LOGICA Y ONTOLOGIA

Ignacio JANE

ABSTRACT

In this paper we discuss the way logical consequence depends on what sets there are. We try to find out what set-theoretical assumptions have to be made to determine a logic, i.e., to give a definite answer to whether any given argument is correct. Consideration of second order logic -which is left highly indetermined by the usual set-theoretical axioms- prompts us to suggest a slightly different but natural notion of logical consequence, which reduces second order logic indeterminacy without interfering with first order logic.

1

La noción lógica fundamental es la relación de consecuencia, que se establece entre conjuntos de sentencias y sentencias de un lenguaje. Si bien es una relación entre objetos lingüísticos, está firmemente anclada en el mundo extralingüístico. En efecto, que una sentencia α sea consecuencia de un conjunto de sentencias Σ significa que α es verdadera en todas las estructuras que satisfacen Σ; por tanto, que α sea consecuencia de Σ depende de que existan o no estructuras que satisfagan Σ pero no α. La lógica, pues, no es independiente de la ontología.

En este artículo voy a ocuparme únicamente de lenguaje de primer y segundo orden. Además, voy a limitar mi consideración a la relación de consecuencia entre conjuntos finitos de sentencias y sentencias (o, equivalentemente, entre sentencias y sentencias). Esta es la relación a que apelamos a la práctica de la lógica para justificar la corrección de argumentos, ya que un argumento

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta},$$

con premisas α_1, ..., α_n y conclusión β, es correcto si y sólo si β es consecuencia de $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$. La restricción a conjuntos finitos de sentencias nos permite reducir la noción de consecuencia a la de validez lógica: β es consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ si y sólo si la sentencia

$$(\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$$

es lógicamente válida, es decir, es verdadera en toda estructura.

He aquí una observación que, aunque imprecisa e insuficientemente matizada (pues, por ejemplo, la verdad de una sentencia en una estructura puede no depender únicamente de la sentencia y la estructura), es pertinente a la relación entre lógica y ontología: la pobreza ontológica redunda en la abundancia de verdades lógicas. En otras palabras, cuantas menos estructuras -más propiamente, cuantos menos tipos de estructuras- haya, mayor será el catálogo de verdades lógicas. (En un mundo sin estructuras toda sentencia sería una verdad lógica). Esto tiene una consecuencia metodológica interesante: Para descubrir el compromiso ontológico de una lógica debemos fijarnos no tanto en sus verdades lógicas (o en los argumentos que la lógica da por correctos) como en aquellas sentencias que no son lógicamente válidas (y en sus argumentos incorrectos).

Consideremos un ejemplo. Boolos, en [2] pág. 513, atacando la posición de Quine sobre la lógica de segundo orden, nos recuerda que la sentencias de segundo orden $\exists X\ \exists x\ \exists y\ (Xx \wedge Xy \wedge x \neq y)$ -que será verdadera en una estructura si y sólo sí su dominio posee un subconjunto de por lo menos dos elementos- no es lógicamente válida. De ello parece seguirse, dice, "... que la lógica de segundo orden no está comprometida con la existencia de siquiera un conjunto de dos elementos". Más adelante (pág. 520) es más explícito: "En el caso de la lógica de segundo orden, ..., el compromiso es extraordinariamente modesto; el conjunto vacío es el único conjunto con cuya existencia la lógica de segundo orden puede considerarse comprometida". La razón de este compromiso es que $\exists X\ \forall x\ \neg Xx$ es universalmente válida y que, en cualquier estructura, el conjunto que satisface $\forall x\ \neg Xx$ es el conjunto vacío.

Pero es falso que la lógica de segundo orden no esté comprometida con la existencia de conjuntos de dos elementos. De hecho la lógica de primer orden ya lo está. Consideremos la sentencia de primer orden

(1) $$\exists x \; \exists y \; (x \neq y).$$

(1) 'dice' que hay dos objetos. Más precisamente, una estructura $\mathfrak{A}$ satisfará (1) sí y sólo sí el dominio de $\mathfrak{A}$ posee por lo menos dos elementos. Dado que hay estructuras con universo de un solo elemento, es claro que (1) no es lógicamente válida. Esto no nos dice nada acerca del compromiso de la lógica de primer orden con la existencia de conjuntos de dos elementos. Lo que sí nos lo dice es que la negación de (1), o, equivalentemente, la sentencia

(2) $$\forall x \forall y \; (x = y)$$

no es lógicamente válida.

En efecto: afirmar que (2) no es lógicamente válida es afirmar que hay una estructura en la cual (2) es falsa; es decir, que hay una estructura cuyo dominio posee por lo menos dos elementos. En consecuencia, negar la validez lógica de (2) es afirmar que hay dos elementos de dos elementos.

Dado que para cada entero positivo n hay una sentencia de primer orden, δ_n, que es verdadera en una estructura si y sólo sí su dominio tiene a los sumo n elementos, la lógica usual de primer orden (y, por tanto, la de segundo orden) está comprometida con la existencia de conjuntos finitos de cualquier número de elementos. Si no lo estuviera, alguna de las sentencias δ_n sería lógicamente válida. Pero ninguna lo es. Si necesitamos convencernos de ello podemos apelar al teorema de completud, que nos permite caracterizar combinatoriamente las verdades lógicas de primer orden como aquellas sentencias derivables sin premisas en un cálculo deductivo (por ejemplo, en el cálculo de cualquier manual de lógica razonable). Ninguna de las δ_n lo es.

2

Las presuposiciones ontológicas de la lógica de primer orden no son explícitas. En este aspecto, por lo menos, se diferencia la lógica de una teoría. En teoría de conjuntos, la existencia de conjuntos de, por ejemplo, quince o más elementos se expresa explícitamente. Hay una sentencia del lenguaje conjuntista que lo dice. En lógica no. En lógica de primer orden la existencia de conjuntos de quince o más elementos es colegible de la fórmula δ_{14} no es lógicamente válida.

Esto, sin embargo, es lo que debe ser. No nos dirigimos a la lógica en busca de verdades sobre algún tema; para ello acudimos a las distintas teorías. La lógica la usamos como instrumento para inferir verdades desconocidas de otras ya conocidas. No apelamos a la lógica de primer orden para concluir que hay conjuntos de quince elementos. Todo lo contrario. Afirmamos que δ_{14} no es una verdad lógica porque admitimos la existencia de conjuntos de quince o más elementos. Las presuposiciones ontológicas de una lógica actúan sobre ella fijando su relación de consecuencia y, con ello, trazando la línea divisoria entre los argumentos correctos y los incorrectos, entre las sentencias lógicamente válidas y las que no lo son.

Habitualmente no especificamos las presuposiciones ontológicas al describir una lógica. Con ello, sin embargo, corremos el riesgo de no describir lógica alguna, o de hacerlo sólo parcialmente. No olvidemos que los fundamental en lógica no es el lenguaje, sino la relación de consecuencia. Así, mientras haya un argumento cuya corrección o incorrección dependa de una decisión ontológica que no hayamos tomado, mientras haya una sentencia cuya validez lógica esté en el aire por no haber decidido si hay o no estructuras de cierto tipo, no habremos determinado totalmente la lógica. Tendremos, más bien, un manojo de distintas lógicas potenciales que se actualizarán al tomar los compromisos ontológicos oportunos.

