CALCULOS GEOMETRICOS EN LEIBNIZ ★

Javier ECHEVERRIA*

ABSTRACT

In a letter of September 1679 to Huygens, Leibniz proposed a **calculus situs** directly applicable to geometric relations without use of magnitudes. His researches on this kind of Geometric Calculus were developed along all his life but, unfortunately, only a few Leibniz's writings on these matters had been published by Gerhardt and Couturat. They were closely connected to his own researches on Logic Calculus. From a chronological point of view, the unpublished manuscript **Circa Geometrica Generalia (CGG)** (1682) may be considered as the third most important Leibniz' contribution on **Calculus Situs.** CGG summarizes several results obtained by Leibniz from 1679 to 1682 and contains some interesting ideas concerning set theory, geometric axioms, General Topology (connexion, frontier, continous transformations, etc.) and Logic Foundations of Geometry.

RESUMEN

En una carta a Huygens escrita en septiembre de 1679, Leibniz propuso un **calculus situs** que fuese aplicable al estudio directo de las relaciones geométricas, sin utilizar magnitudes. Sus investigaciones en torno a los Cálculos Geométricos continuaron a lo largo de toda su vida, pero, lamentablemente, Gerhardt y Couturat sólo publicaron una pequeña parte de sus manuscritos sobre estos temas. Estas investigaciones estuvieron estrechamente conectadas con los trabajos de Leibniz sobre Cálculos Lógicos. El manuscrito inédito **Circa Geometrica Generalia** (1682) puede ser considerado, desde un punto de vista cronológico, como la tercera más importante contribución de Leibniz al **Calculus Situs.** En CGG Leibniz resume varios logros obtenidos desde 1679 hasta 1682 y expone ideas interesantes en relación con la Teoría de Conjuntos, los axiomas de la geometría, la Topología General (conexión, frontera, transformaciones continuas, etc.) y los fundamentos lógicos de la Geometría.

THEORIA - Segunda Época - Año VI
Nº 14-15, Octubre 1991, 29-66

Javier ECHEVERRÍA

1. INTRODUCCION

Durante el año 1679 Leibniz escribió numerosos manuscritos, particularmente en el mes de abril, sobre los Cálculos Lógicos. A partir de las ediciones de Gerhardt[1], y sobre todo de la recopilación de Couturat[2], dichos fragmentos han sido ampliamente estudiados, habiendo sido considerados como uno de los principales precedentes históricos de la moderna Lógica Formal. Asimismo son conocidas sus tentativas para optimizar los Cálculos Aritméticos, tanto por vías mecánicas como mediante métodos puramente formales y combinatorios[3]. Las ediciones de Zacher[4] y Knobloch[5] han atraído recientemente la atención de numerosos estudiosos sobre estos trabajos de Leibniz, y no sólo por haberse propuesto en ellos el sistema binario de numeración, sino también por su esfuerzo en mejorar todo tipo de cálculos aritméticos, tanto a través de las notaciones como de los métodos de computación.

Menos conocidos son los esfuerzos que, también en el año 1679, Leibniz llevó a cabo en order a desarrollar esta misma línea de investigación en el ámbito de la Geometría. Gerhardt editó algún manuscrito en torno a los Cálculos Geométricos[6], al igual que Couturat[7], pero falta un trabajo sistemático sobre las tentativas leibnicianas para reducir la Geometría a Cálculo. El ulterior descubrimiento y difusión del Cálculo Diferencial, por medio del cual las figuras geométricas clásicas, al igual que otras muchas curvas y cuerpos geométricos, eran expresables y tratables por medio de las notaciones diferenciales, ha restado importancia a las investigaciones de Leibniz sobre el **Calculus Situs**, relegando dichos textos a una posición marginal dentro de la matemática leibniciana. La edición de todos los manuscritos de Leibniz relativos a la **Characteristica Geometrica** en 1679, realizada por el autor del presente artículo[8], supuso una primera contribución en este sentido. Sin embargo, Leibniz volvió sobre la idea de un Cálculo Geométrico del sitio y del lugar numerosas veces a lo largo de su vida. A través de estos trabajos, todavía inéditos, es posible hacerse una idea mucho más cabal de lo que pretendía llevar a cabo, así como de los logros que obtuvo y de los fracasos que asimismo cosechó en su tentativa de reducir las nociones más generales de la Geometría a un puro Cálculo de Nociones. Dicho proyecto está íntimamente ligado al de los

Cálculos Lógicos, motivo por el cual dedicaremos especial atención a las similitudes y diferencias entre ambas investigaciones leibnicianas, iniciadas en 1679, y continuadas hasta el fin de sus días. En la presente contribución, además de resumir los planteamientos de Leibniz en 1679, dedicaremos especial atención a un manuscrito inédito de Leibniz, titulado **Circa Geometrica Generalia et Calculum Situs seu Picturam Characteristicam Observationes Miscellae Constituendae Analysi Geometricae Plane Novae Praeludentes**[9]. Dicho manuscrito fue escrito verosímilmente hacia 1682 y tiene la particularidad, entre los muchos inéditos de Leibniz sobre el tema, de ser un escrito largo, sistemático, y **pasado a limpio**: es decir, que no se trata de un borrador más, sino que en él Leibniz resume sus investigaciones sobre el **Calculus Situs** durante los años 1680-1682. Por consiguiente, puede ser considerado como el siguiente texto fundamental sobre el **Calculus Situs**, después de la **Characteristica Geometrica** de agosto de 1679 y de la carta a Huygens del 9 de septiembre de 1679[10]. De entre las nueve etapas que cabe distinguir en la vida de Leibniz en lo que respecta a sus investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría[11], el manuscrito mencionado es uno de los fundamentales de la segunda, y desde luego el más relevante por lo que hace al aspecto calculístico y combinatorio de las investigaciones geométricas de Leibniz en esta fase (1682-1683).

2. LA NECESIDAD DE UN NUEVO ANALISIS GEOMETRICO

Desde que Leibniz estudió a fondo el Algebra de Vieta y de Descartes, y su aplicación a la Geometría[12], concluyó que, siendo un instrumento esencial para el Análisis de la Geometría, debido al uso de signos que podían ser manejados combinatoriamente, resultaba sin embargo insificiente para un Análisis Geométrico más depurado. La idea de construir una Característica Geométrica, ya presente en 1676 y 1677, en parte por influencia de Desargues y de Pascal[13], va perfilándose durante los primeros años de su estancia en Hannover y cristalizará por primera vez en los escritos de 1679 ya mencionados. En la carta de Leibniz a Gallois de diciembre de 1678 el proyecto de Leibniz es anunciado claramente:

