ALFRED TARSKI I LA TEORIA DE CONJUNTS

JOSEP PLA i CARRERA

Departament de Lògica, Història i
Filosofia de la Ciència

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona, Espanya

ABSTRACT

The work on set theory made by A. Tarski in the years 1924–1950 is very interesting, but little know.

We develope partial questions in set theory in the moment that A. Tarski intervenes and his contributions and also influences.

The principals aims in this development are:

1. The axiom of choice [A.C.] and his equivalents;
2. the general continuum hypothesis [G.C.H.] and the A.C.;
3. the dual trichotomy principle;
4. the inaccessible cardinals and his relation with the A.C. and the G.C.H.;
5. the notion of finite set and his relation with the A.C and the G.C.H.;
6. the almost disjoint set and their relation with the G.C.H.;

and finally,

7. the results in Berkeley.

AMS/Ω Subject Classification: 01A55, 01A60, 03-03, 03E25, 04-03, 04A25.

Treball parcialment subvencionat per la beca PB86-0269 de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica.

Josep PLA i CARRERA

1. EL CONCEPTE DE CARDINAL I L'AXIOMA DE L'ELECCIÓ.

L'axioma de l'elecció [A.C.][1], com tothom recorda prou bé, motivà una forta polèmica sobre la seva acceptació o no acceptació[2]. Una raó per refusar-lo el constituïren, d'una banda, les possibles *limitacions* que d'ell se'n derivaven, limitacions com les que hom localitzà a la *teoria de la mesura* i, concretament, en l'*existència de subconjunts d'* $\mathbb{R}$ *no mesurables de Lebesgue*[3] i, d'altra banda, les aparents *paradoxes* que la seva acceptació comportava. En aquesta línia A. Tarski, en col.laboració amb S. Banach, aportaria la *paradoxa de Banach-Tarski*.[4]

Un camí per acceptar l'A.C. consistiria en analitzar les conseqüències i aplicacions en l'àmbit matemàtic[5] i, sobretot, en establir equivalències importants de l'A.C., cada cop més matemàtiques, cada cop més útils, cada cop més indispensables en la producció matemàtica.[6] El programa que Waclaw Sierpinski proposà el 1918 en relació amb l'A.C. a la comunitat matemàtica, en general, i a la polaca, en particular, consistia precisament en establir més i més proposicions equivalents a l'A.C. que posessin de manifest la seva importància i necessitat.[7]

En aquells anys les equivalències de l'A.C. conegudes eren poques:

- el principi de la bona ordenació d'E. Zermelo;
- l'axioma multiplicatiu de B. Russell;
- la llei de tricotomia d'F. Hartogs.[8]

D'altres principis equivalents a l'A.C., com ara els principis *maximals* de Hausdorff[9], no aconseguiren pas d'atreure l'atenció dels matemàtics fins els anys trenta amb l'aparició del lema de Zorn.[10] Les equivalències algèbriques i topològiques no fan llur aparició fins els anys cinquanta i les lògiques fins els anys seixanta.[11]

Les primeres equivalències que s'aconseguirien després que Sierpinski establís el seu programa serien equivalències lligades íntimament amb la *tricotomia dels cardinals* en la línia del treball de Hartogs [veieu nota 8]; és a dir, serien propietats de l'estructura *algèbrica* dels cardinals. Pels anys vint, un bon nombre de matemàtics polacs, entre els quals cal destacar, el propi Sierpinski, establiren una quantitat notable de *propietats aritmètiques* i d'*ordre* dels cardinals fent ús de l'A.C. Així s'anaven aclarint les propietats algèbriques dels cardinals que, d'implicar l'A.C., li serien equivalents.

Leśniewski establirà que

> *la suma de dos cardinals infinits λ i μ no pot mai superar ambdós cardinals*[12]

implica la llei de tricotomia i, de retruc, és equivalent a l'A.C.

Però qui donarà els pas gegantí en aquesta anàlisi serà, i això és fora de tot dubte, A. Tarski amb dos treballs: *Sur quelques théorèmes qui équivalent à l'axiome du choix* de 1924[13] i *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles* de 1926, feta en col.laboració d'A. Lindenbaum.

En 1923, Sierpinski[14] estableix que l'A.C. implica les següents proposicions d'aritmètica cardinal transfinita:

Per a cada κ, λ, μ, i ν, cardinals transfinits:

I. $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda$;

II. $\kappa^2 = \kappa$;

III. $\kappa^2 = \lambda^2$ *implica* $\kappa = \lambda$;

IV. $\lambda < \mu$, $\kappa < \nu$ *implica* $\lambda + \kappa < \mu + \nu$;

IV'. $\lambda < \mu$, $\kappa < \nu$ *implica* $\lambda \cdot \kappa < \mu \cdot \nu$;

V. $\lambda + \mu < \kappa + \mu$ *implica* $\lambda < \kappa$;

V'. $\lambda \cdot \mu < \kappa \cdot \mu$ *implica* $\lambda < \kappa$;

que, llevat dels dos primers casos, generalitzen resultats d'isotonia i de simplificació vàlids en aritmètica finita.

A. Tarski, en el seu treball de 1924, estableix que cada una d'aquestes *set* proposicions d'aritmètica cardinal transfinita implica, per si sola, al sí de Z.F., l'A.C.[15] i ho fa en base a resultats de Bernstein i Sierpinski en un article d'una gran perfecció expositiva, salvant paulatinament i didàctica *totes* les dificultats que van sorgint.

La primera d'aquestes dificultats rau en el fet que, en 1924, l'única definició de cardinal que existia era la de Cantor-Frege-Russell

> *el cardinal d'un conjunt X és la classe de tots els conjunts que li són equipotents*,

però aleshores el cardinal d'X, card X, no era pas un conjunt i, per això, Z.F. *no disposava d'objectes* que poguessin fer el paper de cardinal d'un conjunt X.[16]

Aquest fet obliga Tarski a afegir a la teoria de Z.F. dos *nous axiomes*:

1. *tot conjunt té associat un nombre cardinal*;
2. *dos conjunts tenen associat el mateix nombre cardinal ssi són equipotents.*[17]

Serà precisament en aquests anys que J. von Neumann introduirà definitivament el concepte de *nombre cardinal* d'un conjunt al *sí de Z.F.*[18]

com el més petit nombre ordinal equipotent al conjunt,

però li caldrà l'A.C. per tal de poder garantir que, a cada conjunt, li correspon un nombre cardinal [i, per tant, la seva definició no és de cap utilitat en la teoria *tarskiana* del cardinal.[19]]

A. Tarski introdueix el concepte d'*àlef*

com el nombre cardinal que correspon als conjunts infinits que poden ésser ben ordenats

i, donada l'equivalència entre l'A.C. i el P.B.O., resulta que l'A.C. és equivalent a

Z: *tot nombre cardinal transfinit és un àlef*[20].

Bernstein, a la seva tesi doctoral de 1901, havia establert:

si κ_1 *i* κ_2 *són dos cardinals transfinits,* $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \kappa_1 + \kappa_2$ *implica que* κ_1 *i* κ_2 *són comparables*[21]

en base a l'A.C.; A. Tarski afebleix el resultat i així pot prescindir de l'A.C.:

si κ *és un cardinal transfinit i* $\aleph$ *un àlef,* $\kappa \cdot \aleph = \kappa + \aleph$ *implica que* κ *i* $\aleph$ *són comparables.*

El treball de Hartogs, millorat per Sierpinski,

S: *a cada cardinal transfinit* κ *li podem associar un àlef* $\aleph(\kappa)$ *que no és comparable amb* κ *llevat que* $\kappa = \aleph(\kappa)$[22]

proporciona a A. Tarski tot l'utillatge necessari per establir el seu resultat, en la forma següent:

I $\Rightarrow$ **Z**: *sigui* κ *un cardinal transfinit i* $\aleph(\kappa)$ *l'àlef associat per* **S**; *la hipòtesi* **I** *ens diu que*

$$\kappa \cdot \aleph(\kappa) = \kappa + \aleph(\kappa)$$

i, pel lema de Tarski, κ *i* $\aleph(\kappa)$ *són comparables i, per* **S**, $\kappa = \aleph(\kappa)$ *i, per aquesta raó,* κ *és un àlef*.[23]

Dos anys més tard, apareix el treball compartit de 1926. Aquesta comunicació de 1926 conté un centenar de proposicions de la teoria de conjunts aconseguides per ell mateix i per A. Lindenbaum i ens són enunciades sense demostració; prometen que les demostracions detallades apareixeran en els **Fundamenta Mathematica**, en un article titulat "*L'arithmètique des nombres cardinaux*" que mai no aparegué. Molts dels resultats allí esmentats hauran d'esperar una vintena d'anys en ésser establerts i alguns d'ells, encara avui, resten oberts. En aquest treball, Tarski afegeix *cinc* noves proposicions d'aritmètica cardinal transfinita, cada una d'elles equivalent a l'A.C.

VI. *si* $\kappa < \lambda$, *existeix un únic* μ *tal que* $\kappa + \mu = \lambda$;

VII. $\lambda + \mu = \lambda + \nu$ *implica* $\mu = \nu$ *o* $\mu \leq \lambda$ *o* $\nu \leq \lambda$;

VIII. $\lambda + \lambda < \lambda + \mu$ *implica* $\lambda < \mu$;

IX. $\kappa^{\mu} < \lambda^{\mu}$ *implica* $\kappa < \lambda$;

X. $\mu^{\kappa} < \mu^{\lambda}$ *implica* $\kappa < \lambda$[24],

totes elles vàlides en l'aritmètica finita.

Tarski observa, a més, que el recíproc de **VIII** i la proposició anàloga a **VIII** relativa a $>$, "$\lambda + \lambda > \lambda + \mu$, *implica* $\lambda > \mu$", no precisen pas de l'A.C. Aquest treball de Tarski trobà un ressò molt petit; potser l'única aportació en aquesta línia fou la de Sudan [1939][25].

El 1947, W. Sierpinski establiria l'equivalència entre l'existència i unicitat de la diferència de dos cardinals [VI] i l'A.C.[26]

2. LA HIPÒTESI DEL CONTINU I L'AXIOMA DE L'ELECCIÓ.

Ja a l'any 1878 Cantor afirma la validesa de la llei de tricotomia per a conjunts arbitraris i ho fa en el *primer treball* de teoria de conjunts pròpiament dit

Si dos conjunts M i N <u>*no*</u> *tenen la mateixa potència o bé M té la mateixa potència que una part d'N o bé N té la mateixa potència que una part d'M; en el primer cas diem que la* *potència d'M és més petita que la d'N; en el segon cas diem que és més gran.*[27]

No és, però, fins el 1882 que Cantor, a la seva teoria de conjunts, no sembla pas desempellegar-se definitivament del substracte d'$\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ i fins el 1887 no ens ofereix aquesta llei sense cap pressupòsit i fins el 1895 no la discuteix en tota la seva profunditat.[28]

Aquest treball és el fruit de resultats precedents en els que, limitant-se als *universos numèrics*, Cantor intentava de *mesurar* o, si més no, de *comparar* la quantitat d'elements dels conjunts.[29] No és, doncs, estrany que, després d'haver establert que $\mathbb{R}$ *té més elements que* $\mathbb{N}$[30], d'haver deduït l'existència de nombres *transcendents*, allunyant-se del tot de la demostració de Liouville[31], d'haver constatat l'*equipotència* d'$\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ [32], resultat que trobem ja en certes cartes a Dedekind de finals de juny de 1887[33] i, convençut com estava, de que dos conjunts *són sempre comparables* [pel que fa a la quantitat dels seus elements][34], no és estrany, dèiem, que Cantor es preguntés pels subconjunts d'$\mathbb{R}$ i llur potència.

Cantor havia establert ja, com hem indicat, que $\mathbb{R} \succ \mathbb{N}$; ara la qüestió era la següent:

si $X \subseteq \mathbb{R}$ és infinit, necessàriament $X \sim \mathbb{N}$ o $X \sim \mathbb{R}$?

Aquesta pregunta la trobem exposada ben clarament en Cantor [1878][35] on Cantor introduiex el *conjunts* o *nombres de primera classe* que, en definitiva, són els *conjunts equipotents amb* $\mathbb{N}$ o conjunts numerables; alhora sap, però, que hi ha conjunts que no són pas de primera classe.[36] Aleshores, en un context completament vinculat a $\mathbb{R}$, Cantor *conjecturarà la hipòtesi del continu* [aquest nom, peró, no apareix mai en l'obra de Cantor] que podem actualitzar amb aquests mots:

Tot subconjunt infinit d'$\mathbb{R}$ o bé és numerable o bé és continu.

La prova promesa per Cantor no apareixerà mai, malgrat que Cantor intentarà d'establir-la mantes vegades, sobretot a partir de 1882, data d'una gran transcendència en el desenvolupament de l'obra de Cantor ja que és en aquesta ocasió que Cantor introduiex el concepte d'*àlef* o, en la seva pròpia nomenclatura, *les classes de nombres*.

També aquí les idees de Cantor venen de lluny[37]; venen dels seus treballs sobre la unicitat de la representació de funcions per sèries de Fourier, qüestió que es plantejà Cantor ja el 1872[38]. Cantor, però, en 1882 aconsegueix de lliurar-se del substracte continu de la seva naixent teoria de conjunts com podem veure prou bé a la carta a Dedekind de 5 de novembre[39] i més detalladament a Cantor [1883b], si bé el treball fou elaborat, molt probablement, durant l'octubre de 1882. A la carta, després d'afirmar que està en situació de provar el *teorema d'equivalència* —"*si $M' \subseteq M$ i $M'' \subseteq M'$ i $M'' \sim M$, aleshores $M' \sim M''$*"— que tot just el setembre passat no sabia pas establir[40], diu:

> *He trobat la font d'aquest teorema i puc provar-lo amb tota la seva generalitat, omplint així una llacuna essencial de la teoria de conjunts. Hi he arribat per mitjà d'una extensió natural, continuant els nombres sencers, que em portà successivament, amb tota seguretat, a les potències ascendents, la definició de les quals m'havia mancat fins el dia d'avui, si exceptuem la primera ...*[41]

Novament Cantor parla de provar el teorema d'equivalència *amb tota la seva generalitat* quan, de fet, solament està en situació d'establir-lo per a subconjunts $M'' \subseteq M'$ d'un conjunt M de la *segona classe*.[42] Cantor, però, n'afirma la validesa general:

> *el teorema és ver en general sigui quina sigui la potència d'M.*[43]

Però Cantor no dóna pas per acabada la qüestió, com palesa el fet que, a la carta a Dedekind, ho deixi com una qüestió oberta.[44]

L'origen i motivació del *teorema d'equivalència* cal cercar-lo a la *hipòtesi del continu*: si $\mathbb{R}$ té la potència de la classe (II), la hipòtesi del continu de 1878 quedarà establerta. No és, doncs, d'estranyar que Cantor digui *explícitament*:

> *A més crec poder provar amb tot rigor que el conjunt dels nombres reals... pot ésser bijectat en el conjunt dels nombres de segona classe, fet que, a la vista del teorema anterior, estableix el teorema de les dues classes per a conjunts lineals.*[45]

És clar, doncs, el lligam que uneix les idees de Cantor: el cardinal d'$\mathbb{R}$ és la *potència superior* a la potència d'$\mathbb{N}$, entenent que la potència es mesura per un *àlef* o bé per les potències de les classes (I) i (II), respectivament.

Per poder establir el teorema fonamental per a la segona classe, Cantor necessita recòrrer al *primer element* Ω del conjunt dels nombres de tercera classe (III) i així queda perfectament aclarit que, per a Cantor, les classes de nombres no es redueixen pas a la primera i la segona classe; a més, per a Cantor, els nombres α' de la segona classe estan *ben ordenats, monòtonament*, sobre el conjunt d'índexs de nombres de la segona classe ja que són *més petits* que Ω.[46] No satisfet amb això, Cantor proporciona, sense demostració, un conjunt *concret* de tercera classe[47] —la classe de totes les funcions d'una o més variables; aquí Cantor afirma que $2^{\mathfrak{c}}$ té tercera potència; és a dir, $\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}}$. D'aquesta manera Cantor s'apropa al seu treball de 1891 en el qual és ben palesa la capacitat demostrativa del *mètode de la diagonal*[48] que utilitza el 1889[49] per veure que els cardinals no *formen pas un conjunt*; és la paradoxa de Cantor:

> *Si M és un conjunt arbirari de cardinal κ, sempre és possible d'aconseguir-ne un altre M' de cardinal κ' més gran que κ. L'he demostrat en els casos més familiars com són aquells en els que κ és igual a $\aleph_0$ o igual a $\mathfrak{c}$ i ho he fet amb un mètode uniforme. Aquest mètode s'estén sense cap mena de dificultat quan κ és arbitrari. El significat d'aquest mètode s'expressa simplement per la fórmula $2^\kappa > \kappa$.*[50]

En els **Beiträge** de 1895, Cantor introdueix els *àlefs* i estableix el següent resultat:

> *La potència dels nombres de primera classe és el primer nombre transfinit $\aleph_0$ $\cdots$ La potència dels nombres de segona classe és el segon nombre transfinit $\aleph_1$ $\cdots$ Si ν = card $\mathbb{R}$, $2^{\aleph_0} = \nu$.*[51]

Amb aquesta nova nomenclatura Cantor estableix que $\nu = \aleph_1$ i que $2^\nu = \aleph_2$; dit altrament, estableix la *hipòtesi del continu*

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 \qquad \text{i} \qquad 2^{\aleph_1} = \aleph_2.$$

Malgrat l'esforç de Cantor per abandonar els substractes del *continu real*, no aconeguiria pas el seu objectiu completament en no adonar-se que la llei anterior és la llei que vincula els tres primers *àlefs* i en *no* qüestionar-se el cas general:

$$\textit{per a tot } \alpha,\ 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\ ?$$

Aquest vincle entre la *hipòtesi del continu* i el *continu real* és tan gran i íntim que Hilbert al **Congrés de París de 1900** limita la qüestió al cas real i no planteja, en absolut, cap possible generalització.[52] Caldrà esperar deu anys encara abans que no es formuli la *hipòtesi general del continu*; serà Hausdorff qui, l'any 1908, l'establirà com a corol.lari de la proposició

$$\textit{la suma dels } \aleph_\alpha^\kappa,\ \kappa < \aleph_\alpha \textit{ és igual a } \aleph_\alpha.^{53}$$

De tot el que hem dit fins ara veiem que, en les diferents presentacions de la hipòtesi del continu, fetes per Cantor, hi planeja sempre l'ombra de l'A.C.[54]; així com la formulació de 1878 no diu res sobre la *possibilitat de ben ordenar* $\mathbb{R}$, la formulació de 1883 li permet d'afirmar que $\mathbb{R}$, en ésser equipotent al conjunt ben ordenable (II), és ben ordenable. En presència de l'A.C. aquestes dues formulacions no presenten cap mena de diferència.

Els lligams existents entre la H.G.C. i l'A.C. constituiran, però, una de les preocupacions de Lindenbaum-Tarski [1926][55]; a la comunicació ens proposen *tres maneres d'enunciar la hipòtesi del continu*; són:

H$_1$. *Si κ és un cardinal transfinit, no existex cap cardinal λ tal que $\kappa < \lambda < 2^\kappa$.*

H$_2$. *Si $\mathfrak{a}$ és un àlef, no existeix cap cardinal λ tal que $\mathfrak{a} < \lambda < 2^\mathfrak{a}$.*

H$_3$. *Per a cada ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.*

Aquestes formulacions, degudes a Lindenbaum, són analitzades pels autors[56] en els paràgrafs 85 al 69 *sense fer ús, és clar, de l'A.C.* Entre les seves afirmacions hi trobem les següents:

1. H$_2$ i H$_3$ són equivalents;
2. H$_2$ [i H$_3$] és més feble que H$_1$ i cal l'A.C. per disposar de l'equivalència;
3. H$_1$ implica l'A.C.[57]

La demostració d'aquesta darrera afirmació i, de retruc, de l'equivalència de les tres formulacions de la H.G.C. haurà d'esperar 20 anys, malgrat que Lindenbaum i Tarski ofereixen ja certs lemes que podien *il.luminar* el lligam existent entre la H.G.C i l'A.C. Eren:

L$_1$. *Si* H$_1$ *val per κ i per $\kappa + \kappa'$, κ i κ' són comparables*;

L$_2$. *Si* H$_1$ *val per κ, 2^κ i 2^{2^κ}, aleshores κ, 2^κ i 2^{2^κ} són àlefs*;

L$_3$. *Si* H$_1$ *val per κ^2 i 2^{κ^2}, aleshores κ i 2^κ són àlefs.*[58]

Serà, però, Sierpinski qui establirà L$_2$ parcialment: *κ és un àlef*.[59]. Uns anys més tard, Specker simplificarà la demostració de Sierpinski, establint L$_3$ i L$_2'$:

L$_2$'. *Si* H$_1$ *val per a κ i 2^κ, aleshores 2^κ és un àlef*.[60]

L$_3$ implica també l'A.C. i, en conseqüència, L$_1$ i L$_3$ són equivalents si bé, en la demostració, cal recòrrer a l'*axioma de fonamentació*.[61]

Molt abans que Sierpinski i Rubin establissin els mencionats resultats, Gödel establia la *consistència relativa* de l'A.C. i de la H.G.C. amb Z.F.[62] i un xic després Cohen establia que l'A.C. *no implica* cap de les hipòtesis [generals] del continu de Lindenbaum-Tarski així com tampoc la *hipòtesi del continu*.[63]

3. LA LLEI DE TRICOTOMIA DUAL.

Cantor, ultra la idea de conjunts *equipotents*, introdueix també, com vèiem, la idea de *dominància* entre conjunts. Hem dit ja que, el 1895, ofereix una definició de dominància més potent que no pas la de 1878; el 1878 defineix la dominància en sentit ampli i, en canvi, el 1895, la defineix en *sentit estricte*:

> *si X no és equipotent a cap subconjunt propi d'Y, però Y ho és a un d'X*[64]

diem que *X domina Y*. El 1878 Cantor havia aventurat ja la llei de tricotomia; el 1895 pot afirmar —amb la nova definició— que la llei de tricotomia implica la llei d'equivalència o *teorema de Bernstein-Cantor-Schröder*.[65] La llei d'equivalència no depèn pas, però, de la tricotomia i això permet de retornar a la definició, més dura, de 1878.

Així doncs un conjunt *X domina Y* ssi Y es pot *injectar* en X. La *llei de tricotomia* estableix que, donats dos conjunts qualssevol, sempre és possible d'injectar un d'ells en l'altre; el *principi d'equivalència* ens diu, en canvi, que si *cada un d'ells* és injectable en l'altre són equipotents. La dominància indueix una relació d'ordre parcial entre cardinals i acceptar la llei de tricotomia equival a acceptar que aquesta llei d'ordre és lineal o total.

Lindenbaum-Tarski, en el treball conjunt de 1926, introdueixen una noció de dominància *dual*:

$$Y \preceq^* X \textit{ ssi } Y = 0 \textit{ o existeix una epijecció d'}X \textit{ en } Y.$$[66]

Així s'obté una relació $\leq^*$ entre cardinals. És una relació d'ordre entre cardinals, isòtona respecte de la suma i del producte, que compleix, òbviament, certes propietats:

1. *En presència de l'A.C., $\leq^*$ coincideix amb $\leq$;*
2. *$\lambda \leq \kappa$ implica $\lambda \leq^* \kappa$;*
3. *si κ és un àlef, $\lambda \leq^* \kappa$ implica $\lambda \leq \kappa$;*
4. *si $\kappa \leq^* \lambda$ i $\mu \neq 0$, $\mu^\kappa \leq \mu^\lambda$ [i, en particular, $2^\kappa \leq 2^\lambda$].*[67]

Un resultat important en la línia indicada al §1 és la conjectura de Lindenbaum segons la qual la *tricotomia* de $\leq^*$ entre cardinals implica l'A.C.[68] Aquest resultat anàleg, però dual, del que establí Hartogs el 1915, el podem formular:

> *si, per a tota parella de cardinals λ i κ, $\lambda \leq^* \kappa$ o $\kappa \leq^* \lambda$, aleshores tot cardinal és un àlef*

i fou demostrat vint anys més tard per Sierpinski.[69]

L'interès d'aquesta proposició rau en *dues proposicions* que trobem enunciades en el treball de 1926 i de les quals no se'n coneix llur potència en relació amb l'A.C. Són

I. *si* $\kappa \leq^* \lambda$, *aleshores* $\underline{\lambda \text{ no és més petit que } \kappa}$;

II. *si* $\aleph_0 \leq^* \kappa$, *aleshores* $\aleph_0 \leq \kappa$.[70]

A més resulta que II és equivalent a la *llei feble de tricotomia*

$$\kappa < \aleph_0 \text{ o } \aleph_0 \leq \kappa \text{ per a tot cardinal } \kappa$$ [71]

que, al seu torn, és equivalent al fet que

tot conjunt finit de Dedekind és finit[72];

també és equivalent a certes lleis aritmètiques de simplificació:[73]

$$\kappa + \aleph_0 < \kappa + \mu \text{ implica } \kappa < \mu;$$
$$\aleph_0 + \kappa < \aleph_0 + \lambda \text{ implica } \kappa < \lambda;$$
$$\aleph_0 + \kappa = \aleph_0 + \lambda \text{ implica } \kappa = \lambda \text{ o } \kappa,\ \lambda \leq \aleph_0.$$

Conjecturen, en canvi, certes conseqüències d'I, com ara

> $\mathbb{R}$ *no es pot descomposar en dos subconjunts de potències més petites* [és a dir: $2^{\aleph_0}$ és un nombre no descomposable].
>
> *Existeixen subconjunts no mesurables d'*$\mathbb{R}$.
>
> *Existeixen subconjunts no numerables d'*$\mathbb{R}$ *que no contenen cap subconjunt perfecte.*

Dos anys més tard Tarski donarà d'altres resultats vinculats amb $\leq^*$ i també ho ferà Sierpinski.[74]

Malgrat tot això el resultat més important en relació amb l'ordre dual que ens ofereixen Lindenbaum i Tarski, tot de passada, és una proposició més forta que no pas I:

I'. *si* $\kappa \leq^* \lambda$, *aleshores* $\kappa \leq \lambda$.[75]

Aquesta proposició implica I i, amb la llei de tricotomia dels nombres cardinals, són equivalents; així doncs sembla que I' és més forta que no pas I. Ara bé el que és realment important és que *equival* al *principi de partició* de Burali-Forti[76], que estableix

> *si un conjunt X es parteix en una família $\mathfrak{S}$ de conjunts disjunts no buits, aleshores $\mathfrak{S}$ és equipotent a un cert subconjunt d'X.*[77]

Avui dia hom no sap pas encara *si el principi de partició* —o bé I'— *és equivalent a l'A.C. o no*. Això fa que la relació $\leq^*$ de Tarski tingui interès en relació amb l'A.C.

