AXIOMES ET DEFINITIONS CHEZ LESNIEWSKI: UNE MANIERE GENETIQUE DE DEVELOPPER LES SYSTEMES FORMELS

Denis MIEVILLE

ABSTRACT

The logical theories of Stanislaw Leśniewski differ profoundly form classical formal systems. Unlike the latter, they do not have an entirely predetermined vocabulary. Nor do they have a determined list of functors of syntactical-semantical categories. Due to formalized directives for definitions, the logics of Leśniewski are constructed progressively, making new theses and consequently functors of new syntactical-semantical categories accesible. In this article we present the genetic aspect associated with these theses-definitions. We also show that the property of creativity makes it possible to bridge some of the fundamental gaps in contemporary classical logics.

PREAMBULE

Le développement de la théorie des systèmes formels est généralement associé aux travaux de Frege, Russell, Hilbert, Gödel et Tarski. Or, cette récente tradition nous conduit parfois à négliger des travaux remarquables qui ont été développés en marge du courant dominant. L'oeuvre de Leśniewski [1886-1939] fait partie de ceux-ci. Dans cet article, je voudrais contribuer à faire mieux reconnaître cette oeuvre de grande qualité. Je désire également mettre en évidence certaines des propriétés qui sont associées aux notions d'axiome et de définition dans les théories logiques de Stanislaw Leśniewski.

Je procéderai de la manière suivante. Dans un premier temps, je rappellerai ce qu'on entend classiquement par système formel; je me limiterai aux systèmes classiques du premier ordre et j'en proposerai une illustration. Celle-ci me servira de point de comparaison lorsque, dans un second temps, je présenterai certains aspects des théories de

THEORIA - Segunda Época - Año II
Curso 1986-87, nº 5-6, pp. 285-307

Leśniewski.

OU IL EST QUESTION DE SYSTEMES FORMELS

Il est traditionnellement admis qu'un système formel est le donné de quatre ensembles:

a] Un *vocabulaire*: il s'agit d'un ensemble au plus dénombrable de symboles.

b] Des *expressions bien formées*: il s'agit d'un ensemble d'expressions dont chacune consiste en une suite finie de symboles du vocabulaire. Elles sont obtenues à l'aide d'un procédé effectif de formation.

c] Des *axiomes*: c'est un sous-ensemble décidable de l'ensemble des expressions bien formées qui contient toutes les expressions de certaines formes données, et seulement celles-ci.

d] Des *règles de transformation*: elles sont en nombre fini. Chacune d'entre elles est l'expression d'une relation formelle particulière. Chacune de ces règles est accompagnée d'un procédé effectif qui permet de déterminer dans chaque cas d'application si la règle a été correctement utilisée.

Un tel système permet d'obtenir, partant ou non d'expressions bien formées, et à l'aide des axiomes et des règles de transformation, des théorèmes ou des expressions dont on dit qu'elles sont syntaxiques. A ce niveau, il n'y a aucune sémantique: il s'agit d'un pur mécanisme de génération de formes syntaxiques, formes entièrement déterminées par le vocabulaire initial ainsi que par les procédés effectifs de formation et de transformation. Dans ce contexte, il est toujours possible de proposer des définitions, mais elles n'ont alors de vertu qu'abréviative.

Une telle construction n'est pourtant pas purement gratuite: elle pourra par la suite être *interprétée*. Cette activité présuppose l'existence de domaines d'objets, de propiétés et de relations qui vont constituer des modèles du système formel. Dans cette perspective, il est non seulement nécessaire d'établir une correspondance entre les signes de la syntaxe -qui joueront le rôle de variable ou de constante- et les éléments du domaine d'objets, mais également de fournir une interprétation aux signes de la syntaxe auxquels on se propose d'attribuer une réalité logique. Ainsi dans la théorie des systèmes formels, la structure logique est totalement explicitée. C'est même une des propriétés qui caractérise la notion de système formel relativement, par exemple, aux systêmes axiomatiques hypothético-déductifs, tel celui de Zermelo [1908] qui lui, utilise les signes logiques -en l'occurrence, les mots du langage- en raison de leur sens; ces signes ne sont pas régis par des règles opératoires. Cette particularité des systèmes formels les dintingue également des systèmes axiomatiques tel que les concevait Aristote. En effet, ceux-ci ne laissent apparaître que le caractère implicite de la logique. Il est évident qu'il ne s'agit pas du seul aspect qui distingue les systèmes formels de la conception classico-aristitotélicienne de système axiomatique. Ajoutons brièvement que la théorie des systèmes formels ne connaît pas l'exigence d'une homogénéité ontologique, ni celle de l'évidence de la vérité des axiomes, ni celle de leur nécessité [RAGGIO 1970].

Je terminerai ces quelques remarques en proposant un système formel élémentaire qui me servira de point de référence dans la suite de ma réflexion.

UN SYSTEME FORMEL ELEMENTAIRE: LE SYSTEME BI

a] *Le vocabulaire*

$\mathcal{A} = \{ (,), \equiv, p, q, r, \ldots \}$

b] *L'ensemble des expressions bien formées*

Il s'agit de l'ensemble capable de représenter le fragment biconditionnel du calcul classique des propositions.

c] *La base axiomatique*

Elle est constituée par deux schémas d'axiome:

A1: $((A \equiv B) \equiv (C \equiv A)) \equiv (B \equiv C)$

A2: $(A \equiv (B \equiv C)) \equiv ((A \equiv B) \equiv C)$

d] *La règle de transformation*

Il s'agit de la règle de détachement de la biconditionnelle

$$\begin{array}{l|l} m & A \equiv B \\ n & A \\ \hline & B \qquad m,n \equiv \text{dét.} \end{array}$$

Cette directive peut se formuler de la manière suivante:

Une expression bien formée B du système BI est une conséquence immédiate de deux autres expressions, si et seulement si celles-ci ont entre elles la relation formelle qui existe entre une expression de la forme A et une expression de la forme $A \equiv B$.

