, de Berkeley irán en este sentido en cuanto a la fe de la y los matemáticos...

2. *Simbólico.* Un espíritu religioso, y Newton lo era, ha de aceptar lo que a un creyente le imponen sus correspondientes Libros sagrados: la Naturaleza está escrita en lenguaje matemático. Quien quiera entrever la naturaleza, el universo no tendrá otra opción que adoptar el lenguaje matemático porque Dios hizo ese universo conforme a número, peso y medida. Para un espíritu religioso ninguna demostración de la existencia de Dios es comparable con la mostración, precisamente, de las leyes, de los

principios matemáticos que rigen el universo; mostrar esas proporciones matemáticas a las que está sometido el mundo, que no es resultado del azar. Aunque la inquisición del filósofo tenga que deternerse en este punto y no pueda explicar las causas de ese universo, no pueda hacer hipótesis cosmológicas, al estilo de las cartesianas.

Es un empleo esencial de la Matemática en cuanto al posible papel que desempeña para el estudio de la naturaleza: no sólo servirá para la cuantificación de los fenómenos, la elaboración de demostraciones o el establecimiento de principios sino que, sin ella, no podrán plantearse y discutirse seriamente las posibles 'causas' de los fenómenos físicos, las que propician tales principios. Empleo simbólico que alinea a Newton con Kepler, Kirkhof..., con la línea calificada de místico-pitagórica, jamás erradicada del hacer científico. Y si esta línea no se muestra con nitidez en la primera edición, sí lo hace en la segunda, en el Escolio general con que cierra esta edición y en el cual, además de señalar que no elabora hipótesis cosmológica alguna, pasa a esbozar su prueba de la existencia divina; y afirmará:

> *Y esto por lo que concierne a Dios, de quien procede ciertamente hablar en filosofía natural partiendo de los fenómenos.*

De los fenómenos, porque el mundo está así, y si está así es porque Dios lo hizo así.

3. *Polémico*. El origen de PM se quiere como resultado de una visita que Halley realizó a Newton, en Cambridge, en Agosto de 1684. En ella planteó una pregunta: ¿que trayectoria seguirían los planetas si se viesen atraidos continuamente hacia el Sol con una fuerza que variara inversamente al cuadrado de la distancia? Pregunta a la que intentaban dar respuesta en Londres tanto el propio Halley como Wren y Hooke, entre otros. Y Halley escuchó, de labios de Newton, y sin pensarlo, que tal trayectoria era una elipse. Y lo sabía porque lo había 'calculado'. La tradición afirma que Halley presionó, desde ese momento, para que Newton publicara una obra con tal demostración. Tras una segunda visita en Diciembre, Newton envía el 23 de Febrero de 1685, el opúsculo *De motu* y, finalmente, compone PM.

No creo, sin embargo, que esta versión diga toda la verdad. PM se muestra, desde la declaración de principios que he citado, como obra de polémica, como obra que no sólo afirma y demuestra unos principios sino que, por ello mismo, niega otros. Y esta afirmación-negación se hace en dos frentes: contra los físicos o filósofos, contra los 'naturalistas'.

a. Se ha reconocido, de modo tradicional, que PM se presenta enfrentada con el sistema del mundo como fué explicado por Descartes; y ello, hasta el propio título. En Descartes se parte de una hipótesis cosmológica: la que hace uso de la teoría de vórtices, fundamentada en principios físicos o filosóficos; una versión modificada de esta teoría la mantenían figuras continentales como Huyghens y Leibniz. PM va contra esta teoría, desde el punto de partida: no puede apoyarse la filosofía, la física, en sólo principios físicos; para explicar los fenómenos no se puede partir de hipótesis cosmológicas sino que se debe partir de lo conceptual matemático para, después, aproximarse a lo fenoménico.

Desde esta posición, Newton incluso llega a establecer un *experimentum crucis* entre su teoría, matemática, y la teoría de los vórtices. La última sección, la IX, del Libro II, culmina con el estudio de la teoría de los vórtices. En el Escolio a la Proposición LII señala:

> *he intentado investigar las propiedades de los vórtices con el fin de determinar si los fenómenos celestes pueden explicarse recurriendo a ellos.*

Newton acepta el 'hecho' de que los períodos de los planetas son como la potencia inversa en 3/2 de sus distancias al centro del Sol. Hecho o fenómeno que confirma su teoría mediante una rigurosa demostración matemática. Tomado como clave, intenta averiguar si el mismo puede establecerse en la teoría de vórtices. Y su conclusión es:

> *no cabe duda de que ni la* 3/2 *potencia-ava ni ninguna otra potencia cierta y determinada puede prevalecer en ellos.*

Y si desde la teoría de los vórtices no cabe establecer esta proposición, que es demostrada desde 'su' teoría, puede obtenerse como conclusión final que la teoría de los vórtices es errónea. A pesar de lo cual, Newton, concede

> *Determinen entonces los filósofos cómo el fenómeno de la potencia* 3/2-*ava puede ser explicada por vórtices.*

Este frente polémico queda todavía más refrendado en la segunda edición que incluye un Prefacio del editor, Cotes, en el que se pretende apuntillar, aún sin citarlo por el nombre, a Leibniz. Entre otras cosas, porque el matemático alemán sostiene la teoría de vórtices modificada, ha criticado duramente la noción de gravedad enfocándola como una cualidad oculta, ha intuido el carácter simbólico de la obra con su intento de ser una prueba de la existencia de un Dios y pretende ser el creador del Análisis infinitesimal con el que, desde 1684 y 1686, los matemáticos continentales están resolviendo problemas ligados precisamente a la filosofía, a la física en un frente distinto al que se contiene en una especie de libro sagrado como parecía ser PM. Hasta el Escolio al Lema II del Libro II se modifica sútilmente, aunque se mantiene la referencia a Leibniz, que desaparecerá definitivamente en la tercera edición.

b. Pero cuando Newton compone la primera edición creo que tiene otro frente mucho más duro: al fin y al cabo Leibniz también es matemático. Newton escribe PM contra un adversario más cercano: el Secretario de la Real Sociedad de Londres, Hooke, quien le ha puesto en ridículo públicamente y en un campo de discusión muy concreto: el papel de la matemática para el estudio de la naturaleza.