"Je ne cherche plus rien en Geometrie, que l'art de trouver

d'abord les belles constructions. Je voy en plus que l'Algebre n'est past la voye naturelle pour y arriver: et qu'il y a moyen de faire une autre caracteristique propre aux lignes, et naturelle pour les solutions lineaires; au lieu que l'Algebre est communé à toutes les grandeurs, et qu'il faut des detours, et des opérations forcées ordinairement, pour tirer la construction du calcul, quoyque sur cela meme il y a beaucoup d'adresses qui ne sont pas encor connues à tout le monde. Si cette caracteristique de Geometrie estoit établie, comme je voy qu'elle pourroit estre, elle meneroit infalliblement la où l'on veut aller, autant qu'il est possible, aussi bien que l'Algebre".[14]

Durante los meses de febrero, agosto y septiembre de 1679 Leibniz trabajó de manera sistemática tratando de desarrollar estas ideas. Como resultado de ello surge la carta a Huygens, cuyo punto de partida sigue siendo el planteamiento hecho a Gallois:

"Il nous faut encore une autre Analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement **situm** *comme l'Algebre exprime* **magnitudinem.** *Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et meme des machines et mouvements en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs; et je vous envoye un essay qui me paroist considerable"*[15]

y en el texto de dicho **Ensayo**, que fue enviado por Leibniz a Huygens como apéndice a la carta del 9 de septiembre de 1679, puede leerse:

"L'Algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indeterminés, ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvenent. D'où vient qu'il est souvent difficile d'enfermer dans le calcul les conditions de la figure et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions geometriques asses commodes, lors même que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique, suivant des figures de veue, ne peut manquer de donner en même temps, la solution et la construction, et la demonstration geometrique, le tout d'une maniere naturelle. Et

par une analyse, c'est a dire par des voyes determinées."[16]

Estas últimas frases de Leibniz son reveladoras para nuestro objeto. La Característica Geométrica no se reduce a un nuevo Cálculo, que ya no tiene por objeto las relaciones entre magnitudes, sino las relaciones de situación; debe asimismo mejorar el Análisis cartesiano de las magnitudes geométricas proporcionando, además del cálculo, la construcción de las figuras y la demostración subsiguiente de los teoremas. El nuevo Análisis Geométrico ha de ser un Cálculo de caracteres (no numéricos) que nos permita construir los objetos geométricos definibles por la combinatoria de caracteres, por una parte, y asimismo demostrar los teoremas correspondientes, a continuación. Para ello Leibniz se inspira en la geometría perspectiva y trata de modificar el sistema de coordenadas cartesianas mediante estas **figures de veue** que pasarían a se el nuevo instrumento para el Análisis Geométrico. De esta manera tiende a los nuevos sistemas de coordenadas que serán propuestos en el siglo XIX por Grassman y Möbius, entre otros.[17] Mas no se puede olvidar la exigencia demostrativa ligada al nuevo Análisis: los nuevos signos de la **Characteristica Geometrica** han de expresar las relaciones de situación de tal manera que no sólo permitan el correspondiente Cálculo Combinatorio, sino que éste sea útil al **Ars Demonstrandi.** En los Cálculos Lógicos de abril de 1679 Leibniz ya había obtenido algunos resultados en esta dirección en el ámbito de la Lógica: sus sistemas de caracteres simplificaban y facilitaban las demostraciones silogísticas; mediante sus trabajos de agosto y septiembre de 1679, Leibniz pretende hacer otro tanto en Geometría.

La Característica Geométrica de Leibniz en 1679 intenta reproducir, tal y como he querido mostrar en otro trabajo[18], el procedimiento de demostración por construcción de los antiguos geómetras griegos, y en particular de Apolonio; y todo ello sin recurrir a las figuras geométricas, sini por medio de signos. Para ello Leibniz introduce nuevos caracteres para las nociones geométricas elementales (punto, recta, plano, circunferencia, espacio, etc.), pero también, y en ello radica la primera novedad, para las relaciones geométricas básicas. En sus investigaciones de 1679 Leibniz considerará la relación de **congruencia** como la fundamental, designándola con un signo **ad hoc**, $\curlyvee$, pero en escritos ulteriores irá variando sus concepciones y tomará otras relaciones geométricas como fundamentales: la semejanza, la homogeneidad, e incluso la determinabilidad.

Una segunda novedad estriba en la introducción de dos nociones geométricas nuevas, no contempladas por Euclides ni por Descartes, entre las nociones básicas del nuevo Análisis Geométrico: el sitio y el lugar. Dicho de otra manera: en lugar de considerar como primitivas las nociones euclídeas de punto, recta, plano, circunferencia, etc., Leibniz va a definir dichas nociones a partir de la noción más general de sistio (en 1679); y en épocas posteriores irá probando con otras nociones básicas, pero siempre con la misma idea: reducir la geometría euclídea a una geometría más general, basada en nociones más abstractas. Estas nuevas **nociones comunes** son designadas por medio de caracteres específicos, diferentes de los aritméticos y de los algebráicos: Leibniz pretende construir sistemas de ecuaciones propiamente geométricas, en las que se calcule con relaciones de posición, y no con magnitudes. La **Characteristica Geometrica** así elaborada habría de ser apta para engendrar un Cálculo de signos que, por pura combinatoria, permitiera luego ir e presando todas las nociones, los teoremas, las construcciones y las demostraciones geométricas de Euclides, de Apolonio y de Descartes, permitiendo incluso la invención de nuevos objetos geométricos y de nuevas verdades concernientes a las nuevas nociones: sitio, lugar, espacio, homogeneidad, etc.

Tal es, en forma muy resumida, el proyecto leibniciano de un nuevo Análisis Geométrico, basado en el **situs** y no en magnitudes, a la construcción de cuyos **Elementos** vino a dedicar no pocos esfuerzos a lo largo de su vida. Si dejamos de lado otros muchos aspectos ligados al proyecto, que en parte han sido comentados en otros trabajos[19], podemos pasar a considerar ya de qué manera se articule y se sintetiza en el manuscrito de 1682, **Circa Geometrica Generalia**, cuyo texto es proporcionado en forma de Apéndice al final del presente artículo.

3. EL SITUS COMO NUEVO FUNDAMENTO DE LA GEOMETRIA

A lo largo de sus investigaciones en 1679, Leibniz había ido definiendo y precisando la noción de **situs**, hasta el punto de convertirla en la noción principal del nuevo Análisis Geométrico que se trataba de construir. Podemos distinguir tres tipos de definiciones del **situs** en 1679.

La primera, básicamente filosófica, remite la noción de **situs** a la percepción simultánea de diferentes cosas:

*"**Situm** habere duo puncta sic exprimo, AC, id est concipio ambo simul percipi. Eodem modo situm trium punctorum ita exprimo: ABC. Si situs AB sit perceptus, itemque situs BC, et eo ipso perceptus sit situs AC, erunt A, B, C in eadem recta."*[20]

La posibilidad de percibir conjuntamente tres puntos, y en particular la noción de alineación, en base a la cual si percibimos dos puntos de una recta habremos de percibir a la vez todos los puntos de dicha recta, son las primeras vías usadas por Leibniz para investigar la noción de **situs**, la cual estaría basada en la noción de percepción y de copercepción. Este tipo de pasajes son frecuentes en febrero de 1679.

