CONCEPTO Y NÚMERO: INVARIANTES NUMÉRICOS Y JUICIOS DE EXISTENCIA EN LA PERSPECTIVA INTENSIONAL DE LEIBNIZ*

Miguel SÁNCHEZ-MAZAS★

¿Por qué hay en nuestro universo exactamente **cinco poliedros regulares**[1], los que **Platón** describe en el «**Timeo**»[2]? ¿Cómo concebir y calcular otros **universos posibles**[3] en los que ese **número** fuera mayor o menor? ¿Cabría en algún universo sintetizar en **un poliedro regular único** las **cualidades** y **perfecciones** de todos ellos? ¿Fué acaso el desesperado esfuerzo por hallar ese **poliedro imposible** lo que inspiró la honda «**Melancolía**»[4] pintada por **Durero**? ¿Cómo encontrar, calcular y expresar las **leyes generales** para **distinguir** en cada universo las **combinaciones posibles**, pero **variables** y **contingentes** de **cualidades** de las **imposibles** y de las **necesarias** e **invariantes**[5]? ¿Cuál es la relación íntima de **perfecciones** y **existencia**[6]? ¿Cómo dar una expresión **lógica** y **matemática** a las últimas razones, esencialmente **ontológicas**, no ya de nuestros límites espacio-temporales y cuantitativos, sino de los más radicales y profundos, que vamos a llamar **límites cualitativos**[7] **del universo**?

Creemos que reflexionar y discutir hoy entre nosotros sobre estas incitantes cuestiones, al hilo de una nueva lectura y desarrollo, en el marco del pensamiento actual, de las grandiosas propuestas **filosófico-matemáticas** de **Leibniz** para iluminarlas, puede constituir un modesto, pero hermoso y constructivo homenaje a su memoria, antes de que concluya en silencio este año **1991** y con él el **325°** aniversario de aquella juvenil «**Disertación sobre el Arte Combinatorio**» **(1666)**[8] —el primer intento genial de tratamiento **aritmético** del **contenido de los**

---

*Conferencia pronunciada el 14 de Noviembre de 1991 en la Facultad de Filosofía de la Universidad Complutense de Madrid en la sesión dedicada a conmemorar el 275° aniversario de la muerte de Leibniz en Hannover el 14 de Noviembre de 1716, sesión celebrada con la participación de los Profesores Lorenzo Peña, como presidente y Javier Echeverría, como comentador, en el Encuentro de Lógica y Filosofía de la Ciencia Rudolf Carnap y Hans Reichenbach in Memoriam.

THEORIA - Segunda Época - Vol. VII
1992, N° 16-17-18, tomo A, - 195-278.

conceptos— y antes de que transcurra también este **14 de Noviembre** en que se cumplen al mismo tiempo los **275 años de la muerte del filósofo en Hannover**, en **1716**, en la más absoluta soledad[9].

¿Cómo explicar el creciente **renacimiento leibniciano** que se viene produciendo en estos últimos años en los principales países del mundo, incluída España, sobre todo en las **vertientes lógico-matemáticas** de la gigantesca herencia espiritual del creador del **optimismo filosófico**, es decir, precisamente en aquellas vertientes donde la piqueta demoledora de los **teoremas de Gödel** y sus colaboradores y continuadores en la tarea de detección precisa de los distintos tipos de «**limitaciones internas de los formalismos**»[10] parecía haber enterrado lo que se llamó «**el sueño de Leibniz**»[11] y nuestro desaparecido y siempre recordado amigo **Manolo Sacristán** prefería llamar «**el programa algorítmico de Leibniz**»[12]?

En la importante obra que sobre **Kurt Gödel** publicó **Hao Wang** hace cuatro años en el **M.I.T.**[13] y el año pasado en **Paris**[14], el gran **lógico** y **filósofo** chino decía, refiriéndose a la relación entre la obra de **Leibniz** y la de **Gödel**:

«Podemos considerar los resultados y los proyectos más importantes de **Gödel** como desarrollos en varias direcciones de las concepciones de **Leibniz**», destacando al mismo tiempo el «**interés**» de **Gödel** por «la realización de una forma modificada de la **característica universal**» y añadiendo: «El respeto que siente **Gödel** por **Leibniz** sólo puede compararse con el que manifiesta **Leibniz** por **Aristóteles** en **lógica** y por **Platón** en **filosofía**»[15].

En el aspecto que ahora nos concierne, **Leibniz**, en efecto, manifestó ese respeto por **Aristóteles** en un pasaje poco divulgado y comentado de su **carta de 1696 a Gabriel Wagner**[16], que puso de relieve el gran **leibniciano de Münster Heinrich Scholz**[17] y que dice así: «No es el menor mérito de **Aristóteles** haber traducido las **formas** (del razonamiento) en **leyes infalibles** y haber sido de hecho **el primero que ha escrito matemáticamente fuera de las matemáticas**»[18].

Sin embargo, sólo al propio **Leibniz** podemos reconocerle el mérito único de haber sido el primero que planteó hasta sus últimas consecuencias la posibilidad de extender, extrapolar y derramar plenamente, primero sobre la **lógica** y, a través de ella, sobre los más diversos campos del pensamiento humano no sólo los **métodos de deducción** empleados por los **matemáticos** sino, además, todos los recursos de **representación simbólica**, de **decisión algorítmica** y, a la vez, de **evidencia intuitiva** que subyacen en los **números**, pretendiendo convertir a la **aritmética** en una suerte de «**figura metafísica**»[19] y haciendo del **cálculo** y verificación con los números característicos el verdadero «hilo conductor»[20] o «hilo de Ariadna»[21], capaz de guiar al razonamiento a través de sus laberintos.

En la historia del pensamiento posterior a Leibniz, George Boole primero y Kurt Gödel más tarde han recogido, a distintos niveles, con distintos métodos, con distintos objetivos y con distinto alcance filosófico —el primero sin saberlo, pues no conoció la obra de Leibniz[22]; el segundo con plena conciencia, pues se inspiró directamente en él[23]— ese recurso de la aplicación de los algoritmos aritméticos a la lógica inventado por Leibniz; pero uno y otro, al hacerlo, recogieron, en realidad sólo una parte de su inmenso legado y, en nuestra opinión, no la más interesante.

La aritmetización de los conceptos propuesta y parcialmente realizada por Leibniz —hoy concluida de modo completo y coherente— es, en efecto, una aritmetización radicalmente distinta, en cuanto a sus fines, en cuanto a su método y en cuanto a su espíritu, de la de Boole y de la de Gödel. Los números característicos de Leibniz no pueden compararse en esos aspectos con los dos únicos números —el 1 y el 0— del álgebra extensional ordinaria de Boole —única vulgarmente conocida, aunque, como veremos más adelante, existen conjuntos, como el de los divisores o el de los componentes binarios de un número, que, dotados de las operaciones adecuadas, pueden adoptar también una estructura de álgebra de Boole de más de 2 valores y representar aritméticamente sistemas lógicos intensionales[24]. Tampoco pueden compararse los números característicos con las prolongaciones multivalentes, como las de Łukasiewicz[25], del álgebra ordinaria de Boole, fundadas también, como ésta, en la perspectiva extensional y en la utilización de matrices para la definición de las operaciones y la evaluación de las fórmulas, ni, por supuesto, con los números gödelianos.

En lo que respecta a la lógica de Boole, fué ante todo Gottlob Frege quien, apoyándose precisamente en la característica leibniciana, a la que él consideraba más próxima su propia ideografía, formuló objeciones esenciales y decisivas.

Así, en su trabajo «Booles rechnende Logik und die Begriffschrift»[26], publicado en los escritos póstumos del profesor de Jena, editados por Hermes en Hamburgo en 1969[27], Frege señala cómo Leibniz había apoyado su característica universal en una consideración del contenido (Inhalt[28]) de los conceptos, introduciendo, además en sus fórmulas las palabras 'non' y 'ens'[29] en su acepción existencial, mientras que en la lógica de Boole, «el 'ens' leibniciano ha sido eliminado»[30].

En otro trabajo —«Sobre el objetivo de la ideografía»—, publicado en Jena en 1882-83[31] para defender a la misma de los ataques del booleanismo avasallador, incluso en Alemania, y editado en francés por Claude Imbert en 1971[32], Frege escribe textualmente:

«Mi objetivo ha sido distinto del de Boole. Yo no he querido dar en fórmulas una lógica abstracta, sino dar la expresión de un contenido por medio de signos escritos... De hecho, no he querido crear solamente un calculus ratiocinator sino una lingua characterica (sic) en el sentido de Leibniz, estando bien entendido que el cálculo de la deducción es, en mi sentir, parte obligada de una ideografía»[33].

En su introducción al citado volumen, Claude Imbert explica de qué modo Frege ha encontrado, entre las distintas carencias de la lógica de Boole, la de que en ella «los principios de la lógica aristotélica no han sido alterados; la lógica de Boole tiene los mismos límites que la del Estagirita. Y así esa lógica no tiene una expresión para los juicios de existencia»[34].

Ahora bien, la necesidad de que todo sistema completo de conceptos admita la expresión de juicios de existencia como «no hay sirenas», «hay hombres no sabios» o «no hay poliedros regulares con caras hexagonales» es para nosotros, en la línea leibniciana, como para Frege, absolutamente indudable, en la medida en que, como con la mayor claridad y elocuencia mostró ya Franz Brentano[35], «toda proposición categórica puede, sin el menor cambio de sentido traducirse en proposición existencial y entonces el 'es' y el 'no es' de la proposición existencial asumen la función de la cópula».

Hay que observar que toda la teoría expuesta por Brentano a este respecto había sido ya establecida por Leibniz, singularmente en su gran ensayo «Investigaciones Generales sobre el análisis de las nociones y de las verdades»[37] de 1686 y en un opúsculo de 2 páginas, sin título de Leibniz, del 1° de Agosto de 1690[38]. Incluso el último de los 4 ejemplos dados por Brentano (la equivalencia entre «algún hombre no es sabio» y «hay un hombre no sabio» coincide con el cuarto ejemplo dado por Leibniz en el opúsculo de 1690 antes mencionado.

Por otra parte, la importancia que reviste la posibilidad de expresar los «juicios de existencia» en un sistema lógico completo queda bien de manifiesto en el hecho de que, como es bien sabido, la auténtica línea de demarcación entre la lógica de la tradición aristótelico-escolástica, de un lado, y la que podemos denominar «lógica moderna», de otro, radica en la oposición entre la mera «constancia» (en términos de Guillermo de Occam) o «presuposición» (en términos de Strawson) de la existencia de los términos de las proposiciones categóricas, que es suficiente para la primera y la exigencia de una formulación explícita de los respectivos juicios de existencia, que es necesaria para la segunda, por lo cual ésta no admite las subalternaciones ni los silogismos que utilizan la 'conversio per accidens', a no ser que para esas conclusiones se adopte el correspondiente juicio de existencia como una premisa suplementaria. El mejor análisis que conocemos de esta cuestión del alcance existencial de las proposiciones categóricas es el formulado por Alonzo Church en una brillante ponencia presentada al Congreso de Lógica celebrado en 1964 en Jerusalén[39].

Creemos que tiene bastante importancia, por todo lo anterior, el hecho de que, en nuestra aritmetización de un sistema intensional de conceptos (respectivamente, de proposiciones), a todo juicio relativo a la existencia de un concepto (respectivamente, a la posibilidad de la verdad de una proposición) quede asociado un número característico calculable en virtud de la correspondencia establecida entre números y conceptos (respectivamente, entre números y proposiciones).

Pasemos ahora a analizar la adecuación o inadecuación de una aritmetización de tipo gödeliano, desde el punto de vista de los objetivos de la tradición leibniciana, que da prioridad a una característica real, que, a través de los caracteres numéricos pretende designar directamente los conceptos y no nuevos signos intermediarios.

Uno de los mejores conocedores actuales de la lógica de Leibniz, nuestro amigo el profesor suizo Herbert H. Knecht señala a este respecto en su conocida obra «La logique chez Leibniz»[40] que «el procedimiento inventado por Leibniz recuerda inevitablemente la técnica utilizada por Kurt Gödel en sus demostraciones metamatemáticas, aunque los objetivos perseguidos y los métodos empleados son, a pesar de las semejanzas formales, sensiblemente diferentes entre los dos investigadores. La divergencia principal entre el modo de proceder de Gödel y el de Leibniz consiste tal vez en el hecho de que éste recurre a los números como símbolos de un nuevo formalismo, mientras que aquél aritmetiza un formalismo preexistente»[41].

Para nosotros, el contraste entre Leibniz y Gödel, analizado exclusivamente a través del prisma, que juzgamos esclarecedor, de sus respectivos métodos de aritmetización, es más profundo y radical y su alcance filosófico es considerable.

Para nosotros, ese contraste no sólo es el vulgarmente conocido y proclamado, desfavorable a Leibniz, según el cual los resultados obtenidos por Gödel utilizando como instrumento su aritmetización genial de la metamatemática obligan a la razón, si no a desandar, sí, cuando menos, a renunciar a andar parte del camino que permitió empezar a andar la aritmetización leibniciana de la lógica, sino, principalmente, otro tan importante como aquél y vulgarmente ignorado, éste favorable a Leibniz y desfavorable a Gödel, según el cual la aritmetización gödeliana, al limitarse a reconocer e identificar unívocamente la estructura superficial o sintáctica de las expresiones —en ello radica su grandeza, pero también su miseria— es irremediablemente opaca a los contenidos, al ser incapaz de reconocer e identificar, a través de las diferencias o cambios de esa estructura superficial o sintáctica, las estructuras profundas o semánticas subyacentes que permanecen y no varían, con absoluta indiferencia o ceguera por esa equivalencia o identidad semántica entre dos expresiones de forma o presentación distinta que primordialmente le preocupaba a Leibniz[42] y que de forma tan clara y brillante ha descrito entre nosotros hace cuatro años Javier Echeverría en su gran libro «Análisis de la identidad»[43], en el capítulo consagrado a Leibniz[44].

Desde esta perspectiva esencial, la pregunta decisiva es la siguiente: ¿consiente la aritmetización propuesta o construida una transparencia semántica, asociando a cada expresión bien formada en el sistema un número que resulte invariante para todas las expresiones de la misma clase de equivalencia que la primera y sólo para ellas —y ésto, naturalmente, no en el degenerado plano extensional booleano donde las clases de equivalencia se reducen a dos: la de la verdad y la de la falsedad, sino en el intensional, mucho más rico, donde, además de las dos clases extremas: la de la verdad necesaria y la de la falsedad necesaria, hay una multitud, que puede ser infinita, de clases intermedias, correspondientes a proposiciones de verdad posible y contingente a la vez, cada una con su invariante característico[45]?

La respuesta es tajante en lo que respecta a las dos aritmetizaciones distintas que consideramos: la aritmetización gödeliana no consiente esa transparencia semántica ni obtiene invariantes númericos para las clases de equivalencia de las expresiones. Tampoco lo pretende, naturalmente[46]. La aritmetización iniciada por Leibniz y concluida por nosotros sí consiente esa transparencia semántica y obtiene invariantes numéricos para las clases de equivalencia de las expresiones porque es precisamente lo que pretende[47].

Creemos sinceramente que el hallazgo y construcción generalizada de invariantes númericos de la identidad semántica para todos los sistemas —no sólo puramente formales, sino, lo que es prácticamente aún más importante, también interpretados en un universo específico— en que ello sea posible puede constituir hoy, a pesar de Gödel —y añadiremos que sobre todo después de Gödel pues no habrá nadie tan insensato que decida perseguir este objetivo en las esferas y niveles y sistemas indecidibles de la matemática—, un programa atractivo e incitante de investigación colectiva filosófico-matemática para las próximas décadas a cuya realización invitamos desde hoy —fecha tan significativa en este contexto— a asociarse a todos nuestros colegas leibnicianos, porque creemos que sería hermoso que en la doble conmemoración de este día 14 de Noviembre de 1991 —por un lado, la muerte física de Leibniz; por otro, el nacimiento intelectual a la vez de su Combinatoria universal[48] y de su Característica numérica[49] con su «Disertación sobre el Arte Combinatorio»[50]—, la escuela leibniciana iniciara, como homenaje, no meramente simbólico, sino, sobre todo, constructivo al maestro —como diría Jaurès, no guardando sus cenizas, sino recogiendo su luminosa antorcha— la interesante tarea de aportar problemas y resultados de alcance esencialmente lógico-filosófico a esa larga y apasionante historia de búsqueda de invariantes de los más diversos tipos —algebráico, topológico, geométrico— que, iniciada por Lagrange en 1773 y oficialmente presentada por Klein en su «programa de Erlangen» un siglo más tarde, en 1872[51], constituye una de las vertientes más ricas, diversificadas y unificadoras de la historia del pensamiento matemático y aún del pensamiento a secas.

A esa historia se han ido asociando, desde los ángulos más diversos, en los 220 años transcurridos desde el descubrimiento por Lagrange de los invariantes de las formas cuadráticas[52], muchos de los más importantes nombres de la matemática universal, como el propio Georges Boole, que estableció en 1841 el primer teorema general de los invariantes algébricos[53], generalizando los precedentes resultados de Lagrange; el inglés Arthur Cayley que con su grandiosa «Memoria sobre las cuánticas»[54], funda, entre 1854 y 1878, con Sylvester y Hermite, una teoría general de invariantes; el noruego Sophus Lie, autor de «La teoría de los grupos de transformaciones»[55], a la que está estrechamente vinculada la obra y la concepción unificadora de la Geometría del propio Félix Klein[56]; David Hilbert, con su teorema fundamental de 1890[57]; Henri Poincaré —cuyo mejor historiador, expositor y discípulo entre nosotros es Javier de Lorenzo[58]—, con los invariantes topológicos para los poliedros y superificies, en general —las características de Euler-Poincaré[59]—, así como, más recientemente, Hermann Weyl[60], con su definición general, en 1939, de los invariantes algébricos, pasando, naturalmente, por Albert Einstein, con el revolucionario y tan conocido resultado de 1915-16, según el cual las ecuaciones diferenciales de la física matemática son invariantes para todas las transformaciones de las coordenadas espacio-temporales[61].

¿Podría también, acaso, un día, el hallazgo de una **teoría general** de invariantes numéricos de las **clases de equivalencia** para todo tipo de **sistemas intensionales** de orientación **leibniciana** constituir una aportación significativa en la tarea de extender a la región **lógico-filosófica** ese **«programa de Erlangen»** que aún hoy un matemático francés de la talla de **Jean Dieudonné**[62], principal inspirador del grupo **Bourbaki**, define como **«uno de los más importantes jalones de la historia de las matemáticas»**[63]?

Resulta incomprensible que ésto no se haya realizado mucho antes. A nuestro juicio, al menos una vez que **Piaget** había mostrado de modo tan elocuente en su **lógica operatoria**[64] —naturalmente, bajo la inspiración psicológico-pedagógica de su **epistemología genética**, pero con un alcance mucho más general— la posibilidad de tratar las **transformaciones** de las **operaciones lógicas**[65] en el marco general de los **grupos de transformaciones** —en un sentido bastante análogo al de **Galois, Sophus Lie** y **Klein**—, habría tenido que ser tentador para **lógicos** y **matemáticos** —y para nosotros lo fué— encontrar **invariantes numéricos** para las distintas **operaciones lógicas**, de tal forma que todas las **transformaciones** del **grupo piagetiano** —basado en las 4 **transformaciones básicas: idéntica, inversa, correlativa** y **recíproca** o **dual**[66]— que resultasen **equivalentes** a la **transformación idéntica** fueran detectadas o denunciadas por la correspondiente **identidad** entre el número característico de la **operación inicial** y el **número característico** de la **operación final**, resultante de la **transformación**, por tener los **números característicos** de todas las **operaciones** el carácter de **invariantes** para todas las **operaciones equivalentes**[67].

Sin embargo, no ha sido así y ésto resulta tanto más extraño y decepcionante cuanto más se tiene en cuenta que las **operaciones** que pueden caracterizarse por un **invariante numérico** —a saber: **negación, disyunción, conjunción, incompatibilidad**, etc. de cualquier número de **variables**— no tienen por qué ser consideradas en el raquítico contexto **extensional**, sino también y sobre todo en el **intensional** que, en la acepción más general del término, podemos llamar **«contexto de las relaciones relevantes»**[68].

Por las razones ya señaladas —que se resumen en su esencial **opacidad** o **ceguera** para la **identidad intensional** o **equivalencia de contenido**—, todo el poderoso arsenal **aritmetizador** del legado **gödeliano** era incapaz de proporcionar el instrumento adecuado para colmar ese vacío, de apariencia tan inocente y sencilla, por no poder trascender —como hemos señalado— la esfera de la **identidad** meramente **sintáctica** para acercarse siquiera a la de la **identidad semántica**.

Intentad, en efecto, gödelizar dos fórmulas que resulten equivalentes en virtud de transformaciones idénticas realizadas con arreglo a las más sencillas leyes lógicas, como las de De Morgan, las distributivas o la de la doble negación. Tras esta gödelización, el resultado para todo intento de verificación «more arithmetico» de esa equivalencia será siempre aterrador, ya que los números de Gödel obtenidos para una y otra fórmula no sólo no obedecen a una ley de invariancia, sino que ni siquiera guardan la más leve relación de semejanza, aunque las dos fórmulas sólo se distingan, por ejemplo, en el cambio de posición de unos paréntesis, reflejando la propiedad asociativa de la disyunción[69].

Aritmetizad, por el contrario, sobre una base semántica leibniciana, dos fórmulas —compuestas incluso de numerosas variables e instancias de variables—, que son equivalentes, aunque presenten estructuras sintácticas tan diferentes que resulte imposible reconocer esa equivalencia, a no ser por una evaluación. El resultado de este segundo tipo de aritmetización es que, para esas fórmulas equivalentes, se obtendrán siempre números característicos iguales[70].

Siempre hemos pensado, en este contexto, que podía tener sentido, e incluso bastante interés, intentar recoger esa parte del inmenso legado lógico-matemático de Leibniz que Frege consideró olvidada, eliminada o abandonada[71] —y lo fué por Boole, por Couturat, por Gödel—, parte que hemos cifrado especialmente en la vinculación recíproca entre concepción intensional de la verdad, juicios de existencia y característica numérica real.

En un día como éste y en un Congreso como éste, yo no quisera que, a pesar de la indiscutible importancia de la obra de Carnap y Reichenbach —obra que tampoco existiría ni sería comprensible sin el precedente de Leibniz—, faltara tiempo, espacio y ocasión para que al menos una voz se alzara para recordar y reavivar, con alguna aportación original, esa parte importante de la herencia leibniciana.

Recuerdo que ya en 1946, teniendo apenas 20 años y siendo estudiante de Exactas y de Filosofía en esta Universidad Complutense de Madrid, moviéndome en este mismo espacio en que ahora nos movemos, intenté celebrar en solitario, el tercer centenario del nacimiento de Leibniz que en esas semanas se cumplía y lo hice de la única manera entonces a mi alcance, es decir, publicando los días 4 y 7 de Mayo en el diario «Arriba» de Madrid dos largos folletones titulados «El centenario de Leibniz y la Física nueva»[72] en los que relacionaba la mónada leibniciana con el átomo formal[73] y el principio de los indiscernibles de Leibniz con el principio de exclusión de Pauli[74].

* * *

En un día como hoy, queremos ofrecer a la memoria de Leibniz, como eco modesto y lejano, pero auténtico, de su fascinante ideal de una Combinatoria universal y una Característica numérica[75] para los conceptos, un resultado nuevo que, a nuestro juicio, puede tener cierta significación filosófico-matemática y aplicaciones en distintas esferas científicas y humanas[76] y que resumiremos en los términos siguientes:

Es posible representar artiméticamente cada concepto[77] (respectivamente, cada proposición[78]) de un sistema finito o infinito numerable de relaciones intensionales[79] por un número racional positivo o nulo inferior a la unidad, escrito en hexadecimal[80] o en octal, siendo este número característico racional[81] un invariante[82] de la clase de equivalencia del elemento lógico (respectivamente, concepto o proposición) al que está asociado.

El comportamiento aritmético de estos números característicos refleja ante todo, como un eco lejano pero tangible de los ensayos leibnicianos de cálculo lógico de Abril de 1679[83] en que está inspirado, la primera regla fundamental de utilización de los caracteres numéricos formulada por Leibniz al comienzo del primero de dichos ensayos[84], en virtud de la cual si un concepto incluye intensionalmente a otro, entonces el número característico del primero debe ser múltiplo del número característico del segundo[85]. Para nosotros ahora, en efecto, si y sólo si un concepto incluye (o una proposición implica) intensionalmente a otro(a), el número característico del primero (de la primera) es un compuesto binario[86] del número característico del segundo (de la segunda), siendo el número asociado al concepto incluído (a la proposición implicada) aritméticamente absorbido[87], por así decirlo, por el número asociado al concepto incluyente (a la proposición implicante).

De un modo más general, ahora todas las operaciones lógicas sobre conceptos (respectivamente, proposiciones) y todas las relaciones lógicas entre los mismos (las mismas) quedan representadas en nuestro modelo, respectivamente, por operaciones y relaciones aritméticas entre los números característicos respectivos del conjunto numérico asociado al sistema lógico y ésto de tal modo que quede siempre satisfecha la condición fundamental siguiente: una relación lógica es verdadera en el sistema si y sólo si la correspondiente relación aritmética es verdadera.

Las dos operaciones duales del anillo correspondiente al sistema lógico aritmetizado, a saber la combinación leibniciana de conceptos (respectivamente, la conjunción de proposiciones), por un lado y la alternativa leibniciana[88] de conceptos (respectivamente, la disyunción de proposiciones), por otro, quedan aritméticamente representadas en el anillo correspondiente al conjunto de números racionales asociado al sistema lógico respectivamente por el mínimo compuesto binario común[89] y el máximo componente binario común[90] de los números característicos de los conceptos (respectivamente, de las proposiciones) mencionado(a)s.

Por su parte, el número 0[91], componente de todos los números del conjunto numérico asociado al sistema lógico, es en nuestro modelo aritmético el invariante característico de la clase de equivalencia de todos los conceptos universales[92] (respectivamente, de todas las proposiciones necesariamente verdaderas o tesis[93]) del sistema, mientras que el número máximo del conjunto numérico, compuesto binario de todos los números racionales pertenecientes a éste[94], es en el mismo modelo aritmético el invariante característico de la clase de equivalencia de todos los conceptos necesariamente inexistentes[95] o imposibles (respectivamente, de todas las proposiciones necesariamente falsas o antítesis[96]) del sistema.

Este último número, que por razones que se hacen evidentes y obvias en el contexto de nuestra investigación venimos denominando «número hipersaturado» del conjunto numérico asociado a un sistema lógico intensional, es, para el caso más general de un sistema con infinitas variables de concepto o de proposición, el máximo número inferior a la unidad y en el sistema hexadecimal se escribirá en forma de un 0 seguido de la coma y de la cifra F periódica (F con una barra superpuesta), mientras que para un sistema finito con n variables de concepto o de proposición ($n \geq 2$), se escribirá, siempre en hexadecimal, en forma de un 0 seguido de la coma y de $2^n/4$ cifras F. Si eligiéramos el sistema octal de numeración, ese número hipersaturado se escribiría en forma de un 0 seguido de la coma y de $2^n/3$ cifras 8.

Finalmente, la negación de un concepto o proposición —operación cuya representación aritmética adecuada tan tenazmente se le resistió a Leibniz, siendo este fallo uno de los motivos básicos del parcial fracaso final de su programa algorítmico— queda aritméticamente representada en nuestro modelo por el número racional igual a la diferencia entre el número hipersaturado o máximo del conjunto numérico y el número asociado al concepto o proposición negado(a).

Las tres operaciones aritméticas aquí definidas y respectivamente asociadas a las tres operaciones lógicas fundamentales, entendidas en su versión intensional, tanto al nivel de los conceptos como al de las proposiciones, obedece a las leyes intensionales análogas a las definidas en los cálculos extensionales ordinarios de clases y de proposiciones, como la de la doble negación, las de De Morgan y las de la distribución, en el sentido de que las igualdades aritméticas correspondientes en el modelo a las equivalencias lógicas prescritas por las mencionadas leyes son verdaderas en la aritmética ordinaria.

En el marco de esta aritmetización, todas las relaciones intensionales de inclusión (respectivamente, de implicación), así como de incompatibilidad, entre elementos lógicos (respectivamente, conceptos o proposiciones) quedan aritméticamente representadas por relaciones numéricas entre los números asociados a aquéllos, las cuales están regidas por determinados ideales y filtros definidos en el anillo de números racionales asociado al anillo constituido por el sistema lógico.

Así, por ejemplo, el ideal definido en el anillo lógico como el conjunto de elementos (respectivamente, conceptos o proposiciones) intensionalmente compuestos (respectivamente, incluyentes o implicantes) de un elemento dado queda aritméticamente representado en el anillo aritmético correspondiente por el ideal definido como el conjunto de números racionales binariamente compuestos del número asociado al elemento lógico dado.

Análogamente, el ideal definido en el anillo lógico como el conjunto de elementos (respectivamente, conceptos o proposiciones) lógicamente incompatibles con un elemento (respectivamente, concepto o proposición) dado queda aritméticamente representado en el anillo aritmético por el ideal definido como el conjunto de número racionales binariamente compuestos del número asociado a la negación del elemento lógico dado.

En este contexto, hablamos de ideales y de filtros en el sentido algebráico ordinario en el que se aplican, entre otras cosas, a anillos[97] y, más específicamente, en la acepción utilizada y definida con precisión por Jon Michael Dunn en su aplicación a las álgebras intensionales[98], realizada, a partir de su tesis de Pittsburgh[99], en su importante artículo sobre dichas álgebras que fué incluido como sección de un capítulo[100] en el libro ya clásico sobre la lógica de la relevancia y de la necesidad publicado en Princeton hace ya 16 años, en 1975, por Alan Ross Anderson y Nuel D. Belnap Jr.[101].

En este nuevo marco o, si se quiere, en este nuevo tipo de modelo aritmético de sistemas intensionales diversos —que hemos construído y que deseamos fervientemente que sea hoy del agrado de Leibniz, allá donde el maestro siga cosechando nuevos predicados exaltantes, en este importante aniversario de su muerte— es también posible representar aritméticamente la famosa noción completa de cada sustancia individual[102] —como la sustancia de Alejandro Magno, la de Adán o la del propio Leibniz— con sus infinitos predicados (respectivamente, cada proposición contingente[103], con sus infinitos componentes proposicionales) de un universo o sistema como el límite de una sucesión convergente —con arreglo a las condiciones de Cauchy[104]— de números racionales crecientes asociados a predicados de la sustancia individual (respectivamente, a proposiciones componentes o implicadas por la contingente) cada vez más específicas, es decir, de hecho, por un número real[105] irracional, como π (pi), e o Φ (phi), el número de oro, inscrito en las proporciones del Partenón, de los cuadros de Piero della Francesca y de tantas otras obras de arte y analizado y mitificado en la «Divina Proporción»[106] de Fray Luca Pacioli de Borgo San Sepolcro.

Podemos preguntarnos ahora: ¿cómo se puede llegar —o se ha podido llegar— a un modelo aritmético semejante?

* * *

Para plantear sucesivamente, de modo coherente, en el marco de la orientación leibniciana, los diversos problemas vinculados al intento de representar aritméticamente sistemas intensionales de conceptos o de proposiciones, nos parece esencial centrar nuestra discusión en la pregunta siguiente:

¿qué hace posible, en una perspectiva intensional o cualitativa, la existencia en un universo o sistema?