4. ELS CARDINALS INACCESSIBLES.

El 1938 A. Tarski reemprèn el programa de W. Sierpinski consistent en cercar proposicions que impliquin l'A.C., però ho fa en un àmbit totalment nou: en l'àmbit dels *cardinals inaccessibles*.[78] El concepte i el terme de cardinal inaccessible el trobem ja en l'article Sierpinski-Tarski [1930][79]; aquest treball que, implícitament usa l'A.C., estableix el lligam que hi ha entre els seus cardinals inaccessibles —coneguts també com *fortament inaccessibles*— i els cardinals *feblement inaccessibles* de Hausdorff[80]; per fer-ho, estableix una definició alternativa de cardinal inaccessible: *qualsevol cardinal regular* [i.e.: *no abastable per unions petites de cardinals petits*] *no abastable per potències de cardinals més petits*[81], lligant així el concepte de potència amb el concepte de cardinal inaccessible. En aquest treball, a més, s'apunta la *impossibilitat* d'establir l'existència d'aquests cardinals al sí de Z.F.C. [i, àdhuc, de Z.F.C + H.G.C.][82].

Però per poder deduir l'A.C. usant cardinals inaccessibles, A. Tarski es veu forçat, com dèiem, a recórrer a les *propietats conjuntistes* de la inaccessibilitat: *no accessibilitat ni per unions petites, ni per potències, de cardinals més petits* —essent els qualificatius *petites* i *més petits* relatius al cardinal inaccessible. Així ho trobem, doncs, en Tarski [1938a][83], on la condició de cardinal límit es tradueix en *no següent*. Li cal, però, és clar, a l'igual que en el seu treball de 1924[84], imposar dos axiomes que li permetin d'associar un cardinal a cada conjunt i el mateix a tots els conjunts equipotents[85]. Tarski disposa, aleshores, de dos conceptes de cardinal inaccessible:

Un cardinal μ és feblement inaccessible ssi

1. *existeix un conjunt X amb $\overline{\overline{X}} < \mu$ i, per cada $x \in X$, un cardinal $\lambda_x < \mu$, tals que $\sum_{x \in X} \lambda_x < \mu$,*
2. *si $\lambda < \mu$, existeix un cardinal κ tal que $\lambda < \kappa < \mu$.*

Un cardinal μ és fortament inaccessible ssi compleix 1 *i*

3. *si $\kappa, \lambda < \mu$, aleshores $\lambda^\kappa < \mu$.*[86]

Aleshores, usant l'A.C., estableix que tot cardinal fortament inaccessible és feblement inaccessible[87] i, amb la H.G.C., estableix la coincidència d'ambdues definicions.[88].

En aquest treball, a més, Tarski introdueix un axioma — l'*axioma d'inaccessibilitat* — que, de fet, garanteix l'existència dels cardinals inaccessibles; millor encara, per a cada conjunt A, existeix un conjunt, *més gran*, B, de cardinal inaccessible. La formulació que fa és la següent:

> *Per a cada conjunt N, existeix un conjunt M, tal que*
>
> i. $N \in M$;
>
> ii. *si* $X \in M$ *i* $Y \subseteq X$, *aleshores* $Y \in M$;
>
> iii. *si* $X \in M$ *i* $Z = \mathcal{P}(X)$, *aleshores* $Z \in M$;
>
> iv. *si* $X \subseteq M$ *i* $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}$, *aleshores* $X \in M$.[89]

Aquest axioma és molt fort, segons ens diu el mateix Tarski [Tarski, A. [1938a], 85]. D'ell poden aconseguir-se d'altres axiomes de la teoria de conjunts i, en particular, l'A.C. La demostració de Tarski es basa en el fet que

> *si M és un conjunt i f és una funció que, a cada $X \subseteq M$ amb $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{M}}$, li associa $f(X) \in M - X$, aleshores M es pot ben ordenar*[90]

i el punt (iv) de l'axioma d'inaccessibilitat li permet de construir l'aplicació f

$$f(X) = \bigcup\{Y : Y \in X \ i \ Y \notin Y\};$$

aleshores $f(X) \subseteq X$ i $f(X) \notin X$. Ara bé, si $X \subseteq M$ i $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{M}}$, aleshores $f(X) \subseteq M$ i $\overline{\overline{f(X)}} \neq \overline{\overline{M}}$ i, per (iv), $f(X) \in M - X$. Ara s'aplica el resultat mencionat més amunt per garantir que M es pot ben ordenar.[91] Finalment, l'axioma d'inaccessibilitat li permet d'establir que cada conjunt N es pot ben ordenar [ja que, en virtud de l'axioma d'inaccessibilitat, es pot submergir en un conjunt M que es pot ben ordenar].

Totes aquestes recerques menen a Tarski a obtenir tres proposicions equivalents a l'A.C. Són:

> C1. *Per a cada conjunt N, existeix un conjunt M tal que, si $X \subseteq M$ i $\overline{\overline{N}} \not\leq \overline{\overline{X}}$, aleshores $X \in M$* [92]

que equival, en la teoria de conjunts Z.F., a l'A.C. si disposem de l'axioma de reemplaçament de Fraenkel[93];

> C2. *Si μ és un cardinal infinit, κ és un cardinal, $\kappa \leq \mu$ i $\overline{\overline{M}} = \mu$, aleshores $S = \{X \subseteq M : \kappa \not\leq \overline{\overline{X}}\}$ és equipotent a μ^κ;*

C3. *Per a cada conjunt N, existeix un conjunt M que té la mateixa potència que el conjunt*

$$\{X \subseteq M : \neg\exists Y \subseteq X \;\; Y \sim M\}.^{94}$$

Observem que C1 no és altra cosa que una versió modificada del punt (iv) de l'axioma d'existència de cardinals inaccessibles. En relació a C2 i C3, Tarski procedeix de la forma següent[95]:

1. L'A.C. implica C2: ja que, en cada cas,

$$S = \{X \subseteq M : \overline{\overline{X}} \leq \kappa\}$$

   i, usant l'A.C., no és difícil calcular el cardinal d'S[96].

2. C2 implica C3: sigui $\kappa = \overline{\overline{N}}$ [si $\kappa \leq 1$, fem $M = N$]; si $\kappa > 1$, fem $\mu = 2^{\kappa^{\aleph_0}}$ i agafem el conjunt M tal que $\overline{\overline{M}} = \mu$. Aleshores

$$T = \{X \subseteq M : \neg\exists Y \subseteq X \;\; Y \sim N\} \subseteq \{X \subseteq M : \overline{\overline{X}} \not\geq \kappa\}$$

   i, per C2, card $S = \mu^\kappa$; d'on card $T \leq \mu^\kappa$. Però

$$\mu^\kappa = \mu \text{ per l'elecció d'}\mu.$$

   Ara bé T admet un subconjunt de cardinal μ [per exemple el conjunt $U = \{X \subseteq M : \overline{\overline{X}} = 1\}$]. D'on $\mu \leq$ card $T \leq \mu$ i hem acabat[97].

3. C3 implica l'A.C.: Aquesta és la part més tècnica i és molt semblant a la que feia servir en el seu treball [1938a] per establir la implicació de (iv) de l'axioma d'existència de cardinals inaccessibles i l'A.C.[98]

Tarski finalment lliga amb l'axioma d'existència de cardinals inaccessibles en oferir una formulació alternativa:

Per a cada conjunt N existeix un conjunt M amb les propietats següents:

1. $N \prec M$;
2. $\{X \subseteq M : X \prec M\} \sim M$;
3. $\neg\exists P \subseteq M \;\; \mathcal{P}(P) \sim M$[99]

L'axioma de l'elecció segueix d'aquest nou axioma de manera semblant a com s'havia aconseguit a partir de C3 i, a continuació, remetent-nos al seu treball [1938a][100], estableix que *la potència d'un conjunt no buit M és un nombre cardinal infinit i inaccessible ssi M satisfà les propietats* 1 *i* 2 *de l'enunciat anterior*. Finalment observa que aquest axioma nou és més feble que l'axioma d'existència de cardinals inaccessibles del seu treball de [1938a], però que amb l'axioma de reemplaçament de Fraenkel són equivalents. El recíproc, en canvi, no el precisa.[101]

Així doncs, amb quinze anys —del 1924 al 1939— Tarski havia establert un bon grapat de proposicions equivalents a l'A.C. —algunes de les quals les precisarem en el §5— i havia donat així un impuls força important al programa de Sierpinski. Havia lligat, a més, l'A.C. i la H.G.C. i també l'A.C. [i la H.G.C.] amb *els grans cardinals*. Amb aquestes recerques havia obert una via important de recerca que ja no s'aturaria mai més.

5. EL CONCEPTE DE FINITUD.

Un dels conceptes més importants que hi ha dessota de les diverses intuïcions conjuntistes és el concepte d'*infinit*; serà Cantor qui el posarà de manifest d'una manera explícita, però, la qüestió dels conjunts infinits i del concepte d'infinit ve de lluny.

Les primeres qüestions relatives a l'infinit les trobem en la prohibició aristotèlica de l'infinit actual[102]; amb ella, diu, s'aconsegueix evitar les paradoxes de Zenó[103]; amb tot, però, la idea d'infinit és present a l'obra d'Euclides[104], encara que Euclides, sempre que li és possible, procura de respectar la prohibició aristotèlica.

Galileo Galilei s'adona que l'infinit actual porta en ell mateix gran quantitat de paradoxes di fícils d'aclarir, si acceptem l'infinit actual o bé l'infinit com un valor quantitatiu.[105]

Galileo, de fet, s'avanzà a l'obra de Bolzano, **Unendliche Paradoxien**, en 213 anys. Amb ella, per la seva banda, Bolzano s'antipà a Cantor i a Dedekind en l'acceptació de l'infinit actual i, lligada a ell, a la necessitat de recórrer, amb més o menys profunditat, a una incipient teoria de conjunts. Aquest fet que, pel que sembla, no influí pas a Cantor en els seus inicis, és reconegut pel mateix Cantor el 1883[106]; Bolzano aconsegueix l'infinit vertader aïllant el concepte de *conjunt* i, amb ell, ultra la *definició general* de *conjunt*, la definció de *bijecció*, inici llunyà de l'aritmètica conjuntista, i també un assaig de definició abstracta del continu.[107]. Pel que fa a la definició abstracta de conjunt diu:

> *Un conjunt és una col.lecció en la qual no es considera l'ordre de les seves parts.*[108]

El conjunt és, doncs, una realitat existent en ella mateixa i no depèn pas de les eines emprades per aconseguir-lo. Solament cal saber si un element hi és o no hi és. Per a Bolzano, consegüentment, és *possible* que un conjunt sigui *infinit en acte*[109]. Bolzano introdueix les *multiplicitats d'A*: són "*conjunts d'elements que, al seu torn, són individus d'una determinada espècie A; és a dir, objectes que es troben dessota el concepte A*".[110]

Els termes *finit* i *infinit* s'apliquen a les multiplicitats *generades per successions* amb llei de formació ben determinada:

> ... *si una multiplicitat s'aconsegeuix en la seva totalitat adjuntant successivament un element darrera un altre és finita...*
>
> ... *si una multiplicitat conté qualsevol part finita és una multiplicitat infinita.*[111]

Bolzano estableix l'existència de conjunts infinits i, si bé el conjunt en el que basa la qüestió no és pas un conjunt matemàtic[112], podem considerar-lo una *imatge bijectiva dels nombres naturals*. És a dir, per a Bolzano, el conjunt dels nombres naturals *existeix i és infinit*[113].

Bolzano considera també la correspondència que hi ha entre conjunts, però no en sap treure el concepte de *potència* que trobem a l'obra de Cantor. Bolzano, d'una gran finura en el cas finit, no arriba però a fer el salt en el cas infinit.[114] Diu:

> *Del fet que a cada element a d'A li poguem associar, mitjançant una regla, un element b d'B de manera que totes les còpies $(a+b)$ que hem format continguin tots els elements d'A i B una sola vegada... no ens autoritza pas a deduir-ne que aquests dos conjunts, quan són infinits, són iguals pel que fa a la seva multiplicitat; ben al contrari, malgrat que la relació sigui simètrica, poden ésser, desiguals pel que fa a la seva multiplicitat, de manera que un d'ells sigui una multiplicitat de la que l'altre en sigui part;*[115]

però, malgrat que l'equipol.lència, en el cas infinit, no permeti pas de garantir la igualtat de les multiplicitats, sí que permet d'establir un *cert ordre entre els conjunts infinits* —la dominància— i, en el cas finit, la *igualtat de multiplicitats*. Veiem-ne els textos de Bolzano:

> ... *Afirmo: dos conjunts que són infinits poden posar-se en relació recíproca de tal manera que, en primer lloc, sigui possible fer una còpia de cada objecte d'un dels conjunts en l'altre conjunt de manera unívoca; en segon lloc, és possible, al mateix temps, que un d'ells contingui a l'altre com a part pròpia...*

> ... *L'aspecte paradoxal —que no nego— lligat a aquesta afirmació sorgeix en el fet que la relació entre dos conjunts, consistent en la nostra possibilitat de reunir les parts en còpies de la manera tantes vegades explicitada, és completament suficient, quan els conjunts són finits, per establir la perfecta igualtat de llurs multiplicitats... Pot semblar que això hagi de succeir també quan els conjunts, en lloc d'ésser finits, són infinits. Pot semblar, he dit, però un estudi pregon revela que aquesta necessitat no existeix, precisament perquè la raó per la qual això succeeix en tots els conjunts finits és, precisament, llur finitesa i no succeïrà, per tant, quan els conjunts siguin infinits...*
>
> ... *Si suposem que dos conjunts A i B són finits..., aleshores A i B tenen les multiplicitats iguals [quan s'ha pogut establir una bijecció entre A i B]... Aquesta conclusió, però, no val quan un dels conjunts, per exemple el conjunt A, és infinit...*[116]

Així doncs, en Bolzano, amb totes les seves mancances i imprecisions, hi trobem ja el fet que *cal distingir* entre els conceptes d'*infinit actual* i de *variable no afitada* o *infinit potencial*; a més, l'infinit actual s'aplica a conjunts i la quantitat *mesura els seus elements*; un conjunt *A és finit* si, i només si, *és equipotent a un natural* i *és infinit* ssi *tot subconjunt finit n'és part*: els conjunts infinits compleixen la propietat de Dedekind: *tot conjunt infinit conté una part pròpia equipotent.* Finalment rebutja l'equivalència com a criteri per establir la igualtat en la grandària dels conjunts infinits i així ell mateix es tanca la porta. Cantor, però, uns trenta anys més tard, en eliminar aquesta barrera, ens portarà la *teoria de conjunts.*[117]

De les aportacions de Cantor, relatives a la teoria dels conjunts infinits, n'hem parlat ja abastament al §2, pp. 5–8. Recordem, però, tot de passada, que, per a ell, un conjunt és *finit* ssi *té la potència d'un nombre natural* i que pels conjunts infinits —que són els *no-finits*— afirma amb rotunditat que satisfan la condició de Dedekind i, en el cas de l'infinit més petit, n'afirma l'equivalència.[118] En l'obra de 1882 *no apareix* cap definició de conjunt finit, *dubtant fins i tot que sigui possible*[119]; el 1887, Cantor reemprèn un intent de definició del concepte de conjunt finit així com d'equivalència entre la seva definició i la de Dedekind[120], definició i demostració que apareixen en Dedekind, R. [1888][121]; aquí un conjunt A "*és infinit si és similar* — bijectable — *a un subconjunt propi d'ell mateix; altrament, és infinit*".

Disposem, doncs, de dues definicions del concepte de *finitud*; l'una deguda a Bolzano-

Cantor, té necessitat del concepte de nombre natural [i també de l'existència del conjunt dels nombres naturals]; l'altra, de Bolzano-Dedekind, en canvi, no té pas necessitat d'aquest concepte ni tampoc de l'existència del conjunts de *tots* els nombres naturals[122]; són:

> *Un conjunt A és finit ssi és equipotent a* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *per un cert nombre natural n, o bé és buit;*
>
> *un conjunt A és finit ssi no és equipotent a cap de les seves parts pròpies.*[123]

Aquestes dues definicions plantejaren, tot seguit, la qüestió de la seva equivalència o de la seva diferència. El mateix Dedekind n'establí ja l'equivalència el 1888[124] i, malgrat afirmar explícitament que no fa servir "*cap hipòtesi suplementària*", utilitza, com feu observar Betazzi, l'A.C. Aquest autor, per motius pedagògics, prefereix la definició de Cantor i distingeix ambdós conceptes d'infinit: "*infinits*" ho són els conjunts infinits en el sentit de Cantor i "*desenvolupables*" ['*svilupavile*'] ho són els conjunts infinits de Dedekind i estableix que "*tot conjunt desenvolupable és infinit*".[125] El recíproc, en canvi, malgrat l'autoritat de Dedekind, encara no s'ha establert — segons Betazzi.[126] La raó d'aquesta afirmació és l'ús per part de Dedekind de l'A.C. Un col.lega de Betazzi a l'**Acadèmia Militar de Turín**, Caesaro Burali-Forti adoptarà, en canvi, la definició de Dedekind i intentarà de demostrar la validesa del teorema.[127] Burali-Forti, però, introdueix un axioma nou:

> *Si u és una classe de classes no buides, aleshores u és injectable en* $\bigcup u$,[128]

que és erroni, i en base al qual estableix l'equivalència d'ambdues definicions [de fet el que necessita és: "*si u és infinit,* $\bigcup u$ *també ho és*"[129]]. B. Russell [1906] posà de manifest que, de fet, cal l'A.C. per poder garantir l'axioma de Burali-Forti i, en conseqüència, l'equivalència d'ambdues definicions de conjunt infinit. Uns anys més tard, a l'obra conjunta de Whitehead i Russell, s'estableix que és suficient l'A.C. numerable. De tota aquesta anàlisi n'esdevé una situació realment curiosa que és el que finalment hem de remarcar; si refusem l'A.C. *existeixen cardinals mitjaners més grans que qualsevol cardinal finit però que no són pas infinits de Dedekind.*[130]

El 1918, en el seu treball vinculat amb l'A.C., Sierpinski aprofundirà els diferents conceptes de finitud i llur equivalència davant l'A.C. Les seves definicions, però, eren totes elles equivalents, de fet, a una de les dues definicions esmentades més amunt — la de Cantor o la de Dedekind — i, en preseència de l'A.C., a una sola.[131] No obstant, Sierpinski observà que les equivalències solament precisen de l'A.C. *numerable*. Observà, a més, que *totes* aquestes equivalències depenen de la proposició

> *Si A és no numerable i B és numerable, aleshores $A - B$ té la potència d'A,*[132]

però totes les demostracions conegudes d'aquesta proposició depenen de l'A.C. A més, l'equivalència d'ambdues definicions és suficient per aconseguir dues proposicions més:

> *Si A és infinit i B és numerable, aleshores $A \cup B$ té la potència d'A.*
>
> *Si* $\aleph_0 <$ card A *i* $\aleph_0 =$ card B, *aleshores* $\aleph_0 <$ card $(A - B)$.[133]

Serà, però, novament Tarski qui, en un article força extens, *sistematitzarà la teoria dels conjunts infinits*.[134] El mateix Tarski és conscient d'aquest caràcter sistematitzador del seu treball ja que en fa esment, tot just en començar: "*Aquesta obra és, en gran part, sistematitzadora*". És una obra en la que els raonaments s'efectuen al sí de la teoria de conjunts de Zermelo[135], excloent-hi els axiomes de l'*infinit* i de l'*elecció*. A continuació ens ofereix una definició de conjunt infinit *essencialment nova*:

> *El conjunt A és finit quan, a tota classe $\mathfrak{K}$ de subconjunts d'A, hi pertany almenys un conjunt B els subconjunts propis del qual no són de la classe $\mathfrak{K}$.*[136]

A partir d'aquesta definició Tarski estableix totes les propietats fonamentals dels conjunts finits *que coneix*.[137]

Tarski estableix doncs:

> **Teorema 4.** *0 és un conjunt finit.*
>
> **Teorema 5.** *Si a és un objecte qualsevol, $\{a\}$ és un conjunt finit.*
>
> **Teoremes 6, 9.** *Si A i B són conjunts finits, $A \cup B$ també ho és. I recíprocament.*
>
> **Teoremes 8, 10.** *A és finit ssi tot subconjunt [propi] d'A és finit.*[138]

Arribat a aquest punt Tarki introdueix el *principi d'inducció* pels seus conjunts finits:

> **Teorema 13.** *Si A és un conjunt finit, A pertany a tota classe de conjunts $\mathfrak{K}$ que compleixi les condicions [d'inducció]:*

I. $0 \in \mathfrak{K}$;

II. *si* $B \in \mathfrak{K}$ *i* $a \in A$, *aleshores* $B + \{a\} \in \mathfrak{K}$.

Aquest és el *principi d'inducció completa per conjunts finits*[139] i juga un paper important a la resta del treball d'A. Tarski. Però Tarski va més lluny i estableix el recíproc:

Teorema 14. *Si A pertany a tota classe* $\mathfrak{K}$ *de conjunts que satisfà* I *i* II, *és finit.*[140]

Així constata que la seva definició de conjunt infinit coincideix amb les definicions *inductives*, introduïdes amb anterioritat:

- la definició de Whitehead-Russell [1912]: "*A és finit ssi A pertany a tota classe inductiva* $\mathfrak{K}$"[141];
- la definició de Sierpinski [1918]: "*A és finit ssi pertany a tota classe* $\mathfrak{K}$ *de conjunts tal que*
  1. $\emptyset \in \mathfrak{K}$;
  2. *si* $a \in A, \{a\} \in \mathfrak{K}$;
  3. *si* $B, C \in \mathfrak{K}, B \cup C \in \mathfrak{K}$".[142]
- la definició de Kuratowski [1920]: *A és finit ssi* $\mathcal{P}(A)$ *és l'única classe* $\mathfrak{K}$ *de conjunts que satisfà*:
  1. $\mathfrak{K} \subset \mathcal{P}(A)$;
  2. $\emptyset \in \mathfrak{K}$;
  3. *si* $a \in A, \{a\} \in \mathfrak{K}$;
  4. *si* $B, C \in \mathfrak{K}, B \cup C \in \mathfrak{K}$.[143]

Així resulta que aquestes tres definicions de *finitud* són la mateixa que la de Tarski i, de retruc, són la mateixa que la de Cantor.[144]

Tot seguit Tarski es preocupa de la relació que hi ha entre el seu concepte de finitud i les bijeccions i obté resultats anàlegs als que s'obtenen amb el concepte usual de finitud —el de Cantor:

Lema 18. *Si A i B són equipotents i A és finit, B és finit.*

Teoremes 19, 21. *A és finit ssi* $\mathcal{P}(A)$ *és finit.*

Teoremes 20, 22. *A és finit i tots els elements d'A són finits ssi* $\bigcup A$ *és finit.*

Teoremes 23, 25. *A és finit ssi* $\Pi A \neq \emptyset$ *i finit i tot element d'A és finit.*[145]

Aquests resultats el menen a un *axioma de l'elecció* per a conjunts finits:

> *Si $\mathfrak{K}$ és una classe no buida i finita de conjunts no buits disjunts, existeix un conjunt que, amb cada conjunt de $\mathfrak{K}$, té en comú un element i només un.*[146]

En el paràgraf següent Tarski relaciona la finitud amb la *potència dels conjunts*, apropant-se a la definició de Dedekind; això ho fa usant l'*equipotència* i la *dominància* de conjunts d'acord amb Zermelo[147] i estableix:

> **Teorema 32.** *Conjunts equipotents a conjunts finits són finits.*
>
> **Teorema 33.** *Conjunts dominats per conjunts finits són finits.*
>
> **Teorema 34.** *La llei de tricotomia per A i B, quan A és finit.*[148]
>
> **Teorema 35.** *Si A és finit i B no ho és, B domina A.*

Finalment arriba al teorema central d'aquest paràgraf; aquest resultat ens diu que, si A és finit [en el sentit de Tarski], *és finit de Dedekind*:

> **Teorema 36.** *Si A és finit i B és un subconjunt propi d'A, A no pot tenir pas la mateixa potència que B*[149]

i constata que per establir el recíproc cal l'A.C.[150] Recordem que Tarski havia criticat la definició de Dedekind de conjunt finit en dir que "*no té sòlids fonaments matemàtics*" [veieu la nota 137]. També ens recorda que Whitehead i Russell[151] distingeixen els conjunts finits de Dedekind —que anomenen "*no reflexius*"— dels "*conjunts inductius*" que són els conjunts finits en sentit aritmètic. A més n'estudiaren les propietats d'un i altre i, sense fer ús de l'A.C., aconseguiren d'establir l'equivalència entre la definició aritmètica —que és la definició de Tarski— i

> *A és un conjunt finit ssi cap subfamília pròpia de $P(\mathcal{P}(A))$ no té la potència de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.*[152]

Finalment, abans d'endinsar-se en la finitud i l'ordre, estableix:

> **Teorema 40.** *Tota classe no buida $\mathfrak{K}$ de conjunts finits admet almenys un element de potència mínima.*
>
> **Teorema 41.** *Tota classe no buida de conjunts $\mathfrak{K}$, en la qual tot element està dominat per un conjunt finit C, admet almenys un element de potència màxima.*[153]

En el §6 analitza el concepte de finitud i el seu vincle amb la noció d'*ordre*, seguint el mètode desenvolupat per Hessenberg i simplificat més tard per Kuratowski[154], arribant a la conclusió contrària a la que havia arribat Schoenflies[155]. Tarski introdueix el concepte d'*odre en A* sense recórrer, com diu ell mateix, a la noció més general de relació:

> *Un ordre en A és una família maximal $\mathfrak{K}$ de subconjunts d'A en la qual la relació d'inclusió és total*

és a dir, $\mathfrak{K}$ és un ordre en A ssi (i) $\forall B \in \mathfrak{K},\ B \subseteq A$; (ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathfrak{K},\ B_1 \subseteq B_2$ o $B_2 \subseteq B_1$; (iii) $\mathfrak{K}$ és maximal amb aquestes condicions.