No estoy afirmando, ni siquiera sugiriendo, que una lógica no estará determinada mientras no lo esté la ontología. Esto es manifiestamente falso. Afirmo, simplemente, que hay algunas cuestiones ontológicas que es preciso resolver -o que hay que dar por resueltas- para la determinación de la lógica. Un mínimo de decisiones necesarias lo da el siguiente (y obvio) principio: Para que una lógica esté determinada hay que tomar partido sobre la existencia o inexistencia de estructuras con propiedades expresables en el lenguaje. Es decir, si P es una propiedad de estructuras expresable en el lenguaje de la lógica; si, digamos, σ es una sentencia cuya verdad en la estructura $\mathfrak{A}$ es equivalente a que $\mathfrak{A}$ posea la propiedad P, entonces debe estar determinado si hay o no estructuras que posean la propiedad P. De que las haya dependerá la validez lógica de la sentencia $\neg\sigma$.

3

Si bien la finitud -y, por tanto, la infinitud- no es una propiedad expresable en lenguaje de primer orden, para determinar la lógica de primer orden debemos también comprometernos acerca de la existencia o de la inexistencia de conjuntos infinitos. Esto es así porque hay fórmulas de primer orden cuya validez lógica es equivalente a la inexistencia de conjuntos infinitos (aunque no hay ninguna cuya validez sea equivalente a la existencia de conjuntos infinitos). Consideremos, por ejemplo, la sentencia

$$(3) \qquad \forall x \, \forall y \, (fx = fy \to x = y) \to \forall x \, \exists y \, (fy = x).$$

(3) será verdadera en una estructura con dominio A si siempre que f se interprete como una función inyectiva de A en A, se interpreta también como una función sobreyectiva. Dado que todo conjunto infinito A admite una función inyectiva de A en un subconjunto propio (de hecho, la existencia de una función tal es una de las caracterizaciones del concepto de infinitud), todo conjunto infinito es el dominio de una estructura que no satisface (3). Por otro lado, toda estructura finita (en la que, desde luego, (3) sea interpretable) satisfará (3). Así, (3) será lógicamente válida si y sólo sí todo conjunto es finito.

En consecuencia, denegar a (3) la categoría de validez lógica es equivalente a admitir la existencia de conjuntos infinitos.

Observemos que la igualdad no es necesaria para obtener fórmulas cuya validez lógica sea equivalente a la inexistencia de conjuntos infinitos (aunque sí es necesaria para construir fórmulas que sean satisfechas sólo en dominios finitos -las δ_n, por ejemplo-). Una fórmula tal, sin igualdad, es

$$(4) \qquad \forall x \, \neg Rxx \wedge \forall x \, \forall y \, \forall z \, (Rxy \wedge Ryz \to Rxz) \to \exists x \, \forall y \, \neg Rxy,$$

ya que afirmar la validez universal de (4) es afirmar que todo orden (parcial) estricto posee un elemento maximal.

La lógica usual de primer orden está, de hecho, comprometida con la existencia de conjuntos infinitos. De nuevo, podemos convencernos de ello apelando al teorema de completud: Ni (3) ni (4) son lógicamente válidas, ya que no son derivables sin premisas en los cálculos deductivos usuales.

Podemos, desde luego, por razones filosóficas o de otra índole, negarnos a admitir la existencia de conjuntos infinitos. Si lo hacemos, la relación de consecuencia de la lógica usual de primer orden no será la relación de consecuencia que corresponde a nuestra situación. Ahora, por ejemplo, (3) y (4) serán verdades lógicas que la lógica usual no reconoce. O, para de un modo ligeramente distinto, los argumentos

$$(5) \qquad \frac{\forall x\ \forall y\ (fx = fy \rightarrow x = y)}{\forall x\ \exists y\ (fy = x)}$$

y

$$(6) \qquad \frac{\begin{array}{c}\forall x\ \neg Rxx \\ \\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)\end{array}}{\exists x \forall y\ \neg Rxy}$$

serán correctos, pero no habrá, en ninguno de los cálculos deductivos usuales, ninguna derivación de su conclusión a partir de las premisas.

Fijemos uno cualquiera de estos cálculos deductivos. Llamémosle $\mathcal{C}$. Al negar la existencia de conjuntos infinitos, deja de ser completo. Sin embargo, $\mathcal{C}$ es aún correcto, es decir, las sentencias derivables en $\mathcal{C}$ sin premisas continúan siendo lógicamente válidas y los argumentos legitimados por $\mathcal{C}$ son argumentos correctos. ¿No podemos, entonces, ampliar $\mathcal{C}$ añadiendo nuevos axiomas lógicos -por ejemplo, del tipo (3) ó (4)- o nuevas reglas de inferencia -como (5) o como (6)- hasta obtener un cálculo correcto y completo adecuado a nuestra nueva situación?

La respuesta es negativa. Puede mostrarse que no hay ningún procedimiento efectivo para generar las sentencias verdaderas en toda estructura finita no vacía (más precisamente, el conjunto de estas sentencias no es recursivamente enumerable). Esto es equivalente a decir que no hay ningún cálculo tal que las sentencias derivables en él sin premisas sean exactamente las verdades lógicas de un universo sin conjuntos infinitos[1].

4

Podemos, pues, hablar de dos lógicas de primer orden. La primera es la lógica de un universo rico en conjuntos infinitos; la segunda es la lógica de un mundo, todas cuyas estructuras son finitas. Se trata, ciertamente, de *dos* lógicas: aunque su lenguaje sea el mismo, sus relaciones de consecuencia son distintas. Ahora bien, la lógica es, en gran medida, un instrumento conceptual para obtener inferencias correctas. Así, si estamos interesados en la matemática clásica, con su gran variedad de estructuras infinitas, no hay duda de que la lógica usual es la apropiada. La situación puede no ser tan clara si nuestro razonamiento versa, por ejemplo, sobre idealizaciones de sistemas físicos. Quizá todas las estructuras que tomemos en consideración, explícita o implícitamente, sean finitas. En tal caso, la lógica de primer orden usual no reconocerá inferencias que deberíamos dar por correctas. De todos modos, si estamos dispuestos a rechazar -por lo menos en este ámbito- la existencia de estructuras infinitas, sabemos muy bien cuál es nuestra lógica: la lógica de lo finito que admite como válidas las sentencias (3) y (4).

En cualquier caso, sin embargo, debemos comprometernos con la existencia o la inexistencia de conjuntos infinitos. De no hacerlo, nuestra lógica no estaría completamente determinada: habría argumentos -e.g. (5) ó (6)- sobre cuya corrección o incorrección no se pronunciaría; sentencias -como (3) ó (4)- de las que se abstendría de decir si son verdades lógicas o no.

Que una lógica esté determinada no significa que podamos *decidir* (es decir, que dispongamos de un método efectivo para determinar) si una sentencia es lógicamente válida o no lo es; en otras palabras, no significa que el conjunto de sus verdades lógicas sea recursivo. La lógica usual de primer orden está perfectamente determinada (una sentencia es lógicamente válida si y sólo sí admite una deducción sin premisas en el cálculo), pero es indecidible (no hay ningún algoritmo que nos permita determinar si admite una deducción tal). También la lógica de primer orden de lo finito está determinada (una sentencia es válida en esta lógica si y sólo sí es verdadera en todas las estructuras cuyo dominio es un conjunto infinito de números naturales) y tampoco es decidible.