La respuesta plausible parece ser la siguiente:

puede existir cualquier combinación de cualidades que, en ese universo, son compatibles entre sí.

Naturalmente, esa respuesta conduciría a la conclusión absurda de que puede existir todo, si no la basáramos en el supuesto previo de que, entre los conjuntos de cualidades presentes o ejemplificadas en cada universo, hay algunos compuestos de cualidades que son incompatibles entre sí.

Ahora bien, la explicación lógica que Leibniz ofrece de la incompatibilidad es la de que dos conceptos o cualidades son incompatibles si y sólo si uno de ellos contiene intensionalmente al menos una cualidad que es la opuesta o negación de una cualidad contenida en el otro[107].

Si se considera, por otra parte, que hay cualidades simples, primitivas o irreductibles a la combinación de otras —como también supone Leibniz[108], la conjunción de los dos supuestos entraña y significa, además, aplicando recursivamente la explicación o definición, que en ningún universo o sistema coherente y posible puede ocurrir que todas las cualidades primitivas presentes en el mismo sean conjuntamente compatibles o, lo que es lo mismo, que en todo universo posible hay combinaciones imposibles de cualidades, es decir que, si en cualquier universo o sistema posible vamos considerando sucesivas combinaciones, de tal modo que cada combinación de la sucesión sea intensionalmente más rica de cualidades que la precedente, llegaremos forzosamente a una combinación que está, por así decirlo, saturada[109], en el sentido de que ya no admite ningún enriquecimiento más porque toda nueva combinación con alguna cualidad más estallaría en la imposibilidad o inexistencia cualitativa[110].

Esa combinación habría pegado con sus codos en los límites cualitativos del universo, mucho más pavorosos, sobrecogedores y definitivos que los cuantitativos y espacio-temporales, porque aquéllos constituyen una auténtica ley de bronce, una coraza o corsé esencial e intrínsecamente infranqueable para toda expansión del universo que podamos imaginar. No son ya las barreras físicas del universo, sino unas barreras peculiares de carácter lógico, metáfisico o tal vez teológico, que pudieran merecer el nombre de anti-teológicas porque, entre otras consecuencias, hacen también, a mi juicio, añicos el sueño del propio Leibniz que, en su pretensión ingenua, dentro de su genio inmenso, de demostrar matemáticamente a través de un nuevo argumento ontológico[111], primero la posibilidad y luego, a través de ésta, la necesidad de la existencia de Dios, como ser que contiene todas las perfecciones, cualidades, ideas o formas simples, sostuvo, en una famosa discusión que tuvo con Spinoza[112] y en una no menos famosa carta que envió a la Duquesa Sofía de Hannover[113], la tesis de que todas las cualidades simples son compatibles entre sí[114].

Por el contrario, siguiendo nuestro razonamiento anterior, consecuente con las perspectivas lógico-ontológicas del propio Leibniz, resulta que el concepto que corresponde a todo lo que no puede existir es precisamente el que incluye demasiadas perfecciones para poder acceder a la existencia.

Y así en ningún universo puede existir el poliedro ideal, síntesis de todos, que buscaba el angélico sabio pintado por Durero, ni, por supuesto, el ser que incluye todas las perfecciones, ni puede ser verdadera —en virtud de un razonamiento formalmente análogo al anterior, aplicado a los sistemas de proposiciones— la proposición que implica como consecuencia todas las proposiciones.

Estas explicaciones intensionales tanto de la existencia posible como, opuestamente, de la inexistencia necesaria de ciertas combinaciones de cualidades que, aisladas, coexisten en un mismo universo, tienen, naturalmente, consecuencias y repercusiones lógico-matemáticas de importancia en el marco del intento leibniciano de construir un modelo aritmético completo y coherente de los sistemas de relaciones intensionales, sea entre conceptos, sea entre proposiciones.

Vengo ocupándome del arcano y desconcertante problema de la representación aritmética de la relación de incompatibilidad desde que, siendo estudiante, primero sólo de la Facultad de Exactas, que estaba enfrente y luego también de esta Facultad de Filosofía en que nos encontramos ahora, para venir a la cuál me bastaba cruzar la carretera, y acudiendo a las clases de Lógica de Leopoldo Eulogio Palacios y ocupándome a la vez de la biblioteca de su Departamento, logré encontrar un día en la Biblioteca Nacional, adonde iba a buscar lo que en la otra me faltaba, los «Opúsculos inéditos de Leibniz» publicados por Couturat y la «Lógica de Leibniz» de este filósofo y matemático francés, libros de los que, en unas u otras ediciones, jamás me he separado después, a lo largo de mi azarosa y peregrina vida.

Tengo que confesar de una vez que, a pesar de la profunda gratitud que, como todos los leibnicianos bien nacidos, sentía por Couturat, por haber salvado de la ignorancia y del olvido buena parte de la herencia lógica de Leibniz—, desde mi punto de vista, la más importante—, nunca pude perdonarle su infundada y despiadada crítica de la preferencia leibniciana por el aspecto comprehensivo o intensional de las relaciones entre los conceptos.

Cuando Couturat criticaba precisamente esa oposición significativa y relevante entre contenidos que constituye lo más sutil e interesante de la relación de incompatibilidad (en contraste con el carácter mudo y pasivo de su proyección extensional, booleana y conjuntista, la inelocuente vaciedad de la intersección de dos clases disjuntas), viendo Couturat horrorizado, sin embargo, en la primera «una suerte de repulsión moral»[115], me parecía estar oyendo una diatriba de sentido contrario, pero de estupidez comparable a la de los teólogos inquisidores de Salamanca que, según Torres Villarroel, «veían en los círculos matemáticos las calderas de Pedro Botero».

Sin embargo, aún pasaron muchos años hasta que un día, en un Congreso celebrado en Berna en 1977, logré refutar plenamente la pretendida demostración de Couturat en su «Lógica de Leibniz» según la cual la relación de incompatibilidad, que constituye la versión intensional de la universal negativa, es «refractaria —al igual, según él, que todas las restantes relaciones intensionales— al tratamiento matemático»[116], mostrando yo de manera fehaciente e indiscutible —como ha sido reconocido[117]— que Couturat se apoyaba para su pretendida demostración en una representación geométrica errónea de dichas relaciones[118].

Pero es evidente que no bastaba con demostrar que no quedaba demostrado por Couturat —ni por nadie— que esa insondable relación de incompatibilidad es «refractaria» a todo tratamiento matemático, sea éste geométrico o aritmético. Había que pasar a demostrar también, de un modo constructivo —es decir, construyendo una representación matemática convincente de la misma— que dicha relación es plenamente susceptible de tal tratamiento, y ésto, sobre todo, por la sencilla razón de que, de no vencer ese obstáculo esencial, podíamos decir definitivamente adios a toda esperanza de aritmetizar coherentemente una sola proposición universal negativa como «ningún hombre es inmortal», «ninguna mujer es pez» o «ningún poliedro regular tiene caras hexagonales», y eso, de manera desconcertante, tres siglos después de que Leibniz hubiera representado aritméticamente, de modo tan satisfactorio, la universal afirmativa como la divisibilidad del número característico del sujeto por el del predicado.

Ese incómodo obstáculo ha sido hoy plenamente vencido, gracias a mi construcción, en paralelo, de la noción de concepto hipersaturado, compuesto de todos los predicados del sistema lógico, por un lado, y de la noción de número hipersaturado, compuesto de todos los números del conjunto numérico asociado a dicho sistema, por otro.

Nuestra construcción y utilización del número hipersaturado para representar aritméticamente el concepto que Leibniz llamaba, a la vez, «falso», «contradictorio» e «imposible»[119] (pero sin llegar nunca a aritmetizarlo) permite salir del atolladero.

Observemos que, correlativamente, en el plano proposicional, ese número hipersaturado representará aritméticamente toda proposición necesariamente falsa en el sistema.

Colgándonos, pues, de ese clavo ardiendo —recurso esencial para salvar el intento aritmetizador de Leibniz—, hemos logrado que las cuatro proposiciones categóricas admitan una representación aritmética paralela y coherente que, sin entrar en fórmulas, podemos expresar en román paladino del modo siguiente:

1. Una universal afirmativa es verdadera si y sólo si el mínimo compuesto binario común del número característico del sujeto y el número característico de la negación del predicado es igual al número hipersaturado.

2. Una universal negativa es verdadera si y sólo si el mínimo compuesto binario común de los números característicos del sujeto y del predicado es igual al número hipesaturado.

3. Una particular afirmativa es verdadera si y sólo si el mínimo compuesto binario común de los números característicos del sujeto y del predicado es menor que el número hipersaturado.

4. Una particular negativa es verdadera si y sólo si el mínimo compuesto binario común del número característico del sujeto y el número característico de la negación del predicado es menor que el número hipersaturado.

Este simple hallazgo permite ya, de paso, esa aritmetización coherente de toda la silogística que Leibniz tan penosa e infructuosamente buscó toda su vida y lo hace, además, del modo más sencillo posible, es decir, sobre la base de la asociación de un solo número característica a cada concepto y sin recurrir, pues, a asociar a cada concepto un par de números característicos, como Leibniz se resignó a hacer en los cálculos lógicos «del segundo tipo»[120], aunque tan infructuosamente como en el caso de los del «primer tipo»[121].

Por otra parte, tenemos que observar aquí que, si en los cálculos «del segundo tipo» se analizan las condiciones impuestas por Leibniz al par de números característicos asociado a un concepto, se comprobará que, al hacerlo, introduce entre ellos una suerte de «combinación lineal», por lo que no son recíprocamente independientes, sino que uno cualquiera de ellos hubiera podido obtenerse en función del otro y de una constante del sistema, que resultaría ser precisamente el número hipersaturado del mismo, si Leibniz hubiera logrado calcularlo[122].

Cuando se piensa que Jan Łukasiewicz, uno de los lógicos más geniales de todos los tiempos, después de Aristóteles y Leibniz, en el famoso capítulo «Sobre el problema de la decisión» de su obra ya clásica «La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna»[123], utiliza todavía, en su intento de completar los requisitos para demostrar la decidibilidad de la silogística, un recurso fundado en la asociación de un par de números característicos a cada concepto (es decir, en los cálculos leibnicianos «del segundo tipo»[124]), se reconocerá que el progreso que hemos logrado realizar después es considerable.

* * *

A la hora de aritmetizar un sistema lógico intensional finito o infinito, ya al nivel de los conceptos, ya al de las proposiciones, nuestra regla fundamental de asociación a cada concepto (respectivamente, a cada proposición) de un número característico invariante para su clase de equivalencia es la siguiente:

Expresado cada elemento del sistema lógico de conceptos o de proposiciones en forma normal conjuntiva como conjunción de disyunciones primitivas o irresolubles en el sistema, se asocia a la disyunción de índice i la i-ésima potencia negativa de 2 (o sea, 2^{-i}), quedando entonces asociado al elemento (respectivamente, concepto o proposición) dado, en virtud de nuestra ley general de correspondencia entre operaciones lógicas y operaciones aritméticas antes enunciada, el número racional obtenido como suma de las potencias negativas de 2 respectivamente asociadas a sus componentes intensionales.

Este es el definitivo número característico leibniciano de un concepto, proposición o elemento lógico en general de un sistema coherente.

El CUADRO I. muestra, para todas las conjunciones y disyunciones de dos elementos, en un sistema de cuatro variables: p_1, p_2, p_3 y p_4, la coherencia de los resultados obtenidos con el método de aritmetización mencionado: En los 8 rectángulos superiores y en los 8 rectángulos de la izquierda figuran los cuatro elementos (interpretables, respectivamente, como conceptos o como proposiciones) atómicos y sus negaciones, acompañados de los números característicos que les han resultado asociados mediante la aplicación de la regla fundamental de asociación arriba mencionada. En los rectángulos de intersección de las distintas filas y columnas de rectángulos en los que figuran esos elementos atómicos y sus negaciones, aparecen, respectivamente, las disyunciones binarias de aquéllo(a)s —en todos los rectángulos a la izquierda y debajo de la diagonal principal— y las conjunciones binarias de los mismos —en los rectángulos a la derecha y encima de la diagonal principal—, unas y otras acompañadas de los respectivos números característicos, obtenidos al traducir, en virtud de la asociación de operaciones lógicas y aritméticas antes establecida, las disyunciones por máximos componentes binarios comunes y las conjunciones por mínimos compuestos binarios comunes.

CUADRO I.

ASOCIACION DE NUMEROS CARACTERISTICOS RACIONALES DE 4 CIFRAS ESCRITOS EN HEXADECIMAL (DE BASE 4) EN UN SISTEMA DE 4 VARIABLES DE CONCEPTO O DE PROPOSICION, DESDE UNA PERSPECTIVA INTENSIONAL NEO-LEIBNICIANA.

	p_1 0,FF	$-p_1$ 0,00FF	p_2 0,F0F	$-p_2$ 0,0F0F	p_3 0,CCCC	$-p_3$ 0,3333	p_4 0,AAAA	$-p_4$ 0,5555
p_1 0,FF	$p_1\&p_1$ 0,FF $p_1 v p_1$	$p_1\&-p_1$ 0,FFFF	$p_1\&p_2$ 0,FFF	$p_1\&-p_2$ 0,FF0F	$p_1\&p_3$ 0,FFCC	$p_1\&-p_3$ 0,FF33	$p_1\&p_4$ 0,FFAA	$p_1\&-p_4$ 0,FF55
$-p_1$ 0,00FF	$p_1 v -p_1$ 0	$-p_1\&-p_1$ 0,00FF $-p_1 v -p_1$	$-p_1\&p_2$ 0,F0FF	$-p_1\&-p_2$ 0,0FFF	$-p_1\&p_3$ 0,CCFF	$-p_1\&-p_3$ 0,33FF	$-p_1\&p_4$ 0,AAFF	$-p_1\&-p_4$ 0,55FF
p_2 0,F0F	$p_1 v p_2$ 0,F	$-p_1 v p_2$ 0,00F	$p_2\&p_2$ 0,F0F $p_2 v p_2$	$p_2\&-p_2$ 0,FFFF	$p_2\&p_3$ 0,FCFC	$p_2\&-p_3$ 0,F3F3	$p_2\&p_4$ 0,FAFA	$p_2\&-p_4$ 0,F5F5
$-p_2$ 0,0F0F	$p_1 v -p_2$ 0,0F	$-p_1 v -p_2$ 0,000F	$p_2 v -p_2$ 0	$-p_2\&-p_2$ 0,0F0F $-p_2 v -p_2$	$-p_2\&p_3$ 0,CFCF	$-p_2\&-p_3$ 0,3F3F	$-p_2\&p_4$ 0,AFAF	$-p_2\&-p_4$ 0,5F5F
p_3 0,CCCC	$p_1 v p_3$ 0,CC	$-p_1 v p_3$ 0,00CC	$p_2 v p_3$ 0,C0C	$-p_2 v p_3$ 0,0C0C	$p_3\&p_3$ 0,CCCC $p_3 v p_3$	$p_3\&-p_3$ 0,FFFF	$p_3\&p_4$ 0,EEEE	$p_3\&-p_4$ 0,DDDD
$-p_3$ 0,3333	$p_1 v -p_3$ 0,33	$-p_1 v -p_3$ 0,0033	$p_2 v -p_3$ 0,303	$-p_2 v -p_3$ 0,0303	$p_3 v -p_3$ 0	$-p_3\&-p_3$ 0,3333 $-p_3 v -p_3$	$-p_3\&p_4$ 0,BBBB	$-p_3\&-p_4$ 0,7777
p_4 0,AAAA	$p_1 v p_4$ 0,AA	$-p_1 v p_4$ 0,00AA	$p_2 v p_4$ 0,A0A	$-p_2 v p_4$ 0,0A0A	$p_3 v p_4$ 0,8888	$-p_3 v p_4$ 0,2222	$p_4\&p_4$ 0,AAAA $p_4 v p_4$	$p_4\&-p_4$ 0,FFFF
$-p_4$ 0,5555	$p_1 v -p_4$ 0,55	$-p_1 v -p_4$ 0,0055	$p_2 v -p_4$ 0,505	$-p_2 v -p_4$ 0,0505	$p_3 v -p_4$ 0,4444	$-p_3 v -p_4$ 0,1111	$p_4 v -p_4$ 0	$-p_4\&-p_4$ 0,5555 $-p_4 v -p_4$

Vamos a pasar ahora al problema capital de un tratamiento o manipulacióna aritmética coherente de sistemas de infinitos elementos (respectivamente, conceptos o proposiciones), distribuidos en infinitas clases de equivalencia, designados por infinitas variables y aritméticamente representados por infinitos números reales del intérvalo semi-abierto [0, 1[.

Advertimos aquí, ya de una vez por todas, que cuanto se diga en este contexto infinito referido a sistemas de infinitos conceptos será también aplicable «mutatis mutandis», como ya ocurría en el anterior contexto finito, a sistemas de infinitas proposiciones.

No hay que olvidar, por otro lado, a este respecto, que la mayor parte de los más importantes cálculos lógicos intensionales de Leibniz admite una doble lectura e interpretación, una al nivel que venimos llamando «de los conceptos» y otra al nivel proposicional, como el propio Leibniz puso de relieve en ocasiones[125], como ya observó, muy certeramente, en su luminoso artículo «El cálculo silogístico-proposicional de Leibniz»[126], publicado en 1976, nuestro entrañable amigo, el gran lógico guatemalteco Héctor-Neri Castañeda —que se nos acaba de morir el 7 de Septiembre de este año 1991 y a quien desde aquí dedico un emocionado recuerdo— y como, por último, señala también —y de un modo más general y sugestivo— nuestro siempre presente amigo Lorenzo Peña, que preside esta sesión, en el artículo que sobre la lógica combinatoria de Leibniz en sus «Investigaciones Generales» y los cálculos combinatorios contemporáneos[127] publica en el número monográfico de THEORIA dedicado a los cálculos lógicos de Leibniz que acaba de aparecer.

Volviendo a nuestro marco infinito, diremos que cabe considerar sucesivamente en él, siguiendo un orden de intensión creciente de los conceptos, siete categorías o niveles distintos de conceptos, por un lado y siete categorías o niveles correspondientes de números característicos, que siguen, paralelamente, un orden de composición creciente, por otro.

Como puede verse en el CUADRO II, estas categorías se disponen con arreglo a una estricta simetría lógica, por cuanto el concepto y el número de la primera tienen sus respectivos opuestos en los de la última, los de la segunda en los de la penúltima, los de la tercera en los de la antepenúltima y, finalmente, los de la cuarta, que es la categoría central, en los de esa misma categoría o nivel, donde se hallan precisamente los conceptos y números, si así puede decirse, más numerosos y, a la vez, más complejos, entre ellos todos los números irracionales del intérvalo semi-abierto [0, 1[de números reales y los conceptos correspondientes.

CUADRO II.

SISTEMAS INFINITOS DE CONCEPTOS ASOCIADOS A CONJUNTOS INFINITOS DE NÚMEROS REALES POSITIVOS MENORES QUE 1 DESDE UNA PERSPECTIVA INTENSIONAL NEO-LEIBNICIANA.

CATEGORÍAS O NIVELES DE CONCEPTOS

L.1. concepto universal e (ente)-
predicado de todo concepto
opuesto al inexistente -e (no-ente)

L.2. conceptos irreductibles (no compuestos) d_i
opuestos a los saturados $-d_i$

L.3. conceptos de composición finita
combinaciones de un número finito de irreductibles
d_{i_1} & ... & d_{i_n}
opuestos a los cuasi-saturados

L.4. conceptos de composición infinita
con infinitud estable con respecto a la oposición
o sea, con opuestos de composición infinita

cada uno de estos conceptos es:

una combinación de los infinitos conceptos irreductibles
de una de las partes de cualquier partición
del conjunto de los conceptos irreductibles
en dos subconjuntos infinitos

L.5. conceptos cuasi-saturados
alternativas de un número finito de saturados
$-d_{i_1}$ v ... v $-d_{i_n}$
opuestos a los de composición finita
y filtros de Fréchet del sistema lógico

L.6. conceptos saturados $-d_i$
opuestos a los irreductibles d_i
y ultrafiltros de Fréchet del sistema lógico

L.7. concepto inexistente -e (no-ente)
sujeto de todo concepto
opuesto al universal e (ente)

CATEGORÍAS O NIVELES DE NÚMEROS

A.1. número mínimo 0
componente de todo número
opuesto al máximo (hipersaturado) $0,\bar{F}$

A.2. números irreductibles (no compuestos) 2^{-i}
opuestos a los saturados $0,\bar{F}-2^{-i}$

A.3. números de composición finita
sumas de un número finito de potencias negativas de 2
$2^{-i_1} + ... + 2^{-i_n}$
opuestos a los cuasi-saturados

A.4. números de composición infinita
con infinitud estable con respecto a la oposición
o sea, con opuestos de composición infinita

cada uno de estos números es:

una suma de las infinitas potencias negativas de 2
de una de las partes de cualquier partición
del conjunto de las potencias negativas de 2
en dos subconjuntos infinitos

A.5. números cuasi-saturados
ínfimos binarios de un número finito de saturados
$(0,\bar{F}-2^{-i_1}, ...\ 0,\bar{F}-2^{-i_n})$
opuestos a los de composición finita
y filtros de Fréchet del conjunto numérico

A.6. números saturados $0,\bar{F}-2^{-i}$
opuestos a los irreductibles 2^{-i}
y ultrafiltros de Fréchet del conjunto numérico

A.7. número máximo (hipersaturado) $0,\bar{F}$
compuesto de todo número
opuesto al mínimo 0

LOS NÚMEROS ESTÁN ESCRITOS EN HEXADECIMAL, SISTEMA DE BASE 2^4

En las siete categorías sucesivas quedan recíprocamente asociados, como puede verse en el mencionado CUADRO II, los tipos de conceptos y de números siguientes:

Primero: al concepto universal, predicado de todo concepto, queda asociado al número 0, componente de todo número.

Segundo: a los conceptos irreductibles (no compuestos), quedan asociadas las potencias negativas de 2, números irreductibles (no compuestos).

Tercero: a los conceptos de composición finita, combinaciones de un número finito de irreductibles, quedan asociados los números obtenidos como sumas de un número finito de irreductibles o potencias negativas de 2.

Cuarto: a los conceptos de composición infinita cuyos opuestos (negaciones) son también conceptos de composición infinita quedan asociados los números de composición infinita cuyos opuestos (complementarios) son también números de composición infinita.

Quinto: a los conceptos que llamaremos cuasi-saturados, opuestos (negaciones) de los de composición finita y filtros de Fréchet del sistema lógico quedan asociados los números cuasi-saturados, opuestos (complementarios) de los de composición finita y filtros de Fréchet del conjunto numérico asociado al sistema lógico.

Sexto: a los conceptos saturados, opuestos a los irreductibles y ultrafiltros de Fréchet[128] del sistema lógico quedan asociados los números saturados, opuestos a los irreductibles o potencias negativas de 2 y ultrafiltros de Fréchet del conjunto numérico asociado al sistema lógico.

Séptimo: al concepto inexistente («falso», «contradictorio», «imposible» de Leibniz), sujeto de todo concepto y opuesto al universal, queda asociado el número máximo del intérvalo semi-abierto [0, 1[—o, si se quiere, el máximo número real menor que 1—, es decir, el número hipersaturado $0{,}\overline{F}$ (periódico), compuesto de todo número y opuesto (complementario) del número 0[129].

Observemos aquí que, de un modo análogo —y simétricamente opuesto— a lo que ocurre en la perspectiva extensional de las teorías de conjuntos y de clases y de la lógica booleana, donde es preciso admitir el conjunto (respectivamente, la clase) vacío(a), incluido(a) en todo(a) conjunto (clase), en nuestra perspectiva intensional nos vemos obligados a admitir el concepto (respectivamente, el número) hipersaturado, que contiene o incluye intensionalmente (respectivamente, binariamente) todo concepto del sistema (respectivamente, todo número del conjunto numérico asociado al sistema).

Es éste un paso decisivo, delicado pero indispensable (como en numerosos trabajos hemos puesto de relieve), que **Leibniz**, tal vez por un respeto inercial y automático a la autoridad y a la tradición **aristotélico-escolástica** (que aún hoy rechaza la admisión de **clases vacías** y de **conceptos imposibles**), no se atrevió nunca a dar, siendo su vacilación a este respecto, la causa principal, a nuestro juicio, del fracaso parcial de sus **cálculos lógicos aritmético-intensionales.**

El esquema presentado en el **CUADRO II** para los **sistemas de infinitos conceptos** (respectivamente, **proposiciones**) nos parece **coherente** y **completo**, a no ser, naturalmente, que se nos demuestre lo contrario, a lo cual invitamos cordialmente a todos.

Ahora bien, a la vista del mismo, un problema cuya importancia es algo más que **histórica** se nos plantea enseguida y es el siguiente:

¿dónde situar exactamente, en el marco de la **siete categorías** o **niveles de conceptos**, las dos **categorías** indudablemente más polémicas de toda la **lógica de Leibniz**, a saber, la de las **nociones simples o primitivas**, por un lado y la de las **nociones completas de las sustancias individuales**, por otro?

Pienso que con un adecuado planteamiento de esta cuestión podríamos iniciar una discusión fructífera y unas investigaciones que podrían —o deberían— durar algunos años, porque con una respuesta satisfactoria y definitiva a la lmisma daríamos, a mi juicio, un gran paso hacia adelante, no sólo de carácter **lógico-matemático**, sino tal vez también de importancia **filosófica** en general.

Para un análisis en profundidad de las **siete categorías** consideradas —indispensable para orientar la investigación—, obsérvese que **los números de la categoría central A.4.** no son todos forzosamente irracionales, ya que en esa categoría se incluyen también números racionales periódicos puros o mixtos, por lo que **la misma es susceptible de una subdivisión en sub-categorías aritméticas, que corresponderían a otras tantas sub-categorías lógicas.**

De momento, voy a abstenerme de extraer consecuencias **lógico-filosóficas** apresuradas de ese análisis en profundidad. Sólo voy a sugerir una idea, como posible eje de una eventual **discusión** y es la siguiente:

Si la **noción completa de una sustancia individual** —como, por ejemplo, la **noción de Leibniz**—, al ser concebida, en nuestra perspectiva, como un **concepto saturado** —es decir, tal que toda hipotética **combinación** del mismo con cualquier otro **concepto** que no sea **predicado** suyo da como resultado un **concepto imposible**—, estuviera **aritméticamente representada por un número saturado**, como, por ejemplo, el número $0{,}7\overline{F}$, que es un **número racional periódico mixto** y define un **ultra-filtro de Fréchet**, entonces los **infinitos**, **no numerables** componentes binarios de $0,7\overline{F}$, representarían distintos predicados que la noción de Leibniz tiene, mientras que los respectivos complementarios, es decir, los infinitos, no numerables compuestos binarios del número irreductible 0,8, primera potencia negativa de 2, por ser igual a 2^{-1} escrita en hexadecimal, representarían distintos predicados que la noción de Leibniz no tiene.

Pero obsérvese que en esta opción representativa, tanto el conjunto de números característicos asociados a predicados que una noción individual como la de Leibniz tiene como el conjunto de números asociados a predicados que esa noción no tiene incluirían a la vez números racionales, mientras que, por su parte, la noción individual misma de una sustancia estaría aritméticamente representada por el número definidor de un ultra-filtro de Fréchet que es periódico mixto, luego racional.

En esta opción representativa, pues, el número de individuos posibles en un universo aritmetizable según nuestras pautas resultaría infinito pero numerable, y ésto podría suscitar, naturalmente, sabrosas polémicas cosmológico-teológicas.

* * *

Observaremos finalmente, para concluir, como última muestra de las aptitudes y potencialidad de nuestro método de aritmetización de sistemas lógicos desde una perspectiva intensional, que el mismo modelo aritmético general, cuya estructura y comportamiento acabamos de exponer para sistemas finitos e infinitos, puede emplearse al mismo tiempo, con las transformaciones mínimas que vamos a sintetizar, por una parte para evaluar aritméticametne fórmulas de un sistema formal puro (no interpretado) de lógica de conceptos o de proposiciones y, por otra, para tratar aritméticamente también sistemas construidos en el marco de aquél e interpretados en universos específicos, en los cuales pueden adquirir valor de universalidad determinados conceptos que no son necesariamente universales lógicos, así como, respectivamente, valor de validez determinadas proposiciones que no son necesariamente leyes lógicas.

Para esta segunda aplicación de nuestro modelo aritmético, precisemos que la introducción en un sistema formal —ya aritmetizado con arreglo a las pautas generales descritas—, como tesis, hipótesis o premisa complementaria, de cualquier aserción de universalidad o de no universalidad de un concepto (respectivamente, de validez o de no validez de una proposición) se traduce aritméticamente en el modelo por un fórmula aritmética especial que expresa, ya la anulación ya la no-anulación[130] —en el nuevo modelo, que va a quedar asociado al sistema interpretado— del primitivo valor numérico o número característico que dicho concepto (respectivamente, proposición), ahora elevado(a) a nuevo rango lógico —el de la universalidad o no universalidad (respectivamente, el de la validez o no validez)— tenía en el marco lógico general precedente —puramente formal— en función de la preliminar traducción aritmética de sus componentes conjuntivos irreductibles por potencias negativas de 2. Estas anulaciones o no anulaciones correspondientes a las tesis, hipótesis o premisas introducidas en el sistema interpretado se realizarán, por así decirlo, con todas sus consecuencias lógicas, que están regidas por las 5 fácilmente comprensibles reglas siguientes:

1. Si un valor se anula, se anulan también sus componentes binarios.
2. Si un valor no se anula, tampoco se anulan sus compuestos binarios.
3. Si dos valores se anulan, también se anula su mínimo compuesto binario común.
4. Si un valor se anula y otro no se anula, sólo se anula en el segundo, el máximo componente binario común de ambos, quedando, pues, el valor del segundo reducido a su parte binaria no común con el primero.
5. Las fórmulas aritméticas que expresan exclusivamente no anulaciones de dos o más valores no tiene consecuencias aritméticas y no entrañan, por consiguiente, consecuencias lógicas en el sistema.

Esta última regla representa «more arithmetico», como puede comprenderse, una generalización universal, es decir, para todos los tipos de sistemas, para cualquier número de variables y para cualquier número de aserciones introducidas por vía aritmética en el sistema, en la forma arriba indicada, del antiguo, genial y siempre válido principio aristotélico para la silogística, en virtud del cual «ex duo particularibus, nihil sequitur» o, si se quiere, en román paladino, «de dos proposiciones particulares, nada se sigue».

* * *

En 1716, hace ahora 275 años, un 14 de Noviembre como hoy, Leibniz —la parte física de Leibniz— moría en su casa de Hannover, donde viví con emoción durante unos meses de 1990, impregnándome de su numen.

Leibniz, que había enriquecido prodigiosamente su época y las sucesivas con la creación de tantos y tan diversos mundos conceptuales, moría en la más absoluta soledad.

El día de su muerte, **Leibniz**, que hubiera podido hacer grabar en su tumba alguna inscripción o figura evocadora de sus geniales descubrimientos, como el **cálculo infinitesimal** o el **sistema binario**, al igual que **Arquímedes** hizo grabar en la suya, en **Siracusa**, el **cilindro circunscrito a la esfera** o **Jacobo Bernoulli en la suya, en la catedral de Basilea**, su **espiral logarítmica** con el famoso lema «**eadem mutata resurgo**», estaba, sin embargo, ese día dibujando, de su puño y letra, el más desnudo y lacónico —y por ello el más hermoso— epitafio que se conozca: «**Huesos de Leibniz**». Y cuando murió, sólo su secretario **Eckart** siguió su féretro hasta el cementerio.

