APUNTES SOBRE EL PENSAMIENTO MATEMATICO DE RAMON LLULL

John R. WELCH*

Traducción: Ana María PALOS

Uno de los presupuestos de la filosofía analítica es el atomismo conceptual, la creencia en que la mayoría de los conceptos son compuestos construidos a partir de un número relativamente pequeño de conceptos primitivos. El análisis del número realizado por Frege, el teoría russelliano de las descripciones definidas, los signos simples y complejos del **Tractatus**, el programa de reducción positivista - por nombrar sólo unos cuantos de los temas más clásicos - fueron todos ellos intentos de resolver nociones complejas en simples lógicos. Pero los filósofos analíticos no inventaron el atomismo conceptual; Leibniz, por nombrar uno, era un convencido. Declaraba que *"sería posible elaborar una especie de alfabeto de pensamientos humanos y que* ***todo puede ser descubierto y juzgado mediante una comparación de las letras del alfabeto y un análisis de las palabras compuestas con ellas****"*.[1] Semejante alfabeto, como dice Leibniz, podría emplearse para juzgar y descubrir. No sólo serviría para demostrar proposiciones que ya se consideran verdaderas - una lógica de la justificación - sino que podría también utilizarse para inventar o descubrir nuevas verdades - una lógica del descubrimiento. ¿ Y qué aspecto tendría una lógica del descubrimiento? En la respuesta de Leibniz, su **ars inveniendo** habría de tener dos partes: una combinatoria, para generar preguntas, y otra analfica, para responderlas.[2]

THEORIA - Segunda Epoca - Año IV
Curso 1988-1989, Nº 11, pp. 451-459

No se conoce suficientemente hasta qué punto es estrecho aquí el paralelo entre el pensamiento de Leibniz y el **Ars magna**[3] de Ramón Llull. Y el paralelo no es accidental. Siendo aún muy joven, a sus veinte años, Leibniz se había sentido al mismo tiempo fascinado y repelido por el Arte. La fascinación se debía al hecho de que Llull hubiera anticipado sus principales ideas. La repulsión era provocada por la ingenuidad matemática de Llull, consecuencia de haber vivido unos cuatro siglos antes del desarrollo de la matemática combinatoria en la cual Leibniz esperaba poder basar su propia lógica del descubrimiento. (De hecho, Leibniz fue el primero en utilizar el término "combinatorio" en su sentido moderno [4]). Ambas reacciones de Leibniz hallan eco en los objetivos del presente texto: subrayar en primer término lo que fascinaba a Leibniz en al Arte y, en segundo, tras corregir cierto error en su crítica de Llull, extenderla en una nueva dirección.

Llull se anticipó a Leibniz en la creencia de que la razón humana consistía en combinar unas cuantas nociones primitivas. Para especificar tales nociones, Llull discurrió un alfabeto conceptual que, a su parecer, reproducía la estructura básica del universo. En la posterior fase ternaria del Arte (ca. 1290-1308), el alfabeto adopta la siguiente forma[5].

Fig.A	Fig.T	Preguntas y reglas	Sujetos	Virtudes	Vicios
B bondad	diferencia	¿sí?	Dios	justicia	avaricia
C grandeza	concordancia	¿qué?	ángel	prudencia	glotonería
D eternidad*	contrariedad	¿de qué?	cielo	fortaleza	lujuria
E poder	pricipio	¿por qué?	hombre	templanza	orgullo
F sabiduría	medio	¿cuánto?	imaginativo	fé	envidia
G voluntad	fin	¿de qué clase?	sensitivo	esperanza	codicia
H virtud	mayoría	¿cuándo?	vegetativo	caridad	ira
I verdad	igualdad	¿dónde?	elementativo	paciencia	mendacidad
K gloria	minoría	¿cómo? y ¿con qué?	instrumentativo	compasión	inconstancia

*o duración

Cada una de las seis columnas del alfabeto se propone representar una de las características estructurales fundamentales del universo. La primera columna (bajo "Fig. A") enumera las dignidades llullianas, externalizaciones de la personalidad divina de donde la bondad, grandeza, duración y demás rasgos mundanos emanan de manera neoplatónica. La segunda columna está compuesta por lo que toma Llull como categorías lógicas primarias. La tercera columna detalla las diferentes preguntas que pueden plantearse; la cuarta, la jerarquía ontológica medieval; y las quinta y sexta, las categorías morales esenciales.