Quisiera concluir este apartado con dos observaciones. La primera es que -además de los principios básicos de la teoría de conjuntos-la existencia o inexistencia de conjuntos infinitos es el único punto sobre el que hay que decidirse para determinar -en uno u otro sentido- la lógica de primer orden. La segunda es que hay una manera de salvar el teorema de completud y, por tanto, la determinación de la lógica de primer orden, sin necesidad de comprometerse con la existencia de conjuntos infinitos (e incluso negándola). Esto comporta, naturalmente, un cambio de semántica y, con ello, una redefinición de la relación de consecuencia. Se trata de generalizar la noción de estructura admitiendo también estructuras 'ideales', estructuras cuyo dominio no es un conjunto, sino una clase propia. Así, por ejemplo, la clase de Russell, $\{x: x \notin x\}$, la clase universal, $\{x: x = x\}$, o la clase OR de todos los ordinales son dominio de estructuras 'ideales'. Las definiciones de consecuencia y de verdad lógica se formulan como antes (verdad lógica es verdad en toda estructura), pero no significan lo mismo (la palabra 'estructura' ha cambiado de sentido). En este caso, aunque no nos pronunciemos sobre la existencia de conjuntos infinitos, aunque, incluso, postulemos que todo conjunto es finito, al no haber límite a la cardinalidad de los conjuntos finitos, el universo será infinito, al igual que toda clase propia.

Con estas clases propias infinitas pueden construirse suficientes estructuras para que toda sentencia no deducible en el cálculo $\mathcal{C}$ sea falsa en alguna estructura (real o 'ideal'). Así, la noción de sentencia lógicamente válida en este nuevo sentido coincide con la de sentencia deducible en cualquier cálculo usual. Esta lógica, pues, estará determinada.

5

Es conveniente expresar los presupuestos ontológicos de una lógica en términos de una clase mínima de estructuras que sea suficiente para fijar su relación de consecuencia. Digamos que una clase K de estrucutras es suficiente para determinar una lógica L si y sólo sí validez lógica para sentencias en el lenguaje de L es equivalente a verdad en todas las estructuras de K. En otras palabras, si y sólo sí toda sentencia verdadera en todas las estructuras de K es lógicamente válida. Por la reducción de la relación de consecuencia a validez lógica, si K es suficiente para determinar L y si β es verdadera en todas las estructuras de K que satisfacen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces β es consecuencia de $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Otro modo de expresar que K es suficiente para determinar L es: toda sentencia del lenguaje de L que sea satisfacible es satisfecha en alguna estructura de K.

Desde luego, la clase de todas las estructuras determina toda lógica. Lo interesante es ver sí, dada una lógica, hay clases relativamente simples suficientes para determinarla; o mejor, sí hay clases tales cuyos elementos son estructuras relativamente simples. Un criterio (algo tosco) de simplicidad puede ser la cardinalidad de los dominios de las estructuras; otro (más fino, pero no siempre aplicable), la complejidad definicional de sus relaciones y operaciones. La lógica de primer orden es determinable mediante clases de estructuras que son simples según cualquiera de estos dos criterios.

Por el teorema de Löwenheim-Skolen, toda sentencia de primer orden satisfacible es satisfecha en una estructura con dominio finito o enumerable. En consecuencia, la clase de todas las estructuras con dominio finito o numerable es suficiente para determinar la lógica de primer orden. Ahora bien, toda estructura con dominio numerable es isomorfa a una estructura cuya dominio es el conjunto, ω, de los números naturales y toda estructura con dominio finito es isomorfa a una estructura cuyo dominio es un segmento inicial de la serie de los números naturales, es decir, un conjunto de la forma $\{0, 1, ..., n\}$. Sea K la clase de todas las estructuras cuyo dominio es o bien ω o bien un segmento inicial de ω. Dado que estructuras isomorfas satisfacen las mismas sentencias de primer orden, toda sentencia de primer orden satisfacible es satisfecha en una estructura de K. Así, K es suficiente para determinar la lógica de primer orden.

K es todavía una clase relativamente compleja. Es cierto que los dominios de las estructuras de K son de una simplicidad extrema, pero esto no ocurre con sus relaciones y operaciones. Si A es un conjunto arbitrario de números naturales y R es una relación cualquiera en ω, las estructuras $\langle\omega, A\rangle$ y $\langle\omega, R\rangle$ están en K. En K, pues, hay estructuras tan complejas como cualquier subconjunto o relación en ω.

Hay patrones naturales para medir la complejidad de relaciones en el conjunto de los números naturales. Uno de ellos lo constituye la *jerarquía aritmética* de Kleene. El lugar más bajo de esta jerarquía (Δ^0_1) lo ocupan las relaciones recursivas. En el nivel inmediatamente superior se encuentran las relaciones recursivamente enumerables (Σ^0_1)

y sus complementos (Π_1^0); es decir, las relaciones k-arias ($k \geq 1$) de la forma

$$\exists n\ R(a_1, \ldots, a_k, n)$$

o de la forma

$$\forall n\ R(a_1, \ldots, a_k, n),$$

donde R es una relación recursiva. (Así $\Delta_1^0 = \Sigma_1^0 \cap \Pi_1^0$). En el tercer nivel se encuentran las relaciones de tipo Σ_2^0 ó Π_2^0, definidas respectivamente por condiciones de la forma

$$\exists n\ \forall m\ R(a_1, \ldots, a_k, n, m)$$

o de la forma

$$\forall n\ \exists m\ R(a_1, \ldots, a_k, n, m),$$

donde R es recursiva. En general (y con cierta imprecisión), las relaciones aritméticas son aquellas relaciones que se obtienen a partir de las relaciones recursivas por cuantificaciones sucesivas sobre los números naturales. Toda relación aritmética es de tipo Σ_n^0 ó $\Pi_n^0 (n \geq 1)$. Las de tipo Σ_n^0 son las expresables con n cuantificadores alternados ($\exists$, $\forall$), el más externo de los cuales es existencial; en las de tipo Π_n^0, el más externo de los cuantificadores es universal.

Que la jerarquía aritmética es realmente una jerarquía de complejidad se sigue de que para cada $n > 1$ hay una relación de nivel n que no está en ningún nivel inferior. Dos ejemplos pertinentes de conjuntos en la jerarquía aritmética son el conjunto de (números de Gödel de) las sentencias válidas en la lógica usual de primer orden y el correspondiente conjunto de la lógica de lo finito. El primero es Σ_1^0 pero no Π_1^0; el segundo es Π_1^0 pero no Σ_1^0. (En contrastre, el conjunto de verdades lógicas de segundo orden no pertenece a ninguno de los niveles de la jerarquía aritmética).

La importancia de esta jerarquía para nuestros propósitos de determinar la lógica de primer orden reside en lo siguiente: Toda sentencia de primer orden satisfacible es satisfecha en una estructura cuyas relaciones y operaciones se encuentran ya en el segundo nivel de jerarquía aritmética[2]. Más precisamente, si σ es una sentencia satisfacible de primer orden, entonces σ es satisfecha en una estructura de la forma

$$<A, R_1, ..., R_n, f_1, ..., f_m, a_1, ..., a_r>,$$

donde

(i) A es o bien el conjunto de los números naturales o bien un segmento inicial suyo y a_1, ..., a_r son elementos de A.