Pero, como **Leibniz** sabía y preveía, su **sustancia individual** y **espiritual**, su **mónada metafísica** y **matemática**, seguiría ganando **predicados** después de su muerte y hoy los está ganando entre nosotros, no sólo por nuestro recuerdo, sino también por nuestro desarrollo y continuación de su obra. El cuerpo de **Leibniz** ha muerto, pero **Leibniz** vive. ¡**Viva la mónada eterna de Leibniz**!

⋆ Profesor Emérito
Universidad del País Vasco

NOTAS

[1] El descubrimiento de la **existencia** —y, sobre todo, del método de **construcción**— de los **5 poliedros regulares** o «**cuerpos platónicos**» —**tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo** y **dodecaedro**—, uno de los más bellos y sugestivos de toda la historia de la matemática, es un acontecimiento tan importante como misterioso que durante mucho tiempo ha resultado difícil e incierto situar históricamente con exactitud.

Según una larga tradición, que arranca de la propia **Academia platónica**, pues se inicia, al parecer, con **SPEUSIPO** (h. **395-339 a.J.C.**), filósofo de inclinación **pitagórica** sobrino de **PLATÓN** (**428-348 a.J.C.**), a quien sucedió en el año **348 a.J.C.** al frente de la **Academia** y se extiende al **doxógrafo AECIO** (fl. h. **150**) y a grandes figuras del **neoplatonismo** tan conocidas como **JÁMBLICO** de Calcis, en Siria (h. **250-565**), **PROCLO** de Constatinopla (**412-485**) y **SIMPLICIO** de Atenas (fl. **527-565**), siendo luego recogida —aunque también discutida— por todos los historiadores de la **geometría griega**, a partir de **Paul TANNERY** (**1843-1904**), la **teoría de los 5 poliedros regulares** es obra de los **pitagóricos**, e incluso del propio **PITÁGORAS** (h. **560-480 a.J.C.**).

Y así, por ejemplo, **AECIO** (AETIUS), en un famoso fragmento de las «**Aetii Placita**» (opiniones), que pretende reconstruir un pasaje contenido en uno de los **18 libros** que componen «**De las opiniones de los físicos**» (*Φυσιχῶν δόξαι*; en sus versiones latinas «**De physicorum placitis**» de **TEOFRASTO** (h. **372-285 a.J.C.**), origen y fundamento de la tradición **doxográfica**), fragmento que ha sido publicado por **DIELS** en «**Die Fragmente der Vorsokratiker**», I, 32A, 15 y traducido al francés en «**Les Présocratiques**» (**PHILOLAOS**, A XV, p. 497) y al castellano por **GARCÍA BACCA**, «**Textos clásicos**» , **1961**, p. 41, se expresa en estos términos:

«**PITÁGORAS dice que que por ser cinco las figuras sólidas, que se llaman también figuras matemáticas, la tierra se hizo del cubo, el fuego de la pirámide (tetraedro), del octaedro el aire, del icosaedro el agua y por fin del dodecaedro la esfera del Todo**» (**AECIO**, «**Placita**», II, 6.5) .

La traducción francesa de este texto de **AETIUS** en «**Les Présocratiques**» —versión francesa completa reciente (**1988**) de «**Die Fragmente der Vorsokratiker**» (**1903**), la recopilación clásica de textos presocráticos del gran filólogo alemán **Hermann DIELS** (**1848-1922**)— atribuye al mismo un sentido ligeramente diferente del que le dió **GARCÍA BACCA** en la traducción castellana arriba mencionada, a saber, el que se expresa del modo siguiente:

«Pour **PYTHAGORE**, il existe **cinq figures de volumes**, qu'il appelle encore **mathématiques**: le **cube** qui, selon lui, a produit la **terre**; la **pyramide** qui a produit le **feu**; l'**octaèdre** qui a produit l'**air**; l'**icosaèdre** qui a produit l'**eau**, et le **dodecaèdre** qui a produit la **sphère de l'univers**» (L.C., p. 497).

Por otra parte, el **PSEUDO-JÁMBLICO** (nombre con el que se designa al desconocido autor de los «**Theologumena arithmetices**») atribuye a los **pitagóricos**, en general, y cuando menos a **FILOLAO** (h. **470**-h. **410 a.J.C.**) no sólo el hallazgo de los **cinco poliedros regulares**, sino incluso su asociación a los **cinco elementos cósmicos** (expuesta por **PLATON** en el «**Timeo**»), según nos muestra un fragmento recogido por **DIELS** y traducido al francés en «**Les Présocratiques**» en un texto cuya primera parte es la siguiente:

«**SPEUSIPPE**, le fils de la soeur de **PLATON**, Potona, et qui fut avant **XÉNOCRATE** chef de l'**Académie**, commença lui aussi par étudier avec un très grand soin l'enseignement des **pythagoriciens**, et tout particulièrement les ouvrages de **PHILOLAOS**. Il composa d'ailleurs un joli petit livre qu'il intitula «**Des nombres phythagoriciens**». La première partie de l'ouvrage est consacrée à un inventaire, fort soigneux, des nombres recensés para **PHILOLAOS**: linéaires, polygonaux et solides. Il est fait mention également des **cinq figures qu'on attribue aux éléments cosmiques et de leurs propriétés propres aussi bien que corrélatives...**» (**DIELS**, **Vorsokratiker**, 32A, 13; **Présocratiques**, p. 493).

A pesar de los testimonios mencionados y de otros en la misma línea o en una línea paralela (como los del filósofo estoico **POSIDONIO** de Apamea (h. **135**-h. **50 a.J.C.**), **HERMIAS**, **ALEJANDRO POLIHISTOR**, etc.—, dirigidos a afirmar el **origen pitagórico**, en el primer caso, de la **construcción de los cinco poliedros regulares** y, en el segundo, de la doctrina de los inicialmente **cuatro**, luego **cinco elementos primordiales: fuego, tierra, aire, agua** y, por último, **éter**, reduciendo a mera **inspiración pitagórica** la(s) respectiva(s) teoría(s) de **PLATÓN** en el «**Timeo**», desde hace más de un siglo varios **historiadores** de la **geometría** y de la **filosofía griegas** han venido sometiendo a un riguroso e implacable análisis estos testimonios, criticándolos a la vez con argumento filosóficos y matemáticos y contrastándolos con otros, como el de **SUIDAS** (siglo X) que aseguran la total independencia y originalidad de **PLATÓN** y de la **Escuela de Atenas** —y, muy especialmente de **TEETETO** de Atenas (h. **415/413-369 a.J.C.**), discípulo a la vez de **PLATÓN** y del **pitagórico TEODORO** de Cirene (h. **470/460-390 a.J.C.**)— en los aspectos esenciales y más importantes de estas creaciones.

En este meticuloso e implacable análisis, la obra inicialmente más importante y exhaustiva, ya clásica y referencia obligada en todo estudio posterior sobre la historia de los **cinco poliedros regulares** es el libro de la investigadora alemana **Eva SACHS**: «**Die fünf platonischen Körper: Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer**» publicada en Berlín en **1917**.

Anteriormente, tres años antes, **Eva SACHS** había publicado una importante tesis: «**De Theaeteto mathematico**» (Berlín, **1914**) en la cual había establecido definitivamente, según ha venido siendo universalmente reconocido (Véase, por ejemplo, **Kurt von FRITZ**: «**The Discovery of Incommensurability...**», **1945**, p. 243, n. 4: «This was proved by **Eva SACHS** in her dissertation... Her results in this respect seem absolutely certain and have been universally accepted»), el carácter y la cronología precisa de los conocimientos y relaciones recíprocas de **PLATÓN** y **TEETETO** sobre los **inconmensurables**, cuestión previa y estrechamente vinculada a la de la **construcción** de los **poliedros regulares** y, muy especialmente, del **dodecaedro**.

Después de **Eva SACHS**, fueron sobre todo los trabajos de su compatriota **Kurt von FRITZ** —y muy singularmente los de **1934**, **1945** y **1969** (Véase **infra**, así como las **Referencias bibliográficas**, al final de este trabajo)— los que trataron de un modo detallado y sistemático de las cuestiones que aquí nos ocupan.

En las investigaciones históricas y filosóficas y en los análisis matemáticos que éstos y otros historiadores de la geometría y de la filosofía griegas (Véase **infra** y en las **Referencias bibliográficas G. JUNGE, 1907; Moritz CANTOR, 1907; Heinrich VOGT, 1913; Johann-Ludwig HEIBERG, 1913 y 1925; Erich FRANK, 1923 y Hermann WEYL, 1952**) han venido realizando sobre el asunto que nos ocupa se han venido imponiendo, generalmente, como insoslayables dos consideraciones distintas pero, hasta cierto punto entre sí relacionadas, sino interdependientes, a saber:

1. la necesidad de distinguir, en lo relativo al «**descubrimiento**» de los **cinco poliedros regulares**, en general, una **fase inicial** de mero **conocimiento empírico** de los mismos, suficiente para permitir una **descripción** sucinta y elemental de cada uno de ellos y una **fase ulterior** en la que se logra: **a)** una **construcción matemática rigurosa** de los **cinco «cuerpos platónicos»** y su **inscripción en la esfera**; **b)** la **demostración de la imposibilidad de que existan otros poliedros regulares**, distintos de los **cinco definidos**; **c)** las **relaciones geométricas** recíprocas entre **aristas**, **caras** y **volúmenes** de los **cinco poliedros**.

Como se sabe, esta fase queda concluída, de un modo que durante siglos se ha considerado perfecto y satisfactorio, respectivamente: **a)** en el **libro XIII, 13-17**; **b)** en el **libro XIII, 18** y **c)** en los **libros XIV** y **XV** de los «**Elementos**» (h. **295**? **a.J.C.**) de **EUCLIDES** de Alejandría (fl. h. **322-285 a.J.C.**; véase **Michel SERRES** (ed.), «**Éléments d'Histoire des Sciences**», **1989**, p. 540).

2. la necesidad de admitir, en el proceso de **concepción**, **descripción** y, sobre todo, **construcción** de los **cinco poliedros regulares** muy distintos **grados de dificultad** en lo relativo a **cada uno de esos cuerpos** —que históricametne pueden suponer **distintas fases en el descubrimiento de los mismos**. En el **primer grado de dificultad** y **fase histórica** se encontrarían —entre otros según **Moritz CANTOR** en sus «**Vorlesungen uber Geschichte der Mathematik**», **1907**— el **tetraedro**, el **octaedro** y el **cubo**, en el segundo el **icosaedro** y, por último, en el tercero, el **dodecaedro**, cuya construcción supone la construcción previa del **pentágono régular**, que supone, a su vez, un perfecto conocimiento, manejo y dominio de la **relación irracional** conocida y definida por **EUCLIDES** como **media** y **extrema razón** y después como **sección aurea** o **número de oro**.

Comienza, a este respecto, **CANTOR** por reconocer alguna forma de conocimiento de los **cinco poliedros regulares** —incluído el **dodecaedro**— por parte de los **pitagóricos** (sin especificar a qué generación o generaciones pitagóricas debe atribuirse, en el caso de los últimos —**icosaedro** y **dodecaedro**— ese conocimiento) y remitiéndose, para los **tres primeros** (**cubo**, **tetraedro** y **octaedro**) a un **origen último egipcio**, en los siguientes términos:

«Körper wie der **Würfel**, das **Tetraeder**, welches nicht anderes als eine **Pyramide** mit dreieckiger Grundflächen, das **Oktaeder**, welches eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche ist, noch weit über das Zeitalter des **PYTHAGORAS** zurück sich als den **Ägyptern** bekannt vermuten lassen... Auch das **Ikosaeder** und nicht minder das **Dodekaeder** muss vohl oder übel den **Pythagoräern bekannt gewesen sein**» (L.c., pp. 174-175).

Y funda esta afirmación, entre otros testimonios, en el **fragmento 21** de **FILOLAO** de Crotona (**pitagórico** de la generación inmediatamente anterior a **PLATÓN**, es decir entre el **470** y h. el **400 a.J.C.**), publicado por **August BOECKH** en su «**Corpus inscriptionum Graecarum**», p. 160 y por **A.-E. CHAIGNET** en «**Pythagore et la philosophie pythagoricienne, contenant les fragments de Philolaüs et d'Archytas**», Paris, 1874, p. 248:

«Sonst könnte nicht **PHILOLAUS** schon von den **fünf Körpern in der Kugel** reden, sonst würde nicht das alte Mathematikerverzeichnis nebst anderen übereinstimmende Berichten so deutlich sämtiliche **kosmische oder regelmässige Körper als pythagorisch bezeichnen**» (L.c., p. 175).

A continuación, **CANTOR** señala como muy probable, en el proceso de «**descubrimiento**» de los **cinco poliedros regulares**, el que hemos anticipado en la consideración 2. (V. **supra**), en los siguientes términos:

«Möglicherweise haben wir den Verlauf von Entdeckung jener Körper so zu denken, dass man zuerst nur von Würfel, Tetraeder, Oktaeder wusste, dass dann das Ikosaeder, zuletzt erst, wenn auch jedenfalls noch vor Timäus, das Dodekaeder hinzutrat» (Ibid.).

Añade CANTOR que con esta hipótesis queda resuelta la dificultad planteada por el hecho de que inicialmente se asociaron sólo cuatro elementos (respectivamente tierra, fuego, aire y agua) a los cuatro poliedros primeramente descubiertos (y recordemos que así ocurre incluso todavía en el «Timeo» de PLATÓN) y sólo más tarde se buscó una significación cósmica para el quinto, el dodecaedro sea ésta la del éter (en el texto antes citado de AECIO y otros) o el de la «cáscara de la esfera» en el famoso fragmento 12 de FILOLAO (DIELS, Vorsokratiker, I, 328, 12):

«Les corps de la sphère sont cinq: le feu, l'eau, la terre et l'air, qui sont contenus dans la sphère, auxquels s'ajoute un cinquième, la coque de la sphère» («Les Présocratiques», p. 506).

Por su parte, PLATÓN en el «Timeo», después de haber asociado los cuatro primeros poliedros regulares tetraedro, octaedro, icosaedro y cubo respectivamente al fuego, al aire, al agua y a la tierra, añade, según el texto francés de Albert RIVUAUD, 1949:

«Il restait encore une seule et dernière combinaison; le Dieu s'en est servi pour le Tout, quand il en a dessiné l'arrangement final» (PLATON, «Oeuvres complètes», Tome X, «Timée», 55c, p. 175).

Por su parte, GARCÍA BACCA nos ofrece en sus «Textos clásicos», 1961, la siguiente traducción castellana:

«Y quedando para componer nada más una sola figura, de ella se sirvió el dios para dar su figura al Todo» (L.c., p. 42).

GARCÍA BACCA agrega la siguiente nota:

«La última figura es el dodecaedro, que exige, como nuevo elemento, el pentágono regular. Tiene doce caras, cada una un pentágono regular, y veinte ángulos sólidos, formado cada uno por tres pentágonos.

Si se inscriben en una y la misma esfera los cuerpos regulares descritos, el dodecaedro es el que posee o llena más volumen de tal esfera, acercándose, por tanto, más a ella. Ahora bien: los cuerpos regulares constituyen los elementos sensibles básicos —tierra, agua, aire, fuego—, que por hallarse integrados por un material básico en esencial e irremediable terremoto o movimiento sísmico (σεισμός, Cf. Timeo 53a) no pueden llegar a la perfección propia de las ideas geométricas puras de tales figuras definidas eidéticamente. Y de consiguiente: el mismo mundo sensible no podrá, en cuanto todo real, poseer la forma perfecta de la esfera, sino a lo más de dodecaedro que es la que más se acerca a ella entre los cinco cuerpos regulares» (L.c., p. 102, n. 34).

En abierto contraste con la hipótesis, arriba expuesta —y sostenida como probable por CANTOR y otros investigadores— de un proceso histórico de «descubrimiento» sucesivo de los cinco poliedros regulares en distitnas fases, de las cuales la correspondiente al dodecaedro, cuya construcción depende del manejo de la **media y extrema razón o sección aurea**, de carácter **irracional**, sería la última, nos encontramos con el testimonio del **neoplatónico JÁMBLICO** de Calcis, en Siria (**250-325**), discípulo de **PORFIRIO** (h. **232-305**), en su obra «**De vita pythagorica liber**» (editada por **Deubner** en **1937**), según la cual **HIPPASOS** de Metaponto, de la **generación pitagórica** anterior a **TEODORO** de Cirene (que nació h. **470/460 a.J.C.** y, por lo tanto, él, **HIPPASOS**, muy próximo ya el círculo inmediato del propio **PITÁGORAS** (h. **585**-h. **500 a.J.C.**) fué el primero que conoció y divulgó tanto los **números inconmensurables** (o **irracionales**) como el **dodecaedro** y su **inscripción en la esfera**.

Dice así, en efecto, **JÁMBLICO**, en un fragmento publicado por **DIELS, Vorsokratiker, 1903**, I, 8.4. (p. 108), traducido al francés en «**Les Présocratiques**», **1988:**

«La tradition veut qu'**HIPPASE** ait été du nombre des **pythagoriciens**, et ce serait pour avoir le premier **révélé et construit l'inscription des douze pentagones** (lo cual equivale a la **inscripción del dodecaedro) dans la sphère** qu'il se noya dans la mer, se punissant ainsi du sacrilège d'avoir voulu s'attribuer la gloire de cette invention, dont tout le mérite revenait au '**grand homme**' (ce le titre qu'il donnent à **PYTHAGORE**, qu'il n'appellent pas par son nom» (L.c., p. 76, extraido de «**De vita pyth.**, 88).

En otro fragmento (**JAMBLICHUS**, «**De vita pythagorica liber**», **1937**, 246), publicado también por **DIELS, Vorsokratiker, 1903**, I, l.c.) y traducido el francés en «**Les Présocratiques**», pp. 76-77, **JÁMBLICO** agrega, esta vez sin citar explícitamente a **HIPPASOS**, pero refiriéndose, según todos los críticos, a él, por el hecho de repetir la historia anterior:

«...Le **premier** à avoir révélé **la nature de la commensurabilité et de l'incommensurabilité** à des gens indignes de connaître ces secrets fut, selon la tradition, implitoyablement rejeté par la secte: non seulement il lui fut **interdit** de vivre dans la **communauté pythagoricienne**, mais ses compagnons de la veille allèrent jusqu'à lui eriger un tombeau, tout comme s'il avait déjà quitté le monde des vivants... C'est dans la mer que, pour expier son sacrilège, **périt celui qui révéla** que le volume qui comporte **vingt arètes** c'est-à dire le **dodecaèdre**, l'une des **cinq figures** que l'on appelle **solides**, était **inscriptible dans la sphère**. Quelques'uns disent que c'est celui qui **publia la thèorie complète des grandeurs irrationnelles et incommensurables** qui subit ce châtiment».

Ahora bien, las anteriores alegaciones de **JÁMBLICO** según las cuales el «**descubrimiento**» de la **inconmensurabilidad** y de la **construcción del dodecaedro** y su **inscripción en la esfera** se remontarían a **HIPPASOS**, es decir, casi a la época de **PITÁGORAS**, han venido dejando cada vez más escépticos a muchos **historiadores de la Matemática**.

Así, por ejemplo, **Kurt von FRITZ**, en su importante artículo «**The Discovery of Incommensurability by Hippasos of Metapontum**», publicado en **1945** en los «**Annals of Mathematics**», dice:

«The **discovery of incommensurability** is one of the most amazing and far-reaching accomplishments of Greek mathematics. It is all the more amazing because, according to **ancient tradition, the discovery was made at a time when Greek mathematical science was still in its infancy** and apparently concerned with the most elementary... problems, while at the same time, as recent discoveries have shown, **the Egyptians and Babylonians had already elaborated very highly developed and complicated methods for the solution of mathematical problems of a higher order an yet, as far as we can see, never even suspected the existence of the problem**. No wonder, therefore, that **modern historians of mathematics** have been inclined to **disbelieve** the **ancient tradition** which dates the **discovery** in the **middle of the 5th century B.C.** and that there has been a **strong tendency to date the event much later**, even as late as **the first quarter of the 4th century**» (L.c., p. 242).

En el mismo trabajo, **Kurt von FRITZ** se ocupa también de la atribución a **HIPPASOS**, por el mismo **JÁMBLICO**, de la **construcción del dodecaedro regular** y su **inscripción en la esfera** y critica esta atribución en los siguientes términos:

«According to **IAMBLICHUS**, **HIPPASUS** was also the **first** to **draw or construct** the **'sphere consisting of 12 regular pentagons'**, or, as he says in another passage, to **inscribe the regular dodecahedron in a sphere...** The tradition concerning **HIPPASUS'** interest in the **dodecahedron** or **'the sphere out of 12 regular pentagons'** has to be considered. There can be no doubt that **HIPPASUS was not the author of the mathematical construction of the dodecahedron** as **IAMBLICHUS** claims in one place. Quite apart from other considerations, **this is proved by the fact that the better tradition implies that it was an achievement of THEAETETUS who belonged to the second generation after HIPPASUS**» (L.c., pp. 246 y 256).

Esa «**mejor tradición**» que, según el texto arriba citado de **Kurt von FRITZ**, atribuye a **TEETETO**, en lugar de a **HIPPASOS**, anterior a aquél en dos generaciones, la **construcción matemática del dodecaedro** es la tradición que arranca, al parecer, de **EUDEMO** de Rodas (fl. h. **320 a.J.C.**), discípulo inmediato de **ARISTÓTELES (384-322 a.J.C.)** que fué autor de una «**Historia geométrica**», hoy perdida, pero de la que muchos autores posteriores se abrevaron y nutrieron para dar noticias sobre la obra de los matemáticos anteriores a **EUDEMO** y de los que éste se ocupó en su **Historia**.

Uno de los que recogieron esa tradición, en lo que respecta a la aportación de **TEETETO** a la teoría de los **cinco poliedros regulares** fué el desconcoido autor de un **léxico** del **siglo X** (el «**Suda**») al que se ha venido llamando **SUIDAS**, de cuya obra se hizo una **edición greco-latina** en dos volúmenes en **Ginebra** en **1619**.

En esta obra aparecen dos entradas diferentes de **TEETETO**, que en latín son las siguientes:

1. «**THEAETETUS**, Atheniensis astrologus philosophus, discipulus **SOCRATIS**. Docuit Heracleae. **Primum scripst de quinque solidis corporibus** quae sic vocantur. Vixit autem post bellum Peloponnesiacum» (L.c., I, p. 1295, 1-5);

2. «THEAETETUS, Heracleae Ponticae philosophus. Auditor PLATONIS» (L.c., I, p. 1295, 6-7).

Ahora, según asegura Kurt von FRITZ en su artículo «Theaitetos» (1934) en la «Paulys Real-Enziclopädie», la distinción de SUIDAS entre dos hipotéticos y distintos TEETETOS es un error:

«Die Unterscheidung des SUIDAS... zwischen einem Mathematiker und Sokratesschüler T. aus Athen und einem Platonschüler aus Heraklea beruht auf einem Irrtum» (L.c., 1352).

En cualquier caso, los historiadores de la geometría griega, desde TANNERY hasta hoy, se inclinan en su inmensa mayoría por la atribución a TEETETO, tanto del desarrollo, siguiendo a su maestro TEODORO de Cirene, de una teoría de los números inconmensurables o irracionales como de la construcción matemática de los cinco poliedros regulares.

Esta cuasi-unánime atribución a TEETETO de la mencionada construcción se encuentra, sin embargo, como todos han reconocido, en abierta contradicción con la afirmación del filósofo neoplatónico PROCLO (PROCLUS) de Constantinopla (412-485) en sus «PROCLI DIADOCHI in primum EUCLIDIS Elementorum librum commentarii» (ed. FRIEDLEIN, Leipzig: Teubner, 1873, reimpresión en 1967), en un fragmento (65, 15-21) que, en la traducción castellana de GARCÍA BACCA, «Textos básicos» reza así:

«Más, después de éstos, PITÁGORAS dió al interés por los conocimientos geométricos forma de estudio liberal, considerando los principios de la geometría desde un punto de vista superior, investigando los teoremas inmaterial y noéticamente. Encontró también el tratamiento por proporciones y la construcción de figuras cósmicas» (L.c., p. 10).

GARCÍA BACCA comenta la última parte del texto en los sigueintes términos:

«Por figuras cósmicas parece deber entenderse las figuras de los cuerpos geométricos regulares (tetraedro, octaedro, ...) que servirían aún en tiempos de PLATÓN para explicar la estructura de los cuerpos elementales» (L.c., p. 67).

La traducción alemana del tan famoso y discutido texto de PROCLO por Heinrich VOGT en su artículo «Die Geometrie des Pythagoras» («Bibliotheca mathematica», 3F, Leipzig: Teubner, 1913) coincide con la anterior interpretación:

«Nach diesen verwandelte PYTHAGORAS die Untersuchung geometrischer Fragen in eine freie (d.h. von praktischen Zielen losgelöste) Wissenschaft, indem er deduktiv die ersten Gründe erforschte und die Lehrsätze immaterial und intellektuell untersuchte. Derselbe hat bekanntlich auch die Handlung des Irrationalem (andere Lesart: der Proportionen) und die Zusammensetzung (Konstruktion?) der kosmischen Figuren entdeckt» (L.c., p. 31).

La posible atribución al mismo PITÁGORAS de un manejo («Handlung») de los irracionales, que podría deducirse del mencionado fragmento 65, 15-21 de sus Comentarios al libro I de los «Elementos» de EUCLIDES, al menos según la anterior traducción e interpretación de Heinrich VOGT, había sido ya criticada por G. JUNGE en su artículo

«**Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?**» (Halle: Waisenhausbuchhandlung, **1907**) con el argumento siguiente:

A través de la hipótesis de que **PITÁGORAS** había establecido ya la teoría de los **irracionales**, la historia del desarrollo de esa teoría queda dislocada o desarticulada de un modo antinatural. Sin embargo, el panorama resulta más claro y sencillo en cuanto se admite que el **irracional** se descubre por primera vez en tiempos de **TEODORO de Cirene** (maestro de **TEETETO**) y, en todo caso, después del **450 a.J.C.** (L.c., pp. 9, 10, 12, 30 y 31; resumen de **Heinrich VOGT** en «**Die Geometrie des Pythagoras**», **1913**, p. 36).

Por su parte, **Heinrich VOGT**, en el trabajo arriba mencionado, argumenta de este modo:

«El descubrimiento del **irracional** y la **construcción de los cuerpos regulares** por **PITÁGORAS** son **incompatibles** con todo lo que sabemos a través de otras fuentes sobre el desarrollo de la **geometría griega**» (**VOGT**, Ibid.).

Y añade:

«La **construcción de los cinco cuerpos regulares** por **PITÁGORAS** tropieza con serias dudas. **HANKET** y **CANTOR** intentan, almenos, remitir la **construcción del dodecaedro regular** de **PITÁGORAS** a sus discípulos, primeramente por la dificultad que supone creer en la realización de la **sección aurea** por parte del propio **PITÁGORAS** o sus contemporáneos, en segundo lugar porque una tradición atribuye a **HIPPASOS** la **construcción del dodecaedro regular** y por último por la asociación de los **cuerpos regulares** a los **elementos**, a la que aquéllos debe su nombre de '**cuerpos cósmicos**'» (L.c., p. 37).

Ahora bien —sigue **VOGT**— «los **cuatro elementos tierra, agua, aire, fuego** fueron por primera vez concebidos, según el preciso testimonio de **ARISTÓTELES** «**Metafísica**», A, 985a, 33-985 b, 3), por **EMPÉDOCLES** (nacido hacia el **490 a.J.C.**) como principios materiales del mundo; por lo tanto, no podían los **cuerpos regulares** ser áun conocidos y descritos por **PITÁGORAS**, al menos como '**cósmicos**'. Sólo después de **EMPÉDOCLES** podía tener lugar tal asociación (entre los **poliedros** y los **elementos cósmicos**) y aún sólo cuando **coincidiera** el **número de los elementos** con el **número de los poliedros regulares**, es decir, siendo **cuatro** los unos y los otros. Por consiguiente, en la época en que **EMPÉDOCLES** apareció con la **teoría de los elementos**, el **dodecaedro no había sido aún descubierto**» (Ibid.).

Como conclusión respecto al sentido que tradicionalemtne se ha dado a la antes mencionada afirmación de **PROCLO**, deja bien establecida **VOGT** la siguiente tesis:

«*τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν* hat man bisher stets übersetzt '**er erfand (fand) die Konstruktion der kosmischen (regelmässigen) Körper**' und gemäss der **geometrisch-technischen Bedeutung der Wortes 'Konstruktion'** darin die Aussage gesehen: **PROCLUS** schreibt den **PYTHAGORAS** die **exakte Konstruktion** der **möglichen regelmässigen Körper** zu, etwa so, wie das **13. Buch** der **Elemente** sie lehrt; als Vorstufe ist darin selbstverständlich die **Konstruktion des regelmässigen Fünfecks** und die **stetige Teilung** enthalten. Ich habe bewiesen: **es ist höchst unwarscheinlich, dass PROKLUS diese Leistungen dem PYTHAGORAS zugetraut hat; es ist ganz unmöglich, dass PYTHAGORAS sie ausgeführt hat»** (**VOGT, l.c., pp. 40-41**).

Para que la cuestión quede bien clara, pondremos aquí en castellano la precedente conclusión de **VOGT:**

«τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν (las seis últimas palabras del discutido fragmento 65, 15-21 de los **«Comentarios»** de **PROCLO** al **libro I de los «Elementos» de EUCLIDES**) se ha traducido hasta hoy siempre así: ’**él (PITÁGORAS) inventó (encontró) la construcción de los cuerpos cósmicos (regulares)**’ y, de acuerdo con el significado geométrico-técnico de la palabra **’construcción’**, se ha visto en ello la siguiente proposición: **PROCLO** atribuye a **PITÁGORAS** la **construcción exacta de los cuerpos regulares** de un modo análogo al que enseña el **libro 13 de los «Elementos» (de EUCLIDES)**. Como fase previa, se halla en ello contenida la **construcción del pentágono regular** y de la **sección aurea**. Ahora bien, yo he demostrado lo siguiente: **es altamente improbable que PROCLO haya creído a PITÁGORAS capaz de tales realizaciones; y es absolutamente imposible que PITÁGORAS las haya ejecutado»**.

Una vez expuestos o mencioandos diversos testimonios y argumentos en favor (**PROCLO**) o en contra (**JÁMBLICO, SUIDAS, Paul TANNERY, Hermann HANKEL, Moritz CANTOR, G. JUNGE, Heinrich VOGT, Kurt von FRITZ**) al **descubrimiento del irracional y/o a la construcción de los poliedros regulares** por **PITÁGORAS** conviene plantear ahora **por separado** el problema de **situar históricamente** el **primero (descubrimiento del irracional)** y el **segundo (construcción de los poliedros regulares)** de dichos acontecimientos.