Si l'on accepte les définitions classiques de preuve et de déduction dans un système formel, ce que l'on peut obtenir avec le système BI ne présente aucune particularité spectaculaire. Ce système permet de développer le fragment "biconditionnel" du calcul classique des propositions. Il est sémantiquement complet et décidable dans la perspective d'une interprétation sur un domaine à deux valeurs [MIEVILLE 1984].
Ce qui m'intéresse ici, ce n'est pas tant l'ensamble des propiétes métalogiques de ce système que les qualités d'expression qu'il contient, ainsi que la nature de sa conception. A ce propos, je ferai les remarques suivantes:

- Les catégories syntaxico-sémantiques qui apparaissent dans ce système sont de deux sortes:
  il y a celle des propositions, (S), j'anticipe l'interprétation;
  il y a également celle des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments propositionnels, (S/SS).
- Ce système ne connaît qu'un foncteur constant, le signe $\equiv$ qui sera interpreté comme la biconditionnelle.
- Le vocabulaire initial est entièrement et préalablement déterminé. Il s'agit d'un emsemble qui possède au plus la cardinalité du dénombrable.
- Toute expression bien formée est effectivement déterminée à partir du vocabulaire initial. Il s'agit d'un ensemble récursivement énumérable.
- Certes, je peux penser, voire même offrir, une expansion inscriptionnelle et catégorielle de ce système. Il suffit pour cela de proposer des définitions qui inscrivent de nouveaux symboles constants. Cette expansion est toutefois artificeille dans la mesure où elle n'étend pas réellement la puissance logique du système. Toute nouvelle constante ne serait ainsi que l'abréviation d'une organisation complexe de formes biconditionnelles et n'aurait pas d'autre fonction que d'éliminer une expression encombrante. L'exemple suivant est de cette nature:

$$\dot{\equiv}(pqr) =\mathrm{df} \quad p\equiv(q\equiv r).$$

Dans une telle perspective, je ne saurais en aucun cas inscrire des constantes génétiquement intéressantes, telles que la négation et la conjonction. Cet état de la question embarrassait quelque peu Russell. Celui-ci écrivait en 1903

> *It is a curious paradox, puzzling to the symbolic mind, that definitions, theoretically, are nothing but statements of symbolic abbreviations, irrelevant to the reasoning and inserted only for practical convenience, while yet in the development of a subject, they always require a very large amount of thought, and often embody some of the greatest achievements of analysis,* [p. 63, éd. 1956].

L'étonnement de Russell est légitime. Cependant il est possible de se demander s'il n'y aurait pas moyen d'envisager une théorie formelle, conçue sur le foncteur de la biconditionnelle, qui permette une expansion logique effective, à la fois inscriptionnelle et catégorielle? Or, une telle possibilité existe; c'est ce que je vais m'employer à montrer.

UNE ALTERNATIVE AU SYSTEME BI: LE SYSTEME BIQ

Ce système est conceptuellement très différent du précédent. La base axiomatique du système BIQ se compose de deux, et seulement deux axiomes. Il ne s'agit pas de schémas d'axiome. Ces deux propositions premières du système sont des formes quantifiées, sans variable libre et la quantification y opère sur des variables de la catégorie des propositions:

A1: $\llcorner pqr \lrcorner \ulcorner(((p \equiv q) \equiv (r \equiv p)) \equiv (q \equiv r))\urcorner$

A2: $\llcorner pqr \lrcorner \ulcorner((p \equiv (q \equiv r)) \equiv ((p \equiv q) \equiv r))\urcorner$

Quant au vocabulaire, il est constitué par l'ensemble des symboles différents qui apparaissent dans les deux axiomes. Il ne contient que les seuls éléments suivantes:

V= $\{\llcorner, \lrcorner, \ulcorner, \urcorner, \equiv, (,), p, q, r\}$

Enfin, seules les deux catégories syntaxico-sémantiques (S) et (S/SS) et l'unique constante $\equiv$ sont présentes dans les deux axiomes.

Les deux axiomes du système BIQ en sont aussi les deux premières thèses. Il est dès lors nécessaire d'associer à cette base minimale des directives, celles-ci nous permettant d'étendre l'ensemble des thèses du système. Une première extension de cette sorte peut être fournie par la directive dite de substitucion qui permet d'inscrire, à partir d'une thèse préalable du système, une thèse nouvelle. Cette règle se doit d'être conforme à toute directive de substitution. Cela signifie notamment qu'à chaque occurrence d'une variable du champ du quantificateur de la thèse considérée, seule peut lui être substituée une "expression bien formée" de la même catégorie syntaxico-sémantique que cette variable. Il est de plus indispensable que cette expression reste libre pour cette variable. Mais alors, une interrogation d'importance surgit dans le contexte du système BIQ. En effet, qu'est-ce qu'une expression bien formée dans ce système dont aucun ensemble de substitution n'a été défini? La réponse nous est fournie par les conditions qui caractérisent cette directive. Celles-ci ne déterminent pas des formes particulières qui pourraient entrer dans le jeu de la substitution, mais, étant donné une expression quelle qu'elle soit, ces conditions nous permettent de vérifier si celle-ci est conforme à une substitution bien faite relativement à ce que le système contient actuellement. J'énoncerai de manière elliptique l'une de ses caractéristiques: le substitué doit représenter une expression de la même catégorie syntaxico-sémantique que la variable substituée; il est conçu sur la base des inscriptions préalablement introduites dans le système et à l'aide de formes quelles qu'elles soient, pour autant que celles-ci ne génèrent aucune confusion ni ambiguïté. Cette manière de dire les choses pourrait apparaître comme une plaisanterie s'il n'existait pas effectivement une formulation, une formalisation même d'une telle règle [LESNIEWSKI, 1929; MIEVILLE, 1984; RICKEY 1972, 1973]. Cette directive fournit donc un moyen effectif de déterminer si une expression est conforme à une opération de substitution relativement, d'une part à une thèse particulière et préalablement inscrite et, d'autre part, à ce que contient actuellement le système comme inscription. En plus de sa qualité d'effectivité dans le champ des substituans possibles, cette directive procure une très grande liberté inscriptionnelle. Nous ne disposons pas d'un ensemble de substitution préalable, nous l'inventons et l'étendons progressivement à chaque opération de substitution, et ceci sous la garantie de conditions qui nous permettent d'échapper aux erreurs et aux méprises catégorielles.

Ainsi sur la base de la thèse suivante:

T1 : $\llcorner p \lrcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$

les expressions ci-dessous sont conformes à la directive de substitution et, partant, sont des thèses du système.