(ii) R_1, ..., R_n son relaciones tanto del tipo Σ_2^0 como del tipo Π_2^0.

(iii) las operaciones f_1, ..., f_m (vistas como relaciones) también son simultáneamente de los tipos Σ_2^0 y Π_2^0.

Sea $K^{\bullet}$ la clase de todas las estructuras. Por lo dicho $K^{\bullet}$ es suficiente para determinar la lógica de primer orden. $K^{\bullet}$ es una clase razonablemente simple: es numerable y sus estructuras son definibles a partir de relaciones recursivas con la ayuda de tan sólo dos cuantificadores. Así, pues, si bien es cierto que la lógica usual de primer orden está comprometida con la existencia de conjuntos infinitos, el hecho de que K^* sea suficiente para determinarla establece un límite bastante bajo a la complejidad de los conjuntos requeridos.

6

Otro modo de calibrar el compromiso ontológico de una lógica es a través de una metateoría mínima que permita determinarla. Digamos, pues, que una teoría T es suficiente para determinar la lógica L si y sólo sí, usada como metateoría, T decide, para cada sentencia σ del lenguaje de L, si σ es una verdad lógica o no lo es.

La teoría de conjuntos que mejor recoge nuestras intuiciones parece ser la de Zermelo-Fraenkel (ZF) o la de ZF más el axioma de elección (ZFC). En ZF es demostrable el teorema de completud para la lógica de primer orden (como puede verse analizando, por ejemplo, la prueba usual -debida a Henkin- de este teorema). Dado que está determinado si una fórmula es deducible o no lo es, ¿podemos concluir que ZF es suficiente para determinar la lógica de primer orden? Antes de responder, introduzcamos un poco de precisión.

Si es una sentencia cualquiera de primer orden, sea $\mathit{Val}\,(\sigma)$ la fórmula del lenguaje de ZF que expresa de modo natural que es lógicamente válida. Con métodos que se remontan a Gödel podemos mostrar que

(7) σ es lógicamente válida si y sólo sí ZF . $\vdash$ $\mathit{Val}(\sigma)$.

Pero esto no significa que ZF sea suficiente para determinar la lógica de primer orden. Que sea suficiente significa qué, para cada sentencia σ,

ZF $\mathit{Val}\,(\sigma)$ o ZF $\vdash$ $\neg \mathit{Val}\,(\sigma)$,

lo cual, por (7), es equivalente a la conjunción de

(8) si σ es lógicamente válida, ZF$\vdash$ $\mathit{Val}\,(\sigma)$

y de

(8') si σ no es lógicamente válida, ZF$\vdash$ $\neg \mathit{Val}\,(\sigma)$.

Ahora bien, (8) se cumple, pero (8') no.

La razón de que (8') no se cumpla hay que buscarla en la indecibilidad de la lógica de primer orden; es decir, en el hecho de que el conjunto de las verdades lógicas de primer orden no es recursivo. Por el teorema de completud, este conjunto es recursivamente enumerable. Por otra parte, si (8') se cumpliera podríamos concluir que el conjunto de sentencias que no son lógicamente válidas también es recursivamente enumerable. Pero ello implicaría (recordando que un conjunto es recursivo si tanto él como su complemento son recursivamente enumerables) la decibilidad de la lógica de primer orden.

Intentemos interpretar el incumplimiento de (8'). Si σ es una sentencia de primer orden, sea $\mathit{Dem}(\sigma)$ la fórmula del lenguaje de ZF que expresa de modo natural que σ es deducible en el cálculo.

Dado que en ZF es demostrable el teorema de completud tenemos que, para toda sentencia de primer orden σ,

(9) $\quad ZF \vdash (\mathcal{Dem}(\sigma) \leftrightarrow \mathcal{Val}(\sigma))$.

Así, el hecho de que (8') no se cumpla significa que hay sentencias de primer orden que no son deducibles en el cálculo pero que, por así decir, ZF "no sabe que no son deducibles", o sea, sentencias σ que no son deducibles pero que $ZF \nvdash \neg\mathcal{Dem}(\sigma)$. Ahora bien, esto implica que hay modelos de ZF en los cuales $\mathcal{Dem}(\sigma)$ es verdadera. ¿Significa esto que, *en estos modelos*, σ es deducible? Naturalmente, no puede significarlo, ya que ser deducible es poseer una deducción (en un cálculo dado) y ser una deducción (en un cálculo dado) es una propiedad manifiestamente absoluta: ser una deducción es ser una sucesión finita de fórmulas construida de acuerdo con ciertas reglas; y ser una sucesión finita es estar en correspondencia con un segmento inicial (0, 1, ..., n) de la serie de los números naturales. Lo que ocurre es que en todo modelo de ZF en que $\mathcal{Dem}(\sigma)$ sea verdadera, su versión de la serie de los números naturales será anormal, no estará bien ordenada, poseerá segmentos iniciales infinitos; en un modelo tal habrá 'remedos' de deducciones de longitud infinita, y uno de estos 'remedos' será testigo de la verdad de $\mathcal{Dem}(\sigma)$.

Un modelo de ZF de este tipo, un modelo cuya versión de la serie de los números naturales se corresponde tan mal con la serie intuitiva, no es aceptable como universo de la metateoría. Sus objetos, sus 'conjuntos' (pues ZF es una teoría de conjuntos) no corresponden tampoco a nuestras intuiciones, ya que la "relación de pertenencia" establecida entre ellos no es bien fundada: hay sucesiones infinitas de 'conjuntos' a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ... tales que a_1 es un 'elemento' de a_0, a_2 lo es de a_1, a_3 lo es de a_2, y así sucesivamente. Puesto que los conjuntos decididamente no tienen esta propiedad, un modelo de ZF de estas características no puede ser un buen marco de referencia de la metateoría; no es un verdadero 'universo conjuntista'.

Aquellos modelos de ZF cuya versión de la serie de los números naturales constituye una réplica perfecta de la serie de los números naturales intuitivos reciben el nombre de ω-modelos. En los ω-modelos, conceptos tales como fórmula, regla de inferencia y deducción se interpretan como es debido; en particular, $\mathcal{Dem}(\sigma)$ significa que hay una deducción de σ. Por tanto en ellos valdrá $\mathcal{Dem}(\sigma)$ cuando, y sólo cuando, σ sea realmente deducible. Llamemos $ZF(\omega)$ a la teoría de los ω-modelos de ZF; así, los teoremas de ZF(ω) son las verdades comunes a todos los ω-modelos de ZF. Por lo dicho, (8) y (8') se cumplen si reemplazamos ZF por ZF(ω). Por consiguiente, ZF(ω) es suficiente para determinar la lógica de primer orden.