Comencemos por el tema del **descubrimiento del irracional.**

De acuerdo con las investigaciones de **Eva SACHS**, expuestas en su famosa tesis **«De Theaeteto mathematico»**, ya mencionada y de **Kurt von FRITZ** (que enlazan con las de **SACHS**), cuyos resultados se publicaron en el artículo **«The Discovery of Incommensurability...»**, también citado, «la más antigua tradición precisa y definida acerca de una fase en el desarrollo de la **teoría de la inconmensurabilidad** se encuentra en el diálogo de **PLATÓN «Teeteto»**, p. 147 B. Este diálogo fué escrito en el año **368/367 a.J.C.**, poco después de la muerte del matemático **TEETETO** en una batalla en la que había sido gravemente herido. La fecha ficticia del diálogo es la del año **399 a.J.C.**, es decir, la fecha de la **muerte de SÓCRATES**. En la primera parte del diálogo, se representa al viejo matemático **TEODORO** de Cirene demostrando a un grupo de jóvenes, entre los cuales se encuentra **TEETETO**, representado como un adolescente de **17 años**, la **irracionalidad** de las **raíces cuadradas de 3, 5, 6, etc.** hasta **17**. Aunque el diálogo es, naturalmente, ficticio, no parece posible suponer que **PLATÓN**, en un diálogo dedicado a la memoria de un amigo que acaba de morir prematuramente y que ha tenido un papel importante en el desarrollo de la **teoría de la inconmensurabilidad** y de la **irracionalidad** atribuyese a otra persona lo que en realidad era obra de su amigo. La conclusión inevitable es, pues, que lo que **TEODORO** demuestra en la introducción al diálogo **era realmente conocido** cuando **TEETETO** era un muchacho de 17 años» (**Kurt von FRITZ**, l.c., p. 243).

Los dos pasajes más importantes y decisivos del diálogo platónico «**Teeteto**» para la **historia universal** de la **inconmensurabilidad** y de lo **números irracionales** son las dos intervenciones siguientes (**DIELS, Vorsokratiker**, I, 31 (**THEODOROS**), 147 D y 148 A) del jovencísimo **TEETETO** recién presentado por **TEODORO** a **SÓCRATES**, que nos vemos obligados a ofrecer en la versión francesa de «**Les Présocratiques**» (libro que es una traducción completa de los **Vorsokratiker** de **DIELS**), editado por **J.P. DUMONT, D. DELATTRE** y **J.L. POIRIER**, Paris: Gallimard, 1988, por ser completamente **erróneas** e **inviables**, por decirlo así, por las razones que indicamos más abajo, las traducciones españolas disponibles y de mayor circulación, como la de **José Antonio MÍGUEZ** en las «**Obras Completas**» de **PLATÓN** publicadas por **Aguilar** (**octava reimpresión: 1990**):

1. «**THÉÉTÈTE: Théodore**, ici présent, nous avait représenté une certaine propriété relative aux **racines carrées**, en nous montrant que la **racine** d'un carré de trois pieds de côté et celle d'un carré de cinq pieds ne sont pas **commensurables** avec la **racine** d'un carré d'un pied de côté; et en procédant cas para cas, il allait jusqu'à la **racine** du carré de dix-sept pieds de côté» (**DIELS**, l.c., 147 D; «**Les Présocratiques**», p. 487, 5-11);

2. «**THÉTÉTE**: Toutes les lignes, dont le carré est un nombre plan équilatère, nous les avons définies comme 'grandeurs', tandis que celles dont le carré est un nombre produit de deux nombres inégaux, nous les avons définies comme '**racines**', parce qu'elles ne sont pas **commensurables** avec les autres para la grandeur, mais seulement par les surfaces dont elles sont les **racines**. Nous avons défini de même les volumes» (**DIELS**, l.c., 148 A; «**Les Présocratiques**», p. 487, 12-18).

(Explicaremos ahora, como hemos anunciado, por qué razón los pasajes arriba presentados en versión francesa resultarían absolutamente falseados, desorientadores, incomprensibles y perturbadores para el lector si se los hubiéramos transmitido a través de las traducciones españolas disponibles y más difundidas en el mundo de lengua castellana, como, por ejemplo, la «**versión**» (?) del «**Teeteto**» que da **José Antonio MÍGUEZ** en las «**Obras Completas**» de **PLATÓN** publicadas por **Aguilar** (**octava reimpresión: 1990**).

En efecto, en los dos pasajes anteriores del «**Teeteto**», básicos, como hemos dicho, en la **historia universal de la inconmensurabilidad** y de **los números irracionales**, para explicar el origen del hallazgo de la **inconmensurabilidad** de las **raíces cuadradas** de algunos números enteros, como **3, 5, 6, etc. hasta 17, no se utilizan ni una sola vez los términos** '**conmensurable**', '**inconmensurable**' **ni** '**raíz**'. De este modo, allí donde, en la versión francesa de los citados pasajes, aparece el término (por nosotros subrayado) '**racines**' ('**raíces**'), el traductor **José Antonio MÍGUEZ** escribe tranquilamente '**potencias**', que designa precisamente el concepto o relación **inverso** del designado por '**raíces**'; y allí donde en la versión francesa aparece el término '**commensurables**' ('**conmensurables**'), fundamental para la comprensión de los dos pasajes y de todo el problema que en ellos se plantea, el traductor **José Antonio MÍGUEZ** escribe tranquilamente, en el primer pasaje, '**simétricas**' y, en el segundo, '**proporcionadas**' (**SIC**; L.c., pp. 895-896)).

Volviendo ahora al tema del descubrimiento de la **irracionalidad** de las **raíces cuadradas** de ciertos **números enteros**, observaremos que en el primero de los pasajes del **«Teeteto»** (**DIELS, Vorsokratiker**, 147 D) arriba reproducidos en la versión francesa de **«Les Présocratiques»** (p. 487, 5-11), el joven discípulo de **TEODORO** de Cirene atribuye a éste, presente en el diálogo, la **demostración** de la **irracionalidad** de las **raíces cuadradas** de los **números** 3, 5, etc., hasta 17, pero nada dice de la **raíz cuadrada del número 2** que, lógicamente, debería preceder à las mencionadas.

Esta omisión parece implicar, con toda claridad, que la **irracionalidad** de la **raíz cuadrada de 2** había sido **descubierta** y **demostrada** con anterioridad a **TEODORO** por alguien cuyo nombre y personalidad ignoramos.

Esta es, desde luego, la interpretación de **Kurt von FRITZ** (**«The Discovery of Incommensurability...», 1945**) en un texto en el que el historiador alemán de la matemática griega llega incluso a situar el descubrimiento de la **irracionalidad** de la **raíz cuadrada de 2** mucho antes del **año 399** en el que **PLATÓN** sitúa su diálogo:

«**PLATO** does not say that what **THEODORUS** demonstrated to **THEAETETUS** and the other youngsters in **399** was at that time an **entirely new discovery**, though the fact that he gave a proof for each one of the different cases separately shows that the **theory had not yet reached a more advanced stage**. But even if we assume that **THEODORUS'** demonstrations had been worked out for the first time not so very long before, **PLATO**'s dialogue would still indicate that the **the irrationality of the square root of 2**, or the **incommensurability of the side and diameter of a square had been discovered by someone else**. For it is difficult to see why he should have **THEODORUS** start whit the square root of 3, unless he wished to give an historical hint that he was the point where **THEODORUS'** own contribution to mathematical theory began. This in itself would be quite sufficient to show that **the discovery of incommensurability must have been made in the earlier part of the last quarter of the 5th century at very latest**, and since mathematical knowledge at that time traveled very slowly, may very well have been **earlier**» (L.c., pp. 243-244).

Ignoramos por completo cuáles hayan podido ser los procedimientos empleados por el **pitagórico TEODORO** de Cirene para la **demostración** de la **irracionalidad** de las **raíces cuadradas** de los **números** 3, 5, etc. hasta 17 e igualmente, como es de suponer, los del desconocido descubridor de la **irracionalidad** de la **raíz cuadrada** de 2 o, lo que es lo mismo, de la **inconmensurabilidad del lado y la diagonal del cuadrado**. Lo único que podemos afirmar es que esos procedimientos no debían parecerse en nada (por ser bastante más elementales y primitivos) a los utilizados por **EUCLIDES** en el **apéndice 27** del **libro X** de los **«Elementos»**, apéndice que, en la versión latina de **HEIBERG** (Véase **«Euclidis Elementa»**, Vol. III (librum X continents), Leipzig: Teubner, **1886**, pp. 408-411), se abre con estas palabras: «**Propositum sit nobis demostrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabiles esse**» (L.c., p. 409, 1-3).

La demostración de ese teorema es uno de los más ilustres ejemplos de la **demostración por reducción al absurdo** que nos ofrece el pensamiento griego, ya que la citada **inconmensurabilidad** se realiza probando que en la **hipótesis** de que el **lado** y la **diagonal** del **cuadrado** fueran **conmensurables**, de ella se seguiría deductivamente que una **longitud H** debería ser a la vez **par** e **impar**, y al ser ésto imposible, la **hipótesis** de la **conmensurabilidad** del **lado** y la **diagonal** del **cuadrado** ha de ser **falsa**, luego el **lado** y la **diagonal** del **cuadrado** son **inconmensurables**, como se pretendía **demostrar**.

Esa **demostración**, recogida por **EUCLIDES** (fl. hacia **322-285 a.J.C.**) en el citado **apéndice** del **libro X** de sus «**Elementos**», debía ser conocida en épocas bastante anteriores a la obra del matemático de Alejandría, puesto que ya **ARISTÓTELES** (**384-322 a.J.C.**) la menciona —sin detallarla— en sus «**Primeros Analíticos**» (Véase, en castellano, por ejemplo, **ARISTÓTELES**, «**Tratados de Lógica**» **(el Organon)**, ed. **Francisco LARROYO**, México: Porrúa, 1979, «**Primeros Analíticos**», 23, 11, pp. 97-98), en un texto famoso («**Primeros Analíticos**», I, 23, 41a, 26-27) que **GARCÍA BACCA** recoge en sus «**Textos clásicos**», dándole la versión castellana siguiente:

«Todos los que intentan **demostrar por reducción al imposible, demuestrna** ciertamente que **algo es falso**; pero lo muestran tomando como **punto de partida la hipótesis**, cuando de hacer la **hipótesis contradictoria se seguiría algo imposible**; por ejemplo, que la **diagonal** es **inconmensurable**; porque, **de suponerla conmensurable**, se **seguiría que los pares son iguales a los impares.**

Y que los pares son iguales a los impares se deduce lógicamente; empero que la **diagonal es inconmensurable** lo **demuestran** por medio de una **hipótesis**, a saber: porque, **de suponer lo opuesto, se sigue una falsedad**» (L.c., p. 34).

Ahora bien, en el primer **escolio** a ese mismo **libro X** de los «**Elementos**», dedicado a la **inconmensurabilidad** y los **irracionales**, el desconocido **escoliasta** señala que el «**primer descubrimiento**» de la **irracionalidad de la raíz cuadrada de 2** —que parece haber coincidido con el **descubrimiento del irracional**, a secas— constituyó un verdadero escándalo.

El filósofo y epistemólogo francés **Jean Toussaint DESANTI** (n. en **1914**), en su conocido artículo «**La 'découverte' des nombres irrationnels**» (**in** «**Logique et connaisaance scientifique**», ed. por **Jean PIAGET**, Paris: La Pléiade, **1976**, pp. 439-464), comenta este hecho en los siguientes términos:

«La découverte avait fait scandale. Si l'on en croit le premier scolie du livre X des «**Eléments**» d'**EUCLIDE**, elle est due aux **pythagoriciens**. Après avoir rappelé le contenu de la découverte, le scoliaste anonyme commente en ces termes la légende selon laquelle le pythagoricien qui avait, le premier, divulgué l'**irrationalité** de $\sqrt{2}$ aurait péri dans un naufrage: «**Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit rester caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans**

cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants». La découverte de $\sqrt{2}$ avait donc paru livrer accès à l'univers redoutable de la démesure, à un domaine difficile à penser, irréductible aux normes habituelles du calcul et du discours bien réglé» (L.c., p. 441).

Ahora bien, en la densa y compleja historia —que dura **dos siglos y medio**— del desarrollo de la **matemática griega**, entre el **misticismo aritmético** de **PITÁGORAS** y la **construcción deductiva de la geometría** por **EUCLIDES**, un punto de inflexión importante es el representado por la contribución decisiva de la **Academia platónica**, esencialmente a través de las aportaciones de los dos grandes **matemáticos** que son discípulos directos e inmediatos de **PLATÓN: TEETETO**, con su **teoría general de los irracionales** (que siguió a las demostraciones de ejemplos singulares de casos de irracionalidad realizadas por su otro maestro, **TEODORO**) y **EUDOXO** de Cnido (**400-347 a.J.C.**) con su **teoría general de las proporciones** y la **estereometría** o **geometría del espacio** que debe considerarse como un resultado conjunto de las investigaciones de ambos.

Así ha podido destacar **Eva SACHS**, en su obra clásica, ya citada, «**Die fünf platonischen Körper**», «die Arbeiten der beiden grössten **Mathematiker aus PLATONS Kreis**: die **Proportionslehre** des **EUDOXOS**, die **Lehre von Irrationalen**, die **THEAETET** geschaffen hat, und die **Stereometrie**, das gemeinsame Werk beider» (L.c., p. 159).

Todos estos resultados llegaron, al parecer, a **EUCLIDES** con las ampliaciones y perfeccionamientos de **HERMÓTIMO** de Colofón, según señala **PROCLO**, quien, en sus «**Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii**» (ed. Friedlein, Leipzig: Teubner, **1873**, reimpr. **1967**), dedica a tan decisvio periodo de la historia de la matemática diversos fragmentos, de los que extractamos los siguientes pasajes, que ofrecemos en la versión francesa de **Maurice CAVEING** en su Introducción a **EUCLIDE d'Alexandrie**, «**Les Éléments**» traduits du texte de **HEIBERG**, Vol. I, Paris, P.U.F., **1990**:

«**PLATON** fit prendre un grand essor à la mathématique toute entière et à la Géométrie spécialement... À cette époque il y eut aussi **LÉODAMAS** de Thasos, **ARCHYTAS** de Tarente et **THÉÉTÈTE** d'Atènes, **par qui l'ensemble des théorèmes fut augmenté et progressa vers un arrangement scientifique**» (L.c., 66.15, p. 90); «Mais c'est **EUDOXE** de Cnide... devenu **familier du cercle de PLATÓN**, qui **le premier augmenta le nombre des théorèmes dits 'généraux'** aux **trois proportions, en adjoignit trois autres** et accrut les résultats touchant la '**section**'» (L.c., 67.5, p. 91); «**HERMOTIME** de Colophon **développa plus avant les résultats antérieurement procurés par EUDOXE et THÉÉTÈTE**» (L.c., 67.20, P. 91).

En este contexto, es **TEETETO**, sin lugar a dudas —en ello coinciden, entre otros, **Eva SACHS** y **Kurt von FRITZ**—, el autor de un **sistema de clasificación de los irracionales** según su **grado de irracionalidad**, gracias a un **cálculo combinatorio** de las distintas **relaciones posibles** entre **segmentos racionales** e **irracionales**:

Eva SACHS se refiere, en efecto, al **sistema de clasificación de los irracionesles** contenido en la **segunda parte** del **libro X** de los «**Elementos**» de **EUCLIDES**, al que describe como «System der ἄλογοι γραμμαι, deren verschiedene Klassen und Unterabteilungen so gefunden werden dass durch eine Art von Kombinationsrechnung die verschiedenen möglichen Beziehungen rationaler Strecken zu irrationalen ermittelt werden. Diese System Wurde von THEAETET begründet, ist nach diesem Mathematiker zu PLATONS Zeit von HERMOTIMUS weiter ausgearbeitet worden und erhielt seine endgültige Form durch EUKLID» (Eva SACHS, «Die fünf platonischen Körper», 1917, p. 177).

En su clasificación de los segmentos irracionales —cuyo conjunto, es preciso recordarlo aquí, es más restringido que el de los que conocemos hoy como irracionales, pues aquél excluye a los segmentos cuyo cuadrado es racional (en el sentido moderno)—, TEETETO distingue ante todo tres categorías importantes, la de los (irracionales) mediales, la de los (irracionales) binomiales y la de los (irracionales) apótomes.

Ahora bien, según señaló PAPPUS de Alejandría (fl. hacia fines del siglo III) —quien, además de ser él mismo gran matemático y autor de teoremas importantes, fué, siguiendo principalmente a EUDEMO de Rodas, discípulo directo y sucesor de ARISTÓTELES, uno de los principales recopiladores de resultados de sus predecesores, en su famosa «Colección matemática», en ocho tomos—, estas tres categorías de segmentos corresponden precisamente a las tres medias distintas conocidas en tiempos de TEETETO, ya que un segmento medial no es otra cosa que la media proporcional geométrica de dos segmentos inconmensurables en longitud; un segmento binomial es la media aritmética de dos de tales segmentos y, finalmente, el apótome es la media armónica de los mismos segmentos (Véase EUCLIDE, «Les Éléments», edición de Georges J. KAYAS, Paris: C.N.R.S., 1978, Vol. II, pp. XVII-XXII y 175-179).

Según el propio PAPPUS, se debe también a TEETETO el hallazgo de la relación entre las tres categorías de irracionales por él definidas y las tres medias mencionadas.

Hay una infinidad de segmentos mediales distintos.

En cuanto a las dos últimas categorías de irracionales (binomiales y apótomes), hay 12 especies de binomiales —definidas y estudiadas en el libro X de «Los Elementos» de EUCLIDES, proposiciones 36 a 41 y 48 a 53— y, análogamente, 12 especies de apótomes —definidos y estudiados en el mismo libro X, proposiciones 73 a 78 y 85 a 90—.

Partiendo de ciertos tipos de monomios, previametne definidos, las 12 especies de binomiales se definen como sumas de 2 de esos monomios y las correspondientes 12 especies de apótomes como las respectivas diferencias entre 2 de esos monomios.

Son apótomes muy importantes, entre otros, como demuestra EUCLIDES, los segmentos resultantes de la división de un segmento dado «en media y extrema razón» (sección áurea), tan importante para la construcción del pentángono regular y, por lo tanto, del dodecaedro como clave en ciertas formas orgánicas (crecimientos armónicos) y en toda la historia de la estética, desde los griegos hasta nosotros, pasando por la arquitectura medieval y la pintura renacentista.

En este contexto, la proposición 6 del libro X de «Los Elementos» de EUCLIDES —proposición que es de TEETETO— afirma que cada una de las dos partes irracionales de un segmento racional dividido según la media y extrema razón (sección áurea) es una apótome:

«Si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam divitur, utraque pars irrationalis est apotome quae vocatur» (EUCLIDES, «Elementa», ed. J.L. HIEBERG, Vol. IV, Leipzig: Teubner, 1885, XIII, 6, p. 263).

Con esta proposición 6 está relacionada la conclusión de la proposición 17 (dedicada a la construcción del dodecaedro y su inscripción en la esfera) del libro XIII, conclusión que también es de TEETETO y afirma que el lado del dodecaedro es una apótome, por ser la parte mayor de la división en media y extrema razón del lado del cubo inscrito en la misma esfera (L.c., libro XIII, proposición 17, pp. 327-329):

«Ebenso muss der Schluss von Satz 17: «Die Seite des dodekaeders ist eine Apotome, denn sie ist der grössere Abschnitt der nach den goldenen Schnitt geteilte Kante des in dieselbe Kugel einbeschriebene Würfels» von THEAETET sein, da erst den Begriff Apotome eingeführt hat (s. EUDEM in dem arabischen Kommentar zu 10. Buch des EUKLID, Woepke, Mém. prés. à l'Acad. de Paris, 1856, S. 691)» (Eva SACHS, «Die fünf platonischen Körper», 1917, p. 106).

El gran historiador aleman de la matemática y de la filosofía griegas F. SOLMSEN estableció en 1929, en su obra «Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rhetorik» una división de la historia de la matemática griega entre Pitágoras y Euclides que luego ha sido seguida por otros historiadores como Kurt von FRITZ (por ejemplo en su obra «Platon, Theaetet und die antike Mathematik», 1969).

Según esa división, hay que considerar en el desarrollo de la matemática griega tres estadios bien diferenciados, a saber:

Primer estadio, de carácter empírico-estético, el cual estaría aún vigente en tiempos del libro 6 de «La República» de PLATÓN;

Segundo estadio, de carácter empírico-epistemológico, bajo la influencia de los métodos e ideas platónicas en el «Teeteto» y aún vigente en tiempos del «Timeo» de PLATÓN;

Tercer estadio, de carácter científico, fundado en el círculo de EUDOXO de Cnido y ya configurado en tiempos de la apodíctica de ARISTÓTELES, el cual cristaliza plenamente en «Los Elementos» de EUCLIDES.

Ahora bien, tomando como base esta concepción de SOLMSEN, Kurt von FRITZ, en la obra arriba citada, observa lo siguiente:

1. El sexto libro de «La República» de PLATÓN no precede en más de 10 años la muerte de TEETETO, fijada definitivamente por Eva SACHS en el año 367 a.J.C. Por lo tanto, todo el metódo matemático del segundo estadio debe haber sido configurado por TEETETO en los últimos diez años de su vida, o sea entre el 377 y el 367 a.J.C.

2. Diez años después, en el 357 a.J.C. PLATÓN escribe el diálogo «Timeo» y en ese momento, de acuerdo con SOLMSEN, EUDOXO de Cnido no ha iniciado aún el tercer estadio (científico);

3. La configuración del tercer estadio, protagonizada por las aportaciones de EUDOXO no puede durar, tampoco más de 10 años, pues debe estar comprendida entre el año de aparición del «Timeo» (357 a.J.C.) y el año de la muerte de EUDOXO (347 a.J.C.).

(Véase Kurt von FRITZ, 1969, pp. 3-4).

Pasemos ahora al tema concreto de la contribución de TEETETO a la construcción de los cinco poliedros regulares.

En su famoso libro dedicado a estos cinco «cuerpos platónicos» (1917), tantas veces mencionado, Eva SACHS afirma del modo más tajante que esa construcción, a la que están dedicadas las proposiciones 13 a 17 del libro XIII de «Los Elementos» de EUCLIDES —a saber, la 13 al tetraedro (pirámide), la 14 al octaedro, la 15 al cubo, la 16 al icosaedro y la 17 al dodecaedro— tiene su origen en TEETETO: «Die Konstruktion der fünf Körper (Satz 13-17) stammt aus THEAETET» (L.c., p. 106) e invoca en su apoyo la autoridad de Heinrich VOGT (1913, p. 47) en su polémica contra Paul TANNERY que en «La Géométrie Grecque», Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire, Paris: Gauthier-Villars, 1887, p. 101 atribuía esa construcción a los pitagóricos, reservando a TEETETO sólo el cálculo de las relaciones entre los lados de esos cuerpos y el radio de la esfera circunscrita.

Y agrega Eva SACHS: «Denn erst auf jener Berechnung beruht die exakte Konstructrion. Da diese für alle fünf Körper auf irrationale Verhältnisse führt, so ist sie vor THEAETETS exakten Beweise für das Irrationale oder weinigstens vor THEODOROS Entdeckung nicht möglich, so dass der innere Zusammenhang der geschichtlichen Ereignisse mit der Tradition (SUIDAS), die THEAETET die erste Konstruktion der fünf Körper zuschreibt, in Übereinstimmung ist» (Ibid.).

La investigadora alemana está así de acuerdo con la siguiente afirmación de TANNERY:

«Le témoignage de SUIDAS peut être invoqué pour affirmer que c'est à THÉÉTÈTE, non à EUDOXE, qu'a été emprunté comme fond le Livre XIII d'EUCLIDE» («La Géométrie Grecque», p. 99).

De ser ésto cierto, es posible que sea también de TEETETO la proposición 18 de ese libro XIII, en la cual se halla (EUCLIDES, «Elementa», ed. HEIBERG, Vol. IV, Leipzig: Teubner, 1885, pp. 336-339) la famosa demostración matemática de que es imposible que haya algún otro poliedro regular distinto de los cinco ya descritos y construidos en las proposiciones anteriores:

«Iam dico, praeter quinque figuras, quas nominavimus, nullam aliam construi posse polygonis et aequilateris et aequiangulis inter se aequalibus comprehensam».

Precisemos ahora que está claro que cuando, al principio de este trabajo preguntábamos: «¿Por qué hay en nuestro universo exactamente cinco poliedros regulares?», no nos referíamos en modo alguno al fundamento estrictamente matemático de este hecho, que EUCLIDES, siguiendo tal vez, como hemos dicho, a TEETETO, demuestra con rigor, sino a la explicación lógica y ontológica subyacente a esa imposibilidad.

En cuanto a la contradicción histórica que parece existir entre la atribución del descubrimiento del dodecaedro a HIPPASOS de Metaponto por JÁMBLICO (vide supra) y a TEETETO por parte de SUIDAS y de la mayoría de los modernos historiadores de la geometría griega, Georges J. KAYAS, en sus notas complementarias a EUCLIDE, «Les Éléments», Paris: C.N.R.S., 1978, Vol. I, p. 240, parece coincidir con Kurt von FRITZ (1935 y 1945) en la tesis de que HIPPASOS ha podido ser tal vez el primero que describió o dibujó el dodecaedro, mientras que TEETETO sería el primero que hizo el estudio matemático de dicho poliedro:

«SUIDAS... rapporte que THÉÉTÈTE est le premier à avoir écrit sur les cinq polièdres, mais JAMBLIQUE attribue la découverte de l'inscription du dodecaèdre dans la sphère à HIPPASOS de Métaponte (-450) qui fut probablement un des disciples directs de PYTHAGORE... Par une confrontation serrée, K. von FRITZ arrive à la conclusion que HIPPASOS a peut-être décrit ou dessiné le dodecaèdre mais c'est THÉÉTÈTE qui en a fait l'étude mathématique. On comprendrait alors plus facilement pourquoi PLATON parle tout à fait incidemment du dodecaèdre, tout comme si sa découverte était toute récente; en effet ce polièdre vient en dernier lieu dans la doctrine platonicienne de la sturcture de la matière et il est le seul à ne pas être décomposé en triangles élémentaires comme c'est le cas pour les quatre autres».

Como ya hemos indicado (vide supra) se atribuye a TEETETO la publicación de un importante libro sobre estereometría (geometría del espacio). Para situar cronológicamente esta obra, se ha razonado del modo siguiente:

1. Una obra tan importante, que debía incluir, naturalmente, todos los conocimientos de TEETETO sobre las figuras sólidas o poliedros no pudo aparecer en el mismo entorno de PLATÓN (en el que se encontraba TEETETO) antes de la publicación del libro séptimo de «La República» de PLATÓN, pues éste hubiera recogido tan decisivo acontecimiento matemático y no hubiera escrito en el citado libro (528 b, véase, en castellano, PLATÓN, «Obras completas», Madrid: Aguilar, 1966, octava reimpresión, 1990, pp. 786-787):

«—Después de las superficies —dije yo—, hemos pasado a los sólidos en movimeinto, pero, sin tener en cuenta para nada lo que son en sí mismos. Lo normal sería seguir un orden gradual, y así referirse al desarrollo de los cubos y a lo que participa de la profundidad.

—Tienes razón —asintió—: aunque me parece, Sócrates, que en ésto no hemos llegado aún a ningún descubrimiento.

—Y dos son las causas —advertí—. Una de ellas el hecho de que **no exista ninguna ciudad que aprecie debidamente estos conocimientos, en los que se trabaja débilmente por su misma dificultad**».

2. Como ese libro debió escribirse en torno al **375 a.J.C.** (Véase **Eva SACHS**, **«Die fünf platonischen Körper»**, p. 160), y **TEETETO** murió cerca de Corinto en el año **369 a.J.C. (ibid.)**, su obra sobre la **estereometría** debió aparecer entre las dos fechas, es decir, **hacia el año 370 a.J.C. (ibid.)**.

En lo relativo al **orden** en que se han sucedido históricamente los **«descubrimientos»** de los **cinco poliedros regulares**, así como a la **paternidad** de los mismos, debemos mencionar todavía un punto de discusión importante entre los **historiadores de la matemática griega** y es el suscitado por un famoso **escolio** al **Libro XIII** de **«Los Elementos»** de **EUCLIDES**.

En efecto, los numerosos escolios —en total, 82— a ese libro, todos ellos relativos, salvo el primero, a las distintas **proposiciones** de aquél, están encabezados por el **Escolio 1**, que tiene un alcance más general y que, en traducción francesa de **Albert RIVAUD**, dice así:

«Dans ce **XIII^{e} livre**, sont **construits** ce qu'on appelle **les cinq corps platoniciens**, qui **ne sont pas de PLATON lui-même. Trois des cinq corps** que nous venons de nommer **sont de PYTHAGORE**: le **cube**, la **pyramide** et le **dodecaèdre**. Mais l'**octaèdre** et l'**icosaèdre** sont de **THÉÉTÈTE**. Et ils ont reçu le nom de **corps platoniciens**, parce que **PLATON** les cite dans le **Timée**. Ce **XIII^{e} livre** porte aussi le nom d'**EUCLIDE** parce que **EUCLIDE** lui a fait une place dans ses **Éléments**» (**PLATON**, **«Oeuvres complètes»**, Tome X: **Timée, Critias**, ed. **Albert RIVAUD**, Paris: Les Belles Lettres, **1949**, **Timée**, Notice, p. 82).

RIVAUD señala que «Ce texte des Scolies sur **EUCLIDE** est probablement emprunté à **PAPPUS**, qui utilisait lui-même l'**Histoire des Mathématiques** d'**EUDÈME**» y añade, además, el importante comentario siguiente:

«On peut être **surpris** que la **construction du dodecaèdre**, plus **difficile** que celles de l'**octaèdre** et de l'**icosaèdre** ait été connue avant ces dernières», pero avanza una explicación o justificación a este «hecho extraño», en una línea que otros también, como veremos, han seguido: «Mais on voit encore, dans divers musées, des **dodecaèdres reguliers** (en pierre) d'origine **etrusque** ou **celtique** et qui remontent à une époque très ancienne» (ibid.).

La extrañeza ante la mencionada **«distribución»** de la **paternidad** de los distintos **poliedros regulares** entre **PITÁGORAS** y **TEETETO** realizada por el anónimo escoliasta de **«Los Elementos»** de **EUCLIDES** (siguiendo, como se ha sugerido a **PAPPUS** y, a través de éste, a **EUDEMO** de Rodas), es para algunos historiadores de la matemática griega bastante mayor que para **RIVAUD** y así alguno de ellos, como **Johan Ludvig HEIBERG (1854-1928)**, el filólogo e historiador de la ciencia danés editor de **EUCLIDES**, llega a sugerir, con la anuencia, entre otros, de **Eva SACHS**, la posibilidad de un error de transcripción en el texto del escolio y a proponer, pura y simplemente, una **nueva** y **«más correcta» lectura** del mismo, mediante la mera **permutación** en él de los términos **«dodecaedro»** y **«octaedro»**, con el fin de atribuir —como sería, a su juicio, más natural y comprensible— a **PITÁGORAS** la paternidad del **cubo**, de la **pirámide** (**tetraedro**) y del **octaedro** y a **TEETETO** la del **icosaedro** y del **dodecaedro** (**poliedros**, éstos dos últimos, además, como se sabe, «**emparentados**» entre sí).

Dice, en efecto, a este respecto, **Eva SACHS**, empezando por referirse al texto primitivo del famoso **Escolio 1**:

«Das ist **so unverständlich** («incomprensible»), dass **HEIBERG** (**Gesch. d. math.** bei Norden-Gercke, Einl. II, S. 419) **den Text ändern will: «Einem nicht beachteten Fingerzeig für die Vorgeschichte der Stereometrie gibt ein Scholion (wohl des PAPPOS) zu EUKLID, wo die Konstruktion von Würfel, Pyramide und Dodekaeder den Pythagoreern, die von Oktaeder und Ikosaeder dem THEAETET zugeschrieben wird. Ohne Zweifel sind Dodekaeder und Oktaeder zu vertauschen («permutar»). Die Pythagoreer werden auch hier vor der Irrationalität zurückgeschreckt sein». Dieser Gedanke** —comenta **Eva SACHS** sobre la afirmación anterior de **HEIBERG**—, dem **THEAETET** die —**viel schwerere— Konstruktion** von **Ikosaeder** und **Dodekaeder** zuzutrauen, ist vom Standpunkte des **systematischen Mathematikers, ganz verständlich** («**comprensible**»)» (**Eva SACHS**, «**Die fünf platonischen Körper**», p. 81).

