

CIRCA GEOMETRICA GENERALIA ET CALCULUM SITUS
SEU PICTURAM CHARACTERISTICAM OBSERVATIONES MISCELLAE
CONSTITUENDAE ANALYSI GEOMETRICAЕ
PLANE NOVAE PRAELUDENTES

(Leibniz Handschriften, Kat. Bodemann XXXV, I, Nr. 14, Bl. 1-8)
(Kronologisches Katalog Leibniz-Archiv Nr. 40881, um 1682)

(1): Punctum eorumque in extenso sunt simplicissimum est. Hinc:

((1)): Punctum puncto simile est, $a \sim b$.

(2): Punctum puncto aequale est, $a = b$.

(3): Punctum puncto congruit, $a \cong b$.

Haec usum habebunt ad aliorum quae per certa puncta determinantur similitudines, aequalitates aut congruentias demonstrandas. Adde infra §60.

(4): Punctum puncto in quo assumitur coincidit, seu si sit b in a , erit $a \infty b$. Ad hos paragrafos 1, 2, 3, 4 adde §60 infra.

((4)): Imo generaliter quicquid in puncto situm est cum ipsi puncto coincidit.

Si plura puncta aliquam communem proprietatem habeant, et ideo unumquodque ex ipsis commune nomine appeletur X . Tunc locum omnibus communem et solis proprium appellabimus \bar{X} . Sive \bar{X} significavit:

(5): Omne punctum X esse in \bar{X} , et

(6): Omne punctum in \bar{X} esse in X .

(7): Si omne X est Y , erit \bar{X} in \bar{Y} .

(8): Si \bar{X} est in \bar{Y} , omne X erit Y .

(9): Si \bar{X} sit in \bar{Y} et \bar{Y} sit in \bar{X} , tunc \bar{X} et \bar{Y} **coincident**.

(10): Si \bar{X} et \bar{Y} coincidunt, \bar{X} erit in \bar{Y} et \bar{Y} erit in \bar{X} .

(11): Si A est in \bar{X} et \bar{X} in \bar{Y} erit A in \bar{Y} .

Hoc ita demonstratur. Si A est in X utique A est in \bar{X} (per artic. 6).

Jam cum \bar{X} sit in \bar{Y} ex hypothesi omne X est Y (per 8). Ergo (per Logicam communem) etiam A erit Y .

Ergo (per 5) A erit in \bar{Y} . Quod erat demonstrandum.

Posset ita enuntiari haec propositio: continens continentis est continens contenti.

(12): Si idem est situs punctorum a et b inter se, qui punctorum c et d , tunc corporis rigidi puncta l et m , quae possunt applicari ipsis a et b , poterunt etiam applicari ipsis c et d . (N.B.: Add. §46).



Fig. 1

(13): Et contra, sic hoc fieri potest, idem erit situs punctorum.

(14): Idem est situs puncti a ad b , qui puncti b ad a .

(15): Si corporis rigidi puncta l et m possunt applicari punctis a et b , et quidem l et ipsi a , et m ipsi b , poterunt etiam vicissim applicari l ipsi b , et m ipsi a . Nam idem est situs puncti a ad punctum b , qui puncti b ad punctum a (per 14). Ergo (per 12) fieri potest quod dictum est.

(16): Si determinata sint puncta corporis rigidi determinati, quae data puncta simul attingere possunt, determinatus erit punctorum datorum situs inter se. De Determinato adde §25, §65.

(17): $a.b$ significat situm punctorum a et b inter se et $a.b.c$ significat situm trium punctorum a et b et c inter se.

(18): Si datur $a.b.c$ datur $a.b$.

(19): Si datur $a.b$ et $a.c$ et $b.c$ datur $a.b.c$.

(20): $a.b \approx c.d$ significat eundem esse situm inter puncta a et b , qui inter puncta c et d , seu rigidum aliquod intelligi posse cuius extrema sint a et b , congruum rigido cuius extrema sint c et d , salvo situm quem a et b habent inter se.

(21): Si $a.b \approx l.m$ et $a.c \approx l.n$ et $b.c \approx m.n$ erit $a.b.c \approx l.m.n$.

(22): Si $a.b.c \approx l.m.n$ erit $a.b \approx l.m$ et ita porro, bina binis respondentibus.

(23): Si $a.b.c \approx l.m.n$ et $a.b.d \approx l.m.p$ et $a.c.d \approx l.n.p$ erit $a.b.c.d \approx l.m.n.p$.