A més, si tota subfamília no buida $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{K}$ admet un element mínim, diem que $\mathfrak{K}$ és un *bon ordre en A*[15]; si admet element màxim i mínim és un *doble bon ordre en A*. Aleshores estableix una nova definició:

> *A és finit ssi existeix una subfamília maximal de $\mathcal{P}(A)$ totalment ordenada per $\subseteq$* [i.e: *una cadena*] *que és un doble bon ordre en A.*[157]

Aquesta definició és deguda a Stäkel[158]; Tarski, a més, estableix el resultat següent:

> *A és finit ssi*
>
> i) *existeix una classe $\mathfrak{K}$ que ordena A;*
>
> ii) *tot ordre en A és un bon ordre en A.*[159]

Al darrer paràgraf Tarski analitza la segona definició de Dedekind així com la de Zermelo —basades en el concepte de Schröder[160]— i estableix el resultat que segueix:

> *Un conjunt A és finit ssi existeix una bijecció que transforma A en un subconjunt propi d'A, però no passa pas el mateix amb cap subconjunt propi d'A.*[161]

Aquesta definició no és pas equivalent a la de la no equipotència del conjunt amb cap de les seves parts pròpies ja que, sense fer ús de l'A.C., és equivalent a la definició de Cantor, mentre que l'altra, no![162]

En acabar l'article A. Tarski — deixeble fidel de Russell i Whitehead i els **Principia** que coneix bé[163] —introdueix una *col.lecció* de possibles definicions de conjunt finit. Són:

> I. *A és finit ssi tota família no buida de subconjunts d'A admet un element $\subseteq$-maximal.*
>
> II. *A és finit ssi tota cadena no buida de subconjunts d'A admet un element $\subseteq$-maximal.*

III. *A és finit ssi cap subconjunt propi de $\mathcal{P}(A)$ és equipotent a $\mathcal{P}(A)$.*

IV. *A és finit ssi cap subconjunt propi d'A és equipotent a A.* És la definició de Dedekind.

V. *A és finit ssi no és pas la unió de dos subconjunts disjunts no buits cada un d'ells equipotent amb A.*[164]

Sense l'A.C. és possible d'establir I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow^{(*)}$ III $\Rightarrow$ IV $\Rightarrow$ V. Aquestes implicacions són fàcils llevat de la implicació marcada amb (*), un resultat que fou establert per Kuratowski[165].

Sense l'A.C., però, no sabem pas demostrar l'equivalència d'aquestes definicions, si bé l'equivalència d'I i III solament necessita l'A.C. *numerable.*[166] Tarski, en ausència de l'A.C., estableix *diversos graus d'infinitud o de finitud,* no equivalents i ordena definitivament les qüestions plantejades per Whitehead-Russell i Betazzi.

Amb aquest treball Tarski donava un nou impuls a l'anàlisi de la importància de l'A.C. —o d'algunes de les seves variants— en la línia marcada pels **Principia**[167] alhora que suggeria a A. Fraenkel[168] dues qüestions addicionals:

- *És possible d'establir l'equivalència entre les definicions d'A. Tarski amb axiomes més febles que l'A.C.?*[169]
- *Existeixen dues definicions de finitud l'equivalència de les quals impliqui l'A.C.?*

La segona entrava de ple en les preocupacions de Tarski i, el 1938, li donà una resposta afirmativa, introduint *tres noves definicions de finitud* de tal naturalesa que l'equivalència de qualsevol d'elles amb la definició usual implicava necessàriament l'A.C. Són:

VI. *A és finit ssi l'ordre invers d'un bon ordre en A és un bon ordre en A;*

VII. *A és finit ssi A té com a màxim un element o bé pot ésser dividit en dos conjunts B i C, cada un d'ells de potència més petita que la potència d'A;*

VIII. *A és finit ssi A té com a màxim un element o bé potència inferior a la potència d'$A \times A$.*[170]

Estableix que VI $\Leftrightarrow$ I equival al *principi de la bona ordenació* [P.B.O.]: *tot conjunt es pot ben ordenar*; VII $\Leftrightarrow$ I equival a : *si κ és un cardinal infinit i $\kappa = \lambda + \nu$, aleshores $\kappa = \lambda$ o*

$\kappa = \nu$ [que és una de les formulacions possibles de la proposició de Leśniewski esmentada a la p. 2] i, finalment, estableix que VIII $\Leftrightarrow$ I implica que, *per a tot* λ *infinit*, $\lambda^2 = \lambda$ que, com sabem — veieu p. 2 — és equivalent a l'A.C.[171]

Tarski va més lluny encara i ofereix una definició de *conjunt finit* l'equivalència de la qual amb el concepte usual *és equivalent* a la H.G.C.:

> *A és finit ssi A té com a màxim un element o bé existeix un conjunt B de potència més gran o igual que la potència d'A i inferior a la potència de* $\mathcal{P}(A)$[172]

D'aquesta manera, doncs, Tarski, el 1938, ha provat fora de tota dubte que la definició *usual* de conjunt *finit*, que no precisa en la seva formulació de l'A.C., és prou bona per desenvolupar *una* teoria de conjunts [sense A.C.], si bé, en disposar de l'A.C., admet *formulacions alternatives*.

A més deixava ben clar que *la frontera entre finit i infinit és molt menys clara* que no es crèien els qui s'oposaven a la teoria zermeliana de conjunts. J. von Neumann[173] arribarà a emprar aquesta *vaguetat* entre finit i infinit com quelcom prou sòlid per poder *rebutjar definitivament les filosofies intuïcionistes i les seves teories de conjunts*, ja que, en rebutjar l'A.C., apareixen no solament els *cardinals intermedis* sinó també molts altres tipus de conjunts que són infinits en un *sentit ampli*, però que, en canvi, no ho són en un sentit més estàndard. L'A.C. esdevé indispensable com eina simplificadora i clarificadora pel que fa al concepte de finitud.[174]

6. LA DESCOMPOISCIÓ EN CONJUNTS QUASI-DISJUNTS.

Tarski, novament, seguirà un camí iniciat per Sierpinski i relacionat amb l'A.C. i, sobretot, amb la H.G.C.; ara però les idees sorgeixen de l'estudi de l'*existència de subconjunts d'*$\mathbb{R}$ *no mesurables*.

Sierpinski, a finals de la segona dècada del segle XX, estava preocupat pel lligam existent entre l'A.C. i el conjunts *no mesurables*.[175] Aquestes recerques el portaren, el 1928, a introduir els *conjunts quasi-disjunts*:

> *Dos conjunts M i N són quasi-disjunts ssi la seva intersecció té potència inferior a la potència de cada un d'ells* [i.e.: card $(M \cap N) <$ màx (card M,card N)][176]

i tot seguit demostra:

> *Tot conjunt infinit de potència κ es pot descomposar en una classe $\mathfrak{K}$ de potència superior a κ de conjunts quasi-disjunts de potència κ.*[177]

A partir d'aquí i en presència de l'A.C., Tarski elabora un conjunt de resultats que després lliga amb la H.G.C. i amb la *cofinalitat*. Volem indicar breument els resultats que obté. En primer lloc introdueix el concepte de *grau de disjunció*[178] $\delta(\mathfrak{K})$ d'una classe $\mathfrak{K}$ de conjunts com el cardinal

$$\delta(\mathfrak{K}) = \text{mín}\ \{\mu : \text{ per a tot } X, Y \in \mathfrak{K}, X \neq Y, \text{ card } (X \cap Y) < \mu\}.$$

L'existència del grau de disjunció descansa en el P.B.O.[179] Tot seguit estableix el següent teorema:

> **Teorema 1.** *Si $\aleph_0 \leq$ card $M = \kappa$ i M es deixa descompondre per una classe $\mathfrak{K}$ de potència λ tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$, aleshores $\lambda \leq \kappa^{\mu}$* [180]

i en la demostració fa ús de l'A.C. en associar, a cada $X \in \mathfrak{K}$ amb card $X \geq \mu$, un subconjunt $F(X)$ de cardinal μ. La definició de $\delta(\mathfrak{K})$ i la hipòtesi $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$ permeten de garantir que F és biunívoca[181]. D'aquest fet en resulta, doncs, que la classe

$$\mathfrak{L} = \{F(X) : X \in \mathfrak{K} \text{ i card } X \geq \mu\} \cup \{X : X \in \mathfrak{K} \text{ i card } X \leq \mu\};$$

és equipotent a $\mathfrak{K}$. Si $\mathfrak{N}$ designa la classe

$$\mathfrak{N} = \{X : \emptyset \neq X \subseteq M \text{ i card } X \leq \mu\}$$

resulta que $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{L}$.

Ara és fàcil veure que $\lambda =$ card $\mathfrak{L} \leq (\text{card } M)^{\mu} = \kappa^{\mu}$.[182]

D'aquest teorema n'obté un corol.lari que diu:

> **Corol.lari 6.** *Cap conjunt infinit M de potència $2^{\aleph_0}$ no admet mai una classe de descompiosició $\mathfrak{K}$ de cardinal $> 2^{\aleph_0}$ tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \aleph_0$.*[183]

Seguidament, però, obté la condició necessària i suficient que s'ha de cumplir per tal que un conjunt infinit M de potència $2^{\aleph_0}$ admeti una classe de descomposició $\mathfrak{K}$ de cardinal $> 2^{\aleph_0}$ si el grau de disjunció de $\mathfrak{K}$ és $\leq \aleph_1$. Aquesta condició és

$$2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1} \text{ [184]}.$$

És possible donar una condició necessària i suficient si concretem que card $\mathfrak{K}$ és $2^{2^{\aleph_0}}$ [que, evidentment, $> 2^{\aleph_0}$]; aquesta condició és

$$2^{2^{\aleph_\alpha}} = 2^{\aleph_{\alpha+1}}$$ [185].

Un altre resultat d'interès s'obté quan en el **teorema 1** de Tarski fem $\lambda > \kappa$: aleshores la condició és $\kappa < \kappa^\mu$ [186]. Però en aquest cas, a diferència del que succeeix amb el teorema general, Tarski aconsegueix d'obtenir el recíproc[187]:

> **Teorema 21.** *Sigui κ un cardinal infinit. La desigualtat $\kappa < \kappa^\mu$ és una condició necessària i suficient per tal que tot conjunt M de potència κ sigui descomposable en una classe $\mathfrak{K}$ de potència $> \kappa$ de conjunts infinits quasi-disjunts i tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$*[188]

i d'ell n'obté el teorema de l'article de Sierpinski [1928][189] i una condició necessària i suficient per tal que la H.G.C. sigui falsa.[190] La desigualtat $\aleph_{\alpha+1} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}$ equival a $\aleph_{\alpha+1} \neq 2^{\aleph_\alpha}$ i ara podem aplicar el teorema anterior i obtenim

> **Corol.lari 24.** *La desigualtat $\aleph_{\alpha+1} \neq 2^{\aleph_\alpha}$ és equivalent a que tot conjunt M de potència $\aleph_{\alpha+1}$ sigui descomposable en una classe $\mathfrak{K}$ de potència $> \aleph_{\alpha+1}$ de conjunts quasi-disjunts i tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \aleph_\alpha$.*

Encara trobem un altre lligam entre els resultats de Tarski i la H.G.C.[191] —via la *cofinalitat*— que ell mateix resumeix amb els termes següents:

> *Amb l'ajud de la* H.G.C. ... *podem establir una condició necessària i suficient per tal que un conjunt M amb card $M = \aleph_\alpha$ sigui descomposable en una classe $\mathfrak{K}$ de potència $> \aleph_\alpha$ [més precisament de cardinal $2^{\aleph_\alpha}$] formada per conjunts quasi-disjunts i tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu = \aleph_\beta$ [i, en particular, tal que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \aleph_0$]. Aquesta condició s'expressa amb la desigualtat $\beta \geq \mathrm{cf}(\alpha)$ [i quan $\beta = 0$ pot èsser reformulada així : $\alpha = 0$ o bé és un nombre ordinal de segona espècie cofinal amb ω]*[192]

D'ací n'obté el recíproc del **teorema 1** i això ho veu d'una manera completament indirecta.[193] Aquesta presentació indirecta deixa pendent, àdhuc amb la H.G.C., saber si la proposició

> **Corol.lari 2.** *Si un conjunt infinit M de potència κ admet una descomposició via una classe $\mathfrak{K}$ de potència λ, formada de conjunts de potència μ tals que $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$ i $\kappa > \mu$, aleshores resulta que $\kappa \leq \lambda \leq \kappa^{\mu}$*[194],

que és un simple corol.lari del **teorema 1**, admet un recíproc o si, pel contrari, el seu recíproc és fals. Aquest fet deixarà insatisfet Tarski el qual en el seu treball de 1929 ens donarà la solució d'aquest problema pendent.[195] Tarski reemprèn doncs l'observació de la nota 192 i veu que, per a $\beta = \mathrm{cf}(\alpha)$ i $\beta = \alpha$, és possible fer la descomposició del conjunt M mitjançant una classe $\mathfrak{K}$ formada solament per conjunts de potència $\aleph_\beta$. Això planteja "*de forma natural la qüestió següent: és possible de fer la mateixa descomposició per d'altres valors de β, sempre que compleixen la relació $cf(\alpha) \leq \beta \leq \alpha$?*[196] Aquesta qüestió —Tarski no la sabia resoldre el 1928— obté una solució el 1929 que depèn de la H.G.C. i segons la qual

> *la descomposició no sempre és possible i la condició necessària i suficient per a l'existència de la descomposició s'expressa per la fòrmula* $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$ [*amb la desigualtat evident* $\beta \leq \alpha$].[197]

En aquest treball, a més, aconsegueix d'establir que el corol.lari 2 del seu treball de 1928 no admet recíproc i que les hipòtesis P i Q són falses [veieu les notes 194 i 195][198] i acaba amb aquestes paraules:

> *És possible de caracteritzar breument els resultats de la meva nota del volum 12 i de la nota actual amb les paraules següents: hem estudiat* [amb la *H.G.C.*] *totes les relacions existents entre quatre nombres cardinals que hom pot fer correspondre a una classe arbitrària de conjunts $\mathfrak{K}$; a saber la potència de $\mathfrak{K}$, la potència de la suma de tots els subconjunts-elements de $\mathfrak{K}$, el grau de disjunció de $\mathfrak{K}$ i el mínim de $\mathfrak{K}$*[199]

i acaba dient: *en quina mesura la* H.G.C. *ha d'intervenir en les demostracions dels teoremes d'aquest domini és quelcom que cal elucidar.*[200] Amb aquest treball, Tarski aconsegueix donar un impuls molt important als conceptes de *cofinalitat* i a la H.G.C.

7. ELS RESULTATS DE BERKELEY.

Sierpinski i Tarski, instal.lats ja a Berkeley, als E.E.U.U., després de la Segona Guerra Mundial, reemprenen els vells treballs polacs —en particular l'important treball de Lindenbuam-Tarski de 1926— i els aprofundeixen.

Sierpinski [1947; 1948] aconsegueix d'establir l'equivalència entre les proposicions **VI** de Tarski[201] [veieu la p. 4] i la proposició de tricotomia dual [veieu la p. 9] i l'A.C[202].

L'any 1946 havia establert ja l'equivalència entre l'A.C. i la proposició

per a tot κ *i* λ, *si* κ, $\lambda < \mu$, *aleshores* $\kappa.\lambda \neq \mu$.[203]

També havia aconseguit implicar l'A.C. de la H.G.C. segons la formulació H_1 [veieu la p. 8].[204]

Aconseguí també[205] que la forma *feble del principi de partició*,

si $\kappa \leq^* \lambda$, *aleshores* λ *no és més petit que* κ,

indicada ja a la p. 10, implica

$$\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$$

i

l'existència d'un subconjunt no mesurable d'$\mathbb{R}$.

Tarski, per la seva banda, aprofundirà també el seu treball de 1926 i aconseguirà un bon nombre de resultats que citarem com a cloenda d'aquest treball sobre la *teoria de conjunts de Tarski*. Estableix que

P: *Si* $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, *on* $(X_i)_{i\in\omega}$ *és una succesió infinita de conjunts disjunts i* $\overline{\overline{T}} < \overline{\overline{S}}$, *aleshores, per a un cert* $n \in \omega$, $\overline{\overline{T}} < \bigcup_{i=1}^{n} X_i$

és equivalent a l'A.C.[206] tal com havien conjecturat, una vintena d'anys endarrera, ell i Lindenbaum[207]. Tarski, de fet, analitza les diferències entre les dues proposicions algèbriques següents:

T_1 : *sigui* $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n, \cdots$ *un sucessió infinita de cardinals i* λ *un cardinal, si*

$$\lambda < \sum_{n<\infty} \kappa_n,$$

existeix un nombre natural p *tal que* $\lambda < \sum_{n<p} \kappa_n$.

T_2 : *sigui* $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n, \cdots$ *un sucessió infinita de cardinals i* λ *un cardinal, si, per a tot nombre natural* n,

$$\sum_{n<p} \kappa_n \leq \lambda,$$

aleshores $\sum_{n<\infty} \kappa_n \leq \lambda$

i observa que:

I. *l'A.C. numerable implica* T_2;

II. T_2, *juntament amb l'A.C., implica* T_1;

III. T_1 *és equivalent a l'A.C.*[208]

El 1949 Tarski escriurà un article dedicat al professor Waclaw Sierpinski amb motiu de la celebració dels seus "*quaranta anys com a professor i estudiós*"; en ell ens ofereix una demostració realment difícil de dues lleis de simplificació per a múltiples finits de nombres cardinals:

I. *donat un nombre natural* $m \neq 0$ *i dos nombres cardinals arbitraris,* κ_1 *i* κ_2, *si* $m \cdot \kappa_1 = m \cdot \kappa_2$, *aleshores* $\kappa_1 = \kappa_2$;

II. *donat un nombre natural* $m \neq 0$ *i dos nombres cardinals arbitraris,* κ_1 *i* κ_2, *si* $m \cdot \kappa_1 \leq m \cdot \kappa_2$, *aleshores* $\kappa_1 \leq \kappa_2$

sense fer ús de l'A.C. Observa que les lleis de cancel.lació en el cas general no són deduïbles com tampoc no ho són les lleis de cancel.lació per a la suma[209], si bé estableix que les lleis de cancel.lació additives són equivalents a que el cardinal que hom simplifica sigui un infinit de Dedekind:

- $\kappa \neq \kappa + 1$ [i.e.: κ *és infinit de Dedekind*];
- $\kappa + \lambda = \kappa + \mu$ *implica* $\lambda = \mu$;
- $\kappa + \lambda \leq \kappa + \mu$ *implica* $\lambda \leq \mu$;

són equivalents.[210]

Aquest article conté també:

si $m \neq 0$ *i* $\kappa < \lambda$, *aleshores* $m \cdot \kappa < m \cdot \lambda$.[211]

En aquesta època, Kelley, un col.lega de Tarski a la Universitat de Berkeley, estableix l'equivalència entre l'A.C. i el *teorema de Tychonoff* [veieu nota , p.]; diu:

el teorema de Tychonoff d'espais T_1 *és equivalent a l'A.C.*[212]

i fa notar que, en no disposar de l'A.C., el concepte de conjunt *finit* que intervé a la definció d'espai topològic T_1 cal cercar-lo entre les definicions de conjunt finit donades per A. Tarski en el seu treball de 1924. [Veieu §5, 14-23.]

La demostració de Kelley és molt simple[213] i és la que hom empra encara avui dia.

També és per aquests anys que un deixeble de Tarski, en resposta a una qüestió plantejada pel mestre, establirà "*l'equivalència entre l'A.C. i un cas particular del lema de Zorn*"[214]:

> *Tota família de conjunts admet una subfamília maximal disjunta* [és a dir: *una subfamília maximal amb la propietat que cada dos dels seus membres diferents siguin disjunts*][215]

El 1954 Tarski reemprèn el tema de l'aritmètica cardinal establint tres maneres diferents d'expressar que un cardinal κ té un successor immediat [és a dir, un següent]:

S_1. *Per a tot cardinal* κ, *existeix un cardinal* λ *tal que* (i) $\kappa < \lambda$, *i* (ii) *no existeix cap cardinal* μ *tal que* $\kappa < \mu < \lambda$.

S_2. *Per a tot cardinal* κ, *existeix un cardinal* λ *tal que* (i) $\kappa < \lambda$, *i* (ii) *per a cada cardinal* μ *la fórmula* $\kappa < \mu$ *implica* $\lambda \leq \mu$.[216]

Estableix que S_1 es pot provar sense fer ús de l'A.C.; S_2 és equivalent a l'A.C. El primer resultat havia sigut establert pel mateix Tarski ja en 1927[217] mentre que el segon és un resultat que acaba d'aconseguir tot just pels anys cinquenta.[218]

Tarski recorda l'íntima relació d'aquestes sentències amb dues sentències del text d'ell mateix i Lindenbaum de 1926[219] així com amb el seu propi treball de 1948.[220].

Per establir aquests dos resultats, Tarski necessita sis lemes previs:

I. *Si* $\mathfrak{a}$ *és un àlef i* κ *és un cardinal i* $\mathfrak{a} \leq \kappa, \mathfrak{a} + \kappa = \kappa$;

II. *Si* $\mathfrak{a}$ *és un àlef i* κ *i* λ *són cardinals i* $\mathfrak{a} \leq \kappa + \lambda$ *o* $\mathfrak{a} \leq \kappa \cdot \lambda$, *aleshores* $\mathfrak{a} \leq \kappa$ *o* $\mathfrak{a} \leq \lambda$;

III. *Si* κ *és finit,* $\aleph(\kappa)$ *és finit i, a més,* $\aleph(\kappa) = \kappa + 1$. *Si* κ *es no finit, aleshores* $\aleph(\kappa)$ *és un àlef*;

IV. $\aleph(\kappa) < \kappa$ *és falsa per a tot* κ. $\mu < \aleph(\kappa)$ *implica* $\mu \leq \kappa$ *per a tota parella de cardinals* κ *i* μ;

V. *Per a tot cardinal* κ, $\kappa < \kappa + \aleph(\kappa)$. *Si* κ *és no finit, no existeix cap cardinal* μ *tal que* $\kappa < \mu < \kappa + \aleph(\kappa)$;

VI. *Si* κ *és un cardinal no finit,* $\aleph(\kappa^2) = \aleph(\kappa)$[221].

Aleshores de V en resulta fàcilment S_1: sigui κ un cardinal arbitrari; si $\kappa < \kappa + 1$, aleshores el cardinal $\lambda = \kappa + 1$ satisfà la condició; si $\kappa = \kappa + 1$, κ és infinit i V clou, en aquest cas, la demostració.

Tot seguit veu que S_2 és equivalent a l'A.C.:

- l'A.C. implica la llei de tricotomia i S_2 s'obté trivialment d'S_1 si es disposa de la llei de tricotomia:
- L'altra implicació la desenvolupa de la forma següent: sigui κ un cardinal no finit i suposem que

(1) $$\kappa < \kappa^2.$$

Per S_2 sabem que existeix un cardinal λ tal que

(2) $$\kappa < \lambda$$

i tal que, per a tot cardinal μ,

(3) $$\kappa < \mu \text{ implica } \lambda \leq \mu.$$

Ara, en (3), fem $\mu = \kappa + \aleph(\kappa)$ i, per V, obtenim

(4) $$\lambda \leq \kappa + \aleph(\kappa).$$

De (2) i (4) i V resulta que

(5) $$\lambda = \kappa + \aleph(\kappa).$$

Ara, en (3), fem $\mu = \kappa^2$ i, aplicant (1), resulta que

$$\lambda \leq \kappa^2$$

i, per V,

$$\aleph(\kappa) \leq \kappa^2$$

i, per VI,

$$\aleph(\kappa^2) \leq \kappa^2$$

en contra de IV.

Per tant, $\kappa^2 = \kappa$ per a tot cardinal infinit κ. Ara aplica els seus resultats de 1924. En acabat, A. Tarski ofereix una altra formulació del fet que tot cardinal admeti un següent:

S_3. *Per a cada cardinal* κ, *existeix un cardinal* λ *tal que* (i) $\kappa < \lambda$ *i* (ii), *per a cada cardinal* μ, *la fórmula* $\mu < \lambda$ *implica* $\mu \leq \kappa^{222}$, però no aconsegueix pas d'establir si S_3 és equivalent a l'A.C., ni tampoc si S_3 és vàlid a Z.F. [sense l'A.C.] encara que aquesta possibilitat no li sembla pas gaire versemblant[223].

T. Jech[224], usan les tècniques del *forcing*, demostra que S_3 no és pas vàlida a Z.F. Més tard J.K. Truss aconseguirà d'establir l'altra conjectura: S_3 implica $\kappa = 2\kappa$ per a tot κ infinit.[225]

Tarski, en aquests anys, com hem vist a les nota [p. 36], reprèn algunes qüestions de teoria de conjunts que intenten de cloure les seves intuïcions i aportacions de l'època polaca, però els seus interessos s'adrecen, cada cop més, vers la *teoria de models* i la *lògica algèbrica*.[226]

Les seves aportacions a la teoria de conjunts, inseparables, com hem vist, de les de Sierpinski, són però quantioses[227] i valia la pena fer-ne una ressenya encara que solament fos com homenatge a l'home, al lògic, al matemàtic, al mestre de tots nosaltres.