T2 : $\llcorner r \lrcorner \ulcorner r \equiv r \urcorner$
T3 : $\llcorner sp \lrcorner \ulcorner (s \equiv p) \equiv (s \equiv p) \urcorner$
T4 : $\llcorner ? \lrcorner \ulcorner (? \equiv ?) \equiv (? \equiv ?) \urcorner$
T5 : $\llcorner \lightning \lrcorner \ulcorner \lightning \equiv \lightning \urcorner$

Par contre, les expressions suivantes ne sauraient être issues de cette directive

$\llcorner (\lrcorner \ulcorner (\equiv (\urcorner$
$\llcorner sp \lrcorner \ulcorner (s \equiv p) \equiv (p \equiv s) \urcorner$

A cette étape de la construction du système, l'ensemble des variables de la catégorie des propositions est composé des éléments suivantes:

Evariables = {p, q, r, s, ?, $\lightning$ }

Deux autres directives permettent également une expansion des thèses du sytème: la directive associée à la quantification et celle de détachement. La première permet de distribuer un ou plusieurs lieurs devant l'argument droit, respectivement gauche, du connecteur biconditionnel dominant du champ du quantificateur.

Exemple: $\downarrow \llcorner p \lrcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$
$\llcorner p \lrcorner \ulcorner p \urcorner \equiv \llcorner p \lrcorner \ulcorner p \urcorner$

Quant à la seconde, elle s'apparente, dans l'esprit tout au moins, à celle du système BI.

Cette manière originale d'envisager l'expansion des thèses d'un système formel peut sembler quelque peu compliqueé, voire même coûteuse. Mis à part cette liberté inscriptionnelle, rien ne semble apparemment nouveau. Mais si l'on analyse certaines thèses de manière plus fine, et que l'on se souvient que la seule constante logique initiale est la biconditionnelle, on peut observer quelques faits remarquables. Considérons tout d'abord la thèse: p $\quad$ p$\equiv$p . Cette thèse semble être un bon candidat pour représenter le 'vrai' logique. En effet, si l'on interprète la quantification comme une conjonction finie sur un domaine à deux valeurs de vérité, cette expression est logiquement valide. De la même manière, une analyse de l'expression p p nous engage à l'accepter pour représenter le 'faux' logique. Sur la base de ces résultats, et en considérant la constante $\equiv$, il semble possible d'inscrire de nouveaux foncteurs logiques dans le système et ceci à l'aide de définition, et c'est ici que la constante logique $\equiv$ est particulièrement intéressante. En effet, à partir d'elle, il est possible de définir une relation d'equivalence. Or, une définition explicite est une relation d'équivalence entre un *définiens* et un *definiendum*.

En utilisant ce que contient le système BIQ comme terme constant primitif, il est dès lors possible de formuler une directive de définition *interne* au système. J'entends par là une directive de définition qui ne fait pas appel à un signe extra-linguistique tel le '=df' de Russell. Le seul symbole constant primitif suffit donc pour introduire une définition, et celle-ci ne sera plus considérée simplement comme une convention, mais bien comme une thèse du système. La directive de définitions permet donc une expansion des thèses du système. Elle nous offre la garantie effective que, étant donné une expression, celle-ci est ou non conforme aux conditions d'une définition explicite, définition conçue sur ce que contient actuellement le système en termes de variables, de constantes et de catégories syntaxico-sémantiques. A l'image de la directive de substitution, elle rend également possible une expansion des termes variables du système. Mais il a plus. En effet, par elle, le vocabuliare associé aux termes constants est progressivement étendu; plus que cela encore, elle permet une extension des catégories syntaxico--sémantiques.

Voici quelques thèses obtenues à partir de la directive de definition, et ceci relativement à ce que contiennent les deux axiomes.

QUELQUES DEFINITIONS

*Définitions des constantes de la catégorie (S)

D1 : $I \equiv \llcorner p \lrcorner \ulcorner p \equiv p \urcorner$

D2 : $O \equiv \llcorner p \lrcorner \ulcorner p \urcorner$

*Définitions de constantes de la catégorie (S/S)

D3 : $\llcorner p \lrcorner \ulcorner A(p) \equiv p \urcorner$ - assertion

D4 : $\llcorner p \lrcorner \ulcorner V(p) \equiv (p \equiv p) \urcorner$ - verum

D5 : $\llcorner p \lrcorner \ulcorner \sim(p) \equiv (\llcorner p \lrcorner \ulcorner p \urcorner \equiv p) \urcorner$ - négation

D6 : $\lfloor p \rfloor \ulcorner F(p) \equiv \sim(p \equiv p) \urcorner$ - falsum

*Définitions de constantes de la catégorie (S/SS)

D7 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner \not\equiv (pq) \equiv \sim(p \equiv q) \urcorner$ - la négation de la biconditionnelle

D8 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner V(pq) \equiv V(p \equiv q) \urcorner$ - le foncteur tautologique

D9 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner F(pq) \equiv F(p \equiv q) \urcorner$ - foncteur contradictoire

D10 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner \underline{C}(pq) \equiv (q \equiv F(p)) \urcorner$ - foncteur négation du conséquent

D11 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner C(pq) \equiv (q \equiv V(p)) \urcorner$ - foncteur affirmation du conséquent

D12 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner \underline{T}(pq) \equiv (p \equiv F(q)) \urcorner$ - foncteur négation de l'antécédent

D13 : $\lfloor pq \rfloor \ulcorner T(pq) \equiv (p \equiv V(q)) \urcorner$ - le foncteur affirmation de l'antécédent

Ces résultats illustrent le caractère remarquable de la directive de définition. En effet, on peut observer:

- deux termes constants nouveaux de la catégorie des propositions: (S);
- une catégorie syntaxico-sémantique nouvelle, celle des foncteurs formateurs de propositions à un argument propositionnel: (S/S) ainsi que quatre constantes qui lui sont associées;
- enfin, sept constantes nouvelles de la catégorie (S/SS).