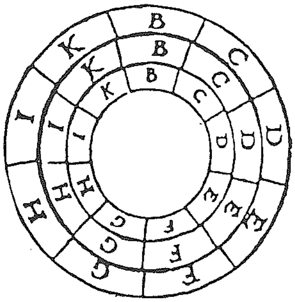
Llull también se anticipó a Leibniz al reconocer que semejante alfabeto constituía la clave para una lógica del descubrimiento. Más aún, las partes combinatoria y analítica del **ars inveniendi** de Leibniz se hallan claramente prefiguradas en el funcionamiento del alfabeto. Al combinar las "letras" del alfabeto, que de hecho eran palabras, se producían palabras que eran (toscamente) frases. Una vez completada la cosecha de todas las combinaciones lógicas posibles de las letras del alfabeto (correspondiendo a la parte combinatoria del **ars inveniendi** de Leibniz), el Arte había de usarse para separar las combinaciones falsas de las verdaderas (la parte analítica). El resultado, el trigo, sería la suma total de las verdades más generales acerca del mundo - la filosofía definitiva.

Pero en **De arte combinatoria**, Leibniz censura la ejecución llevada a cabo por Llull de la parte combinatoria de esta tarea[6]. Llull tuvo sólamente en cuenta las combinaciones binarias y ternarias de las letras del alfabeto, pero es posible combinar desde una hasta nueve letras[7]. Por consiguiente, argumentaba Leibniz, las 9 letras de cada columna pueden ser combinadas en $2^9 - 1 = 511$ formas posibles. Y puesto que hay 6 columnas, el sencillo alfabeto de Llull produce la asombrosa cifra de $511^6 = 17,804,320,388,674,561$ posibles combinaciones.

En realidad, la cifra de Leibniz es o demasiado alta o demasiado baja. La fórmula para el número total k de combinaciones, desde unarias hasta n-arias, que pueden obtenerse de n objetos sin repeticiones es $k = 2^n - 1$. Pero Leibniz procede, de hecho, aplicando la fórmula a sólo la primera columna del alfabeto, obteniendo 511, y elevando ese resultado a la sexta potencia. Para comprobar cómo esto desvía los resultados, el lector puede tratar de seguir el procedimiento de Leibniz para responder a dos preguntas acerca del modelo $M = \begin{matrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{matrix}$. 1) ¿Cuántas combinaciones sin repeticiones, desde unarias hasta **n**-arias, hay ahí cuando **n** = 6 (el número de letras en M)? 2) Para el mismo número de letras, ¿cuántas combinaciones sin repeticiones, desde unarias hasta ternarias, son posibles? Aplicando la fórmula al modo de Leibniz a la primera columna de M nos da 7, y al cuadrado da 49. Pero hay $2^6 - 1 = 63$ combinaciones para responder a la primera pregunta, haciendo que 49 sea demasiado bajo; y hay 6 unarias + 15 binarias + 20 ternarias = 41 combinaciones para responder a la segunda pregunta, haciendo que 49 sea demasiado alto[8]. Lo mismo sucede con el alfabeto de Llull. Si Leibniz quería el número total de combinaciones sin repeticiones, desde unarias hasta **n**-arias, donde **n** = 55 (el número de letras en el alfabeto), ese número es $2^{55} - 1$, 39 órdenes de magnitud mayor que la cifra en **De arte combinatoria.** Del otro lado, si él quería el número total de combinaciones sin repeticiones, desde unarias hasta novarias, para el mismo número de letras, tenemos un número en el orden de 10^9, el cual es de magnitud 7 órdenes menor que la cifra de Leibniz.

No obstante, Leibniz tenía razón al decir que las cosas eran mucho más complicadas de lo que Llull pensaba. En las páginas siguientes ofrezco una muy modesta prolongación de la crítica de Leibniz. En vez de centrarme en el alfabeto, sin embargo, enfocaré la atención sobre la tabla que apareció por primera vez en la **Taula general** (1293) y que permaneció intacta hasta el **Ars generalis ultima** y el **Ars brevis** (ambas de 1308), versiones finales del Arte. La tabla fue diseñada teniendo en mente dos funciones muy diferentes: para proporcionar automáticamente un término medio para un silogismo categórico sólido sobre cualquier tema posible, y para tabular exhaustivamente las combinaciones ternarias de las dos primeras columnas del alfabeto. Las observaciones que siguen conciernen únicamente a la segunda de dichas funciones.

La tabla de Llull es un resultado de la Cuarta Figura de su Arte, tal como se reproduce a continuación.



Como puede verse, la Cuarta Figura se compone de tres círculos concéntricos, compartimentando cada uno de ellos por las variables desde B hasta K desde la extrema izquierda del alfabeto. El círculo exterior ha de imaginarse como fijo, y los dos círculos interiores como movibles, de modo que produzcan las diversas combinaciones ternarias variables. En los manuscritos y en algunas de las primeras ediciones impresas, los círculos internos se movían realmente; se hallaban superpuestos y unidos al centro del círculo exterior mediante un hilo anudado en ambos extremos. Así pues la Cuarta Figura era una máquina lógica primitiva.