Començat a Barcelona, el 5 de març de 1987,
i acabat a Barcelona, el 13 de febrer de 1989.

NOTES.

1. L'axioma de l'elecció [A.C.] el trobem explicitat en una consideració final d'E. Zermelo [Zermelo, E. [1904], 516], quan diu:

> *Aquesta demostració es basa en la hipòtesi que ... per a una totalitat, àdhuc infinita, de conjunts, existeix sempre una correspondència que, a cada conjunt, li associa un dels seus elements...*

Així apareix en la literatura la *funció d'elecció*, lligada a l'enunciat de l'A.C., que ens ofereix Zermelo; aquest autor reprèn aquesta hipòtesi més explícitament a Zermelo, E. [1908], 110, anomenant-la *axioma IV*, i a Zermelo E. [1908a], 274, on l'anomena el *principi de l'elecció*. B. Russell [Russell, B. [1906], 47] li dona la formulació actual:

> *Donada una classe arbitrària W, existeix una funció f(u) tal que, si u és una classe no buida d'W, aleshores f(u) és un element d'u.*

Veieu Pla, J. [1983], 103 i 143.

2. Veieu les cartes de R. Baire, E. Borel, J. Hadamard i H. Lebesgue en Baire, R. [1905] o en Borel, E. [1914], 150-160. Una traducció anglesa la trobem en Moore, G.H. [1982], 11–320.

3. Vitali, G. [1905], 5. És d'interès citar les darreres línies del treball de Vitali:

> *Algú podria objectar quelcom respecte de la consideració del conjunt G_0. Està perfectament justificada si s'admet que el continu es pot ben ordenar. Però per a aquells que no ho vulguin admetre, el nostre resultat significa que* la possibilitat dels problemes de la mesura dels conjunts de punts d'una recta i de la bona ordenació del continu no poden pas coexistir.

Veieu Pla, J. [1983], 112–113 i [1984a].

4. Banach, S.-Tarski, A. [1924], 244. El lector interessat trobarà una exposició prou detallada a J. Pla [1983] i, per aquesta raó, en donem solament una pincellada. El resultat assolit és:

> *En un espai euclidi de dimensió $n \geq 3$, dos conjunts arbitraris, afitats i amb punts interiors [per exemple, dues esferes de radis diferents], són equivalents per descomposició finita;*

és a dir, existeixen dues descomposicions finites del mateix nombre de parts, respectivament equipotents. [La paradoxa és de caire *intuïtiu* en relació a la *mesura*: com és possible que tinguin mesures *diferents* si els hem descomposat en parts equipotents i, de retruc, de la mateixa mesura? Atenció a la darrera afirmació —i de la mateixa mesura: *són necessàriament mesurables les parts de la descompoisició? La mesura es conserva per bijecció?*]

La demostració, que usa l'A.C., es fonamenta en l'anomenada *paradoxa de Hausdorff*, segons la qual

> *és possible de descompondre la superfície S de l'esfera en quatre subconjunts disjunts B', C', D' i E' tals que*

i. *E' és numerable;*

ii. *B', C' i D' són equipotents;*

iii. *B' és equipotent a $C' \cup D'$.*

[Veieu Hausdorff [1914], 469.]

5. Cal indicar que, ultra les aportacions de Russell i Whitehead en els **Principia Mathematica** [1910–1913], l'esforç més important per posar l'accent en la utilització o no de l'A.C. en les matemàtiques és degut, sense cap mena de dubte, a W. Sierpinski que s'inicià en aquesta problemàtica quan treballava en col.laboració amb N. Luzin a Rússia en el període 196–1918. També hi contribuí , però, M. Suslin [cf. Cassinet, J.-Guillemot, M. [1983], **1**, 403–407]. No obstant, serà el treball de W. Sierpinski de 1918 el que marcarà la fita més important en aquest sentit; en una monografia de 55 pàgines —de lectura indispensable per tots els que desitgen conèixer el paper que jugà l'escola polaca en la normalització de l'ús de l'A.C. en les matemàtiques— Sierpinski ens mostra com intervé l'A.C. en la noció de *conjunt finit*; en la *teoria dels nombres cardinals*; en la *teoria dels nombres ordinals*; en la *teoria de la mesura*; en l'*anàlisi*; en la *construcció d'exemples*; en problemes que involucren *funcions no mesurables*. A més introdueix l'axioma de les *eleccions depenents*, que ja havia sigut posat de manifest per H. Lebesgue en 1904. Ultra aquest treball cal remarcar els **Fundamenta Mathematica** dels anys 1920–1928, una notícia de les quals la podem trobar a Cassinet, J.-Guillemot, M. [1983], **1**, 411–414.

   Així doncs, les aplicacions de l'A.C. en les matemàtiques actives eren cada dia més, però calia consolidar d'alguna manera un axioma *tan poc constructiu i intuïtiu* amb d'altres resultats més naturals i acceptables que li fossin equivalents.

6. Veieu Pla, J. [1983], 143–150; 151–161.

7. Sierpinski no es pronunciarà mai per la validesa o falsedat de l'A.C. Únicament es procuparà de deixar ben clara la seva utilització [o no utilització] en les demostracions dels teoremes matemàtics. Són prou clares les paraules d'A. Mostowski:

   > *Dues qüestions generals interessaren Sierpinski al llarg de la seva vida. Una d'elles fou l'A.C. i el seu paper en les demostracions* [*tant en les relatives a la teoria de conjunts com en les altres disciplines matemàtiques*]. *Ja el 1918 va escriure un ampli article relacionat amb aquesta qüestió. En els seus treballs ulteriors no deixà pas d'nteressar-se pels raonaments en els que hom fa ús d'aquest axioma i de com eliminar-lo. Posà igualment interès en que les seves construccions fossin efectives. En els seus treballs, llibres i conferències es declarà sempre deliveradament neutre en relació a la validesa o falsedat de l'axioma de l'elecció, si bé insistí en la importància de distingir les demostracions que feien ús d'aquest axioma de les que passaven d'ell*

   [Veieu Sierpinski, W. [1974], 11–12.]

8. E. Zermelo [Zermelo, E. [1904], 514 i 516] estableix, basant-se en l'A.C., que *tot conjunt es pot ben ordenar* [p. 516], però no diu res del recíproc.

   B. Russell [Russell, B. [1906], 49] estableix l'equivalència entre l'A.C. i el principi multiplicatiu:

   > *Sigui $\mathfrak{K}$ un conjunt de classes no buides i disjuntes dos a dos; existeix, almenys, una classe formada d'un terme de cada element de $\mathfrak{K}$*

i segueix:

> *Aquest axioma és més particular que el de Zermelo; pot deduir-se d'ell. El recíproc, però, també és possible, però que jo sàpiga fins ara no l'ha demostrat mai ningú.*

F. Hartogs [Hartogs, F. [1915], 438] estableix, en canvi, el P.B.O. en base a la *comparabilitat de conjunts* —de fet, de la comparabilitat d'un conjunt i un àlef—, afirmat explícitament l'equivalència d'ambdós principis: *Per a cada cardinal* κ*, existeix un* $\aleph(\kappa)$ *tal que* $\aleph(\kappa) \leq \kappa$ *és fals.*

9. Són principis que, en certes condicions, estableixen l'*existència d'elements maximals* en conjunts parcialment ordenats. S'havien emprat ja abans que Hausdorff no els establís el 1914 [Hausdorff, F. [1914], 140–141], fent ús de l'A.C.; ell però no es preocuparia pas d'establir l'equivalència entre els *principis maximals* i l'A.C. [Veieu Campbell, P.J. [1978], Cassinet, J.-Guillemot, M. [1983], **1**, 369–376 i Moore, G.H. [1982], 167–170.]

10. M. Zorn [Zorn, M.[1935], 667] considera el següent principi [P.M.]:

> *Si* $\mathfrak{A}$ *és una família de conjunts tals que la unió de cada cadena* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ *és d'*$\mathfrak{A}$*, existeix un membre* $A^* \in \mathfrak{A}$ *que* <u>*no*</u> *és subconjunt propi de cap membre d'*$\mathfrak{A}$*.*

M. Zorn introdueix el seu P.M. per tal de substituir el P.B.O. en certes demostracions de caire algèbric, como ara els resultats de Steinitz de teoria de cossos, però solament de passada entra a considerar la qüestió de l'equivalència entre el P.M. i l'A.C. o entre el P.M. i el P.B.O. quan diu, dues pàgines més endavant [p. 669]:

> *En un altre treball discutiré les relacions entre el* P.M. *i l'*A.C. *i el* P.B.O. *Provaré que, en presència de l'axioma de les parts, són equivalents.*

Seran, però, J. Tuckey i O. Teichmüller els qui establiran l'equivalència entre certs principis maximals [Tuckey, J. [1940], 7–8; Teichmüller, O. [1939], 570 i segs], entre els que es troba el principi maximal de Zorn, i l'A.C. [Veieu §7, 28 i nota 211.]

11. Qüestions relatives a l'existència de subàlgebres maximals lligades a un element [Schmidt, J. [1953], 40-41], on per àlgebra cal entendre estructura algèbrica; a l'existència d'ideals maximals en reticles amb unitat [Scott, D. [1954]]; als sistemes de generadors dels espais vectorials i llur relació amb les bases de l'espai [Bleicher, M.N. [1964], 96]; al producte d'espais compactes o *teorema de Tychonoff* [Tychonoff, A. [1930], Kelley, J. [1950]]; al caràcter lliure dels subgrups d'un grup lliure [Nielsen, J. [1924] i Schreier, O. [1927]].

Els teoremes de Löwenheim-Skolem i de compacitat i llur relació amb l'A.C. [Mal'cev, A. [1936], 329–331; Vaught, R.L. [1956], 262–263].

Els lectors interessats en els resultats aquí indicats poden consultar Rubin, H.-Rubin, J.E. [1985], §6 i 8.

En els resultats de Scott i Vaught la presència i influència d'A. Tarski és fora de dubte, com podem constatar en Pla, J. [1984c], 31–33 i Vaught, R.L. [1974]. [Veieu també §7, 28.]

12. Moore, G.H. [1980], 204.

13. Aquest article és d'una gran importància doncs dóna resposta a un cert nombre de qüestions sobre els cardinals transfinits plantejades per Whitehead [1902] i que Russell reprèn els els **Principles of Mathematics** [1903], 15 i també en els **Principia Mathematica**, **2**, de 1912.

Aquestes qüestions consisteixen en saber si certes propietats clàssiques dels cardinals finits són perllongables als cardinals infinits [veieu les propietats **III**, **IV**, **IV'**, **V** i **V'** de la pàgina 2] o bé si certes propietats que compleixen certs cardinals transfinits, com ara que card $\mathbb{N}$ i card $\mathbb{R}$, són vàlides per a tot cardinal transfinit [com ara, per exemple, **I** i **II**]. Tarski ens ferà veure que la resposta passa per la teoria de conjunts que elegim, ja que l'A.C. és insolaïable, donat que aquestes propietats són, de fet, enunciats alternatius de l'A.C. [Cf. Cassinet, J.-Guillemot, M. [1983], 1, 418].

14. Sierpinski, W. [1923], 191–192. Veieu també Tarski, A. [1924], 148, nota 1.

15. Tarski, A. [1924], 147.

16. E. Zermelo [Zermelo, E.[1908a], 261] és absolutament clar en aquest sentit quan diu:

> *Aquest article conté els axiomes i llurs conseqüències més immediates, com ara una teoria de l'equivalència basada en els seus principis que permet d'evitar l'ús formal dels cardinals.*

Quin és el problema? El problema rau en les definicions de *cardinal* en ús. Cantor, en Cantor, G. [1895], 481–482, pretén de fixar les definicions bàsiques de la seva teoria de conjunts: la definició de conjunt —és criticada per Zermelo en Zermelo, E.[1908a], 261—, i la definició de cardinal:

> *Anomenem "potència" o "nombre cardinal" d'M el concepte general que, per mitjà de la nostra capacitat intel.lectual, aconseguim quan fem abstracció de la naturalesa dels seus elements m i de l'ordre en que s'han donat.*
>
> *Designo per* $\overline{\overline{M}}$ *el resultat d'aquest doble acte d'abstracció; és a dir, el nombre cardinal d'M.*
>
> *Com que, si fem abstracció de la seva naturalesa, cada element m és una "unitat", el nombre cardinal* $\overline{\overline{M}}$ *és un agregat ben definit, format d'unitats, i aquest nombre existeix a la nostra ment com una imatge intel.lectual o projecció de l'agregat M de partida.*

És difícil, però, d'acceptar aquesta exposició per abstracció —que, en certs aspectes, recorda Dedekind i alguns dels seus textos— com una definició. Aquesta idea de cardinal d'un conjunt la trobem ja en 1883 —*lectura a Freiburg*— segons ens dirà el mateix Cantor [Cantor, G. [1887], 81 i segs]. En canvi, en els treballs anteriors de 1878 [Cantor, G. [1878] i 1883 [Cantor, G. [1883b]], Cantor prefereix la definició *operativa* —en paraules d'A. Fraenkel A. [Fraenkel, A. [1953], 78]—, que s'estableix en termes d'*equipol.lència*.

D'alguna manera, dessota d'aquesta definició, hi trobem el *principi d'abstracció* de B. Russell [Russell, B.[1903], 166 i 220] que, simplificant, introduiex un *objecte* per a representar una classe d'equivalència. Aquesta tècnica l'havia emprat abans Frege en Frege, G. [1884], §§34-68, si bé, com és prou conegut, l'obra de Frege restà ignorada i, àdhuc, menystinguda. [Veieu Jourdain, P.E. [1912].]

17. Tarski, A. [1924], 147.

18. Aquest prestigiós deixeble de Hilbert elaborà una axiomàtica alternativa de la teoria de conjunts; és la *teoria axiomàtica de classes* en la que conjunt és *tot element d'una classe* i *classe* és un terme primitiu que està caracteritzat pels axiomes de la teoria [von Neumann, J. [1925], 219–224]; en aquest context, disposant de l'axioma de *reemplaçament* de Fraenkel [Fraenkel, A. [1922], 234], podia introduir ja el concepte de *nombre ordinal* [von Neumann, J. [1923], 199] com un conjunt format per tots els ordinals que el precedeixen [von Neumann, J. [1923], 202–204]. El 1928, von Neumann introdueix els *ordinals inicials* o *nombres cardinals* [von Neumann, J. [1928], 727–731] —són els nombres ordinals *no equipotents* a cap altre nombre ordinal més petit. En presència de l'A.C. a cada conjunt X *és possible d'associar-li un* nombre cardinal que, de retruc, és un nombre ordinal. Aquesta presentació de von Neumann és d'una gran utilitat ja que clarifica i abreuja la teoria cantoriana de conjunts.

19. A Tarski pretén d'establir l'A.C. a partir de certes propietats dels nombres cardinals dels conjunts; això ho ha de fer a Z.F., sense emprar per a res l'A.C. La definició de von Neumann de cardinal d'un conjunt no li hauria servit tampoc ja que *equival* a l'A.C. A. Tarski introduiex, doncs, aquest dos axiomes que li garanteixen l'*existència* del cardinal d'un conjunt qualsevol en correspondència amb cada classe d'equipotència, però, a diferència de von Neumann, *no sap com són aquests cardinals.*

20. Tarski, A. [1924], 147–148. Observem l'analogia entre aquesta situació i la plantejada per von Neumann: per aquest autor el nombre cardinal d'un conjunt és un nombre ordinal i, si tot conjunt té associat un nombre cardinal —via l'equipotència— tot conjunt admetrà una bona ordenació [i recíprocament]; A. Tarski no sap pas com són els nombres cardinals, però cal distingir-los en dues classes: els que corresponen a *conjunts ben ordenables* —els *àlefs*— i els altres. [Sense disposar de l'A.C., els cardinals de von Neumann corresponen solament als conjunts ben ordenables; els altres conjunts *no tenen* cardinal.] Tot rau, de vell nou, en veure que tots els cardinals son àlefs.

La definició rigurosa, dins Z.F., que eviti els axiomes suplementaris 1 i 2 d'A. Tarski la podem trobar en Tarski, A. [1955a] en base a l'axioma de *fonamentació* de Mirimanoff [Mirimanoff, D. [1917], 42 i sgs.] i Bernays [Bernays, P. [1941], 6]:

- *si X es pot ben ordenar, agafem la definició de von Neumann;*
- *si X no es pot ben ordenar, agafem el conjunt*

$$\text{card } X = \{y \in \mathbf{V} : y \sim x \ i \ \rho(y) \ és \ mínim \ en \ \mathbf{Ord}\}.$$

Aquesta definició aprofita, en cada cas, les definicions de von Neumann i de Cantor-Frege-Russell. [Veieu Levy, A. [1979], 83 i Pla, J. [1984].]

21. Bernstein, F. [1905], 131–132. A Tarski afirma la seva incapacitat per donar-ne una demostració sense fer ús de l'A.C. [Veieu Tarski, A. [1924], 148, nota 4.]

22. Hartogs, F. [1915], 442 i Sierpinski, W. [1921], 118.

23. Tarski, A. [1924], 150 i segs. [Veieu Levy, A. [1979], 164 i Pla, J. [1984].]

24. Lindenbaum, A.-Tarski, A., [1926], 311–312.

25. Sudan, G. [1939], 7–8. En primer lloc ofreix la definició de *cardinals consequtius* que són els cardinals que no en tenen cap al mig i després observa que

> *Si $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{p}$ són cardinals infinits i $\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{p}$ són iguals o consequtius, aleshores $\mathfrak{m}.\mathfrak{n}$ i $\mathfrak{m}.\mathfrak{p}$ són iguals o consequtius*

és equivalent a l'A.C., tot calcant les tècniques d'A. Tarski.

26. Sierpinski, W. [1947a], 125, teorema 5. [Veieu tanmateix Sierpinski, W. [1965], 410–442, on s'hi pot trobar una recopilació, entre d'altres, d'aquestes equivalències amb les seves demostracions i també §7, 27 i nota 201.]

27. Cantor, G. [1878], 242.

28. Cantor, G. [1882], 114; [1887], 120; [1895], 483–484 i [1955], 89–91.

29. Pla, J. [1984b], 9–21.

30. Cantor, G. [1874], 258–259.

31. Liouville, J. [1851], 3. Recordem que la demostració de Liouville és de tal naturalesa que permet de *construir efectivament nombres transcendents* [veieu Vila, N. [1985], 34–35], a diferència de la de Cantor que procedeix indirectament per reducció a l'absurd.

32. Cantor, G. [1878], 253–254.

33. Per a les cartes entre Cantor i Dedekind remetrem sempre a Cavaillés, J. [1962]; en particular, 179–249.

34. La possibilitat de la *no comparabilitat* entre les potències de diversos conjunts obria un problema enorme en relació amb la *Hipòtesi del Continu* [H.C.]: podia ocòrrer que la *potència d'$\mathbb{R}$ no fos comparable amb la potència d'$\mathbb{N}$* i aleshores no podria ésser de cap manera *equivalent a la potència de la segona classe de nombres*. Veieu la nota 42 i Grattan-Guinnes, I. [1980], 268 [on la paginació correspon a la traducció castellana].

35. Cantor G. [1878], 257–258.

> *I ara que, per a un ampli domini, extraordinàriament ric, de conjunts hem establert que poden ésser coordinats amb una recta contínua o amb una part d'ella, cal plantejar-se com es comporten* en relació a la seva potència *les diferents parts d'una línia recta contínua... La pregunta és la següent: en quines classes es divideixen els conjunts lineals i quin és el nombre d'aquestes classes, si en cada una de les diferents classes hi agrupem els conjunts de potència diferent mentre que, en cada una d'elles, hi agrupem els d'una mateixa potència. Per un procediment d'inducció... s'arriba a la conclusió que el nombre de classes obtingudes per aquesta agrupació és finit i igual a* dos *... Per tot això, en els conjunts lineals infinits ... solament hi haurà dues classes de potències, d'acord amb la classificació anterior; més endavant enviarem la solució exacta d'aquestes qüestions...*

36. Cantor, G. [1874], 260.

37. Pla, J. [1984b], 17–18.

38. Cantor introduiex el concepte de *conjunt derivat* P' d'un conjunt P o *conjunt dels punts límits de* P; amb aquest concepte planteja els conjunts de *primer gènere* —són aquells conjunts P que admeten un n-èsim derivat buit; és a dir, $P^{(n)} = \emptyset$ (n finit). Això el mena, de forma natural, als conjunts de *segon gènere* —aquells pels quals tots els derivats són no buits; és a dir, aquells que compleixen $P^{(n)} \neq \emptyset$ per a tot $n \in \mathbb{N}$.

Introdueix el *primer infinit* per indicar el conjunt $\bigcap P^{(n)} = P^{\infty}$ quan és $\neq \emptyset$. Això li permet de tornar-lo a derivar i obté $\infty + 1, \cdots, \infty + n, \cdots, 2\infty, \cdots, \infty^{\infty}, \cdots$, etc. Aquesta operació simbòlica és la que el porta a considerar els ordinals [veieu Pla, J. [1984b], 17–21]. Tot això ho trobem en els treballs de Cantor de 1882/1883, en els que apareixen els àlefs.

39. Cavaillés, J. [1962], 232–238.

40. Cantor diu a Dedekind: "*recordeu que a Harzburg vos havia dit que no sabia pas com establir el teorema següent: si $M' \subseteq M$ i $M'' \subseteq M'$ i $M'' \sim M$, aleshores $M' \sim M''$*" [Cavaillés, J. [1962], 233] [Pel que fa al teorema d'equivalència i la seva història veieu Pla, J. [1987].]

41. Cavaillés, J. [1962], 233.

42. És convenient aclarir un xic els *nous conceptes* de Cantor relatius als infinits:

el 1883, Cantor [[1883a], 546 i sgs.] estableix *tres principis de formació d'ordinals* :

- el primer principi —*el pas al següent*—, tot sol, li permet de generar els nombres naturals

$$1, 2, \cdots, n, \cdots,$$

on n ens diu que el principi s'ha aplicat n *vegades*. Així s'obté la *classe* (I) *de tots els nombres naturals* que és *infinita* i diu:

> ... *seria contradictori parlar d'un màxim de la classe* (I); *però hom pot imaginar un nombre nou, que anomenarem* ω, *i que ens* servirà per a dir que el conjunt (I), *tot sencer*, s'ha donat segons aquest principi *en la seva successió natural; hom pot representar-se aquest nou nombre* ω *com el límit vers el que tendeixen els nombres* n *sempre que, amb això, entenguem que* ω *és el primer nombre que* segueix tots *els nombres* n, *de manera que cal declarar-lo més gran que no pas cap altre nombre* n...

Ara aplica a ω el primer principi i obté:

$$\omega + 1, \omega + 2, \cdots, \omega + n, \cdots$$

que no té màxim i *podem imaginar*, de nou, un nombre novell, 2ω, límit dels $\omega + n$, que és el *primer després de tots els* $1, 2, \cdots, n, \cdots, \omega, \omega + 1, \cdots, \omega + n, \cdots$; ara popdem aplicar el primer principi a 2ω i ...

- el segon principi —*pas al límit*— Cantor diu:

> *la funció lògica que ens proporciona els nombres* $\omega, 2\omega, \cdots$ és diferent, *és clar, de la primera; l'anomenarem* segon principi *de formació dels nombres reals sencers i la defineixo d'aquesta manera*...

D'aquesta manera Cantor ha introduit *dos principis de formació d'ordinals*: el pas al següent i el pas al límit. Aplicant-los adequadament aconsegueix:

$$1, \cdots, n, \cdots, \omega, \omega + 1, \cdots, \omega + n, \cdots, 2\omega, 2\omega + 1, \cdots, 3\omega, \cdots, n\omega + m, \cdots, \omega^2, \cdots,$$

$$\omega^2 + n\omega + p, \cdots, \omega^n, \cdots, k_n\omega^n + k_{n-1}\omega^{n-1} + \cdots + k_1\omega + k_0, \cdots, \omega^\omega, \cdots, \omega^{\omega^\omega}, \cdots, \alpha, \cdots$$

i així més i més.

- el tercer principi: ara cal, diu Cantor, *un principi de limitació* que permeti de generar una *segona classe* (II) que

> *sigui la potència immediatament superior i, per tant, la segona potència*

i per establir aquest principi cal una *condició*; és la següent:

el sistema de nombres que es troben en la successió numèrica abans del que hom considera i a partir d'l ha de tenir la mateixa potència que la primera classe de nombres (I)

Així, per exemple, els nombres que precedeixen ω^ω admeten una *enumeració en la classe* (I):

definim, doncs, la segona classe de nombres (II) *com el conjunt de tots els nombres* α *que poden aconseguir-se amb els dos primers principis de formació... i que compleixen la condició que tots els que procedeixen* α *des d'l formen un sistema de la mateixa potència que la classe de nombres* (II)

Cantor introdueix l'operació que genera *ordinals inicials*, que són els *cardinals de von Neumann*. Cal indicar, però, seguint Zermelo, que els tres principis de Cantor no permeten pas de generar la classe dels nombres (ω) [veieu Cantor, G. [1932], 199].

Cantor, a continuació, estableix el teorema fonamental següent:

si (α') *és una part del conjunt* (II) *solament són possibles tres casos: o bé* (α') *és un conjunt finit o bé* (α') *té la potència de la classe* (I) *o bé* (α') *té la potència de la classe* (II) *i prou.*

[Veieu Cantor, G. [1883a], 582.]

43. Cantor, G. [1883a], 583. Notem, però, que, en realitat, en parlar de conjunts de potència arbitrària —*àlefs*, en el context actual— Cantor estableix el teorema d'*equivalència per a conjunts ben ordenats*.

44. Cavaillés, J. [1962], 237–238. El 1884 Cantor afirma que el teorema d'equivalència val per a tot conjunt M, sigui quina sigui la seva potència [veieu Cantor, G. [1884a], 388]. Novament hi ha ambigüitat: no sabem si Cantor pensa que M és ben ordenable i, per tant, la seva potència és un *àlef* —en aquest cas, malgrat que no l'estableix, ens trobariem davant d'una generalització del *teorema fonamental* de [1883a]—, o bé si parla d'un conjunt arbitrari —en aquest cas la qüestió encara fora més peliaguda.