Representa, Hooke, el investigador tipo del XVII británico. En el Prólogo a su *Micrographia*, 1665, establece:

> *La verdad es que la ciencia de la naturaleza ha sido durante mucho tiempo obra solamente del cerebro y la imaginación, siendo ya hora de que vuelva a la simplicidad y pureza de las observaciones sobre causas materiales obvias.*

Nada de especulaciones, hipótesis o teorías; hay que ir a los hechos, a los fenómenos percibidos, a lo 'positivo'. Y, en esta empresa, nada de matemáticas salvo para el cómputo o cuantificación. La Matemática no sirve para los terrenos de la filosofía, de la física; es demasiado abstracta y la física maneja lo concreto. La Matemática se apoya en especulaciones, axiomas e hipótesis. Y, así, en la misma obra, Hooke agrega

> *si alguien espera de mi deducciones infalibles o certeza de axiomas, diré que, por lo que a mi respecta, esas obras más potentes del ingenio y la imaginación están por encima de mis débiles posibilidades. Pero, aunque no fuese así, no las habría utilizado en el campo del que aquí me ocupo.*

Frente a los 'naturalistas', estrictamente empíricos, los matemáticos. Es viejo el enfrentamiento -y nuevo, permanente-. Ya Copérnico, Kepler, Galileo han sostenido polémicas pretendiendo que la Matemática no sirve tan sólo para calcular o construir modelos que salven las apariencias. Y Newton se alinea con ellos. Es lo que sostiene en lo que califiqué de declaración de principios: La Matemática no sólo tiene un papel relevante en los asuntos filosóficos, físicos sino que, sin ella, éstos no podrán captarse. Con esa declaración Newton se enfrenta, radicalmente, a Hooke y, con él, a quienes fundaron la Real Sociedad desde la formación del Colegio invisible. De hecho, ya Newton había adoptado esta posición y había tenido polémica con Hooke en 1672 -no sólo con él, ciertamente al publicar uno de sus primeros trabajos sobre la teoría de la luz. Polémica en la que Newton, en carta a Oldemburg de ese año, indicaría respecto a la teoría de los colores:

> *Un naturalista difícilmente esperaría ver que la ciencia de ellos se tornase matemática, y con todo me atrevo a afirmar que hay tanta certeza como en cualquier otra parte de la Optica.*

Optica entendida, aquí, como rama de la geometría: la Optica geométrica. Y las divergencias con Hooke adquieren tal amplitud que Newton no publica sus teorías sobre la Optica hasta 1704, un año después de la muerte de su rival.

Sin embargo, Hooke, desde su puesto de Secretario de la Real Sociedad de Londres, incita a Newton. El 24 de Noviembre de 1679 le invita a dar su opinión sobre su idea de componer los movimientos celestes de los planetas mediante un movimiento dirigido en la tangente y otro atractivo hacia el cuerpo central. Responde Newton el 28 de Noviembre pero, sorprendentemente, guarda silencio respecto a la idea de Hooke y prefiere plantear, y dar la solución, otra cuestión: el efecto del movimiento de la Tierra sobre la trayectoria de cuerpos en caida libre. Y Newton, en la solución de su propio problema, se equivoca: Hooke le hace observar que la solución aportada es una espiral que conduciría al cuerpo al centro de la Tierra, lo que le parece un disparate y le indica que la trayectoria debe ser ovalada. El 13 de Diciembre Newton reconoce, de no muy buena gana, en carta a Hooke, su error.

Y Hooke insiste. En carta de 6 de Enero de 1680 le lanza un nuevo reto: tras mantener su idea de la composición de movimientos, agrega que la fuerza atractiva hacia el centro puede ser una atracción que varíe inversamente al cuadrado de la distancia. Vuelve a la carga el 15 de Enero y, en ella, establece un programa de trabajo: el que plasmará, precisamente, en PM. A las ideas ya mencionadas, Hooke pide ahora

> *Queda por averiguar las propiedades de una curva (ni circular ni concéntrica) realizada por una potencia atrayente central que haga que las velocidades de descenso desde la línea tangente o igual movimiento rectilíneo, a todas las distancias, estén en una proporción duplicada de las distancias recíprocamente tomadas. No me cabe la menor duda de que con vuestro excelente método podreis hallar fácilmente cuál ha de ser dicha curva, así como sus propiedades, sugiriendo además una razón física de esta proporción.*

Subrayo 'con vuestro excelente método' porque no sé si en estas palabras hay un punto de ironía del naturalista Hooke frente al matemático Newton, un matemático que se equivoca en sus cálculos y soluciones al enfrentarse a una cuestión filosófica, no ya especulativa o matemática.

Newton guarda silencio. Sólo el 13 de Diciembre de 1680 escribe a Hooke, sobre otro tema. Ha fracasado públicamente -Hooke se encarga de leer las cartas en la Real Sociedad- como matemático ante un naturalista. Que le reta a utilizar su 'excelente método' para explicar la Mecánica celeste facilitándole todas las hipótesis y suposiciones necesarias, facilitándole todo un programa de trabajo: la proporción de las velocidades a las distancias, la proporción de la fuerza de atracción, que la trayectoria sea un óvalo... y, además, le aporta algo más importante: un proceso, el de composición entre una componente tangencial y una de atracción hacia un centro, que se convertirá en la fuerza centrípeta frente a la centrífuga de Huyghens. El 'excelente método' es, para Hooke, el matemático y, dentro del hacer matemático, el que Newton ha difundido entre los amigos como el más suyo, del de descomposición en series.

Al fin, a los seis años de recibido el programa por parte de Hooke, Newton responde públicamente al reto. La respuesta es, precisamente, PM. Es respuesta en la que se realiza el programa planteado por Hooke estrictamente, pero con una inversión esencial: el programa se realiza en plan matemático, a partir de suposiciones, axiomas y demostraciones 'matemáticas' con certeza absoluta, y nunca a partir de los hechos, de las cosas obvias.

Respuesta a un reto, con inversión de método que, inmediata, recibe polémica, por su carácter estrictamente polémico. Incluso de propiedades intelectuales. Al poco de presentar el Libro I ante la Real Sociedad, Halley informa a Newton en carta de 22 de Mayo de 1686 que Hooke pretende la prioridad del descubrimiento respecto a la ley del inverso del cuadrado -podía haber indicado, de todo el programa-. Y Newton responde airadamente defendiendo el papel del matemático y, por inclusión, de la Matemática, en los asuntos de la naturaleza. En carta a Halley de 20 de Junio de 1686, afirma

> *Resulta que los matématicos que hacen los descubrimientos establecen las causas y hacen todo el negocio han de contentarse con ser simples calculadores y peones y otro que no hace nada, si no es alardear y usurpar todo, ha de llevarse toda la invención tanto de los que lo siguen como de los que lo preceden.* (...) *Mas aún concediendo haberla recibido del sr. Hooke con todo tengo tanto derecho a ella como a la elipse, pués por más que Kepler supiese que la órbita no era circular sino oval y conjeturase que era elíptica, así el sr. Hooke, sin conocer lo que yo he descubierto después de sus cartas, solamente puede saber que la proporción era duplicada muy aproximadamente a grandes distancias del centro, y conjeturaba que era así exactamente y conjeturaba erróneamente al extender dicha proporción hasta el mismo centro, mientras que Kepler conjeturó correctamente la elipse.*

Sin entrar en prioridades, en la aversión personal entre ambas figuras, lo que me interesa destacar es que PM sale como construcción matemática pero en terrenos de filosofía, de física. Y ello era una postura polémica frente a la corriente insular representada por Hooke. PM conseguirá el triunfo para la Mecánica racional -con cierta lentitud, sin duda, hasta el paso de Newton a Presidente de la Real Sociedad-, a pesar de que el Libro III, *El sistema del mundo*, referido a los fenómenos y a la descripción del sistema planetario en concreto, no lleve la misma construcción que los dos anteriores y contenga un cúmulo de Proposiciones y demostraciones donde los elementos de aproximación, el 'desprecio' de los errores, siempre mínimos, el 'no digo con exactitud'... tengan el papel principal. A pesar de que la última parte del Programa planteado por Hooke, dar la razón, la causa de los principios matemáticos que se observan en lo fenoménico, el establecimiento de la 'causa' de la gravedad quede sin respuesta.