Veamos ahora cómo se genera la tabla. Dadas las 9 variables desde B hasta K, hay $\dfrac{9!}{3!(9-3)!} = 84$ combinaciones ternarias sin repetición de variables. El resultado es el siguiente.

1 BCD	2 BCE	3 BCF	4 BCG	5 BCH	6 BCI	7 BCK	8 BDE	9 BDF	10 BDG	11 BDH	12 BDI
13 BDK	14 BEF	15 BEG	16 BEH	17 BEI	18 BEK	19 BFG	20 BFH	21 BFI	22 BFK	23 BGH	24 BGI
25 BGK	26 BHI	27 BHK	28 BIK	29 CDE	30 CDF	31 CDG	32 CDH	33 CDI	34 CDK	35 CEF	36 CEG
37 CEH	38 CEI	39 CEK	40 CFG	41 CFH	42 CFI	43 CFK	44 CGH	45 CGI	46 CGK	47 CHI	48 CHK
49 CIK	50 DEF	51 DEG	52 DEH	53 DEI	54 DEK	55 DFG	56 DFH	57 DFI	58 DFK	59 DGH	60 DGI
61 DGK	62 DHI	63 DHK	64 DIK	65 EFG	66 EFH	67 EFI	68 EFK	69 EGH	70 EGI	71 EGK	72 EHI
73 EHK	74 EIK	75 FGH	76 FGI	77 FGK	78 FHI	79 FHK	80 FIK	81 GHI	82 GHK	83 GIK	84 HIK

Cada una de estas combinaciones está incorporada en la tabla a la cabeza de una de las 84 columnas. El resto de cada columna consta de 19 variaciones de la combinación en su cabeza y la letra T. La tabla completa, por consiguiente, tiene 84 x 20 = 1680 compartimentos. No obstante, para nuestro limitado propósito, bastará con la tabla abreviada del **Ars brevis**[9]. Incluye unicamente 7 de las 84 columnas.

B C D	C D E	D E F	E F G	F G H	G H I	H I K
B C T B	C D T C	D E T D	E F T E	F G T F	G H T G	H I T H
B C T C	C D T D	D E T E	E F T F	F G T G	G H T H	H I T I
B C T D	C D T E	D E T F	E F T G	F G T H	G H T I	H I T K
B D T B	C E T C	D F T D	E G T E	F H T F	G I T G	H K T H
B D T C	C E T D	D F T E	E G T F	F H T G	G I T H	H K T I
B D T D	C E T E	D F T F	E G T G	F H T H	G I T I	H K T K
B T B C	C T C D	D T D E	E T E F	F T F G	G T G H	H T H I
B T B D	C T C E	D T D F	E T E G	F T F H	G T G I	H T H K
B T C D	C T D E	D T E F	E T F G	F T G H	G T H I	H T I K
C D T B	D E T C	E F T D	F G T E	G H T F	H I T G	I K T H
C D T C	D E T D	E F T E	F G T F	G H T G	H I T H	I K T I
C D T D	D E T E	E F T F	F G T G	G H T H	H I T I	I K T K
C T B C	D T C D	E T D E	F T E F	G T F G	H T G H	I T H I
C T B D	D T C E	E T D F	F T E G	G T F H	H T G I	I T H K
C T C D	D T D E	E T E F	F T F G	G T G H	H T H I	I T I K
D T B C	E T C D	F T D E	G T E F	H T F G	I T G H	K T H I
D T B D	E T C E	F T D F	G T E G	H T F H	I T G I	K T H K
D T C D	E T D E	F T E F	G T F G	H T G H	I T H I	K T I K
T B C D	T C D E	T D E F	T E F G	T F G H	T G H I	T H I K

Llull usa la **T** como instrumento interpretativo: todas las variables que aparecen ante ella han de interpretarse leyendo a través del alfabeto hasta su primera columna; todas las variables detrás de **T** se interpretan leyendo hasta la segunda. Así **BCTB** representa "bondad", "grandeza" y "diferencia", mientras que **TBCD** representa "diferencia", "concordancia" y "contrariedad". Lo que ha hecho Llull, en realidad, es construir cada columna con las combinaciones ternarias posibles de las 6 "letras" que son los valores de las variables en la cabeza de la columna. La columna BCD, por ejemplo, se compone de las 20 combinaciones de los valores de las variables **B**, **C** y **D**.