Sin embargo, otros conocidos historiadores de la matemática griega —como el tantas veces mencionado **Kurt von FRITZ**—, aún admitiendo la mayor **dificultad** de la **construcción** del **dodecaedro** en relación con la de los otros cuatro poliedros regulares —«Das **Dodekaeder sehr viel schwerer zu konstruieren ist** und seine Konstruktion sehr viel grössere Voraussetzungen erfordert als diejenige des **Oktaeders**, so dass es schon deshalb **unwarscheinlich** ist, das seine Konstruktion **früher** erfolgt sein sollte» (**Kurt von FRITZ**, «**Theaitetos**», **1935**, p. 1364)—, creen que la dificultad no puede resolverse, con todo, mediante la mera **permutación** del **dodecaedro** y del **octaedro** en el texto del **Escolio 1**, como propone **HEIBERG**:

«Auf der anderen Seite ist jedoch das **Dodekaeder** auch sonst mit der Überlieferung über die älteren **Pytagorear** verknüpft, so dass man **die Schwierigkeit nicht durch eine Vertauschung von Dodekaeder und Oktaeder in der Angabe des Scholiasten lösen kann**» (ibid.).

Observaremos por nuestra parte que una **construcción matemática rigurosa** demasiado temparana del **dodecaedro** resulta sumamente difícil de creer en cuanto se piensa que **PLATÓN**, aún en su «**Timeo**», escrito **diez años después** de la **muerte de su amigo TEETETO** —de quien, por lo tanto, había tenido tiempo de recoger todas sus enseñanzas, incluídas las contenidas en su libro sobre **estereometría**— alude sólo muy incidentalmente a la **quinta «figura»** (el **dodecaedro**) y no ofrece detalle alguno sobre su **construcción**, no pudiendo ésta, por otra parte, ni la de los **pentágonos regulares** que constituyen sus **12 caras**, reducirse, como la **construcción de los otros 4 poliedros regulares**, a los dos tipos de **triángulos básicos o elementales**, porque, muy justamente observó **PLUTARCO** de Queronea (**45-125**), en su libro «**Sobre la desaparición de los oráculos**» (Véase **PLUTARQUE**, «**Oeuvres morales**», Tome VI. Dialogues pythiques: Sur la disparition des oracles, Paris: Les Belles Lettres, **1974**), al decir:

«**Au solide appelé dodecaèdre on donne un autre principe que ce triangle scalène dont PLATON compose la pyramide, l'octaèdre et l'icosaèdre**» (L.c., 141).

Sin embargo, es indudable que los **pitagóricos**, e incluso el propio **PITÁGORAS** podían tener **conocimientos empíricos** acerca del **dodecaedro**, que habrían podido adquirir —como numerosos historiadores de la matemática griega señalan— de los construidos tanto por los **etruscos** como por los **galos**, teniendo como origen, según se ha dicho, los **cristales de pirita, sulfuro de hierro** (S_2F), del cual hay y había importantes yacimientos incluso en **Sicilia**. (Véase **Heinrich VOGT, 1913**, p. 43; **Moritz CANTOR, 1907**, pp. 175-176; **Kurt von FRITZ, 1935**, p. 1364; **F. LINDEMANN, 1896**, pp. 729, 733, 755).

El gran matemático alemán **Hermann WEYL (1885-1955)**, sin embargo, en su famosa obra «**Symmetry**», Princeton University Press, **1952**, parece escéptico a estos argumentos, señalando que los **pentágonos** de los **dodecaedros** en que cristaliza la **pirita** tienen **cuatro aristas iguales y una diferente:**

«The suggestion has been made that they (los **griegos**) **abstracted the regular dodecahedron from the crystals of pyrite**, a sulphurous mineral abundant in Sicily. But as mentionned before, the **symmetry of 5** so characteristic for the **regular dodecahedron contradicts the laws of crystallography**, and indeed one finds that the **dodecahedra** in which pyrite cristallizes **have 4 edges of equal, but one of different length. The first exact construction of the regular pentagondodecahedron is probably due to THEAETETUS.** There is some evidence that **dodecahedra** were used as dice in Italy at a very early time and had some religious significance in Etruscan culture» (L.c., p. 74).

La **matemática moderna** ha **extrapolado** el concepto de **poliedro regular**, generalizándolo a **espacios de n dimensiones**. Así, si definimos un **poliedro regular** como un **poliedro inscriptible en una esfera y cuyas caras son polígonos regulares convexos isométricos**, definiremos del modo siguiente el **politopo regular de R^n**: (V. COXETER, «**Regular Complex Polytopes**», Cambridge, **1991**):

Los **politopos regulares de R^2 (espacio de dos dimensiones)** son los **polígonos regulares**;

Los **politopos regulares de R^3 (espacio de 3 dimensiones)** son los **poliedros regulares**;

Para $n \geq 4$ se llama **politopo regular de R^n (espacio de n dimensiones)** un **politopo inscriptible en una hiperesfera de R^n cuyas caras son politopos regulares de R^{n-1} isométricos**;

Hay **una infinidad de politopos regulares en R^2**, hay **cinco en R^3** (los **cinco poliedros regulares**), **seis en R^4 y tres en R^n** para todo entero $n \geq 5$.

En trabajos anteriores (Véase **SÁNCHEZ-MAZAS**, «**La Caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision**», **1980**), hemos utilizado **politopos de más de 3**

dimensiones (concretamente, **hipercubos de 4 dimensiones**) para esquematizar la **red de relaciones lógicas** entre **16 conceptos** y las correspondientes **relaciones aritméticas entre sus 16 respectivos números característicos** (L.c., pp. 181-182).

[2] De hecho, **PLATÓN**, en el **«Timeo»**, 53c-55c, sólo **describe** la **composición** y, de modo muy sumario, la **construcción**, a partir de dos tipos de **triángulos rectángulos** —el primero **isósceles**, mitad de un **cuadrado**; el segundo, un **escaleno** mitad de un **triángulo equilátero**— de **cuatro poliedros**: primeramente, el **tetraedro**, **octaedro** y el **icosaedro**, cuyas **caras** son, respectivamente, **4**, **8** y **20 triángulos equiláteros** y, por último, el **cubo**, cuyas **caras** son **6 cuadrados**, atribuyendo estas **4 figuras** a los **4 elementos** de **EMPÉDOCLES**, es decir, respectivamente, al **fuego**, al **aire**, al **agua** y a la **tierra**; en cuanto a la **quinta figura**, que sería el **dodecaedro**, no hace más que **aludir** a ella, **sin describir** su **composición**, ni menos su **construcción** y decir (vide **supra, nota 1**) que **«Dios se sirvió de ella para dar su figura al Todo»**.

Al decir: «quedando para componer **nada más una sola figura**» (traducción castellana de **GARCÍA BACCA**, **«Textos»**, **1961**, p. 42) o «il restait encore **une seule et dernière combinaison**» (traducción francesa de **Albert RIVAUD** en **PLATON**, **«Oeuvres complètes»**, Tome X: **Timée**, Critias, ed. **Albert RIVAUD**, Paris: Les Belles Lettres, **1949**, **Timée**, 55c, p. 175), parece indudable que **PLATÓN**, aunque no la expone, conoce ya, a través de su amigo **TEETETO** (que fué probablemente su autor) la **demostración de que no puede haber, aparte de los cinco poliedros descritos o evocados, ningún poliedro regular más**, aunque la **demostración** conocida por **PLATÓN** no hubiera alcanzado aún el grado de claridad, simplicidad, perfección y elegancia que adquiere en la **proposición 18** del **Libro XIII** de **«Los Elementos»** de **EUCLIDES**, que creemos conveniente recordar aquí:

«Iam dico, praeter quinque figuras, quas nominavimus, nullam aliam construi posse polygonis et aequilateris et aequiangulis inter se aequalibus comprehensam.

Nam ex duobus triangulis aut omnino figuris planis angulus construi nequit (XI def. 11), ex tribus vero triangulis angulus pyramidis construitur, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri. ex sex autem triangulis aequilateris et aequiangulis ad idem punctum coniunctis angulus solidus non orietur; nam cum angulus trianguli aequilateri duae partes sunt recti, sex anguli quattuor rectis aequales erunt; quod fieri non potest, nam omnis angulus solidus minus quattuor rectis comprehenditur (XI, 21). eadem de causa ne ex pluribus quidem quan sex angulis planis solidus angulus construitur. tribus autem quadratis angulus cubi comprehenditur. quattuor autem nullus; nam rursus quattuor recti erunt. pentagonis autem aequilateris et aequiangulis tribus angulus dodecaedri comprehenditur, quattour autem nullus; nam cum angulus pentagoni aequilateri aequalis sit recto angulo cum quinta parte recti, quattuor anguli quattuor rectis maiores erunt; quod fieri non potest. eadem de causa ne aliis quidem figuris polygonis angulus solidus comprehendetur.

ergo praeter quinque figuras, quas nominavimus, nulla alia figura solida construetur figuris aequilateris et aequiangulis comprehensa; quod erat demonstrandum» (**EUCLIDES**, «**Elementa**», ed. HEIBERG, Vol. IV, Leipzig: Teubner, **1885**, pp. 537-539).

Es en un diálogo posterior al «**Timeo**» y de autenticidad no muy admitida —«**Epinomis**» o «**El filósofo**», que viene a ser como un apéndice de «**Las Leyes**» y ha sido denominado a veces, por ello, «**Libro XIII de "Las Leyes"**»— donde **PLATÓN** habla, por primera vez, de **cinco elementos —fuego, agua, aire, tierra** y **éter**—, que corresponderían a los **cinco poliedros regulares**:

«ATENIENSE. —Es así mismo necesario, según toda verosimilitud, hablar de **cinco cuerpos sólidos**, de los que es posible derivar las figuras más bellas y más perfectas... Pues bien: si hay **cinco clases de cuerpos**, es necesario afirmar que éstos son el **fuego**, el **agua**, el **aire** en tercer lugar, en cuarto lugar la **tierra** y en quinto lugar el **éter**» («**Epinomis**», 980d-981, **PLATÓN**, «**Obras completas**», ed. Aguilar, **1969**, octava reimpresión: **1990**, p. 1532).

Como ya hemos explicado en la nota anterior, **PLATÓN** ofrece en el «**Timeo**», escrito hacia el año **357 a.J.C.**, descubrimientos recientes de su amigo **TEETETO** que poco antes de su muerte, que tuvo lugar el año **367 a.J.C.**, había escrito un libro sobre **estereometría (geometría del espacio)** en el que se ocupaba muy especialmente de los **poliedros regulares**.

Resultan, pues, muy dudosas y poco merecedoras de crédito las leyendas recogidas por **DIÓGENES LAERCIO** y por **JÁMBLICO**, según las cuales **PLATÓN**, en uno de sus viajes a Sicilia, habría comprado a **FILOLAO (470-fines del siglo V a.J.C.)** las obras póstumas y hasta entonces secretas de **PITÁGORAS, sobre las que se habría basado para escribir el** «**Timeo**».

Creemos que es conveniente, sin embargo, para mejor información del lector reproducir los pasajes más significativos al respecto:

DIÓGENES LAERCIO: «**PHILOLAOS de Crotone, pythagoricien. C'est à lui que PLATON fit acheter, par une lettre écrite à DION, les livres de PYTHAGORE... Il a écrit un livre dont HERMIPPE dit, sur la foi d'un écrivain, que PLATON le philosophe, venu en Sicile chez DENYS, l'acheta aux parents de PHILOLAOS par quarante mines de monnaie d'Alexandrie, et qu'en tira la matière de son «Timée». D'autres auteurs racontent que PLATON reçut ces livres de DENYS, alors qu'il demandait la grâce d'un jeune homme, disciple de PHILOLAOS et jeté en prison**» (**DIOGÉNE LAÉRCE**, «**Vie, doctrines et sentences des philosophes illustres**», ed. GENAILLE, Paris: Garnier-Flammarion, **1965**, p. 157);

JÁMBLICO: «**L'exactitude avec laquelle la doctrine pythagoricienne a été conservée est étonnante, car, pendant des fort nombreuses générations —cela est manifeste—, personne n'a pur avoir accès aux archives de PYTAGHORE, avant l'époque de PHILOLAOS, qui fut d'ailleurs le premier à éditer les trois livres que l'on sait. Selon la tradition, DION de Syracuse les racheta, à la demande de PLATON, pour cent mines a PHILOLAOS, tombé dans une misère noire; en effet, ce dernier appartenait à la confrérie**

des pythagoriciens et c'est pourquoi il avait eu ces livres en sa possession» (**JAMBLIQUE**, «**Vie pythagorique**», 100, in «**Les Présocratiques**», Paris: Gallimard, **1988**, p. 66, XVII, traducción de **DIELS**, **Vorsokratiker**, I, Dublin-Zürich, Weidmann, **1903** (reimpresión: **1969**), 4, 17, 27-34).

3 **LEIBNIZ** es, como se sabe, el creador del concepto de **mundo posible** y de la **semántica de los mundos posibles** para la **definición** de las **modalidades** y de las **proposiciones modales**, recogida en el pensamiento actual, con importantes consecuencias **lógicas** y **filosóficas**, principalmente por el lógico y filósofo, profesor en Princeton, **Saul A. KRIPKE** (n. en **1941**).

Sobre el concepto de **mundo posible**, nos limitaremos aquí a recordar tres pasajes famosos de la correspondencia de **LEIBNIZ**, los dos primeros extraídos de una **carta a Antoine ARNAULD** (**1612-1694**) de **1686** y el último de una carta a **Louis BOURGET**, escrita probablemente en **1712**:

1. «Comme **il y a une infinité de mondes possibles**, il y a aussi une infinité de lois, les unes propres à l'un, les autres à l'autre, et chaque **individu possible** de quelque monde enferme dans sa notion les lois de son monde» (**GP**, 2.40.21);

2. «Chaque **monde possible** dépend de quelques desseins principaux ou fins de Dieu, qui luy sont propres, c'est-à-dire de quelques décrets libres primitifs (conçus **sub ratione possibilitatis**) ou Lois de l'ordre général de cet **Univers possible**, auquel elles conviennent, et dont elles déterminent la notion, aussi bien que les notions de toutes les substances individuelles que doivent entrer dans ce même univers» (**GP**, 2.51.15).

3. «Quand je dis qu'**il y a une infinité de Mondes possibles**, j'entends **qui n'impliquent contradiction**, comme on peut faire des Romans, **qui n'existent jamais** et **qui** sont pourtant **possibles**» (**GP**, 3.558.9);

Sobre la **definición semántica** de las **modalidades**, realizada por **LEIBNIZ** sobre la base de su **teoría de los mundos posibles**, dice el gran especialista alemán de la **semántica leibniciana Hans BURKHARDT**, profesor en Erlangen, en su conocida obra «**Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz**», München, Philosophia Verlag, **1980**, p. 255:

«Neben der schon näher gekennzeichneten syntaktischen oder epistemischen **Definition der Modalitäten** besitzt **LEIBNIZ** auch eine **semantische Definition** mit Hilfe der **Theorie der möglichen Welten**. Sie lautet:

Notwendig $=_{def.}$ **wahr in allen möglichen Welten**
Möglich $=_{def.}$ **wahr in mindestens einer möglichen Welt**
Kontingent $=_{def.}$ **wahr in dieser und nicht in allen möglichen Welten**»

Véase también en este contexto, el importante capítulo (Chapitre VII: **De la Philosophie à la Sémiotique (III). Les sémantiques des mondes possibles et la vérité**) que nuestro maestro y amigo el lógico y filósofo polaco **Georges KALINOWSKI** (n. en **1916**) dedica a analizar las posiciones respectivas de **LEIBNIZ, KRIPKE, GOCHET** y **BURKHARDT**, en su libro «**Sémiotique et Philosophie**» (Paris: Hadès-Benjamins, **1985**), en el que propone, como única correcta y consecuente, la siguiente definición de la proposición «**es posible que p**»:

«**Il est possible que p» serait vraie dans un monde i si et seulement si «p» était vraie dans un monde possible au cas où celui-ci existerait actuellement** (L.c., p. 258).

Está claro que con la introducción del concepto de **mundo posible** como **mundo** meramente **exento de contradicción interna**, podríamos considerar como **mundos posibles** distintos mundos definidos en los distintos **espacios de cualquier número de dimensiones** considerados en la **nota 1** para **definir** en ellos los **politopos** de distinto número de dimensiones, es decir, los **espacios** $\mathbf{R}^2$ **(de dos dimensiones)**, $\mathbf{R}^3$ **(de tres dimensiones)**, $\mathbf{R}^4$ y así sucesivamente.

Tomando entonces como referencia el concepto de **politopo regular (generalización** a cualesquiera dimensiones del concepto de **poliedro regular**), podemos contestar a la anterior pregunta afirmativamente, diciendo que **sí hay universos posibles** en los que **el número de politopos regulares es menor que 5 (a saber, cualquier mundo definido en un espacio** $\mathbf{R}^5$, $\mathbf{R}^6$, $\mathbf{R}^7$, **etc.**, en todos los cuales **hay sólo 3 politopos regulares)** y **también hay universos posibles** en los que **el número de politopos es mayor que 5 (a saber, cualquier mundo definido en el espacio** $\mathbf{R}^2$ **—donde hay infinitos politopos regulares—** **o en el espacio** $\mathbf{R}^4$ **—donde hay 6 politopos regulares—** según hemos adelantado ya al final de la **nota 1**).

[4] «El **poliedro** —por supuesto, **no regular**— que aparece en la «**Melancolia I**» (**1514**) de **Albrecht DÜRER (1471-1528)** ha sido estudiado y analizado de un modo exhaustivo por numeroso autores (sobre todo en tiempos recientes por historiadores del arte y matemáticos) y la conclusión dominante de la mayoría de ellos es que se trata de un **romboedro truncado**.

Así, en su obra «**DÜRER, Kunst und Geometrie**» (Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäusser, **1980**), **Eberhard SCHRÖDER**, que dedica el sexto capítulo (pp. 64-75) al tema «**Rekonstrunktionsanalyse an dem Küpferstich 'Melancholie'. Schlussfolgerungen**», llega a la conclusión de que el **poliedro** en cuestión es un **romboedro** inicial, figura con **sesis caras (rombos)**, luego **truncado** en **dos vértices opuestos** («**abgestumpften Rhomboeder**», p. 71 y fig. 59 y p. 72 y fig. 60), resultando finalmente, pues, un **octaedro irregular, seis** de cuyas **caras** son **pentágonos** (irregulares), mientras que las dos restantes son **triángulos equiláteros**.

Si se piensa que el **romboedro** inicial, luego **truncado**, tenía caras **cuadrangulares** (aunque no eran **cuadrados**, sino **rombos**), como el **cubo** y que el **octaedro irregular final** tiene **seis caras** que son **pentágonos** (aunque **irregulares**, por tener **tres lados más largos** y **dos más cortos**), como las del **dodecaedro regular** y **dos caras** que son **triángulos equiláteros**, como las **caras** del **tetraedro**, el **octaedro** y el **icosaedro regulares**, se comprenderá nuestra afirmación de que el **poliedro** de la «**Melancolía**», que reúne, aunque parcialmente, propiedades de los **cinco poliedros regulares**, puede interpretarse como un intento fracasado de **síntesis** de aquéllos en un **solo poliedro**.

Por su parte, **Raymond KLIBANSKY, Erwin PANOFSKY** y **Fritz SAXL**, autores de la importante obra, ya clásica, «**Saturno y la Melancolía**» (ed. original inglesa: «**Saturn and Melancholy**», Thomas Nelson, **1964**, reimpresión: **1979**; ed. francesa: «**Saturne et la Mélancolie**», Paris: Gallimard, **1989**), dedica su atención, en numerosos pasajes del libro, a ese grabado inmortal y especialmente el **Apéndice 1** al famoso **poliedro**. Resumimos aquí algunas de las conclusiones de su análisis:

«Quant à la nature **stéréométrique** de ce **polyèdre**, on l'a généralement considéré comme un **rhomboèdre tronqué**, c'est-à-dire une figure formée de **six rhombes**, laquelle, par **ablation de deux sommets opposés** (ceux où se rencontrent les angles aigus du rhomboèdre), a été **transformé en octaèdre**. D'autres auteurs y ont vu un **cube** dont on avait retranché des morceaux. D'autres encore ont décrit cet octàedre, bien a tort, comme un **icosaèdre**... À la demande de **GIEHLOW** le professeur **G. NIEMANN**, en ce domaine expert de premier rang, a entrepris une **reconstruction de l'objet** (cf. dessus 1 et 2, p. 655) et nous reproduisons ici son opinion:

'La figure est un **polièdre à deux sommets tronqués**, selon toutes apparences **un rhomboèdre plutôt qu'un cube**. Elle **repose sur l'une des surfaces triangulaires** obtenues en tronquant les sommets, de sorte qu'**une diagonale de la figure est perpendiculaire**'» («**Saturne et la Mélancolie**», **1989**, p. 657).

[5] Como ejemplos elementales, en nuestro **universo actual**, de los **tres tipos de combinaciones** mencionados, podemos tomar **tres** de las **combinaciones clásicas** utilizadas por **LEIBNIZ**, a saber:

combinación posible y contingente (variable)	**homo doctus**
combinación imposible	**homo lapis**
combinación necesaria	**non (homo non rationalis)**

(Véase, por ejemplo, **LEIBNIZ, C**, pp. 232-235).

[6] En la perspectiva **leibniciana**, el criterio general que rige la **relación** entre **perfecciones** y **existencia** es el de que **cuánto mayor** es el número de **perfecciones** que integran una **combinación**, **tanto menor** es el ámbito de **existencia** de la misma, es decir, las **ejemplificaciones** de dicha **combinación** en **individuos existentes** en el **universo** de que se trate. Ahora bien, el problema que se plantea es el de encontrar **en cada universo determinado**, el **método lógico-matemático** para **decidir** las **combinaciones concretas que pueden existir**, distinguiéndolas de las que **no pueden existir**.

[7] Los **límites cualitativos** definirían o señalarían **en cada universo posible**, todas las **cualidades** que, resultando de las **combinaciones teóricamente posibles** de las **cualidades presentes** en el mismo, no tienen, sin embargo, ellas, **presencia** en dicho **universo** en forma de **individuos existentes** en el mismo que las **posean**.

En nuestros **modelos aritméticos** de los distintos **universos posibles**, esos **límites cualitativos** están **representados** por un **número máximo o hipersaturado**, de tal forma que **toda combinación de cualidades** que esté **aritméticametne representada** por un **número** igual al **hipersaturado o máximo** es **imposible** o, si se quiere, **queda fuera de** esos **límites cualitativos** del **universo** dado.

[8] Véase en las **Referencias bibliográficas**:

1. **LEIBNIZ, 1666: Dissertatio De Arte Combinatoria** (edición primitiva de **LEIBNIZ**);

2. **LEIBNIZ, 1690: Ars Combinatoria** (reedición hecha **24 años más tarde**, sin conocimiento de **LEIBNIZ** y a espaldas del mismo, que protestó airadamente cuando lo supo en las «**Acta Eruditorum**» y en sus «**Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano**», p. 461).

[9] «1716: El **14 de Noviembre** (**LEIBNIZ**) sufre un ataque de gota; lee a ratos la novela de Barclay, **Argenis**; a las nueve de la noche, mientras conversa con su médico sobre temas de alquimia, muere. Sólo su secretario **ECKHART** siguió el féretro hasta la tumba. En ella aguardaba el epitafio que el propio **LEIBNIZ** había escrito: **'Huesos de Leibniz' (Ossa Leibnitti)**» (Véase **LEIBNIZ**, «**Escritos filosóficos**», Buenos Aires: Charcas, 1982, p. 40).

[10] Véase **Jean LADRIÈRE**, «**Les limitations internes des formalismes**», Louvain: E. Nauwelaersts/Paris: Gauthier-Villars, **1957**.

[11] «Cuando **FREGE** compone su «**Begriffschrift**» en **1879**, se remitirá a **LEIBNIZ** como inspirador —lejano inspirador— de su empresa. Cree haber realizado el **sueño leibniciano** de crear una **lingua característica**, limitada en un primer plano a la **Lógica**, pero inmediatamente **generalizada**, por el gran campo de aplicaciones que le atribuye: el Cálculo diferencial e integral, el Calculo geométrico, la Física, la Filosofía... Aun más, una **lingua characteristica** que, como ya pretendiera **LEIBNIZ**, posibilite la manifestación de todo el pensamiento puro, de todo contenido conceptual» (**Javier de LORENZO**, «**Leibniz-Frege, ¿utopías de la razón conceptual?**», **THEORIA**, Año VI, Nº 14-15, Octubre **1991**, pp. 97-114); el pasaje citado se encuentra en la página 97).

[12] Véase **Manuel SACRISTÁN LUZÓN**, «**Introducción a la Lógica y al Análisis Formal**», Barcelona: Ariel, **1964**, Cap. III, **20. Los límites del programa algorítmico; 21. Los frutos del programa algorítmico.**

[13] **Hao WANG**, «**Reflections on Kurt Gödel**», M.I.T., **1987**, second printing: **1988**.

[14] **Hao WANG**, «**Kurt Gödel**». Traduit de l'américain par **Laura OVION** et **Michel MÉRIAUX**, Paris: Colin, **1990**.

Ahora hay también traducción castellana: **Hao WANG**, «**Reflexiones sobre Kurt Gödel**». Versión española de **Pilar CASTILLO CRIADO**, Madrid: Alianza Editorial, **1991**.

[15] Véase **Hao WANG**, «**Kurt Gödel**», **1990**, p. 261.

[16] GP, 7.517-524.

[17] Véase **Heinrich SCHOLZ**, «**Esquisse d'une histoire de la logique**». Traduit de l'allemand par **E. COUMET**, **Fr. de LAUR**, **J. SEBESTIK**. Avant-propos de **J. VUILLEMIN**. Paris: Aubier-Montaigne, **1968**.

[18] GP, 7.519.

[19] GP, 7.184 y LEIBNIZ, «Escritos filosóficos», ed. Ezequiel de OLASO, Buenos Aires: Charcas, 1982, p. 165.

[20] Véase C, p. 420: «FILUM COGITANDI», «Filum...Ariadnaeum. Et puto talem Methodum esse in potestate, nec difficulter admodum constitui posse, eamque fore tam evidentem, ut omnes controversias irrefragabiliter finiat, prorsus quemadmodum eae que circa numerorum calculos occurrere possunt, a perito Arithmetico sive per se, sive socio adhibito, non difficulter terminantur».

[21] Véase la nota anterior, así como el pasaje «Intellectus autem noster nisi superna luce illustretur, aut filo quodam Ariadnaeo ducatur, quali solae hactenus usae sunt Mathematicae» 8C, 337).

[22] Véase Souleymane BACHIR DIAGNE, «Boole (1815-1864): L'oiseau de nuit en plein jour», Paris: Belin, 1989, así como I.M. BOCHEŃSKI, «Historia de la Lógica Formal», Madrid: Gredos, 1966, p. 271: «LEIBNIZ... Sus grandiosos resultados en la Lógica matemática, históricamente fueron inoperantes. En efecto, durante largo tiempo permanecieron sin publicar y fueron descubiertos sólo a fines del siglo XIX, cuando los problemas por él tratados se habían planteado ya independientemente».

[23] «En fait, il semble que GÖDEL s'identifie plus particulièrement à LEIBNIZ qu'à aucun autre» (Hao WANG, «Kurt Gödel», 1990, p. 1); «Le héros personnel de GÖDEL est LEIBNIZ et tous deux sont des grands logiciens. De plus GÖDEL considère la monadologie de LEIBNIZ comme proche de sa propre philosophie» (Ibid., p. 2). «GÖDEL étudia LEIBNIZ vers 1943-1946» (Ibid., p. 27).

[24] Véase Miguel SÁNCHEZ-MAZAS, «Actualisation, développment et perfectionnement des calculs logiques arithmético-intensionnels de Leibniz», THEORIA, Segunda Época, Año VI, Nº 14-15, Octubre 1991, pp. 175-259, especialmente pp. 175-185 y muy particularmente el cuadro de la p. 181: «Correspondance isomorphe entre les algèbres de Boole logiques (des termes ou propriétés) et arithmétiques (des diviseurs d'un nombre naturel M et des composants binaires d'un nombre naturel A)».

[25] ŁUKASIEWICZ construyó, como se sabe, su primer sistema de lógica polivalente ya en 1920 («O logice trójwartościowej»), presentándolo ese mismo año en la Sociedad de Filosofía de Lwów.

Ahora bien, como decimos, las lógicas polivalentes de ŁUKASIEWICZ tienen una base tan extensional como la lógica bivalente de BOOLE y sus operadores se definen mediante matrices enteramente análogas. Así, por ejemplo, la lógica trivalente tiene las siguientes matrices para la implicación (C) y la negación (N):

C	0	½	1	N
0	1	1	1	1
½	½	1	1	½
0	0	½	1	0

[26] Este trabajo fué escrito por **Gottlob FREGE (1848-1925)** en **1880-81** y ha sido reproducido en los **escritos póstumos** del lógico y filósofo alemán «**Nachlassene Schriften**», cuya referencia completa damos en la siguiente **nota 27**, en **1969**, pp. 9-41.

[27] **Gottlob FREGE**, «**Nachlassene Schriften**» (edición e introducción de **H. HERMES**) Hamburg: Meiner, **1969**.

[28] «**LEIBNIZ**... hatte bei diesem Versuche die **lingua characterica** (sic) im Sinne, wenn er gleich keine äussere Verbindung mit seinen Bestrebungen hergestellt hat, die auf Darstellung eines **Inhaltes** gerichtet waren» (L.c., p. 10).

[29] «Führe ich nur noch an, dass **LEIBNIZ** die Wörter '**non**' und '**ens**' in seine Formeln eintreten lässt» (Ibidem).

[30] «Das **leibnizische 'ens'** ist **ausgefallen**» (L.c., p. 11).

[31] Este trabajo se publicó, en efecto, en el «**Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft**», **16 (1882-1883)**.

[32] **Gottlob FREGE, «Sur le but de l'idéographie», in Gottlob FREGE, «Écrits logiques et philosophiques»**. Traduction et introduction de **Claude IMBERT**, Paris: Éditions du Seuil, **1971**, pp. 70-79.

[33] L.c., pp. 70-71.

[34] L.c., p. 23.

[35] **Franz BRENTANO (1838-1917)** trató muy detenida y profundamente este tema en su conocida obra «**Psychologie vom empirischen Standpunkt**», Zweiter Band: **Von der Klassifikation der psychischen Phänomene**, Hamburg: Meiner, **1925** (reimpresión: **1971**).

[36] «**Jeder kategorische Satz ohne irgend welche Änderung des Sinnes in einem Existentialsatz übersetzt werden kann, und dass dann das 'ist' und 'ist nicht' des Existentialsatzes and die Stelle der Copula tritt**» (L.c., p. 56).

[37] C, pp. 356-399. Véanse especialmente los párrafos 144-151, pp. 391-393.