La diferencia entre ZF y ZF(ω) puede elucidarse como sigue: ZF y ZF(ω) son dos teorías con los mismos axiomas conjuntistas, pero con distinta lógica subyacente. La incapacidad de ZF para determinar la lógica de primer orden radica en que el conjunto de teoremas de ZF es recursivamente enumerable; de ahí que cualquier extensión recursiva de los axiomas de ZF -por potente que sea su contenido- será inefectiva para tal determinación si la lógica subyacente -la lógica que determina cuáles son las consecuencias de estos axiomas- es la lógica usual de primer orden. ZF(ω) no se obtiene, pues, ampliando el contenido conjuntista de ZF; pero puede obtenerse formulando ZF en una lógica más estricta. De hecho ZF(ω) puede caracterizarse como el conjunto de consecuencias en ω-lógica de los axiomas usuales de ZF. Con mucha imprecisión, estas consecuencias pueden obtenerse combinatoriamente añadiendo a un cálculo para la lógica usual de primer orden alguna versión de la siguiente regla infinitaria de inferencia (la regla ω):

A partir de las premisas

$$\psi(0), \quad \psi(1), \quad \psi(2), \ldots, \quad \psi(n), \ldots$$

inferir

$$\forall v(v \in \omega \rightarrow \psi(v)).$$

ZF(ω) es una teoría razonable como metateoría. Todo argumento a favor de la adecuación de ZF a nuestras intuiciones se aplica también a ZF(ω). La razón de no contentarnos con ZF es la imposibilidad de caracterizar en primer orden la serie de los números naturales, sin la cual no es posible siquiera definir adecuadamente el componente sintáctico de la lógica. Por otra parte, si bien nuestras intuiciones sobre los conjuntos no son del todo claras y distintas, esta falta de claridad y distinción no alcanza a nuestra visión de la serie de los números naturales.

7

Cuando pasamos a ocuparnos de la lógica de segundo orden, L_2, y nos preguntamos por una clase de estructuras suficiente para determinarla, nos enfrentamos inmediatamente con una primera dificultad: la relatividad de la relación de satisfacción. Si $\mathfrak{A}$ es una estructura y σ es una sentencia de primer orden, que $\mathfrak{A}$ satisfaga o no a σ depende únicamente de $\mathfrak{A}$ y de σ; es independiente de cuál sea el entorno conjuntista de $\mathfrak{A}$. Esto no ocurre en lógica de segundo orden. Si σ es una sentencia de segundo orden, que $\mathfrak{A}$ satisfaga o no a σ dependerá, además de $\mathfrak{A}$ y de σ, de que existan o no ciertos subconjuntos del dominio de $\mathfrak{A}$; ciertas relaciones y operaciones en él, con ciertas propiedades. Que existan o no puede depender del marco conjuntista en que $\mathfrak{A}$ esté inmersa.

En vez de entornos o de marcos, hablaremos de *universos conjuntistas*. Un universo conjuntista es, para empezar, un modelo de ZFC. Pero no todo modelo de ZFC es un universo conjuntista. Sólo lo serán aquellos modelos en los que la relación de pertenencia sea -como lo es la relación de pertenencia intuitiva- bien fundada, es decir, que no admita sucesiones infinitas descendentes como las mencionadas en la sección anterior. Nos referiremos a estos modelos como *modelos bien fundados*. Así, un universo conjuntista es, por lo menos, un modelo bien fundado de ZFC. En consecuencia, todo universo conjuntista es un ω-modelo (pero no a la inversa). Intuitivamente, un universo conjuntista pretende ser lo que su nombre sugiere: una colección de conjuntos que satisface todos los requisitos exigibles a '*la*' totalidad de los conjuntos[3].

Para apreciar la dependencia de la lógica de segundo orden del universo conjuntista donde evaluamos si una estructura satisface o no una fórmula, consideremos lo que ocurre en el caso de una estructura familiar: El cuerpo de los números reales.

Pero antes observemos que las palabras 'el cuerpo de los números reales' que, presuntamente, son un nombre, una descripción propia de una estructura, pueden denotar estructuras distintas en distintos universos conjuntistas. En otras palabras, el término 'cuerpo de los números reales' puede no ser absoluto entre universos conjuntistas. (Compárese esto con el término 'conjunto de los números naturales', que tiene -salvo isomorfismo- la misma denotación en todo universo conjuntista). De hecho, hay modelos bien fundados de ZFC, V y V^*, tales que V es un submodelo de V^*[4] y el conjunto de los reales en V es un subconjunto propio del conjunto de los reales en V^*. (Esto es precisamente lo que ocurre en el modelo de Cohen construido para violar el axioma de constructibilidad de Gödel).

Llamemos R_0 al conjunto de los reales en V (es decir, R_0 es la denotación en V del nombre 'el conjunto de los números reales') y sea $\mathbb{R}_1$ el conjunto de los números reales de V^*. (R_0 y R_1 están ambos en V , pero R_1 no está en V). Sean, además, $\mathbb{R}_0$ y $\mathbb{R}_1$ los cuerpos de los números reales en V y en V^* respectivamente. Podemos hacernos dos preguntas acerca de $\mathbb{R}_0$ y de $\mathbb{R}_1$:

(1) ¿Satisfacen $\mathbb{R}_0$ y $\mathbb{R}_1$ las mismas sentencias de primer orden?

(2) ¿Satisfacen $\mathbb{R}_0$ y $\mathbb{R}_1$ las mismas sentencias de segundo orden?

La primera pregunta no es difícil de responder. Pero antes de contestarla observemos que es una pregunta con pleno sentido, dado el carácter absoluto de la relación de satisfacción entre estructuras y sentencias de primer orden. Las sentencias de primer orden satisfechas por R_0 serán las mismas en cualquier universo conjuntista que albergue a R_0. En particular, $\mathbb{R}_0$ satisfará las mismas sentencias de primer orden en V que en V^*. Pero V^* contiene tanto a $\mathbb{R}_0$ como a $\mathbb{R}_1$; así, V es un buen marco donde comparar R_0 con $\mathbb{R}_1$.

Sea T la teoría de primer orden de los cuerpos reales cerrados[5]. T es el conjunto recursivo de sentencia de primer orden -que, por consiguiente, puede darse explícitamente, sin referencias a universos conjuntistas-. Las propiedades que aquí nos interesan de T son: (i) es un teorema de ZFC -y, por tanto, se cumple en todo universo conjuntista- que el cuerpo de los reales satisface cada una de las sentencias de T, y (ii) T es una teoría completa, es decir, para toda sentencia de primer orden σ en el lenguaje de T, o bien σ está en T o bien σ está en T.

Por (i) y por definición de $\mathbb{R}_0$, R_0 satisface a T (en V, y, por tanto, en V^*). Análogamente, $\mathbb{R}_1$ satisface a T (también en V). Pero entonces, por completud de T, R_0 y R_1 satisfacen exactamente las mismas sentencias de primer orden (ya que el conjunto de sentencias de primer orden satisfechas por $\mathbb{R}_0$ es precisamente T, y lo mismo sucede con $\mathbb{R}_1$). Así, la respuesta a la pregunta (1) es afirmativa.

Pasemos ahora a la segunda pregunta. Dado que las sentencias de segundo orden satisfechas por $\mathbb{R}_0$ pueden diferir en los dos universos V y V^*, (2) admite dos lecturas distintas. Pongamos:

Σ_0 = conjunto de sentencias de segundo orden satisfechas por $\mathbb{R}_0$ en V.

Σ_0^* = conjunto de sentencias de segundo orden satisfechas por $\mathbb{R}_0$ en V^*.

Σ_1^* = conjunto de sentencias de segundo orden satisfechas por $\mathbb{R}_1$ en V^*.

Con esta notación, las dos preguntas son:

(2.a) ¿es $\Sigma_0 = \Sigma_1^*$?