(24): Si duorum extensorum communem aliquam naturam habentium punctum, quae sufficientis sint numeri pro hac natura ad certum individuum determinando, et illa puncta eundem inter se situm habeant in uno, quem totidem in altero, duo illa extenso inter se congrua erunt. Sit communis natura θ et ponamus determinatis quatuor punctis in θ , determinatum esse individuum ipsius θ , seu non nisi unicum esse θ quod eadem quatuor puncta habent, et sint duo F et G , ex quibus tam F sit θ quam G sit θ , et sint assumpta quatuor puncta in F , ut a, b, c, d ac itemque quatuor puncta in G , ut l, m, n, p sitque

$$a.b.c.d \approx l.m.n.p, \text{ erit } F \approx G$$

(seu brevius exprimendo. Si sit $\overline{a.b.c.d.F}$ un. - hoc est unicum F ex datis a, b, c, d et sit ipsius F ad a, b, c, d - et ibidem $\overline{l.m.n.p.G}$ un. et sit $a.b.c.d \approx l.m.n.p$ erit $F \approx G$).

Exempli causa: Si sint duae circumferentias (Ellipticae) et quatuor puncta in una eodem modo inter se sita sint, quo quatuor puncta in altera, tunc congruae erunt hae duae circumferentiae (Ellipticae). Quia datis quatuor punctis datur Ellipsis. De determinatione adde infra §69.

(25): Similia sunt quae separatim considerata discerni non possunt (seu in quibus per se consideratis nullum notari potest attributum discriminans), sed opus est vel ambo inter se, vel tertium aliquod utrique comparari. Ita si duae figurae sint similes nulla propositio (quae nihil forinsecus assumat) potest enuntiari de una, quae non enuntiari possit et de altera.

Ut si oculus succesivè collocetur in duobus conclavibus ex eadem materia factis, si dissimilia sunt, notabit aliquam diversitatem in situ atque ordine, vel etiam proportinonibus partium aut linearum inter se, et angulorum cum recto comparaturum. Sed si nihil tale notari possit, tunc non habebit oculus unde alterum ab altero discernat, nisi vel ambo forinsecus simul spectet atque conferat, vel aliquam mensuram

(qualis mensura naturalis in homine sunt membra; imò si notabilis magnitudinis discrimen sit etiam fundus oculi) secum deferat. Hinc ex. gr. duo circuli sunt similes unumquemque, enim examina separatim duc rectas quas voles, considera angulorum rationes ad rectum et linearum rationes inter se. Nihil notabis in uno, quod non et in altero sit notatus. At si duas Ellipses conferas facilè notabis diversitatem. Educ enim ex centro certo tum rectam usus ad circumferentiam angulo aliquo ad axem assumto, et nota eius rectae rationem ad axem ellipseos, idem fac in allia Ellipsi eodem angulo, saepissime deprehendes aliam rationem, et ita facilè unam ab alia discernes.

(26): Si similia sint determinantia, ipseque determinandi modus similis, etiam similia erunt determinata. De determinatione infra §65, §75.

(27): Hinc triangula aequiangula sunt similia, nam dato uno latere et duobus (adeoque et tribus) angulis determinatum est triangulum; si ergo anguli utrobique iidem cum latus lateri simile sit, recta scilicet rectae, nihil apparet determinantibus unde attributum pro uno elici possit, quod non et elici possit pro altero.

(28): Similia autem triangula habent latera proportionalia, alioqui notari posset aliqua laterum proportio in uno, quae non notari posset in altero. Ergo per praecedentem Triangula aequiangula habent latera proportionalia.

(29): Contra, triangula quorum latera proportionalia, sunt aequiangula. Nam datis tribus lateribus triangulum est determinatum; si jam latera sint proportionalia nullum in determinantibus, nempe lateribus, discriminans attributum reperiri potest. Ergo sunt similia; ergo utrobique eadem ratio angulorum ejusdem trianguli tum inter se, tum cum summa; summa autem angulorum utrobique eadem (facit enim duos rectos) ergo et anguli (eandem rationem utrobique habentes ad hanc summam, alioqui discrimen notari posset) utrobique eadem erunt.

(30): Quae sunt similia secundum unum determinandi modum, etiam sunt similia quoad alium determinandi modum. Ita duo triangula si sint similia respectu laterum, seu habeant eandem utrobique rationem singulorum laterum ad summam laterum, erunt et similia respectu angulorum seu habebunt eandem utrobique rationem singulorum ad summam angulorum.