[38] Véase el opúsculo C, pp. 232-235, ya citado en la **nota 5**.

[39] **Alonzo CHURCH, «The History of the Question of Existential Import of Categorical Propositions», in «procedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science»** (Jerusalem, August 26-September 2, **1964**), Amsterdam: North-Holland, **1964**, pp. 417-424.

[40] **Herbert H. KNECHT, «La Logique chez Leibniz: Essai sur le rationalisme baroque»**, Lausanne: L'Âge d'Homme, 1981.

[41] L.c., p. 157.

[42] «Termini **aequivalentes** sunt, quibus **res** significantur **eadem**, ut triangulum et trilaterum» (C, 240); «Omnis homo est animal, sic interpretabar: Homo animal et homo **aequivalent**, seu qui dicit Te esse hominem, dicit Te esse animal» (**GP**, 7.212. 24). «Inter ea quorum unum alteri substitui possit salvis calculi legibus, dicetur esse **aequipollentiam**» (**GP**, 7.206.7). «Demostrare propositionem est, resolutione terminorum in **aequipollentes** nanifestum

facere, quod praedicatum aut consequens in antecedente aut subjecto contineatur» (GP, 7.44.10).

[43] Javier ECHEVERRÍA, «Análisis de la identidad», Barcelona: Juan Granica, 1987.

[44] Capítulo 6: Leibniz. 1. El principio de identidad; 2. El principio de los indiscernibles; 3. Sustituibilidad salva veritate.

[45] En los cuadros que aparecen en el Apéndice, al final de este trabajo, se podrá comprobar de qué modo, basándonos en esta perspectiva intensional de aritmetización de las fórmulas lógicas, hemos podido construir un sistema de invariantes numéricos para la lógica modal, en la que a cada clase de equivalencia de fórmulas modales corresponde un invariante numérico, de tal modo que todas las relaciones lógicas entre fórmulas modales quedan representadas por relaciones aritméticas entre sus respectivos números característicos.

[46] Porque esa aritmetización tiene un fundamento estrictamente sintáctico.

[47] Porque, contrariamente al caso anterior, esa aritmetización tiene un alcance semántico.

[48] La forma de Combinatoria que aparece en la juvenil «Dissertatio» de LEIBNIZ, con la que éste pretende construir los conceptos necesarios paa formular y demostrar las proposiciones de «Los Elementos» de EUCLIDES (vide supra nota 1) es todavía muy primitiva e incompleta, ya que la expresión de un concepto geométrico o aritmético compuesto contiene en muchos casos, además de los conceptos geométricos o aritméticos más simples de partida, también ciertas preposiciones, otras partículas y áun verbos, en latín o en griego, a los cuales, en la aritmetización, no se asocia número alguno. Estos defectos fueron comentados por Louis COUTURAT en su obra clásica sobre «La Logique de Leibniz d'après des documents inédits», Paris: Alcan, 1901; reedición facsímil, Hildesheim: Olms 1969), en los siguientes términos: «Le principal défaut de cette Caractéristique, qui ressort de la forme même des définitions, consiste en ce que toutes les idées n'y sont pas exprimées par des signes, de sorte qu'à ceux-ci se mêlent encore mots du langage ordinaire. Ces mots sont, non seulement des articles conjonctions..., des relatifs..., même des verbes... et des termes indiquant la quantité, enfin la négation (non). LEIBNIZ a reconnu ce défaut; il l'explique et l'excuse en disant que l'analyse des concepts n'est pas poussé à bout, de manière à les reduire à des concepts primitifs» (L.c., p. 560).

[49] El embrión de Característica numérica que contiene la «Dissertatio» es también defectuoso, en la medida en que lo es —véase la nota 48— la Combinatoria: así, a un concepto compuesto no queda asociado necesariamente un número, sino, con frecuencia, uno o más números acompañados de partículas complementarias, en latín o en griego.

[50] Véase la nota 8.

[51] Felix KLEIN (1849-1925), matemático alemán, lanzó en 1872 su «Erlanger Programm». (Cf. Felix KLEIN, «Gesammelte Mathematische Abhandlunge» (3 volúmenes), Berlin, 1921-1923, Vol. 1, p. 411). Véase el estudio que dedica a este programa Javier de

LORENZO en «**La matemática y el problema de su historia**», Madrid: Tecnos, **1977**: 2.2.1. El Programa de Erlangen.

[52] El hallazgo de **LAGRANGE** constituye un caso particular del **primer teorema general sobre los invariantes algébricos**, según el cual **una transformación lineal homogénea de las variables en una forma cuadrática convierte la forma en otra cuyo discrimiante es igual al de la forma primitiva multiplicada por un factor que depende sólo de los coeficientes de la transformación: este factor es el cuadrado del determinante de la transformación (determinante que en el caso particular de LAGRANGE es 1** (Véase **Eric Temple BELL**, «**Historia de las Matemáticas**». Traducción de **R. ORTIZ**, México: Fondo de Cultura Económica, **1949**, pp. 435 y 618, n. 3).

[53] **Georges BOOLE (1815-1864)**, el autodidacta reinventor de la **lógica matemática** en el **siglo XIX**, fué también el autor en **1841** del **primer teorema general sobre los invariantes algébricos** que hemos enunciado en la **anterior nota 52** y del cual el hallazgo de **LAGRANGE** constituye un **caso particular**. El trabajo de **BOOLE** se publicó, en **1842**, en dos partes sucesivas, en la revista matemática de la Universidad de Cambridge, a saber: **Georges BOOLE**, «**Exposition of a General Theory of Linear Transformations**», in «**Cambridge Mathematical Journal**», Vol. 3: **Part I**, pp. 1-20; **Part II**, pp. 106-119.

[54] La terna de grandes matemáticos **Arthur CAYLEY (1821-1895)**, inglés, **James Joseph SYLVESTER (1814-1897)**, inglés y **Charles HERMITE (1822-1901)**, francés, que fué denominada por éste último «**la trinité invariantive**», se dedicó, mediante una intensa y estrecha colaboración recíproca, a establecer y a aplicar a distintos dominios de las matemáticas, los resultados de una **teoría de los invariantes**, cuyo principal fundador fué **Arthur CAYLEY**.

CAYLEY, en efecto, aborda hacia **1854** los trabajos clásicos del francés **Evariste GALOIS (1811-1832)**, el alemán **Karl-Friedrich GAUSS (1777-1856)** y el francés **Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857)** sobre los **grupos de sustitución** aplicando a los mismo los métodos de los algebristas ingleses y dando una **definición de los grupos abstractos** (que, en principio, sólo conviene a los **grupos finitos**).

En su obra monumental en diez tomos «**Memoirs of Quantics**» (**1854-1878**) —donde el término '**quantics**' designa las formas— **CAYLEY** pretende determinar el **sistema completo de los invariantes (y covariantes)** de una forma dada, aplicando los resutlados obtenidos a distintas esferas matemáticas.

Las obras de **Arthur CAYLEY** se han publicado en **Arthur CAYLEY**, «**Collected Papers**» (13 volúmenes), Cambridge Unviersity Press, **1889-1898**.

[55] El matemático noruego **Marius Sophus LIE (1842-1899)** se interesó primeramente por la **teoría de ecuaciones** de **Evaristo GALOIS** y se dedicó después a la **geometría**, realizando una obra geométrica inmensa en muy poco tiempo. En **1869** fué a **Berlin** a reunirse con **Felix KLEIN** y ambos empezaron a colaborar con entusiasmo en la **teoría de los grupos de transformaciones** y en la **invariancia**. Al ser nombrado profesor extraordinario en

Cristiania (Oslo), **LIE** inició sus investigaciones sobre los **grupos de transformaciones continuas** y descubrió **la transformación** que establece una **correspondencia biunívoca** entre las **rectas** y las **esferas** del espacio euclideo, de tal manera que a **rectas que se cortan** corresponden **esferas tangentes**. En **1886 LIE** sucedió a **KLEIN** en la cátedra de matemáticas de Leipzig. Publicó después su gran obra «**Theorie der Transformationsgruppen**», en tres volúmenes (Leipzig, **1893**) obra de exraordinario alcance y originalidad.

[56] **KLEIN** presentó la concepción que luego se ha conocido como «**Programa de Erlangen**» como disertación para acceder a su puesto de **profesor de matemáticas** en **Erlangen** en **octubre de 1872**.

El título real de esa disertación fué «**Consideraciones comparativas sobre las investigaciones geométricas modernas**» (primitiva edición alemana: «**Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrie Forschungen**», Erlangen, 1872, reeditada en «**Mathematische Annalen**», XLIII (**1893**).

(Traducción inglesa: «**A comparative Review of Recent Researches in Geometry**», **in** «**Bulletin of the** New York **Mathematical Society**» —llamado ahora «**Bulletin of the American mathematical Society**»—, Vol. II (**1893**). Hay traducción francesa en «**Annales de l'École Normale Supérieure**», **1891**, pp. 87-102 y 173-195. En francés, véase también lo que indicamos **infra** en la **nota 63**).

El «**Erlanger Programm**» ofrece una definición sintética de las distintas geometrías, planteándose la cuestión siguiente:

Dados una **multiplicidad** y un **grupo**, estudiar los seres de los mismos desde el punto de vista de las **propiedades** que no se ven alteradas por las **transformaciones del grupo** o, si se quiere: dada una **multiplicidad** y un **grupo de transformaciones**, desarrollar la **teoría de los invariantes** relativos al **grupo**. Si se sustituye el **grupo principal** por un **grupo más amplio**, sólo se conservará **una parte de las propiedades geométricas mencionadas**. Los métodos geométricos modernos están caracterizados por el hecho de que sus consideraciones, en lugar de apoyarse en el **grupo principal**, se fundan en los **grupos de transformaciones más amplios**. En cuanto sus **grupos** se **contienen recíprocamente**, una **ley análoga** establece sus **relaciones recíprocas**. Por primera vez, los distintos tipos de investigación de la geometría se expresan por los **grupos de transformaciones** que les corresponden.

Apoyándose en esta perspectiva, el «**Erlanger Programm**» **unificó**, desde el punto de vista de los **grupos**, la **geometría euclidiana**, las **geometrías clásicas no euclidianas**, la **geometría proyectiva** y la **geometría conforme**. La **geometría de Riemann** estaba también incluída, pero ocupando un lugar poco importante.

El «**Programa de Erlangen**» de **KLEIN** fué en parte sugerido por la **teoría de los grupos de transformaciones** de **LIE**. La **invariancia** fué, en efecto, una de las ideas dominantes en la obra de **LIE**.

[57] El matemático alemán **David HILBERT (1862-1943)**, que había consagrado ya su tesis a la **teoría de los invariantes**, hizo de esta teoría uno de los temas fundamentales de sus

investigaciones hasta **1893**. En **1890** enunció su **teorema fundamental**, en virtud del cual **todo ideal de un anillo de polinomios sobre un cuerpo es de tipo finito**. En otras palabras:

Si A es un **anillo noetheriano** (es decir, un **anillo unitario** tal que todo **ideal** del mismo admite una **familia generatriz finita**), también habrá de serlo $A[X_1,\ldots,X_n]$. En particular, si K es un **cuerpo, todo ideal de** $K[X_1,\ldots,X_n]$ es de **tipo finito**, es decir, **engendrado por un número finito de polinomios**. Este resultado desempeña en **geometría algebráica** el mismo papel que el **teorema fundamental de la aritmética** (a saber, que todo **número entero** puede expresarse de un modo único como **producto de números primos**) en **teoría de números**.

La obra de **HILBERT** se encuentra reunida en **David HILBERT**, **«Gesammelte Abhandlunge»**, 3 tomos, Berlin, **1932-1935**; 2ª edición, **1970**.

[58] Véase **Javier de LORENZO**, **«La Filosofía de la Matemática de Jules Henri Poincaré»**, Madrid: Tecnos, **1974**.

[59] Como **generalización** del conocido **teorema** del matemático suizo **Leonhard EULER** **(1707-1783)** para los **poliedros** (a saber, **«para todo poliedro convexo con V vértices, A aristas y C caras**, siempre V-A+C=2», donde el número 2 resulta, pues, un **invariante** común a todos los **poliedros** simples), el matemático y epistemólogo francés **Henri Jules POINCARÉ (1854-1912)** estableció la que hoy se conoce como **característica de EULER-POINCARÉ de una superficie Σ**, que podemos explicar del modo siguiente:

Sean **v**, **a** y **c** los números de **vértices**, **aristas** y **caras** de una representación celular de un **grafo conexo** sobre la superficie Σ. Entonces el entero v-a+c, que designaremos por «X», y que es **independiente de la representación celular**, es un **invariante topológico**, conocido como **característica de EULER-POINCARÉ** de la **superficie** Σ. En particular, X será igual a **2** para el **plano** y la **esfera**, igual a **1** para el **disco del plano** e igual a **0** para el **toro** y la **botella de KLEIN**.

[60] El matemático y físico alemán **Hermann WEYL (1885-1955)** formuló en su obra **«The Classical Groups, their invariants and representations»** (Princeton, **1939**) una definición general de **invariante algébrico** en la cual refundió la teoría clásica de los **quánticos** (véase **supra nota 54**, la obra de **CAYLEY** sobre los **invariantes y covariantes** de los **quánticos (formas)**). Los **grupos** considerados son de **n variables** y son el **grupo lineal general** y su **subgrupo** de todas las **transformaciones no singulares** o de todas las **transformaciones lineales unimodulares**, el **grupo ortogonal** y los **grupos** que tienen como **invariante** un **forma bilineal antisimétrica no singular**. Los dos primeros son los que tienen interés para la teoría clásica.

[61] Cuando **Albert EINSTEIN (1879-1955)** formuló en los años **1915** y **1916** el famoso **principio de la covariancia**, en virtud del cual las **ecuaciones diferenciales de la física matemática** son **invariantes** para todas las **transformaciones** de las **coordenas espacio-temporales**, reflejó con ello la **indiferencia** de las **fórmulas físicas** hacia cualquier marco coordenado de referencia y captó con ello el significado profundo de la **invariancia física**.

[62] Jean **DIEUDONNÉ** es uno de los principales creadores e impulsores del famoso grupo matemático francés «**Nicolás BOURBAKI**».

«**Nicolás BOURBAKI**» es el pseudónimo colectivo adoptado en **1933** por varios jóvenes matemáticos franceses, antiguos alumnos de la prestigiosa **École Normale Supérieure**. Entre ellos se hallaban **H. CARTAN, C. CHEVALLEY, J. DELSARTE, A. WEIL** y el ya citado **Jean DIEUDONNÉ**. Ese grupo, que desde **1940**, viene publicando una grandiosa obra sistemática (unos cuarenta volúmenes hasta hoy) bajo el título de «**Éléments de mathématique**», tiene, a través de la misma, una influencia notable sobre las matemáticas de hoy. La obra tiende a demostrar la **unidad de las matemáticas** poniendo de relieve las **estructuras comunes** a sus distintas ramas. La serie, que no supone, en principio, en el lector ningún conocimiento previo especial de matemáticas, arranca de la **Teoría de conjuntos** y se extiende al **Álgebra**, a la **Topología general**, a las **Funciones de una variable real**, a la **Integración**, los **Espacios vectoriales topológicos**, los **Grupos de Lie**, etc.

[63] **Félix KLEIN**, «**Le Programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes**». Préface de **Jean DIEUDONNÉ**. Postfache du **P. François RUSSO, S.J.** Paris: Gauthier-Villars (Collection «Discours de la Méthode» dirigée par **Boris RYBAK**), **1974**. Reimpresión, **1991**. Véase **Jean DIEUDONNÉ**, «Préface», p. IX.

[64] **Jean PIAGET**, «**Essai de logique opératoire**». Deuxième édition du traité de logique «**Essai de logique opératoire**», établie par **Jean-Blaise GRIZE**. Paris: Dunod, **1972**. Debe verse también en este contexto: **Jean PIAGET**, «**Essai sur les transformations des opérations logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions**». Paris. Presses Universitaires de France, **1952**.

[65] Véase especialmente, en la primera de las obras citadas en la **nota 64** («**Essai de logique opératoire**»), el Capítulo V, **§30**: «**Les transformations des liaisons binaires**» (pp. 231-257) y **§31**: «**Les mecánismes opératoires fondamentaux de la logique interpropositionnelle bivalente**» (pp. 253-276).

[66] L.c., **§31**, especialmente el cuadro de la p. 258 que muestra los resultados de aplicar las **transformaciones I (idéntica)**, N **(inversa)**, **R (recíproca)** y C **(correlativa)** a todas las **operaciones binarias**, así como los **Teoremas I, II, III, IV** y **V** con sus respectivos **Corolarios**.

Es singularmente importante, en nuestro contexto actual, la demostración de que las **4 transformaciones I, N, R** y C forman un **grupo conmutativo**, hecho que se enuncia en el siguiente **Teorema IV** de la página 256:

«**Théorème IV. L'emsemble des quatre transformations I,** N, **R et** C **constitue un groupe commutatif relativement à leur composition**».

Este grupo se muestra en el cuadro siguiente (ibidem):

	I	*N*	*R*	*C*
I	I	N	R	C
N	N	I	C	R
R	R	C	I	N
C	C	R	N	I

[67] Señalemos que nuestra **aritmetización de las operaciones del cálculo proposicional** (véase, por ejemplo, el **CUADRO I** de este trabajo) permite la **verificación aritmética** inmediata de todas las **equivalencias** y otros **teoremas** a veces laboriosamente demostrados por **PIAGET** en su **«Essai sur les transformations de opérations logiques...»** citada en segundo lugar en la **nota 64** **supra**.

[68] Sobre la relación entre **algebras intensionales** y **lógica de la relevancia** (pero aquí, en una acepción más específica), véanse los trabajos citados en las **notas 98** y **99**.

[69] Véase, en el **Apéndice** al final de este trabajo, el **CUADRO IV**. **«Comparación de los resultados obtenidos respecto de una exigencia de invariancia semántica entre la aritmetización gödeliana y una aritmetización de raíz leibniciana», I. Aplicación de la aritmetización gödeliana...**

[70] Véase, en el **Apéndice** al final de este trabajo, el **CUADRO IV** mencionado en la nota anterior, **II. Aplicación de una aritmetización de raíz leibniciana...**

[71] Véase **Gottlob FREGE**, entre otros trabajos, los citados en las **notas 26** y **32** **supra**, pasajes citados en las **notas 26** a **34** y **passium**.

[72] Véase **Miguel SÁNCHEZ-MAZAS, «1646-1946: El centenario de Leibnitz y la Física nueva», «Arriba» (Folletones de «Arriba»)**, Madrid, **I: 4 de mayo de 1946; II: 7 de Mayo de 1946**.

[73] Viene ahora el recuerdo de **Leibnitz** con la gloria y la juventud de una profecía... (**Leibnitz**) fué también el precursor más antiguo del actual punto de vista de una **«materia desmaterializada»**, uno de los más desconcertantes hallazgos de la Física torturada y revolucionaria de nuestro tiempo... La ciencia moderna ha llegado a la conclusión, según dice **JEANS** de que **«si es posible llegar a obtener: una imagen de la materia, es una que se aproxima más, en todos los aspectos, al espíritu»**... En estrecha armonía con esta opinión, como luego veremos, afirmaba **Leibnitz** hace un cuarto de milenio, desde las columnas del **«Journal des Savants»**, que **los átomos que constituyen la materia, puesto que son**, como el demostraba, **átomos puramente formales, «han de concebirse a imitación de la noción que tenemos de las almas»**... **«Estas partículas se resolvieron en intangibles ondas matemáticas (JEANS)**. Precisamente en este terreno de la **intangible inmaterialidad de las partículas** es donde arrancan las mayores **analogías entre las ideas de la Física moderna con las del gran filósofo alemán**... Max Planck: **«El concepto de punto material tiene que ser sacrificado»**... Por esta razón, sea la que sea la futura evolución de la Física teórica, lo esencial del concepto de **punto metafísico de Leibnitz** se considerará de ahora en adelante como definitivamente

ganado para la Filosofía natural: **negar la extensión, negar el aparente geometrismo de la materia e introducir el aspecto dinámico con la noción de fuerza. inventar el átomo formal.. Con un poco más llegamos a la 'ondícula' de Sir Arthur Eddington»** (L.c., folletones **I.** y **II.**).

[74] «Pero hay otra coincidencia importante todavía. Ya plenamente formado el **concepto de Mónada, Leibnitz** afirma: **«Y hasta es preciso que cada Mónada sea diferente de otra cualquiera. Porque no hay nunca en la Naturaleza dos seres que sean pefectamente el uno como el otro y en los cuales no sea posible hallar una diferencia interna o fundada en una denominación intrínseca»** (**«Monadología»**, **9°**). ¿Es necesario señalar la tremenda analogía de este **principio de los indiscernibles** con el de **exclusión de Pauli** (del que hablaba el otro día **José María Valverde**) que **niega la posibilidad de la existencia de dos electrones de idéntico estado energético?»** (L.c., folletón **II**).

[75] Un estudio básico sobre la **Combinatoria universal** de **LEIBNIZ** puede encontrarse, como es sabido, en la obra clásica del matemático, lógico y filósofo francés **Louis COUTURAT (1868-1914)**, **«La Logique de Leibniz d'après des documents inédits»**, Paris: Alcan, **1901** (reedición facsímil: Hildesheim: Olms, **1969**), Chap. II: **la Combinatoire**. Puede consultarse también la obra de **Herbert H. KNECHT**, **«La Logique chez Leibniz»**, Lausanne: L'Âge d'Homme, **1981**, Chap. II, 5; Chap. IV, 5 y passim, **así como nuestro análisis en Miguel SÁNCHEZ-MAZAS**, **«Notas sobre la Combinatoria de Leibniz»**, **in THEORIA** (primera época), II, 5-6 (**Abril-Septiembre 1953**), pp. 133-145.

Se encontrará un estudio de carácter general sobre la **Característica universal** de **LEIBNIZ** en la obra arriba citada de **COUTURAT**, Chap. IV: **La Caractéristique universelle**, así como en la obra de **KNECHT**, también mencionada más arriba, Chap. IV, 7: **L'écriture universelle** y passim.

Sobre la **Característica numérica** en concreto, pueden verse nuestros trabajos: **1. «La Caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision» (1980)**, ya citada en el párrafo final de la **nota 1**; **2.** la ponencia **«La Característica numérica de Leibniz como método de decisión»**, publicada en las **Actas** del **VII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales**, celebrado en Vic (Barcelona) en **Septiembre de 1991** (Simposio **«De la Característica al Calculo»**).

Por otra parte, como explicamos ampliamente en la ponencia arriba mencionada, las relaciones recíprocas de **Combinatoria** y **Característica**, en la concepción lógica de **LEIBNIZ** son muy estrechas. Sobre el esquema de los **cuatro programas leibnicianos: Combinatoria, Característica, Enciclopedia** y **Cálculo lógico**, puede verse nuestro estudio **«El intento racionalista de Leibniz», in «Bolivar»** (Bogotá), 21 (**1953**), pp. 59-68. Podrá encontrarse, por otra parte, una **«guía»** práctica para **localizar** las **relaciones recíprocas**, comentadas por **COUTURAT** en la obra arriba citada, entre **Combinatoria, Característica universal, Enciclopedia, Lengua universal, Matemática universal** y **Ciencia general** en el **hexágono** dibujado por el lógico y filósofo e historiador de la ciencia francés **Michel SERRES** en su obra

«Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques» (2 tomos), Paris: P.U.F., 1968, tomo II, p. 554.

[76] Nos referimos aquí, naturalmente, a todas aquellas esferas cuya racionalización, formalización y tratamiento lógico-matemático y/o informático pueden verse facilitados o favorecidos por nuestra aritmetización neo-leibniciana de sistemas lógicos y normativos aplicada, hasta el momento, en el plano de las propiedades o predicados monádicos y la silogística, en el del cálculo proposicional, en el de la lógica modal alética, en el de la lógica deóntica y en el de los sistemas normativos del Derecho positivo.

[77] Utilizaremos aquí la expresión «concepto» en el marco de la perspectiva intensional leibniciana en la que se interpreta como predicado monádico o propiedad. Como se sabe, LEIBNIZ utiliza preferentemente en ese sentido la expresión «terminus», con la cual no pretende designar la palabra o el signo, sino directamente el concepto, noción o idea: «Per Terminus non intelligo nomen, sed conceptum, seu id quod nomine significatur, possis et dicere notionem, ideam» (LEIBNIZ, C, p. 243).

[78] Utilizamos también la expresión «proposición» en la acepción leibniciana de relación entre términos (entendidos en el sentido explicado en la anterior nota 77) susceptible de verdad y falsedad y no en aquélla que sólo se refiere al enunciado que expresa tal relación: «Il faut toujours qu'il y ait quelque fondement de la connexion des termes d'une proposition qui se doit trouver dans leurs notions» (Carta a ARNAULD de 1686, GP, 2.56.30); «Semper enim notio praedicat inest sujecto in propositione vera» (L.c., 2.52.22).

[79] Esas relaciones intensionales pueden entenderse en cualquiera de los planos enumerados en la anterior nota 76.

[80] El sistema de numeración hexadecimal es un sistema de base 16 ($=2^4$) cuyas cifras son el 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (todas con el mismo valor que tienen en el sistema decimal), A (con el valor del 10 decimal), B (con el valor del 11 decimal), C (con el valor del 12 decimal), D (con el valor del 13 decimal), E (con el valor del 14 decimal) y F (con el valor del 15 decimal). Por su parte, el sistema de numeración octal es un sistema de base 8 ($=2^3$) que utiliza sólo las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, todas con los mismos valores que tienen en el sistema decimal.

[81] En el marco de aritmetización —entre los muchos posibles— que hemos elegido en este trabajo, ese número característico racional será siempre un número comprendido entre 0 y 1, sin que pueda alcanzar este último valor, es decir, un número racional igual o menor que 0 e inferior a 1 o, si se quiere, un número racional del intérvalo semi-abierto (o semi-cerrado) [0,1[.

[82] Decimos que un número característico es un invariante de la clase de equivalencia del elemento lógico (respectivamente, concepto o proposición) al que queda asociado si y sólo si a dos elementos cualesquiera que sean lógicamente equivalentes (es decir, que pertenezcan a la misma clase de equivalencia lógica) queda siempre asociado el mismo número característico.

[83] Esos **ensayos**, publicados en **1903** en los **Opúsculos inéditos** editados por **COUTURAT («Opuscules et fragments inédits de Leibniz», extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par Louis COUTURAT**, Paris: Alcan, **1903** —obra que aquí designamos por «C»—), son los seis siguientes:

1. «**Elementa Characteristicae universalis**» (C, pp. 42-49);
2. «**Elementa Calculi**» (C, pp. 49-57)
3. «**Calculi universalis Elementa**» (C, pp. 57-66);
4. «**Calculi universalis investigationes**» (C, pp. 66-70);
5. «**Modus examinandi consequentias per Numeros**» (C, pp. 70-77);
6. «**Regulae ex quibus de bonitate consequentiarum formisque et modis syllogismorum categoricorum judicari potest, PER NUMEROS**» (C, pp. 77-84).

Con esos **seis ensayos fechados por LEIBNIZ en Abril de 1679** están relacionados y emparentados otros cuatro verosímilmente contemporáneos, que enumeramos y analizamos junto con los primeros en nuestra obra de **1963**, que citamos más abajo, Parte II, Capítulo I. **Visión esquemática de los distintos sistemas de cálculo lógico comprehensivo sucesivamente establecidos por Leibniz** (pp. 39-50).

A la **formalización, axiomatización** y **aritmetización** de un **cálculo lógico completo y coherente**, fundado y embrionariamente esbozado en los **ensayos leibnicianos de cálculo lógico de Abril de 1679**, arriba enumerados, hemos dedicado un trabajo (que había de ser nuestra primera tesis) realizado en **1955** en **Friburgo (Suiza)**, bajo la dirección del gran lógico polaco **I.M. BOCHEŃSKI**, trabajo al que se concedió el **Premio «Menéndez Pelayo» 1955** del **C.S.I.C.** y que años más tarde se convirtió en nuestro libro «**Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal**», Caracas: Universidad Central de Venezuela, **1963**.

[84] Se trata de «**Elementa Characteristicae universalis**» (C, pp. 42-49).

[85] «**Regula construendorum characterum** haec est: **cuilibet Termino** (id est subjecto vel praedicato propositionis) **assignetur numerus aliquis**, hoc uno observato, ut **terminus compositus ex aliis quibusdam terminis respondentem**, sibi habeat **numerum productum ex numeris illorum terminorum invicem multiplicatis**» (L.c., p. 42).

[86] En efecto, en virtud del **isomorfismo** por nosotros constatado y estudiado en numerosos trabajos anteriores, desde **1978** (Véase **Miguel SÁNCHEZ-MAZAS, «Modelli aritmetici per l'informatica giuridica», in «Informatica e Diritto»**, IV, tomo I, Firenze: le Monnier, **1978**, pp. 163-215, especialmente pp. 187-189, notas 21 y 22) y **en 1991** en **«Actualisation, développement et perfectionnement des calculs logiques arithmético-intensionnels de Leibniz» (THEORIA**, Segunda Época, VI, 14-15, pp. 175-259, pp. 180-185), entre el **álgebra de Boole de los divisores del un número natural m** y el **álgebra de Boole de los componentes binarios de un número natural A**, a la **relación: A es un múltiplo de B** de la **primera** corresponde en la **segunda** la **relación: A es un compuesto binario de B**.

Observemos ahora, en nuestro contexto actual, en el que los **números característicos** asociados a los **elementos lógicos** (respectivamente, **conceptos** o **proposiciones**) son **números racionales del intérvalo semi-abierto [0,1[**, que cualquiera de estos números se define y construye como una **suma de potencias negativas de 2** y que, por lo tanto, en este nuevo ámbito, hay también un **isomorfismo** entre el **álgebra de divisores de un número entero M** y el **álgebra de componentes binarios de un número racional R mayor o igual que 0 y menor que 1**.

[87] La **relación** de **absorción aritmética** —ya sea en el marco de la **primera**, ya en el de la **segunda** de las **álgebras numéricas de Boole** a las que nos hemos referido en la **nota 86**— es **formalmente análoga** a la **relación de absorción lógica** y se define también de un modo enteramente **análogo**:

1. Decimos que **A absorbe lógicamente B** (donde A y B son **elementos lógicos**: respectivamente **conceptos** o **proposiciones**) si y sólo si la **conjunción de A y B** (A&B) es **lógicamente equivalente a A**:

A absorbe lógicamente $B =_{def.} A\&B \Leftrightarrow A$

2. Decimos que **A absorbe aritméticamente B** (donde A y B son, ya **números naturales** ya **números racionales del intérvalo semi-abierto [0,1[**) si y sólo si el **supremo** (en el primer caso, interpretado como **mínimo común múltiplo** y en el segundo como **mínimo compuesto binario común**) de A y B es **igual** a A:

A absorbe aritmeticamente $B =_{def.} [A, B] = A$

LEIBNIZ había expresado ya en multitud de ocasiones la **relación intensional entre el sujeto A y el predicado B** de una **proposición universal afirmativa** de la forma «**Todo A es B**» como una **relación de absorción lógica del predicado B por el sujeto A**:

«**Universalis affirmativa sic exprimi potest: A=AB**» (C, p. 236);

«**A=AB Univ. Aff.** (C, p. 386).