Hacer matemático como instrumento de polémica, de reto frente a quienes asumen un papel para la ciencia de mera recolección de hechos 'positivos', obvios, de mero experimentalismo sin teoría previa, pero también frente a la idea de una ciencia exclusivamente física o filosófica, especulativa, incapaz de establecer proporciones matemáticas y, por ello, incapaz de auténtica cuantificación y experimentación. PM va a representar, aquí el triunfo de la línea iniciada por Kepler, por Galileo y que hará tópico el decir kantiano de que una disciplina será ciencia únicamente cuando se construya matemáticamente. PM establece, ya de modo definitivo, que el seguro camino de la ciencia pasa por la matemática.

4. *Conceptual.* Los aspectos anteriores sólo cobran su pleno sentido en la aceptación del aspecto conceptual del hacer matemático. El trabajo matemático ha de realizarse en su marco propio, que no es el perceptivo ni el fenoménico sino el exclusivamente conceptual. Cuando Newton plantea en el Libro I el movimiento de los cuerpos y lo hace atendiendo al hacer matemático, esos cuerpos se mueven en trayectorias que son líneas, con impulsos que son infinitesimales, con masas que se concentran en un punto, con movimientos en un espacio que carece de resistencia, que es homogéneo, isotropo y uniforme y del cual lo que menos importa es su constitución material. A esta diferencia entre lo conceptual y lo perceptivo es a la que responde la nítida distinción que Newton plantea en el Prefacio entre la mecánica de lo construible o manual y la racional o natural.

El hacer matemático sólo es factible, con su característica de certeza absoluta, en un espacio absoluto, que puede identificarse con el geométrico euclídeo, homógeneo, isotropo, ilimitado..., al que puede agregarse el movimiento de masas puntuales que siguen leyes determinadas. En un espacio así se cumplirán las leyes de Kepler, por ejemplo. y también es asunto del matemático suponer que en ese espacio existe rozamiento, pero enfocado como una fuerza que se opone al móvil según una ley determinada. Es lo que Newton hará gradualmente a lo largo del Libro II. En el fondo, ello no varía la estructura subyacente del espacio a manejar.

Sin embargo, al penetrar en el espacio fenoménico, allí donde el espacio deja de ser euclídeo, la Matemática tendrá que manejar un instrumental de aproximaciones. En él, unas leyes como las de Kepler dejan de ser válidas, incluso para el sistema planetario en que, de facto, nos encontramos.

Los párrafos anteriores los suscribirían los naturalistas, los salvadores de apariencias. Insistirían en la ineficacia del hacer matemático para captar lo fenoménico. Podría replicarse que, aún siendo un hacer de aproximaciones, sólo desde ese hacer cabe plantear la cuestión en sí de la aproximación. Únicamente si se han obtenido previamente unos principios matemáticos de los fenómenos físicos, en un espacio físico-euclídeo, puede saberse si las leyes encontradas en el espacio fenoménico no son más que aproximaciones y podrá determinarse, incluso el error de las mismas. Frente a los naturalistas, cabe aceptar que es la Matemática la que establece, precisamente, los patrones de error y aproximación, la que da sentido a la creación de experimentos y observaciones orientadas; si no se tuviera esa construcción previa, una medida no sería más que un número, nada más. Ese número se convierte en un valor de aproximación si hay una idea previa de aquello de lo que ese número es medida.

Se puede ir más allá, y es lo que hace Newton. El estudio de la naturaleza sólo tiene sentido si se acepta que la misma también pertenece a un mundo conceptual, si se desgaja lo que calificar espacio fenoménico del espacio perceptivo, de las cosas 'obvias'. Porque hay que admitir que el mundo fenoménico que estudia la filosofía, la física, no es perceptivo, sino una naturaleza transformada, conceptual, donde lo que importa de los cuerpos no son las cualidades primarias sino las secundarias: la masa, la extensión, la posición..., o, con palabras de Newton, en el Prefacio

> *no escribo sobre potencias manuales, sino naturales, tomando ante todo en cuenta las cosas que se relacionan con la gravedad levedad, fuerza elástica, resistencia de fluidos y fuerza semejantes, tanto atractivas como impulsivas.*

Y nada más antiperceptivo que un principio como el de inercia, sólo captable invirtiendo la percepción del individuo, sólo factible en su captación en un mundo conceptual físico-geométrico.

Y es lo que manifiesta la actitud de Newton, en su obra. Y creo que es una de las claves para comprender, antes de las posteriores discusiones con Leibniz a través de Clarke, la distinción entre espacio y tiempo absolutos y espacio y tiempo relativos. El espacio y el tiempo absolutos pueden estimarse como elementos constitutivos del espacio geométrico-físico conceptual, mientras que el espacio y tiempo relativos serían los elementos constitutivos del espacio perceptivo.

Aceptar que tanto el espacio que estudia la Matemática como el que estudia la filosofía, la física, son espacios conceptuales, y que el primero condiciona la propia estructuración del segundo, obliga a establecer relaciones entre ambos. Por lo pronto, la inversión newtoniana, en lo que sigue a Galileo, es asumir que lo primero es el espacio matemático y que lo fenoménico se obtiene mediante adopción de condiciones de complejidad sucesivas. Niveles de complejidad que se mantendrían, sin embargo, en lo puramente matemático si no se le terminan por agregar una serie de supuestos fenoménicos, de fenómenos físicos. Estos cobran su interés no sólo por sí mismos, sino desde la perspectiva previa de los principios matemáticos que los van a condicionar en cuanto a su propia explicación. Y si en el plano matemático se está en la certeza absoluta, en la demostración, en lo fenoménico únicamente se está en el de la descripción y aproximación, ésta última mediante el cálculo. Así, el sistema planetario sólo podrá ser descrito mediante esta combinación matemático-fenoménica. Y en lo que el filosófo queda en suspenso es en por qué ese universo fenoménico está hecho así; su función se limita a captar leyes, no en decir por qué esas leyes son como son. Esta es la función del enfoque simbólico, el salto a otro ámbito, a otra burbuja.

Muy sumariamente Newton expone los papeles de ambos ámbitos en el Escolio con el que cierra la Sección XI del Libro I:

> *En matemáticas hemos de investigar las cantidades de las fuerzas con su proporción consiguiente en cualesquiera condiciones supuestas; luego, cuando descendamos a la física, compararemos esas proporciones con los fenómenos, para poder conocer qué condiciones de esas fuerzas responden a las diversas clases de cuerpos atractivos.*

La aceptación de este papel del hacer matemático, y el intento de apoyar la ciencia, en concreto, la ciencia de los colores en el ámbito de lo conceptual, lo plasma Newton como programa en la *Optica* de 1704, aunque aquí no logra la realización del mismo, permaneciendo, realmente, en el ámbito de lo puramente fenoménico. La realización de este papel de la matemática tiene como ejmplo fundamental PM.