(31): **Homogenea** sunt, quae vel sunt similia, vel transformatione possunt similia reddi, ut linea recta et circularis, superficies gibba et plana. Cum enim omnis linea extendi possit in rectam, omnis superficies explanari convertique in quadratum, omne solidum converti in cubum, suntque recta similis rectae, quadratum quadrato, cubum cubo, patet omnes lineas, superficies, solida inter se homogenea esse. Nam definitio Homogeneorum qua Euclides utitur hac accommodari non potest, quia ne minima quidem portio congrua potest reperiri, adeoque nec communis mensura quantumlibet exacta appropinquans. Videntur et comparari posse à causa generante; nam si duo puncta moveantur aequali celeritate, et tempore, lineae descriptae sint dissimiles, tamen erunt aequales (sin eadem sit celeritas, tempus inaequale erunt ut tempora). Atque ita homogenea erunt quorum ratio est. Poterit tamen Euclidea quoque definitio hac accommodari, si curva et gibba considerentur ut polygona aut polyedra infinitangula. Adde infra §38.

(32): **Aequalia** sunt, quae vel congrua sunt vel transformatione possunt congrua reddi.

(33): **Majus** est cuius pars alteri (minori) toti aequalis est.

(34): **Minus** est quod alterius (majoris) parti aequale est.

(35): Hinc demonstratur partem esse minorem toto seu totum esse maius parte. Nam pars est aequalis parti totius (nempe sibi) ergo minor toto.

(36): Si a sit Γ B erit B Υ A.

(37): Si quid nec maius sit nec minus, et tamen homogeneum, erit aequale. Nam cum homogeneum sit, simile reddi potest, fiat ergo simile cumque omnia similia possunt intelligi ex se invicem fieri continuo incremento vel decremento, seu communem habere generationem, utique id quod prius generatur crescendo (decrecendo) minus (majus) erit. Quae verò simul generabuntur erunt **aequalia**, quae propositio haberi poterit pro nova definitionis aequalitatis. Idem tamen demonstrari poterit ex definitione superiore cum duo illa proposita sint similia, applicentur sibi, respondentia respondentibus, tunc vel congruent et erunt aequalia, vel unum ubique excedet, alioqui non erunt similia. Si enim non ubique excedet termini eorum alicubi se se secabunt, alicu-

bi non secabunt, quos est absurdum, nam respodentia tantum coincidere debent, sed haec sid opus est, non nisi magnitudinem possunt discerni. Hinc concludo: si sit A non $\sqsupset B$ et A non $\sqsubset B$ et A Homog. B erit $A = B$.

(38): Si B sit in A et ambo sint homogenea nec tamen coincidunt erit A **totum**, B **pars**. Homogenea autem ita definienda sunt, quemadmodum supra à nobis factum est §31, ne scilicet eorum notio totum et partem praesupponet, alioqui fit circulus.

((38)): **Partes** ejusdem totius **incommunicantes** voco, quae nullam habent partem communem. **Communicantes** quae habent.

(39): Totum et summa omnium partium incommunicatum aequantur inter se, conjungendo enim has partes inde fit totum, vel dividendo totum inde fiunt hae partes. Ergo fieri possunt coincidentia ergo et congrua multo magis (nam omnia coincidentia multo magis sunt congrua, sive unumquodque congruit sibi); quae autem congrua fieri possunt aequali sunt.

(40): Duo coincidentia sunt congrua seu unumquodque congruit sibi vel in notis. Si $A \infty B$, erit $A \approx B$.

(41): Quae congrua sunt etiam similia sunt. Si $A \approx B$ erit $A = B$.

(42): Quae congrua sunt etiam similia sunt. Si $A \approx B$ erit $A \sim B$.

(43): Quae simul similia et aequalia sunt, congrua sunt. Si $A \sim B$ et $A = B$ erit $A \approx B$.

((43)): **Congrua** definitio quae discerni etiam collata non possunt, nisi aliis forinsecus assumtis, ut duo ova aequalia et similia non nisi situ ad externa discernuntur. Hinc utique sequitur §41 et 43.

At §43 ita probatur: quae aequalia sunt congrua sunt, aut talia transformatione reddi possunt (§32). Quae verò et similia sunt transformatione opus non habent.

(44): Quae similia sunt, homogenea sunt, seu si $A \sim B$ erit A Homog. B . Patet ex §31.