El segundo tipo de definición aparece en agosto de dicho año, y conlleva una caracterización propiamente matemática, y en concreto **métrica**, de la noción de **situs**:

"Relatio inter A et B quoad situm nihil aliud involvit quam distantiam seu minimae ab uno ad alterum viae quantitatem"..."Nam situm eorum datum esse, nihil aliud est quam minimam distantiam esse datam."[21]

La distancia mínima entre dos puntos, que en el caso del plano es la línea recta, permite caracterizar métricamente el sitio entre ambos y podría ser la base de un **Calculus Situs**; sin embargo, Leibniz busca un Cálculo todavía más general, que no dependa de las magnitudes. Las bases de dicho Cálculo aparecen por primera vez en septiembre de 1679, cuando propone una tercera definición de **situs**:

"A . B significat situm ipsorum A et B inter se, id est tractum aliquem rigidum per A et B, quam tractum nobis sufficit esse lineam. Ita A . B . C significat tractum alium rigidum."[22]

Conviene destacar este tipo de definición, que reaparecerá continuamente entre los manuscritos de Leibniz durante los años siguientes, y por consiguiente también en el **Circa Geometrica Generalia.** En ella la percepción ha desaparecido como fundamento de la noción de **situs**; y aunque se sigue admitiendo que la distancia entre dos puntos, y concretamente el segmento de línea recta que los une, es una buena caracterización métrica del **situs** entre A y B, ya no es la única. A partir de septiembre de 1679 Leibniz siempre admitirá la caracterización del sitio entre dos puntos en base a cualquier tipo de extenso rígido que conecte ambos puntos, sea dicho extenso rígido una recta, una línea quebrada o también una línea curva, regular o irregular. El sitio no sólo puede ser definido, diríamos hoy en día, con la métrica euclídea, basada en segmentos de recta. Leibniz fue el primero en admitir la posibilidad de construir Cálculos de Situación con métricas muy diferentes: el interés histórico de la **Characteristica Geometrica** depende en buena manera de este descubrimiento leibniciano, como ya hemos destacado en otros trabajos[23].

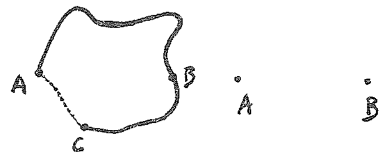
Es de subrayar asimismo la aparición de una nueva notación para el **situs**, la cual surge (y se mantiene de manera bastante sistemática) en base a este tercer tipo de definición. El **situs** entre dos puntos A y B es designado ahora por Leibniz así:

A . B, y no ya simplemente **AB**,

con lo cual queda expresada en los signos la presuposición de un cierto extenso rígido que conecta A y B, **tractus** que es designado mediante el punto intermedio entre el signo 'A' y el signo 'B'. Este avance de Leibniz en el terreno de las notaciones y de la construcción de la **Characteristica Geometrica** ha sido lamantablemente inadvertido por los editores de la carta de Leibniz a Huygens para la Akademie-Ausgabe[24]. Sin embargo, tiene gran importancia, pues expresa la relevancia que la noción de **situs** pasa a tener en el pensamiento de Leibniz a partir de septiembre de 1679, hasta el punto de constituirse en una de las relaciones geométricas fundamentales, con su propio signo '.' para ser designada.

El **Ensayo** que Leibniz envió a Huygens así lo prueba, pero todavía más claramente el borrador latino de dicho **Ensayo** que Leibniz guardó entre sus manuscritos. Allí se define el **situs** de la manera siguiente:

"*A . B significat situm punctorum A et B inter se, seu extensum* *aliquod ipsa connectens (rectilineum aut curvilineum nil refert), quod quamdiu non mutatur etiam situs duorum punctorum inter se, manet idem"*[25],



y paralelamente la congruencia pasa a ser:

"Signum γ significat congruentiam. Ita A γ B significat A congruere puncto B, sive pro ipso ita substitui posse ut nullum discrimen appareat. Est autem vera semper haec propositio, A γ B, nam quodlibet punctum congruit cuilibet."[26]

En el **Ensayo** enviado a Huygens estas dos nociones, sitio y congruencia, son las fundamentales para este esbozo del nuevo Análisis Geométrico. Por medio de ellas se definen a continuación la noción de recta, plano y circunferencia, que en los **Elementos** de Euclides eran primitivas, y se demuestran a continuación dos sencillos teoremas geométricos por medios puramente combinatorios. Leibniz realizá así su objetivo basico: ha encontrado nuevas nociones generales, y signos para ellas, que le permiten demostrar por vías estrictamente combinatorias dos teoremas de Euclides, sin necesidad de recurrir a figuras ni a magnitudes. Usemos la métrica euclídea, basada en segmentos de rectas, u otro tipo de métrica (incluso una basada en varillas curvas y rígidas), los teoremas pueden ser demostrados en toda su generalidad por medio de los nuevos signos. Leibniz está convencido de haber encontrado los Elementos de un nuevo Análisis Geométrico y por ello le envía el **Ensayo** a Huygens. Sin embargo, éste no llega a comprender el proyecto leibniciano[27], desinteresándose por completo de las ideas de su discípulo en torno al **Calculus Situs.**

Esto no desanimó a Leibniz, quien siguió investigando este tipo de cuestiones. La idea central, como acabamos de ver, consiste en sustituir la noción de **distancia** por una más general, la de **sitio.** Así como el sistema de ejes cartesianos, basado en la medida de las distancias mediante segmentos de recta (y con ejes rectos y perpendiculares entre sí), permitía expresar algebráıcamente las ecuaciones de numerosas figuras planas, el nuevo Análisis Geométrico pretende otro tanto, pero usando cualesquiera extensos rígidos para medir el sitio entre dos puntos y cualesquiera sistema de coordenadas: las retículas perspectivas de Durero, de Desargues, de Bosse y de otros muchos estaban presentes sin duda en la mente de Leibniz en este tipo de investigaciones, y por eso hablaba de **lignes de veue** para su nuevo sistema de análisis geométrico, diferente y más general que el de Descartes. Cuando los **extensa rigida connectens** sean segmentos de rectas, y el **situs** entre un punto y una línea esté definido por la perpendicular, estaremos en el Análisis Cartesiano; pero cuando el **situs** entre un punto y una línea esté definido, por ejemplo, por la tangente, y cuando los **extensa rigida** sean circulares, elípticos, quebrados en ángulo recto o curvilíneos en general, estaremos dentro del nuevo Análisis Geométrico preconizado por Leibniz.