(2.b) ¿es $\Sigma_0 = \Sigma_1^*$?

Pero preguntémonos antes si $\Sigma_0 = \Sigma_0^*$, pues de responder afirmativamente, (2.a) y (2.b) se convierten en una única pregunta.

La respuesta, sin embargo, es negativa: $\Sigma_0 \neq \Sigma_0^*$. He aquí una razón: $\mathbb{R}_0$ es, en V, un cuerpo *completo*, es decir, todo subconjunto acotado superiormente (con respecto al orden del cuerpo) y que está en V posee una cota superior mínima. Pero $\mathbb{R}_0$ no es completo en V (de serlo, $\mathbb{R}_0$ sería precisamente $\mathbb{R}_1$, ya que la propiedad de completud caracteriza al cuerpo de los reales). Ahora bien, hay una sentencia de segundo orden, γ, que es satisfecha por un cuerpo ordenado si y sólo sí este cuerpo es completo. En consecuencia

$$\gamma \in \Sigma_0, \qquad \text{pero} \qquad \gamma \notin \Sigma_0^*.$$

Un argumento análogo sirve para mostrar que $\Sigma_0^* \neq \Sigma_1^*$, pues, en V^*, $\mathbb{R}_1$ es completo pero $\mathbb{R}_0$ no; es decir,

$$\gamma \in \Sigma_1^*, \qquad \text{pero} \qquad \gamma \notin \Sigma_0^*.$$

Por tanto, la respuesta a (2.b) es negativa: $\mathbb{R}_0$ y $\mathbb{R}_1$ no satisfacen las mismas sentencias de segundo orden en V^*.

Nos queda por contestar (2.a). El interés lógico de esta pregunta es superior al de (2.b). (2.a) puede reformularse (y generalizarse) así:

> ¿satisfacen los correspondientes cuerpos de los números reales en los distintos universos conjuntistas las mismas sentencias de segundo orden?

La pregunta es importante porque el cuerpo de los reales es caracterizable (en cada universo conjuntista) mediante una (la misma) sentencia de segundo orden. Los reales constituyen, en cada universo conjuntista, el único (salvo isomorfismo) cuerpo ordenado completo. Ahora bien, como ya hemos mencionado, la propiedad de ser un cuerpo ordenado completo puede expresarse en segundo orden. Sea δ una sentencia que lo exprese. δ es, pues, *categórica*, es decir, posee -en cada universo conjuntista- un único modelo salvo isomorfismo.

De la categoricidad se suele concluir la completud: Si α es una sentencia de segundo orden en el lenguaje de δ, entonces o bien α o bien $\neg\alpha$ es consecuencia de δ. El argumento es breve: $\mathbb{R}$, el cuerpo de los reales, es, salvo isomorfismo, el único modelo de δ. Ahora bien, α es verdadera en $\mathbb{R}$ o no lo es. Si α es verdadera en R, entonces -dado que estructuras isomorfas satisfacen las mismas sentencias de segundo orden- es verdadera en *todos* los modelos de δ; es decir, α es consecuencia de δ. Si, por el contrario, α no es verdadera en $\mathbb{R}$, $\neg\alpha$ lo es. Pero entonces $\neg\alpha$ es verdadera en todos los modelos de δ y, por tanto, $\neg\alpha$ es consecuencia de δ. δ es, pues, completa.

La aseveración de la completud de δ puede hacerse con otras palabras, diciendo que el conjunto de consecuencias de δ es precisamente el conjunto de las sentencias satisfechas en el cuerpo de los reales. Así, las dos condiciones siguientes son equivalentes para toda sentencia α de segundo orden:

> α es verdadera en el cuerpo de los reales
>
> α es consecuencia de δ

De este modo, (2.a) se manifiesta como una pregunta puramente lógica, en cuanto atañe únicamente a la relación de consecuencia.

¿Podemos concluir, entonces, que $\Sigma_0 = \Sigma_1^*$, ya que 'tanto Σ_0 como Σ_1^* son el conjunto de consecuencias de δ'? Naturalmente, no podemos concluirlo (por lo menos, no podemos mediante el esbozo de argumento entre comillas), ya que la relatividad de la relación de satisfacción se filtra hasta alcanzar la relación de consecuencia (y, con ella, a la noción de validez lógica). Hablar de consecuencia o de verdad lógica en segundo orden no tiene propiamente sentido más que relativizando el discurso (explícita o implícitamente) a un universo conjuntista. Por más que Σ_0 y Σ_1^* respondan -en V y en V^* respectivamente- al mismo nombre de 'conjunto de consecuencias de δ', es perfectamente posible que Σ_0 y Σ_1^* sean distintos. Lo serán, por ejemplo, si en V vale la hipótesis del continuo y en V no (pero no sólo en este caso).

Quiza valga la pena insistir en que en la lógica de primer orden la situación es totalmente distinta. Si δ es una *sentencia completa de primer orden* (es decir, si para toda sentencia α *de primer orden* o bien α o bien $\neg\alpha$ es consecuencia de σ) y si $\mathfrak{A}$ es un modelo de σ en el universo conjuntista V y si $\mathfrak{B}$ es otro modelo de σ en el universo conjuntista V^*, entonces -por distintos que sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ y V y V^*- los conjuntos de sentencias satisfechas por $\mathfrak{A}$ y por $\mathfrak{B}$ (en V y en V^* respectivamente) coinciden.

He aquí una última manifestación de la relatividad de la lógica de segundo orden. Si -continuando con la notación anterior- $\Sigma_0 \neq \Sigma_1^*$, entonces Σ_0 no es satisfacible en V^* (ni Σ_1 es satisfacible en V); es decir, no hay en V^* ninguna estructura que satisfaga (en V^*) todas las sentencias de Σ_0 (ni ninguna estructura en V que satisfaga todas las sentencias de Σ_1^*). La razón es simple: si es una estructura de V^* que satisface Σ_0, entonces, dado que para toda sentencia α, o bien $\alpha \in \Sigma_0$ o bien $\neg\alpha \in \Sigma_0$ Σ_0 es el conjunto de todas las sentencias de segundo orden verdaderas en $\mathfrak{A}$. Por otra parte, dado que $\delta \in \Sigma_0$ y que δ caracteriza el cuerpo de los reales en cualquier universo conjuntista, $\mathfrak{A}$ es isomorfa a R_1. Pero entonces, $\Sigma_0 = \Sigma_1^*$, por definición de Σ_1^*.

8

Las reflexiones hechas en el apartado anterior ponen de manifiesto cuán sensible es la lógica de segundo orden al universo conjuntista que tomamos como marco. Y no tanto por la posible ausencia o presencia de distintos tipos de estructuras en distintos universos, sino sobre todo por la relatividad de la relación de satisfacción y, con ella, de la relación de consecuencia y de la noción de validez lógica. Hemos visto que la lógica de segundo orden no es absoluta. Las preguntas: ¿es α consecuencia de σ? o ¿es β lógicamente válida? (donde α, σ y β son sentencias de segundo orden) pueden no admitir respuesta mientras no se fije, por lo menos parcialmente, un universo conjuntista donde evaluar la relación de satisfacción. (Pero, ¿como 'fijar', aunque sea parcialmente, un universo conjuntista?).