(45): **Distantia** est minimae ab uno ad aliud lineae magnitudo, ut distantia duorum punctorum est recta, puncti à recta est perpendicularis. Eam ita exprimo: AB .

(46): Si puncta A et B magis distant quam punctam C et D , tunc

in qualibet linea ab A ad B ducta sumi potest punctum cuius idem est situs ad A (vel B), qui est situ ipsius C ad D. Quid situ vide supra §12.

Posset ita enuntiari: Si AB ¶ CD, et sit linea AXB, erit aliquod punctum E tale ut E sit X et AE ≈ CD. Hoc demonstrari potest, quia tendendo à puncto ad punctum, non potest pervenire ad majorem distantiam nisi per minorem. Nempe generaliter:

(47): In omni continua mutatione à minori variatione pervenitur ad majorem per omnes intermedias.

(48): Omne extensum, quod partim intra partim extra aliud est, extremum ejus secat (alicubi enim incipiet in eo esse, cum paulo ante extra esset).

(49): **Secari** enim intelligitur extremum vel ambitus aliquis, ab aliquo extenso si duo puncta in extenso assumi possunt à communi concursu intervallo quatumlibet parvo distantia, quorum unum extra, alterum intra ambitum, cadit.

(50): **Tangit** quod cum ad aliquod tendat ubi ad ipsum pervenit, iterum ab eo recedit. Itaque quod tangit aequiparari potest bis secanti quod ubi ingressum est rursus egreditur; et proinde secat tam in ingressu quam in egressu; momentum autem in gressus et egressus coincidere intelliguntur in contactu, et portio immersa intra ambitum censetur infinitè parva.

(51): Omnis linea in se rediens, à superficie in qua ducitur partem abscindit seu superficiem dividit in duas partes, ita ut à puncto in una parte posito non possit duci linea ad punctum in altera positum quia lineam illam secet. Nimirum si sumatur aliqua pars extensi, et divisio sive separatio à reliquo incommunicante (seu nullam partem communicantem, sed tantum communem terminum habente), in ipso communi termino instituat, necesse est separatorem ad punctum redire unde inceperat, quia punctum initiale separationis finit cohaesionem et incipit separationem, punctum verò finale separationis finit separationem et incipit cohaesionem seu separandum; donec scilicet initiale et finale separationis punctum coincident.

(52): Omnis superficies integra alicuius corporis finiti, ita ipsum

claudit, ut non possit a puncto extra corpus ad punctum intra corpus linea duci, quia superficiem illam secet.

(53): Linea est via puncti, ut si punctum mobile sit X locus eius succesivus erit linea \bar{X} .

(54): Superficies erit via lineae \bar{X} vel $L\bar{X}M$, in priora vestigia non incidentis. Poterit designari per:

$\bar{\bar{X}}$, vel per $L\bar{\bar{X}}M$.

(55): Corpus est via superficiei in priora vestigia non incidentis. Poterit designari per:

$\bar{\bar{\bar{X}}}$, vel per $L\bar{\bar{\bar{X}}}M$.

(56): Corpus moveri non potest, quin in priora vestigia incidat, et ideò non datur alia dimensio super lineam, superficiem et corpus; scilicet in extenso, nam si praeter molem addatur potentia, ascendi potest in infinitum quod tamen nihil variat in extensione, nec novas figuras producit.

((56)): **Extensum** est in quo assumi possunt numero indefinita quae situm habent.

((56)): Ea est **situs** natura, ut omnia quae habent situm ad aliqua habeant etiam situm inter se.

(57): **Punctum** est terminus lineae.

(58): **Linea** est terminus superficiei.

(59): **Superficies** est terminus corporis.

(60): **Punctum** est quod eorum quae in extenso sunt situm habent minimum, seu quod situm habet, extensionem non habet. Adde §1, 2, 3, 4.

(61): **Spatium** est in quo per se spectato nihil aliud condiderari potest quam extensio, ut locus qui manet infra vas aqua sublata et vino substituto.

((61)): Spatium continuatur in infinitum neque enim ratio finium reddi potest, cum ubique uniforme sit. Spatium autem generale seu locus omnium rerum nihil aliud est quam extensum purum absolutum seu extensione maximum ut punctum est minimum.

EDICIÓN DE 'CIRCA GEOMETRICA GENERALIA' DE G. W. LEIBNIZ

(62): Omnia puncta sunt in eodem spatio seu dari potest corpus quocunque data puncta comprehendens.

((62)): Puncta quaelibet situm habent inter se.