Los axiomas del nuevo Análisis pasan a ser, a su vez, diferentes. Si las nociones básicas son ahora las de punto, sitio y congruencia, proposiciones como:

> "Dados dos puntos cualesquiera, el sitio entre ambos está determinado",

o como:

> "Todo punto es congruente con cualquier otro punto",

pasan a ser los axiomas fundamentales, por ser mucho más generales que, por ejemplo, el postulado euclídeo:

> "Trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera."

A pesar de la escasa atención prestada por Huygens, Leibniz quedó convencido a finales de 1679 de que el Cálculo Geométrico era posible, entendiendo por tal:

1.- Un sistema de signos (caracteres) que expresasen las relaciones geométricas que no dependen de magnitudes: posición, sitio, copresencia, etc.

2.- Axiomas generales, y distintos a los de Euclides, que fuesen universalmente válidos y quedasen expresados combinatoriamente por medio del nuevo sistema de signos (la Característica Geométrica).

3.- La nueva Característica había de ser capaz asimismo de expresar, construir y demostrar a partir de los nuevos axiomas todos los problemas, figuras y demostraciones de los **Elementos** de Euclides o de las **Cónicas** de Apolonio.

4.- La nuena Característica había de ser capaz de engendrar nuevos problemas, nuevos objetos y nuevos teoremas en Geometría, partiendo de nociones como **situs**, **congruentia**, **spatium**, etc.

Así concebido el proyecto geométrico leibniciano, se requiere un método para desarrollarlo. A lo largo de los numerosos borradores en los que Leibniz investiga estas cuestiones, pueden verse dos tipos de textos básicos: en unos se lee a Euclides, analizando la insuficiencia de sus definiciones y de sus demostraciones, al objeto de inferir nociones más generales y proposiciones más universales que están presupuestas en los **Elementos**, pero no explicitadas. En el segundo tipo de texto, Leibniz investiga directamente las nuevas nociones geométricas, proponiendo definiciones y axiomas para el **situs**, la **congruentia** o la **similitudo**, todo ello mediante su método de análisis por medio de definiciones, teorizado en numerosos fragmentos[28].

4. 'CIRCA GEOMETRICA GENERALIA' Y LOS CALCULOS GEOMETRICOS

El manuscrito que ofrecemos como apéndice al presente artículo constituye la contribución más destacada de Leibniz al proyecto desde su carta a Huygens, y a lo largo de sus páginas se puede ver a Leibniz resumiendo los logros habidos hasta 1682. El propio título nos indica que no es un tratado completo sobre el nuevo Análisis Geométrico, sino más bien una primera contribución en orden al desarrollo de dicho Análisis para el caso del plano, si bien algunos de los teoremas mostrarán la posibilidad de generalizarlo al espacio. A diferencia de otros manuscritos de la misma época[29], dedicados al comentario crítico de los **Elementos** o al análisis abstracto de los nuevos fundamentos de la Geometría, **Circa Geometrica Generalia** (CGG) puede ser considerado como un texto mixto y de síntesis: en él tan pronto encontramos nuevas nociones generales, y la enunciación de los correspondientes nuevos axiomas, como mejoras a la Geometría euclídea, al proponerse demostraciones más generales y más breves. Aunque el grado de formalización no es muy grande, al menos si lo comparamos con los Cálculos Lógicos, en **CGG** sí puede advertirse este esfuerzo leibniciano por buscar notaciones y caracteres para aquellas relaciones geométricas que, a lo largo de sus investigaciones, se le van apareciendo como fundamentales, y por consiguiente requieren la introducción de signos específicos para ellas. Así como en 1679 Leibniz inventó nuevos signos para el sitio y la congruencia, en 1682 serán la **homogeneidad** y la **determinación** las relaciones que precisen de notaciones para ser incorporadas al Cálculo Geométrico (o Característica).

Analicemos la estructura de **CGG** con mayor detalle.

Cabe distinguir dos grandes partes en **CGG**: desde el apartado 1 hasta el 55 y desde el 56 hasta el final. En esta última parte la relación de determinación cobra una importancia fundamental, al permitir demostrar teoremas euclídeos con toda generalidad y brevedad.

La primera parte de **CGG** comienza con las proposiciones 1, 2 y 3, en las que se enuncian los axiomas más generales del nuevo Análisis Geométrico: todo punto es similar, igual y congruente a todo otro punto, en virtud de su simplicidad (o inextensión). Como puede verse, el principio de los indiscernibles no tiene validez en el **Analysis Situs.** A diferencia del espacio real, o físico, el espacio geométrico se basa en que los puntos sonm en principio indiscernibles entre sí, por carecer de ningún principio interno de distinción.

Leibniz introduce a continuación (§4 a 11) una serie de nociones y de propiedades que, desde el punto de vista actual, han de ser consideradas como netamente **conjuntistas.** Un **lugar geométrico** es definido como el conjunto de puntos X que tienen una propiedad común (por ejemplo estar alineados). Para marcar esta diferencia entre una simple pluralidad de puntos y un lugar geométrico, Leibniz recurre a una notación que ya había utilizado en otros borradores, e incluso en 1679: $\bar{X}$, cuyo significado está definido por §5 y §6:

"Omne punctum X esse in $\bar{X}$" et "Omne punctum in $\bar{X}$ esse X."

La relación entre punto y lugar (o entre elemento y conjunto, como diríamos hoy) es la de **esse in,** estar en. Leibniz define en §7 lo que hoy en día llamamos **inclusión** de un subconjunto en un conjunto, y a continuación enuncia las propiedades básicas de la inclusión, en relación con la igualdad entre conjuntos (§9 y 10) y con la propiedad transitiva, que él resume en la máxima: **continens continentis est continens contenti.** No cabe duda de que estas proposiciones son para Leibniz leyes generales de la lógica aplicadas a los lugares geométricos, y por consiguiente **nociones comunes**, en el sentido de Euclides. Al intuir la existencia de relaciones conjuntistas aplicables a los lugares geométricos, Leibniz se muestra como un precursor de ideas más modernas (como lo hará en otros muchos manuscritos), si bien no distingue entre la relación de inclusión y la relación de pertenencia, básica en la moderna Teoría de Conjuntos.

En §12 se introduce la primera noción básica, el **situs**, a base de definir la igualdad del sitio entre dos puntos por una vía enteramente similar a la de sptiembre de 1679, si bien con mayor rigor, pues la igualdad de sitio está definida entre pares de puntos, lo cual conlleva la asunción clara de que el **situs** es una relación:

> *"Si idem est situs punctorum* **a** *et* **b** *inter se qui punctorum* **c** *et* **d**, *tunc corporis rigidi puncta* **l** *et* **m**, *quae possunt applicari ipsis* **a** *et* **b**, *poterunt etiam applicari ipsis* **c** *et* **d**" (ver figura 1), y recíprocamente (§13).