El problema general, però, segueix obert, ja que malgrat que Cantor el considera resolt als seus **Beiträge** de 1895, [veieu la pàgina 484], ho fa en base a una *nova definició d'ordre entre conjunts* —no fora pas aquesta la situació amb la definició de 1878— i ho fa, a més, en base a la *llei de tricotomia dels cardinals* i amb la suposició implícita —mai no explicitada del tot— que tot cardinal infinit és un *àlef*.

Indiquem, tot de passada, que el teorema d'equivalència —conegut actualment amb el nom de *teorema de Bernstein-Cantor-Schröder*— val a Z.F. i, per tant, no necessita pas de l'A.C. La situació, però, no era pas així de clara per a Cantor, si tenim en compte la carta de 30 d'agost de 1899 [veieu Cavaillés, J. [1962], 247–249 i Pla, J. [1987]].

45. Cavaillés, J. [1962], 235. El *teorema anterior* al que fa referència diu: "*tot subconjunt infinit del conjunt dels nombres de segona classe o bé és numerable o bé té la potència de la segona classe*".

46. Cantor, G. [1883a], 574 i 582.

47. Cantor, G. [1883a], 590, nota 10, diu: "*si hom considera el conjunt de totes les funcions contínues i discontínues d'una o més variables , el sistema que aconseguirem tindrà la potència de la tercera classe de nombres*"

48. Cantor, G. [1891]. Cantor estableix l'existència de conjunts de *potències superiors* a la d'un conjunt donat, quan aquest conjunt és el dels nombres narturals o el dels nombres reals, i diu: "*Aquesta demostració sembla notable no solament per la seva simplicitat sinó i sobretot perquè el principi que d'ella se'n segueix es pot estendre al teorema general segons el qual les potències dels conjunts ben definits no té màxim, o el que és el mateix, a tot conjunt L li podem associar un altre conjunt M de potència superior a la d'L* [Cantor, G. [1891, 76]

49. Cavaillés, J. [1962], 245. Carta a Dedekind de 31 d'agost de 1889.

50. Cantor, G. [1891], 76 i Cantor, G. [1889] a Cavaillés, J. [1962], 245.

51. Cantor, G. [1895], 488 i 492.

52. Hilbert, D. [1902], 70–71, traducció francesa. D. Hilbert es preguntà solament pel comportament dels subconjunts infinits d'$\mathbb{R}$ i la possibilitat de ben ordenar $\mathbb{R}$.

53. Hausdorff, F. [1908], 494.

54. Cantor vincula, en els seus escrits, el teorema d'equivalència i la H.G.C., en suposar l'A.C. o el principi de la bona ordenació com quelcom d'irrenunciable [veieu Pla, J. [1988]].

55. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 313–314.

56. En el text, a la pàgina 313, els autors posen de manifest que la preocupació "*de buscar les relacions lògiques entre l'A.C. i les proposicions* H_1, H_2, *i* H_3 *que expressen, de formes diverses, la hipòtesi, coneguda amb el nom d'hipòtesi general del continu*", fou plantejada per Lindenbaum.

57. Amb l'equivalència, a Z.F., de H_2 i H_3 s'obtenen, de fet, els dos enunciats de Cantor de 1878 i 1883, amb la notació de 1895 i amb tota la seva generalitat: l'equivalència entre H_2 i H_3 l'establiria Tarski basant-se en el fet que

$$\kappa_1 + \kappa_2 < \kappa_1 + 2^{\kappa_1} \quad \text{ssi} \quad \kappa_2 < 2^{\kappa_1}$$

sense l'A.C. [Veieu Chuaqui, R.B. [1981], 295–296; Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 315.]

58. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 315.

59. Sierpinski, W. [1947], 1–5. Primerament estableix, via l'aplicació de Hartogs, però implícitament que, *per a tot cardinal infinit* κ, *existeix un àlef* $\aleph(\kappa)$ *tal que* (i) $\aleph(\kappa) < 2^{2^{2^\kappa}}$ *i* (ii) $\aleph(\kappa) \not< \kappa$. Tot seguit precisa del lema central que diu:

$$\textit{si } \kappa_1 \textit{ i } \kappa_2 \textit{ són dos cardinals tals que } \kappa_1 + \kappa_2 = 2^{2^{\kappa_1}}, \textit{ aleshores } \kappa_2 \geq 2^{\kappa_1}$$

i, amb ell a la ma, resol la qüestió mitjantçant un simple càlcul. [Veieu §7, 27 i nota 204.]

60. Specker. E. [1954], 337. De fet Specker estableix que $2^\kappa = \aleph(\kappa)$, on $\aleph(\kappa)$ és la imatge de κ per la funció de Hartogs [veieu Levy, A. [1979], 191 o Mendelson, E. [1979], 217.] És un càlcul basat en el resultat de Tarski:

$$\textit{per a cada cardinal infinit } \kappa \textit{ i cada } n \in \omega, n \cdot \kappa < 2^\kappa$$

que trobem a Lindenbaum i Tarski, pàgina 310, i que Specker dedueix del seu lema [Specker, E.. [1954], 334]:

$$\textit{si } \kappa \geq 5, 2^\kappa \not< \kappa^2.$$

Specker veu que H_1, per a κ, implica $\kappa^2 = \kappa$ i alehores el resultat s'obté de Tarski, A. [1924], segons el que ja hem exposat a §1. [Veieu Jech, T. [1973], 161.]

61. Rubin, H. [1960] [veieu Takeuti, G.-Zaring, W.M. [1970], 92 i segs. o Levy, A. [1979], 164]. L_3 ens diu que les parts d'un àlef són, al seu torn, un àlef i aleshores la inducció ordinal i el fet que $V_\infty = \bigcup_{n\in\omega} V_n$ sigui numerable, juntament amb l'axioma de fonamentació, segons el qual $\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} V_\alpha$, acaben la demostració.

62. Gödel, K. [1938]. Veieu també Pla, J. [1982], 19 i [1983], 15–25. A la demostració K. Gödel veu que el *seu model* satisfà la H.G.C. usant el fet que satisfà l'A.C.; així doncs Gödel prescindeix del resultat de Sierpinski.

63. Cohen, P. J. [1963]. També estableix la independència de l'A.C. dels altres axiomes; introdueix el *forcing*.

64. Cantor, G. [1895], 484–485, que és més forta que no pas la de 1878 [veieu §2, 5].

65. Establerts per Schröder, E. [1898] i Bernstein, F. [1898], independentment, ja l'havia demostrat Dedekind el 1887 segons podem constatar en Dedekind [1932], 447. [Veieu nota 44.]

66. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 301. Diuen exactament:

> $\lambda \leq^* \kappa$ *quan* $\lambda = 0$ *o bé quan tot conjunt de potència* κ *es pot descompondre en* λ *conjunts no buits i disjunts.*

67. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 301. [Veieu Levy, A. [1979], 91.]

68. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 312.

69. Sierpinski, W. [1948]. La prova fa servir l'aplicació de Hartogs. La trobem a Sierpinski [1965], 429–430 i la idea és molt semblant a la de Hartogs: "*cal establir, per a cada* κ*, l'existència d'un àlef* $\aleph'(\kappa)$ *tal que* $\aleph'(\kappa) \leq \kappa$ *sigui fals*". Veieu §7, 27 i nota 202. [Podeu veure també Pla, J. [1985], 77–78; Rubin, H.-Rubin, J. [1970], 10.]

70. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 313.

71. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 313.

72. Moore, G.H. [1982], 216. Veieu el §5.

73. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 313.

74. Tarski, A. en Sierpinski, W. [1928], 227. Sierpinski, W. [1947b], 157 i segs.

En aquest treball W. Sierpinski considera com *gaire bé evident* la proposició P següent:

P. *Una imatge unívoca d'un conjunt no pot tenir potència superior a la del conjunt*

que és un enunciat alternatiu d'I i estableix el teorema següent [sense recórrer a l'A.C.]:

Teorema.

(i) $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$;

(ii) *no és possible que* $\kappa + \lambda = 2^{\aleph_0}$*, si* $\kappa, \lambda < 2^{\aleph_0}$;

(iii) *existeix un conjunt lineal que no en conté cap de perfecte (no buit);*

(iv) *existeix un subconjunt d'*$\mathbf{R}$ *no mesurable (de Lebesgue);*

Aquesta proposició l'havia demostrat ja A. Tarski en Sierpinski [1928], 227. (iii) i (iv) els trobem enunciats a Tarski-Lindenbaum [1926], 313. Tot el treball de Sierpinski descansa damunt d'un teorema prou elemental:

T. **P** implica "*un conjunt de cardinal κ no és mai suma de més de κ conjunts disjunts no buits*"

que assoleix així :

$$\text{Si } N = \bigcup_{y \in M} E_y \text{ i } M \succeq N \text{ i } E_y \cap E_{y'} = \emptyset, y \neq y', y, y' \in M \text{ i } E_y \neq \emptyset.$$

Per a cada $x \in N$, existeix un únic y d'M que designem $y = f(x)$; però, d'altra banda, per a cada $y \in M, E_y \neq \emptyset$; per tant, existeix un $x \in E_y$ i $y = f(x)$. Per consegüent $f\langle N \rangle = M$ i, segons **P**, $\overline{\overline{M}} \not\succ \overline{\overline{N}}$. Contradicció!

Ara, en base a un teoorema de Lebesgue [Lebesgue, H. [1905a], 213] que diu que és possible donar una *descomposició* d'$I = (0, 1)$ en $\aleph_1$ conjunts disjunts no buits, resulta que $\mathbb{R}$ es pot descompondre en $\aleph_1 + 2^{\aleph_0}$ conjunts disjunts; però $\aleph_1 + 2^{\aleph_0}$ no pot ésser $> 2^{\aleph_0} = \text{card } \mathbb{R}$, segons hem vist i, en conseqüència, com que és $\leq$, resulta que $\aleph_1 + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ i això prova que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.

75. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 317.

76. Burali-Forti, C. [1896], 46.

77. L'equivalència entre **I'** i el principi de Burali-Forti és semblant al teorema **T** de Sierpinski de la nota precedent.

78. Hausdorff comneça el seu trebal de 1908 introduint el concepte de *cofinalitat*, de *regularitat* i de *singularitat* [Hausdorff, F. [1908], 439–442]. Hausdorff els introdueix així: si A és un conjunt ordenat i $B \subseteq A, A_B = \{x \in A : x$ afita B superiorment i estricta$\}$ i $A_B = \emptyset$, aleshores B és *cofinal en A* [ssi, per a tot $x \in A$, existeix un $y \in B, x \leq y$]. Un ordinal α és *regular* ssi $\text{cf}(\alpha) = \alpha$ [ssi el més petit ordinal cofinal amb α és α] i *singular* altrament [ssi $\text{cf}(\alpha) < \alpha$], ja que, en tot cas, $\text{cf}(\alpha) \leq \alpha$. En l'obra de Hausdorff, però, l'A.C. hi és present i això fa que tots els cardinals siguin àlefs.

Un àlef és regular ssi no és abastable com a suprem d'una col.lecció més petita que ell mateix de cardinals més petits que ell; aquesta proposició l'estableix Hausdorff en 1914 [Hausdorff, F. [1914], 131]. [Veieu Fraenkel, A.-Bar-Hillel, Y., [1958], 87.]

Hausdorff estableix alguns resultats remarcables, com ara:

(i) $\aleph_0$ *és regular*;

(ii) $\aleph_{\alpha+1}$ *és regular* [Husdorff, F. [1907], 542 i Hausdorff, F. [1908], 443];

(iii) *tot ordinal regular és un cardinal*, ja que $\text{cf}(\alpha) \leq \alpha$ [Hausdorff, F. [1908], 444].

Avui sabem que cal l'A.C. per establir que $\aleph_1$ és regular [Fefermann, S.-Levy, A. [1963]; veure Cohen, P.J. [1966], 143 i Levy, A. [1979], 135–136]; a més, sense l'A.C., la condició de Hausdorff, F. [1914], 131, és falsa; és a dir *el fet de no ésser abastable no implica pas la regularitat*.

Hausdorff es pregunta pels cardinals regulars del tipus $\aleph_\lambda, \lambda \in \text{Lím}$ i estableix la definició següent: un cardinal κ és *feblement inaccessible* ssi (i) $\kappa > \aleph_0$; (ii) κ és regular i (iii) $\kappa = \aleph_\lambda, \lambda \in \text{Lím}$. [Hausdorff, F. [1908], 443] i, el 1914, escriu: "*si existeixen cardinals feblement inaccessibles, el més petit d'ells serà d'una magnitud tan gran que serà molt difícil poder-lo considerar en teoria de conjunts usuals*" [Hausdorff, F. [1914, 131].] [Cal tenir en compte que, si $\alpha \in \text{Lím}$, $\text{cf}(\aleph_\alpha) = \text{cf}(\alpha)$ i, per tant o α és *regular* o $\alpha = \aleph_\alpha$; els cardianls *feblement inaccessibles* α compleixen $\aleph_\alpha = \alpha$; però, per a tot $\alpha < \aleph_\omega$,

$\aleph_\alpha$ és *singular* i $\aleph_\omega$ és singular i el mateix per a tot α talque $\aleph_\omega \leq \alpha < \aleph_{\aleph_\omega}$, etc... Veieu Levy, A. [1979], 137.] Malgrat tot l'opinió de Hausdorff quedaria desbordada pels desenvolupaments posteriors de la teoria de conjunts, desenvolupaments en els quals A. Tarski hi intervingué de forma molt notable.

79. El 1930 Sierpinski i Tarski introdueixen el concepte de *cardinals inaccessible* en la seva definició 1: "*Un nombre cardinal κ és inaccessible ssi és regular i no és abastable per productes de cardinals més petits amb una quantitat de factors més petita que κ*". Observem, tot de passa, que el mot *inaccessible* l'introduí Kuratowski l'any 1925 [Kuratowski, K. [1925], 146.]

80. Sierpinski,W.-Tarski, A. [1930], 292. Veuen que *tot cardinal inaccessible és regular* i també que, amb la H.G.C., *tot àlef regular* $\aleph_\alpha, \alpha \in$ Lím, *és inaccessible*. [Veieu Levy, A. [1979], 139.]

81. Sierpinski,W.-Tarski, A. [1930], 292.

82. Sierpinski,W.-Tarski, A. [1930], 292. Aquesta impossibilitat la trobem en Kuratowski, K.[1925], 146–147, que és el treball on apareix, per primera vegada, el mot de cardinal inaccessible; en Baer, R. [1929] i en Firestone, C.D. -Rosser, J.B. [1949], 79.

La idea d'aquesta impossibilitat passa per considerar la *família acumulativa* de Mirimanoff [Mirimanoff, D. [1917], 49], generada pel concepte de *rang*: $V_\alpha = \{x : \rho(x) < \alpha\}, \alpha \in$ Ord. Aleshores tot consisteix en considerar V_λ, on λ és el primer cardinal inaccessible; aleshores resulta que V_λ és tancat per les *operacions conjuntistes* que introdueixen els axiomes, conté ω i és *ben fonamentat*; també es veu, a Z.F.C., que el bon ordre R d'un conjunt $x \in V_\lambda$ pertany a V_λ. V_λ, però, no conté cap cardinal inaccessible; és a dir

$$\vdash_{\text{Z.F.C.}} V_\lambda \models \text{Z.F.C} + \neg\exists x[x \in \text{Card}_\text{I}].$$

Suposem ara que $\vdash_{\text{Z.F.C.}} \exists x[x \in \text{Card}_\text{I}]$; aleshores

$$\vdash_{\text{Z.F.C}} V_\lambda \models \exists x[x \in \text{Card}_\text{I}] \wedge \neg\exists x[x \in \text{CardI}]$$

i, per tant, Z.F.C. no fora consistent.

Què passa amb els cardinals feblement inaccessibles? Cal recòrrer al teorema de Gödel [Gödel, K. [1938]] on s'estableix que

$$\vdash_{\text{Z.F.C.}} \text{Cons (Z.F.C.)} \rightarrow \text{Cons (Z.F.C. + H.G.C.)}$$

i al teorema de coincidència d'ambdós tipus de cardianls a Z.F.C. + H.G.C. de Sierpinski i Tarski. Aleshores, suposar l'existència de cardinals feblement inaccessibles implicaria l'existència de cardinals inaccessibles a Z.F.C. + H.G.C., que és una extensió de Z.F.C. Aleshores, si λ és el més petit cardinal feblement inaccessible,

$$\vdash_{\text{Z.F.C.+H.G.C.}} V_\lambda \models \text{Z.F.C. + H.G.C.}$$

i arribariem a la inconsistència de Z.F.C. + H.G.C. i, de retruc, a la inconsistència de Z.F.C.

Tampoc no és possible d'establir la *consistència relativa* de $\exists x[x \in \text{Card}_\text{I}]$ amb Z.F.C. Suposem que

$$\vdash_{\text{Z.F.C.}} \text{Cons(Z.F.C.)} \rightarrow (\text{Z.F.C.} + \exists x[x \in \text{Card}_\text{I}]). \qquad (*)$$

Aleshores resulta que

$$\vdash_{\text{Z.F.C.} + \exists x[x \in \text{Card}_\text{I}]} V_\lambda \models \text{Z.F.C},$$

on λ és el més petit cardinal inaccessible; d'on:

$$\vdash_{Z.F.C.\ +\exists x[x\in \mathrm{Card_I}]} \mathrm{Cons}(Z.F.C.)$$

i, en conseqüència, de (*):

$$\vdash_{Z.F.C.\ +\exists x[x\in \mathrm{Card_I}]} (Z.F.C + \exists x[x \in \mathrm{Card_I}])$$

i això contradiu el *segon teorema d'incompletesa de Gödel* [Gödel, K. [1931]].

En canvi sí que és possible d'establir la *consistència relativa* de $\neg\exists x[x \in \mathrm{Card_I}]$ amb Z.F.C.: usant la Cons(Z.F.C.) resulta que

$$V_\lambda \models Z.F.C. + \neg\exists x[x \in \mathrm{Card_I}].$$

[En relació amb les proves d'independència, veieu Mostowski, A. [1949], Shepherdson, J.C. [1952] i Mendelson, E. [1956].]

Malgrat la impossibilitat de provar la consistència relativa de l'existència de cardinals inaccessibles, els matemàtics tendeixen a acceptar aquesta existència. [Veieu: Fraenkel, A.- Bar-Hillel, Y.-Levy, A. [1984], 111–112; Kunen, K. [1980], 133, 145 i 177 i Levy, A. [1979], 140–141.]

83. Tarski, A. [1983a], 68–71.

84. Veieu la pàgina 2.

85. Tarski, A. [1938a], 69.

86. Tarski, A. [1939a], 69.

87. Tarski, A. [1939a], 69–70.

88. Tarski, A. [1939a], 71. Veieu Sierpinski, W.- Tarski, A. [1930], 293.

89. Tarski, A. [1939a], 84. Aquest axioma imposa, en certa manera, l'existència dels conjunts *hereditàriament de cardinal* κ, *amb* $\kappa > \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. [Veieu Kunen, K. [1980], 133, 145 i 177.] Aquest axioma és realment potent i simplifica a bastament la presentació de la teoria axiomàtica de conjunts Z.F. [Veieu Quigley, F.D. [1970], 59–60.]. Tarski n'és conscient [[1938a], 85] i així ho manifesta en Tarski, A. [1939], 182.

90. Tarski, A. [1938a], 85. Veieu també Tarski, A. [1939], 176–177.

91. Tarski, A. [1939a], 86. [Veieu Quigley, F.D. [1970], 59–60.]

92. Tarski, A. [1939b], 201.

93. Aquest axioma l'introdueix Mirimanoff en Mirimanoff, D. [1917], 49, quan diu: "*si una col.lecció* $\mathfrak{B}$ *de conjunts és equipotent a un conjunt, és un conjunt*" [Postulat 2]; cal dir, però, que a la carta de Cantor a Dede-kind de 1899, Cantor afirmava ja que: "*cada multiplicitat equipol.lent a un conjunt és un conjunt*", però Cantor no ho establia pas com un axioma sinó com un fet. [Veieu Cavaillés, J. [1962].] Aquest axioma no serà introduït fins uns anys més tard al sí de la teoria de conjunts en mans de Fraenkel i Skolem. [Fraenkel, A.. [1922], 230–231; Skolem, T. [1923], 225–226. Veieu al respecte Moore, G.H. [1982], 262 i segs.]

94. Tarski, A. [1939], 180.

95. Tarski, A. [1939], 180–183.

96. Tarski, A. [1939], 180, remet a Sierpinski, W. [1928], 251 i segs. i també a Tarski, A. [1930], 195 i segs.

97. Tarski, A. [1939], 181.

98. Tarski, A. [1939], 181. Aquí el mateix Tarski ens diu que aquest treball és un avenç en relació amb el seu resultat de [1938b], 201, ja que allà feia ús de C1 que és més fort que no pas C2; a més ens fa notar la necessitat de l'axioma de reemplaçament en la deducció de l'A.C. a partir de C1 que no cal en absolut per a les deduccions de l'A.C. a partir de C2 i C3.

99. Tarski, A. [1939], 183. Veieu també Suppes, P. [1960], 252.

100. Tarski, A. [1939], 183. És, en realitat, el teorema 17 del seu treball de 1938. [Veieu Tarski, A. [1938a], 77.]

101. Tarski, A. [1939], 183. És semblant al lema 18 del citat treball de 1938. [Tarski, A. [1938a], 77 i segs.]

102. Aristòtil, **Física** i **Analítics Posteriors**. [Veieu Heath, sir T. [1949], 102–103 i Thomas, I. **1**, 418-429.

103. Aristòtil, **Física** i **Analítics Posteriors**. [Veieu Heath, sir T. [1949], 102–103 i Thomas, I. **1**, 418-429.

104. Euclides evita la *infinitud* de la recta amb el postulat segon, on imposa la possibilitat de perllongacions *finites*. [Veieu Aristòtil, "*Física*", Libre III, cap. 7.] La definició de rectes paral.leles, però, introdueix l'infinit d'una manera *absoluta* [Euclides, **I**, 190] i és per aquesta raó que el postulat cinquè esdevé un postulat inadmissible: no és *intuïtiu* —condició "*sine-qua-non*" dels postulats— Malgrat tot, aparentment, Euclides l'evita, en el seu enunciat del postulat de les paral.leles [Euclides, **I**, 202], en postular que, en certes condicions, dues rectes *no són paral.leles*. Euclides, a més, estableix la *infinitud* dels nombres primers [Euclides, **II**, 412] —en termes aristotèlics, però— i la *infinitud* de l'*algorisme d'Euclides* en la caracterització de les *magnituds incommensurables* [Euclides, **III**, 17]. L'obra d'Euclides la referim a Heath, sir T. [1956].

105. Galileo observa la bijecció que podem establir entre n i n^2; així un conjunt esdevé *equipotent* a un subconjunt propi de sí mateix. Cal evitar, diu, d'emprar els termes *més petit, igual, més gran* en relació amb les quantitats infinites. També l'infinit com a pas al límit mena Galileo a situacions paradoxals. [Veieu Galileo [163],102 i 110.]

106. Cantor, G. [1883a], 560–561.

> ... *l'infinit com a tal ha trobat un defensor decidit en un filòsof i matemàtic molt subtil del nostre temps, Bernhard Bolzano; ha desenvolupat el seu punt de vista sobre aquesta qüestió en una obra excel.lent i substancial:* **Les paradoxes de l'infinit** *de 1851. L'objectiu de l'obra és d'establir que les contradiccions de l'infinit ... no existeixen pas si hom es pren la molèstia [que no sempre és fàcil] d'emprar els conceptes de l'infinit amb serietat i d'acord amb el seu veritable contingut...*
>
> ... *Bolzano és, potser, l'únic autor pel qual els nombres pròpiament infinits tenen alguna legitimitat...*

107. Veieu Cavaillés, J. [1962], 67.

108. Bolzano, B. [1851], 4. Cantor, G. [1883a], 561–562 li criticarà no haver distingit entre *potència* —associada al conjunt sense tenir en compte l'ordre dels seus elements— i *numeral*, on sí cal tenir-lo en compte.

109. Bolzano, B. [1851], 38. Al final del paràgraf 26, Bolzano ens ofereix un exemple concret d'aquesta idea de conjunt: "*Així doncs per determinar completament el conjunt infinit de punts que hi ha entre dos puntos m i n és suficient d'especificar-ne els seus extrems m i n. D'aquesta manera, amb ben poques paraules, queda detreminat fora de tota dubte si quelsevol altre punt hi pertany o no*".

110. Bolzano, B. [1851], 4.

111. Bolzano, B. [1851], 5 i 6. Una altra forma de dir-ho, és: "*més gran que qualsevol multiplicitat finita*".

112. Bolzano, B. [1851], 13–14. Bolzano recorre a les *proposicions i veritats en sí mateixes*. Veieu Voltaggio, F. XIV–XV. La idea de Bolzano, prou coneguda, consisteix en passar d'una proposició vertadera A a la proposició "*A és vertadera*", també vertadera i diferent d'A; així és possible, diu, *derivar* una proposició i una altra i després encara una altra ... a partir d'una proposició vertadera. "*El lector haurà observat l'analogia que hi ha entre la successió d'aquestes proposicions, generades per la regla de formació que s'ha explicitat, i la succesió dels nombres considerada al paràgraf 8*". Veieu Dedekind, R. [1888], 64.

113. Bolzano, B. [1851], 5–6. Un conjunt és *finit* ssi és *equipotent a un cert nombre natural*; un conjunt és *infinit* quan aquesta situació no es compleix —"*el concepte d'infinit es deriva del concepte de finit adjuntant-li només un element* [*que, de fet, és el simple concepte de negació*]" [p. 8]; això, segons Bolzano, significa que "*tot nombre natural n'és una part*" [pp. 5 i 6]. Aquí però, com observa molt assenyadament Moore, G.H. [1982], 23, Bolzano entra en un procés *circular* en la definció de *finitud* en la qual un conjunt finit s'estableix en funció del concepte de nombre natural, però aquest, al seu torn, s'estableix en funció del concepte de conjunt finit.