Ces quelques thèses-définitions sont inscrites progressivement; elles le sont sur la base de ce qui précède leur inscription, c'est-à-dire en fonction des variables, des constantes et des catégories syntaxico-sémantiques contenues préalablement dans le système. A ce propos, on pourrait penser que le choix ou la forme que j'ai associés à certaines constantes est le produit d'une erreur. En effet, je n'ai apparemment pris aucune précaution pour distinguer les constantes V et F de la catégorie (S/S) de celles V et F de la catégorie (S/SS). Toutefois, et ceci est remarquable, cette équiformité ne pose aucun problème. Cela signifie en effet qu'il est possible d'inscrire dans le système BIQ des termes polysémiques et qu'une telle inscription ne génère aucune ambiguïté. Ceci s'explique dans la mesure où la catégorie d'un terme quel qu'il soit n'est pas déterminée par sa seule forme, mais par rapport au contexte dans lequel il apparaît. Ainsi, V dans V(p) et V dans V(pq) sont effectivement dissociables en termes de catégorie dans la mesure où l'un est associé à un seul argument et l'autre en possède deux.

Ce système, bien que possédant de réelles qualités génétiques, a néanmoins une importante limitation. J'ai montré [1984] que toute nouvelle definition d'une des catégories suivantes (S), (S/S), (S/SS) ne pouvait être qu'equivalente à l'une des quatorze constantes actuellement inscrites. A ce propos un résultat mérite d'être mentionné. Il concerne les mécanismes opératoires fondamentaux de la logique interpropositionnelle bivalente que Piaget [1972: 259-281] examine.

Etudiant la structure d l'emsemble des opérations interpropositionnelles, Piaget organise les seize opérations binaires en fonction de leur inverse, de leur réciproque et de leur corrélative. Quatre quaternes sont dégagés: chacun d'eux est formé d'un ensemble de quatre opérations. La caractéristique essentielle des deux premiers groupes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ réside dans le fait que chaque opérations qui leur est associée possède, de façon distincte, une opération directe. Un troisième quaterne $\underline{C}$ d'opérations se caractérise par le fait que, d'une part la réciproque y est identique à l'operation directe et que, d'autre part, la corrélative est identique à l'inverse. Enfin, un quatrième quaterne $\underline{D}$ d'operations se caractérise par le fait que d'une part l'operation directe est identique à la corrélative et que, d'autre part, la réciproque est identique à l'inverse. Pour illustrer la chose, je représenterai chaque opérations par sa tabla de vérité.

	directe	inverse	réciproque	corrélative
Quaterne A	1	0	0	1
	1	0	1	0
	1	0	1	0
	0	1	1	0
Quaterne B	1	0	1	0
	0	1	1	0
	1	0	0	1
	1	0	1	0
Quaterne C	1	0	1	0
	0	1	0	1
	0	1	0	1
	1	0	1	0
et	1	0	1	0
	1	0	1	0
	1	0	1	0
	1	0	1	0

Quaterne D	1	0	0	1
	1	0	0	1
	0	1	1	0
	0	1	1	0
et	1	0	0	1
	0	1	1	0
	1	0	1	0
	0	1	1	0

Il est intéressant de remarquer que les opérateurs bivalents: $\underline{\equiv}$, $\not\equiv$, V, F, du système BIQ correspondent au quaterne $\underline{C}$, et que les opérateurs $\underline{C}$, $\underline{C}$, $\underline{T}$, $\underline{T}$ correspondent au quaterne $\underline{D}$. Aucune correspondance avec les quaternes $\underline{A}$ et $\underline{B}$ ne peut être trouvée dans le système BIQ. Il n'est donc pas possible de définir, dans ce système, un opérateur binaire génétique intéressant, c'est-à-dire un opérateur binaire auquel on pourrait associer de manière distincte, une opération inverse, une opération réciproque et une opération corrélative.

UN DEVELOPPEMENT DU SYSTEME BIQ: LA PROTOTHETIQUE DE LESNIEWSKI

L'ensemble des opérations logiques définissables le système BIQ n'est pas fondamentalement intéressant: il n'est pas adéquant pour générer le calcul classique des propositions. Mais cette limitation peut être dépassée, et ceci grâce à un résultant d'A. Tarski. Celui-ci, qui fut le seul docteur formé par Leśniewski, démontre dans sa thèse le résultat suivant:

> *Le problème pour lequel j'offre une solution est le suivant: est-il possible de construire un système de la logistique comportant comme seul signe primitif le signe d'équivalence (en plus bien sûr, des quantificateurs)? Ce problème me semble intéressant pour les raisons suivantes. Nous savons, qu'il est possible de construire le système de la logistique à l'aide d'un seul terme primitif, utilisant pour cela, soit le signe de l'implication [?], si l'on veut suivre l'exemple de Russell, soit l'idée de Sheffer qui introduit spécialement à cet effet le signe d'incompatibilité. Pour réellement parvenir à ce but, il faut se garder de faire entrer dans les énoncés des définitions tout terme constant particulier, distinct à la fois du terme primitif adopté, des termes préalablement définis et du terme*

à définir. Le signe d'équivalence employé comme terme primitif présente à ce point de vue l'avantage de permettre strictement cette règle et de donner en même temps aux définitions une forme aussi naturelle que commode, celle d'une équivalence. [TARSKI 1972: 3-4].

La solution de Tarski prend la forme du théorème suivant:

$$\llcorner pq \lrcorner \ulcorner (p \wedge q) \equiv \llcorner f \lrcorner \ulcorner p \equiv (\llcorner r \lrcorner \ulcorner p \equiv f(r) \urcorner \equiv \llcorner r \lrcorner \ulcorner q \equiv f(r) \urcorner) \urcorner \urcorner$$

Ce résultat est fondamental et Lesniewski va l'utiliser. En effet, son intention est de proposer un système capable de représenter au moins le calcul classique des propositions, sur la base de l'unique terme de la biconditionnelle, et à l'aide de ses directives déductives, génétiques et constructives. Il proposera donc un système qui est d'une certaine manière l'expansion du système BIQ. En plus des axiomes A1 et A2 du système BIQ, la protothétique contient un troisième axiome qui possède cinq règles déductives; celles-ci sont notamment caractérisées par le fait que la quantification peut opérer sur une variable d'une quelconque catégorie sémantique, pour autant que cette catégorie ait été préalablement introduite dans le système.