Aunque en **CGG** no aparezca una definición explícita del situs, por ser considerado éste una noción básica en **CGG** (no así en otros manuscritos, en los que dicha noción es definida en base a otras más generales), Leibniz sí propone un criterio de igualdad entre sitios, basado en la posibilidad de superponer un cuerpo rígido (por ejemplo una vara de medir) entre un par de puntos y otro par de puntos. Lo esencial es que tampoco en **CGG** se presupone en principio que dicho cuerpo extenso tenga que ser recto. Con toda generalidad Leibniz puede demostrar a continuación, sin presuponer magnitudes, la propiedad reflexiva de la igualdad de sitio, así como otras propiedades estrictamente combinatorias (§15, 18 y 19) que son válidas para esta relación geométrica.

A continuación la relación de **situs** pasa a operar junto con las relaciones geométricas clásicas: semejanza, igualdad y congruencia (§20 a 30). El objetivo de la investigación leibniciana comienza a verse claro en la proposición 24, cuando Leibniz trata de demostrar por qué cuatro puntos en un plano determinan una elipse, en virtud exclusivamente de relaciones de posición, y no de magnitudes. En estos pasajes el trabajo de Leibniz muestra su conexión con la Geometría Perspectiva y Proyectiva, siempre presente a lo largo de sus investigaciones sobre el nuevo Análisis Geométrico. La congruencia entre dos elipses cualesquiera, como entre dos circunferencias, es una propiedad básica para cualquier Análisis Geométrico, ya que en ella se fundamenta el procedimiento de demostración **por instanciación**, tan usado por los geómetras griegos. Leibniz está interesado, por consiguiente, en justificar uno de los principios básicos de la geometría griega: que los teoremas que se demuestran para una construcción geométrica concreta, realizada sobre el papel, valen para todas las figuras que son semejantes, congruentes o iguales a dicha construcción; y por consiguiente las demostraciones en base a construcciones geométricas tienen validez universal.

Estamos con ello ante una de las grandes peculiaridades del Cálculo Geométrico leibniciano, a saber: las nociones básicas del nuevo Análisis Geométrico han de fundamentar el procedimiento demostrativo basado en las figuras geométricas, lo cual no sucedía ni en las obras de Euclides ni en las de Descartes. La preocupación por el rigor lógico del Análisis Geométrico subyace todas las investigaciones leibnicianas sobre el **Calculum Situs**, y por ello éste ha de ser considerado como algo inseparable de una adecuada fundamentación de la Geometría. Construir un Cálculo Geométrico implica, además de reducir y mejorar el saber geométrico anterior, fundamentarlo lógicamente.

En la misma proposición 25 es de destacar asimismo el tratamiento que Leibniz dispensa a la cuestión de la verdad en Geometría y a la sustitución **salva veritate**. La definición de semejanza que se ofrece es la siguiente:

> *"Simila sunt quae separatim considerata discerni non possunt (seu in quibus per se consideratis nullum notari potest attributum discriminans)"*,

lo cual permite fundamentar el procedimiento de instanciación. No importa que demostremos un teorema geométrico sobre una pizarra o sobre el papel, con figuras más grandes o más pequeñas: los atributos y propiedades que podamos descubrir en un triángulo equilátero por ejemplo, podremos descubrirlas íntegramente en otro lugar y en otro tiempo, sobre diferentes soportes o a diferente escala. Si las verdades de la geometría son intemporales y universales, ello se debe a la noción de semejanza, que no permite establecer ninguna diferencia entre dos figuras semejantes, a no ser que las pongamos en copresencia y estudiemos el **situs** de ambas. Tal y como se afirma tajantemente a continuación:

> "*Ita si duae figurae sint similes nulla propositio potest enuntiari de una, quae non enuntiari possit et de altera*" (**Ibid.**, §25).

La sustitución **salva veritate** siempre es válida en geometría, al menos en el caso de figuras semejantes entre sí. Y puesto que la propia enseñanza y exposición de la geometría, así como las construcciones y demostraciones concretas, dependen siempre del uso (o reproducción) de construcciones semejantes las unas a las otras, el escepticismo no ha lugar en geometría, ya que el análisis de la noción de semejanza nos permite estar seguros de que toda proposición demostrable a partir de una construcción determinada lo podrá ser también a partir de otra construcción figurada semejante a la anterior. El nuevo Cálculo Geométrico, a partir de §25, está sólidamente fundamentado y es apto para las demostraciones y las construcciones. Podemos sustituir las figuras de los **Elementos** de Euclides por otras que nosotros mismos dibujemos sin alteración de la verdad que pueda ser inferible de unas y de otras.

Prosiguiendo con su investigación, Leibniz llega a la noción de determinación, sobre la que volverá más ampliamente al final de **CGG**. Al enunciar la proposición 26,

> "*Si similia sint determinantia, ipseque determinandi modus similis, etiam similia erunt determinata*",

su propósito es claro: entre dos construcciones geométricas similares, todo lo que determinemos en una de ellas será similar a lo que determinemos en la otra, y por consiguiente lo que demostremos en ambas será siempre **salva veritate**. Como ejemplo, Leibniz demuestra algunos axiomas de Euclides a partir de esta ley general (§27 a 30). A lo largo de estas cuatro proposiciones se muestra por primera vez el segundo de los aspectos de **CGG**, antes comentado: el nuevo Análisis Geométrico ha de ser capaz de mejorar al de Euclides, obteniendo demostraciones más generales y más breves (y sin recurrir a las figuras) que las de los **Elementos**: sin excluir, como es sabido en Leibniz, la posibilidad de demostrar cualquiera de los axiomas de los **Elementos**. Una buena fundamentación lógica del Cálculo Geométrico, como la obtenida en §25 y 26, se revela de inmediato fecunda en el orden demostrativo. Aún cuando Leibniz expresa todas estas proposiciones por medio de palabras, y no de signos, no cabe duda de que la **Characteristica Geometrica** va obteniendo resultados puntuales de interés a lo largo de **CGG**.

A partir de §30 se afronta una nueva relación geométrica, la de homogeneidad, que permitirá a Leibniz un tratamiento adecuado de la cuestión del todo y las partes en Geometría:

> *"**Homogenea** sunt, quae vel sunt similia, vel transformatione possunt similia reddi, ut linea recta et circularis, superficies gibba et plana."*

Sobre la importancia de las nociones leibnicianas de homogeneidad y de transformación continua ya he llamado la atención en otros trabajos, llegando a afirmar incluso que las investigaciones de Leibniz sobre el **Analysis Situs** pueden ser consideradas como un primer precedente de la Topología, y no sólo de los Cálculos Geométricos del siglo XIX, como el de Grassmann[30]. Este tipo de hipótesis ha sido recibida escépticamente, por ejemplo por M. Otte[31]. Pasajes como el anteriormente citado (y podrían extraerse otros muchos similares de los manuscritos inéditos de Leibniz sobre **Calculum Situs**) muestran sin embargo que Leibniz nunca dudó de que la recta y la circunferencia, al igual que una superficie plana y una cóncava o convexa, pudieran ser semejantes a las otras por medio de una **transformación continua**. Como botón de muestra valga el siguiente pasaje de un manuscrito inédito de 1691:

> *"Duorum Statuum diversorum unus ex alio fieri potest per mutationem contiuam. Si diversis illi status sint similes interse, mutatio continua talis esse poterit ut transeat per meros status similes extremis et ea transibit per omnes status similes intermedios, seu minus diversos ab extremis quam extremi sunt inter se"...*

"Indissimilibus non semper datur determinata mutatio , v. gr., ex quadrato in circulum concentricum; imo nec uniformis. Datur tamen determinata mutatio indissimilibus, si omnia determinantia in statu, a quo et in statu ad quem singula singulis sint similia et respondentia in respondentia mutentur mutatione uniforme per similia, sint eadem utrobique, proportio servetur. Ita circuli determinata est mutatio in Ellipsin data, determinatam voco mutationem cum determinata sunt per quae fit transitus."[32]

El §31 es asimismo claro por los ejemplos que pone: es posible transformar cualquier línea en una recta por medio de una **mutatio continua**, como es posible comvertir cualquier superficie en un cuadrado, o un sólido en un cubo. Independientemente de la mayor o menor corrección de este tipo de tesis, es claro que el pensamiento de Leibniz en torno a la homogeneidad y a las transformaciones continuas va netamente en el sentido que hoy en día se le da al término Topología; bien entendido que no por ello cabe afirmar que hubiera descubierto dicha rama de la Matemática. Se trata simplemente de subrayar que, para su época, fue el primero en convertir este tipo de temática en una cuestión concerniente a los fundamentos de la geometría, y perfectamente investigable. El propio Leibniz parece ser consciente de la novedad de este tipo de ideas, al indicar que la noción euclídea de homogeneidad es distinta de la que él propone.

El objetivo de Leibniz en **CGG** al hablar de homogeneidad estriba sin embargo en la cuestión de las partes y el todo, tal y como ésta ha de ser tratada en la Geometría: las proposiciones 32 a 39 están dedicadas a ello, incluyéndose su ya vieja idea de que es posible demostrar el axioma de que el todo es mayor que cualquiera de las partes (pero no que la suma de todas ellas, si éstas son "incomunicantes", como Leibniz dice, o disjuntas, como podríamos decir hoy en día). Así como vimos antes que en **CGG** no se distingue entre pertenencia e inclusión, en estos párrafos se constata que Leibniz está lejos de distinguir entre un conjunto y el conjunto de sus partes, en tanto no biunívocos entre sí.

Los párrafos 40 a 44 tratan de las interrelaciones entre la coincidencia, la congruencia, la igualdad, la semejanza y la homogeneidad, que son las relaciones geométricas más frecuentemente estudiadas por Leibniz: pasajes similares se encuentran en otros muchos de sus escritos.

Más interés tiene la proposición 45, en la cual Leibniz introduce, por primera vez en **CGG**, la noción de distancia:

> *"**Distantia** est minimae ab uno ad aliud lineae magnitudo, ut distantia duorum punctorum est recta, puncti à recta est perpendicularis. Eam ita exprimo: AB."*

Como puede verse, Leibniz distingue perfectamente entre **situs** y **distantia**, y ello ya por la notación misma. La distancia es uno de los modos (si se quiere el óptimo) de medir el **situs**; pero es posible elaborar un Cálculo previo, basado en signos no numéricos, mediante el cual se demuestran teoremas de Euclides, e incluso axiomas, sin tener que recurrir a métrica alguna. Tal y como les escribía a Gallois y a Huygens, este nuevo Análisis Geométrico basado en un Cálculo de Sitios, y no de magnitudes, es posible, porque es más general que el segundo, y lo incluye. La ventaja de introducir por fin una métrica y un cálculo de magnitudes estriba en que los números ofrecen un algoritmo concreto para proposiciones como la 47, según la cual toda mutación continua pasa por todos los estadios intermedios (Natura non facit saltus, como dirá luego en el ámbito físico).

En cualquier caso, a partir de §49 Leibniz comienza a poder definir y estudiar las nociones euclídeas más básicas: secante, tangente, línea, superficie, cuerpo, extensión, superficie cerrada, etc. Algunas de estas proposiciones tienen interés, en particular las relativas a la noción de frontera (**ambitus**) y de cómo una línea corta a otra cerrada, debido a que en ellas Leibniz vuelve a ser el precursor de cuestiones topológicas, pero el objetivo de **CGG** comienza a mostrarse en la segunda parte de dicho manuscrito, cuando Leibniz ofrece una definición de la extensión en función del **situs**, lo cual supone sin duda un avance en sus investigaciones:

> *"**Extensum** est in quo assumi possunt numero indefinita quae situm habent"* (§56).

Lo propio de la extensión es que da cabida a innumerables relaciones de situación; a su vez, el **situs** es una relación esencialmente transitiva ((56)), lo cual puede ser considerado como uno de los grandes principios del **Calculum Situs** leibniciano.

Tras exponer lo que en otros trabajos hemos llamado axiomas de conexión (§62 a 64), y que son muy fecuentes en sus escritos a partir de 1679, Leibniz propone por fin una definición de la noción de **determinación**, la cual había gravitado a lo largo de todo el manuscrito, sin llegar a ser formalizada hasta ahora; como bien puede verse por el texto, dicha definición es equivalente al moderno cuantificador de unicidad, que Leibniz trata de formalizar en §66 y 67.

La inclusión de la relación de determinación en el Cálculo Geométrico le lleva a resultados inmediatos: la proposición del libro 10 de los **Elementos**, "*quod multis ambagibus Euclides ostendit*", y que establece que los círculos son proporcionales al cuadrado de sus diámetros, puede ser demostrada con el nuevo Cálculo de manera mucho más sencilla en base a las propiedades de la relación de determinación. De manera más general que la de Euclides, Leibniz demuestra (§72) que:

> "*Omnes superficies esse ut quadratu rectarum determinantium*",

y en el caso de tres dimensiones (§73):

> "*Alias figuras solidas similes esse ut cubos rectarum determinantium.*"

Las proposiciones siguientes revelan la pretensión de generalidad del Cálculo Geométrico leibniciano: todos los cículos son semejantes entre sí, al igual que los cuadrados, elipses, etc. En lugar que tener que demostrar todas estas propiedades una por una, el nuevo Cálculo, basado en la relación de determinación, permite una demostración general y simultánea de todos estos teoremas geométricos. De la misma manera, la proposición 76:

> "*Si A sit simile, aequale, congruum, coincidens, ipsi B, et B ipsi C, erit et A ipsi C*",

demuestra la propiedad transitiva de todas estas relaciones geométricas. Bien puede verse la estrecha conexión entre este Cálculo Geométrico y las indagaciones leibnicianas en torno a una Lógica de las Relaciones.