(63): A quolibet puncto ad quodlibet duci potest linea.

((63)): Per quodlibet puncta numero finita eiusdem corporis continui duci potest linea quae ex illo corpore non agreditur.

(64): Duci potest linea transiens per puncta data quodcunque et evitans puncta data quodcunque. Quod sic demonstro. Sit corpus continens simul omnia puncta data tam attingenda quam evitanda, ex eo eximantur partes continentes puncta evitanda, tam exiguae quantum satis est ne puncta reliqua retinenda seu attingenda laedantur seu simul eximantur; cum ergo exemptis illis partibus corpus nihilominus maneat continuum ergo (ex §63) in eo per omnia puncta residua attingenda duci potest linea, eaque in corpore manens, adeoque exempta ex corpore evitans, quod erat faciendum.

(65): **Determinatum** est, quod ex quibusdam suis conditionibus positis non nisi unicum est (adde §16, 24, 26). Exempli causa ex datis sitibus **A.B** (seu ipsius A ad B), **A.C**, **A.D**, **A.E**, punctum A dicitur esse determinatum, si impossibile est dari aliud punctum, quod eundem ad puncta **B, C, D, E** situm habeat. Hoc est si posito **A.B.C.D.E** \approx **F.B.C.D.E**, sit $A \infty F$ erit A ex istis determinatum idque poterit exprimi: **A determ. per A.B.C.D.E**. Ita circulus determinatus est plano et centro positione datis et radii magnitudine.

(66): Si punctum A sit determinatum ex quo situ ad aliqua puncta, ut **B, C, D, E** tunc aliquod ex ipsis ut **B** similiter erit determinatum ex situ suo ad puncta **A, C, D, E**. Vel si aliquod puncta relationem inter se habeant talem, ut unum ex situ suo ad reliqua determinetur; etiam quodlibet aliud ex situ suo ad reliqua praeter ipsum determinabitur.

(67): Hinc sufficit relationem determinantem punctorum ita scribere:

A.B.C.D.E un

(seu relationem hanc esse unicam). Quod significat unumquodque horum ex situ suo ad reliqua determinari, seu:

si posito $A.B.C.D.E \approx F.B.C.D.E$ est $A \propto B$,
 etiam posito $A.B.C.D.E \approx A.G.C.D.E$ erit $B \propto G$, et ita porro
 de C, D, E , idem locum habebit.

(68): Si determinantia sint congrua erunt etiam congrua determina-
 ta (eodem existente determinandi modo). Adde supr. artic. 24. Ex. gr.
 duo radii circuli, ellipses, generantes duos circulos, sphaeras, sphaeroides.

(69): Imò si idem sit determinandi modus, et determinantia sunt
 aequalia, etiam aequalia erunt determinata. Ita superficies cylindrica
 aequalis erit rectangulo eiusdem cum cylindro altitudinis si basis rectan-
 guli sit aequalis circumferentiae circuli cylindrum generantis.

Nam eodem modo ex ductu
 rectae in altitudinem generatur
 rectangulum, quo ex ductu circum-
 ferentiae circuli in eandem alti-
 tudinem generatur superficies cy-
 lindrica.

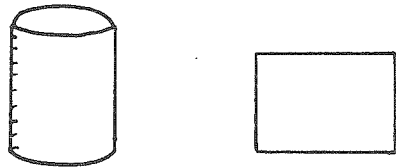


Fig. 2

(70): Falsum est determinata esse proportionalia determinantibus,
 etiamsi sit idem determinandi modus (nisi determinata sint determinan-
 tibus homogenea), alioqui sequeretur Circulos esse inter se ut radios,
 dato enim centro et radio determinatur circulus.

(71): At circulos esse ut quadratos diametrorum, quod multis amba-
 gibus Euclides ostendit libro 10 Elementorum, id mihi ex definitione
 similitudinis primo statim obtutu patet. Nam circulus A cum quadrato
 circumscripto D (est enim circulus circulo similis, quadratum quadrato
 simile, et modus applicandi circuli ad quadratum etiam similis utrobi-
 que), ergo ea est ratio A ad B quae C ad D (alioqui in $A.B$ per se
 spectato observari posset aliquod
 diecrimans à $C.D$ per se specta-
 to; nam substrahendo A à B , et
 residuum ab A quoties fieri po-
 test, et residuum secundum à pri-
 mo residuo rursus quoties fieri po-
 test, et ita porro, nam