114. Cantor, G. [1883a], 560–561. "*A aquest autor li manca haver format efectivament un concepte general dels nombres infinits determinats; li manca, doncs, el concepte general de potència i el concepte específic de numeral. Tots es troben, sens dubte, a la seva obra però en locs aïllats, com a casos particulars... Sense els dos conceptes que acabo d'esmentar no és pas possible, n'estic fermement convençut, de progressar en la teoria de conjunts...*" L'objectiu d'evitar les paradoxes [cf. §1], derivades d'un ús imprecís del concepte d'infinit —de manera semblant a Galileo— són les que portaran a Bolzano a voler diferenciar *finit* i *infinit* i a no adonar-se que, precisament, és l'equipotència el concepte idoni per unir-los.

115. Bolzano, B. [1851], 30–31. Bolzano analitza, per exemple, la possibilitat de transformar conjunts —que considera diferents en grandària— mitjançant correspondències bijectives, com ara $[0,5]$ en $[0,12]$ per mitjà d' $y = \frac{12}{5}\cdot$ [Bolzano, B. 28–29.]

116. Bolzano, B. [1851], 28 i 31 i segs. Veieu quan a la vora i, alhora, quan lluny de Cantor es troba Bolzano en aquest paràgrafs. Recordem Cantor, G. [1878], 242 i segs. [Veieu també les notes 27 i 28.]

117. Els treballs conjuntistes de Cantor es basen en l'*equipotència* i en la *dominància*.

118. Cantor, G. [1878], 242 i segs.

119. Estableix una diferència entre conjunts finits i conjunts infinits via la bona ordenació i amb el principi del bon ordre, que assumeix, tot queda perfectament resolt. [Cantor, G. [1883a], 559–56.]

120. Cantor, G. [1887], 266. "*Un conjunt* finit *és un conjunt M que s'engendra per una adjudicació successiva d'elements a partir d'un element donat originalment i que, inversament, per supressió successiva d'elements en l'ordre oposat, pot aconseguir-se l'element original*". A continuació, i sense demostració, Cantor estableix que "*si un conjunt M no és equivalent a cap de les seves parts, el conjunt* $\{M, c\}$ *que s'obté per adjunció d'un nou element c al conjunt M té la mateixa propietat que M*".

121. Dedekind, R. [1888], 17, definició 64. En aquesta obra Dedekind estableix: tot conjunt infinit [en el seu sentit] conté un conjunt numerable i recíprocament; de retruc, doncs, no és finit en el sentit de Cantor [ja que no pot ésser mai equipotent a un natural]. [Veieu Dedekind, R. [1888], 17, teorema 72.]

122. És interessant fer esment d'una definició que tampoc no depèn dels nombres naturals; la donà Peirce de forma incipient el 1881 [Peirce, C.S. [1881], 95] i de forma més precisa el 1885 [Peirce, C.S. [1885], 201–201]. En 1889, però, en la *"Definition of "finite""* del **Century Dictionary** ens ofereix la definició de Cantor i segons Moore [Moore, G.H. [1982], 25], Peirce considerava equivalents ambdues definicions. El que sí sabem [veure Peirce, C.S. [1900], 430–431] és que considerava la seva definició original de [1885] com equivalent a la de Dedekind.

La seva definició sorgí de la consideració d'un sol.logisme de De Morgan, el qual *"és un dels lògics més grans que mai no hagi existit"*, però en aquest sil.logisme *"omet una premissa"*. El sil.logisme diu:

> *Algun X és Y;*
> *Per a cada X hi ha quelcom que no és ni Y ni Z;*
> *Per tant, hi ha quelcom que no és ni X ni Z.*

la seva validesa, però, depèn de la finitud d'X, com ho mostra l'exemple següent:

$$X = 2\cdot\mathbb{N}+1,\quad Y = P = \{x : x \text{ és primer }\},\quad Z = 2\cdot\mathbb{N},\quad g(X) = X^2 = \{x^2 : x\in X\}\subseteq X.$$

L'error, segons Peirce, sorgeix de poder disposar d'una aplicació $g : X \rightarrow Y$ injectiva, no exhaustiva, que permeti de garantir la veracitat de les dues premisses, però no de la seva conclusió. Aquesta aplicació solament pot construir-se entre conjunts infinits:

> *Ara dir que un lot d'objectes és finit equival a dir que, en passar d'una classe a una altra, necessàriament anirem a caure en un dels elements pel que ja hem passat; és a dir, si cada element d'un lot està en relació unívoca amb un element del lot, aleshores cada element del lot està en la mateixa relació* [Peirce, C.S.[1885], 202]

L'equivalència d'aquesta definició i de la de Dedekind ja havia estat observada per Schröder. [Veieu Schröder, E. [1898], 305.]

123. Veieu les notes 119 i 120.

124. Dedekind, R. [1888], 31 i segs., teorema 159 i corol.lari 160. El corol.lari diu: *"un conjunt és finit o infinit segons que sigui o no equipotent a un nombre natural"* i es basa en el teorema 159:

> *Si Σ és un sistema infinit, aleshores cada un dels sistemes numèrics Σ_n* [que, de fet, són els nombres naturals] *té una imatge bijectiva en Σ i recíprocament.*

En la demostració del recíproc , *"si bé pot semblar evident, és més difícil"*, diu Dedekind i el que fa és recòrrer al fet que, per a cada n, existeix una injecció α_n de Z_n en Z; disposa, doncs, d'una successió $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ a partir de la qual, *"sense cap altre hipòtesi suplementària"* construeix una successió creixent d'aplicacions $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ amb la que obté el resultat que buscava.

125. Betazzi, R. [1896a], 367, §10, corol.lari 2.

126. Betazzi, R. [1896a], 368, diu: "*Dedekind (Prop 159) intenta d'establir el recíproc; la seva demostració precisa que s'estableixi una injecció entre totes les Z d'un conjunt finit arbitrari i el conjunt Σ donat (de potència superior a qualsevol conjunt finit) i que hom construeixi un conjunt agafant una injecció entre totes les Z en Σ i Dedekind no en determina pas una de particular entre totes, de manera que ha de prendre'n una d'arbitrària i així elegir arbitràriament un element en cada un dels conjunts, en nombre* <u>*infinit*</u>*, i això no sembla pas massa rigurós; a menys que hom estigui disposat a acceptar, com a postulat, que una elecció d'aquesta naturalesa es lícita, la qual cosa em sembla, no obstant, del tot inoportuna*".

127. Sembla que Betazzi restà convençut de la valideas del teorema i abandonà aquesta línia, malgrat els errors de Burali-Forti i dels seus pressupòsits. [Veieu Betazzi, R. [1897], 352.]

128. Burali-Forti, C. [1896], . Aquest axioma, però, és fals, segons indica B. Russell [Russell, B. [1906], 49], com s'observa fent $u = \{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Cal imposar que "*els elements d'u són disjunts dos a dos*", però aleshores, com diu Russell, el postulat de Burali-Forti coincideix amb el *principi de partició* [veieu nota 76] i es deduïria de l'A.C. [Per a una anàlisi més aprofundida de l'obra de Burali-Forti veieu Cassinet, J.-Guillemot, M. [1973, 1,84–86; Moore, G.H. [1982], 27–28 i Cassinet, J. [1980], 4.]

129. Malgrat tot la intuïció de Burali-Forti era correcta: el seu axioma, més feble que l'axioma de l'elecció, és suficient per establir que *ambdues definicions són equivalents*. [Veieu Moore, G.H. [1982], 28, notes 17 i 20.]

130. Whitehead, A.N.-Russell, B. [1912], 190; 278–280. [Veieu, vol. II, Part III, secció C [1912]; vol. III, part V, sescció E [1918].] Observen que solament cal l'A.C. numerable, un fet que analitzant la demostració de Dedekind criticada per Betazzi queda prou clar. En relació als cardinals *mitjaners*, veieu Moore, G.H. [1982], 175 i segs.

131. Sierpinski, W. [1918], 104–108.

132. Sierpinski, W. [1918], 104–108. No obstant, a Z.F., hom pot establir-lo quan A és el conjunt de *tots* els nombres reals. [Veieu Jech, T. J. [1978], 32.] En contrast amb aquest resultat ell mateix observa que, si A és no numerable i B és numerable i $A - B$ conté un subconjunt numerable, aleshores $A - B$ té la potència d'A sense necessitat de l'A.C.

133. Sierpinski, W. [1918], 104–108. Aquest treball, ja ho hem dit abans, és realment molt important històricament i molt acurat metodològicament. En ell Sierpinski no es limita pas a presentar diverses definicions d'infinit sinò que observa certes conclusions que, prescindint de l'A.C., també poden aconseguir-se. Per exemple, amb certes definicions d'infinit —la de Dedekind i l'existència d'una successió d'elements tots diferents— és possible deduir-ne:

> *tot conjunt afitat amb una* infinitat *de punts admet almenys un punt límit [i, per tant, un punt d'acumulació]*;

en canvi, amb la definició de Cantor i, senser fer ús de l'A.C., podem veure que

> *tot conjunt afitat amb una* infinitat *de punts admet, almenys, un punt d'acumulació, però ara sense l'A.C. no sabem pas establir l'existència d'un punt límit.*

[Veieu Sierpinski, W. [1918], 113.]

D'ací en treu que la demostració de Cantor-Bendixon —"*tot subconjunt tancat no numerable d'*$\mathbf{R}^n$ *pot descompondre's en un conjunt perfecte i un conjunt numerable*" [Cantor, G. [1883a], 575; Bendixon, I. [1883], 419; Cantor, G. [1884], 471]— precisa de l'A.C. o no,segons que les definicions de conjunt tancat i de conjunt perfecte les fem en base al concepte de punt límit o en base a la noció de punt d'acumulació. [Veieu Sierpinski, W. [1918], 115.]

134. Tarski, A. [1924a].

135. Zermelo, E. [1908a], 263 i 265. Els axiomes exclosos es troben, respectivament, a les pàgines 266 i 267 de Zermelo, E. [1908].

136. Tarski, A. [1924a], 46. En començar el text a la pàgina 48, Tarski defineix els elements B que compleixen les condicions de la definició que acabem de donar com un *element irreductible de* $\mathfrak{K}$ i, a la definició 3, reestableix la definició

> *El conjunt A és finit ssi tota classe no buida $\mathfrak{K}$ de subconjunts de $\mathfrak{K}$ admet almenys un element irreductible*

Tarski introdueix el concepte d'*element saturat* d'una classe $\mathfrak{K}$ com aquell element B de $\mathfrak{K}$ que *no és subconjunt propi* de cap altre element de $\mathfrak{K}$ i estableix una defineió alternativa de conjunt finit en el

> **Teorema 3.** *Un conjunt A és finit ssi tota classe no buida $\mathfrak{K}$ de subconjunts admet almenys un element saturat.*

137. Tarski, A. [1924a], 46. A més observa que amb la seva definició, contràriament al que pensava Schoenflies [Schoenflies, A. [1913], v], la teoria dels conjunts finits pot ésser fonamentada *sense recórrer* a la noció d'ordre. També critica la definició de Dedekind —conjunt *no reflexiu*— perquè s'insereix en una teoria que "*no té fonaments axiomàticament sòlids.* Tampoc no considera adeuada la definició de Whitehead i Russell pel seu vincle íntim amb la *teoria de tipus.*

138. Tarski, A. [1924a], 50–52.

139. Tarski, A. [1924a], 53.

140. Tarski, A. [1924a], 54. Observem que Tarski disposa d'una definició alternativa de conjunt finit

A és finit ssi pertany a tota classe inductiva $\mathfrak{K}$ de conjunts,

entenent que una classe $\mathfrak{K}$ és inductiva quan satisfà les condicions I i II de la inducció.

141. Whitehead, A.N.-Russell,B. [1912], II, *120–123. Segons Tarski, aquesta és la primera definició que no fa ús ni de la igualtat de potències ni de l'ordre.

142. Sierpinski, W. [1918], 106.

143. Kuratowski, K. [1920], 130–131.

144. Kuratowski estableix l'equivalència entre la seva definició i la de Tarski. [Veieu Kuratowski, K. [1920], 130–131.]

145. Tarski, A. [1924a], 59–64.

146. Traski, A. [1924a], 67. Aquest teorema l'estableix en termes del producte $\prod \mathfrak{K}$, lligant la finitud de $\mathfrak{K}$ amb el fet que $\prod \mathfrak{K} \neq \emptyset$.

147. Zermelo, E. [1908a], 267 i 269.

148. Tarski, A. [1924a], 69–70.

149. Tarski, A. [1924a], 72. El raonament de Tarski és el següent: si $B \subset A$ i $B \sim A$, aleshores existeix una bijecció $\Phi : A \rightarrow B$. Sigui $\Phi\langle C \rangle = \{\Phi(c) : c \in C \subseteq A\} \subseteq A$. Resulta que $B = \Phi\langle A \rangle$. Sigui $\mathfrak{L} = \{C \subseteq A : \Phi\langle C \rangle \subset C\}$. Resulta que: (i) $A \in \mathfrak{L}$; (ii) L té un element irreductible D [per la definició de conjunt finit i la hipòtesi de que A és finit]. D'on:

$$\Phi\langle D \rangle \subset D \subseteq A$$

i, per tant, $\Phi\langle D \rangle \notin \mathfrak{L}$. Però

$$\Phi\langle D \rangle \subset D \subseteq A$$

i, per tant, $\Phi\langle D \rangle \in \mathfrak{L}$.

150. Tarski, A. [1924a], 73.

151. Whitehead, A.N.-Russell, B. [1912], **II**, part III, secció C, $^{1}20$ i $^{1}24$.

152. Tarski, A. [1924a], 74.

153. Traski, A. [1924a], 77. Són el **teoremes 40 i 41**. Els enunciats no fan referència als elements màxim i mínim; això és una concessió posterior:

Teorema 40. *Tota classe no buida $\mathfrak{K}$ de conjunts finits admet almenys un element A que compleix*

$$\textit{si } B \in \mathfrak{K}, \textit{ tenim que } A \prec B \textit{ o } A \sim B.$$

Demostració.

Sigui $C \in \mathfrak{K}$ i $\mathfrak{L} = \{D \subseteq C : \forall B \in \mathfrak{K}, D \prec B \text{ o } D \sim B\}$.

Aleshores:

(i) $0 \in \mathfrak{L}$ i $\mathfrak{L} \neq \emptyset$;

(ii) C és finit i, per tant, $\mathfrak{L}$ admet un element *saturat* E; d'on:

$E \subseteq C$

$\forall B \in \mathfrak{K} \quad E \prec B \text{ o } E \sim B.$

Ara veurem que, en $\mathfrak{K}$, hi ha almenys un element de la mateixa potència que E.

Si $E = C$, és evident;

suposem, doncs, que $E \subset C$ i sigui $a \in C - E$; aleshores

(i) $E \cup \{a\} \subseteq C$, d'on, per la definició d'E, $E \cup \{a\} \not\subseteq \mathfrak{L}$;

però aleshores, per la definició d'$\mathfrak{L}$,

(ii) hi ha un $A \in \mathfrak{K}$ almenys que no domina $E \cup \{a\}$ ni li és equivalent;

per tant,

(iii) $A \in \mathfrak{L}$ i $A \prec E \cup \{a\}$; per tant: $A \prec E$ o $A \sim E$.

Però $A \in \mathfrak{K}$; d'on: $E \prec A$ o $E \sim A$; d'on : $E \sim A$.

154. Hessenberg, G. [1906], 674–685; Kuratowski, K. [1921], 161–174.

155. Schoenflies, A. [1913], v.

156. Tarski, A. [1924a], 77–78.

157. Tarski, A. [1924a], 79–82. Tarski estableix

Lema 41. *Si A és finit, admet un ordre;*

Teorema 42. *Si $\mathfrak{K}$ és un ordre en un conjunt finit A, $\mathfrak{K}$ és un doble ordre en A;*

Lema 43. *Si $\mathfrak{K}$ estableix un doble ordre en A, A és finit;*

i d'ací en resulta el **Teorema 44** que dóna una definició alternativa de conjunt finit en termes d'ordre. El **Lema 41** i el **Teorema 42** són immediats; el **Lema 43** és un xic més sofisticat i procedeix per reducció a l'absurd *seguint el raonament fet per Kuratowski per demostrar el teorema IV de la pàgina 169*:

Suposem que A no és finit.

$\mathfrak{K}$ és maximal a la família $\mathcal{F}$ de tots els ordres d'A.

Però
$$\mathfrak{K} \cup \{0\} \in \mathcal{F} \text{ i } \mathfrak{K} \cup \{A\} \in \mathcal{F}$$

i, per tant,
$$\mathfrak{K} \cup \{0\} \in \mathcal{F} \ = \mathfrak{K} \cup \{A\} = \mathfrak{K};$$

d'on: $\emptyset, A \in \mathfrak{K}$.

Sigui $\mathfrak{L} = \{B \in \mathfrak{K} : B \text{ finit}\}$; aleshores $\mathfrak{K} - \mathfrak{L} = \{B \in \mathfrak{K} : B \text{ infinit}\}$.

Aleshores $\emptyset \in \mathfrak{L}$; d'on: $\mathfrak{L} \neq \emptyset$ i, com que $\mathfrak{K}$ és un doble bon ordre, existeix un B maximal en $\mathfrak{L}$.

Anàlogament, $A \in \mathfrak{K} - \mathfrak{L}$; d'on : $\mathfrak{K} - \mathfrak{L} \neq \emptyset$ i, per la mateixa raó, existeix un element C minimal a $\mathfrak{K} - \mathfrak{L}$.

A més $B \in \mathfrak{L}$ i $C \notin \mathfrak{L}$; d'on: $B \neq C$. Però, per la definició de $\mathfrak{K}$, $B \subseteq C$ o $C \subseteq B$.

La segona situació és del tot impossible: C és infinit, B és finit i $C \subseteq B$.

Per tant, $B \subset C$; sigui, doncs, $a \in C - B$. Tindrem
$$B \subset B \cup \{a\} \subset C.$$

Aleshores:

si $D \in \mathfrak{L}, D \subseteq B \subset B \cup \{a\}$;

si $D \in \mathfrak{K} - \mathfrak{L}, B \cup \{a\} \subset C \subseteq D$;

d'on, si $D \in \mathfrak{K}$,
$$D \subset B \cup \{a\} \quad \text{o} \quad B \cup \{a\} \subset D$$

i, per tant,
$$\mathfrak{K} \cup \{B \cup \{a\}\} \in \mathcal{F} \text{ [ja que és totalment ordenat per } \subseteq \text{];}$$

però $\mathfrak{K}$ és maximal; d'on:
$$B \cup \{a\} \in \mathfrak{K}$$

però $B \cup \{a\} \notin \mathfrak{L}$ [ja que B és maximal a $\mathfrak{L}$ i $a \notin B$]; d'on:
$$B \cup \{a\} \in \mathfrak{K} - \mathfrak{L}.$$

Impossible, perquè B és finit.

158. Stäekel, P. [1907], 425.

159. Tarski, A. [1924a], 81. Aquí Tarski fa unes quantes reflexions sobre la *finitud* i l'A.C.

No sabem, diu, establir que (ii) sigui suficient per si sol per tal que A sigui finit, si no disposem de l'A.C. Sense l'A.C. no sabem pas d'establir

P. *Si tot ordre establert en A per a una classe arbitrària $\mathfrak{K}$ és un bon ordre, el conjunt A és finit.*

Però (P) és equivalent a

Q. *Si A és un conjunt arbitrari, existeix una classe $\mathfrak{K}$ que estableix un ordre en A.*

(Q) $\Rightarrow$ (P) és immediat en virtud del teorema de Tarski.

El recíproc l'establirà Tarski en una nota [veieu Tarski, A. [1924a], 82] per reducció a l'absurd.

Kuratowski fa notar a Tarski que (Q) implica un cas particular de l'A.C.: l'axioma de l'elecció *per a classes arbitràries de conjunts finits.* Sigui $\mathfrak{L}$ una classe que estableixi un ordre en $\bigcup\mathfrak{K}$, on $\mathfrak{K}$ és una classe de conjunts finits disjunts. Aleshores $\bigcup\mathfrak{K}$ està ordenat i, per tant, tot conjunt A de $\mathfrak{K}$ està ordenat. Però A és finit i, per tant, l'ordre és un bon ordre i, en conseqüència, a cada $A \in frakK$, li podem associar *el seu primer element* $\varphi(A)$. El conjunt B de tots el $\varphi(A)$, on $A \in \mathfrak{K}$, realitza la *tesi de l'A.C.*:

$$B \in \prod \mathfrak{K}.$$

[Veieu Moore, G.H. [1982], 210.]

160. El concepte d'*ordre cíclic* en un conjunt: *A admet una bijecció que no transforma cap subconjunt propi d'A en A.* És degut a Schröder. [Veieu Schröder, E. [1895], 578–579.]

161. Veieu Tarski, A. [1924a], 92, **teorema 52**. Veieu també Dedekind, R. [1888], 42.

162. Tarski, A. [1924a], 92.

163. Recordem que A. Tarski havia treballat els **Principia** i que la seva tesi doctoral publicada originalment amb el títol **O wyrazie pierwotnym logistiki** tracta de qüestions relacionades amb els **Principia** com podem veure en les publicacions parcials Tarski, A. [1923] i en Trski, A. [1924b].

164. Tarski, A. [1924a], 93.

165. Trarski, A. [1924a], 94–95. La demostració es basa en el resultat de Sierpinski, W. [1981], 105: "*Si $\mathcal{P}(A)$ és equipotent a un dels seus subconjunts propis, conté un subconjunt numerable* $\{A_1 \cdots A_n \cdots\}$". Ara tot consisteix en provar que és possible suposar que aquests conjunts constitueixen una *successió creixent.*

166. Tarski, A. [1924a], 93–95. Tarski observa finalment que III $\Leftrightarrow$ IV $\Rightarrow$ I $\Leftrightarrow$ III; és a dir, *si A és finit en sentit* III, *$\mathcal{P}(A)$ és finit en sentit* III implica l'equivalència d'I i III.

Si A és un conjunt infinit de l'espai euclidi, les definicions II i III són equivalents a la usual; per a les IV i V, no ho sap.

167. El lògic polac Chwistek, el 1924, estudià els conjunts *finits* que són *infinits de Dedekind* [Chwistek, L. [1924]] i Dorothy Wrinch, el 1923, generalitzà el concepte de cardinal *mitjaner*, introduint cardinals *més grans que tots el cardinals més petits que $\aleph_\alpha$ però, en cap cas, ni més grans ni iguals que $\aleph_\alpha$* i establí que, amb l'A.C., no hi ha cardinals mitjaners i *conjecturà* que *la no existència de cardinals mitjaners*

usuals [que són els que corresponen a $\aleph_0$] no tenia pas que implicar l'A.C., si bé no investigà pas la possible relació que hi podia haver amb l'A.C. numerable. [Veieu Wrinch, D. [1923].]

168. Fraenkel, A. [1927], 147.

169. Sageev establia, el 1975, que $\kappa + \kappa = \kappa$ per a tot κ infinit és més feble que no pas l'A.C., donant així resposta afirmativa a la primera qüestió d'A. Fraenkel. [Veieu Sageev, G. [1975].]

170. Tarski, A. [1938], 162.

171. Tarski, A. [1938], 162.

172. Tarski, A. [1938], 162.

173. von Neumann, J. [1925], 240.

174. El 1965, malgrat tot, Tarski d'una banda i Ellentuck d'una altra tornaran a prendre interès pels cardinals intermedis. Tarski introdueix la classe Δ dels *cardinals de Dedekind* [que són cardinals infinits κ tals que $\kappa + 1 \neq \kappa$] i estableix dos teoremes:

I. Si $\Delta \neq \emptyset$, aleshores:

(i) existeix un subconjunt $\Sigma \subsetneq \Delta$ amb card $\Sigma = 2^{\omega}$ tal que tota parella $\alpha, \beta \in \Delta$ és comparable [és a dir, admet una cadena Σ de cardinal 2^{ω}.]

(ii) Σ està ben ordenat, semblantment a $\mathbb{R}$;

(iii) Per a tota parella A, B amb card A, card $B \in \Sigma$, existeix una epijecció d'A en B.

II. Si existeixen dos elements α', β' *no comparables* de Δ, existeix un conjunt $\Sigma \subsetneq \Delta$ numerable i *totalment incomparable* [qualsevol parella d'elements d'Σ no és comparable.] Aquest conjunt és el conjunt

$$\Sigma' = \{\alpha' \cdot \gamma + \beta' \cdot \mu : \gamma + \mu = \alpha', \mu < \omega\}.$$

Per a demostrar-los fa servir uns quants lemes que no depenen de l'A.C.:

- $\alpha \in \Delta$ ssi no és comparable amb ω [ni $\alpha < \omega$ ni $\omega < \alpha$];
- $\alpha \in \Delta$ ssi $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ implica $\beta = \gamma$ i $\alpha \not< \omega$;
- $\alpha \leq \beta \in \Delta$ ssi $\alpha \in \Delta$ o $\alpha < \omega$;
- $\alpha, \beta \in \Delta$ implica $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta \in \Delta$;
- si Δ és tal que card $A \in \Delta$, aleshores card $A_f \in \Delta$ [A_f és el conjunt de successions finites d'elements diferents d'A];
- si $\alpha, \beta \in \Delta$ i $\alpha \cdot \mu \leq \beta \cdot \mu$ i $0 < \mu < \omega$, aleshores $\alpha \leq \beta$.

[Veieu Tarski, A. [1965].]