A3 : $\llcorner gp \lrcorner \ulcorner \llcorner f \lrcorner \ulcorner g(pp) \equiv (\llcorner r \lrcorner \ulcorner (f(rr) \equiv g(pp)) \urcorner \equiv \llcorner r \lrcorner \ulcorner f(rr) \equiv g(p \equiv \llcorner q \lrcorner \ulcorner q \urcorner p) \urcorner) \urcorner \equiv \llcorner q \lrcorner \ulcorner g(qp) \urcorner \urcorner$

Cet axiome contient en puissance:

a) *The principle of bivalency expressed by equivalende (biconditionnelle) and variable functors for two arguments.*

b) *Some forms of the law of extensionality for propositions which together with* A1 *et* A2 *enable us to obtain a complete propositional calculus.* [SOBOCINSKI 1960: 56-57].

Quant aux directives, il est hors de propos d'en proposer ici une explicitation formalisée. Je me contenterai donc d'en esquisser l'esprit.

La directive de détachement et celle de substitution possèdent un caractère déductif que je qualifierai de technique, en ce sens q'elles permettent uniquement une extension logique du système, sans possibilité d'inscrire des termes nouveaux ou des catégories syntaxico-sémantique nouvelles.

La directive de substitution permet une expansion inscriptionnelle. Elle offre notamment, comme dans le système BIQ, la possibilité d'inscrire de nouvelles formes variables sans obliger à référer à un ensemble de substitution préalablement déterminé. La quantification porte sur tout terme de n'importe quelle catégorie issue des deux catégories primitives (S) et (S/SS), poir autant qu'elles aient été préalablement introduites par définition dans le système.

La directive de définition, de loin la règle déductive la plus intéressante, est l'élément fondamental, qui règle le développement du système en termes de constantes et de catégories syntaxico-sémantiques. Sur la base de deux catégories primitives, elle permet d'accéder à la définition d'une quelconque constante, et partant d'une telle inscription, d'introduire toute catégorie pour autant qu'un processus constructif ait été respecté. Le pouvoir de cette directive dépasse, et de fort loin, la simple réalisation classique de l'ensemble des définitions des opérations unaires et binaires: si le système comporte, par exemple, les catégories (S), (S/S) et (S/SS), il est alors possible de définir une constante de la catégorie (S/(S/S)/(S/SS)), et même des constantes de catégories dites paramétrées: ((S/S)/S).

Enfin, la protothétique connaît une directive dite d'extensionnalité. Celle-ci garantit l'exhaustivité des constantes pour toute catégorie sémantique que le système pourrait comporter, hormis celle des propositions; ce résultat étant garanti par l'axiome A3. Je pense que la protothétique est le système axiomatique le plus riche et le plus complet de la logique des propositions. Sur la base de deux seules catégories sémantiques primitives et d'une seule constante, il permet d'élaborer un édifice logique d'une subtilité et d'une richesse prodigieuses. Une telle théorie possède en outre des propiétés qui l'apparentent aux langues naturelles:

- Le langage se développe de manière constructive et génétique.
- le langage s'accorde de son prope développement et "crée" ses propes opérateurs.
- Toute extension du langage est contextuellement déterminée.
- Les définitions ne sont pas uniquement des abréviations, mis sont porteuses d'idées nouvelles.
- Toute forme n'est pas univoquement déterminée. Elle l'est de manière contextuelle et permet ainsi d'éliminer toute ambiguïté et de représenter la polysémie.

...in Lesniewski as in natural languages, expressions of the some

> *form can enjoy a variety of significance. But these directives do not merely reduce the ambiguity latent in using analogous forms of expression within the same language, they eliminate ambiguity.* [CANTY 1969: 458].

UNE ILLUSTRATION DU POUVOIR GENETIQUE DE LA DEFINITION

Leśniewski ne s'est pas arrêté à cette brillante réalisation. Il a également développé un système logique capable, entre autres choses, de représenter le parler distributif. Ce système a por nom "ontologie" et c'est à partir de lui que j'exposerai le caractère génétique de la définition. L'ontologie est un développement de la protothétique [LESNIEWSKI 1930]. Elle possède un axiome suplémentaire A4 qui contient un unique foncteur constant primitif, l'epsilon ε (qu'il ne faut pas confondre avec la copule d'appartenance de Russell). Cette copule possède une interprétation voisine de celle de certaines langues indo-européennes. Elle opère sur deux arguments qui sont de la catégorie des noms et forme ce que l'on appelle la propositttion singulière: a ε b. Celle-ci peut être lue de manière présémantique: le *a* est un des *b*. Par cet axiome, l'ontologie contient donc en plus des deux catégories primitives de la protothétique, deux nouvelles catégories syntaxico-sémantiques: celle des noms (N), ainsi que celle que supporte le nouveau foncteur constant ε; il s'agit de la catégorie des foncteurs formateurs de propositions à deux arguments nominaux (S/NN). Cet axiome prend la forme:

$$
\begin{aligned}
\text{A4: } \lfloor ab \rfloor \ulcorner (a\ \varepsilon\ b) \equiv (\lfloor \exists\ c \rfloor \ulcorner c \varepsilon a \urcorner) \wedge \\
\lfloor dc \rfloor \ulcorner d \varepsilon a \wedge c \varepsilon a) \supset (c \varepsilon d) \urcorner \wedge \\
\lfloor d \rfloor \ulcorner d\ \varepsilon\ a \supset d \varepsilon b \urcorner \urcorner
\end{aligned}
$$

On peut lire cet axiome ainsi:

"quels que soient *a* et *b*, *a* est un des *b* si et seulement si:

- il existe *c* et *c* est *a*
- quels que soient *d* et *c*, si *d* est *a* et *c* est *a* alors *c* est *d*
- quel que soit *d*, si *d* est *a* alors *d* est un des *b*".

La première conjonction inscrit l'exixtence de *a*, la deuxième l'unicité de *a*, enfin la troisème exprime une propiété de "convergence": Tout ce qui est *a* est également *b*. Une réalisation logiquement valide de cette proposition singulière pourrait être la proposition suivante:

Aristote est un des philosophes de l'antiquité.