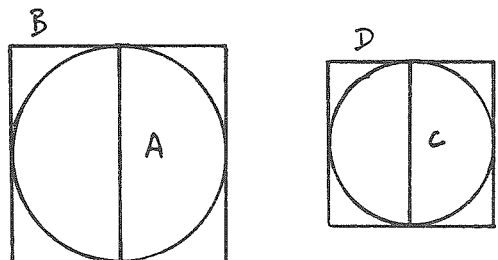


Fig. 3

numeris subtractionum possibilium observaretur operando circa figuram A.B ab eo quod eveniret operando circa figuram C.D). Ergo invertendo eadem quoque ratio erit A ad C quae B ad D, quod erat dem. Eadem methodo demonstratur:

(72): **Omnes superficies esse ut quadratu rectarum determinantium**, et similiter sphaeras, vel:

(73): **Alias figuras solidas similes esse ut cubos rectarum determinantium**. Non autem licet dicere circulos A et C esse ut diametros E et F, licet circuli cum diametris suis etiam similes figu-

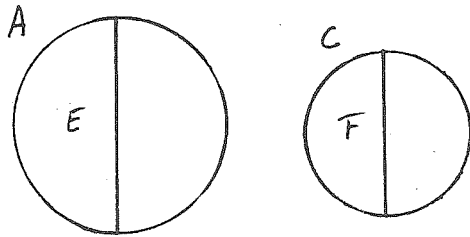


Fig. 4

ras utrobique constituent, cum enim nulla detur ratio circuli (superfici) ad diametrum (lineam), quia homogenea non sunt; non potest dici esse A ad E ut C ad F, ergo nec invertendo esse A ad C ut E ad F.

(74): Si determinantia sint similia idemque determinandi modus, etiam determinata erunt similia (adde supra §26). Hinc omnes circuli sunt similes inter se, item omnia quadrata et parabola parabolae, Ellipsis Ellipsi similis est, cum latus rectum et transversum proportionalia. At linea parallela Ellipsi non est Ellipsis, et linea parallela parabolae non est parabola. Quenam autem lineae parallelae sint, dicemus suo loco.

(75): Si determinantia sint coincidentia idemque determinandi modus, etiam determinata erunt coincidentia. Ita si planum et in eo centrum sint positione data, et radius magnitudine, circulus est determinatus. Si ergo in eodem plano vel in planis opinione duobus re coincidentibus, duo circuli esse dicuntur quorum radii aequales sint, et reperiatur eorum centra coincidere, ipsi circuli coincident.

(76): Si A sit simile, aequale, congruum, coincidens, ipsi B, et B ipsi C, erit et A ipsi C.

(77): Aequalia possunt substitui in locum aequalium salva aequalitate, seu si aequalibus addas adimasve aequalia, vel aequalia multiples aut dividas per aequalia, prodeunt aequalia. Illud verò non sequitur

(neque ex hoc nostro axiome demonstrari potest) quaecunque in se ipsa ducta producant aequalia, sunt inter se aequalia, nam $+3$ et -3 singula per se ipsa multiplicata producant 9, quae tamen aequalia non sunt cum differentia eorum sit 6; non ergo potentiis existentibus aequalibus radices sunt aequales, etsi radicibus existentibus aequalibus potentiae sint aequales.

(78): Coincidentia possunt substitui pro his quibus coincidunt salvis omnibus. Sunt enim revera eadem et **eadem** definitio quae sibi ubique substitui possunt salva veritate in propositionibus scilicet quae directae sunt nec in ipsum considerandi modum reflectuntur arcus circuli et curva uniformis in plano ubique sibi substitui possunt exceptis propositionibus reflexivis, qualis ista est, si quis dicat: arcus circuli concipi potest, sine ullo respectu ad planum, quanquam si rigorosius agere velit, defendi possit haec substitutio etiam in reflexivis.

(79): Si B sit A, et C sit A, et verò B et C coincident seu sit $B \infty C$, dicetur esse **unum** A.

(80): Si B sit A, et C sit A, et B non sit C, nec C sit B, dicetur esse **duo** A. Si B sit A, et C sit A et D sit A; et B non sit C neque D et C neque sit B neque D, et D non sit B neque C, dicetur esse **tria** A. Et ita porro. Et universum cum non tantum unum est A, dicuntur esse **plura**. Atque haec origo est **Numerorum** et haec ipsa expressio in symbolo Athanasii observatur, quanquam ibi usus eique hinc definitioni videatur contradicere, sed tollitur contradictio distinctiones.