Ahora bien, como ya hemos tenido ocasión de observar repetidamente en trabajos anteriores, desde el **año 1952**, la correspondiente **relación aritmética** no se cumple si se acepta la **representación leibniciana** de la **operación lógica** **combinación de 2 (o más) conceptos** mediante la **operación aritmética** **producto de los números característicos de esos conceptos**, por lo cual desde la fecha indicada hemos sustituido esa representación aritmética errónea de la **combinación de conceptos** por la más adecuada del **mínimo común múltiplo de los números característicos de los concepto combinados**, en la primera de las **álgebras de Boole numéricas** consideradas y por el **mínimo compuesto binario común de los números característicos de los conceptos combinados**, en la segunda.

El acierto de esta **sustitución** de la **multiplicación leibniciana** ha sido puesto de relieve en diversas ocasiones (Véase, por ejemplo, **Gino RONCAGLIA**, «**Modality in Leinbiz's**

Essays on Logical Calculus of April 1679», in «Studia Leibnitiana», XX (1988), pp. 43-62, especialmente pp. 53-54 y passim).

[88] Como es sabido, LEIBNIZ no fué capaz de representar aritméticamente al mismo tiempo la combinación de conceptos y la operación dual de ésta, la alternativa de conceptos, fallo que a COUTURAT le parece decisivo en el fracaso final de su objetivo de lograr un cálculo lógico-aritmético coherente y completo:

«Une seule fois, LEIBNIZ a eu l'idée de représenter par la multiplication ce que les modernes appellent l'addition logique, c'est-à-dire l'alternative de plusieurs concepts... Mais il n'a pu développer ce Calcul alternatif, justement parce qu'il avait représenté l'addition logique par la multiplication, ce qui l'empêchait de combiner l'addition logique avec la multiplication logique, comme il eût fallu pour constituer ce Calcul» (Louis COUTURAT, «La Logique de Leibniz», Paris: Alcan, 1901, pp. 343-344).

[89] El mínimo compuesto binario común [X, Y] de dos números racionales X e Y definidos como sumas de potencias negativas de 2 es la suma de todas las potencias negativas de 2 que son o componentes binarios de X o componentes binarios de Y (o de ambos).

[90] El máximo componente binario común (X, Y) de dos números racionales X e Y. definidos como sumas de potencias negativas de 2, es la suma de todas las potencias negativas de 2 que son a la vez componentes binarios de X y componentes binarios de Y.

[91] En la perspectiva intensional, al elemento lógico de intensión mínima, que no tiene más predicados que él mismo, ha de quedar asociado el número mínimo 0, que no tiene más componentes binarios que él mismo.

[92] Los conceptos universales son precisamente aquéllos que son predicados de todos los conceptos.

[93] Las proposiciones necesariamente verdaderas son precisamente aquéllas que son consecuencia lógica de todas las proposiciones.

[94] El número máximo del sistema es la suma de todas las potencias negativas de 2 del mismo. Si todas las potencias negativas de 2 forman parte del sistema, entonces ese número es definido como el mayor número menor que 1 y no es componente de ningún número del sistema más que de él mismo.

[95] Estos conceptos, de intensión máxima y extensión mínima no son predicados de ningún concepto salvo de ellos mismos.

[96] Estas proposiciones necesariamente falsas no son consecuencia de ninguna proposición salvo de ellas mismas.

[97] Un anillo es una estructura algebráica que define un triplete (A, +, .) en el que la ley + (que es la adición del anillo) es una ley de composición interna, asociativa y distributiva respecto de la adición. Si la multiplicación es conmutativa o tiene un elemento unidad o neutro, el anillo es conmutativo o unitario en el que todo elemento x es idempotente, es decir, tal que se verifica siempre que $x^2=x$.

[98] J. Michael DUNN: «It is well known that there are intimate connection between the two-valued propositional calculus and Boolean algebras. We shall develop a similar intimate connection between the system E^{fde} of tautological entaiments and a special algebraic structure called an intensional lattice» (J. Michael DUNN, «Intensional algebras» in Alan Ross ANDERSON and Nuel D. BELNAP, Jr., «Entailment: The Logic of Relevance and Necessity», Vol. I, Princeton University Press, 1975, §18, pp. 180-206).

[99] J. Michael DUNN, «The Algebra of Intensional Logics». University of Pittsburgh doctoral dissertation, 1966.

[100] Véase supra la nota 98.

[101] Véase supra la nota 98.

[102] «Nous avons dit que la notion d'une substance individuelle enferme une fois pour toutes ce qui luy peut jamais arriver, et qu'en considérant cette notion on y peut voir tout ce qui se pourra véritablement énoncer d'elle, comme nous pouvons voir dans la nature du cercle toutes les propriétés qu'on en peut déduir... Venons à un exemple: puisque Jules César deviendra dictateur perpetuel et ministre de la république, et renversera la liberté des Romains, cette action est comprise dans sa notion, car nous supposons que c'est la nature d'une telle notion parafaite d'un sujet, de tout comprendre, afin que le prédicat y soit enfermé, ut possit inesse subjecto» (LEIBNIZ, «Discours de Métaphysique», éd. LESTIENNE, 3ª édition, Paris: Vrin, 1962, XII, pp. 42-45).

Sobre la aritmetización de la noción de una sustancia individual, véanse mis trabajos «Essai de représentation par des nombres réels d'une analyse infinie des notions individuelles dans une infinité de mondes possibles» in «Argumentation», Kluwer, 1989, pp. 75-96 y «Représentation par des nombres réels de l'analyse infine des notions individuelles d'après Leibniz», Tradition und Aktualität», V Internationaler Leibniz-Kongress, Hannover, 14.-19. November 1988, Vortráge II. Teil, pp. 329-340.

[103] «VERITAS est inesse praedicatum subjecto. Ostenditur reddendo rationem per analysin terminorum in communes utrique notiones. Haec Analysis vel finita est, vel infinita. Si finita est, dicitur Demonstratio. Et veritas est necessaria. Reducitur enim ad veritates identicas seu ad principium primum contradictionis sive identitatis. Sin Analysis procedat in infinitum nec unquam parveniatur ad exhaustionem, Veritas est contingens quae infinitas involvit rationes...» (LEIBNIZ, C, pp. 1-2).

Recuérdese que esta comparación entre el análisis finito de las verdades necesarias y el infinito de las contingentes es puesta en paralelo —en un texto escrito a dos columnas— con una comparación, para LEIBNIZ análoga a la anterior entre el análisis finito de una relación aritmética racional —«proportio effabilis»— y una irracional —«proportio ineffabilis»— (Ibidem).

Sobre este tema, véanse los agudos y meticulosos análisis de Robert C. SLEIGH, por ejemplo «Truth and Sufficient Reason in the Philosophy of Leibniz» in M. HOOKER (ed.), «Leibniz: Critical and Interpretative Essays», Minneapolis, 1982, pp. 209-242, que el autor ha tenido la amabilidad de enviarme.

[104] Véanse mis dos trabajos citados supra en la nota 102. En lo relativo a la satisfacción de las condiciones de Cauchy para la convergencia, véase, en «Essai de représentation par des nombres» (1989), las pp. 88-90 y en «Représentation...» (1988) el Tableau VI de la p. 337.

[105] Ese número real estará comprendido, en la perspectiva adoptada en el contexto de este trabajo, como ya hemos indicado anteriormente, en el intérvalo semi-abierto [0, 1[.

[106] Véase Luca PACIOLI di Borgo (1455?-1514), «De divina proportione», 1509. Edición española: Luca PACIOLI, «La divina proporción». Introducción de Antonio M. GONZÁLEZ. Traducción de Juan CALATRAVA. Madrid: Akal, 1987, así como las obras del rumano Matila GHYKA (1881-1965), especialmente «Le Nombre d'Or: Rites et Rythmes pythagoriciens dans le développement de la civilisation occidentale». Précédé d'un lettre de Paul VALERY. Paris: Gallimard, 1931 (reimpresión: 1959); «Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts» (1934) y «Philosophie et mystique du Nombre», Paris: Payot, 1985, en las cuales GHYKA trata, entre otros temas de inspiración neo-pitagórica, pero de modo muy preferente, del numero Φ (número de oro, sección áurea) y su importante papel en la naturaleza (crecimiento armónico o sin cambio de forma), en la arquitectura, en la pintura, etc., destacando la relación entre esta sección, el pentágono regular y el dodecaedro regular. Véase lo que decimos sobre el tema al tratar de los poliedros regulares en las notas 1, 2 y 4.

[107] Véanse, en efecto, los textos siguientes de LEIBNIZ:

1. «Si A explicando prodit B non B, A est impossibile... Si A sit B non B, A est non Ens» (C, 259);

2. «Contradictorium est B non B... Si A est B non B, A est non Ens... Impossibilis est terminus vel Non Ens, qui si ponitur esse, sequitur esse contradictorium. Possibilis est terminus vel Ens vel Reale ex quo nihil tale sequitur» (C, 261);

3. «Quod continet B non B, idem est quod impossibile» (C, 368); verus est non-falsus» (C, 397);

5. «Cui inest A non A est non Ens seu terminus falsus» (C, 421).

6. «Nous joignons souvent des notions incompatibles, en sorte que le composé enferme contradiction» (Carta a Simon Foucher de 1686, GP, 1.384.26).

[108] «Terminus simpex est in quo non nisi est unus, ut. a. Terminus compositus est qui constat ex pluribus, ut ab. Terminus primitivus (derivativus) est cujus nullus (aliquis) compositus aequivalet» (C, 242).

[109] Daremos aquí dos definiciones equivalentes de «término saturado», a saber:

1. «Un término s está saturado en un conjunto U si y solamente si, para todo término x, arbitrariamente elegido, del conjunto U, la combinación o conjunción intensional s&x es lógicamente equivalente ya a s, ya al término imposible (no-Ser);

2. Un término x está saturado en un conjunto U si y sólo si, para todo par x y -x (no x) de términos opuestos del conjunto U, s contiene intensionalmente uno de ellos y es incompatible con el otro.

[110] Cf. la nota 6 sobre la relación de perfecciones y existencia y nota 7 sobre límites cualitativos del universo.

[111] Recuérdese que el argumento para la demostración de la existencia de Dios enunciado por San ANSELMO (1035-1109) en el «Proslogion» y llamado, desde KANT, «argumento ontológico» o «prueba ontológica» pretende proporcionar un paso deductivo desde la formulación de la esencia de Dios a la afirmación de su existencia.

[112] Según observa COUTURAT, «pour LEIBNIZ, toutes les idées simples sont compatibles entre elles —voir le fragment intitulé «Quod Ens perfectissimum existit», où LEIBNIZ démontre: «omnes perfectiones esse compatibiles inter se, sive in eodem esse posse subjecto» (Phil, VII, 264). Ce fragment date de 1676, puisque LEIBNIZ dit l'avoir soumise à SPINOZA à La Haye—» (COUTURAT, «La Logique de Leibniz», pp. 194-195.

[113] GP, 4.296.17.

[114] «Or, je soutiens que toutes les formes simples sont compatibles entre elles. C'est une proposition dont je ne sçaurais bien donner la demonstration sans expliquer au long les fondements de la characteristique. Mais si elle est accordée, il s'ensuit que la nature de Dieu qui enferme toutes les formes simples absolument prises, est possible. Or, nous avons prouvé cy dessus que, Dieu est, pourvu qu'il soit possible. Donc il existe. Ce qu'il fallait démontrer» (L.c. en la nota 113 supra).

[115] En efecto, pretendiendo aplicar, de modo inadecuado por hacerlo interpretando la inclusión entre términos desde la perspectiva de la extensión, un esquema basado en los círculos de EULER al silogismo Celarent, interpretado por LEIBNIZ desde la perspectiva intensional, COUTURAT observa extrañado: «Au point de vue de la compréhension, ..., le moyen terme B, contenu dans le petit terme A, en exclut le grand terme C qu'il exlut lui-même. Cela ne ressort certes pas de la figure, et ne peut se comprendre qu'en imaginant entre les termes B et C une sorte de repulsion, plutôt morale que physique, comme si la présence de B dans A bannissait C de ce domaine en lui interdisant l'entrée» (COUTURAT, «La Logique de Leibniz», pp. 22).

[116] «Cela prouve, encore une fois, que les rapports de compréhension ne sont pas susceptibles de figuration géométrique comme les rapports d'extension, et qu'il ne suffit pas de renverser ou d'intervertir ceux-ci pour en tirer ceux-là. LEIBNIZ s'était donc trompé en croyant que les uns étaient purement et simplement inverses des autres; nous verrons que cette erreur a entaché ses essais de Calcul logique et a contribué à les faire avorter» (L.c., p. 32).

[117] Véanse, ante todo, a este respecto, dos importantes trabajos del lógico alemán —especialista en LEIBNIZ, FREGE y GÖDEL— Christian THIEL, Professor de Lógica de la Universidad de Erlangen, a saber:

1. «**Die Quantität der Inhalt. Zu Leibnizens Erfassung der Intensionalsbegriff durch Kalküle und Diagramme**» in A. **HEINEKAMP** y F. **SCHUPP** (editores), «**Die intensionale Logik bei Leinbiz und in der Gegenwart**», Symposion der Leibniz-Gesellschaft, Hannover (10-11 de Noviembre de 1978), Wiesbaden: Steiner, **1979**, pp. 10-23. En este trabajo, **THIEL**, después de analizar y discutir los argumentos y gráficos de **COUTURAT** en relación con la cuestión aquí debatida y constatar su error, manifiesta lo siguiente: «Meiner Kenntnis hat **Miguel Sánchez-Mazas** das Verdienst, **dieses Urteil berichtigt zu haben**, indem er aufzeigte dass **Couturat bei seine Argumentation ein Fehler unterlaufen ist**, der seine Folgerungen als verfrüht, wenn nicht als überhaupt unbegründet erweist... **Sánchez-Mazas hat gegenüber Couturat Recht**» (L.C., pp. 18-19). Toda la discusión del asunto por **THIEL** en ese trabajo ha sido reproducida en nuestro artículo «**Actualisation, développement et perfectionnement des calcus logiques arithmético-intensionnels de Leibniz**» (**THEORIA**, Segunda Época, Año VI, N° 14-15, Octubre **1991**, pp. 175-259), nota 1, pp. 231-233.

2. «**Straightening Leibniz's Diagram Calculi**» (**THEORIA** Segunda Época, Año VI, N° 14-15, pp. 363-368). En este trabajo **THIEL** dice así: «In a paper read at the symposium «**Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart**», held in Hannover in November **1978**, I described muy version of **Leibniz's** diagrams for an **intensional interpretation** of the modi of (assertoric) syllogistics. **This procedure rested on Sánchez-Mazas' refutation of Couturat statement of 1901 that Leibniz had committed a fatal error in his intensional interpretation of syllogistic reasoning which, Couturat claimed, was not capable of geometrical representation like its now familiar extensional interpretation**» (L.c., p. 363).

[118] Véase nuestra comunicación «**Un modèle mathématique de la logique peut-il se fonder sur l'intension?**» in **Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles**, Berne, **1977**, pp. 361-387. La **nota 10** (pp. 381-382) de este trabajo está enteramente dedicada a refutar a **COUTURAT**, demostrando sus errores tanto de **interpretación** como de **representación geométrica**. La nota se ha reproducido en mi trabajo «**Actualisation...**» (**1991**) citado en la **nota 117** supra, pp. 229.230.

[119] Véanse, a este respecto, los textos de **LEIBNIZ** que hemos reproducido en la **nota 107** supra.

[120] Se trata de los **cálculos lógicos** contenidos en los **dos últimos ensayos** (5 y 6) enumerados en la **nota 83** supra y en los ensayos siguientes:

«**Calculus consequentiarum**» (C, pp. 84-89);

«**Regulae quibus observatis de bonitate consequentiarum per numeros judicari potest**» (C, pp. 89-92);

«**Sur les nombres caractéristiques**» (C, pp. 245-247);

«**Notes de Calcul logique**» (C, pp. 324-326).

[121] Los **cálculos del primer tipo** son los contenidos en los **cuatro primeros ensayos** (1, 2, 3 y 4) enumerados en la **nota 83** supra.

Debemos señalar aquí que, a pesar de que **LEIBNIZ** no logró sus objetivos tampoco con los **cálculos del segundo tipo**, es innegable que éstos representan, con todo, un progreso innegable respecto de los del **primer tipo**, progreso que quedó **implícito** y que **LEIBNIZ** no pudo explotar directamente, aunque sí lo harían en la época actual **ŁUKASIEWICZ** y **SLUPECKI** en la obra que citamos en la **nota 123** **infra**.

[122] Apuntamos ya esta idea en nuestra ponencia «**Un modelo aritmético de la silogística**» **in** «**Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia**», Actas del Seminario del **I.N.C.I.E.**, Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, **1981**, pp. 38-39. Podemos precisar aquí algo más nuestra opinión a este respecto señalando que, definido nuestro **número hipersaturado** en el **álgebra de Boole numérica de los divisores de un número natural** M (**primera** de las **álgebras de Boole numéricas** consideradas —veánse las **notas 86** y **87** supra), precisamente como el **supremo de todos los números del conjunto**, **múltiplo** de todos ellos y **producto de todos los números primos** de aquél, supongamos, en el marco de los **cálculos leibnicianos que hemos llamado del segundo tipo**, que el **producto de los dos números característicos asociados por LEIBNIZ** en los mismo a un concepto —por ejemplo, S_1 y S_2 para un concepto S; P_1 y P_2 para un concepto P, etc.— sea siempre **igual a una** **constante** y que esa constante es precisamente nuestro **número hipersaturado M** que acabamos de definir:

$$S_1xS_2 = P_1xP_2 = ... = M$$

En este supuesto, tendríamos las siguientes consecuencias:

1. Si los **números característicos** utilizados son siempre **productos de números primos** pero **nunca múltiplos de potencias de los mismos** —lo cual parece lógico en la **aritmetización de LEIBNIZ**, pues la repetición de factores primos sería redundante—, entonces quedaría satisfecha la **exigencia principal de LEIBNIZ** al pasar a su **cálculos del segundo tipo**, a saber: **que los dos números característicos de un mismo concepto**, S_1 y S_2 por un lado, P_1 y P_2 por otro, etc. **sean siempre primos entre sí**.

En efecto, en los supuesto mencionados tendríamos:

S_2 =M/S_1, luego S_1 y S_2 son primos entre sí;
P_2 =M/P_1, luego P_1 y P_2 son primos entre sí;

2. En estos supuesto, si el **primer número característico de cada concepto** (S_1, P_1, etc.) es el **producto de los números primos** correspondientes a los **conceptos simples que son predicados del concepto** dado, tendremos que el **segundo número característico** (S_2, P_2, etc.) sería el **número característico del concepto complementario, negación del dado**, por ser el **producto de todos los números primos asociados a los conceptos simples que** **no son** **predicados del concepto dado**.

3. Se satisfacen así también las condiciones numéricas siguientes para la verdad de la universal afirmativa y de la universal negativa:

3a. Si todo S es P, S_1 ha de ser divisible por P_1 (y P_2 por S_2) y recíprocamente:

y, a la vez:

3b. Si ningún S es P, S_1 y P_2 han de tener algún factor común (e igualmente P_1 y S_2).

¿No sugieren estas reflexiones que LEIBNIZ utilizaba en sus cálculos del segundo tipo, ya de un modo explícito, ya más probablemente, de modo implícito una concepción en la cual una misteriosa constante —nuestro número hipersaturado— jugaba un papel esencial?

Claro que en este supuesto, LEIBNIZ hubiera podido, más sencillamente, volver a los cálculos que asocian un solo número característico a cada concepto, pero agregándoles la constante M y asociándola al non-Ens, con lo cual hubiera podido aritmetizar correctamente la negación y las universales negativas, que era lo que le faltaba y nosotros hemos intentado suplir.

[123] Jan ŁUKASIEWICZ, «Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic». Second Edition Enlarged. Oxford: Clarendon Press, 1957.

[124] L.c., Chap. V, §34: An arithmetical interpretation of the syllogistics, pp. 126-129. ŁUKASIEWICZ concluye esa sección con estas palabras: «LEIBNIZ once said that scientific and philosophic controversies could always be settled by a calculus. It seems to me that his famous 'calculemus' is connected with the above arithmetial interpretation of syllogistic rather than with his ideas on mathematical logic» (L.c., p. 129).

[125] Pongamos, como ejemplo significativo de lo que decimos, el párrafo 108 de las «Generales Inquisitiones de Analysi Notionum et Veritatum» (C, pp. 356-399), que comienza así: «Omnis terminus etiam incomplexus potest haberi pro propositione...» (L.c., p. 381). (Citado por Lorenzo PEÑA en el trabajo que mencionamos en la nota 127 infra).

[126] Héctor Neri CASTAÑEDA, «Leibniz's Syllogistico-Propositional Calculus» in «Notre Dame Journal of Formal Logic», Vol. 17 (1976), pp. 481-500.

[127] Lorenzo PEÑA, «De la logique combinatoire des 'Generales Inquisitiones' aux calcus combinatoires contemporains» in THEORIA, Segunda Época, Año VI, N° 14-15, Octubre 1991, pp. 129-159.

[128] Un filtro es, como se sabe, un conjunto no vacío F de las partes de un conjunto E tal que:

1. Toda parte de E que contiene un elemento de F pertenece a F;
2. La intersección de un número finito de elementos de F pertenece a F;
3. La parte vacía $\varnothing$ no pertenece a F.

Un **filtro de Fréchet** es un **filtro** sobre el conjunto N de los enteros naturales cuyos elementos son los complementarios en N de las partes finitas de N. En otras palabras, es el **filtro** inducido por el **filtro de los entornos de** $+\infty$.

Un **ultrafiltro** es todo **elemento máximo** del conjunto ordenado de los **filtros** sobre el conjunto **E**.

[129] Véase la **nota 94**.

[130] Representemos las **anulaciones** por **fórmulas** del tipo N(=0) y las **no anulaciones** por **fórmulas** del tipo N(≠0), donde N es el **número característico** (inicialmente distinto de 0) de cualquier **elemento lógico** del sistema formal de partida.

En un marco semejante, la introducción en el **sistema formal** de partida de **premisas**, para la **deducción por vía numérica de consecuencias** se traduciría aritméticametne en la **introducción de fórmulas de anulación o no anulación**, para estudiar sus **consecuencias**.

APENDICE - CUADRO L

LOGICA MODAL ALETICA. I: Números característicos del intérvalo semi-abierto [0, 1[escritos en hexadecimal y asociados a las fórmulas básicas de la lógica modal alética para 3 variables.

M(PVQVR)	0,8	M(PVQ)	0,C00000C	MP	0,F000F0F	M(P&Q)	0,FCCCF0FC8	M(P&Q&R)	0,FEEEFAFCA088
M(PVQV-R)	0,4	M(PV-Q)	0,3000003	M-P	0,0F000F0F	M(P&-Q)	0,F333F0F31	M(P&Q&-R)	0,FDDDF5FCC044
M(PV-QVR)	0,2	M(-PVQ)	0,0C00000C	MQ	0,CCCC00CC	M(-P&Q)	0,CFCC0FCF08	M(P&-Q&R)	0,FBBBFAF33022
M(PV-QV-R)	0,1	M(-PV-Q)	0,03000003	M-Q	0,33330033	M(-P&-Q)	0,3F330F3F01	M(P&-Q&-R)	0,F777F5F35011
M(-PVQVR)	0,08	M(PVR)	0,A000A	MR	0,AAAAAA	M(P&R)	0,FAAAFAF02	M(-P&Q&R)	0,EFEEAFCF0A808
M(-PVQV-R)	0,04	M(PV-R)	0,50005	M-R	0,555555	M(P&-R)	0,F555F5F04	M(-P&Q&-R)	0,DFDD5FCF0C404
M(-PV-QVR)	0,02	M(-PVR)	0,0A000A			M(-P&R)	0,AFAAAF0F02	M(-P&-Q&R)	0,BFBBAF3F03202
M(-PV-QV-R)	0,01	M(-PV-R)	0,050005			M(-P&-R)	0,5F555F0F04	M(-P&-Q&-R)	0,7F775F3F05101
		M(QVR)	0,8888			M(Q&R)	0,EEEEAACC008		
		M(QV-R)	0,4444			M(Q&-R)	0,DDDD55CC004		
		M(-QVR)	0,2222			M(-Q&R)	0,BBBBAA33002		
		M(-QV-R)	0,1111			M(-Q&-R)	0,77775533001		

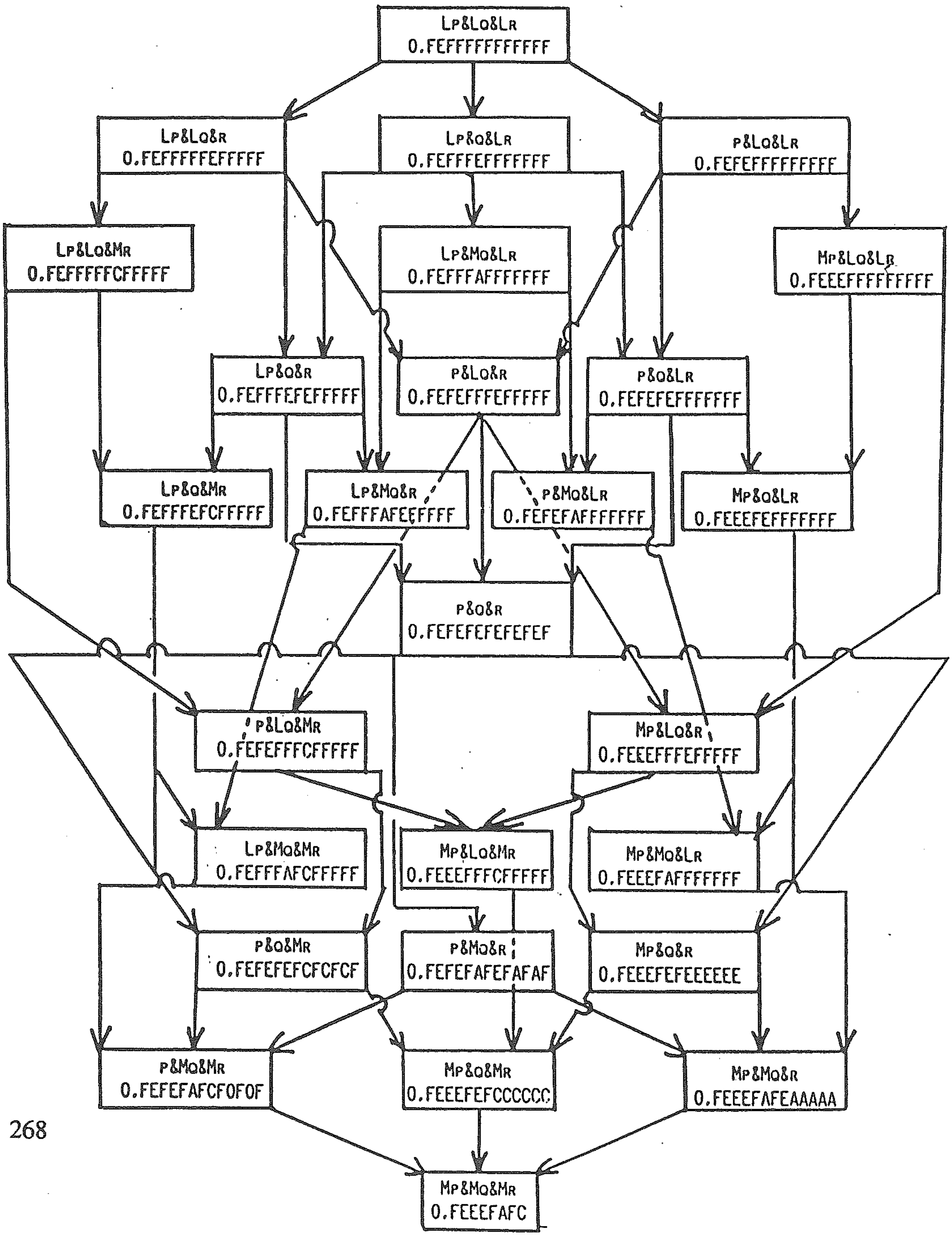
PVQVR	0,8080808080808	PVQ	0,C0C0C0C0C0C0C	P	0,F0F0F0F0F0F0F	P&Q	0,FCFCFCFCFCFCF	P&Q&R	0,FEFEFEFEFEFEF
PVQV-R	0,4040404040404	PV-Q	0,3030303030303	-P	0,0F0F0F0F0F0F	P&-Q	0,F3F3F3F3F3F3F	P&Q&-R	0,FDFDFDFDFDFDF
PV-QVR	0,2020202020202	-PVQ	0,0C0C0C0C0C0C0C	Q	0,CCCCCCCCCCCCC	-P&Q	0,CFCFCFCFCFCFC	P&-Q&R	0,FBFBFBFBFBFBF
PV-QV-R	0,1010101010101	-PV-Q	0,030303030303	-Q	0,3333333333333	-P&-Q	0,3F3F3F3F3F3F3	P&-Q&-R	0,F7F7F7F7F7F7F
-PVQVR	0,080808080808	PVR	0,A0A0A0A0A0A0A	R	0,AAAAAAAAAAAAA	P&R	0,FAFAFAFAFAFAF	-P&Q&R	0,EFEFEFEFEFEFE
-PVQV-R	0,040404040404	PV-R	0,5050505050505	-R	0,5555555555555	P&-R	0,F5F5F5F5F5F5F	-P&Q&-R	0,DFDFDFDFDFDFD
-PV-QVR	0,020202020202	-PVR	0,0A0A0A0A0A0A			-P&R	0,AFAFAFAFAFAFA	-P&-Q&R	0,BFBFBFBFBFBFB
-PV-QV-R	0,010101010101	-PV-R	0,050505050505			-P&-R	0,5F5F5F5F5F5F5	-P&-Q&-R	0,7F7F7F7F7F7F7
		QVR	0,8888888888888			Q&R	0,EEEEEEEEEEEEE		
		QV-R	0,4444444444444			Q&-R	0,DDDDDDDDDDDDD		
		-QVR	0,2222222222222			-Q&R	0,BBBBBBBBBBBBB		
		-QV-R	0,1111111111111			-Q&-R	0,7777777777777		

L(PVQVR)	0,8088A0C0FAEFE	L(PVQ)	0,C0CCF0C0FEFFF	LP	0,F0FFF0F0FFFFF	L(P&Q)	0,FCFFFFFCFFFFF	L(P&Q&R)	0,FEFFFFFFFFFFF
L(PVQV-R)	0,404450C0FCDFD	L(PV-Q)	0,3033F030F7FFF	L-P	0,0FFF0F0FFFFFF	L(P&-Q)	0,F3FFFFF3FFFFF	L(P&Q&-R)	0,FDFFFFFFFFFFF
L(PV-QVR)	0,2022A030F3BFB	L(-PVQ)	0,0CCC0F0CEFFFF	LQ	0,CCCCFFCCFFFFF	L(-P&Q)	0,CFFFFFCFFFFFF	L(P&-Q&R)	0,FBFFFFFFFFFFF
L(PV-QV-R)	0,10115030F57F7	L(-PV-Q)	0,03330F037FFFF	L-Q	0,3333FF33FFFFF	L(-P&-Q)	0,3FFFFF3FFFFFF	L(P&-Q&-R)	0,F7FFFFFFFFFFF
L(-PVQVR)	0,08880A0CAFEEF	L(PVR)	0,A0AAA0F0FBFFF	LR	0,AAAAAAFFFFFFF	L(P&R)	0,FAFFFAFFFFFFF	L(-P&Q&R)	0,EFFFFFFFFFFFF
L(-PVQV-R)	0,0444050CCFDDF	L(PV-R)	0,505550F0FDFFF	L-R	0,555555FFFFFFF	L(P&-R)	0,F5FFF5FFFFFFF	L(-P&Q&-R)	0,DFFFFFFFFFFFF
L(-PV-QVR)	0,02220A033FBBF	L(-PVR)	0,0AAA0A0FBFFFF			L(-P&R)	0,AFFFAFFFFFFFF	L(-P&-Q&R)	0,BFFFFFFFFFFFF
L(-PV-QV-R)	0,011105035F77F	L(-PV-R)	0,0555050FDFFFF			L(-P&-R)	0,5FFF5FFFFFFFF	L(-P&-Q&-R)	0,7FFFFFFFFFFFF
		L(QVR)	0,8888AACCFFEFF			L(Q&R)	0,EEEEFFFFFFFFF		
		L(QV-R)	0,444455CCFFDFF			L(Q&-R)	0,DDDDFFFFFFFFF		
		L(-QVR)	0,2222AA33FFBFF			L(-Q&R)	0,BBBBFFFFFFFFF		
		L(-QV-R)	0,11115533FF7FF			L(-Q&-R)	0,7777FFFFFFFFF		

APENDICE - CUADRO II.