L'ontologie possède sept directives déductives. Elles supportent les mêmes propiétés génétiques et constructives que celles de la protothétique. Elles permettent d'accéder à une organisation de thèses logiques dans lesquelles peuvent être représentées toute constante ainsi que toutes catégories conçues sur la base des foncteurs constants primitifs et des catégories primitives. Cet ensemble est illimité, mais à chaque étape de sa construction, il contient un nombre fini de constantes et donc de catégories sémantiques. Rappelons que tout ce qui est construit l'est sur la base de ce qui a été préalablement élaboré, que ce soit du point de vue des thèses logiques ou du point de vue inscriptionnel et catégoriel.

Cette théorie m'importe directement pour illustrer le pouvoir génétique de cette approche formelle. A plusieurs reprises, j'ai attribué à la directive de définition un pouvoir génétique. Je l'ai fait sans nuance et je voudrais maintenant préciser davantage cette qualité.

Les théories exposées ici possèdent un procédé définitoire interne: toute définition est exprimée à l'aide de la biconditionnelle et conçue sur la base des foncteurs primitifs ainsi que des foncteurs et catégories que le système connaît actuellement. En exploitant notamment cette directive, il est possible d'étendre l'ensemble des thèses primitives de manière à obtenir des ensembles structurés de thèses. Tel ensemble représentera la syllogistique, tel autre la théorie des propiétés ou des relations. Tel autre encore le calcul des prédicats du premier ordre avec identité, le calcul booléen, ..., que sais-je? Axiomes et directives de l'ontologie contiennent donc les éléments essentiels propres à la génération de systèmes extrêmement divers. Certains peuvent posséder une relation hiérarchique entre eux, d'autres peuvent être équivalents. Enfin, d'autres encore peuvent diverger dans leur pouvoir d'exprimer des structures logiques.

Dans la perception de telles expansions, certaines thèses-definitions peuvent apparaître comme porteuses de la volonté de marquer explicitement le rôle opératoire particulier d'une organisation complexe:

$\llcorner ab \lrcorner \ulcorner (a \varepsilon b) \equiv (a \varepsilon b \wedge b \varepsilon a) \urcorner$ -identité faible

$\llcorner ab \lrcorner \ulcorner a \varepsilon \sim \langle b \rangle \equiv (a \varepsilon a \wedge \sim (a \varepsilon b)) \urcorner$ -négation nominale

En ce sens, cette directive permet une faible expansion génétique. Mais la directive de définitions permet davantage. En effet, il est possible d'inscrire des définitions dont on dit qu'elles sont *créatives*: grâce à elles, il est possible de démontrer des thèses qui ne contiennent pas le terme défini et qui ne sauraient être démontrées sans lui [RICKEY 1974, 1978]. Ces définitions constituent donc une étape essentielle dans le développement d'un système particulier. En ce sens, elles sont fondamentalement génétiques.

Considérons un exemple, il est de nature à mieux faire comprende cette nature génétique. Soit la définition suivante:

$$a \quad (a\varepsilon \Lambda) \equiv (a \ \varepsilon \ a \ \Lambda \ \sim (a\varepsilon a))$$

Il s'agit de la définition d'un terme constant de la catégorie des noms (N). On l'appelle généralement le nom contradictoire ou le nom vide. Il s'agit d'un nom qui ne dénote rien. Grâce à cette définition, il est alors possible de déduire les thêses suivantes:

$$\llcorner a \lrcorner \ \ulcorner a\varepsilon a \urcorner \qquad \text{et} \qquad \sim a \ \ulcorner a\varepsilon a \urcorner$$

Les conséquences d'une telle définition sont particulièrement intéressantes. En utilisant une base axiomatique extrêmement modeste, à l'aide de directives dont le caractère génétique est marqué, il est possible de déployer progressivement un ensemble de thèses qui caractérisent les propiétés d'une logique libre dont la notion centrale serait celle d'une relation d'identité qui ne serait pas totalement réflexive [LEJEWSKI 1967]. Une définition créative permet donc une expansion non seulement inscriptionnelle et catégorielle, mais surtout, elle offre la possibilité d'un développement de la structure logique que nous ne pourrions pas atteindre sans elle.

Constrairement aux systèmes classiques dans lesquels la base axiomatique détermine totalement la puissance du système, les théories de Leśniewski permettent, par le biais des définitions créatives, des expansions particulières. Dans le processus de la construction de tel ou tel système, la possibilité qui nous est offerte d'inscrire une définition créative correspond à la liberté d'introduire, dans la perspective de l'expansion d'une structure logique, un nouvel axiome. Celui-ci est indépendant des axiomes primitifs et conserve la consistance du système en élaboration. Une thèse définition qui est créative est "un axiome dissimulé".

EPILOGUE

On le voit, une telle conception des systèmes logiques a des conséquences nombreuses. Dans son très bel article "Gaps between logical theory and mathematical practice", Corcoran [1973] s'interroge sur la - capacité de la logique classique du premier ordre à représenter la pratique effective du mathématicien dans ses démarches déductives. Dans cette perspective, Corcoran dresse une liste des *lacunes* (gaps) inhérentes à la logique classique. Celles-ci peuvent être grammaticales, déductives ou absolues.

Il note tout d'abord que le mathématicien utilise souvent des opérateurs primitifs qui ne sont pas ceux de l'axiomatique classique. De plus, il constate l'usage d'opérateurs multilinéaires qui n'apparaissent pas en logique. Il s'agit de *lacunes grammaticales par défaut* [grammatical defects]. Les systèmes de Leśniewski échappent à cette critique. Il contiennent en effet une directive qui permet d'inscrire des définitions d'une quelconque catégorie syntaxico-sémantique et d'une forme unaire, binaire, multilinéaire, multicatégorielle pu encore paramétrée. Ces définitions ne sont pas des conventions, mais des thèses du système: en outre l'operateur défini peut apparaître ultérieurement comme un opérateur primitif.

Il existe également des *lacunes grammaticales par excès* [grammatical excesses]. L'expression suivante, qui est un théorème de la logique classique, en est un exemple:

$$(\exists y)(\exists z)(\exists x)(o=o)$$

"[*This*] *is a sentence ... which would never 'be said' by a mathematician*". [CORCORAN 1973: 38]. Or, une telle expression ne saurait être démontrée dans la logique de Leśniewski.