En la parte final de **CGG**, que como tal texto queda incompleto, Leibniz desvía progresivamente su atención de las cuestiones geométricas para adentrarse en los problemas lógicos a los que su propia indagación geométrica le ha conducido. El axioma

> *"Aequalia possunt substitui in locum aequalium salva aequalitate"* (§77),

tan frecuente en los Cálculos Aritméticos de Leibniz, es perfectamente aplicable a la Geometría, si bien la definición de igualdad no es la misma cuando manejamos magnitudes que cuando trabajamos con sitios y con lugares geométricos. La noción más general, tanto para los Cálculos Geométricos como para los Aritméticos y los Lógicos, pasa a ser la de identidad:

> *"**Eadem** definio quae sibi ubique substitui possunt salva veritate in propositionibus"* (§78).

Las nociones geométricas de **arco de círculo** y de **curva uniforme en el plano** son la misma en este sentido: los Cálculos Geométricos leibnicianos, que operan mediante signos específicos para la Geometría, como los Aritméticos lo hacen con sus propios guarismos o los algebráicos con sus incógnitas, están basados en la sustituibilidad **salva veritate** de las nociones que son idénticas entre sí, y que por consiguiente han de ser designadas por medio del mismo signo.

Las dos últimas proposiciones suponen un nuevo salto conceptual, que proyecta a Leibniz hacia otro tipo de temática, y que sin duda le llevó a dar por clausurado el escrito **CGG**: la noción de determinación, recientemente formalizada e incorporada como básica a la Geometría, no sólo tiene utilidad para esta ciencia, sini también para la fundamentación de la noción de número; es así como, en §79-80, Leibniz propone unas interesantes definiciones de las nociones **uno**, **dos**, **tres** y **pluralidad**; tema éste que, sin duda, fue investigado a continuación en un manuscrito que poco tendrá que ver con la Geometría.

5. A MODO DE CONCLUSION

Tras esta rápida descripción del contenido de **Circa Geometrica Generalia** difícilmente podremos extraer conclusiones definitivas sobre los Cálculos Geométricos de Leibniz, pero sí tendremos una idea del sentido de sus investigaciones en torno al **Calculus Situs**. Es claro que **CGG**, pese a ser un texto muy cuidado, y no simplemente un borrador, no pasa de ser un índice de lo que podría ser un tratado sobre el nuevo Análisis Geométrico, libro éste que Leibniz jamás escribió. Por otra parte, manuscritos ulteriores muestran que muchas de las ideas aquí propuestas son modificadas en otras épocas de la vida de Leibniz. Así como en 1679 eran el **situs** y la **congruentia** las relaciones geométricas básicas, en **CGG** la determinación, la homogeneidad, la semejanza y el **situs** pasan a ser las más relevantes; lo cual no excluye que en trabajos posteriores Leibniz no volviera sobre ideas antiguas, tratando de explorar nuevamente lo que daban de sí. Casi todos los escritos entorno al **Analysis Situs** son pruebas, indagaciones, y por ello quedan siempree inconclusos. Pese a ello, es posible hacernos una idea general del proyecto leibniciano, así como de sus logros e insuficiencias, tal y como se ha podido comprobar en este rápido vistazo sobre el contenido de **CGG**.

Lo primero que llama la atención es la ambición del proyecto mismo, que apunta a una nueva fundamentación de la Geometría. Asimismo destaca la constante preocupación por el rigor lógico de los Cálculos o demostraciones geométricas: Leibniz busca unos nuevos fundamentos para la Geometría con el fin de demostrar mejor, con mayor simplicidad, con mayor generalidad, con mejores resultados y sin presuponer nociones o axiomas implícitos. En tercer lugar, a lo largo de estos esfuerzos, aparecen por aquí y por allá ideas francamente interesantes, que apuntan en direcciones que la Matemática sólo seguirá siglos después: nuevos sistemas de coordenadas, espacios geométricos analizables sin recurso a un Cálculo de Magnitudes, líneas de investigación que llevan a la Teoría de Conjuntos de puntos, a la Topología General, e incluso permiten vislumbrar la noción de deformación continua, etc. Por último, hay que subrayar la evidente interconexión entre sus investigaciones sobre los Cálculos Lógicos, Aritméticos, Geométricos y Matemáticos en general: Leibniz pasa con facilidad de una a otra cuestión porque en el fondo todas estas investigaciones, al igual que sus descubrimientos del sistema binario o del Cálculo Diferencial, forman parte de un mismo y gran programa de investigación: la **Characteristica Universalis.**

El nivel de formalización de **CGG** no es muy alto, como puede verse por el texto. Leibniz parte de relaciones geométricas que ya habían sido estudiadas por él (y designadas mediante caracteres específicos) y descubre otras nuevas, de las que pasará a ocuparse sistemáticamente en manuscritos posteriores. Sus investigaciones sobre el **Calculus Situs** siempre quedan abiertas, hasta el final de su vida. A lo largo de este esfuerzo continuado, cuyos textos conviene rescatar y analizar, se muestra sin embargo una idea clara, que en términos actuales podría ser expresada de la manera siguiente: es posible formalizar rigurosamente la Geometría, reduciéndola a un sistema formal. Leibniz puede ser considerado, en este sentido, como un claro precedente de Pasch y de Hilbert, por mucho que sus logros fueran relativamente reducidos.

NOTAS

1 G. W. Leibniz, **Die Mathematische Schriften** (ed. Gerhardt), vol. 5, Halle: 1858-1863, reimpr. Olms 1971.

2 G. W. Leibniz, **Opuscules et fragmets inédits** (ed. Couturat), Paris: 1903, reimpr. Olms 1966.

3 Como es sabido, Leibniz presentó a la Royal Society de Londres una máquina de calcular que mejoraba la de Pascal y que, en su versión final, permitía la realización mecánica de las cuatro operaciones aritméticas básicas.

4 Hans J. Zacher, **Die Hauptschriften zur Dyadik von G. W. Leibniz,** Frankfurt am Main: Klostermann 1973.

5 E. Knobloch, **Die mathematische Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik,** Studia Leibnitiana Supplementa XVI (Textband), Wiesbaden: Steiner 1976. Véase también G. W. Leibniz, **Ein Dialog zur Einführung in die Arithmetik und Algebra** (ed. E. Knobloch), Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog 1976.

6 Véanse los volúmenes V y VI de su edición de los **Mathematische Schriften,** en donde se publican fragmentos como **Characteristica Geometrica, Analysis Geometrica propria, De Analysi Situs, In Euclidis Prota, Specimen Geometricae luciferae,** etc. La correspon-

dencia entre Huygens y Leibniz en 1679 fue asimismo publicada por Gerhardt, tras la edición de Uylenbroek, en el volumen **Der Briefwechseln von G. W. Leibniz mit Mathematikern**, Berlín: 1899, reimpr. Olms 1962.

7 En particular el fragmento **De Calculo Situm**, publicado en su edición de **Opuscules et fragmets inédits, o.c.**

8 J. Echeverría, **Edition critique des manuscrits inédits de Leibniz concernant la Caractéristique Géométrique en 1679**, Université de Lille 1984 (en microfilm).