Pero también en esta línea puede interpretarse la defensa que hace Newton del papel del matemático, no en cuanto a mero calculador, y que he citado en la carta a Halley, sino en cuanto a descubridor de las leyes o principios que rigen la naturaleza. Papel que no se centra en sólo conjeturar si la trayectoria es o no elíptica, sino en demostrar, matemáticamente, que es elíptica; no en suponer que sigue una ley inversa del cuadrado de las distancias, sino en demostrar que la misma se cumple según principios matemáticos en un espacio también matemático. En su labor, el matemático habrá de utilizar instrumental ya conocido, pero también habrá de crear, si es preciso, otros. No sólo cuantifica o expone deductivamente, también crea la matemática apropiada. Y si, por ejemplo, ha de hacer uso de conocimientos ya clásicos -geometría euclídea, secciones cónicas de Apolonio, trabajos de Arquímedes...- habrá que emplear nuevos en otras ocasiones. Y PM mostrará cómo, para tratar el movimiento, hay que hacer uso de los métodos infinitesimales, de los desarrollados en serie.

Estructura de la obra

El manejo de los cuatro aspectos antes señalados de la Matemática en su relación con la filosofía, con la física, especialmente el conceptual, obliga a que la obra qué se adapte a los mismos posea una determinada estructura. Es la que subyace a PM.

No sólo en la parte acabada y que se mostró en la obra impresa que hoy celebramos, sino en el mismo proceso elaborativo. En principio PM iba a constar de solo dos Libros: el referido a los movimientos de los cuerpos -plano conceptual matemático estricto- y el referido al sistema del mundo, en plano discursivo -fenoménico estricto-. En la eleboración, el Libro I se desgajó en dos: lo que hoy es el Libro I sobre el movimiento de los cuerpos, es un espacio estrictamente matemático y el Libro II donde el movimiento de los cuerpos se va realizando en espacios matemáticos pero de complejidad creciente según se incorporan leyes de resistencia de complejidad creciente y que obligan a un estudio, ya, de aproximaciones. El primitivo Libro II se descarta por completo -y será editado a la muerte de Newton como *El sistema del mundo*- y se rehace en una nueva versión para formar el Libro III en un plano conceptual fenoménico; en él, se parte de los fenómenos, de los hechos positivos, pero de los relevantes para el objeto de estudio y siempre con el molde matemático establecido en el Libro I.

La obra que aparece en 1687 muestra una estructuta radicalmente conforme con el manejo de los cuatro aspectos antes señalados:

Los Libros I y II son matemáticos y el espacio manejado en ellos es el uniforme, homogéneo, isotropo, ilimitado pasando a espacios con resistencias que siguen siendo matemáticos porque, en ellos, no se entra a discutir, jamás, por las causas físicas. Y estas últimas palabras constituyen un leit-motiv. Así lo confirma la Definición VIII donde se establece la cantidad motriz de una fuerza centrípeta:

> *aquí sólo pretendo dar una nocíon matemática de estas fuerzas sin especular sobre sus causas y sedes físicas.*

Y, más adelante,

> *pues considero esas fuerzas no física sino matemáticamente.*

En la Sección 11, de entrada, reconoce:

> *Hasta aquí he estado exponiendo las atracciones de cuerpos hacia un centro inmovil aunque probablemente no exista cosa semejante en la naturaleza.*

Y al indicar que en tal Sección se van a exponer, matemáticamente, los movimientos de dos cuerpos:

> *Pero estas Proposiciones deben considerarse puramente matemáticas en esa medida prescindiendo de cualesquiera consideraciones físicas utilizo un discurso llano para hacerme comprender mejor por un lector matemático.*

En idéntica Sección, en el Escolio final:

> *Utilizo en el mismo sentido general la palabra <u>impulso</u> sin definir en este tratado las especies o cualidades físicas de las fuerzas y reduciéndome a investigar las cantidades y proporciones matemáticas de las mismas como mencioné en la Definiciones.*

Y si éstas son algunas expresiones correspondientes al Libro I, también se encuentran en el Libro II. En el Escolio de la Sección V del Libro II se lee:

Pero el problema de los fluidos elásticos están realmente compuestos por partículas que se repelen mutuamente de esta forma es un problema de física. Aquí hemos demostrado matemáticamente la propiedad de los fluidos compuestos por partículas de esta especie para que los filósofos tengan ocasión de discutir aquel problema.

El Libro II establece los principios matemáticos en medios resistentes. La Sección I realiza el estudio del movimiento de los cuerpos cuando la resistencia es proporcional a la velocidad, hipótesis de la cual dirá en su Escolio final:

es más una hipótesis matemática que una hipótesis física.

La Sección II establece que la resistencia es proporcional a los cuadrados de las velocidades y la Sección III considera que la resistencia es proporcional en parte a la velocidad y en parte al cuadrado de dicha proporción.

Son hipótesis, en todos los casos, matemáticas. Pero permiten el establecimiento de unos principios matemáticos en lo que puede, ya, apoyarse la filosofía natural, porque son

leyes y condiciones de los movimientos y fuerzas que se relacionan muy especialmente con la filosofía.

Y, ya lo he indicado, el Libro III hace referencia al mundo fenoménico.

Solo ahora se estará en condiciones de plantearse si lo fenoménico material está o no compuesto de partículas, si en esta burbuja se requiere de un soporte -el éter, la materia sútil- para la acción a distancia, de cuáles pueden ser las causas de la gravedad...

PM también refleja en su estructura el material matemático a emplear. Como el Libro I trata de trayectorias ovaladas de cuerpos, una de las bases se centra en el estudio de las secciones cónicas. Y el Libro I contiene, realmente, un verdadero tratado sobre las mismas y no sólo desde el aspecto métrico sino desde el proyectivo, notándose la influencia de la geometría arguesiana reafirmada por Pascal y La

Hire. Pero como el movimiento no puede manejarse directamente Newton ha de hacer uso, al igual que lo tuviera que hacer Galileo, de los infinitésimos, indivisibles o instrumento equivalente. La Sección I la dedica, precisamente, a exponer su concepto de razones primeras y últimas que reemplazan, aquí, la teoría de infenitésimos o indivisibles, aunque en forma implícita la misma se mantiene a lo largo de toda la obra. Y como el objetivo de la misma es el estudio de movimientos que se relacionan mediante una fuerza, la gravedad, Newton hace uso, desde el comienzo, del método compositivo sugerido por Hooke; método compositivo de impulsos infinitesimales para, a partir de ellos, obtener el movimiento global.

En el Libro II es donde surge "mi método de series convergentes",el gran método al que hacía referencia Hooke como el propio de Newton. Y ello porque al realizar un desarrollo en serie, en combinación con los impulsos infinitesimales, pueden despreciarse términos, obteniéndose aproximaciones hasta un número que puede prefijarse de antemano. Por otro lado, cada uno de los términos del desarrollo puede interpretarse geométricamente y así, uno indicará la curvatura o ángulo de contacto de la trayectoria en un punto, el siguiente la variación de esta curvatura, la variación de la variación de la misma... por lo que "mi método" muestra su utilidad, igualmente,

> *para la solución de problemas que dependen de las tangentes y la curvatura de curvas.*

como indicará en la segunda edición al modificar la Proposición X tras un error en la primera señalado por los dos primeros Bernouilli en 1710.

De aquí que sea en el Libro II donde se exponga un esquema de tal método de desarrollo en serie ligado, ahora, a las fluxiones.