No debemos identificar la relatividad de la relación de satisfacción con la de la relación de consecuencia, si bien en lógica de segundo orden ambas relaciones sean relativas. Es posible que la relación de satisfacción no sea absoluta pero que sí lo sea la relación de consecuencia y, por tanto, la noción de validez lógica. Hay lenguajes cuyo conjunto de verdades lógicas es el mismo en todos los universos conjuntistas y, sin embargo, una misma estructura puede satisfacer una sentencia en un universo y no satisfacerla en otro. Este es el caso de la lógica L(Q), cuyos símbolos lógicos son los propios de primer orden más el cuantificador Q. Q es el cuantificador de no-numerabilidad; más precisamente, una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A satisfará la fórmula $Qx\psi(x)$ si y sólo sí el conjunto de elementos de A que satisfacen ψ es no numerable. (Así, $\mathfrak{A}$ satisface $Qx(x=x)$ si y sólo sí A es no numerable, y, por ejemplo, la sentencia $Qx(px \vee Rx) \rightarrow (QxPx \vee QxRx)$ es lógicamente válida). De que un mismo conjunto pueda ser numerable en un universo y no serlo en otro se sigue que la relación de satisfacción para sentencias de L(Q) no es absoluta. Pero hay un cálculo deductivo completo para L(Q)[6], de modo que el conjunto de sentencias lógicamente válidas de L(Q) es el mismo que el de sentencias deducibles en el cálculo y es, por tanto, absoluto: una sentencia de L(Q) es lógicamente válida en un universo conjuntista si y sólo sí lo es en todos. (Dado que el teorema de completud para L(Q) es demostrable en ZFC, las nociones de validez lógica y de consecuencia lógica para L(Q) son absolutas ya entre ω-modelos de ZFC).

Pero incluso en el caso de la lógica de segundo orden es posible en principio, y a pesar de la relatividad de la relación de satisfacción, hacer absolutas las nociones de consecuencia y de validez lógica por el procedimiento de restringir la gama de universos conjuntistas aceptables. Porque si σ es una sentencia cuya validez lógica no es absoluta, entonces σ distingue dos tipos de universos: aquellos, todas cuyas estructuras satisfacen y los demás. Si decidimos -por las razones que fueren- que todo universo conjuntista debe ser del primer tipo, entonces σ será (absolutamente) una verdad lógica. Si decidimos que todo universo conjuntista debe ser del segundo tipo, entonces (también con carácter absoluto) σ no será una verdad lógica.

Tomar una decisión de este tipo (o quizá un cúmulo de ellas en algunos casos) es esencialmente ampliar nuestra teoría de conjuntos (la que ejerce la metateoría) añadiéndole nuevos axiomas. Hay, por ejemplo, una sentencia cuya validez lógica es equivalente a la hipótesis del continuo. Por tanto, en este caso, restringirse a universos que hemos llamado del primer tipo es lo mismo que aceptar la hipótesis del continuo como axioma de nuestra metateoría. Este ejemplo no es un caso excepcional; todo lo contrario. Para cada sentencia de segundo orden σ hay un enunciado del lenguaje conjuntista, $E(\sigma)$, tal que: σ será lógicamente válida (absolutamente) si y sólo sí $E(\sigma)$ es un axioma (o un teorema) de la metateoría subyacente; y σ será (absolutamente) no lógicamente válida si y sólo sí la negación de $E(\sigma)$ es un axioma (o un teorema) de la metateoría.

Desde esta perspectiva, preguntarse por condiciones bajo las cuales la noción de verdad lógica (y, con ella, la relación de consecuencia) en lógica de segundo orden sea absoluta es preguntarse por los axiomas de una teoría de conjuntos que, para cada sentencia σ de segundo orden, tenga como consecuencia o bien $E(\sigma)$ o bien la negación de $E(\sigma)$; es preguntarse, en fin, por el contenido de una metateoría suficiente para determinar la lógica de segundo orden.

Una metateoría tal debe ser mucho más potente, mucho más rica en contenido conjuntista, que ZFC. Un ejemplo del tipo de problemas que debe ser capaz de resolver lo constituye el problema del continuo: ¿Cuál es la cardinalidad del conjunto de los reales? Una de las respuestas viene dada por la ya mencionada hipótesis del continuo: hay $\aleph_1$ reales. Si la metateoría niega la hipótesis del continuo (de acuerdo con el sentir mayoritario de quienes se ocupan en teoría de conjuntos) debe tomar partido, al menos parcialmente, acerca de otras hipótesis alternativas. En particular, para cada entero $n > 1$ debe decidir si la cardinalidad del conjunto de reales es o no es $\aleph_n$, ya que para cada $n > 1$ hay una sentencia de segundo orden cuya validez lógica es equivalente a que la cardinalidad del continuo sea $\aleph_n$. (También hay una sentencia cuya validez lógica es equivalente a la hipótesis generalizada del continuo, es decir, a la hipótesis de que, para cada cardinal infinito κ, 2^{κ} es el cardinal sucesor de κ. Este es, pues, otro problema a que una metateoría suficiente para determinar la lógica de segundo orden debe dar respuesta).

Hay muchos otros problemas relacionados con el continuo, todos ellos insolubles en ZFC y que, sin embargo, están asociados a la validez lógica de sentencias de segundo orden. He aquí dos de larga tradición, uno debido a Suslin (1920) y otro debido a Ulam (1930). El primero tiene que ver con la caracterización de Cantor del orden de los reales. Este es, salvo isomorfismo, el único orden (1) denso y sin extremos, (2) completo (todo subconjunto acotado tiene una cota superior mínima) y (3) separable (posee un subconjunto denso numerable). Una consecuencia de (3) es (3'): toda colección de intervalos disjuntos es finita o numerable. El problema de Suslin es: ¿Constituyen (1), (2) y (3') una caracterización de los reales? El problema de Ulam es determinar si hay o no hay una medida no trivial definida para cada conjunto de reales (una medida, naturalmente, que asigne valor cero a cada conjunto finito).

Estas son sólo una muestra de un gran número de cuestiones que podríamos calificar de *estructurales* que una teoría debe decidir para ser capaz de determinar la lógica de segundo orden. Pero hay también otro tipo de problemas, problemas de *alcance*, ante los que la metateoría debe también pronunciarse. Típicos problemas de alcance son los que hacen referencia a la existencia o inexistencia de ciertos cardinales llamados grandes. Voy a limitarme a mencionar tres tipos de cardinales tales: inaccesibles, débilmente compactos y medibles. La situación es la siguiente. Hay sentencias de segundo orden, σ_1, σ_2, σ_3, cuya validez lógica es equivalente a la inexistencia de cardinales inaccesibles, débilmente compactos y medibles, respectivamente.

9

Hemos visto que para poder determinar la lógica de segundo orden la metateoría debe dar respuesta a un gran número de preguntas sobre conjuntos, respuesta que en muchos casos es independiente de nuestros conocimientos e intuiciones actuales.

Pero, ¿es razonable pedir que la metateoría tome tantas decisiones con el fin de determinar la lógica? O, visto desde el otro extremo,

¿es razonable que la lógica esté tan comprometida ontológicamente que requiera una metateoría tan potente para su determinación? Quisiera argumentar que no es razonable.