9 En la catalogación de Bodemann dicho manuscrito es el Leibniz-Handschriften XXXV, vol. I, Nr. 14, Bl. 1-8. El Kronologisches Katalog del Leibniz-Archiv de Hannover le asignó el número 40881 y lo fechó hipotéticamente hacia el año 1682. Dicha datación parece verosímil.

10 El fragmento **Characteristica Geometrica** fue fechado por Leibniz el 10 de agosto de 1679 y ha sido editado por Gerhardt, **ed. c.**, vol. V, pp. 141-168, así como por J. Echeverría, **ed. c.**, Fr. 19, pp. 145-204, añadiéndose en esta última edición un apéndice (Fr. 20, pp. 206-211) así como los cuatro **Schedae** fechados el 1 de agosto: Fr. 11, pp. 88-96; Fr. 12, pp. 97-107; Fr. 13, pp. 108-115 y Fr. 14, pp. 116-120.

11 Véase J. Echeverría, "Géométrie et Topologie chez Leibniz", en **Leibniz: Tradition und Aktualität, Vorträge des V. Internationaler Leibniz-Kongresses**, Hannover: Leibniz-Gesellschaft 1988, pp. 213-220. En dicho artículo se proponen once etapas cronológicas para clasificar las épocas en las que Leibniz trabajó más intensamente sobre el **Analysis Situs**.

12 Para la formación de Leibniz como matemático los trabajos más importantes son los de J. Eh. Hofmann, **Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizsche Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672-1676)**, München: Leibniz Verlag 1949 y "Leibniz als Mathematiker", en Totok-Haase (eds.), **Leibniz**, Hannover: Verlag für Literatur 1966, pp. 421-457, así como el artículo de René Taton, "L'initiation de Leibniz à la Géométrie (1672-1676)", en **Studia**

Leibnitiana Supplementa XVII (Congreso de Chantilly en 1976), Wiesbaden: Steiner 1978, pp. 103-129. Allí queda claro que leyó a fondo la Geometría de Descartes durante su estancia en París; asimismo en esta época comenzó a leer a fondo por primera vez los **Elementos** de Euclides.

13 El primer manuscrito de Leibniz titulado **Characteristica Geometrica** está fechado en 1676, y verosímilmente fue escrito en la época en que, a través de los hermanos Périer, accedió a leer y copiar algunos de los papeles póstumos de Pascal, entre los cuales encontró referencias a las ideas perspectivas de Desargues. Ytard y Mesnard, así como Taton, fueron los primeros que insistieron en la influencia de Pascal sobre las concepciones leibnicianas en Geometría.

14 Leibniz à Gallois, dec. 1678, en **Math. Schr.** (ed. Gerhardt), vol. II, pp. 183-184.

15 **Leibniz Briefwechseln mit Mathematikern** (ed. Gerhardt), carta IV, p. 568.

16 **Ibid.**, pp. 570-571.

17 Para la relación entre la Carcterística Geométrica de Leibniz y el **Geometrische Analyse** de Grassmann, véase J. Echeverría, "L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz", en **Studia Leibnitiana** XI/2 (1979), pp. 223-273.

18 **Ibid.**, pp. 233-238.

19 Véanse los artículos citados de J. Echeverría 1979 y 1988, así como la nota sobre "La demostración de los axiomas de Euclides, según Leibniz", a aparecer en la **Revista Latinoamericana de Filosofía.** Para la relación entre el **Analysis Situs** y la Geometría Perspectiva ver J. Echeverría, "La Geometría leibniciana: de la Perspectiva al Análysis Situs", en M. Hormigón (ed.), **Actas del II Congreso de la SEHC**, Jaca: SEHC 1984, pp. 69-79. Sobre las críticas de Leibniz a los axiomas y demostraciones de Euclides puede verse asimismo H. - P. Munzenmayer, "Der Calculus Situs un die Grundlagen der Geometrie bei Leibniz", en **Studia Leibnitiana**

XI/2 (1979), pp. 274 y ss., así como J. Echeverría, "Investigaciones de Leibniz sobre la noción y el postulado de las paralelas", en M. S. de Mora y J. Echeverría (eds.), **Actas del III Congreso de la SEHC**, San Sebastián: Guipuzcoana, vol. I, pp. 253-263.

20 J. Echeverría, **ed. cit.**, Fr. 2, p. 30.

21 **Ibid.**, Fr. 3, p. 113.

22 **Ibid.**, Fr. 19, p. 195.

23 Véase J. Echeverría 1988, **o.c.**

24 G. W. Leibniz, **Mathematischer, Naturwissenschaftlicher und Technischer Briewechsel**, Akademie-Ausgabe, III. Reihe, II. Bd. (1676-1679), bearbeitet con H. - J. Hess, Nr. 347, pp. 851-860, transcripción en la cual se prescinde sistemáticamente del signo para el **situs**, a pesar de encontrarse en el manuscrito de Leibniz.

25 J. Echeverría, **ed. cit.**, Fr. 32, p. 256.

26 **Ibid.**

27 La carta de Huygens a Leibniz del 11 de enero de 1680 es particularmente clara al respecto:

> *"Pour ce qui est des effects de vostre characteristique, je vois que vous persistez à en estre persuadé, mais, comme vous dites vous meme, les exemples toucheroient plus que les raisonnements. C'est pourquoy je vous en demande des plus simples, mais propres à convaincre mon incredulité, car celuy des lieux, je l'avoue, ne me paroit pas de cette sorte."* (**Briefwechseln**, ed. Gerhardt, carta X, p. 585).

28 Véase la correspondencia con Corning de 1678 a 1679 sobre el papel de las definiciones, así como el fragmento **De la Sagesse.**

29 En 1682 hay tres fragmentos muy importantes en relación con los fundamentos de la geometría: el **Circa Geometrica Generalia**, el **Prima Geometricae Principia** y el **Specimen Analyseos Figurata**, así como otros muchos borradores y cupones que permanecen inéditos.

30 Véase J. Echeverría 1979 y 1988.

31 M. Otte, "The influence and transformation of Leibniz' ideas in 19th Century Geometrical Thought", en **Science and the Enlightement in Europe,** Conf. in Edinbug 28-31 August 1986. Una versión de dicho trabajo ha sido publicada en 1989 en la revista **Historia Mathematica.**

32 L. Hd. XXXV, I, Nr. 5, Bl. 43r.

★ El presente trabajo ha sido llevado a cabo en el marco de dos Proyectos de Investigación (1987-1988) financiados por la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea. Agradezco al Leibniz-Archiv de Hannover su amable autorización para trabajar sobre manuscritos inéditos de Leibniz y para publicar las correspondientes transcripciones.

* Dpto. de Lógica y Filosofía de la Ciencia (Univ. del País Vasco).