Hay dos observaciones críticas que pueden hacersele a esta tabla. La primera es que Llull se limita innecesariamente a las combinaciones que, al ser interpretadas, no tienen repeticiones. Todas las combinaciones ternarias de la tabla se consideran significativas y así, por ejemplo, **BCDT** se interpreta como *"la bondad es tan grande como la eternidad"*[10]. Pero si esto tiene sentido, igualmente lo tiene **BCCT**, *"la bondad es tan grande como la grandeza"*. Sin embargo **BCCT** - y todas las demás combinaciones con valores repetidos - están excluidas de la tabla. Si las incluimos, el número total de tríos no es 84 sino $9^3 = 729$[11].

La segunda observación es que aún cuando tomemos sólamente las 84 combinaciones de Llull sin valores repetidos, la tabla todavía sigue resultando más complicada de lo que parece. Cuando Llull interpreta **BCDT**, por ejemplo, como *"la bondad es tan grande como la eternidad"*, ignora el hecho de que hay otras 5 maneras de ordenar las variables y otras 5 interpretaciones igualmente legítimas.

BDCT	La bondad es tan eterna como la grandeza.
CBDT	La grandeza es tan buena como la eternidad.
CDBT	La grandeza es tan eterna como la bondad.
DBCT	La eternidad es tan buena como la grandeza.
DCBT	La eternidad es tan grande como la bondad.

Llull no registra la diferencia entre las variables, en donde el orden no importa (**BCD** = **DCB**), y las interpretaciones de las variables, en donde el orden ciertamente sí importa (*"la bondad es tan grande como la eternidad"* ≠ *"la eternidad es tan grande como la bondad"*).
De suerte que cabe esperar cierta confusión entre las combinaciones, que no están ordenadas, y las permutaciones, que sí lo están. De hecho esto es lo que sucede. Llull calcula el número de **combinaciones** de los 6 valores tomados de 3 en 3: $\frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$. Mientras que lo que debía haber hecho es calcular el número de **permutaciones** de los valores tomados de 3 en 3: $\frac{6!}{(6-3)!} = 120$[12]. ¿Qué aspecto tendría una tabla corregida, con entradas únicas para todas las permutaciones de 3 posiciones sin repeticiones de valores? Por supuesto que sería más larga que el original de Llull. Puesto que el problema no está en las combinaciones ternarias de 9 variables sino en las permutaciones ternarias de sus 18 valores, una tabla corregida tendría $\frac{18!}{(18-3)!} =$ 4896 compartimentos.

NOTAS

1 Leibniz, **Mathematische Schriften**, ed. C.I. Gerhardt (Berlin y Halle, 1849-63; reed. Darmstadt: Hildesheim, 1962), tomo 7, pág. 185.

2 **Opuscules et fragments inédits de Leibniz**, ed. Louis Couturat (París, 1903; reed. Darmstad: Hildesheim, 1961), pág. 167.

3 Me referiré al ciclo de trabajos conocidos globalmente como **Ars magna** simplemente como el Arte.

4 **De arte combinatoria** en **Opera Philosophica Omnia**, ed. J.E. Erdmann, reed. Renate Vollbrecht (Meisenheim/Glan: Scientia Aalen, 1959).

5 El alfabeto ha sido tomado del **Ars brevis.** Véase Anthony Bonner, **Selected Works of Ramón Llull (1232-1316)** (Princeton: Princeton Univ. Press, 1985), tomo I, Pág. 581. Sobre las diversas fases del Arte, véase ibid., I, pág. 56-7.

6 **De arte combinatoria**, pág. 22.

7 Las nueve combinaciones unarias habrían sido inútiles para Llull, ya que él sólo estaba interesado en combinaciones que, al ser interpretadas, contuvieran valores de verdad.

8 La respuesta correcta a la primera pregunta se obtiene aplicando la fórmula a la matriz completa de 3 x 2. Para la segunda pregunta, la fórmula $(n/r) = n!/r!(n-r)!$ da el número de combinaciones sin repeticiones de **n** objetos tomados **r** por vez.

9 Bonner, pág. 597.

10 Al interpretar los compartimentos a la cabeza de la columna, **T** se considera como si fuese la última letra. Así **BCD** se interpreta como **BCDT**.

11 Prantl afirmaba que este era el número correcto en **Geschichte der Logik im Abendlande** (Leipzig, 1867; reed. Graz: Akademische Drucku. Verlagsanstalt, 1955), tomo III, pág. 162 n90.

12 La fórmula para el número de permutaciones sin repeticiones de **n** objetos tomados **r** a la vez es $nPr = n!/(n-r)!$. El procedimiento que aquí recomiendo no es otro que el de Llull en una situación análoga. Para evacuar las combinaciones **binarias** de las variables

de la Tercera Figura, él especifica las permutaciones posibles de sus valores. Véase Bonner, pág. 598.

*St. Louis University (Madrid)