En primer lugar, no es razonable que, para determinar la lógica, debamos tomar decisiones metateóricas sobre cuya bondad nada sabemos (excepto, quizá, que son consistentes). Y no lo es porque, al hacerlo, las verdades lógicas pierden ese carácter de necesidad que siempre asociamos con ellas, se vuelven -por lo menos algunas- arbitrarias. Si nuestros conocimientos e intuiciones nada nos dicen, por ejemplo, sobre la existencia de rectas de Suslin[7], ¿no es totalmente contrario a nuestra idea de lo que la lógica es que, si decidimos que hay rectas de Suslin, su existencia adquiere inmediatamente el carácter de necesidad lógica?

En segundo lugar, y continuando con lo anterior, no es razonable que debamos tomar tantas decisiones porque, de hecho, hay muchos modelos bien fundados de ZFC, muchos universos conjuntistas, que no violan nuestras intuiciones sobre conjuntos. Propiamente, al considerarlos como universos conjuntistas, estamos admitiendo que cualquiera de estos modelos puede perfectamente constituir la totalidad estructurada de los conjuntos. Ahora bien, al tomar decisiones metateóricas adicionales -necesarias para determinar la lógica- rechazamos arbitrariamente unos y otros universos. Nuevamente, con ello parece violarse el requisito básico de que las verdades lógicas son verdades necesarias.

En tercer lugar, no es razonable que debamos tomar tantas decisiones para determinar la lógica porque la lógica es un instrumento para obtener inferencias, para concluir a partir de premisas, para sacar consecuencias de ciertos supuestos. Ahora bien, al tomar decisiones metateóricas para determinar la lógica de segundo orden, estamos limitando el campo de aplicación de ésta. La lógica así determinada será inaplicable al ámbito de problemas cuya solución se requiere para su determinación. Veámoslo con un ejemplo. Ya hemos mencionado que la cardinalidad del continuo es un problema cuya solución, por lo menos parcial, es necesaria para determinar la lógica de segundo orden. Supongamos que, para determinarla, admitimos en nuestra metateoría la hipótesis del continuo. Así, aquellas sentencias cuya validez lógica es equivalente a la hipótesis del continuo pasarán a ser lógicamente válidas. Pero esta lógica, manifiestamente, será totalmente inútil para estudiar el problema del continuo; si formalizamos la teoría de conjuntos en esta lógica determinada de segundo orden, la negación de la hipótesis del continuo tendrá consecuencias contradictorias. En otras palabras, la hipótesis del continuo será consecuencia de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Una lógica indeterminada sólo aparentemente es una lógica; en realidad, es poco más que un lenguaje. Su relación de consecuencia sólo está parcialmente fijada. Una lógica tal no es apta para argumentar, para conducir inferencias. Preguntada acerca de la corrección de un argumento, de la bondad de una inferencia, la lógica no responde, por más que argumento e inferencia estén formulados en su lenguaje.

Pero hemos visto que es irrazonable pedir la determinación de la lógica de segundo orden, sobre todo porque esta determinación implica discriminar unos u otros universos conjuntistas. Cada posible determinación de la lógica de segundo orden nos parece arbitraria, y nos lo parece porque no tenemos razones para separar la gran variedad de universos entre aceptables e inaceptables. Tampoco queremos hacerlo, para no encontrarnos con una lógica, determinada, sí, pero realmente inaplicable.

Ahora bien, hay una manera natural de entender la lógica de segundo orden que elude el dilema de extrema indeterminación o determinación arbitraria. Verdad lógica es verdad en todas las estructuras; pero una estructura lo es en un universo conjuntista. Explicitemos, pues el universo, U, y definamos:

> σ *es válida en* U si y sólo sí σ es satisfecha en todas las estructuras de U.

Intuitivamente, una verdad lógica lo es no sólo en un universo conjuntista dado, sino en cualquier universo conjuntista posible. Así, definimos:

> σ *es lógicamente válida* si y sólo sí σ es válida en todo universo conjuntista.

Antes de continuar, hagamos tres observaciones:

(1) La definición usual de verdad lógica rezaría, en estos términos, como sigue: "σ es lógicamente válida si y sólo sí σ es válida en *el* universo *real* (desconocido)".

(2) Esta nueva definición de verdad lógica corresponde, naturalmente, a una nueva definición de consecuencia: α es consecuencia de Σ si y sólo sí, en todo universo conjuntista U, toda estructura que, en U, satisfaga Σ satisfará también α.

(3) Por lo que respecta a la lógica usual de primer orden, esta nueva definición de verdad lógica es coextensiva con la usual.

Esta reinterpretación de la noción de verdad lógica y de la relación de consecuencia tiene algunas ventajas sobre la usual en lo que respecta a la lógica de segundo orden. En primer lugar, la indeterminación de esta lógica se reduce en gran manera, y lo hace precisamente en aquellos casos donde decidir sobre la validez de una sentencia ('validez' en el sentido usual) comportaba una elección arbitraria o insuficientemente justificada. Así, por ejemplo, aquellas sentencias cuya validez lógica era equivalente a la existencia de rectas de Suslin, o a la hipótesis del continuo, o a la existencia de cardinales medibles no son verdades lógicas, y no lo son porque hay universos conjuntistas en los que no son válidas.

Por otra parte, las verdades lógicas de segundo orden poseen, así entendidas, el carácter de necesidad que se asocia a toda verdad lógica: necesidad como verdad en todo mundo posible. Una verdad lógica no es simplemente una sentencia verdadera en todas las extructuras que existen en un universo conjuntista privilegiado; es, más bien, una sentencia verdadera en todas las estructuras que puedan existir en todo universo conjuntista concebible.

Finalmente, con la nueva interpretación de la relación de consecuencia, la lógica de segundo orden puede cumplir perfectamente el papel de lógica subyacente a la teoría de conjuntos, ya que, a pesar de su mayor determinación, no da por resueltos -ni explícita ni implícitamente- problemas conjuntistas que no lo están.

NOTAS

1 Ver, por ejemplo, [3], Teorema X, 5.4, pág. 163

2 Ver [4], Teorema 35, pág. 394.

3 De todos modos, a partir de ahora, donde diga "modelo conjuntista" puede leerse "modelo bien fundado de ZFC" (o, incluso, "ω-modelo de ZFC").

4 Es decir, $V \subseteq V^*$ y la relación de pertenencia en V es la restricción a V de la relación de pertenencia en V^*.

5 Ver por ejemplo, [5], pág. 87

6 Ver, por ejemplo, [1], Teorema 6.2., pág. 280.

7 Una recta de Suslin es un orden denso sin extremos, completo y tal que toda colección de intervalos disjuntos es a lo sumo numerable, pero no isomorfo al orden de los reales.

REFERENCIAS

[1] BELL, J.L., & SLOMSON, A.B. (1971): *Models and Ultraproducts.* - Amsterdam.

[2] BOOLOS, G. (1975): "On Second Order Logic", en *The Journal of Philosophy* vol. LXXII, pp. 509-527.

[3] EBBINGHAUS, H.D., & FLUM, J. & THOMAS, W. (1984): *Mathematical Logic*, New York.

[4] KLEENE, S.C. (1952): *Introduction to Metamathematics* Amsterdam.

[5] SHOENFIELD, J.R. (1967): *Mathematical Logic* Massachusetts, Reading.

Depto. de Lógica, Historia y
Filosofía de la Ciencia
Universidad de Barcelona.