Ellentuck considera la classe Δ dels cardinals finits de Dedekind [cardinals de conjunts finits de Dedekind] i la classe $\mathfrak{C}$ dels sencers o cardinals finits [que són els cardinals dels conjunts finits de Tarski]. És fàcil de constatar [veieu Sierpinski, W. [1965], 62] que $\mathfrak{C} \subsetneq \Delta$ i diu: "*és conseqüència de certes consideracions metamatemàtiques que, sense l'A.C., no és possible d'establir que $\Delta \subsetneq \mathfrak{C}$. Això suggereix que l'estructura de Δ pot diferir de la d'$\mathfrak{C}$*" i això fa que tingui interès per ella mateixa. Això el porta a provar certs teoremes relatius a l'aritmètica de Δ sense fer ús de l'A.C. i a veure, metamatemàticament, que algunes de les *afirmacions relatives a l'aritmètica de Δ* no poden ésser provades a Z.F. sense l'A.C.

175. En un text de Luzin-Sierpinski de 1917 [Luzin, N.-Sierpinski, W. [1917]] hi trobem que el P.B.O., aplicat a $\mathbb{R}$, implica la possibilitat de dividir l'interval tancat $[0,1]$ en $2^{\aleph_0}$ conjunts no numerables. Vint anys més tard, el 1937, Sierpinski deduïrà de la mateixa hipòtesi l'*existència d'una família de potència* $> 2^{\aleph_0}$ *de conjunts quasi-disjunts* de $[0,1]$, no numerables.Veieu Sierpinski, W. [1937].]

La preocupació pels lligams existents entre l'A.C. i la mesurabilitat o no mesurabilitat és molt gran com queda palès si consultem el **Fundamenta Mathematica, 1**, de 1920. Hi trobem, per exemple, els següents resultats de Sierpinski

> *Hamel ha establert l'existència de conjunts* B [$\mathbb{Q}$-base d'$\mathbb{R}$] (*recolçant-se en l'axioma de Zermelo).* [Sierpinski, W. [1920], 105.]

i ell aconsegueix demostrar, basant-se també en l'axioma de Zermelo, que

> *existeix una base de Hamel de mesura nul.la* [Sierpinski, W. [1920], 107];

en canvi, sense l'A.C., és possible d'establir l'existència d'una base de Hamel de l'existència d'un conjunt *no mesurable* [Sierpinski, W. [1920], 108.]

Sense l'A.C. també és possible d'obtenir el teorema següent:

> *Tota funció mesurable* $f(x)$ *que, per a tota parella de nombres reals* x, y *satisfà l'equació funcional*
> $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
> *és de la forma* $y = A \cdot x$. [Sierpinski, W. [1920], 116.]

Aquest teorema ja l'havia establert Fréchet en 1913, però la seva demostració, en basar-se en el fet que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n),$$

amb $A_n \cap A_m = \emptyset$ per a $n \neq m$, usa l'A.C. [Veieu Sierpinski, W. [1934], 127–130.]

176. Sierpinski, W. [1928], 239 i Tarski, A. [1928], 188.

177. Sierpinski, W. [1928], 239–241 i Sierpinski, W. [1965], 451-452. A. Tarski l'obté com un corol.lari dels seus resultats que són molt més generals.

La idea és: si $\kappa =$ card $M > \aleph_0$, aleshores, per l'A.C., card $M^2 = \kappa$ i aleshores tot consiteix en veure que M^2 *és la unió de més de* κ *conjunts quasi-disjunts de* card M.

Per constatar-ho fa

$$M^2 = \bigcup_{G\in\mathfrak{G}} G, \text{ on } G = \{\langle x, f(x)\rangle : f \text{ funció d'}M \text{ en } M\},$$

on card $\mathfrak{G} > \kappa$ i, si $G, G' \in \mathfrak{G}$, són quais-disjunts. Ara, si $\mathfrak{F}$ és una família de grafos de funcions de cardinal $\leq \kappa$, existeix un grafo quasi-disjunt amb tots els de la família $\mathfrak{F}$.

Remarquem, però, que si card $M = \aleph_0$, el teorema val sense l'A.C. [Veieu Sierpinski, W. [1965], 81 o Levy, A. [1979], 193.]

178. Tarski, A. [1928], 189.

179. Tarski, A. [1928], 189.

180. Tarski, A. [1928], 189.

181. Tarski, A. 189–190. En aquest treball els teoremes **10**, **14**, **15** i **19** es basen en ell i el teorema **7** en el P.B.O. i, per tant, ens trobem davant d'un treball que depèn de l'A.C.

182. Tarski, A. [1928], 190–191. Ho obté veient que, si M admet una classe de descomposició $\mathfrak{K}$ amb card $\mathfrak{K} >$ card M i $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$, aleshores $\kappa < \kappa^\mu$ i aleshores resulta que, si card $M = \kappa^\mu$ no és posible de descompondre M en una classe $\mathfrak{K}$ de cardinal $> \kappa^\mu$ i $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$. Ara solament cal fer $\kappa = 2$ i $\mu = \aleph_0$. [Són els **corl.laris 3** i **4**.]

183. Tarski, A. [1928], 201.

184. Tarski, A. [1928], 203. Aquest resultat és vàlid per a tot $\aleph_\alpha$ i $\aleph_{\alpha+1}$ i l'ennciat que en donem n'és solament el cas particular $\alpha = 0$. [Veieu Tarski, A. [1928], 198, corol.lari **18** i Sierpinski, W. [1934], 125–126]. La H.C. implica $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ i, per tant, l'existència de la classe $\mathfrak{K}$ i, en general, la H.G.C. implica $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_{\alpha+1}}$ i, per tant, l'existència de la classe de descomposició $\mathfrak{K}$.

185. Tarski, A. [1928], 201. També és un resultat general [veieu Tarski, A. [1928], 199 i Sierpinski, W. [1934], 123–125 i és també una condició que ve implicada per la H.G.C.

186. Tarski, A. [1928], 190, **corol.lari 3**.

187. Tarski, A. [1928], 199. Tarski solament obté recíprocs parcials del **teorema 1** i del **corol.lari 2**, ja que es veu obligat a restringir-se a $\mu = \aleph_0$.

188. Tarski, A. [1928], 199–200.

189. Tarski, A. [1928], 200. Veieu el teorema de la nota 177.

190. Tarski, A. [1928], 201.

191. Tarski, A. [1928], 201–203.

192. Tarski, A. [1928], 203.

193. Tarski, A. [1928], 203–204. Per establir els recíprocs del **teorema 1** i del **corol.lari 2** –"*si un conjunt infinit M de potència κ és descomposable per una classe $\mathfrak{K}$ de potència λ, formada per conjunts de potència μ, on $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$ i $\kappa > \mu$, aleshores $\kappa \leq \lambda \leq \kappa^\mu$*"– i del **corol.lari 3**, introdueix el **teorema 7** —que estableix fent ús de l'A.C.— i que diu:

> Teorema 7. *Donats tres cardinals κ, μ i ν, on κ és transfinit i $\mu > 1$ i $\nu > 1$, si $\kappa = \nu^\mu$ o μ és el més petit cardinal que satisfà $\kappa < \nu^\mu$, aleshores tot conjunt M de potència κ admet una descomposició via una classe $\mathfrak{K}$ de potència ν^μ de conjunts quasi-disjunts de potència μ, en la qual $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$.*

[Aquest teorema és una generalització d'un teorema de Sierpinski de [1928], en el qual $\nu = 2$, i el raonament de Tarski és una modificació del de Sierpinski.]

Tot seguit [pp. 194–195] analitza si les condicions que s'imposen als cardinals κ, μ i ν són essencials i, en particular, en el cas en que $\nu = \kappa$ [que és el cas més important] no sap si les condicions es redueixen a $0 < \mu \leq \kappa$ i aleshores conjectura dos enunciats P i Q en els quals imposa que la classe $\mathfrak{K}$ estigui formada de conjunts quasi-disjunts de potència μ o [$\geq \mu$] i afirma que no sap *demostrar ni* P *ni* Q ni tampoc certs enunciats més generals; quan μ és finit, però, tot és immediat i quan $\mu = \aleph_0$ aconsegueix certs resultats.

Bé donce, la H.G.C. permet d'establir P i Q, si suprimim la condició que hem imposat a la potència dels elements de $\mathfrak{K}$ i així obté el recíproc del **teorema 1**. Malgrat tot el seu enunciat general segueix registint-se a qualsevol demostració o refutació i això no li permet pas d'obtenir el recíproc del **corol.lari 2** amb tota la seva extensió.

194. Tarski, A. [1928], 190, **corol.lari 2.**

195. Tarski, A. [1929]. Hom trobarà una presentació més actual dels teoremes d'aquest treball a Levy, A. [1979], 194–195.

196. Tarski, A. [1929], 211.

197. Tarski, A. [1929], 211–212.

198. Tarski, A. [1929], 214. Tot es basa en el **teorema 7** d'aquest treball:

Teorema 7. *Donat un nombre cardinal de segona espècie,*

I. *si* $\mathrm{cf}(\alpha) \neq \mathrm{cf}(\beta)$, *cap conjunt* M *de potència* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *no és descomposable per una classe* $\mathfrak{K}$ *de potència* $\pi(\alpha)$ *de conjunts de potència* $\geq \aleph_\beta$ *tal que* $\delta(\mathfrak{K}) \leq \aleph_\beta$;

II. *si* $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$ *i* $\beta \leq \alpha$, *tot conjunt* M *de potència* $\aleph_{\pi(\alpha)}$ *es pot descompondre en una classe* $\mathfrak{K}$ *de potència* $2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$ *i, per tant, de potència* $> \aleph_{\pi(\alpha)}$, *formada de conjunts quasi-disjunts de potència* $\aleph_\beta$ *tal que* $\delta(\mathfrak{K}) \leq \aleph_\beta$.

i ara, sense necessitat de recórrer a la H.G.C., s'obtenen els resultats indicats ja que, fent $\kappa = \aleph_{\pi(\omega)}$, $\mu = \aleph_1$ i $\lambda = \aleph_{\pi(\omega)}^{\aleph_1}$ en resulta que

cap conjunt M *de potència* κ *no és descomposable per una classe* $\mathfrak{K}$ *de potència* $\lambda = \kappa^\mu$ *de conjunts de potència* $\geq \mu$ *tal que* $\delta(\mathfrak{K}) \leq \mu$.

[Recordem que

$$\pi(\alpha) = \begin{cases} \aleph_0, & \text{si } \alpha = 0; \\ 2^{\aleph_{\pi(\beta)}}, & \text{si } \alpha = \beta + 1; \\ \sum_{\gamma<\alpha} \aleph_{\pi(\gamma)}, & \text{si } \gamma \in \text{Lím [o de segona espècie]}. \end{cases}$$

199. Tarski, A. [1929], 215.

200. Tarski, A. [1929], 215.

201. Sierpinski, W. [1947], 25, **teorema 5** i Sierpinski, W. [1965], 419.

Tot es basa en l'aplicació de Hartogs-Sierpinski que associa, a cada cardinal κ, un àlef $\aleph(\kappa)$ que no és més petit ni igual a κ. Donat que

$$\kappa + \aleph(\kappa) \geq \aleph(\kappa),$$

si $\kappa + \aleph(\kappa) > \aleph(\kappa)$, existiria una única diferència λ tal que $\kappa + \aleph(\kappa) = \lambda + \aleph(\kappa)$. Però sabem que

$$\lambda' = \kappa + \aleph(\kappa)$$

és una possible difereència [$\kappa + \aleph(\kappa) + \aleph(\kappa) = \kappa + \aleph(\kappa)$, ja que $\aleph(\kappa) + \aleph(\kappa) = \aleph(\kappa)$]. D'on: $\kappa = \kappa + \aleph(\kappa)$ i $\aleph(\kappa) \leq \kappa$. Impossible!

202. Sierpinski, W. [1949], 56–67 i Siepinski, W. [1965], 429–430. Aquest teorema es basa en l'existència d'un àlef $\aleph'(\kappa)$, associat a cada cardinal κ, tal que $\aleph'(\kappa) \leq^* \kappa$ no és cert. Aleshores la demostració és absolutament anàloga a la de Hartogs: donat κ, considerem $\aleph'(\kappa)$; tenim que $\kappa \leq^* \aleph'(\kappa)$ o $\aleph'(\kappa) \leq^* \kappa$; però la segona desigualtat no és possible i, per tant, κ es pot ben ordenar.

203. Sierpinski, W. [1946], 111–112. L'A.C. equival al fet que tot cardinal infinit sigui primer. Sabem que

$$(*) \qquad \kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \lambda \text{ per a } 0 < \kappa \leq \lambda \text{ i } \lambda \text{ no finit.}$$

Aleshores, si un nombre cardinal no finit μ no és primer, $\mu = \kappa \cdot \lambda$, on $\mu > \kappa$ i $\mu > \lambda$; però l'A.C. implica la tricotomia i, per tant, podem suposar que $\kappa \leq \lambda$ i λ és no finit [ja que, si λ fos finit, κ també ho fora i $\mu = \kappa \cdot \lambda$ fora finit.] Aleshores, per la fórmula (*), $\mu = \lambda$. Contradicció!

D'altra banda, suposem que tot cardinal no finit μ és primer i siguin κ i λ dos cardinals no finits; aleshores $\kappa \cdot \lambda \geq \kappa$ i $\kappa \cdot \lambda \geq \lambda$ i, per tant, $\kappa \cdot \lambda$ no fora finit. Però aleshores ha d'ésser necessàriament primer i, per tant, no és possible que $\kappa \cdot \lambda > \kappa$ i $\kappa \cdot \lambda > \lambda$; d'on: $\kappa \cdot \lambda = \kappa$ que dóna $\kappa \geq \lambda$ o bé $\kappa \cdot \lambda = \lambda$ i, finalment, $\lambda \geq \kappa$ i, per tant, tenim llei de tricotomia.

204. Sierpinski, W. [1947], 1–5. La demostració és simple i es basa en la determinació d'un conjunt N ben ordenat de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))$, per a cada conjunt donat M, tal que $\not\leq \overline{\overline{M}}$, via l'aplicació de Hartogs.

L'altra lema consisteix en veure que, si μ i ν són dos nombres cardinals tals que $\mu + \nu = 2^{2\mu}$, aleshores $\nu \geq 2^{\mu}$.

Ara cal demostrar que tot cardinal infinit λ és un àlef. Fa

$$\kappa = 2^{\aleph_0 + \lambda} > \lambda$$

i demostra que κ és un àlef.

Seguidament observa que

$$2^{2^{2^{\kappa}}} + 2^{2^{\kappa}} = 2^{2^{2^{\kappa}}}$$

i, per tant,

$$(*) \qquad \aleph(\kappa) + 2^{2^{\kappa}} \leq 2^{2^{2^{\kappa}}}.$$

Només cal establir la igualtat ja que, $2^{2 \cdot 2^{2^{\kappa}}} = 2^{2^{2^{\kappa}}}$ i ara, aplicant el segon lema, podem veure que $\aleph(\kappa) > \kappa$.

Estableix (*) per reducció a l'absurd.

205. Sierpinski, W. [1947a], 157–162.

En aquest treball, Sierpinski enuncia

P : *si* $\kappa \leq^* \lambda$, *aleshores* $\lambda \not\leq \kappa$;

Q : *un conjunt de cardinal* λ *no és mai la suma de més de* λ *conjunts disjunts no buits.*

i afirma que $P \Leftrightarrow Q$ sense fer ús de l'A.C. i que $Q \Rightarrow \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ i ho fa en base a un resultat de Lebesgue [Lebesgue, H. [1905], 213 i Sierpinski, W. [1937], 1] que diu que $I = (0,1)$ és una suma d'$\aleph_1$ conjunts disjunts no buits i, per tant,

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 + 2^{\aleph_0};$$

d'on: $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.

A més és possible d'establir que $\aleph_2 \leq 2^{2^{\aleph_0}}$ en base a un resultat anàleg al de Lebesgue establert pel propi Sierpinski [Sierpinski, W. [1937], 3.]

206. Tarski, A. [1948], 82–84.

207. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 312.

208. Tarski estableix que P es pot deduir de P':

P'. *donada una successió infinita de conjunts disjunts* $(X_i)_{i \in \omega}$ *i, per a cada natural* $n \in \omega$, $C_n = \bigcup_{n<p} X_i$ *satisfà* $\overline{\overline{C_n}} < \overline{\overline{T}}$, *aleshores* $\overline{\overline{S}} \leq \overline{\overline{T}}$, *on* $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_i$.

P $\Rightarrow$ A.C.:

Sigui X un conjunt arbitrari i fem:

$$X_0 = X \text{ i } X_p = \bigcup_{n<p} X_n \cup \{Z : Z \subseteq \bigcup_{n<p} X_n\}.$$

Aleshores, per cada X_p, Tarski defineix

$$Y_p = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \alpha \prec X_p\}$$

i $T = \bigcup_{n \in \omega} Y_n$. Aleshores $\overline{\overline{T}} \leq \overline{\overline{S}}$, on $S = \bigcup_{n \in \omega} X_n$.

No existeix cap subconjunt propi d'X_p equipotent a T; d'on $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{S}}$ i T es pot ben ordenar.

És conegut que

A.C. $\Rightarrow$ P;

és clar que, amb la llei de tricotomia i el teorema d'equivalència

P' + A.C $\Rightarrow$ P;

i finalment Tarski observa que

A.C. numerable $\Rightarrow$ P'.

209. Tarski, A. [1949], 77–79.

210. Tarski, A. [1949], 82.

211. Tarski, A. [1949], 82. Aquest enunciat el trobem a Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 305, i és una forma alternativa de l'enunciat del seu **teorema 6**, que diu:

Si $m \neq o$, $m \cdot \kappa_1 \leq m \cdot \kappa_2$, *i* $\kappa_1 \geq \kappa_2$, *aleshores* $\kappa_1 = \kappa_2$.

212. Kelley, J. [1950], 75–76.

213. La demostració de Kelley és la següent:

Si, per a cada $a \in A$, $X_a \neq 0, \prod_{a \in A} X_a \neq \emptyset$

S'afegeix un punt Λ a cada un dels X_a; s'obté $Y_a = X_a \cup \{\Lambda\}$. La topologia d'$Y_a$ s'obté agafant com *oberts* el conjunt $\emptyset$ i els complements dels conjunts finits; Y_a és un espai topològic compacte.

Per a cada $a \in A, Z_a = \{(z_a)_{a \in A} : z_a \in X_a\}$. Z_a és tancat en $\prod_{a \in A} X_a$ perquè X_a ho és en Y_a.

Per a cada subconjunt finit B d'A, la intersecció $\bigcap_{a \in B} Z_a \neq \emptyset$ ja que, com que cada X_a és no buit, podem elegir [elecció finita] un $x_a \in X_a$ per a cada $a \in B$ i $x_a = \Lambda$, si $a \in A - B$.

La família dels conjunts $(Z_a)_{a \in A}$ és una família de tancats per a la qual les interseccions de qualsevol subfamília finita és no buida i, pel teorema de Tychonoff, $\bigcap_{a \in A} Z_a \neq \emptyset$.

Però $\bigcap_{a\in A} = \prod_{a\in A} X_a$ i hem acabat la demostració.

214. Vaught, R. [1952], 66.

215. Veieu Sierpinski, W. [1965], 436. La indicació que ens efereix Vaught és la següent: suposem que $\mathcal{A}$ és una família de conjunts disjunts no buits. Sigui $\mathcal{B} = \{\{A, \{x\}\} : x \in A \in \mathcal{A}\}$. Aleshores $\mathcal{B}$ admet una subfamília maximal disjunta $\mathcal{M}$. Sigui $M = \{x : \{A, \{x\}\} \in \mathcal{M}, \text{per a un cert} A \in \mathcal{A}\}$. De la maximalitat d'$\mathcal{M}$ se'n segueix fàcilmant que M és un conjunt amb un element en comú amb cada membre d'$\mathcal{A}$.

216. Tarski, A. [1954], 26.

217. El resultat el trobem en Sierpinski, W. [1923], I, 259 i segs.

218. Tarski, A. [1954], 60.

219. Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926].

220. Tarski, A. [1948], 80–84 i 93.

221. El **lema VI** pot aconseguir-se també usant un resultat de Tarski [veieu Lindenbaum, A.-Tarski, A. [1926], 311], que diu:

$$\aleph(\kappa+\lambda) = \aleph(\kappa\cdot\lambda) = \aleph(\kappa) + \aleph(\lambda) = \aleph(\kappa)\cdot\aleph(\lambda)$$

si κ i λ són cardinals $\neq 0$ i no tots dos finits.

222. Tarski, A. [1954], 32.

223. Tarski, A. [1954], 32.

224. Jech, T. [1966], 533-537.

225. Truss, J.K. [1937], 7–21.

226. Hom pot consultar l'execel.lent ressenya de la tasca realitzada per Tarski en els diferents camps de les matemàtqiues i la lògica apareguda recentment en els *Journal of Symbolic Logic* de 1988.

227. J.S.L., [1988].

BIBLIOGRAFIA CITADA.

Aristòtil

[1934] *La Física*. Librería Bergua. Madrid.

Baer, Reinhold

[1929] "Zur Axiomatic der Kardinalzaklarithmetik". *Math. Ztschr.*, **29**, 381–396.

Baire, René - **Borel**, Emile - **Hadamard**, Jacques - **Lebesgue**, Henri

[1905] "Cinc lettres sur la théorie des enesembles". *But. Soc. Math. France*, **33**, 261–273.

Banach, Stephan - **Tarski**, Alfred

[1924] "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents". *Fund. Math.*, **6**, 224–277. [En **Givan**, S. - **McKenzie**, R.N. [**G. - M.**], **1**, 119–154.].

Bar-Hillel, Yehoshua

[1958] Veieu **Fraenkel**, A. - **Bar-Hillel**, J.

Bendixon, Ivar

[1833] "Quelques théorèmes de la théorie des ensembles des points". *Acta Math.*, **2**, 415–429.

Bernays, Paul

[1941] "A system of axiomatic set theory, II". *Jour. Symb. Logic*, **61**, 1–17.

Bernstein, Felix

[1898] Editat en **Borel**, E. [1898].

[1905] "Untersuchungen aus der Mengenlehre". *Math. Ann.*, **61**, 117–155. Traducció francesa a **Cassinet**, J.-**Guillemot**, M. [**C. - G.**], **2**, 459–462.

Bettazzi, Rodolfo

[1896] "Sulla catena di ente in un gruppo". *Acad. Sci. Torino*, **31**, 304–314.

[1896a] "Gruppi finiti ed infiniti di enti". *Acad. Sci. Torino*, **31**, 362–368.

[1897] "Sulla definizione del gruppo finito". *Acad. Sci. Torino*, **32**, 240–243.

Bleicher, Michael. N.

[1964] "Some Theorems on Vector Spaces and the Axiom of Choice". *Fund. Math.*, **54**, 95–107.

Bolzano, Bernard

[1851] *Paradoxien der Unendlichen.* C.H. Reclam. Leipzig.

[1950] *Paradoxes of the Infinity,* traduit per D.A. Steele. Routledge. London.

[1965] *Paradoxi dell'Infinito,* traduit per F. Volaggio. Giangiacomo Feltrinelli Editores. Milano.

Borel, Emile

[1898] *Leçons sur la theorie des fonctions.* Gauthier-Villars. Paris.

[1905] "Quelques remarques sur les principes de la théorie desensembles". *Math.Ann.*, **60**, 194–195.

[1905a] Veieu **Baire**, R. [1905]

[1914] *Leçons sur la théorie des fonctions.* Guathier-Villars. Paris.

Burali-Forti, Cesare

[1896] "Le classi finite". *Acad. Sci. Torino*, **32**, 34–52. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 1–28.

Campbell, Paul J.

[1978] "The origin of 'Zorn's Lemma' ". *Hist. Math.*, **5**, 77–89.

Cantor, Georg

[1872] "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trignometrischen Reihen". *Math. Ann.*, **5**, 123–132. També a [1883c], 336–348 i [1932], 92–102.

[1874] "Über eine Eigenschaft des Inbergriffes aller reellen algebraischen Zahlen". *Journ. f. d. reine und ang. Math.*, **77**, 258–262. També a [1883c], 305–310 i [1932], 115–118.

[1878] "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre". *Joutn. f. d. reine und ang. Math.*, **84**, 242–258. També a [1883c], 311–328 i [1932], 119–133.

[1882] "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. III". *Math. Ann*, **20**, 113–121. També a [1883c], 361–371 i [1932], 149–157.

[1883] "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. IV". *Math. Ann.*, **21**, 51–58. També a [1883c], 372–380 i [1932], 157–164.

[1883a] "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. V". *Math. Ann.*, **21**, 545–591. També, parcialment, a [1883c], 381–408 i complet a [1932], 165–209.

[1883b] "Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimensions. Première Communication". *Acta Math.*, **2**, 409-414. També a [1932], 247–251.

[1883c] Traducció al francès dels treballs de Georg **Cantor** citats. *Acta Math.*, **2**, 305–408.

[1884] "Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. VI". *Math. Ann.*, **23**, 453–488. També a [1932], 210–246.

[1884a] "De la puissance des ensembles parfaits de points". *Acta Math.*, **4**, 381–392. També a [1932], 252–260.

[1887] "Mittelung aus lehre von Transfiniten". *Zeit. f. Phil.*, **91**, 85–125, 252–270. També a [1932], 387–405.

[1891] "Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre". *Jahr. Deuts. Math.*, **1**, 35–78. També a [1932], 278–281. Traducció italiana a *Rivista di Mat.*, **2**, 165–167, de [1892].

[1895] "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I". *Math. Ann.*, **46**, 481–512. També a [1932], 282–356. Traducció italiana per F. Gerbaldi a *Rivista di Mat.*, **5**, 129–162, de [1895]; traducció francesa a *Mem. Soc. Phys. et Nat. de Bordeaux*, **5**, 343–437, de [1899]. Traducció anglesa a [1915].

[1897] "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. II". *Math. Ann.*, **47**, 207–246. També a [1932], 282–356. Traducció francesa a *Mem. Soc. Phys. et Nat. de Bordeaux*, **5**, 343–437, de [1899]. Traducció anglesa a [1915].

[1915] *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers.* Ed. per P.E.B. Jourdan, Open Court. Chicago.

[1932] *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. per E. Zermelo. Springer-Verlag. Berlín.

[1955] Reimpressió de [1915] a Dover. New York.