L'absence de *règle* de définition est une *lacune déductive par défaut* [deductive defects]. Il n'est en effet guère satisfaisant de considérer une opération aussi fondamentale que la définition comme une simple commodité d'écriture. Lorqu'un mathématicien énonce une définition, il arrive fréquemment que celle-ci soit porteuse d'une idée nouvelle, qu'elle soit même un élément fondamental susceptible de conditionner l'ensemble de sa démarche. J'ai montré que Leśniewski avait pris soin de doter ses systèmes d'une réelle directive déductive de définition, et que celle-ci est même formalisée.

Partons d'une citation de Corcoran pour aborder le champ des *lacunes absolues* [absolute gaps].

It is axiomatic in empiricist epistemology that one cannot prove existential statements by logic alone [...] *and yedt the following is a logical truh in standard logic.*

$$(\exists x)(x=x)$$

This reflects the fact that standard semantic presupposes nonnull universe of discourse. Empiricists can be ignored in the present context but mathematical practice cannot and the fact that mathematicians fell the need to explicititly assume non-emptiness of universes [...] *indicates that this presupposition is not made in practice.* [CORCORAN 1973: 43].

La logique classique standard n'est pas une *logique universelle.* Cet état des choses embarassait déjà Russell qui, en 1919, écrivait ceci:

Parmi les mondes possibles, au sens leibnizien, il y en aura ayant un, deux, trois ... individus. Il n'apparaît même pas de nécessité logique pour qu'il doive y avoir un individu pour que le monde puisse ... exister.

Il ajoute en note:

Dans les Principia Mathematica les propositions primitives sont telles qu'elles permettent d'inférer qu'un individu au moins existe. Mais aujourd'hui je considère cela comme un défaut de pureté logique. [1970: 241-242, trâd. de 1919].

Contrairement à la logique classique, celle de Leśniewski est universelle.

D'autre part, la logique classique présuppose que tout terme individuel est dénotant. En ce sens, elle n'est pas une logique libre. Il s'agit ici d'une autre lacune absolue. Comme nous l'avons montré, l'ontologie de Leśniewski permet l'usage de termes de la catégorie syntaxico-sémantique de noms, et ceux-ci peuvent être dénotants [dénoter un, voire plusieurs individus], ou non dénotants [ne dénoter aucun individu]. De plus, elle offre un réel moyen d'exprimer l'existence. Enfin, la quantification est dissociée de l'expression de l'existence; cette distinction est importante et "thereby absolishing certain confusions which vitiate some contemporary logics" [HENRY 1972: 28-29].

Pour conclure cet article, considérons une dernière lacune. Il s'agit de celle qui provient de l'applicabilité universelle de tout prédicat. L'exemple de Corcoran est ici particulièrement illustratif:

...the predicate 'prime' is true of two, false of four and not applicable to pi. This means that such predicate has a range of applicability within which it holds true or false and outside of which it does not hold at all. Thus a sentence can fail to be true without being false and it can fail to be false without being true. Yet the following is logically true in standard logic,

$$(\forall x)(Px \vee \sim Px)$$

This reflects the fact that standard semantic presupposes universal ranges of applicability for all predicates. [CORCORAN 1973:43].

Dans la perspective de la sémantique classique, ne pas appartenir à l'extension d'une propriété, c'est nécessairement appartenir à son extension complémentaire. Tout se passe comme s'il n'était pas possible de déterminer, dans l'univers de référence [un univers de connaissance] considéré, des champs particuliers de déterminations d'objets. Il y aurait cependant quelque intérêt à distinguer, dans un univers particulier, les déterminations d'objects qui s'appliquent de celles qui ne s'appliquent pas aux objets.

Ainsi dans l'univers de l'arithmétique élémentaire, il y a des raisons de penser les objetc '2' et '4' comme associés sémantiquement à la notion *être premier - être non premier*; il n'y a toutefois aucune raison d'associer pi à la notion *être permier - être non premier*. Considérons les deux schémas suivants:

<u>Schéma 1</u> [schéma classique]

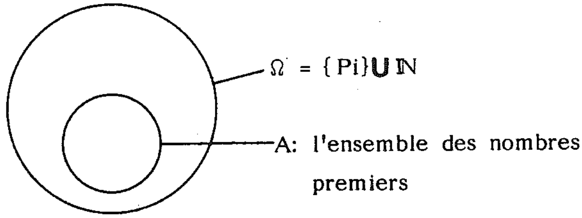
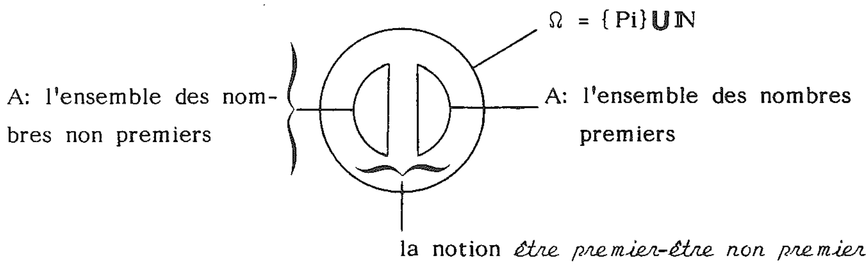


Schéma 2



Dans le schéma 1, la propriété *être non premier* possède la même extension que celle *ne pas être premier*. Ces deux propriétés sont confondues. L'absence d'une représentation effective de la propriété duale attachée à la propriété *être premier* conduit à associer à pi une notion qui ne lui est pas applicable. La schéma 2 met en évidence une représentation dans laquelle la notion *être premier - être non premier* n'appartient pas au champ des déterminations de l'object pi. Celui-ci n'est plus alors associé à une notion qui lui est pas applicable. Le schéma 2 est donc l'expression de une représentation dans laquelle il est possible d'incrire toute notion, c'est-à-dire tout couple de propriétés duales, ainsi que de marquer si telle notion est associée ou non associée à un objet. Cette conception ne restreint en aucune manière l'activité d'evaluation qui, elle, est d'une autre nature, et qui permet de vérifier si l'objet considéré satisfait à telle ou telle propriété.