Hay que reconocer que en el Libro I hay unas referencias a este método: precisamente en la Proposición XLV, Problema XXXI de la Sección IX, donde lo que se pretende es calcular el movimiento de los ápsides en órbitas que <u>se aproximan mucho</u> a círculos -el subrayado, es mío-, o en el Escolio de la Sección XIII, en función de "abreviar" las operaciones.

La novedad matemática en el Libro III se centra en el cálculo aproximativo, como no puede ser de otra forma: el método de interpolación apoyado en el cálculo de diferencias -y que hoy recibe el nombre de método de interpolación de Newton, incorrectamente, porque había sido manejado por Gregory desde 1670, públicamente, aparte de que era conocido por Leibniz, entre otros-. Aparece en el Lema V para obtener un polinomio aproximado a una curva mediante el cálculo en unos cuantos puntos, lo que permite obtener, por un lado, una aproximación polinómica -y por tanto lineal- a la curva con el dato de sólo unos cuantos puntos; por otro, un valor aproximado del área de dicha curva mediante la cuadratura del polinomio interpolador obtenido y que ha quedado como suma de parábolas -es decir, términos de la forma ax^m-.

Debo señalar que, para Newton, lo auténticamente matemático es lo geométrico, no lo aproximativo, que identifica con el método análitico. Y lo indica de modo explícito al finalizar el Corolario II del Lema XIX, en el que resuelve el problema de Pappus, que había tomado Descartes como piedra de toque de la potencia de su nueva geometría, de carácter algebraico, frente a la geometría sintética griega, en la que ni Euclides ni Apolonio habían podido resolver el problema. Piedra de toque que ya había tomado Pascal, frente a Descartes, mediante la demostración sintética. Resolución sintética que también realiza Newton. Tras la cual afirma:

> *y esto no es un cálculo analítico, sino una composición geométrica, como exigían los antiguos.*

Pero esta concepción, que Newton mantendrá en su *Enumeración de las líneas de tercer orden* -donde sigue la clasificación y nomenclatura realizada por Descartes para las líneas de segundo orden, y donde varía del estudio algebraico al geométrico para volver al algebraico- conduce realmente a un proceso metodológico en paralelo al de los antiguos: exposición al estilo euclideo, aunque no se tenga más remedio, cuando la materia obliga, y aquí se trata del movimiento de los cuerpos, que utilizar procesos de desarrollo en serie, fluxiones...

La autoleyenda

Si me autolimito a un aspecto concreto del hacer matemático, excluyendo las proposiciones sobre las cónicas y los desarrollos en serie, puedo señalar que, desde la perspectiva anterior no hay, ni puede haber, en PM, manejo del Análisis matemático. No lo requiere ni lo críptico, ni lo simbólico, ni lo polémico en su primera edición. Tampoco lo conceptual: lo fundamental es, por un lado, lo geométrico estricto, y por otro, para el movimiento, el estudio infinitisimal desde el que poder pasar a una trayectoria continua; de aquí que el material matemático a manejar sea, por un lado, las secciones cónicas y, por otro los indivisibles o razones primeras y últimas combinadas con los desarrollos en serie para el manejo de los fluentes infinitesimales. Y esto último mediante el establecimiento de proporciones respecto a un fluente básico, el tiempo absoluto.

Sin embargo, Newton se embarca en polémica de prioridades. Con Hooke ya las había tenido, en torno de 1672 y luego la citada de 1686 donde aún admitiendo haber recibido el impulso total de Hooke mantiene su 'prioridad' tanto sobre la proporción inversa del cuadrado de distancias como sobre la elipse kepleriana, por no decir que sobre las restantes leyes de Kepler. Pero si Hooke no era matemático sino naturalista, Newton encuentra otro rival en Leibniz, que si era matemático en el sentido en el que aquí se ha empleado el término. Y en polémica con Leibniz, a través de terceros, siempre dirigidos por él, intentará el descrédito por medios no muy honorables, por cierto. Tras el intento de juicio -a priori condenatorio- hacia Leibniz a través de la Real Sociedad, que Newton preside, y tras la publicación de *Commercium epistolicum*, publica una recensión 'anónima' en *Philosophical Transactions*, vol. 29. En ella, 1715, mantiene una antigua distinción que posteriormente será recreada por el neopositivismo lógico: la que media entre una fase 'creadora' y una fase 'expositiva'. Y si Reichenbach pretende eliminar del campo del análisis filósofico la primera, Newton acudirá a la misma como signo de prioridades. Indicará:

> *Con ayuda del nuevo análisis, el sr. Newton halló la mayor parte de las proposiciones de sus Pr. Ph., más debido a que los antiguos, para hacer las cosas ciertas, no admitían en la geometría nada hasta que no se demostrase sintéticamente, demostró sintéticamente las proposiciones, a fin de que el sistema de los cielos se asentase sobre buena geometría. Eso hace que sea ahora difícil para las personas poco expertas ver el análisis mediante el que se descubrieron esas proposiciones.*

Afirmación que reitera, cambiando incluso fechas de descubrimiento, en el borrador de una carta a Des Maizeaux de 1720, donde llega a señalar que utilizó mucho el método de fluxiones sin exponer los cálculos en el Libro mismo, redactado conforme al método 'expositivo' de los antiguos.

Es posición que Newton adopta, en su autoleyenda, y que va en contra de toda la corriente de los que manejaron el Cálculo de indivisibles en su proceso creativo. Desde Pascal, que indicaría que sus demostraciones podrían hacerse al estilo de los antiguos, pero que basta decirlo para no hacerlo, hasta Barrow -y es punto, en lo que aquí se trata, de absoluta importancia- que señalaría que sus demostraciones podrían realizarse por el método apagógico, pero para qué. Y de Barrow aprendió y adoptó muchos conceptos e instrumentos su gran discípulo Newton.

Algunos historiadores han querido comprobar esta autoleyenda. Cohen, al estudiar los documentos y manuscritos de Newton ha tenido que llegar a la conclusión de que el proceso de descubrimiento sigue, realmente, el expositivo. Incluso llega a la afirmación de que solo en una ocasión emplea el método fluxional respecto a la segunda ley cuando indica que la fluxión de la velocidad es como el peso del cuerpo, pero ya en escritos posteriores a 1691.

La leyenda, persiste. En alguna Historia de la Matemática se llegan a dar razones que ni el mismo Newton dió: el método geométrico demostrativo se hizo porque las demostraciones parecían más comprensibles a sus contemporáneos -olvido del aspecto críptico del hacer matemático, desde mi punto de vista- y porque Newton admiraba a Huyghens y su trabajo geométrico y quería ser, al menos, igual que él.

Autoleyenda creada por Newton y que, curiosamente, va en contra de sus propias declaraciones impresas en PM, en cuanto al carácter demostrativo. En PM maneja un equivalente a los indivisibles y repite, casi textualmente, las frases de Pascal, de Barrow, en el Escolio a la Sección I del Libro I, la dedicada a la exposición de las razones primeras y últimas en la que fundamenta todo el cálculo del libro:

> *Estos Lemas se enuncian como premisas para evitar el tedio de deducir largas demostraciones por el absurdo, siguiendo la costumbre de los antiguos geómetras. Pues el método de los indivisibles abrevia las demostraciones...*

Palabras bien claras para contradecir las que escribiera, tantos años después: todo realizado en el proceso de los antiguos. Y con una precisión:

Pero como la hipótesis de los indivisibles parece de alguna manera más ruda y, por ello, es considerada menos geométrica como método, he preferido reducir las demostraciones de las proposiciones siguientes a las primeras y últimas sumas y razones de cantidades nacientes y evanescentes... Pues gracias a ello se prueba lo mismo que por el método de los indivisibles, y una vez demostrados esos principios podremos usarlos con mayor seguridad.