[1962] Cartes de Cantor - Dedekind. Veieu **Cavaillés**, *Jean.*

Cassinet, Jean

[1980] "L'axiome multiplicatif, forme dominante de l'axiome du choix chez les mathèmaticiens brittaniques de 1900 à 1913". *Sém. d'hist. math. Toulouse*, **1.1**, 1–57.

[1980a] "Rodolfo Bettazzi, un des premiers à mettre clairement en évidence l'utilisation d'un principe de choix dans les démonstrations". *Sém. d'hist. math. Toulouse*, **1.1**, 1–5.

Cassinet, Jean - **Guillemot**, Michel

[1983] *L'Axiome du choix dans les mathématiques de Cauchy a Gödel.* I, II. Thèse. Univ. Paul Sabatier de Tuoulouse.

Cavaillés, Jean

[1962] *Philosophie mathématique.* Hermann. Paris.

Cohen, Paul J.

[1963] "The independence of the Continuum Hypothesis, I". *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **50**, 1143–1148.

[1964] "The independence of the Continuum Hypothesis, II". *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **51**, 105-110.

[1966] *Set Theory and the continuum Hypothesis.* W.A. Benjamin. Massachusetts.

Chwistek, Leon

[1924] "The theory of Constructive Types, II. Cardinal Arithmetic". *Ann. Soc. Pol. Math.*, **3**, 92–141.

Chuaqui, Rolando B.

[1981] *Axiomatic Set Theory.* North Holland. Math. Studies, **51**. Amsterdam.

Dedekind, Richard

[1887] "Ähnaliche Abbildung und ähnliche Systeme". A **Dedekind**, R. [1932], **III**, 447–449.

[1888] *Was sind und was sollen die Zahlen?.* Vieweg Braunschweig. També a [1932], **III**, 335–391 i a [1901].

[1901] *Essays on the Theory of Numbers.* Traducció de W.W Beman. Open Court. Chicago.

[1932] *Gesammelte mathematische Werke.* Eds. R. Fricke - E. Noether - O. Ore, 3 vols. Viewieg. Braunschweig.

[1963] Reimpressió de [1901] a Dover. New York.

Dieudonné, Jean

[1978] *Abrégé d'histoire des Mathématiques 1700-1900.* Dirigida per J. Dieudonné. Hermann. Paris.

Dugac, Pierre

[1976] *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques.* Vrin. Paris.

Ellentuck, Erik

[1965] "The Universal Properties of Dedekind-Finite Cardinals". *Acta Math.*, **82**, 225–248.

Euclides

[1956] *The Elements.* Veieu **Heath**, sir Thomas [1956].

Feferman, Solomon - **Levy**, Azriel

[1963] "Independence results in set theory by Cohen's Method, II". *Not. Am. Math. Soc.*, **10**, 593.

Firestone, C.D. - **Rosser**, J. Barkley

[1949] "The consistency of the hypothesis of accessibility". *Journ. Symb. Logic*, **14**, 79.

Fraenkel, Abraham

[1922] "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre". *Math. Ann.*, **86**, 230–237.

[1927] *Zehn Vorlesungen über Grundlagung der Mengenlehre.* Teubner. Leipzig.

[1953] *Abstract Set Theory.* North-Holland. Studies in Logic. Amsterdam.

Fraenkel, Abraham - **Bar-Hillel**, Yehoshua

[1958] *Foundations of Set Theory*. North-Holland. Studies in Logic. Amsterdam.

Fraenkel, Abraham - **Bar-Hillel**, Yehoshua - **Levy**, Azriel

[1984] *Foundations of Set Theory*. North-Holland. Studies in Logic. Amsterdam.

Fréchet, Maurice

[1913] "Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$". *L'Enseig. Math.*, **15**, 390–393.

Frege, Gottlob

[1884] *Die Grundlagen der Arithmetik, ein logish-mathemastische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Bresalu.

[1960] *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*. Editat per P. Geach and M. Black. Blackwell. Oxford.

Galileo, Galilei

[1981] *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Edició preparada per C. Solís. Editora Nacional. Madrid.

Givant, Steve - **McKenzie**, Ralph N.

[1986] *Alfred Tarski. Collected Papers, vols.* **1**, **2**, **3** *i* **4**. Birkhäuser. Basel.

[1986] "Bibliography of Alfred Tarski". *Jour. Symb. Logic*, **4**, 913–941.

Gödel, Kurt

[1931] "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwnadter Systeme. I". *Monats. für Math. und Phys.*, **38**, 173–198. Traducció anglesa a van **Heijenoort** [1967], 595–616. Traducció castellana a Gödel [1981], 55–89.

[1938] "The Consistency of the Axiom of Choice and the Generalized Continuum-Hypothesis". *Proc. Acad. Scie.*, **20**, 556–557. Traducció castellana a Gödel [1981], 192–194.

[1981] *Obras completas*. Alianza Universidad. Madrid.

Grattan-Guinnes, Ivor

[1980] *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*. Duckworth. London. Traducció castellana a Alianza Editorial. Madrid, 1984.

Guillemot, Michel - **Cassinet**, Jean

[1983] Veieu **Cassinet**, J - **Guillemot**, M.

Hadamard, Jacques

[1905] Veieu **Borel**, E i altres.

Hartogs, Friedrich

[1915] "Über das Problem der Wohlordnung". *Math. Ann.*, **76**, 436–443. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 607–618.

Hausdorff, Felix

[1907] "Über dichte Ordnungstypen". *Jar. Deutch. Math.*, **16**, 541–546.

[1908] "Grundzüge einer Theorie der Geordneten Mengen". *Math. Ann.*, **65**, 435–505.

[1914] *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: de Gruyter. Reimprès a Chelsea. New York, 1965.

[1941a] "Bermerkung über den Inhalt von Punktmengen". *Math. Ann.*, **75**, 428–433.

[1957] *Set Theory.* Chelsea. New York.

Heath, sir Thomas

[1949] *Mathematics in Aristotle.* Oxford at the Clarendon Press. London.

[1956] *Euclide's Elements.* Dover. New York.

Hessenberg, Gerhard

[1906] *Grundbegriffe der Mengenlehre.* Vandenhoeck and Ruprecht. Göttingen.

Hilbert, David

[1900] "Mathematische Problem". Nach. Acad. Wissen., 253–297.

[1901] Reimpressió amb addicions a *Arch. Math. und Phys.* (3), **1**, 44-63; 213–237.

[1902] Traducció anglesa a *But . Am. Math. Soc* (2), **8**, 437–479.

[1902] Traducció francesa a Compt. Rend. du 2-ème Congr. Inter. Math. Paris 1900, 58–114.

Jech, Thomas J.

[1973] *The Axiom of Choice.* North-Holland. Studies in Logic, **75**. Amsterdam.

[1978] *Set Theory.* Academic Press. New York.

Jourdain, Philip E.B.

[1912] "On iroid relations and theories of irrational numbers". Congr. of Math. Cambridge.

Kelley, John

[1950] "The Tychonoff Product Theorem implies the Axiom of Choice". *Fund. Math*, **37**, 75–76.

Kunen, Kenneth

[1980] *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*. Studies in Logic, **102**. Amsterdam.

Kuratowski, Kazimiriez

[1920] "Sur la notion de l'esemble fini". *Fund. Math.*, **1**, 129–131.

[1921] "Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles". *Fund. Math.*, **2**, 161–171.

[1925] "Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles". *Ann. Soc. Pol. Math.*, **3**, 146–147.

Lebesgue, Henri

[1904] *Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars. Paris.

[1905] Veieu **Borel**, E. i d'altres.

[1905a] "Sur les fonctions représentables analytiquemenet". *Journ. of Math.*, **60**, 139–216.

Levy, Azriel

[1979] *Basic Set Theory*. Springer-Verlag. Perspectives in Math. Logic. Berlin.

Lindenbaum, Adolf - **Tarski**, Alfred

[1926] "Communications sur les recherches de la théorie des ensembles". Compt. Rend. Soc. Sci. Varsovia. Classe III, **19**, 299–330. Veieu també [**G. - M.**], **1**, 171–204.

Liouville, Joseph

[1851] "Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algèbrique, ni même réductible à des irrationelles algèbriques". *Journ. Math. pures et app.*, **16**, 133-142.

Luzin, Nikolai - **Sierpiński**, Wacław

[1917] "Sur une decomposition d'un intervalle en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables". *Comp. Rend. Soc. Sci. de Paris*, **165**, 422–424.

McKenzie, Ralph - **Givant**, Stephen R.

[1986] Veieu **Givant**, S.R. - **McKenzie**, R.N.

Mal'cev, Anatolii

[1936] "Untersuchungen aus dem Gebeite der mathematischen Logik". *Math. Sb.*, **43**, 323–336. Traducció anglesa a **Mal'cev**, A. [1971], 1–14.

[1971] *The Mathematics of Algebraic Systems. Collected Papers*, 1936–1967. Editat per B.F. Wells. North-Holland. Studies in Logic. Amsterdam.

Mendelson, Elliott

[1956] "Some proofs of independence in axiomatic set theory". *Journ. Symb. Log.*, **21**, 350–366.

[1979] *Introduction to mathematical logic*. Van Nostrand. New York.

Mirimanoff, Dimitry

[1917] "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles". *L'Enseig. Math.*, **19**, 37–52.

[1971a] "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, I". *L'Enseig. Math.*, **19**, 209–217.

Moore, Gregory H.

[1982] *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence.* Springer-Verlag. Studies in History of Math. and Phys. Sci., **8**. Berlin.

Mostowski, Andrzej

[1949] "An undecidable arithmetic statement". *Fund. Math.*, **36**, 143–164.

[1974] Vieu Sierpiński, W. [1974].

Nielsen, Jakob

[1924] "Die Isomorphismengruppen der freier gruppen". *Math. Ann.*, **91**, 161–185.

Peirce, Charles. S.

[1881] "On the Logic of Number". *Am. Journ. of Math.*, **4**, 85–95.

[1885] "On the Algebra of Logic: A Contribution to the Philosophy of Notation". *Am. Journ. of Log.*, **7**, 180–202.

[1900] "Infinitesimals". *Science*, **11**, 430–433.

[1983] *Collectde Papers*. Editat per Ch. Hartshorne i P. Weiss, **IV**. Harvard Univ. Press.

Pla, Josep

[1982] "Aportacions de la lògica matemàtica en la primera meitat del segle XX". *Actes 1er Congr. Català de Lògica Matem.*, 17–32. Barcelona.

[1983] "L'axioma de l'elecció i la paradoxa de Bancah-Tarski". *But. Soc. Math. I.E.C.*, **15**, 103–168.

[1983b] "Kurt Gödel: dos teoremes i una metodologia". *Actes 2on Congr. Català de Lògica Matem.*, 15–25. Barcelona.

[1984] "Cardinals snse elecció". *Actes 3er Congr. Català de Lògica Matem.*, 13–15. Barcelona.

[1984a] "Número y medida". *La Vanguradia*, 29-I-1984. Barcelona.

[1984b] "Els orígens de la teoria de conjunts" en *El desenvolupament de la matemàtica del segle XIX*. Arch. Sec. Scienc. LXXV, I.E.C., 9–21. Barcelona

[1984c] "Alfred Tarski i la lògica contemporània, I". *But. Soc. Math.* I.E.C., **17**, 26–46.

[1985] "Equivalències de l'axioma de l'elecció". *L'Escaire*, **14**, 77-78.

[1988] "El teorema d'equivalència". *Actes 5è Congr. Català de Lògica.*

Quigley, Frank D.

[1970] *Manual of Axiomatic Set Theory.* Appleton-Cantury-Crofts. New York.

Rosser, J. Barkley - **Firestone**, C.D.

[1949] Veieu **Firestone**, C.D. - **Rosser**, J. Barkley.

Rubin, Herman

[1960] "Some New Forms of the Axiom of Choice". *Not. Am. Math. Soc.*, **7**, 380–381.

Rubin, Herman -**Rubin**, Jean

[1970] *Equivalents of the Axiom of Choice.* North-Holland. Studies in Logic. Amstredam.

[1985] *Equivalents of the Axiom of Choice*, II. North-Holland. Studies in Logic, **116**. Amstredam.

Rubin, Jean

[1970] Veieu **Rubin**, Herman - **Rubin**, Jean.

[1985] Veieu **Rubin**, Herman - **Rubin**, Jean.

Russell, Bertrand

[1903] *The Principles of Mathematics.* Cambridge Univ. Press. Cambridge. Traducció castellana a Russell [1973], 377–820.

[1906] "On some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers". *Proc. London Math. Soc. (2)*, 4, 29–53. Traducció francesa a [**C**. - **G**.], 323–336.

[1973] *Obras completas*, **II**. Aguilar. Madrid.

Russell, Bertrand - **Whitehead**, Alfred North

[1910] *Principia Mathematica.* Casmbridge Univ. Press, vol. **I**. Cambridge.

[1912] *Principia Mathematica.* Casmbridge Univ. Press, vol. **II**. Cambridge.

[1913] *Principia Mathematica.* Casmbridge Univ. Press, vol. **III**. Cambridge.

Sageev, Gershon

[1975] "An Independence Result Concerning the Axiom of Choice". *Am. Journ. Log.*, **8**, 1–184.

Scott, Dana

[1954] "The Theorem on Maximal Ideals in Lattices and the Axiom of Choice". *But. Am. Math. Soc.*, **60**, 83.

[1954a] "Prime Ideal Theorems for Rings, Lattices, and Boolean Algebras". *But. Am. Math. Soc.*, **61**, 390.

[1955] "Definitions by Abstraction in Axiomatic Set Theory". *But. Am. Math. Soc.*, **61**, 442.

Schmidt, Jürgen

[1953] "Einige grundlegende Begriffe und Sätze aus der Theorie der Hullenoperatoren". *Bericht über die Math.-Tagund in Berlin von 14.bis* 18, Januar 1953. (Berlin: Deuts. Verlag der Wissen., 21–48.

Schoenflies, Arthur

[1913] *Entwickwlung der Mengenlehre.* Leipzig & Berlin.

Schreier, Otto

[1927] "Die Untergruppen der freien Gruppen". *Abhan. aus dem math. Seminar der Hamburgischen Univ.*, **V**, 161–185.

Schröder, Ernest

[1895] *Algebra und Logic der Relatives,* I. Leipzig.

[1898] "Über zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze". *Deut. Akad. der Nat.*, **71**, 303–362.

Shepherdson, John C.

[1951] "Inner Models of Set Theory". *Journ. Symb. Logic*, **16**, 161–190.

[1952] "Inner Models of Set Theory, Part II". *Journ. Symb. Logic*, **17**, 225-237.

[1953] "Inner Models of Set Theory, Part III". *Journ. Symb. Logic*, **18**, 145-167.

Sierpiński, Wacław

[1918] "L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse". But. Acad. Sci. Cracovia., 97–152.

[1920] "Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points". *Fund. Math.*, **1**, 1–6.

[1920a] "Sur la question de la mesurabilité de la base de M. Hamel". *Fund. Math.*, **1**, 105–111.

[1920b] "Sur l'équation fonctionelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$". *Fund. Math.*, **1**, 116–122.

[1921] "Les exemples effectifs et l'axiome du choix". *Fund. Math.*, **2**, 112–118.

[1923] *Zarys teorii mnogości*, part I. Warsaw.

[1928] "Sur la décomposition d'ensembles". *Man. Math. und Phys.*, **35**, 239–243.

[1934] *Hypothèse du continu*. Monografie Matematyczne, vol. 4. Warsaw.

[1937] "Sur une décomposition du segment en plus que $2^{\aleph_0}$ ensembles non mesurables et presque disjoints". *Fund. Math.*, **28**, 111-114.

[1947] "L'hypothèse généralisée du continu et l'axiome du choix". *Fund. Math.*, **34**, 1–5.

[1947a] "Sur la différence de deux nombres cardinaux". *Fund. Math.*, **34**, 119-126.

[1947b] "Sur une proposition qui entraîne l'existence des ensembles non mesurables". *Fund. Math.*, **34**, 157–162.

[1948] "Sur une proposition de A. Lindenbaum équivalente à l'axiome du choix". *Compt. Rend. Varsovie*, **40**, 1–3.

[1965] *Cardinal and Ordinal Numbers*. Monographie Math. Warsawa.

[1974] *Oeuvres choisies*, vol. I. Warsawa: PWN.

[1975] *Oeuvres choisies*, vol. II. Warsawa: PWN.

[1976] *Oeuvres choisies*, vol. III. Warsawa: PWN.

Sierpiński, Wacław - **Tarski**, Alfred

[1930] "Sur une propiété caractéristique des nombres inaccessibles". *Fund. Math.*, **15**, 292–293. Veieu [**G. - M.**], **I**, 287–297.

Skolem, Thoralf

[1923] Einige Bermerkungen zur Axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Den Femte skand. Matematikerkongressen, Redogörelse*, 217–232. Traducció anglesa a van **Heijenoort**, [1967], 302–333.

Specker, Ernest

[1954] "Verallgemeinerte Kontinuumshypothese und Auswahlaxiom". *Arch. der. Math.*, **5**, 323-337.

Stäkel, P

[1907] "Zu H. Webers Elementarer Mengenlehre". *Jak. Deuts. Math.-Ver*, **16**, - .

Sudan, Gabriel

[1939] "Sur une note de A. Tarski". *Comptes Rend. de Roumanie*, **3**, 7–8.

Suppes, Patrik

[1960] *Axiomatic Set Theory*. Van Nostrand. New York. Traducció castellana a Ed Norma. Colombia, 1980.

Takeuti, Gaisi - **Zaring**, Wilson M.

[1970] *Introduction to Axiomatic Set Theory*. Springer-Verlag. G.T.M., **1**. Berlin.

Tarski, Alfred

[1923] "Sur le terme primitif de la logistique". *Fund. Math*, **4**, 196–200. Veieu [**G. - M.**], **1**, 13–20 i també **Tarski**, A. [1972], 1–25.

[1924] "Sur quelques théorèmes qui equivalent à l'axiome du chois". *Fund. Math.*, **5**, 147–154. Veieu [**G. - M.**], **1**, 39–48.

[1924a] "Sur les ensembles finies". *Fund. Math.*, **6**, 45–95. Veieu [**G. - M.**], **1**, 65-117.

[1924b] "Sur les truth-fonctions au sens de M.M. Russell et Whitehead". *Fund. Math.*, **5**, 59–74. Veieu [**G. - M.**], **1**, 21-38.

[1925] "Quelques théorèmes sur les alephs". *Fund. Math.*, **7**, 1–14. Veieu [**G. - M.**], **1**, 155-170.

[1928] "Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles prseque disjoints". *Fund. Math.*, **12**, 188–205. Veieu [**G. - M.**], **1**, 205–224.

[1929] "Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints". *Fund. Math.*, **14**, 205–215. Veieu [**G. - M.**], **1**, 253–265.

[1930] "Sur les classes d'ensembles closes par rapport à certaines opérations élémentaires". *Fund. Math.*, **16**, 181–304. Veieu [**G. - M.**], **1**, 391–516.

[1930a] "Une contribution à la théorie de la mesure". *Fund. Math.*, **15**, 42–50. Veieu [**G. - M.**], **1**, 275–285.

[1938] "Ein Überdeckungssatz für endliche Mengen nebst einigen Bermerkungen über die Definitionen der Endlichkeit". *Fund. Math.*, **30**, 156–163. Veieu [**G. - M.**], **2**, 407–416.

[1938a] "Über unerreichbare Kardinalzahlen". *Fund. Math.*, **30**, 68–89. Veieu [**G. - M.**], **2**, 357–380.

[1938b] "Eine äquivalente Formulierung des Auswahlaxioms". *Fund. Math.*, **30**, 197–201. Veieu [**G. - M.**], **2**, 417–423.

[1938c] "Drei überdecknugsätze der Allgemeinen Mengenlehre". *Fund. Math.*, **30**, 132–155. Veieu [**G. - M.**], **2**, 381–406.

[1939] "On well-ordered subsets of any set". *Fund. Math.*, **32**, 176–183. Veieu [**G. - M.**], **2**, 549–558.

[1939a] "Ideale in vollständigen Mengenkörpern, I". *Fund. Masth.*, **32**, 45–63. Veieu [**G. - M.**], **2**, 507–527.

[1948] "Axiomatic and algebraic aspects of two theorems on sums of cardinals". *Fund. Math.*, **35**, 79–104. Veieu [**G. - M.**], **3**, 171–198.

[1954] "Theorems on the existence of successors of cardinals, and the axiom of choice". *Indag. Math.*, **16**, 26–32. Veieu [**G. - M.**], **3**, 505–514.

[1954a] "Prime ideal theorems for Boolean Algebras and the axiom of choice". *But. Am. Math. Soc.*, **60**, 390–391. Veieu [**G. - M.**], **4**, 617.

[1955] "General principles of induction and recursion in axiomatic set theory". *But. Am. Math. Soc.*, **61**, 442. Veieu [**G. - M.**], **4**, 621.

[1955a] "The notion of rank in axiomatic set theory and some of its applications". *But. Am. Math. Soc.*, **61**, 443. Veieu [**G. - M.**], **4**, 662.

[1964] "The comparability of cardinals and the axiom of choice". *Not. Am. Math. Soc.*, **11**, 578. Veieu [**G. - M.**], **4**, 672.

[1965] "On the Existence of Large Sets of Dedekind Cardinals". *Not. Am. Math. Soc.*, **12**, 179. Veieu [**G. - M.**], **4**, 673.

[1972] *Logique, Sémantique et Métamathématique* 1923–1944. Armand Colin. Paris.

Tarski, Alfred - **Banach**, Stephen

1924 Veieu **Banach**, S. - **Tarski**, A. Veieu [**G. - M.**], **1**, 119–154.

Tarski, Alfred - **Lindenbaum**, Adolf

1926 Veieu **Lindenbaum**, A. - **Tarski**, A. Veieu [**G. - M.**], **1**, 171–204.

Tarski, A. - **Sierpiński**, W.

1930 Veieu **Sierpiński**, W. - **Tarski**, A. Veieu [**G. - M.**], **1**, 287–298.

Tarski, Alfred - **Vaught**, Robert

[1957] "Arithmetical extensions of relational systems". *Comp. Math.*, **13**, 81–102. Veieu [**G. - M.**], **3**, 651–674.

Teichmüller, Oswald

[1939] "Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom?". *Deuts. Math.*, **4**, 567–577.

Thomas, Ivor

[1939] *Greek Mathematical Works*. Harvard Univ. Press. Cambridge.

Truss, John K.

[1973] "On Successors in Cardinal Arithmetic". *Fund. Math.*, **78**, 7–21.

Tuckey, John

[1940] *Convergence and Uniformity in Topology*. Annals of Math. Studies, No. 2. Princeton Univ. Press. Princeton.

Tychonoff, Andrei

[1930] "Über die topologische Erweiterung von Räumen". *Math. Ann.*, **102**, 544–561.

van Hiejenoort, Jean

[1967] *From Frege to Gödel. A Source Book in Mtahematical Logic,* 1879–1931. Harvard Univ. Press. Cambridge.

Vaught, Robert L.

[1950] "On the Axiom of Choice and Mathematical Theorems". *But. Am. Math. Soc.*, **62**, 262–263.

[1974] "Model Theory before 1945". *Oroc. of the Tarski Symp. Proc. of Symp. in Pure Maths.*, **25**, 153–172. Am. Math. Soc. Providence.

Vaught, Robert L. - **Tarski**, Alfred

[1957] Veieu **Tarski**, A. - **Vaught**, R.L.

Vila, Núria

[1975] "Liouville i els nombres transcendents". *But. Soc. Mat. I.E.C.*, **18**, 32–41.

Vitali, Giuseppe

[1905] "Sul probleme delle misura dei gruppi di punti di una retta". Bologna. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 73–74.

Volaggio, E.

[1965] Veieu **Bolzano**, B., prefaci.

von Neumann, John

[1923] "Zur Einführung der Transfiniten Zahlen". *Act. Rag. Univ. Hung.*, **1**, 199–208. Traducció anglesa a **van Heijenoort**, J., 346–354.

[1925] "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre". *Journ. Rein. ang. Math.*, **154**, 219–240. Traducció anglesa a **van Heijenoort**, J., 393–413.

[1928] "Die Axiomatisierung der Mengenlehre". *Math. Zeits.*, **27**, 669–752.

Weber, Heinrich

[1906] "Elementare Mengenlehre". *Jab. Math. Ver.*, **15**, - .

Whitehead, Alfred North

[1902] "On cardinals Numbers". *Am. Journ. Math.*, **24**, 376–394. Traducció rancesa a [**C. - G.**], **2**, 165–227.

[1904] "Theorems on Cardinal Numbers". *Am. Journ. Math.*, **26**, 31–32.

Whitehead, Alfred North - **Russell**, Bertrand

[1910] Veieu **Russell**, Bertrand - **Whitehead**, Alfred North

[1912] Veieu **Russell**, Bertrand - **Whitehead**, Alfred North

[1913] Veieu **Russell**, Bertrand - **Whitehead**, Alfred North

Wrinch, Dorthy

[1923] "On Mediate Cardinals". *Am. Journ. Math.*, **45**, 87–92.

Zaring, Wilson M. - **Takeuti**, Gaisi

[1970] Veieu **Takeuti**, G. - **Zaring**, W.M.

Zermelo, Ernest

[1904] "Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)". *Math. Ann.*, **59**, 514–516. Traducció anglesa a **van Heijenoort** [1967], 139–141. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 451–458.

[1908] "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordung". *Math. Ann.*, **65**, 107–128. Traducció anglesa a **van Heijenoort** [1967], 183–198. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 521–556.

[1908a] "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, I". *Math. Ann.*, **65**, 261–281. Traducció anglesa a **van Heijenoort** [1967], 199–215. Traducció francesa a [**C. - G.**], **2**, 557–594.

[1930] "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche: Neue Untersuchungen über die Grundlangen der Mengenlehre". *Fund. Math*, **16**, 29–47.

Zorn, Max

[1935] "A remark on method in transfinite algebra". *But. Am. Math. Soc.*, **41**, 667—670.