Or, la transformation du schéma 1 au schéma 2 est possible pour autant que l'on distingue la négation propositionnelle (S/S) de la negation nominale (N/N). Il faut, pour cela, disposer d'un système logique dans lequel on puisse effectivement définir l'opérateur de négation nominale. Aujoutons qu'il n'y a aucune raison pour que cette négation remplisse la même rôle que celle qui est associée au tiers exclu. Les deux propositions suivantes ne sont donc pas équivalentes:

Proposition I

quel que soit a, soit il est le cas que a possède la propriété P,
soit il n'est pas le cas que a possède la propriété P,

<u>Proposition II</u>

quel que soit *a*, soit il est le cas que *a* possède la propriété *P*
soit il est le cas que *a* possède la propriété non *P*.

La proposition I est un théorème; ella exprime le principe du tiers exclu. Par contre, la proposition II ne saurait être un théorème. Les propositions suivantes sont de nature à mettre en évidence cette distinction fondamentale:

a) Soit 'pi' est un nombre premier, soit il n'est pas le cas que 'pi' est un nombre premier et

b) soit 'pi' est un nombre non premier, soit il n'est pas le cas que 'pi' est un nombre non premier

son deux propositions *logiquement valides*,

c) soit '4' est un nombre premier, soit '4' es un nombre non premier est une proposition *valide sur* Ω

d) soit 'pi'est un nombre premier, soit 'pi'est un nombre non premier est une proposition qui *n'est valide sur* Ω.

Grâce à la directive de définition, l'ontologie de Lesniewski permet de disposer d'une négation nominale et, partant, de parer aux difficultés décrites ci-dessus.

Dans le langage du système de Lesniewski, on peut caractériser cette manière d'organiser un fragment de monde. Les thèses suivantes en sont un témoignage:

- $\sim \llcorner ab \lrcorner \ulcorner \sim(a\varepsilon b) \supset a\varepsilon \sim<b> \urcorner$
- $\llcorner ab \lrcorner \ulcorner a\varepsilon b \supset (\sim(a\varepsilon b) \supset \llcorner cd \lrcorner \ulcorner c\varepsilon d \urcorner) \urcorner$
- $\llcorner ab \lrcorner \ulcorner a\varepsilon b \supset (a\varepsilon \sim<b> \supset \llcorner cd \lrcorner \ulcorner c\varepsilon d \urcorner) \urcorner$
- $\llcorner ab \lrcorner \ulcorner (a\varepsilon b \ \mathrm{w} \ a\varepsilon \sim<b>) \vee \sim(a\varepsilon b \ \mathrm{w} \ a\varepsilon \sim<b>) \urcorner$

Cette dernière thèse est l'expression de la loi du tiers exclu dans laquelle l'applicabilité ou la non-applicabilité d'une notion à un objet est prise en compte.

Cette illustration n'est qu'un exemple d'une 'lacune comblée par le subtil parler logique élaboré par Lesniewski. La directive de définition y est déterminante, et grâce à elle, on peut montrer bien davantage encore. Un article à venir y sera consacré.

BIBLIOGRAPHIE

CANTY, J.T. [1969]: "Ontology: Leśniewski's Logical Language", *Foundations of Language*, 5, 455-469.

CORCORAN J. [1973]: "Gaps between Logical Theory and Mathematical Practice", in M. Bunge (ed.): *The Methodological Unity of Science*. Dordrecht, Reidel Pub. 23-49.

HENRY D.P. [1972]: *Medieval Logic and Metaphisics. A Modern Introduction*. London, Hutchinson.

LEJEWSKI C. [1967]: "A Theory of Non-Reflexive Identity and its Ontological Ramifications", in *Grundfragen der Wissenschaften und ihre Wurzeln in der Metaphysik*. München, Pustet, 65-102.

LEŚNIEWSKI S. [1916]: "Postawy ogólnej teoryi mnogości. I. [Les fondements d'une théorie générale des ensembles]. *Prace polskiego kola naukowego w Mowskwie. Sekcyz matematycznoprzyrodniza* 2.

LEŚNIEWSKI S. [1929]: "Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik", *Fundamenta Mathematicae*, 14, 1-81.

LESNIEWSKI [1930]: "Ueber die Grundlagen der Ontologie". *Comptesrendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres Varsovie*, classe III, 23, 111-132.

MIEVILLE D. [1984]: *Un développement des systèmes logiques de Stanislaw Leśniewski. Protothétique, Ontologie, Méréologie.* Berne, Francfort/M, New York, Peter Lang.

MIEVILLE D. [1985]: "Un aperçu des caractéristiques et de l'esprit des systèmes logiques de Stanislaw Leśniewski", *Dialectica*, vol. 35, nº 3, 165-179.

MIEVILLE D. [1987]:"Remarques sur le traitement de la référence dans les systèmes logiques", *Actes du Colloque sur le référence*. Université de Neuchâtel, Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques, nº 53 [19p].

PIAGET J. [1972]: *Essai de logique opératoire*. Paris, Dunod.

RAGGIO R. [1970]: "L'évolution de la notion de systèmes axiomatique", *L'Age de la science*, vol. III, nº 3, 207-224.

RICKEY V.F. [1972]: "Axiomatic Inscriptional Syntax, part I: General Syntax", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 13, 1.33.

RICKEY V.F. [1973]: "Axiomatic Inscriptional Syntax, part II: The Syntax of Protothetic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 14, 1-52.

RICKEY V.F. [1974]: "Creative Definitions in Propositional Calculi", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 16, 273-194.

RICKEY V.F. [1977]: "A Survey of Leśniewski Logic", *Studia Logica*, 36, 407-426.

RICKEY V.F. [1978]: "On Creative Definitions in First Order Functional Calculi", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 19, 307-309.

RUSSELL B. [1956]: *The principles of Mathematics*. London, G. Allen & Unwin [1ère éd. 1903].

RUSSELL B. [1970]: *Introduction à la philosophie mathématique*. Paris, Payot. [Trad. 1919].

SOBOCINSKI B. [1960]: "In the Single Axioms of Protothetic I, II, III", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 1, 52-73; 2, 111-126, 129-148.

TARSKI A. [1972]: *Logique, sémantique, métamathématique*. 1923-1944. Paris, A. Colin, vol. 1.

ZERMELO E. [1908]: "Untersachungen über die Grundlagen der Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, 65, 261-281.

Centre de Recherches Sémiologiques
Université de Neuchâtel.