LOGICA MODAL ALETICA. II. Red de implicaciones entre fórmulas modales aléticads para 3 variables y red numérica asociada de absorciones entre los números característicos respectivos.

A. Fórmulas conjuntivas.

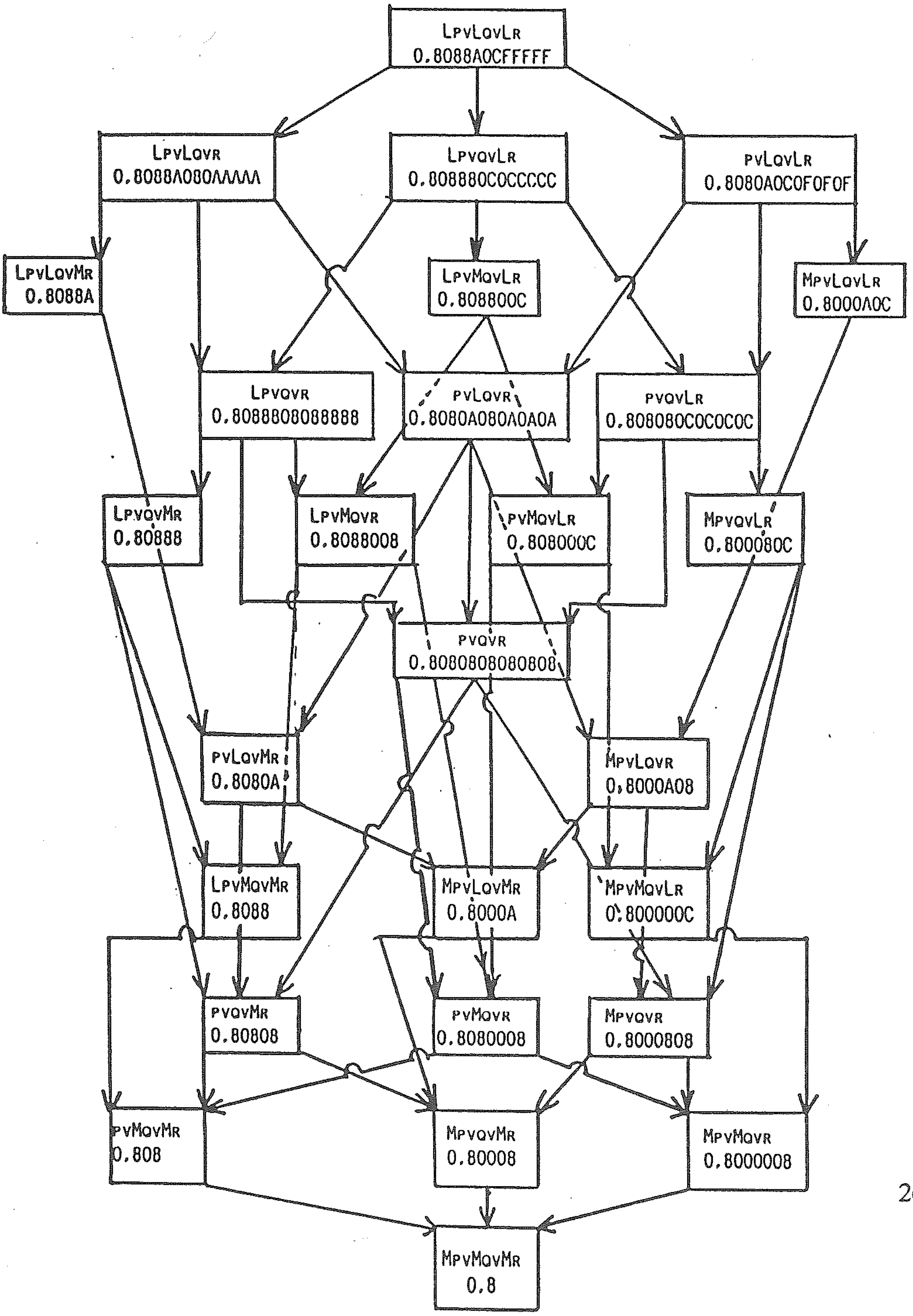


APENDICE - CUADRO III.

LOGICA MODAL ALETICA. II: Red de implicaciones entre fórmulas modales aléticas para 3 variables y red numérica asociada de absorciones entre los números característicos respectivos.

B. Fórmulas disyuntivas.

II. Red de implicaciones entre fórmulas modales aléticas para 3 variables y red numm



APENDICE - CUADRO IV. I.

Comparación de los resultados obtenidos respecto de una exigencia de invariancia semántica entre la aritmetización gödeliana y una aritmetización de raíz leibniciana.

I. Aplicación de la aritmetización gödeliana a tres ejemplos de equivalencia de fórmulas:

Asociación de números a los signos de las fórmulas:	
variables proposicionales:	
p	15
q	18
r	21
conectivas:	
−	4
v	5
&	6
paréntesis:	
(	12
)	13

Primer ejemplo: fórmulas equivalentes en virtud de la asociatividad de la disyunción:

(p v q) v r

número de Gödel de la fórmula:

$2^{12} \times 3^{15} \times 5^{5} \times 7^{13} \times 11^{13} \times 13^{5} \times 17^{21}$

fórmula equivalente a la precedente:

p v (q v r)

número de Gödel de la fórmula:

$2^{15} \times 3^{5} \times 5^{12} \times 7^{18} \times 11^{5} \times 13^{21} \times 17^{13}$

la exigencia leibniciana respecto de la equivalencia no se satisface.

Segundo ejemplo: fórmulas equivalentes en virtud de la ley de la doble negación:

p

número de Gödel de la fórmula:

15

fórmula equivalente a la precedente:

−−p

número de Gödel de la fórmula:

$2^{4} \times 3^{4} \times 5^{15}$

la exigencia leibniciana respecto de la equivalencia no se satisface.

Tercer ejemplo: fórmulas equivalentes en virtud de la ley distributiva que relaciona disyunción y conjunción:

p v (q & r)

número de Gödel de la fórmula:

$2^{15} \times 3^{5} \times 5^{12} \times 7^{18} \times 11^{6} \times 13^{21} \times 17^{13}$

fórmula equivalente a la precedente:

(p v q) & (p v r)

número de Gödel de la fórmula:

$2^{12} \times 3^{15} \times 5^{5} \times 7^{18} \times 11^{13} \times 13^{6} \times 17^{12} \times 19^{15} \times 23^{5} \times 29^{21} \times 31^{13}$

la exigencia leibniciana respecto de la equivalencia no se satisface.

APENDICE - CUADRO IV. II.

II. Aplicación de una aritmetización de raíz leibniciana basada en invariantes numéricos de las clases de equivalencia lógica -perspectiva semántica frente a la sintáctica de Gödel- a los mismos ejemplos utilizados para la aplicación de la aritmetización gödeliana.

Asociación a las variables proposicionales de números enteros escritos en hexadecimal (véase su génesis aritmética en el cuadro siguiente):

p	F
q	33
r	55

Asociación a las operaciones lógicas, de forma recursiva, de operaciones aritméticas binarias:

- (N polaco) complemento (diferencia aritmética) entre el número máximo FF y el número G argumento de la operación aritmética: FFF-G

v (A polaco) ínfimo (máximo componente binario común) de los números G, H, ... argumentos de la operación aritmética: (G, H, ...)

& (K polaco) supremo (mínimo compuesto binario común) de los números G, H, ... argumentos de la operación aritmética: [G, H, ...]

Primer ejemplo:

(pvq)vr	((F, 33), 55) = (C, 55) = 1
pv(qvr)	(F, (33, 55) = (F, 11) = 1

Segundo ejemplo:

p	F
—p	FF-(FF-F) = 0+F = F

Tercer ejemplo:

pv(q&r)	(F [, 55]) = (F, 77) = 7
(pvq)&(pvr)	[(F, 33), (F, 55)] = [3, 5] = 7

En los tres ejemplos se satisface en nuestra aritmetización la exigencia leibniciana respecto de la equivalencia.

NOTA IMPORTANTE: Cada una de las cifras del resultado de una operación binaria sobre números escritos en hexadecimal es el resultado de esa operación sobre las cifras del mismo orden de los primeros.

La verificación de las relaciones binarias obedece al mismo principio.

Es superfluo destacar hasta qué punto esta ventaja incrementa la eficacia y rapidez del tratamiento manual de los números asociados aquí a los elementos lógicos.

Al hablar aquí de operaciones binarias, en el contexto de nuestra aritmetización neoleibniciana de la lógica, nos referimos -es importante la precisión- estrictamente a las que hemos definido como complemento, ínfimo y supremo y sus derivadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDERSON, Alan Ross and BELNAP, Nuel D., Jr.: Entailment: The Logic of Relevance and Necessity. With contributions by **J. Michael DUNN - Rober K. MEYER**. Princeton University Press, Vol. I, 1975.

ARISTOTE: La Métaphysique. Nouvelle Edition entièrement refondue avec commentaires, par **J. TRICOT**. Tome I, Paris: Vrin, 1953.

ARISTOTE: Organon: IV. Les Premiers Analytiques. Traduction nouvelle et notes para **J. TRICOT**. Paris: Vrin, 1971.

ARISTOTELES: «Tratados de Lógica (el Organon)». Estudio introductivo, preámbulo a los tratados y notas al texto por **Francisco LARROYO**. Quinta Edición. México: Porrúa, 1979. **Pirmeros Analíticos**, pp. 71-148.

BACHIR DIAGNE, Souleymane: Boole (1815-1864): L'oiseau de nuit en plein jours. Avec des notes et annexes de **Marie-José DURAND**. Un savant, une époque. Collection dirigée para **Jean DHOMBRES**. Paris: Belin, 1985.

BOCHEŃSKI, I.M.: Historia de la Lógica Formal, Edición española de **Millán BRAVO LOZANO**. Madrid: Gredos, 1966.

BOECK, August: Corpus inscriptionum Graecarum. Berlin: ex officina academica, 1828-1877.

BOOLE, Georges: «Exposition of a General Theory of Linear Transformations» in **Cambridge Mathematical Journal**, vol. 3, 1842, Part I, pp. 1-20; Part II, pp. 106-119.

BRENTANO, Franz: Psychologie vom empirischen Standpunkt. Mit Einleitung, Anmerkungen und Register herausgegeben von **Oskar KRAUS**. Zweiter Band: **Von der Klassification der psychischen Phänomene.** Mit neuen Abhandlungen aus dem Nachlass. Hamburg: Felix Meiner, 1925. Reedición: 1971.

BRENTANO, Franz: Psychologie du point de vue empirique. Traduction et préface de **Maurice de GONDILLAC**. Paris: Aubier Montaigne, 1946.

BURKHARDT, Hans: Logik und Semiotik in der Philosophie von Leibniz. München: Philosophia, 1980.

CANTOR, Moritz: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Erster Band. Leipzig: Teubner, 1907.

CASTAÑEDA, Héctor-Neri: «Leibniz Syllogistico-Propositional Calculus» in **Notre Dame Journal of Formal Logic**, vol. 17 (1976), pp. 481-500.

CAYLEY, Arthur: Memoirs of Quantics (1854-1878) in **CAYLEY, Arthur: The Collected mathematical papers**, 14 vol., Cambridge, 1889-1898.

CHAIGNET, A. Ed.: Pythagore et la philosophie pythagoricienne. Contenant les fragments de Philolaüs et d'Archytas (traduits pour la première fois en français. Paris: Didier, 1873.

CHURCH, Alonzo: «The History of the Question of Existential Import of Categorial Propositions» in **Proceedings of the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science** (Jerusalem), Amsterdam: North-Holland, 1965, pp. 417-424.

COUTURAT, Louis: **La Logique de Leibniz d'après dès documents inédits**. Paris: Alcan, 1901. Reedición facsímil: Hildesheim: Olms, 1969.

COXETER, H.S.M.: **Regular Complex Polytopes.** Second Edition. Cambridge University Press, 1991.

DAVIS, Philip J./HERSH, Reuben: **L'Univers Mathématique.** Traduit et adapté de l'américain par **Luicien CHAMBADAL**. Ouvrage publié avec le concours du Centre National des Lettres. Paris: Gauthier-Villars, 1985.

DESANTI, Jean T.: «Une crise de développement exemplaire: la découverte des nombres irrationnels» in **PIAGET, Jean: logique et conaissance scientifique.** Paris: La Pléiade, 1976, pp. 439-464.

DIELS, Hermann: **Doxographi Graeci collegit recensuit prolegomenis indicibusque instruxit Hermannus Diels**. Berlin, 1879. Editio iterata, 1929. Contiene, entre otros textos, las **Aeti de placitis reliquae.**

DIELS, Hermann: **die Fragmente der Vorsokratiker**. Hersg. von **Walter KRANZ**. 3 vol. Dublin/Zürich: Weidmann, 1903. Reimpresión: 1969.

DIOGENE LAËRCE: **Vie, doctrine et sentences des philosophes illustre**. Traduction, notice et notes par **Robert GENAILLE**. 2 vol. Paris: Garnie Flammarion, 1965.

DUNN, J. Michael: **The algebra of intensional logics**. University of Pittsburgh doctoral dissertation, 1966.

ECHEVERRÍA, Javier: **Análisis de la Identidad (Prolegómenos)**. Madrid: Granica, 1987.

EUCLIDES: **Euclidis Elementa**. Edidit et latine interpretatus est. **I.L. HEIBERG**. Lipsiae: In aed. B.G. Teubneri. 5 vol.:

VOL. I.	**Libros I-IV continens, 1883;**
VOL. II.	**Libros V-IX continens, 1884;**
VOL. III.	**Librum X continens, 1886;**
VOL. IV.	**Libros XI-XIII continens, 1885;**
VOL. V.	**Continens Elementorum qui feruntur Libros XIV-XV et Scholia in Elementa cum prlegomenis criticis et appendicibus, 1888.**

EUCLIDE: **Les Eléments**. Texte grec et traduction française libre par George J. KAYAS. 2 vol. Paris: éditions du C.N.R.S., 1978.

EUCLIDE 'Alexandrie: **Les Eléments.** Traduit du texte de **HEIBERG**. 4 vol. Introduction Générale para **Maurice CAVEING**; Livres I-IV: Géométrie plane. Traduction et commentaires par **Bernard VITRAC**. Paris: Presses Universitaires de France, 1990.

FRANK, Erich: **Platon und die sogenannten Pythagoreer**. Halle: Max Niemeyer, 1923.

FREGE, Gottlob: **Nachgelassene Schriften**. Hamburg: Meiner, 1969.

FREGE, Gottlob: «Sur le but de l'idéographie» in **FREGE, Gottlob: Écrits logiques et philosophiques.** Traduction et introduction de **Claude IMBERT**. Paris: Editions du Seuil, 1971. pp. 70-79.

FRITZ, Kurt von: **Theaitetos** in **Paulys Real-Enziklopädie der klassischen Altertumswissenschaft**. Neue Bearbeitung. Begonnen von **Georg WISSOWA**. Hersg. von

W. KROLL und K. MITTELHAUS Zw. Reihe. Fünfter Band. Stuttgart: Metzlersche Verlagsbuchhandlung, 1934.

FRITZ, Kurt von: «The Discovery of Incommensurability by Hippias von Metapontum» in **Annals of Mathematics**, vol. 46, N.2 (April 1945), pp. 242-264.

FRITZ, Kurt von: **Platon, Theaetet un die antike Mathematik**. Mit einem Nachtrag zum Neudruck. Darmstadt. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1969.

GARCÍA BACCA, Juan David: **Textos clásicos para la historia de las ciencias**. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Instituto de Filosofía, 1961.

GHYKA, Matila C.: **Esthétique des Proportions dans la Nature et dans les Arts**. Paris: Gallimard, 1927.

GHYKA, Matila C.: **Le Nombre d'Or. Rites et Rythmes Pythagoriciens dans le Développement de la Civilisation Occidentale**. Précédé d'une lettre de Paul VALERY. 2 vol. I. **Les Rythmes**; II. **Les Rites**. Paris: Gallimard, 1931. Reimpresiones: 1939, 1959.

GHYKA, Matila C.: **Philosophie et Mystique du Nombre**. Paris: Payot, 1985.

HANKEL, Hermann: **Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter**. Leipzig, 1874.

HEIBERG, Johann-Ludwig: **Geschichte der Mathematik**. München: C.H. Beck, 1913.

HILBERT, David: **Gesammelte Abhandlunge**. 3 vol. Berlin, 1932-1935. Segunda edición: 1970.

HISTOIRE DE LA PHILOSOPHIE. **I. Orient-Aniquité-Moyen** Âge. Vol. publié sous la direction de Brice PARRAIN. Paris: La Pléiade, 1969. Reimpresión: 1979.

JAMBLICHUS: **De vita pythagorica liber**. L. Deubner, 1937.

JUNGE, G.: **Wann haben die Griechen das irrationale entdeckt?** Halle a.S.: Wisenhausbuchhandlung, 1907.

KALINOWSKI, Georges: **Sémiotique et Philosophie: à partir et à l'encontre de Husserl et de Carnap**. Ouvrage publié avec le concours du C.N.R.S. Paris: Hadès-Benjamins, 1985.

KLIBANSKY, Raymond, PANOFSKY, Erwin et SAXL, Fritz: **Saturne et la Mélancolie. Études Historiques et Philosophiques: Nature, Religion, Médecine et Art**. Traduit de l'anglais et d'autres langues par Fabienne DURAND-BOGAERT et Louis EVRAD. Ouvrage publié avec le concours du Centre National des Lettres. Paris: Gallimard, 1989. Edición original inglesa: **Saturn and Melancholy. Studies of Natural Philsophy, Religion and Art. Nelson, 1964. Repr. Kraus, 1979.**

KLEIN, Felix: **Vergleichende Betrachtungen über neuere Geometrie Forschungen** («Erlanger programm»). Erlangen, 1872. Reedición in **Mathematische Annalen**, XLIII (1893).

KLEIN, Felix: **Le Programme d'Erlangen. Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes**. préface de J. DIEUDONNÉ. Postface du P. François RUSSO S.J. Paris: Gauthier-Villars.

KNECHT, Herbert H.: **La Logique chez Leibniz. Essai sur le Rationalisme baroque**. Lausanne: L'Âge d'Homme, 1981.

LADRIÈRE, Jean: **les limitations internes des formalismes. Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques**. Collection de Logique mathématique. Série B. Monographies réunies par M.R. FEYS. Louvain: Nauwelaerts/Paris: Gauthier-Villars, 1957.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm:

C = **Opuscules et fragments inédits de Leibniz. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre** par Louis COUTURAT. Paris: Alcan, 1903.

GP = **Die Philosophische Schriften von G.W. Leibniz**, ed. C.I. GERHARDT. 7 vol. Belin, 1875-1890.

Dissertatio de Arte Combinatoria... Autore Gottfredo Guilielmo Leibnuzio Lipsiensi...Lipsiae: Apud Joh. Simon Fickium et Joh. Polycarp. Seubdolum...A. MLCLXVI.

Ars Combinatoria. Francofurti: Apud H.C. Cröckerum, 1690.

Discours de Métaphysique. Edition collationnée avec le texte autographe. Présentée et annotée para Henri LESTIENNE. 3e édition. Paris: Vrin, 1962.

Essais de Théodicée. Sur la bonté de Dieu, la liberté de l'homme et l'origine du mal. Chronologie et introduction para J. BRUNSCHWIG. Paris: Garnier-Flammarion, 1969.

Nuevos Ensayos sobre el Entendimiento Humano. Edición preparada por J. ECHEVERRÍA EZPONDA. Madrid: editora Nacional, 1977.

Escritos Filosóficos. Edición de Ezequiel de OLASO. Notas de Ezequiel de OLASO y Roberto TORRETTI. Buenos Aires: Charchas, 1982.

LIE, Marius Sophus: **Theorie der Transformationsgruppen**. 3 vol. Leipzig, 1893.

LINDEMANN, F.:«Zur Geschichte der Polyeder und Zahlreichen» in **Sitzungen der bayr. Akademie der Wissensch. (Math. Phys. Kl.)**, 26 (1896), S. 625-756.

LORENZO, Javier de: **La Filosofía de la Matemática de Jules Henri Poincaré**. Madrid: Tecnos, 1974.

LORENZO, Javier de: **La Matemática y el problema de su historia**. Madrid: Tecnos, 1977.

LORENZO, Javier de: «Leibniz-Frege, ¿utopías de la razón conceptual?» in **THEORIA**, Segunda Época, Año VI, Nº 14-15 (Octubre 1991), pp. 97-114.

ŁUKASIEWICZ, Jan: **Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic**. Second Edition Enlarged. Oxford: Clarendon Press, 1957.

ŁUKASIEWICZ, Jan: **La silogística de Aristóteles desde el punto de vista de la lógica formal moderna**. Traducción de la 2ª edición por Josefina FERNÁNDEZ ROBLES. Revisión de la traducción por Manuel GARRIDO. Madrid: Tecnos, 1977. (Versión castellana de la obra arriba citada).

PACIOLI, Luca: **La Divina Proporción**. Traducción del italiano, de la edición de 1509, por Ricardo RESTA. Prólogo de Aldo MIELL. Soneto de Rafael ALBERTI. Buenos Aires: Losada, 1946.

PIAGET, Jean: **Essai sur les transformations des opérations logiques. Les 256 opérations ternaires de la logique bivalente des propositions**. Bibliothèque de Philosophie

Contemporaine. Logique et Philosophie des Sciences. Section dirigée par **Jean BACHELARD**. Paris: Presses Universitaires de Frances, 1952.

PIAGET, Jean: Essai de Logique Opératoire. Deuxième édition du Traité de Logique **Essai de Logistique Opératoire** (1949) établie para **Jean Blaise GRIZE**. Avec une introduction de l'auteur à la Deuxième Édition. Paris: Dunod, 1972.

PLATON: Oeuvres complètes. Tome X: **Timée. Critias**. Texte établi et traduit par **Albert RIVAUD** Paris: Les Belles Lettres, 1949.

PLATON: Obras Completas. Traducción del griego, preámbulos y notas por **María ARAUJO, Francisco GARCÍA YAGÜE, Luis GIL, José Antonio MÍGUEZ, María RICO, Antonio RODRÍGUEZ HUÉSCAR** y **Francisco de P. SAMARANCH**. Introducción a Platón por **José Antonio MÍGUEZ**. Madrid: Aguilar, 1969. Octava reimpresión: 1990.

PLUTARQUE: Oeuvres morales. Tome VI: **Dialogues pythiques. Sur la disparition des oracles**. Paris: Les Belles Lettres, 1974.

(Les) PRESOCRATIQUES. Édition établie para **Jean-Paul DUMONT** avec la collaboration de **Daniel DELATTRE** et de **Jean-Louis POIRIER**. Paris: Gallimard, 1988. (Esta es la primera versión francesa completa de la obra clásica de **Hermann DIELS: Die Fragmente der Vorsokratiker** que hemos citado más arriba en estas **Referencias bibliográficas**).

PROCLI DIADOCHI In Primmum Euclidis Elementorum Librum Commentarii. Ed. **FRIEDLEIN**. Leipzig: Teubner, 1873. Reimpresión: 1967.

PROCLUS: Commentaire sur le Timée. Traduction et notes para **A.J. FESTUGIÈRE**. 5 Vol. Paris: Vrin, 1966.

RESCHER, Nicholas: «Leibniz's Interpretation of his Logical Calculi» in **The Journal of Symbolic Logic**, XIX, 1 (March 1954), pp. 1-13.

RONCAGLIA, Gino: «Modality in Leibniz's Essays on Logical Calculus of April 1679» in **Studia Leibnitiana**, XX (1988), 43-62.

SACHS, Eva: De Theaeteto mathematico. (Tesis doctoral). Berlin, 1914.

SACHS, Eva: Die fünf platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer. Berlin: Weidmannische Buchhandlung, 1917.

SACRISTÁN LUZÓN, Manuel: Introducción a la Lógica y al Análisis Formal. Barcelona: Ariel, 1964.

SÁNCHEZ-MAZAS, Miguel:

«1646-1946: El centenario de Leibniz y la Física nueva», folletones de **Arriba**, I: 4.5.1946; II: 7.5.1946.

«La armonía y el número», folletones de **Arriba**, I: 3.3.1948; II: 13.3.1948.

«Sobre un pasaje de Aristóteles y el cálculo lógico de Leibniz» in **Revista de Filosofía**, X (1951), pp. 529-534.

«Notas sobre la Combinatoria de Leibniz» in **THEORIA**, II, 5-6 (Abril-Septiembre 1953), pp. 133-145.

«El intento racionalista de Leibniz» in **Bolívar** (Bogotá), 21 (1953), pp. 59-68.

Formalización de la Lógica según la perspectiva de la comprehensión, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Departamento de Filosofía e Historia de la Ciencia, 1955.

Fundamentos matemáticos de la Lógica Formal, Caracas: Universidad Central de Venezuela, Instituto de Filosofía, 1963.

«Un modèle mathématique de la Logique, peut-il se fonder sur l'intension?» in **Actes de la Société Helvétique des Sciences Naturelles**, Berne, 1977, pp. 361-387.

«Modelli aritmetici per l'informatica giuridica» in **Informaica e Diritto**, IV, 2 (1978), pp. 163-215.

«Simplification de l'arithmétisation leibnizienne de la syllogistique par l'expression arithmétique de la notion intensionnelle du 'Non-Ens'» in A. Heinekamp und F. Schupp (editores): **Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart**, Symposion der Leibniz-Gesellschaft Hannover (10-11 Nov. 1978), Wiesbaden: Steiner, 1979, pp. 46-58.

«La Caractéristique numérique de Leibniz comme méthode de décision» in **Theoria cum Praxi, Akten des III. Internationalen Leibniz-Kongresses** (Hannover, 12-17 Nov. 1977), Wiesbaden. Steiner, 1980, pp. 168-182.

«Un modelo aritmético de la silogística» in **Lógica, Epistemología y Teoría de la Ciencia, Actas del Seminario del I.N.C.I.E.**, Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, 1981, pp. 35-53.

«Une nouvelle méthode de décision immédiate pour la logique déontique» in **Revue européenne des sciences sociales**, XXV, 77 (1987), numéro spécial en hommage à Jean-Blaise Grize, pp. 75-113.

«Identification et analyse des classes d'équivalence de la logique modale para des invariants numériques» in **Logique et Analyse**, XXX, 120 (Dic. 1987), pp. 401-439. Erratum, **Logique et Analyse**, XXXI, 121-122 (Marzo-Junio 1988).

«Un lenguaje aritmético como instrumento de análisis y de decisión en lógica y en derecho» in **Actas del III Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales**. Barcelona: Sección de Lingüística General de la Universidad, 1988, Vol. I, pp. 105-170.

«Essai de représentation par des nombres réels d'une analyse infinie des notions individuelles dans une infinité de mondes possibles» in **Argumentation**, 3, pp. 75-96.

«Théories syllogistiques et déontiques analysées comme structures algébriques» in **THEORIA**, Segunda Época, V, pp. 193-222.

«La Característica numérica de Leibniz como método de decisión» in Simposio **De la Característica al Cálculo, Actas del VII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales** (Vic, Barcelona, Sept. 1991), Barcelona: Sección de Lingüística de la Universidad, 1992.

«Actualisation, développement et perfectionnemetn des calculs logiques arithmético-intensionnels de Leibniz» in **THEORIA**, Segunda Época, VI, 14-15 (octubre 1991), pp. 175-259.

SCHOLZ, Heinrich: **Esquisse d'une Histoire de la Logique**. Traduit de l'allemand par E. COUMET, Fr. de LAUR, J. SEBESTIK. Avant-propos de J. VUILLEMIN. Paris: Aubier-Montaigne, 1968.

SCHRÖDER, Eberhard: **Dürer: Kunst und Geometrie**. Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäuser, 1980.

SERRES, Michel: **Le système de Leibniz et ses modèles mathématique**. 2 vol. Paris: Presses Universitaires de France, 1968.

SERRES, Michel: **Éléments d'Histoire des Sciences**. Paris: Bordas, 1989.

SLEIGH, Robert C.: «Truth and Sufficient Reason in the Philosophy of Leibniz» in M. HOOKER (ed.): **Leibniz. Critical and Interpretative Essays**. Minneapolis, 1982, pp. 209-242.

SOLMSEN, F.: **Die Entwicklung der aristotelischen Logik und Rhetorik**. Neue Philologische Untersuchungen, Heft 4, hrsg. W. JAEGER. Berlin, 1929.

SUIDAS: **Nunc primum integer latinitate donatus... opera & studio Aemilii Porti Franisci Porti Cretensis F. olim** in celeberrima Heidelbergenssi Academia ordinarij linguae Grecae Professoris celeberrimi. Genevae: Apud Petrum de la Rouiere, 1619. I.

TANNERY, Paul: **La Géométrie Grecque**. Première partie. Histoire générale de la Géométrie élémentaire. Paris: Gauthier-Villars, 1887.

THIEL, Christian: «Die Quantität des Inhalts. Zu Leibnizens Erfassung des Intensionsbegriff durch Kalküle und Diagramme» in A. Heinekamp und F. Schupp (editores): **Die intensionale Logik bei Leibniz und in der Gegenwart**. Symposion der Leinbiz-Gesellschaft Hannover (10-11 Nov. 1978), Wiesbaden: Steiner, 1979, pp. 10-23.

THIEL, Christian: «Straightening Leinbiz's Diagram Calculi» in **THEORIA**, Segunda Época, VI, 14-15 (Octubre 1991), 363-368.

VEGA REÑÓN, Luis: **La trama de la demostración: Los griegos y la razón tejedora de pruebas**. Madrid: Alianza Editorial, 1990.

VOGT, Heinrich: **Die Geometrie des Pythagoras**. Bibliotheca mathematica. Leipzig: Teubner, 3F, 1913, IX.

WANG, Hao: **Reflections on Kurt Gödel**. M.I.T., 1987. Reimpresión: 1988.

WANG, Hao: **Kurt Gödel**. Traduit de l'américain par Laura OVION et Michel MÉRIAUX. Paris: Colin, 1990.

WANG, Hao: **Reflexiones sobre Kurt Gödel**. Versión española de Pilar CASTILLO CRIADO. Madrid: Alianza Editorial, 1991. (Las dos obras últimamente citadas son las versiones francesa y castellana de la anterior).

WEYL, Hermann: **The classical groups. Their invariants and representations**. Princeton, 1939.

WEYL, Hermann: **Symmetry**. Princeton University Press, 1952.