Ahora bien, manejar los indivisibles o algún enfoque equivalente no es manejar el 'nuevo análisis'. He indicado que, para el estudio del movimiento, se requiere el manejo de impulsos infinitesimales, se requiere el manejo de los indivisibles, bien en su vertiente lógico-algebraica -la línea adoptada por Fermat, Pascal, Huyghens, Leibniz-, bien en su vertiente cinemática -en la línea Galileo, Torricelli, Roberval, Barrow-. Y Newton no podía ser menos. Y, de hecho, su obra está apoyada, integramente, en tal manejo de infinitésimos en su versión de razones primeras y últimas, con impulsos infinitesimales. Pero ello no implica que tal obra esté apoyada en el Cálculo diferencial o integral o algo equivalente. Y esto es algo evidente por el hecho de que en PM no aparece, en momento alguno, una ecuación diferencial auténtica o algo semejante. Y no aparece porque es imposible que pueda darse este hecho. Imposibilidad que veo apoyada en la visión conceptual ontológica newtoniana. Es lo que hay que precisar.

Infenitésimos. Razones primeras y últimas. Cálculo fluxional

Las últimas palabras citadas de Newton, a Barrow, parecen confirmar que Newton maneja los indivisibles, una vez que ha demostrado su equivalencia con las razones primeras y últimas. Se da la impresión de que el método de las razones primeras y últimas, o proporciones de fluentes, no es más que una alternativa al método de indivisibles; más rigurosa pero, en el fondo, equivalente. En consecuencia, mediante el recurso a estas razones o proporciones pueden identificarse pequeñas curvas con rectas cuando su proporción o razón tienda a la unidad si se toman en magnitud infinitesimal. Identificación de la cual hace uso permanente Newton en PM. Y que apoya en la Sección I del Libro I;

entre otros, en el Lema VII donde la razón última de arco, cuerda y tangente es la de igualdad; o el Lema VIII donde la razón de áreas de un sector, del triángulo formado por las tangentes en los extremos y el formado por la tangente en uno de los extremos y los dos lados del sector inicial están en razón de unidad. Por lo cual:

> *Y así en todas las argumentaciones sobre razones últimas podemos usar cualquiera de esos triángulos por cualquier otro.*

Esta equivalencia posibilitaría, en última instancia, el manejo no sólo de los infinitésimos o indivisibles, sino del Cálculo diferencial e integral, al modo de Leibniz. Sin embargo, la equivalencia es sólo aparente. Hay una base conceptual y ontológica que impide la misma.

Newton, en el Escolio a las Definiciones, de modo explícito, escribe:

> *Todas las cosas están situadas en el tiempo según el orden de sucesión y en el espacio según el orden de situación.*

En lo geométrico, los cuerpos han de moverse en un espacio que Newton toma como euclídeo: uniforme, isotropo, ilimitado..., agregándole cuerpos cuya masa puede identificarse con un punto y que se mueven sin rozamiento, o con resistencias que siguen leyes matemáticas determinadas -aunque difícilmente se puedan dar en la realidad, en lo perceptivo-. Pero ese movimiento exige también de un tiempo y lo hace mediante unos impulsos o fuerza; y no puede olvidarse que PM tiene como tema la filosofía, la física del movimiento. Y aunque éste se haga en un espacio matemático o espacio absoluto, exige de un tiempo para realizarlo, un tiempo también matemático o absoluto. Y en este espacio-tiempo absoluto es en el que se incardina la concepción de Newton respecto a la velocidad y a la trayectoria, a los impulsos.

Por lo pronto, la velocidad muestra una dificultad que ya se le presentara a Galileo: no es cuantificable de modo directo. Para Newton, la velocidad se muestra como la intensidad del movimiento. De ella había llegado a escribir:

> *velocitas est motu intensio*

Y, como tal, no es magnitud directamente cuantificable sino que se presenta como magnitud intensiva; es decir, como una cualidad propia de los cuerpos y que puede aumentar o disminuir. Cualidad ligada al movimiento y que, por ello, depende del tiempo.

Tiempo absoluto, verdadero o matemático que fluye uniformemente y que, a su vez, tampoco es cuantificable directamente. Incluso:

> *Es posible que no exista un movimiento uniforme con el cual medir exactamente el tiempo,*

dirá en el Escolio a las Definiciones con que inicia PM. Y hay que distinguir el tiempo absoluto o duración del tiempo relativo, de lo que sólo son medidas suyas, medidas sensibles. El tiempo que marcan nuestros relojes, referido al tiempo absoluto es erróneo, pero es gracias a estos relojes físicos, al péndulo, como nos podemos hacer una idea aproximada del tiempo verdadero.

Pero, con ello, tanto en el caso de la velocidad, que depende como magnitud intensiva del tiempo, como en el de éste, hay que buscar unos patrones de referencia, siempre relativos, con valor siempre aproximado. Concretamente, lo único que puede establecerse es la razón o proporción de tales magnitudes cualitativas entre sí. Lo mismo ocurre con la medida: no hay una medida absoluta, sino relativa al patrón elegido.

Por otro lado, hay que observar que todavía el concepto de función no aparece claro en los dominios del hacer matemático. Iniciado por Descartes será plasmado por Leibniz y los primeros Bernouilli. Pero Newton adopta, en este punto, una posición radicalmente ligada a la corriente cinemática antes señalada. Desde ella, la trayectoria o curva se enfoca como algo a engendrar, no viene dada de una vez por todas y de manera que pueda ser analizada en alguna de sus partes, en sus infinitésimos. La curva hay que generarla porque viene en función del tiempo y, en esa generación, aportada por impulsos infinitesimales, lo que importa es la creación paso a paso, mediante infinitésimos de movimiento, mediante incrementos discretos pero continuos en su globalidad. Y la generación no tiene por qué ser simple, sino que puede establecerse por un doble movimiento, al ejemplo de la espiral de Arquímedes, mediante translaciones y rotaciones simultáneas pongo por caso.

Generación que permite establecer, incluso, una clasificación de las curvas como ya señalara Descartes en geométricas y mecánicas -si son trascendentes como la cicloide o la propia espiral-. Pero, en cualquier caso, ambas quedan englobadas en ser construibles mediante un movimiento continuo y, por así generadas, ambos tipos quedan como tratables matemáticamente. Y debo señalar que, aquí, aún ampliando el hacer matemático, Newton lo hace en un sentido absolutamente diferente al realizado por Leibniz, quien se apoya, exclusivamente, en la expresión algebraica o trascendente de las curvas, no en su generación por un movimiento, sea o no compuesto. Clasificación realizada en PM, en el Lema XXVIII de la Sección VI del Libro I. Y sólo cuando se trata de realizar un cálculo aproximado acepta Newton el que la curva venga dada de antemano: en la Proposición siguiente al Lema anterior, la XXXI, Problema XXIII, para la resolución del 'problema Kepler' acepta que la curva esté dada, pero después de la solución agregará en el Escolio

> *como la descripción de esta curva es difícil, será preferible una solución por aproximación.*

Y hago observar que ello supone un añadido en la segunda edición y sigue muy de cerca la solución aportada por Wren en 1659. Cálculo aproximado pero suficientemente preciso para las cuestiones relativas a los movimientos planetarios.

Cualquier magnitud tendrá un claro estatuto en PM: la de estar generada por el flujo continuo de impulsos infinitesimales. Y si se ha afirmado que el movimiento del todo es idéntico a la suma de los movimientos de las partes, precisamente la generación del movimiento continuo o global procede de la síntesis de los movimientos infinitesimales. Paso de lo discreto infinitesimal a lo continuo global clave en las demostraciones newtonianas de PM, consecuente con el estatuto de fluentes de todas las magnitudes que intervienen. Paso que no es precisamente un análisis, sino síntesis.

Por indicar dos modelos tipo: Uno, que muestra fundamental Newton y lo pone como la Proposición I del Libro I, en la Sección II, donde se trata de la determinación de las fuerzas centrípetas; razonamiento en tres partes donde se ve el paso de lo infinitesimal a lo continuo mediante el aumento en número infinito de impulsos infinitesimales; razonamiento que repite en la recíproca o Proposición II. Otro, en la Sección IX donde en lugar de manejar incrementos, maneja decrementos por lo que el razonamiento ha de hacerse en el momento en el cual se ha "agotado ese tiempo..." y donde ha de incluir la reducción a una serie indeterminada por "mi método de series convergentes" para despejar o despreciar las cantidades superfluas, por supuesto, infinitesimales.

Insisto, todas las magnitudes que se consideran en PM son fluentes, magnitudes que dependen del tiempo. Como tal magnitud fluente A, posee, intrínseca, la cualidad intensiva de su velocidad, creciente o decreciente, que podrá calificarse como fluxión, a. Asociada, en su faceta generadora, posee un crecimiento o decrecimiento infinitesimal que viene dado por el producto a.o, donde 'o' es el infinitésimo de tiempo que es el que, por decirlo de alguna manera, proporciona el impulso para que la magnitud fluente se ponga en movimiento.

Newton piensa, así, la curva o trayectoria en términos de engendrada mediante movimientos de impulsos infinitesimales respecto al tiempo. Engendrada mediante la composición de varios movimientos simultáneos. Pero ello implica que el estudio de la misma depende de la razón de variación, de la razón de crecimiento o decrecimiento respecto a la magnitud tiempo de las magnitudes que componen la curva final.

Como cada magnitud fluente posee su fluxión, su intensidad de movimiento, resulta que el cálculo no podrá obtener directamente tal fluxión, sino o bien una aproximación mediante el desarrollo en serie, o bien la razón de las fluxiones conociendo los desplazamientos, pero tampoco mediante una comparación directa entre ellos, sino a través del tiempo con la condición de que esos desplazamientos se den en el mismo instante; recíprocamente, la razón de estos desplazamientos, de los espacios recorridos conociendo la razón de las fluxiones, de las intensidades del movimiento y con la misma condición que en la directa.

Manejo de razones, de proporciones y no de magnitudes en sí, porque éstas son imposibles de cuantificación directa, ya que dependen del tiempo absoluto. Cuantificación directa que, en el mejor de los casos, sólo aportaría una aproximación, la establecida por un desarrollo en serie con infinitos elementos.

Esta concepción newtoniana tiene su reflejo en la interpretación de las razones primeras y últimas, y es donde se ve muy claramente el imposible manejo del Cálculo diferencial e integral a lo Leibniz. Una razón entre dos velocidades, entre dos intensidades del movimiento no puede ser, jamás, la derivada de una magnitud. En el mejor de los casos, dada una magnitud A, con su fluxión a, que varía respecto al tiempo X, con su fluxión x, podrá obtenerse la razón de fluxiones a/x que, evidentemente, no es la derivada de la magnitud A, sino la razón respecto al tiempo patrón de referencia. Sólo en el caso en el que el tiempo adoptado como tal patrón posea un fluir uniforme -que, como ya he citado, no se sabe si existe-, la fluxión del mismo sería x=1 y, entonces, y sólo entonces, la fluxión de la magnitud A coincidiría con la derivada.

Por otro lado, he reiterado que lo que importa no es la razón en sí de las cantidades o de sus fluxiones tomadas globalmente. Lo que importa es la razón entre los impulsos infinitesimales que las originan, es decir, el valor de la razón instantánea en cada partícula de tiempo. Y es el motivo para el manejo de las razones primeras y últimas, siempre en función del tiempo. Razones que no son a y b -tomadas como fluxiones de las magnitudes A y B- sino de sus crecimientos o decrecimientos instantáneos. Y estos se forman mediante la aplicación a las fluxiones del infinitesimal tiempo 'o'. Las razones lo serían, realmente, de las expresiones infinitesimales a.o y b.o respectivamente y que serán llamadas 'momentos'. De aquí la afirmación:

> *las razones últimas en que las cantidades se desvanecen no son hablando estrictamente, razones de cantidades últimas, sino límites a los cuales las razones de esas cantidades, decreciendo sin límite, se aproximan.*

Desde esta concepción no hay indivisibles en sí, sino formación o generación de los mismos en función de algo absoluto, el tiempo. Magnitud absoluta no cuantificable sino por aproximaciones, como ya indicara Barrow, de quien creo que Newton adopta esta conceptuación. Pero como no hay medida absoluta, la misma vendrá en razón de un fluente tomado como referencia.

Insisto, no hay infinitesimales en sentido estricto, como magnitudes que no siguen el principio de homogeneidad arquimediano sino su contrario -como admitían Pascal y Leibniz-, pero tampoco puede haber derivada o fluxión absoluta.

Unicamente cuando se admite que se está en el espacio-tiempo absoluto, en el espacio-tiempo verdadero y matemático, cabe la suposición de que el tiempo absoluto fluye de modo uniforme y el fluente de referencia puede aceptarse que posea como fluxión x=1, de donde su cambio infinitesimal será x.o=0. En este caso, y sólo en este caso, cabe la identificación de la razón de fluxiones con la derivada. Identificación válida para el espacio matemático que no para el fenoménico ni, mucho menos, para el perceptivo, con su estudio del movimiento aparente, relativo.

Situados en el espacio matemático, donde el patrón de referencia puede estimarse con fluxión unidad, cabría la identificación del Cálculo fluxional con el de derivadas. Pero PM estudia el movimiento en el espacio fenoménico y es donde Newton introduce, precisamente, el cálculo fluxional. De aquí la imposibilidad de esta identificación. Identificación que se apoyaría en el truco mencionado, engaño porque toda la carga ontológica de la magnitud tiempo queda oscurecida. Y, sin embargo, es en este truco, con su identificación correspondiente, en el que Newton apoya, precisamente, su leyenda.

Identificación que se basa en el Lema II del Libro II donde por vez primera expone Newton las reglas del Cálculo fluxional. Lema más famoso, quizá, por el Escolio en el que cita con elogio a Leibniz en la primera edición, y suprime toda referencia en la tercera, mientras que en la segunda lo modifica sutílmente agregando que las concepciones de ambos coinciden salvo en las notaciones y "en el concepto de la generación de cantidades".

Pero se olvida que el Lema II mantiene la consideración de las

> *cantidades como variables e indeterminadas y creciendo y decreciendo, por así decirlo, por un movimiento o flujo continuo.*

A los aumentos o disminuciones instantáneos aquí les da el nombre de momentos, y los precisa en la primera edición al afirmar:

> *Los momentos tan pronto como son de magnitud finita, dejan de ser momentos.*

Palabras que sustituye en la segunda edición por:

> *Las partículas finitas no son momentos sino las cantidades mismas generadas por los momentos.*

Momentos que, como no puede ser de otra manera, no se consideran en sí, sino en su "primera proporción". Con lo cual el momento viene a identificarse con las velocidades de las mutaciones proporcionales, con sus fluxiones correspondientes porque aquí se continúa considerando que el aumento o disminución de las cantidades se hace mediante un modo continuo -identificando el flujo continuo con el uniforme de modo implícito-, ya que se ha insistido en que las cantidades que se consideran no lo son como formadas por la adición de partes, sino generadas mediante multiplicación, división, extracción de raiz o medios proporcionales.

En este engaño, un rectángulo AB, aumentados o disminuidos sus lados A y B por un flujo continuo, tendrá como momento o mutación final aB + bA -y en la demostración Newton no comete una falacia como ha señalado Whiteside, sino una composición de crecimiento y decrecimiento muy sutil, estrictamente geométrica, euclídea-. A su vez, el momento de A^n será naA^{n-1}; de A^{-1} será $-aA^{-2}$. En otras palabras, y aceptando que el momento del patrón de referencia temporal sea 1, lo que se establece en este Lema son las derivadas del producto, potencia e inverso de unas magnitudes fluentes. Estas dos últimas se resumen en la de la potencia con exponentes tanto enteros como fraccionarios, positivos o negativos.

En un terreno pragmático puede observarse que, en el fondo, cuando aparecen cantidades infinitesimales en comparación con otras, las mismas se suprimen. Y es la afirmación contenida en los Lemas de la Sección I que antes he citado: se hace uso, realmente, de infinitésimos o indivisibles siempre que su razón última sea la unidad. Y cuando se admite la existencia de un patrón de referencia uniforme, los momentos coinciden con la derivada. Y cabe observar que si la primera identificación constituye un tema constante, un método permanente en toda la obra PM, no ocurre lo mismo con el cálculo fluxional, que queda aquí enunciado, sin aplicaciones reales, salvo cuando se le combina, al igual que con los infinitésimos, con el método de desarrollo en serie. Y también he citado cómo es en la segunda edición, y tras modificación de error revelado por los Bernouilli, como Newton hace referencia a posibles aplicaciones de tal cálculo fluxional en el estudio de las curvas: pero ya se ha estudiado en el continente con el método de Leibniz varios años antes. En cualquier caso, esta identificación pragmática no equivale a la eliminación de las razones conceptuales que subyacen al aspecto operativo-pragmático.

Desearía realizar, antes de finalizar estas líneas, una advertencia: la notacional. En PM el momento de una cantidad fluente A viene representado por a o bien por a.o; el infinitésimo de crecimiento por 'o'. No aparece, en parte alguna, la notación punteada para indicar la fluxión de una magnitud. La notación punteada surge, en Newton, como más pronto, a finales de 1691 y no sé si como reflejo de su actitud deista, simbólica. El aspecto notacional formal se muestra secundario en Newton y no fundamental como ocurriría en Leibniz. Desde el enfoque ontológico newtoniano ello es totalmente consecuente. No significa, como afirmara Cuesta Dutari, que la ausencia de una notación formal implique una conceptuación oscura y confusa. Implica que puede existir, como existe, una concepción muy clara pero ontológicamente distinta a la leibniziana, a cualquier enfoque lógico-algebraico.

A modo de conclusión

Obra matemática, PM. Pero obra de pensamiento. Obra que refleja una visión ontológica en la que prima la admisión de una parcialidad radical del conocimiento humano, que jamás alcanzará el conocimiento absoluto, ni siquiera la auténtica cuantificación del tiempo, por ejemplo. Sólo es verdadero conocimiento el matemático y en él existe precisión absoluta, no aproximaciones. Por ser conocimiento absoluto, verdadero, condicionará el conocimiento de lo fenoménico. Conocimiento que requerirá de la aproximación. Y ésta sólo será factible con métodos como el desarrollo en serie, que supone el manejo de infinitos sumandos, por lo que únicamente podrán adoptarse unos cuantos, siempre finitos.

Desarrollo en serie que viene a reflejar, por analogía, el carácter fluente de las magnitudes generadas siempre por momentos, por impulsos infinitesimales ligados al tiempo. Y este es el 'nuevo análisis' al que hace referencia Newton, realmente, es 'mi método' como reitera; manejo de series y no Cálculo diferencial e integral en sí. Y ello supone acentuar el carácter aproximativo del conocimiento, que también se refleja en la estructuración de PM en cuanto a los aspectos conceptuales matemático y fenoménico, en cuanto a los instrumentos matemáticos que gradualmente han de ir utilizándose como he pretendido mostrar. Carácter de aproximación que se refleja en el manejo de los infinitésimos de tiempo como generadores o creadores con su flujo continuo, pero a impulsos discretos, y la obligación de emplear razones primeras y últimas porque, ontológicamente, no puede captarse directamente la magnitud básica tiempo, como tampoco la magnitud básica espacio. De aquí que PM, más que una obra matemática en la que pueda esbozarse un tratado de Análisis infinitesimal sea una obra en la que el método es el opuesto: una síntesis, la que hace pasar de lo discreto a lo continuo y ello mediante una labor de construcción, paso a paso, rechazando un absoluto de conocimiento como ya dado y que hay que analizar.

1. Las citas de PM se han tomado de la edición preparada por Antonio Escohotado en la desaparecida Editora Nacional, Madrid 1982. Se encuentra, en preparación la reedición de esta edición en Tecnos, Madrid.

2. En relación muy directa a lo tratado en las líneas, para una lectura puede verse:

CAJORI, Florian: *A History of Mathematics*. Chelsea, NY, 4ª ed. 1985.

COHEN, I. Bernard: *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*, Alianza Ed. Madrid 1983. Trad. Carlos Solís. La ed. original es de 1980.

CUESTA DUTARI, N: *Historia de la invención del Análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Ed. Univ. Salamanca. Salamanca 1985.

DE GANDT, François: "Mathématiques et réalité physique au XVII^{e} siècle", en *Penser les mathématiques*, Ed. Seuil, Paris 1982. Existe traducción en Tusquets Ed.

LORENZO, Javier de: "Pascal y los indivisibles". *Theoria*-2ª Epoca nº 1, pp. 87-120. San Sebastián 1985.

LORENZO, Javier de: Estudio preliminar a Leibniz: *Análisis infinitesimal*, Tecnos, Madrid 1987.

STRUIK, D.J.: *A Source book in Mathematics* (1200-1800). Princeton Univ. Press, 2ª ed. 1986.

Escuela Universitaria de Formación del Profesorado
Departamento de Matemáticas
Universidad Complutense. Madrid.